大学生园地

球面摆的运动方程、数值模拟和实验验证

何广源，黄迺本

（中山大学 物理系，广东 广州 510275）

摘要：讨论了球面摆的运动方程，分析了摆球运动的周期性．通过数值模拟和实验证实了摆球在 e_θ 方向的运动具有周期性．

关键词：球面摆的运动方程；运动周期；数值模拟；实验验证

中图分类号：O 441　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-0712(2006)07-0046-04

对于单摆问题，绝大多数教科书中都是假设摆球只在一个平面上摆动．而在一般情况下单摆的摆动并非被约束在某一个平面上，而是会偏离原来的摆动平面，即摆球是在一个球面上摆动，我们称之为球面摆．在国内，讨论球面摆的文章不多，而通过实验观察球面摆运动轨迹的文章更是鲜见．本文讨论了球面摆的运动方程和运动周期，并通过实验观察球面摆的运动轨迹，重点分析摆球的周期性．

1 理论推导

1.1 摆球的运动方程

考虑一个球面摆，摆绳为一根长度为 l、不可伸长的柔软细绳，故 $\dot{l}=0$．摆球直径足够小，因而可视其为质点，忽略空气阻力及其他摩擦力．在摆球运动过程中，摆绳始终绷直．以绳的悬点为球心，建立球坐标，如图 1．由摆球的受力及牛顿定律可得微分方程：

$$e_\varphi\text{方向：}(\sin\theta)\ddot{\varphi}+(2\cos\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi}=0 \tag{1}$$

$$e_\theta\text{方向：}(\sin\theta\cos\theta)\dot{\varphi}^2-\ddot{\theta}=\frac{g}{l}\sin\theta \tag{2}$$

其中 g 为重力加速度，$0\leqslant\theta<\pi/2$．

1.2 摆球在 e_θ 方向的运动方程、相轨线和运动周期

不失一般性，设初始时刻摆球在 e_θ 方向的摆角为 θ_0，e_φ 方向的位置为 $\varphi_0=0$，初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 沿 e_φ 方向．由式(1)积分可得

$$\dot{\varphi}=\frac{C}{\sin^2\theta} \tag{3}$$

其中，C 为积分常数．将式(3)代入式(2)，可得摆球在 e_θ 方向的运动方程：

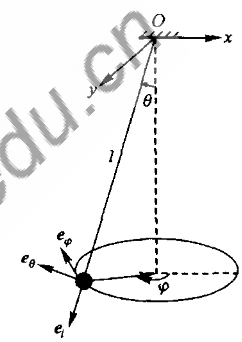

图 1 球面摆示意图

$$(\sin^3\theta)\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin^4\theta=C^2\cos\theta \tag{4}$$

摆球在竖直方向的角动量守恒，分析可知积分常数 C 为一个与小球竖直方向角动量有关的量，且有

$$C=\frac{v_0\sin\theta_0}{l} \tag{5}$$

对式(4)积分一次，可得摆球在 e_θ 方向运动方程的相轨线方程：

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2=\frac{g}{l}\cos\theta-\frac{1}{2}\frac{C^2}{\sin^2\theta}+C_E \tag{6}$$

由于整个系统机械能守恒，分析可知积分常数 C_E 与系统的总能量有关，故有

$$C_E=\frac{v_0^2}{2l^2}-\frac{g\cos\theta_0}{l} \tag{7}$$

式(6)右方是关于 θ 的函数，记为 $f(\theta)$．由式(6)可以看出，只要在区间 $0\leqslant\theta<\pi/2$ 中 $f(\theta)$ 的值大于零，且在区间的两个端点 θ_{min} 与 θ_{max} 有 $f(\theta)=0$，则摆球在 e_θ 方向运动方程的相轨线是简单的闭合曲线，即摆球在 e_θ 方向的运动方程具有周期性．再对式(6)积分，可得摆球在 e_θ 方向的运动周期为

收稿日期：2005-06-08；**修回日期**：2006-01-23

作者简介：何广源(1984—)，男，广东佛山人，中山大学物理系 03 级本科生．

$$T_\theta = 2\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}\cos\theta - \frac{C_E^2}{\sin^2\theta} + 2C_E}}\mathrm{d}\theta \qquad (8)$$

其中 C、C_E 分别由式(5)和式(7)给出.由式(8)可知,对于给定的长度为 l 的摆绳,摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向运动的周期还决定于摆球的初始摆角 θ_0 和初速度 $\boldsymbol{v}_0$,这是非线性振动的特点.

1.3 摆球在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的运动

将式(3)对时间积分,并联系式(6),可得摆球在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向运动的积分表达式:

$$\varphi = \int \frac{C}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}\cos\theta - \frac{C^2}{\sin^2\theta} + 2C_E}}\mathrm{d}\theta \qquad (9)$$

若摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向运动一个周期,则在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的移动量为

$$\Delta\varphi_T = 2\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{C}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}\cos\theta - \frac{C^2}{\sin^2\theta} + 2C_E}}\mathrm{d}\theta \qquad (10)$$

由摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的运动具有周期性和式(3)可知,φ 也具有周期性,且周期为 T_θ.

1.4 摆球运动的周期性讨论

记 $\gamma = 2\pi/\Delta\varphi_T$,若 γ 为有理数,并记 $\gamma = p/q$ 为其最简约分式($p, q \in \mathbb{N}$),则摆球运动的轨迹是一条闭合曲线,摆球的运动具有周期性,且周期为

$$T = pT_\theta$$

若 γ 为无理数,则摆球的运动轨迹是不闭合的,摆球的运动没有周期性或周期为无穷大.

γ 的值由初始条件决定,只要初始条件有所改变,γ 就可能由有理数变为无理数,或由无理数变为有理数.因此,摆球运动的周期性对初始条件是十分敏感的,也就是说,摆球运动的周期性是不稳定的,很容易受到外界的影响.

2 摆球运动过程的数值模拟

把式(1)和(2)写成:

$$\ddot{\varphi} = (-2\cot\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$\ddot{\theta} = (\sin\theta\cos\theta)\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\sin\theta$$

在 mathematica 软件中,以 $l = 49.3$ cm,$\varphi_0 = 0$,$\dot{\varphi}_0 = 3.39$ rad/s,$\theta_0 = 0.191$ rad,$\dot{\theta}_0 = 0$ 为初始条件,运用欧拉算法对方程进行数值模拟,可得到摆球运动的水平投影之轨迹、$\boldsymbol{e}_\theta$ 方向运动的相轨线图像、$\boldsymbol{e}_\theta$ 方向和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向运动的图像,分别如图 2、图 3、图 4 和图 5 所示.由图 3 可见,相轨线为一条闭合曲线,说明摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的运动具有周期性,由图 4 也可以得到周期为 $T_\theta' = 0.71$ s,与数值计算相符.

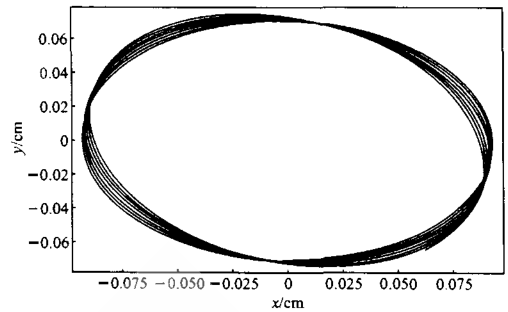

图 2 球面摆轨迹的模拟

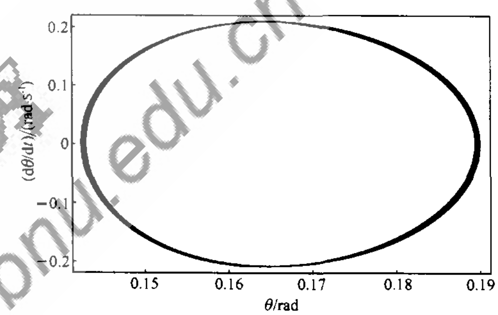

图 3 摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向运动的相轨

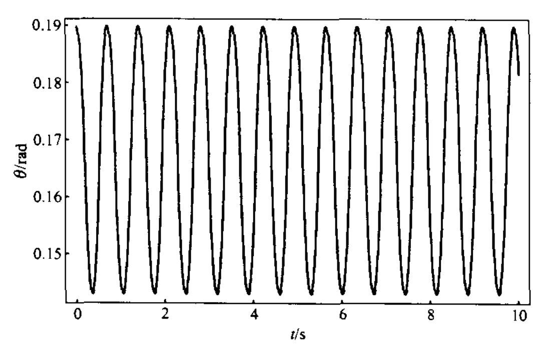

图 4 摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向运动的模拟

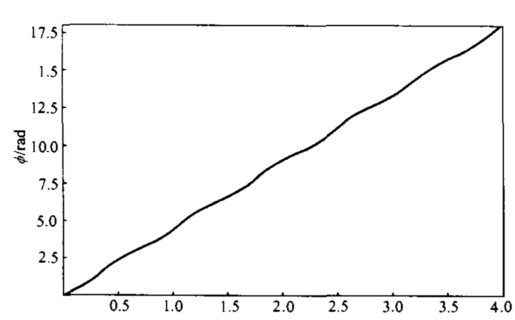

图 5 摆球在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的运动模拟

3 实验验证

3.1 实验装置

实验装置如图6所示.

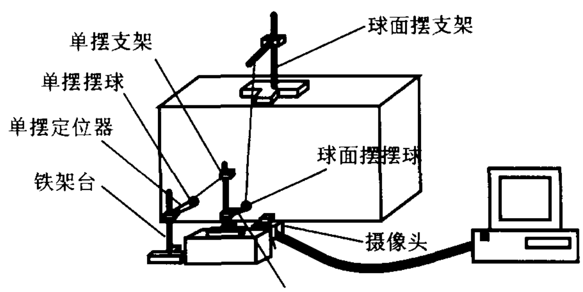

图6 实验装置

3.2 实验原理

单摆在预定高度自由下落,并在最低点与球面摆碰撞.因为两摆球质量相同,所以两摆球碰撞后交换速度,由此可以确定球面摆摆球的初始速度.通过调整两摆球定位器的位置,可以调节球面摆的位置,使摆球初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向相同,并使两摆球刚好发生正碰.用摄像头拍下球面摆摆球的运动过程以供分析.

3.3 实验记录

摆球参数记录如表1所示.

表1 摆球参数记录表

	摆球质量/g	摆球直径/cm	摆绳长/cm	初摆角/rad
球面摆	15.5	2.204	48.2	0.186
单摆	15.6	2.202	58.8	0.131

摄像头软件参数设置:帖率为10.00帖/s;输出大小为320×240.

由以上数据得球面摆初始数据:

$l=49.3$ cm, $\varphi_0=0$, $\dot{\varphi}_0=3.39$ rad/s, $\theta_0=0.191$ rad, $\dot{\theta}_0=0$(与数值模拟的初始数据相同).

3.4 实验结果与分析

利用 Windows Media Player 逐帖播放拍下的文件,同时把图像屏幕捉取到 Photoshop 中,得到摆球位置的数据.把数据输入 Matlab 软件,作图得到图7.由图可见,球面摆摆球运动的水平投影之轨迹像缓慢旋转的椭圆轨迹.由摆球的位置数据及悬挂点的位置,分析可得摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的运动图像,如图8和图9所示.

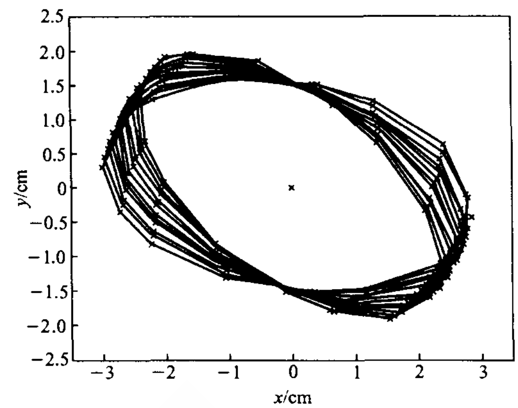

图7 球面摆水平投影的轨迹

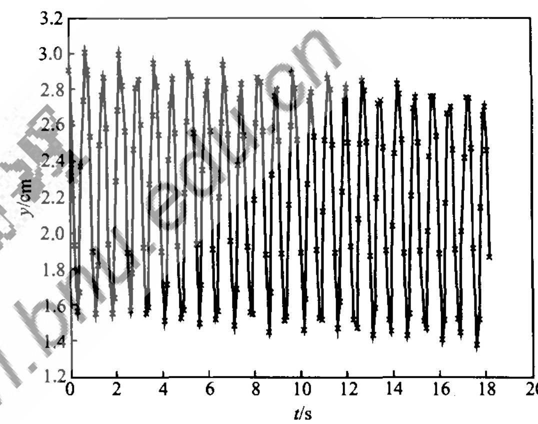

图8 摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的运动

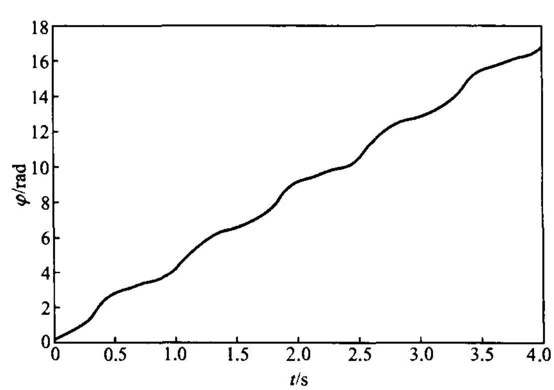

图9 摆球在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的运动

图8为摆球在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的运动图像,由图可见,$\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的运动具有周期性,周期为

$$T_\theta=\frac{18}{24}\text{ s}=0.75\text{ s}$$

在式(8)中代入数据并作数值积分得 $T'_\theta=0.71$ s.实验值的相对误差为

$$E_T=\frac{|T_\theta-T'_\theta|}{T'_\theta}=5.7\%$$

图8曲线的极值出现了一大一小起伏,这是由

于摄像头的光学透镜的不对称引起的，而曲线的整体下降则是存在空气阻尼所引起的. 图 9 为摆球在 e_φ 方向的运动图像，分析可知，摆球在 e_θ 方向运动一个周期（$T_\theta=0.75$ s）时，在 e_φ 方向移动量的平均值为

$$\Delta\varphi_T = 3.16 \text{ rad}$$

在式（10）中代入数据并进行数值积分得

$$\Delta\varphi_T' = 3.17 \text{ rad}$$

实验值的相对误差为

$$E_{\Delta\varphi_T} = \frac{|\Delta\varphi_T - \Delta\varphi_T'|}{\Delta\varphi_T'} = 0.4\%$$

4　理论计算、数值模拟与实验结果的比较

实验得到的摆球的轨迹（图 7）与数值模拟得到的轨迹（图 2）形状相同，在 e_θ 方向运动的图像（图 4 与图 8）也基本相符. 而实验得到的 e_θ 方向的运动周期与理论计算得到的结果也较为接近. 说明球面摆摆球的运动与式（1）和式（2）所描述的运动相符合. 实验得到的摆球在 e_θ 方向的周期与计算值的相对误差为 $E_T=5.7\%$，之所以出现这么大的误差，主要原因是球面摆的摆球与单摆的摆球碰撞后，在刚开始运动时，会与其定位器产生摩擦，使摆球的初速度比预设值小，从而导致其周期比预计值偏大.

5　结论

球面摆的运动是非线性的二维摆动. 我们从理论和实验上均得到结论：球面摆的摆球在 e_θ 方向的运动具有周期性，但是，摆球的二维运动不一定具有周期性. 仅在 γ 为有理数的条件下，摆球的二维运动才具有周期性. 而且由于球面摆很容易受到外部干扰，γ 值很不稳定，其值会不断在有理数和无理数之间变化，使得摆球的周期性很不稳定.

参考文献：

[1]　陆同兴. 非线性物理概论[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2002.

[2]　莫克威. 偏摆对单摆振动周期的影响[J]. 物理实验，1996，16(4)：189.

[3]　赵凯华，罗蔚茵. 新概念物理教程：力学[M]. 北京：高等教育出版社，2000.

[4]　向裕民. 摆球的二维摆动[J]. 重庆大学学报，2000，23(6)：49～52.

[5]　潘武明. 牛顿动力学方程的数值解法[J]. 高等函授学报，2002，15(1)：22～23.

The equation of motion, numerical calculation and experiment for two-dimensional vibration

HE Guang-yuan, HUANG Nai-ben

(Department of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The equation of motion for a spherical surface vibration is studied, and the period is analysed. The period of the e_θ direction motion of the vibration is also verified by numerical calculation and experiment.

Key words: equation of motion for the spherical surface vibration; periodicity of motion; numerical calculating; experiment

（上接 21 页）

Thermal equilibrium of system with negative heat capacity

YANG Xiao-rong[1], GUAN Jing[2]

(1. Science College of Tibet University, Lhasa 850000, China;
2. Department of PhySics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: Making a postil for instability of system with negative heat capacity, for example black hole, mentioned in "Mechanics of new concept physics" and "Heat of new concept physics".

Key words: black hole; system with negative heat capacity; stable thermal equilibrium