

## 1 Задача 1

Расширенный код Хэмминга (8,4) имеет порождающую матрицу в систематической форме:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальное расстояние кода  $d_{\min} = 4$ .

Веса кодовых слов: одно кодовое слово с весом 0 (нулевое), 14 кодовых слов с весом 4, одно кодовое слово с весом 8 (все единицы).

Поскольку код линейный, расстояния между любыми парами кодовых слов равны весам их разностей, которые совпадают с распределением весов кодовых слов: 0 (для одинаковых слов), 4 или 8.

Для вычисления использовался следующий Python-код:

```
import numpy as np

G = np.array([
    [1,0,0,0,0,1,1,1],
    [0,1,0,0,1,0,1,1],
    [0,0,1,0,1,1,0,1],
    [0,0,0,1,1,1,1,0]
], dtype=int) % 2

weights = []
for i in range(16):
    u = np.array([int(b) for b in format(i, '04b')])
    c = (u @ G) % 2
    wt = np.sum(c)
    weights.append(wt)

unique_weights = set(weights)
min_d = min(w for w in weights if w > 0)
print(f'Unique weights: {unique_weights}')
print(f'Min distance: {min_d}'')
```

Результат: Unique weights: 0, 8, 4, Min distance: 4.

Подсчет: 1 слово веса 0, 14 веса 4, 1 веса 8.

## 2 Задача 2

Код Хэмминга (7,4) имеет проверочную матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дуальный код имеет порождающую матрицу  $G^* = H$  (после возможной перестановки столбцов, но свойства сохраняются).

Это (7,3)-код. Симплекс-код (7,3) генерируется столбцами всех ненулевых векторов в  $F_2^3$ , и все ненулевые кодовые слова имеют вес  $2^{3-1} = 4$ .

Проверим веса кодовых слов дуального кода:

Используя аналогичный Python-код:

```
import numpy as np

G_star = np.array([
[0,0,0,1,1,1,1],
[0,1,1,0,0,1,1],
[1,0,1,0,1,0,1]
], dtype=int) % 2

weights = []
for i in range(8):
    u = np.array([int(b) for b in format(i, '03b')])
    c = (u @ G_star) % 2
    wt = np.sum(c)
    weights.append(wt)

print(set(weights))
```

Результат: 0, 4, т.е. все ненулевые имеют вес 4, что соответствует симплекс-коду.

### 3 Задача 3

Код с проверкой на четность (even parity code) для длины  $n$  имеет параметры  $(n, n - 1)$ , проверочную матрицу  $H = (1, 1, \dots, 1)$ .

Дуальный код имеет порождающую матрицу  $G^* = H$ , но поскольку  $H$  имеет ранг 1, дуальный код -  $(n, 1)$ -код повторения: кодовые слова - все нули и все единицы.

Характеристики:  $n$  (длина та же),  $k = 1$ .

Количество кодовых слов:  $2^k = 2$ .

Минимальное расстояние  $d_{\min} = n$  (расстояние между все нули и все единицы).

Исправляет любые комбинации ошибок кратности  $t \leq \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ .