COMPUTERGESTÜTZTE MUSIKFORSCHUNG 1

Institut für Musikinformatik und Musikwissenschaft
Wintersemester 2025–26

Christophe Weis
christophe.weis@stud.hfm.eu

Woche 04
04.11.2025

Organisation

wöchentlich, Di. 14.30–16.00, K10 Raum 309

Modul **Music Processing**

- **BA MI (HF)/MW (EF), wiss. Schwerpunkt:** Pflicht (4. Semester)
- **BA MI (HF)/MW (EF), künstl. Schwerpunkt:** Wahlpflicht (6. Semester)
- **BA MW (HF)/MI (EF):** Pflicht (4. Semester) – reduzierter Arbeitsaufwand
- **BA MI/MW (KF):** Pflicht (4. Semester)
- **BA:** Wahlfach

Projektarbeit

- eine selbstständige praktische Arbeit aus den Bereichen Musikkodierung, symbolbasierte Musikverarbeitung und –analyse mit Dokumentation (ca. 5000 Zeichen)

Übungen

- Tutorin: Joanna Friedrich-Sroka
- wöchentlich, Di. 11.15–12.45, K10 Raum 309

10.

Distanzmaße

Distanzmaße

Distanzmaße sind **Funktionen**, die die Distanz – oder auch die „Unähnlichkeit“ – zwischen 2 Objekten[1] messen.

Grundlegende Eigenschaften:

- Je weiter entfernt 2 Objekte voneinander oder je unähnlicher sich 2 Objekte sind, desto größer die Distanz zwischen diesen Objekten.
- Sind 2 Objekte komplett identisch, dann ist die Distanz zwischen diesen Objekten gleich 0.

[1] Das können z. B. 2 Datenpunkte, 2 Punkte im Raum, 2 Melodien, 2 Wörter, ... sein

Distanzmaße

Distanzmaße sind **Funktionen**, die die Distanz – oder auch die „Unähnlichkeit“ – zwischen 2 Objekten messen.

Mathematische Definition:

- Ein **Distanzmaß** $\boldsymbol{d}$ ist eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

  (1) für ein beliebiges Objekt x gilt: $\boldsymbol{d(x,x) = 0}$ → „Die Distanz eines Objekts zu sich selbst ist gleich 0.“

  (2) für 2 unterschiedliche Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{d(x,y) > 0}$ → „Die Distanz zwischen zwei unterschiedlichen Objekten ist größer als 0.“

  (3) für 2 beliebige Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{d(x,y) = d(y,x)}$ → „Die Distanz von x nach y ist gleich groß wie die Distanz von y nach x.“

- Eine **Metrik** ist ein Distanzmaß, das zusätzlich die sogenannte *Dreiecksungleichung* erfüllt:

  (4) für beliebige Objekte x, y und z gilt: $\boldsymbol{d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)}$ → „Der direkte Weg ist kürzer als der Weg über einen Umweg.“

Beispiele: Distanzen zwischen Punkten

Beispiele im **2-dimensionalen euklidischen Raum**, zum Beispiel zum Vergleichen von Datenpunkten:

- **Euklidische Distanz:**

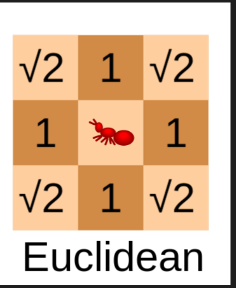
$$d_{\mathrm{E}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Beispiele: Distanzen zwischen Punkten

Beispiele im **2-dimensionalen euklidischen Raum**, zum Beispiel zum Vergleichen von Datenpunkten:

- **Euklidische Distanz:**

$$d_{\mathrm{E}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

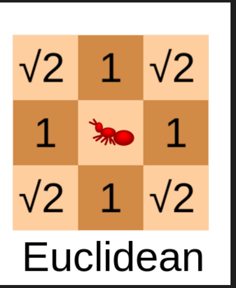


Beispiele: Distanzen zwischen Punkten

Beispiele im **2-dimensionalen euklidischen Raum**, zum Beispiel zum Vergleichen von Datenpunkten:

- **Euklidische Distanz:**

$$d_{\mathrm{E}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



- **Manhattan-Distanz / Taxicab-Distanz:**

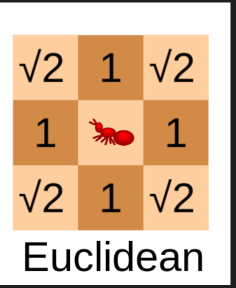
$$d_{\mathrm{M}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Beispiele: Distanzen zwischen Punkten

Beispiele im **2-dimensionalen euklidischen Raum**, zum Beispiel zum Vergleichen von Datenpunkten:

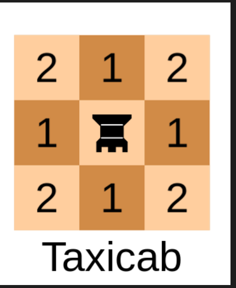
- **Euklidische Distanz:**

$$d_{\mathrm{E}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



- **Manhattan-Distanz / Taxicab-Distanz:**

$$d_{\mathrm{M}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

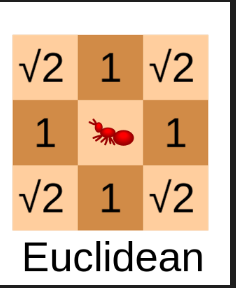


Beispiele: Distanzen zwischen Punkten

Beispiele im **2-dimensionalen euklidischen Raum**, zum Beispiel zum Vergleichen von Datenpunkten:

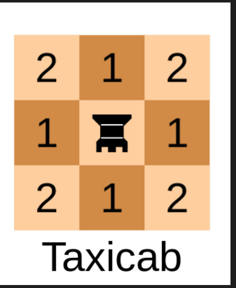
- **Euklidische Distanz:**

$$d_{\mathrm{E}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



- **Manhattan-Distanz / Taxicab-Distanz:**

$$d_{\mathrm{M}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



-

- **Maximum-Distanz / Tschebyschew-Distanz:**

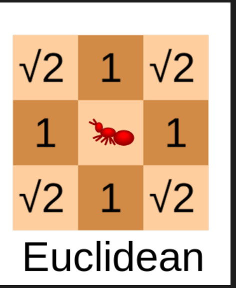
$$d_{\mathrm{T}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Beispiele: Distanzen zwischen Punkten

Beispiele im **2-dimensionalen euklidischen Raum**, zum Beispiel zum Vergleichen von Datenpunkten:

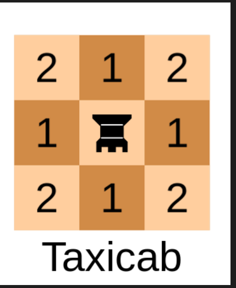
- **Euklidische Distanz:**

$$d_{\mathrm{E}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



- **Manhattan-Distanz / Taxicab-Distanz:**

$$d_{\mathrm{M}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



- **Maximum-Distanz / Tschebyschew-Distanz:**

$$d_{\mathrm{T}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space#/media/File:Minkowski_distance_examples.svg

Beispiel: Distanzen zwischen Strings

Beispiele **für String-Metriken/Editierdistanzen**, zum Vergleichen von Zeichenketten:

- **Levenshtein-Distanz:**
  Entspricht der Mindestanzahl an Operationen „Einfügen“, „Löschen“ und „Ersetzen“ einzelner Zeichen, die erforderlich sind, um ein Wort in ein anderes umzuwandeln.

  Beispiel:
  Levenshtein-Distanz(PFERD, PFADE) = ?

Beispiel: Distanzen zwischen Strings

Beispiele **für String-Metriken/Editierdistanzen**, zum Vergleichen von Zeichenketten:

- **Levenshtein-Distanz:**
  Entspricht der Mindestanzahl an Operationen „Einfügen", „Löschen" und „Ersetzen" einzelner Zeichen, die erforderlich sind, um ein Wort in ein anderes umzuwandeln.

  Beispiel:
  Levenshtein-Distanz(PFERD, PFADE) = 3

  Eine Umwandlung von PFERD zu PFADE erfolgt z. B. über den folgenden (minimalen) Weg:

  PFERD

  PFE–D (Löschen eines Zeichens)

  PF**A**D (Ersetzen eines Zeichens)

  PFAD**E** (Einfügen eines Zeichens)

Beispiel: Distanzen zwischen Strings

Beispiele **für String-Metriken/Editierdistanzen**, zum Vergleichen von Zeichenketten:

- **Hamming-Distanz:**
  Entspricht für zwei Zeichenfolgen gleicher Länge der Anzahl der Stellen mit unterschiedlichen Symbolen

- **Jaro-Distanz:**
  Bestimmt die Distanz zwischen zwei Zeichenketten anhand der gemeinsamen Zeichen und der Menge an Transpositionen, die erforderlich sind, um ein Wort in ein anderes umzuwandeln.

11.

Ähnlichkeitsmaße

Ähnlichkeitsmaße

Ähnlichkeitsmaße (engl.: *similarity measures*) sind **Funktionen**, die die Ähnlichkeit zwischen 2 Objekten[1] messen.

Grundlegende Eigenschaften:

- Je näher 2 Objekte aneinander liegen oder je ähnlicher sich 2 Objekte sind, desto größer die Ähnlichkeit zwischen diesen Objekten.
- Sind 2 Objekte komplett identisch, dann ist die Ähnlichkeit zwischen diesen Objekten maximal.

[1] Das können z. B. 2 Datenpunkte, 2 Punkte im Raum, 2 Melodien, 2 Wörter, ... sein

Ähnlichkeitsmaße

Ähnlichkeitsmaße (engl.: *similarity measures*) sind **Funktionen**, die die Ähnlichkeit zwischen 2 Objekten messen.

Mathematische Definition:

Ein **Ähnlichkeitsmaß** s ist eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) für 2 beliebige Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{s(x,y) = s(y,x)}$

„Die Ähnlichkeit von *x* zu *y* ist gleich groß wie die Ähnlichkeit von *y* zu *x*.“

(2) für 2 unterschiedliche Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{s(x,x) > s(x,y)}$

„Ein Objekt ist sich selbst ähnlicher als allen anderen Objekten.“

Häufige definiert man zwei zusätzliche Bedingungen:

(3) für 2 beliebige Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{s(x,y) \geq 0}$

„Wie ähnlich sich zwei Objekte sind, wird häufig über eine positive Zahl dargestellt.“

(4) für ein beliebiges Objekt x gilt: $\boldsymbol{s(x,x) = 1}$

„Die maximale Ähnlichkeit, also die Ähnlichkeit eines Objekts mit sich selbst, wird häufig auf den Wert 1 festgelegt.“

Beispiel: Jaccard-Index

Der **Jaccard-Index**: ein Maß für die **Ähnlichkeit zweier Mengen**

- Für 2 Mengen A und B ist der Jaccard-Index definiert durch die Formel

  $$\text{Jaccard-Index}(A, B) := \frac{\text{Anzahl der gemeinsamen Elemente}}{\text{Anzahl der verschiedenen Elemente insgesamt}}$$

- *Beispiel*:

  Für die Mengen $A = \{1,2,3,4,5\}$ und $B = \{1,2,3,4,6\}$ beträgt der Jaccard-Index:

  $\text{Jaccard-Index}(A, B) = \ ?$

Beispiel: Jaccard-Index

Der **Jaccard-Index**: ein Maß für die **Ähnlichkeit zweier Mengen**

- Für 2 Mengen A und B ist der Jaccard-Index definiert durch die Formel

  $$\text{Jaccard-Index}(A,\ B) := \frac{\text{Anzahl der gemeinsamen Elemente}}{\text{Anzahl der verschiedenen Elemente insgesamt}}$$

- *Beispiel*:

  Für die Mengen $A = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$ und $B = \{1{,}2{,}3{,}4{,}6\}$ beträgt der Jaccard-Index:

  $$\text{Jaccard-Index}(A,\ B) = \frac{4\ (\text{Anzahl der gemeinsamen Elemente})}{6\ (\text{Anzahl der verschiedenen Elemente insgesamt})} = \frac{2}{3} \cong 0.667$$

Beispiel: Ähnlichkeiten zwischen Strings

- **Longest-Common-Subsequence:**
  Entspricht der Mindestanzahl an den Operationen „Einfügen“ und „Löschen“ einzelner Zeichen, die erforderlich sind, um ein Wort in ein anderes umzuwandeln.
  Ermittelt die Länge der längsten gemeinsamen Teilsequenz zwischen zwei Zeichensequenzen.

- In einem späteren Kapitel **„Alignment“** werden wir zwei zusätzliche Algorithmen sehen, die die Ähnlichkeit zwischen zwei Zwischenketten messen:

  - den **Needleman-Wunsch-Algorithmus**
  - und den **Smith-Waterman-Algorithmus**

  Die Implementierung dieser beiden Algorithmen ist vergleichbar mit der Implementierung der Levenshtein-Distanz.

  Zusätzlich zu einem numerischen Wert für die Ähnlichkeit von zwei Zeichenketten, liefern beide Verfahren auch ein sogenanntes optimales **Alignment** zwischen diesen Zeichenketten.

Beispiel: Kosinus-Ähnlichkeit

Die **Kosinus-Ähnlichkeit** (***Cosine Similarity***): ein Maß für die **Ähnlichkeit zweier Vektoren**

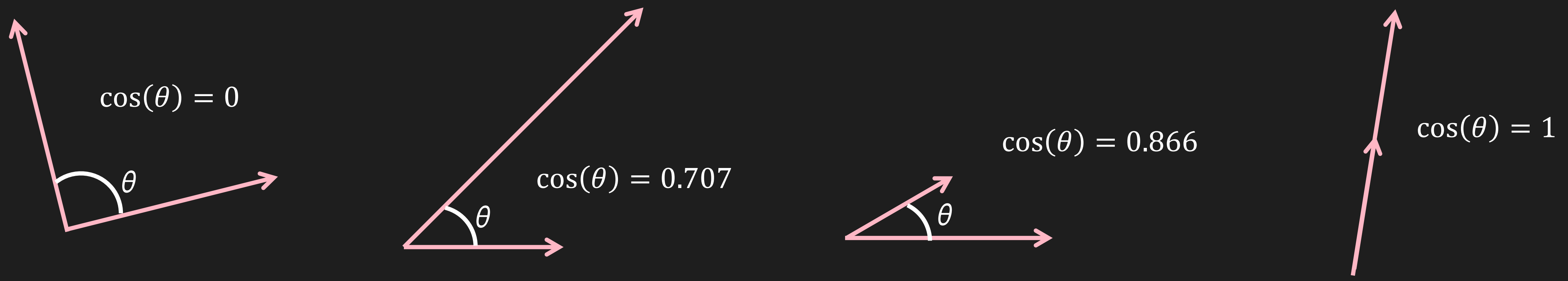
- Drückt aus, „wie ausgeprägt zwei Vektoren in die gleiche Richtung zeigen"
- Formel für zwei Vektoren **x** und **y**:

$$\text{Kosinus–Ähnlichkeit}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \cos(\theta) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$ (wobei θ der Winkel zwischen **x** und **y** ist)

Notation in dieser Formel:

- $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ ist das Skalarprodukt der Vektoren **x** und **y**,
- $\|\mathbf{x}\|$ und $\|\mathbf{y}\|$ sind die Normen der beiden Vektoren.

- *Beispiele:*



Beispiel: Kosinus-Ähnlichkeit

Die **Kosinus-Ähnlichkeit** (***Cosine Similarity***): ein Maß für die **Ähnlichkeit zweier Vektoren**

- Drückt aus, „wie ausgeprägt zwei Vektoren in die gleiche Richtung zeigen“
- Formel für zwei Vektoren **x** und **y**:

$$\text{Kosinus–Ähnlichkeit}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \cos(\theta) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$ (wobei θ der Winkel zwischen **x** und **y** ist)

- *Wichtige Eigenschaft:*
  Der Wert hängt nicht von den Normen der Vektoren ab, sondern **nur vom Winkel zwischen den Vektoren**, zum Beispiel:

  - **proportionale Vektoren** haben eine Kosinus-Ähnlichkeit von 1
  - **orthogonale Vektoren** („Vektoren, die keine Ähnlichkeit aufweisen“) haben eine Kosinus-Ähnlichkeit von 0
  - **entgegengesetzte Vektoren** haben eine Kosinus-Ähnlichkeit von -1

Beispiel: Kosinus-Ähnlichkeit

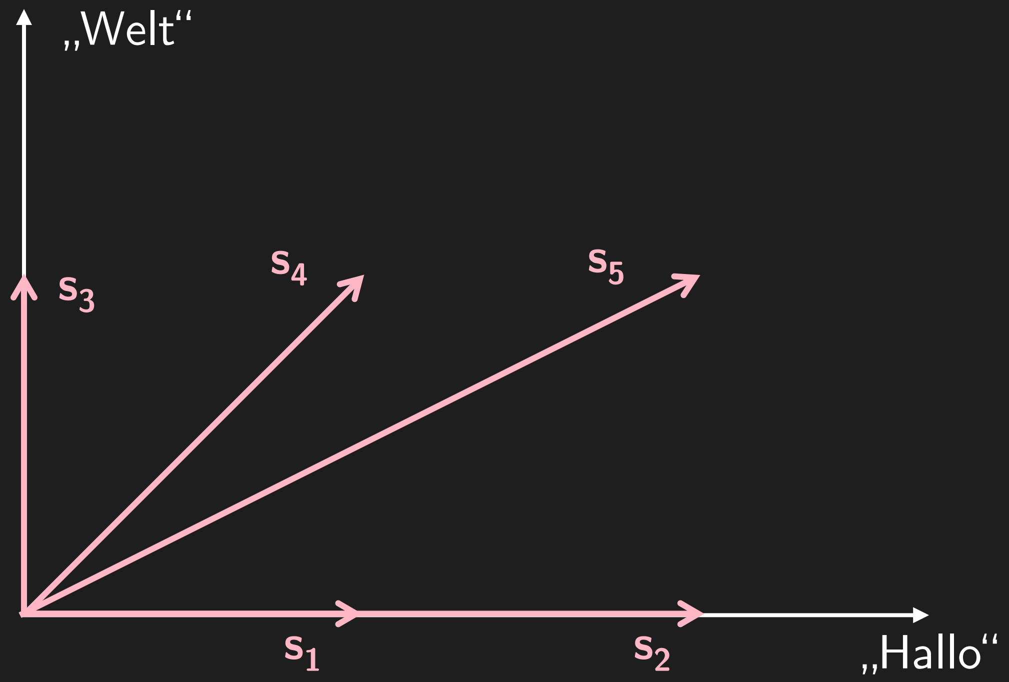
- Anwendungsbeispiel: Bestimmung der Ähnlichkeit von Zeichensequenzen und Dokumenten
- *Beispiel:*

Sequenz $\mathbf{s_1}$ = „Hallo!“,	kodiert als Vektor $\mathbf{s_1} = (1, 0)$
Sequenz $\mathbf{s_2}$ = „Hallo, hallo!“,	kodiert als Vektor $\mathbf{s_2} = (2, 0)$
Sequenz $\mathbf{s_3}$ = „Welt!“,	kodiert als Vektor $\mathbf{s_3} = (0, 1)$
Sequenz $\mathbf{s_4}$ = „Hallo Welt!“,	kodiert als Vektor $\mathbf{s_4} = (1, 1)$
Sequenz $\mathbf{s_5}$ = „Hallo Welt, hallo!“,	kodiert als Vektor $\mathbf{s_5} = (2, 1)$

Beispiel: Kosinus-Ähnlichkeit

- Anwendungsbeispiel: Bestimmung der Ähnlichkeit von Zeichensequenzen und Dokumenten
- *Beispiel:*

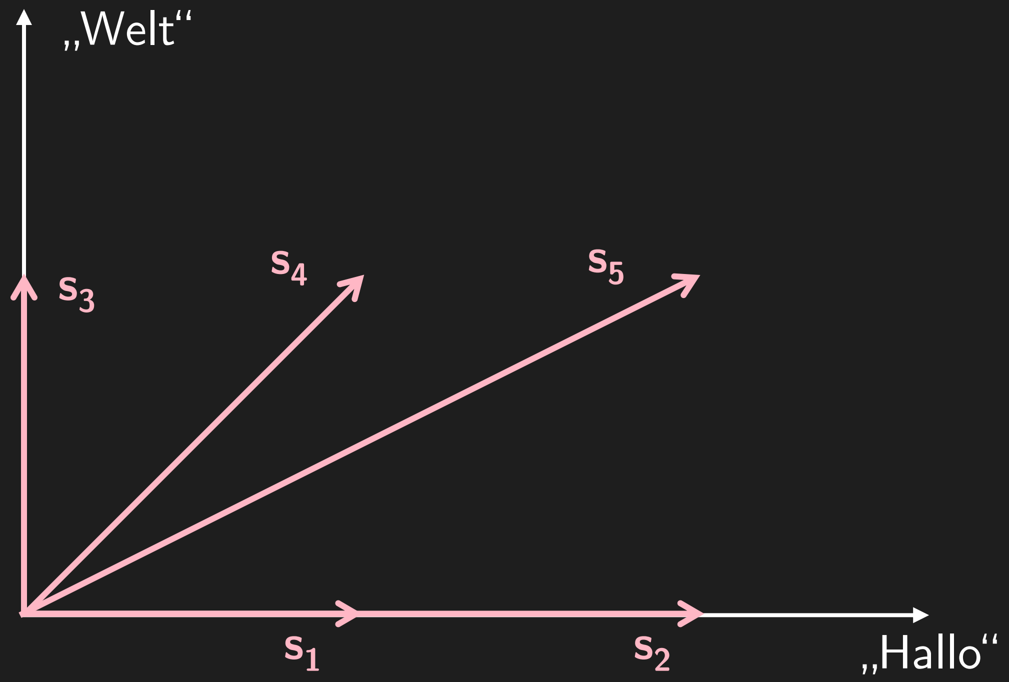
Sequenz $\mathbf{s_1}$ = „Hallo!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s_1} = (1, 0)$
Sequenz $\mathbf{s_2}$ = „Hallo, hallo!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s_2} = (2, 0)$
Sequenz $\mathbf{s_3}$ = „Welt!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s_3} = (0, 1)$
Sequenz $\mathbf{s_4}$ = „Hallo Welt!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s_4} = (1, 1)$
Sequenz $\mathbf{s_5}$ = „Hallo Welt, hallo!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s_5} = (2, 1)$



Beispiel: Kosinus-Ähnlichkeit

- Anwendungsbeispiel: Bestimmung der Ähnlichkeit von Zeichensequenzen und Dokumenten
- *Beispiel:*

Sequenz $\mathbf{s}_1$ = „Hallo!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s}_1 = (1, 0)$
Sequenz $\mathbf{s}_2$ = „Hallo, hallo!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s}_2 = (2, 0)$
Sequenz $\mathbf{s}_3$ = „Welt!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s}_3 = (0, 1)$
Sequenz $\mathbf{s}_4$ = „Hallo Welt!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s}_4 = (1, 1)$
Sequenz $\mathbf{s}_5$ = „Hallo Welt, hallo!“, kodiert als Vektor $\mathbf{s}_5 = (2, 1)$

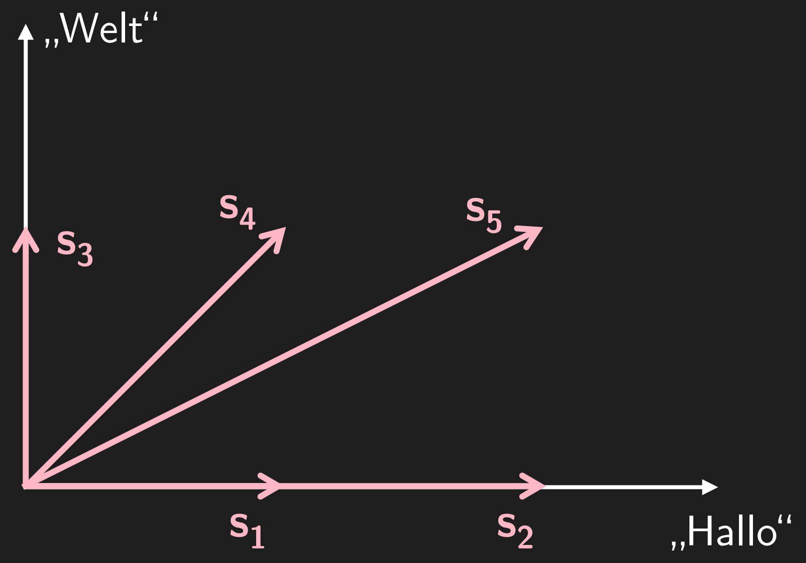


Kosinus-Ähnlichkeit$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 1$
Kosinus-Ähnlichkeit$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3) = 0$
Kosinus-Ähnlichkeit$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 1$
Kosinus-Ähnlichkeit$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_4) = 0.707$
Kosinus-Ähnlichkeit$(\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4) = 0.707$
Kosinus-Ähnlichkeit$(\mathbf{s}_4, \mathbf{s}_5) = 0.949$
…

Distanz- / Ähnlichkeits-Matrizen

- Distanzen (bzw. Ähnlichkeiten) zwischen verschiedenen Elementen einer Menge können in Form von **Distanz-Matrizen (bzw. Ähnlichkeits-Matrizen)** dokumentiert werden.
- Form dieser Matrizen: **symmetrisch & quadratisch**

Sequenz $\mathbf{s_1}$ = „Hallo!", kodiert als Vektor $\mathbf{s_1} = (1, 0)$
Sequenz $\mathbf{s_2}$ = „Hallo, hallo!", kodiert als Vektor $\mathbf{s_2} = (2, 0)$
Sequenz $\mathbf{s_3}$ = „Welt!", kodiert als Vektor $\mathbf{s_3} = (0, 1)$
Sequenz $\mathbf{s_4}$ = „Hallo Welt!", kodiert als Vektor $\mathbf{s_4} = (1, 1)$
Sequenz $\mathbf{s_5}$ = „Hallo Welt, hallo!", kodiert als Vektor $\mathbf{s_5} = (2, 1)$



Ähnlichkeits-Matrix:

	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_3}$	$\mathbf{s_4}$	$\mathbf{s_5}$
$\mathbf{s_1}$	1	1	0	0.707	0.894
$\mathbf{s_2}$	1	1	0	0.707	0.894
$\mathbf{s_3}$	0	0	1	0.707	0.447
$\mathbf{s_4}$	0.707	0.707	0.707	1	0.949
$\mathbf{s_5}$	0.894	0.894	0.447	0.949	1

Distanz $\leftrightarrow$ Ähnlichkeit

- Distanzmaße und Ähnlichkeitsmaße sind ineinander konvertierbare Konzepte.[1]

- *Beispiel 1:*
  Ist d ein Distanzmaß, dann definiert zum Beispiel die Formel

$$s = 1 - d$$

  ein Ähnlichkeitsmaß s, bei dem die Eigenschaften (1), (2) und (4) aus der Definition für Ähnlichkeitsmaße erfüllt sind. Es gilt also:

  (1) für 2 beliebige Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{s(x, y) = s(y, x)}$

  (2) für 2 unterschiedliche Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{s(x, x) > s(x, y)}$

  (4) für ein beliebiges Objekt x gilt: $\boldsymbol{s(x, x) = 1}$

[1] Wobei die Formel für die Konvertierung vom Kontext und den gegebenen Wertebereichen abhängig sein kann.

Distanz $\leftrightarrow$ Ähnlichkeit

- Distanzmaße und Ähnlichkeitsmaße sind ineinander konvertierbare Konzepte.[1]

- *Beispiel 2:*
  Ist d ein Distanzmaß, das maximal den Wert $d_{\max}$ annimmt, dann definiert zum Beispiel die Formel

$$s \;=\; 1 - \frac{d}{d_{\max}}$$

ein Ähnlichkeitsmaß s, bei dem alle Eigenschaften (1), (2), (3) und (4) aus der Definition für Ähnlichkeitsmaße erfüllt sind. Es gilt also:

(1) für 2 beliebige Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{s(x,y) = s(y,x)}$

(2) für 2 unterschiedliche Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{s(x,x) > s(x,y)}$

(3) für 2 beliebige Objekte x und y gilt: $\boldsymbol{s(x,y) \geq 0}$

(4) für ein beliebiges Objekt x gilt: $\boldsymbol{s(x,x) = 1}$

[1] Wobei die Formel für die Konvertierung vom Kontext und den gegebenen Wertebereichen abhängig sein kann.

Distanz ↔ Ähnlichkeit

- Distanzmaße und Ähnlichkeitsmaße spielen in vielen Anwendung der Datenverarbeitung eine wichtige Rolle: Machine-Learning, Language Processing, (Music) Information Retrieval, Statistik, Pattern Recognition, ...

- Wegen der Dualität der Konzepte findet man für Distanzmaße oft auch den Begriff *„dissimilarity measure"*.

- Weiterführende Informationen mit vielen Anwendungen und Beispielen gibt's zum Beispiel hier: https://arxiv.org/html/2408.07706v1