

1 ДЗ 1

(5,2)-код с набором кодовых слов.

Код является линейным, так как сумма любых двух кодовых слов также является кодовым словом.

Для нахождения порождающей матрицы G используем кодовые слова, соответствующие единичным информационным векторам:

- Для ИС 10 (1,0): 01011
- Для ИС 01 (0,1): 10110

Таким образом,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим: для ИС 11 (1,1): $1 \cdot (01011) + 1 \cdot (10110) = 11101$, что соответствует таблице (с учетом GF(2)).

Для нахождения проверочной матрицы H приводим G к систематическому виду.

Сначала меняем строки: новая $G' =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Подматрица первых двух столбцов - переставленная I_2 . Часть P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $H = (P^T \quad I_3) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверим: $GH^T = 0$.

Для вычисления вероятности ошибки при передаче по двоичному симметричному каналу (ДСК) с $p = 10^{-3}$.

Минимальное расстояние $d_{\min} = 3$, код исправляет $t = 1$ ошибку.

Для рассчёта P_e используем МЛ-декодирование по минимальному расстоянию Хэмминга, при ничьей - случайный выбор среди ближайших.

Поскольку $n = 5$ мало, перечисляем все возможные векторы ошибок.

Основной вклад от ошибок кратности 2 (поскольку p мало, $p^2 \approx 10^{-6}$, $p^3 \approx 10^{-9}$).

Есть 10 векторов y с $\text{wt}(y) = 2$:

- 6 из них ближе к другому кодовому слову ($\text{dist}=1$ к другому, $\text{dist}=2$ к отправленному) \rightarrow ошибка с вероятностью 1.

- 4 имеют $\text{dist}=2$ к отправленному и одному другому \rightarrow ничья, ошибка с вероятностью 0.5.

Вклад от $\text{wt}=2$: $(6 \cdot 1 + 4 \cdot 0.5)p^2(1-p)^3 = 8p^2(1-p)^3$.

Вклад от $\text{wt} \geq 3$: $\approx 10p^3(1-p)^2 + \dots \approx 10^{-8}$.
 $P_e = 7.986 \times 10^{-6}$.

2 ДЗ 2

Расстояние Хэмминга $d(x, y)$ определяется как число позиций, в которых символы x и y отличаются.

Покажем, что оно удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $d(x, y) \geq 0$ для всех x, y , и $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Выполняется, поскольку число отличий неотрицательно и равно нулю в случае, когда вектора совпадают.

2. $d(x, y) = d(y, x)$ - по симметрии определения.

3. Неравенство треугольника: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Доказательство: для каждой позиции i , если $x_i \neq z_i$, то хотя бы одно из $x_i \neq y_i$ или $y_i \neq z_i$ должно быть верно (в противном случае $x_i = y_i = z_i$). Таким образом, число позиций, где $x \neq z$, не превышает суммы числа позиций, где $x \neq y$, и где $y \neq z$.

Следовательно, расстояние Хэмминга является метрикой.

3 ДЗ 3

Теорема: Код с минимальным расстоянием d_{\min} исправляет любые комбинации ошибок кратности $t \leq \lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$.

Доказательство: Пусть передано кодовое слово c , принято $r = c + e$, где $\text{wt}(e) \leq t$.

Предположим, что декодер (по ближайшему соседу) декодирует в $c' \neq c$.

По неравенству треугольника: $d(c, c') \leq d(c, r) + d(r, c')$, откуда $d(r, c') \geq d(c, c') - d(c, r) \geq d_{\min} - t$.

Поскольку $t \leq \lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$, то $d_{\min} - t \geq d_{\min} - (d_{\min} - 1)/2 = (d_{\min} + 1)/2 > t = d(c, r)$.

Таким образом, $d(r, c') > d(r, c)$, противоречие с тем, что c' ближе.

Следовательно, ближайшее кодовое словоственно c , и ошибки исправляются.

4 ДЗ 4

Код является линейным (8 кодовых слов, сумма любых двух - кодовое).

Для порождающей матрицы G берём кодовые слова для единичных ИС:

- 100: 110100 → строка 1
- 010: 011010 → строка 2
- 001: 101001 → строка 3

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверим для 111: сумма строк = 000111, соответствует.
Для проверочной матрицы H приводим к систематическому виду.
Столбцы 4,5,6 образуют I_3 .
Таким образом, $G = [P|I_3]$, где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $H = [I_3|P^T] =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$