TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Toán rời rạc

Nguyễn Khánh Phương

Bộ môn Khoa học máy tính
E-mail: phuongnk@soict.hust.edu.vn

Tài liệu tham khảo chính

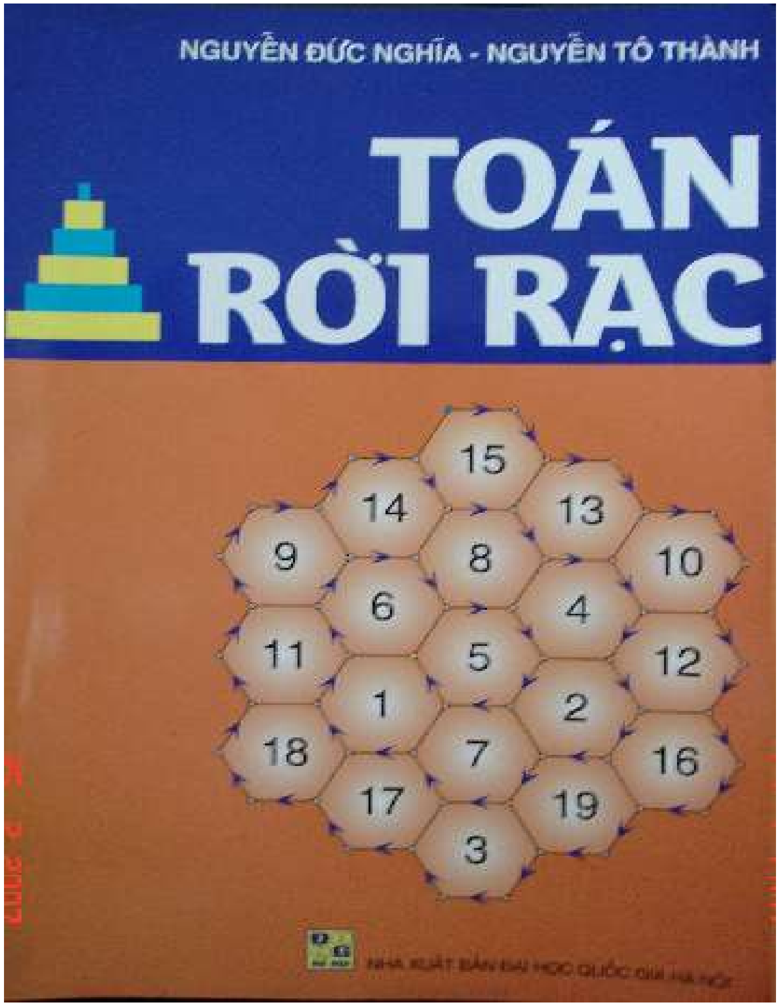
Nguyễn Đức Nghĩa,

Nguyễn Tô Thành

TOÁN RỜI RẠC

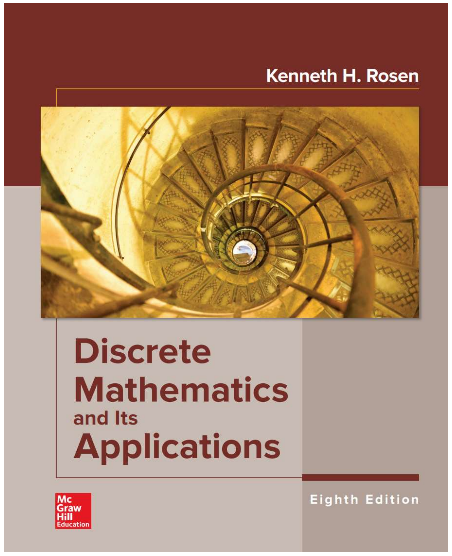
(in lần thứ ba)

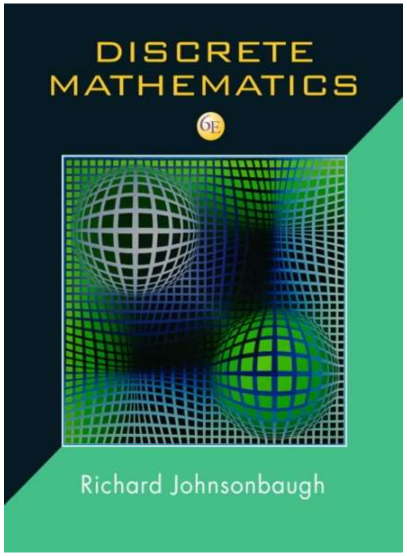
Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 2003, 290 trang

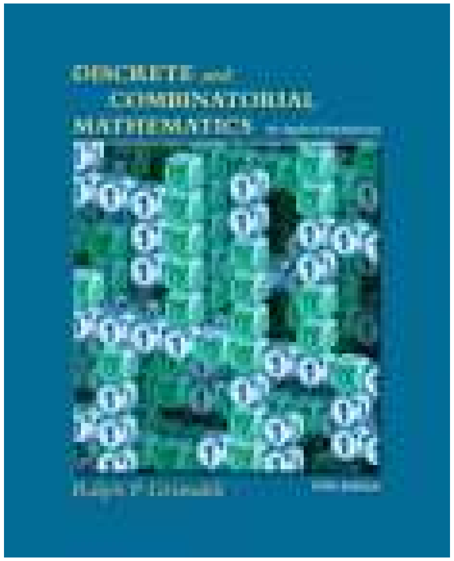


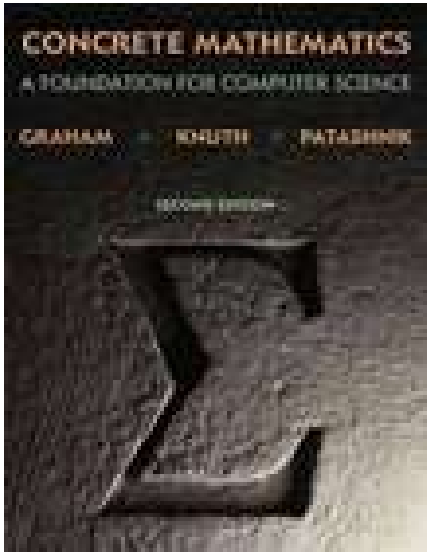
Tài liệu tham khảo

1. **Rosen K.H.** *Discrete Mathematics and its Applications (8th Editions).* McGraw - Hill Book Company, 2019.
2. **Johnsonbaugh R.** *Discrete Mathematics.* Prentice Hall Inc., N. J., 1997.
3. **Grimaldi R.P.** *Discrete and Combinatorial Mathematics (an Applied Introduction),* Addison-Wesley, 5th edition, 2004.
4. **R. Graham, O. Patashnik, and D.E. Knuth.** *Concrete Mathematics*, Second Edition. Addison-Wesley, 1994.









Tài liệu tham khảo

5. **Nguyễn Hữu Anh.** *Toán rời rạc*, NXB Giáo dục,1999.
6. **Nguyễn Xuân Quỳnh.** *Cơ sởToán rời rạc và ứng dụng*. NXB KHKT, Hà nội, 1996.
7. **Đỗ Đức Giáo.** *Toán rời rạc*. NXB KHKT, Hà nội, 2001.

PHẦN 1: LÝ THUYẾT TỔ HỢP

(Combinatorial Theory)

PHẦN 2: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

(Graph Theory)

Nội dung phần 1

Chương 0. Mở đầu

Chương 1. Bài toán đếm

Chương 2. Bài toán tồn tại

Chương 3. Bài toán liệt kê tổ hợp

Chương 4. Bài toán tối ưu tổ hợp

1. **Tập hợp**
2. Ánh xạ

1. Tập hợp

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.2. Sơ đồ Venn

1.3. Các phép toán tập hợp

1.4. Các đẳng thức

1. Tập hợp

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.2. Sơ đồ Venn

1.3. Các phép toán tập hợp

1.4. Các đẳng thức

1. Các khái niệm cơ bản

- Ta hiểu: ***Tập hợp như là sự tụ tập của các phần tử.***
  - Ta nói tập hợp chứa các phần tử của nó.
  - Các tập hợp được ký hiệu bởi *A-Z*, các phần tử *a-z*
  - Thông thường phải có một tập vũ trụ *U* mà tất cả các phần tử được xét trong nó. Tập *U* có thể được chỉ rõ hoặc được ngầm định.
  - Các tập vũ trụ thường dùng
    - ***R*** = tập số thực
    - $\boldsymbol{R}^{+}$: tập số thực dương
    - ***N*** = tập số tự nhiên = { 0,1, 2, 3, … }
    - ***Z*** = tập các số nguyên = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }
    - $\boldsymbol{Z}^{+}$ tập các số nguyên không âm
    - ***Q*** $= \{p/q : p, q \in \mathrm{Z}$ và $q \neq 0\}$ tập các số hữu tỉ
    - ***C*** $= \{x + iy : x, y \in \mathrm{R}$ và $i^2 = -1\}$ tập các số phức.

Một số cách xác định tập hợp

1. Danh sách các phần tử:

   $S = \{ a, b, c, d \} = \{ b, c, a, d, d \}$

(Chú ý: Việc liệt kê lặp lại một phần tử không dẫn đến tập mới. Thứ tự liệt kê là không có vai trò)

2. Mô tả cách xây dựng tập hợp bằng việc sử dụng mệnh đề lôgic:

   $S = \{ x \mid P(\mathrm{x}) \}$

   S chứa các phần tử thoả mãn mệnh đề *P*.

   Ví dụ, $S = \{ x \mid x$ là sinh viên ĐHBK HN$\}$

   đọc là "*S* là tập tất cả các phần tử *x* sao cho *x* là sinh viên ĐHBK HN."

3. Liệt kê các phần tử:

   $S = \{ \ldots, -3, -2, -1 \}$ - tập các số nguyên âm.

Chú ý: tập hợp có thể là phần tử của một tập hợp khác

Ví dụ:

- $S_1 = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},c\}$
- $S_2=\{\{1\},\{2,4,8\},\{3\},\{6\},4,5,6\}$

So sánh hai tập hợp

- Tập A được gọi là ***tập con*** của tập B nếu mỗi phần tử của A đều là phần tử của B, nghĩa là $\forall x\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$
  - **Ký hiệu:** $A \subseteq B$ hoặc $B \supseteq A$
  - **Ví dụ 1:** Nếu $S = \{\ 1, 2, 3, \ldots, 11, 12\ \}$ và $T = \{\ 1, 2, 3, 6\ \}$

    Thế thì $T \subseteq S$.
  - **Ví dụ 2**: N ⊆ Z ⊆ Q ⊆ R ⊆ C.
- $A \subseteq A$: một tập luôn là tập con của chính nó.
- Để chứng minh tập A là tập con của tập B, ta cần chỉ ra với một phần tử x bất kì, $x \in A$ thì x cũng thuộc B.

So sánh hai tập hợp

- Nếu $A \subseteq B$, nhưng $A \neq B$ khi đó ta nói A là *tập con thực sự* của B. Ký hiệu: $A \subset B$.

Ví dụ 1: Giả sử $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 2, 3, 1 \}$, $C = \{ 3 \}$. Khi đó:

$$B = A,\ C \subset A,\ C \subset B.$$

Ví dụ 2:

$\{1, 4, 9, 16, ...\} \subseteq \{1, 2, 3, ...\} \subseteq \{0, 1, 2, ...\}$.

$\{1, 4, 9, 16, ...\} \subset \{1, 2, 3, ...\} \subset \{0, 1, 2, ...\}$. ?

- Để chứng minh A là *tập con thực sự* của B, ta cần chứng minh
  - A là tập con của B **và**
  - $\exists x\ (x \in B) \wedge (x \notin A)$
- ***Tập rỗng (trống)*** là tập không có phần tử nào cả.
  - Ký hiệu: $\varnothing$.
  - $\varnothing$ là tập con của mọi tập
- ***Tập tất cả các tập con (Power set)*** của tập A
  - Ký hiệu: 2^A (đôi khi dùng ký hiệu: $P(A)$)

Tập tất cả các tập con (Power Set)

- Ví dụ

  $A = \{\varnothing\} \rightarrow P(A) = \{\varnothing\}$

  $A = \{a\} \rightarrow P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$

  $A = \{a, b\} \rightarrow P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

  $A = \{a, b, c\} \rightarrow P(A) = ?$

$\{$
$\varnothing,$
$\{a\}, \{b\}, \{c\},$
$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$
$\{a, b, c\}$
$\}$

- Chú ý: tập rỗng $\varnothing$ luôn là tập con của mọi tập.

Tập tất cả các tập con (Power Set)

- **Định lý:** Cho A là tập có lực lượng $|A|=n$, khi đó

$$|P(A)| = 2^n$$

Chứng minh: Giả sử A là tập gồm n phần tử $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Ta có thể xây dựng 1 tập con của A bằng cách duyệt lần lượt từng phần tử a_i có đưa vào dãy con hay không.

Với mỗi phần tử có 2 lựa chọn (cho vào tập con hoặc không cho vào tập con), và việc lựa chọn này là độc lập giữa các phần tử, do đó tổng cộng có 2^n lựa chọn.

Mỗi lựa chọn trong số 2^n lựa chọn này sẽ cho 1 tập con

Cho $A = \{a, b, c\} \rightarrow P(A) = ?$

0 1 0 1 0 1

$\{$
$\varnothing$,
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$,
$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$,
$\{a, b, c\}$
$\}$

Tập tất cả các tập con (Power Set)

Cho $A = \{a, b, c\}$ và $B = \{a, b\}$. Các mệnh đề sau đây là đúng hay sai ? Nêu lý do ngắn gọn cho câu trả lời.

1. $B \in \mathrm{P}(A)$
2. $B \in A$
3. $A \in \mathrm{P}(A)$
4. $A \subseteq \mathrm{P}(A)$

5. $B \subseteq \mathrm{P}(A)$
6. $\{\{a\}, B\} \subseteq \mathrm{P}(A)$

7. $\varnothing \in \mathrm{P}(A)$
8. $\varnothing \subseteq \mathrm{P}(A)$.

Tập tất cả các tập con (Power Set)

Định lý. Cho 2 tập *A và B*:

1. $A \subseteq B$ *khi và chỉ khi* $\mathrm{P}(A) \subseteq \mathrm{P}(B)$.
2. $\mathrm{P}(A) \cap \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$.
3. $\mathrm{P}(A) \cup \mathrm{P}(B) \subseteq \mathrm{P}(A \cup B)$.

So sánh hai tập hợp

- Hai tập là **bằng nhau** khi và chỉ khi mỗi phần tử của tập thứ nhất đều là phần tử của tập thứ hai và ngược lại, nghĩa là

$$A = B \quad \text{khi và chỉ khi} \quad A \subseteq B \text{ và } B \subseteq A$$

Ví dụ:

- $\{2,3,5,7\}=\{3,2,7,5\}$, vì tập hợp là tập <u>không có thứ tự</u>
- $\{2,3,5,7\}=\{2,2,3,5,3,7\}$ việc liệt kê lặp lại một phần tử không dẫn đến tập mới
- $\{2,3,5,7\} \neq \{2,3\}$
- $A = \{x: (x-4)^2 = 25\}$, $B = \{x: (x+1)(x-9) = 0\}$, hỏi A = B ?
- **Hỏi: ??? $N = Z^+$**

Tập N không bằng tập Z^+ vì 0 thuộc tập N, nhưng không thuộc tập Z^+

Lực lượng của tập hợp

- ***Lực lượng (cardinality)*** của tập A là số phần tử trong A.
  - Ký hiệu: $|A|$ (đôi khi còn ký hiệu là $\#A$, $N(A)$).
  - Nếu lực lượng của một tập hợp là số tự nhiên thì nó được gọi là ***tập hữu hạn***, nếu trái lại nó là ***tập vô hạn***.

  Ví dụ: $\boldsymbol{N}$ (tập các số tự nhiên) là vô hạn, bởi vì $|\boldsymbol{N}|$ không là số tự nhiên.

  Z, Q, R là các tập vô hạn

  - **Chú ý:** Nếu $|A| = n$ thì $|P(A)| = 2^n$.

Ví dụ 1:

- $|\varnothing| = 0$ vì tập rỗng $\varnothing$ không chứa phần tử nào.
- $|\{\pi, 2, \text{Newton}\}| = 3$.
- Nếu $N_n = \{0, 1, \dots, n\}$ thì $|N_n| = n + 1$.
- $|\{n: n \text{ là một số nguyên tố}\}| = \infty$.

Lực lượng của tập hợp

Ví dụ 2: Nếu $A = \{ a, b \}$ thì

– Tập các tập con của A: $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

– Lực lượng của A: $|A| = |\{a, b\}| = 2$

$|2^A| = 4$

– A và 2^A là các tập hữu hạn.

Ví dụ 3: Xác định lực lượng của các tập sau

- $X = \{\{a, b\}\}$
- $Y = \{1, 2, \{a, b\}\}$
- Z = {x | (x≤100) ∧ (x là số nguyên tố)}

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.2. Sơ đồ Venn

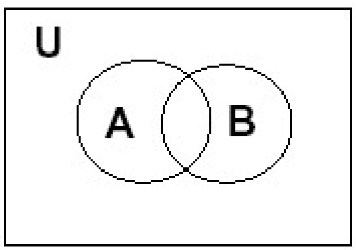
1.3. Các phép toán tập hợp

1.4. Các đẳng thức

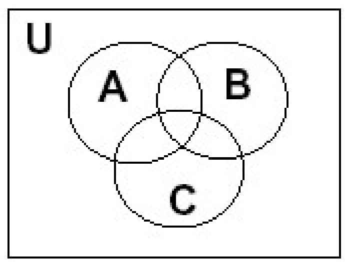
1.2. SƠ ĐỒ VENN

John Venn
1834-1923

- **Venn diagrams:**
  - Là cách biểu diễn rất trực quan giúp chỉ ra mối liên hệ giữa 2 hoặc 3 tập hợp.
    - Tập vũ trụ *U* được biểu diễn bởi hình chữ nhật.
    - Mỗi tập con của *U* được biểu diễn bởi phần trong của một vòng kín.
- **Ví dụ:**



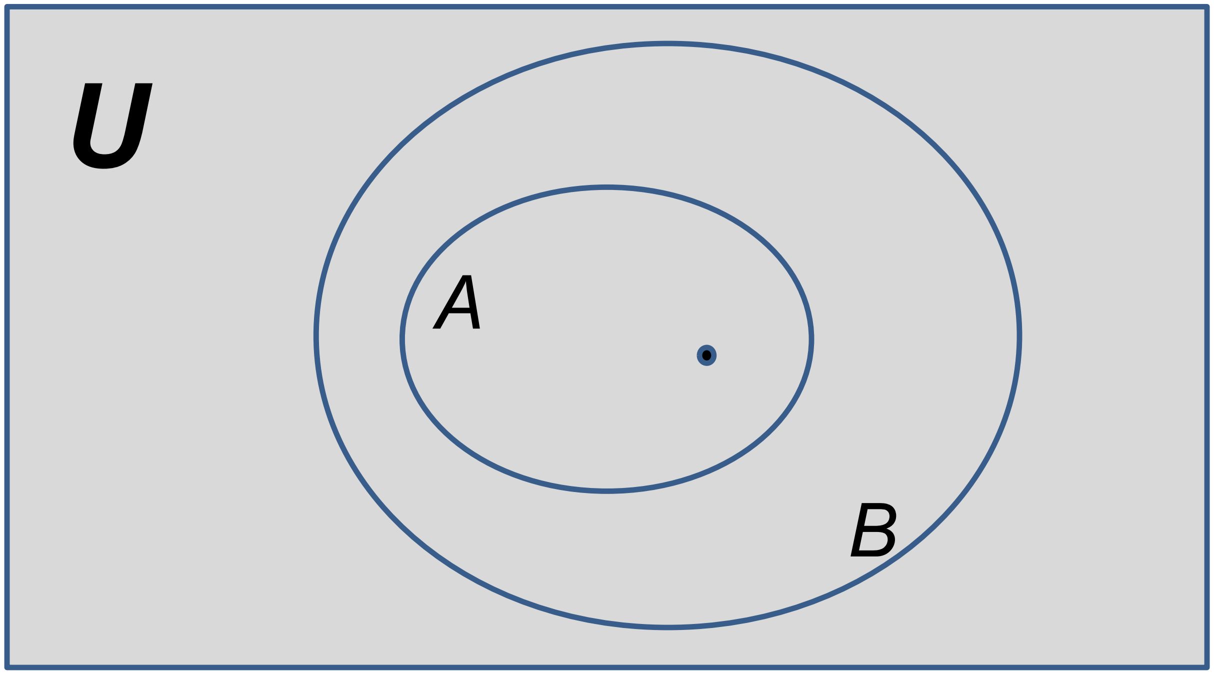
Cho 2 tập



Cho 3 tập

1.2. SƠ ĐỒ VENN

Ví dụ



Nếu $A \subseteq B$: vùng biểu diễn A hoàn toàn nằm trong vùng biểu diễn B để đảm bảo rằng mọi phần tử thuộc vùng biểu diễn tập A cũng nằm trong vùng biểu diễn tập B

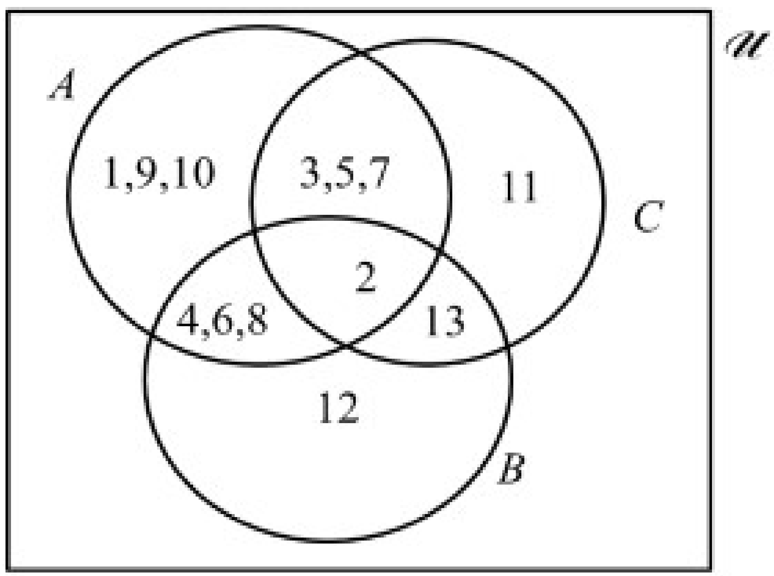
1.2. Sơ đồ Venn

Ví dụ: Vẽ sơ đồ Venn biểu diễn 3 tập:

$A = \{1, 2, \ldots, 10\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8, 12, 13\}$,

$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$



1. Tập hợp

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.2. Sơ đồ Venn

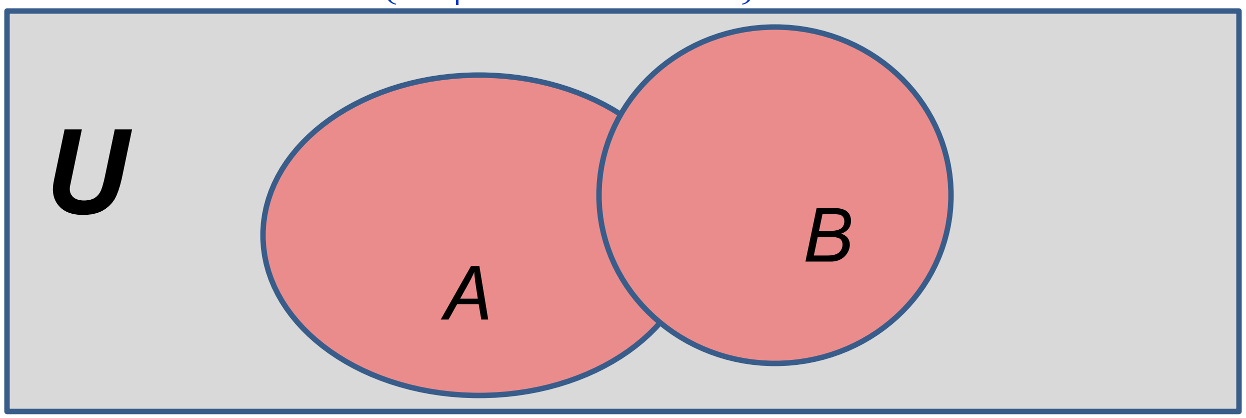
1.3. Các phép toán tập hợp

1.4. Các đẳng thức

1.3. Các phép toán tập hợp

- ***Hợp (union)*** của 2 tập A và B:
  - là tập tất cả các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc vào B.
  - Ký hiệu: $A \cup B$

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$$



Tổng quát: Hợp của n tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \equiv ((\ldots((A_1 \cup A_2) \cup \ldots) \cup A_n)$ (ghép nhóm và thứ tự là không quan trọng)

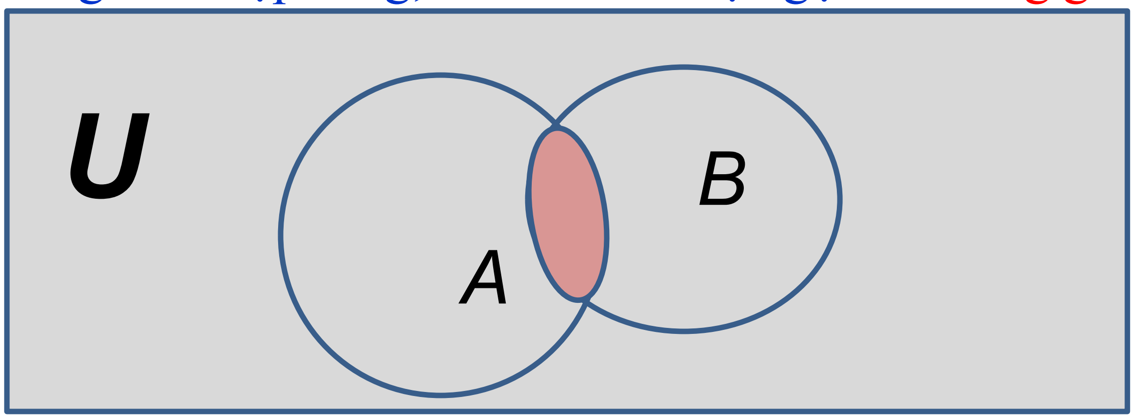
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$
$$= \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_1} \ \textbf{\textit{hoặc}}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_2}\ \textbf{\textit{hoặc}}\ \ldots \textbf{\textit{hoặc}}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_n}\}$$
$$= \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}\ \textbf{\textit{thuộc ít nhất một tập}}\ \boldsymbol{A_i}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$$

1.3. Các phép toán tập hợp

- ***Giao (intersection)*** của 2 tập A và B:
  - là tập các phần tử vừa thuộc vào A vừa thuộc vào B.
  - Ký hiệu: $A \cap B$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

  - Nếu giao là tập rỗng, thì A và B được gọi là không giao nhau.



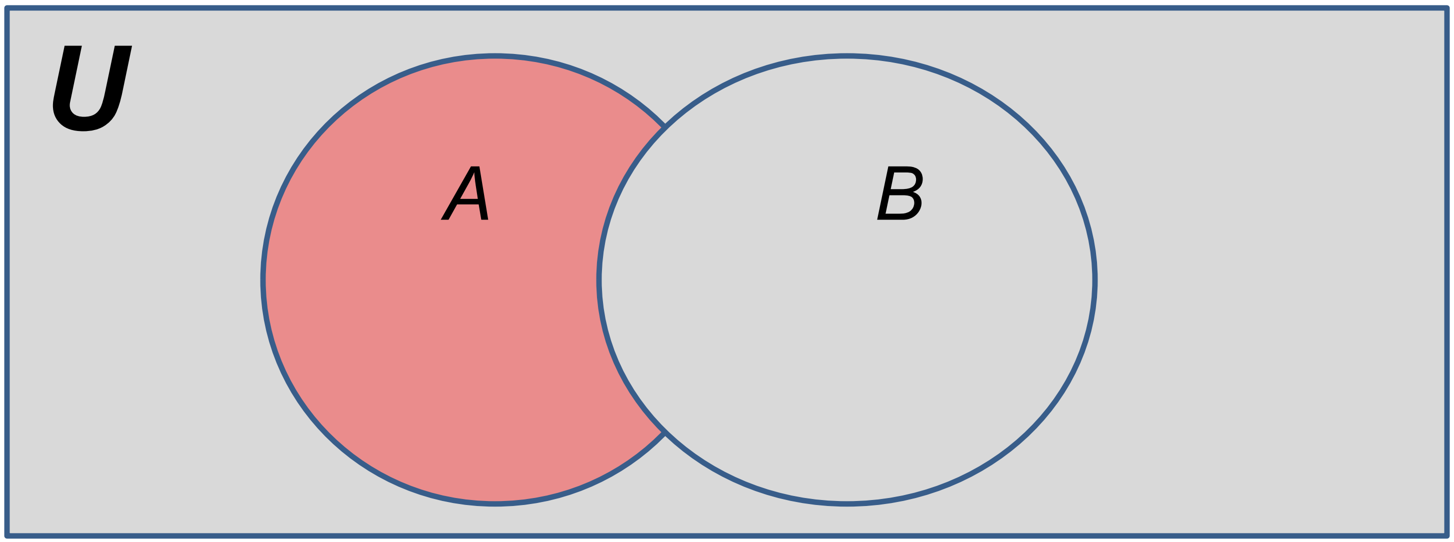
Tổng quát: Giao của n tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \equiv ((\ldots((A_1 \cap A_2) \cap \ldots) \cap A_n)$
(ghép nhóm và thứ tự là không quan trọng)

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x | x \in A_i \text{ với mọi } i = 1, 2, .., n\}$$

1.3. Các phép toán tập hợp

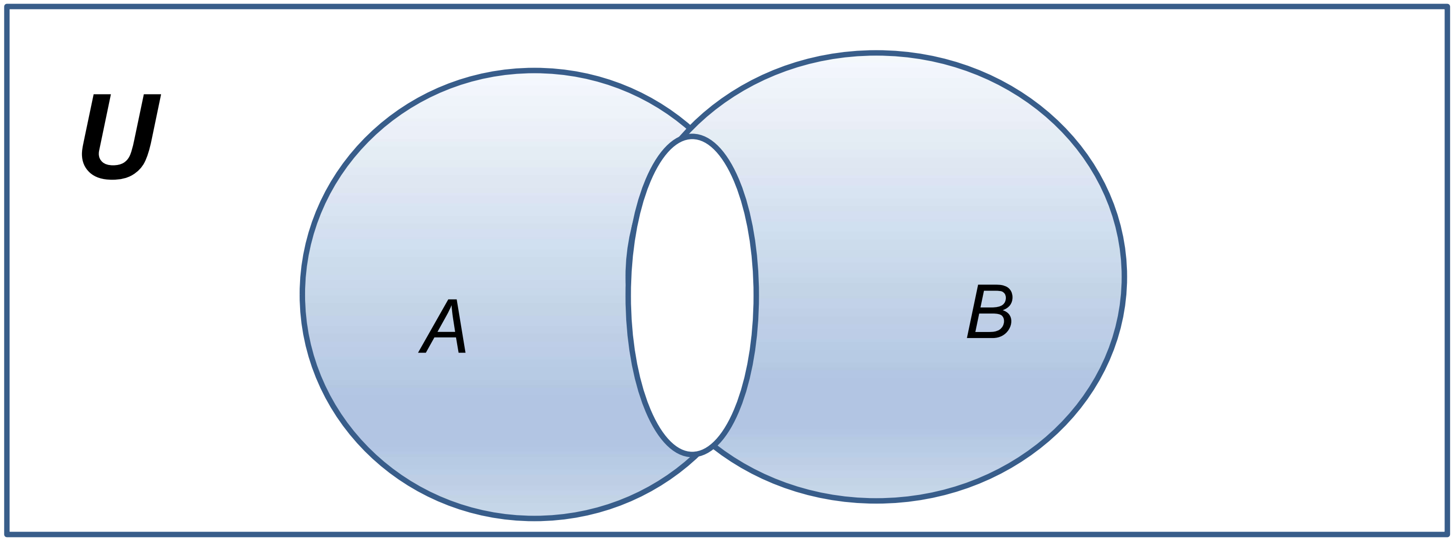
- ***Hiệu (difference)*** của A và B:
  - là tập hợp các phần tử của A không thuộc vào B.
  - Ký hiệu: $A - B$ hoặc $A \setminus B$

$$A - B = \{ x \mid x \in A \land x \notin B \}$$



1.3. Các phép toán tập hợp

- ***Hiệu đối xứng (symmetric difference)*** *của* A và B:
  - là tập $(A - B) \cup (B - A)$
  - Ký hiệu: $A \oplus B$

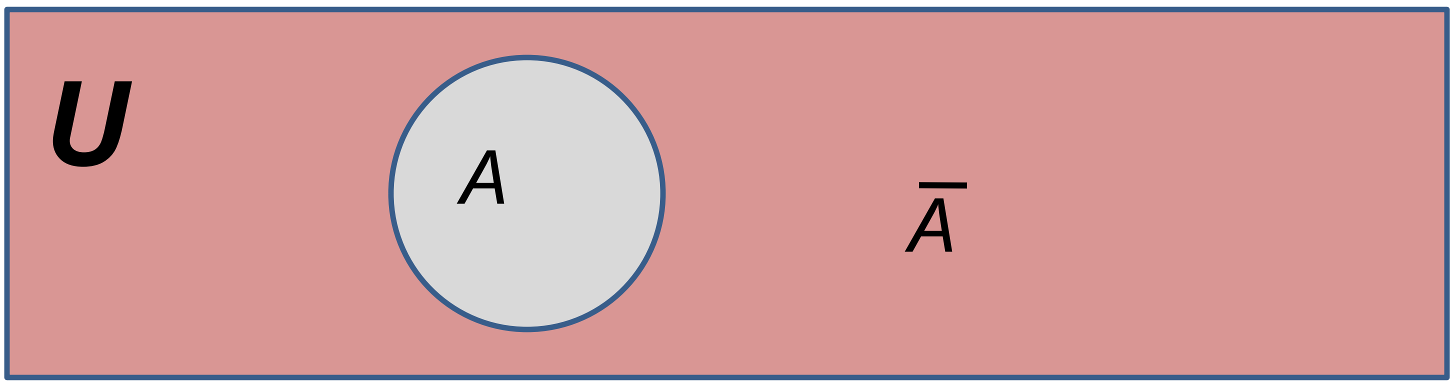


1.3. Các phép toán tập hợp

- ***Phần bù (complement)*** của tập A:
  - là tập $U - A$, trong đó U là tập vũ trụ.
  - phần bù của A là phụ thuộc vào U !
  - Ký hiệu: $\overline{A}$

$$\overline{A} = \{\ x \mid \neg(x \in A)\ \}$$

  - Cách ký hiệu khác: A^c.



  - $A - B = \{x \mid x \in A$ và $x \notin B\} = A \cap B^c$.

1.3. Các phép toán tập hợp

Ví dụ 1: Cho $A=\{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Khi đó

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A \cap B = \{3\}$
- $A \setminus B = \{1, 2\}$
- $A \oplus B = \{1, 2, 4, 5\}$

1.3. Các phép toán tập hợp

Ví dụ 2:

– $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

– $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$.

– Khi đó

- $A \cup B =$
- $A \cap B =$
- $\overline{A} =$
- $\overline{B} =$
- $A - B =$
- $B - A =$
- $A \oplus B =$

1.3. Các phép toán tập hợp

René Descartes
(1596-1650)

- ***Tích Đề-các (Cartesian product)*** của A với B:
  - Là tập bao gồm tất cả các cặp có thứ tự (a, b), trong đó a thuộc A và b thuộc B.
  - Ký hiệu: $A \times B$. Theo định nghĩa

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

  - **Ví dụ:**
    - Cho $A = \{ 1, 2, 3 \}$ và $B = \{ 3, 4 \}$. Khi đó

$$A \times B = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4) \}$$

$$B \times A = \{ (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3) \}$$

    - Thông thường $A \times B \neq B \times A$
    - $|A \times B| = ?$

Tích Đề các

Ví dụ:

- A = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
- B = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }
- $A \times B$ = { (Thắng, Mai), ..., (Thắng, Muỗm}, ...,(Cường, Muỗm) }

- Tích Đề các được mở rộng cho nhiều tập:
  - Cho $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập hợp
  - $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m = \{(a_1, a_2, ..., a_m): a_i \in A_i, i = 1, 2,..., m\}$

Ví dụ:

- A = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
- B = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }
- C = { P30 - B4, P55-B3, P17-A1 }
- $A \times B \times C$ = {(Thắng, Mai, P30-B4), ... }

- Ký hiệu $\underbrace{X \times X \times ... \times X}_{n \text{ lần}} = X^n$

1. Tập hợp

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.2. Sơ đồ Venn

1.3. Các phép toán tập hợp

1.4. Các đẳng thức

1.4. Các đẳng thức tập hợp

Đẳng thức	**Tên gọi**
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	Đồng nhất (Identity laws)
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Trội (Domination laws)
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Đồng nhất Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Bù (Complementation laws)

1.4. Các đẳng thức tập hợp

Đẳng thức	**Tên gọi**
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap \mathrm{A}$	Giao hoán Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Kết hợp Associative laws
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Phân phối Distributive laws
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Luật De Morgan De Morgan's laws

Chứng minh các đẳng thức tập hợp

- Để chứng minh đẳng thức tập hợp

$$A = B,$$

có thể sử dụng các kỹ thuật thường dùng sau:

1. Chứng minh $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.
2. Sử dụng định nghĩa và sự tương đương của các mệnh đề logic xác định tập hợp.
3. Sử dụng bảng quan hệ thành viên.

Chứng minh các đẳng thức tập hợp

Ví dụ 1: Cho A={x|x là số chẵn} , B={x|x là bội của 3}, C={x|x là bội của 6}. Chứng minh $A \cap B = C$

Giải:

- Phần 1: chứng minh vế trái là tập con của vế phải

$A \cap B \subseteq C$: $\forall x \in A \cap B$

$\Rightarrow$ x là bội của 2 và x là bội của 3

$\Rightarrow$ ta có thể viết x=2*3*k với k là số nguyên bất kì

$\Rightarrow$ x=6k với k là số nguyên bất kì $\Rightarrow$ x là bội của 6

$\Rightarrow x \in C$

- Phần 2: chứng minh vế phải là tập con của vế trái

$C \subseteq A \cap B$: $\forall x \in C$

$\Rightarrow$ x là bội của 6 $\Rightarrow$ x=6k với k là số nguyên bất kì

$\Rightarrow$ x=2*(3k)=3*(2k) $\Rightarrow$ x là bội của 2 và 3

$\Rightarrow x \in A \cap B$

Chứng minh các đẳng thức tập hợp

Ví dụ 2: Chứng minh: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

- **Phần 1:** CM $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Giả sử $x\in A\cap(B\cup C)$, cần chỉ ra $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Ta biết $x\in A$, và hoặc là $x\in B$ hoặc là $x\in C$.
    - TH 1: $x\in B$. Khi đó $x\in A\cap B$, vì thế $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
    - TH 2: $x\in C$. Khi đó $x\in A\cap C$, do đó $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Suy ra, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Vậy $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
- **Phần 2:** CM $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

Chứng minh các đẳng thức tập hợp

Ví dụ 3: Chứng minh: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cap B}$	$= \left\{ x \middle| x \notin A \cap B \right\}$	theo định nghĩa phần bù
	$= \left\{ x \middle| \neg(x \in (A \cap B)) \right\}$	theo định nghĩa $\notin$
	$= \left\{ x \middle| \neg(x \in A \wedge x \in B) \right\}$	theo định nghĩa giao
	$= \left\{ x \middle| x \notin A \vee x \notin B) \right\}$	theo luật DeMorgan
	$= \left\{ x \middle| x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}) \right\}$	theo định nghĩa phần bù
	$= \left\{ x \middle| x \in \overline{A} \cup \overline{B}) \right\}$	theo định nghĩa hợp

Bảng quan hệ thành viên

- Xây dựng bảng:
  – Các cột ứng với các biểu thức tập hợp.
  – Các dòng ứng với mọi tổ hợp có thể về quan hệ thành viên trong các tập đang xét.
- Điền vào bảng: Sử dụng “1” để ghi nhận là thành viên, “0” để chỉ ra không là thành viên.
- Đẳng thức là được chứng minh nếu hai cột tương ứng với hai biểu thức ở hai vế là ***giống hệt nhau***.

Ví dụ 4: Chứng minh: $(A \cup B) - B = A - B$.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B) - B$	$A - B$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

Chứng minh các đẳng thức tập hợp

Ví dụ 5: Sử dụng bảng quan hệ thành viên, chứng minh rằng

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

A B C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1 1 1	1				
1 1 0	1				
1 0 1	1				
1 0 0	0				
0 1 1	1				
0 1 0	1				
0 0 1	1				
0 0 0	0				

Chứng minh các đẳng thức tập hợp

Ví dụ 6: Cho A, B, và C là các tập hợp. Chứng minh rằng

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) && \text{theo luật De Morgan} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{theo luật De Morgan} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{theo luật giao hoán đối với phép giao} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{theo luật giao hoán đối phép hợp}
\end{aligned}$$

Biểu diễn tập hợp bởi xâu nhị phân

- Đối với tập vũ trụ $U = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ gồm không quá nhiều phần tử. Ta có thể sử dụng biểu diễn tập $S \subseteq U$ bởi xâu nhị phân $b_1 b_2 \ldots b_n$ trong đó:

$$b_i = 1 \leftrightarrow x_i \in S.$$

Ví dụ. $U = \{1,...,11\}$. Xét các tập con $S, T \subseteq U$

- $S = \{2,3,5,7,11\} \leftrightarrow 01101010001$
- $T = \{1,2,4,11\} \leftrightarrow 11010000001$

- Trong cách biểu diễn này các phép toán tập hợp $\cup$ (hợp), $\cap$ (giao), $\neg$(bù), được thực hiện nhờ phép toán logic tương ứng OR, AND, NOT với từng bít

Ví dụ:

- $S \cup T \leftrightarrow 01101010001 \vee 11010000001$

➔ $S \cup T \leftrightarrow 11111010001$

- $S \cap T \leftrightarrow 01101010001 \wedge 11010000001$

➔ $S \cap T \leftrightarrow 01001000001$

- $S = 01101010001$

➔ $\neg S \leftrightarrow 10010101110$

Phân hoạch

- Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_m$ là các tập con của X. Ta nói $X_1, X_2, \ldots, X_m$ tạo thành một phân hoạch của X (hoặc X được phân hoạch thành các tập $X_1, X_2, \ldots, X_m$) nếu:
  - $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$;
  - $X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j.$
  - $X_i \neq \varnothing, i=1,..,m$

(Một phân hoạch của tập X là một tập các tập con khác rỗng không giao nhau của X và hợp của chúng là tập X)

Ví dụ: X = {1, 2, 3, 4}

E = {{1, 2}, {3, 4}} là một phân hoạch của tập X

1. Tập hợp
2. **Ánh xạ**

2. Ánh xạ

2.1 Định nghĩa

2.2. Cách xác định ánh xạ

2.3. Một số loại ánh xạ

2. Ánh xạ

2.1 Định nghĩa

2.2. Cách xác định ánh xạ

2.3. Một số loại ánh xạ

2.1. Định nghĩa ánh xạ

- Ta nói f là ánh xạ từ tập X vào tập Y nếu nó đặt tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử $y \in Y$ nào đó.
  - Ký hiệu: $f: X \to Y$ hoặc $y = f(x)$
  - x gọi là gốc, y gọi là ảnh.
- Trong giáo trình giải tích chúng ta đã làm quen với hàm số thực f đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbf{R}$ với một giá trị thực $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)}$.

2. Ánh xạ

2.1 Định nghĩa

2.2. Cách xác định ánh xạ

2.3. Một số loại ánh xạ

2.2. Cách xác định ánh xạ

Cho hai tập hữu hạn X và Y.

Để xác định một ánh xạ f từ X vào Y ($f: X \to Y$) ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- Bảng giá trị đầy đủ
- Sơ đồ ánh xạ
- Ma trận ánh xạ

Xác định ánh xạ: Bảng giá trị đầy đủ

- Giả sử
  - $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$,
- Một ánh xạ f từ X vào Y (f: $X \to Y$) có thể xác định bởi bảng giá trị đầy đủ sau đây

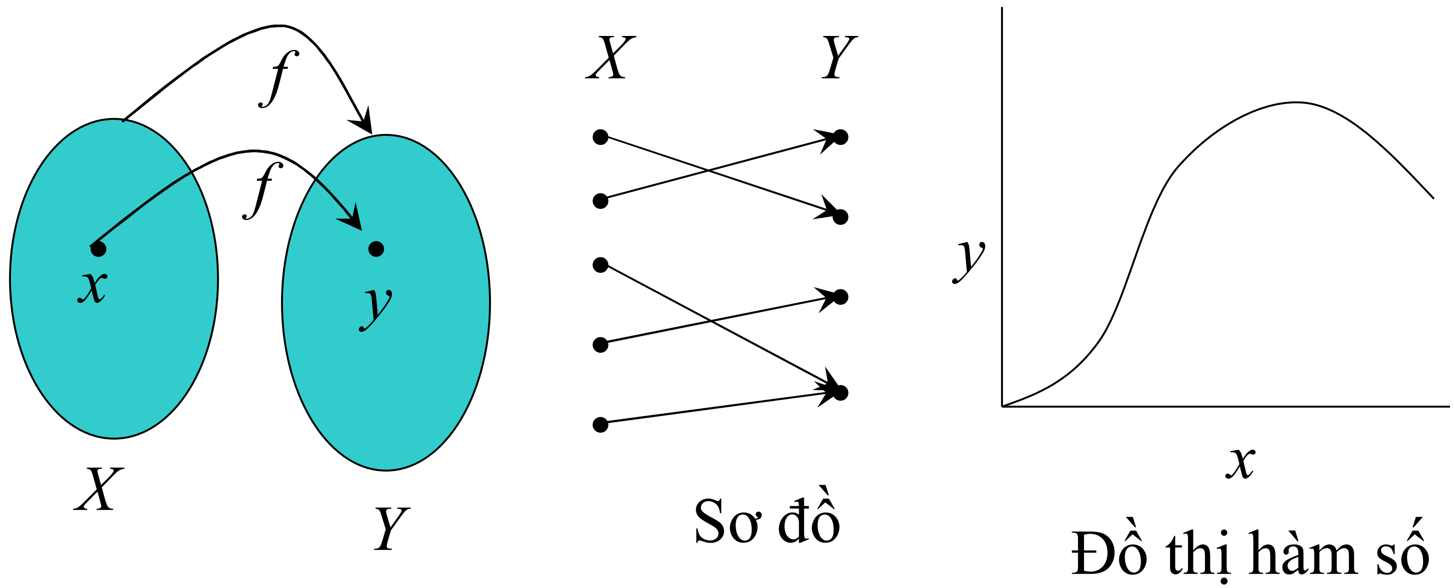
x	x_1	x_2	...	x_m
$y=f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_m)$

Như vậy mỗi ánh xạ từ tập m phần tử X vào tập n phần tử Y hoàn toàn xác định bởi bộ ảnh

$$(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m))$$

Xác định ánh xạ: Sơ đồ ánh xạ

- Ánh xạ có thể xác định bởi sơ đồ như sau:



Xác định ánh xạ: Ma trận ánh xạ

- Giả sử
  - $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$,
  - $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$,
- Một ánh xạ f từ X vào Y (f: $X \rightarrow Y$) có thể xác định bởi ma trận $A_f = \{a_{ij}\}$ kích thước $m \times n$ với các phần tử được xác định theo qui tắc sau đây:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nếu } y_j \text{ là phần tử tương ứng với } x_i \text{ qua ánh xạ } f \\ 0, \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

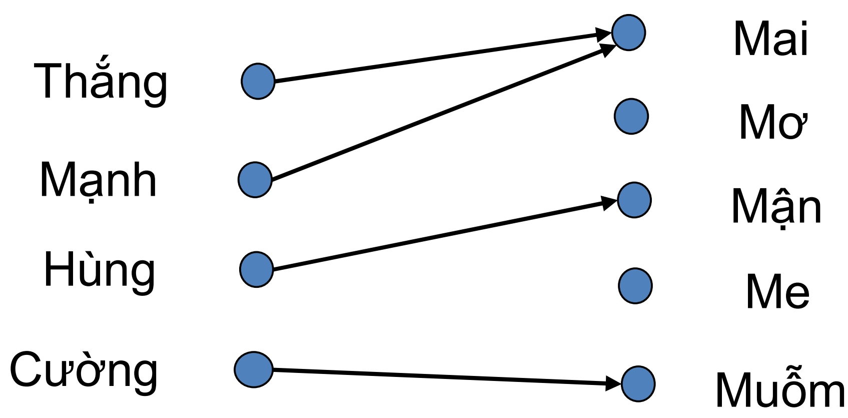
Ví dụ

- X = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
- Y = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }

- Xét ánh xạ f từ X vào Y xác định bởi bảng giá trị đầy đủ sau:

x	Thắng	Mạnh	Hùng	Cường
y=f(x)	Mai	Mai	Mận	Muỗm

Ánh xạ nói trên có thể cho bởi sơ đồ và ma trận như sau:



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{Mai} & \text{Mơ} & \text{Mận} & \text{Me} & \text{Muỗm} \end{array} \\
A_f = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \text{Thắng} \\ \text{Mạnh} \\ \text{Hùng} \\ \text{Cường} \end{array}
$$

2. Ánh xạ

2.1 Định nghĩa

2.2. Cách xác định ánh xạ

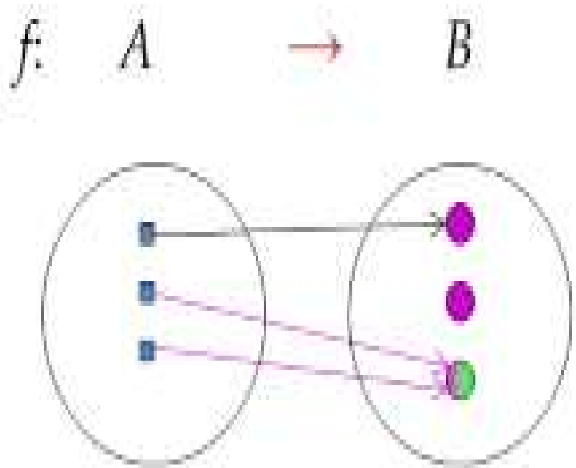
2.3. Một số loại ánh xạ

2.3. Một số loại ánh xạ hay dùng

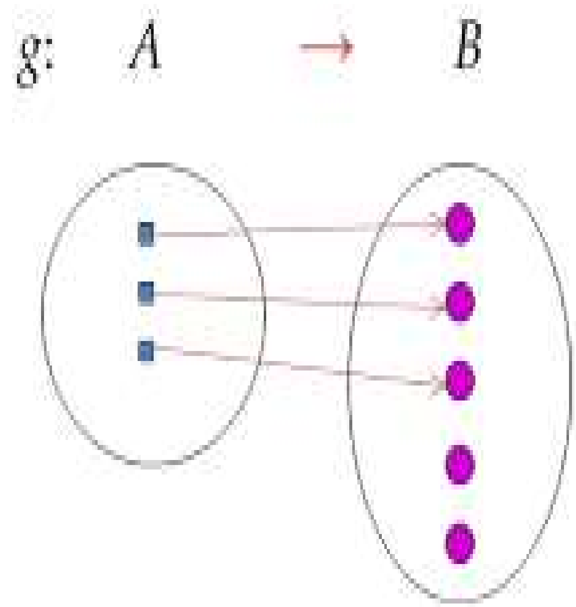
Giả sử X, Y là các tập hợp.

- **Đơn ánh:** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *đơn ánh* (*injection hoặc one-to-one*) nếu nó đặt tương ứng hai phần tử khác nhau của X với hai phần tử khác nhau của Y.

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



Ánh xạ f không phải là đơn ánh



Ánh xạ *g* là đơn ánh

2.3. Một số loại ánh xạ hay dùng

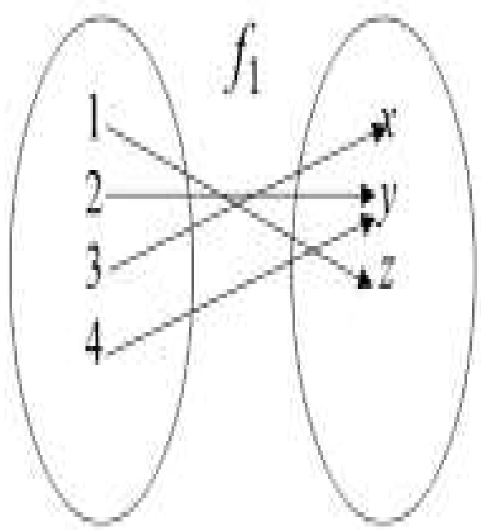
Giả sử X, Y là các tập hợp.

- **Toàn ánh:** Ánh xạ f từ X vào Y được gọi là *toàn ánh* (*surjection hoặc onto*) nếu mỗi phần tử của Y đều là ảnh của ít nhất một phần tử nào đó của X qua ánh xạ f.

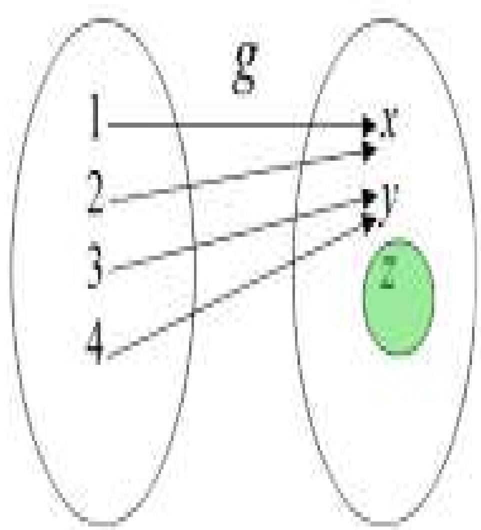
$$\forall y \in Y, \exists\, x \in X: y = f(x) .$$

Ví dụ: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{x, y, z\}$. Ánh xạ:

- $f_1 = \{(1, z), (2, y), (3, x), (4, y)\}$; $g=\{(1, x), (2, x), (3, y), (4, y)\}$



Ánh xạ f_1 là toàn ánh

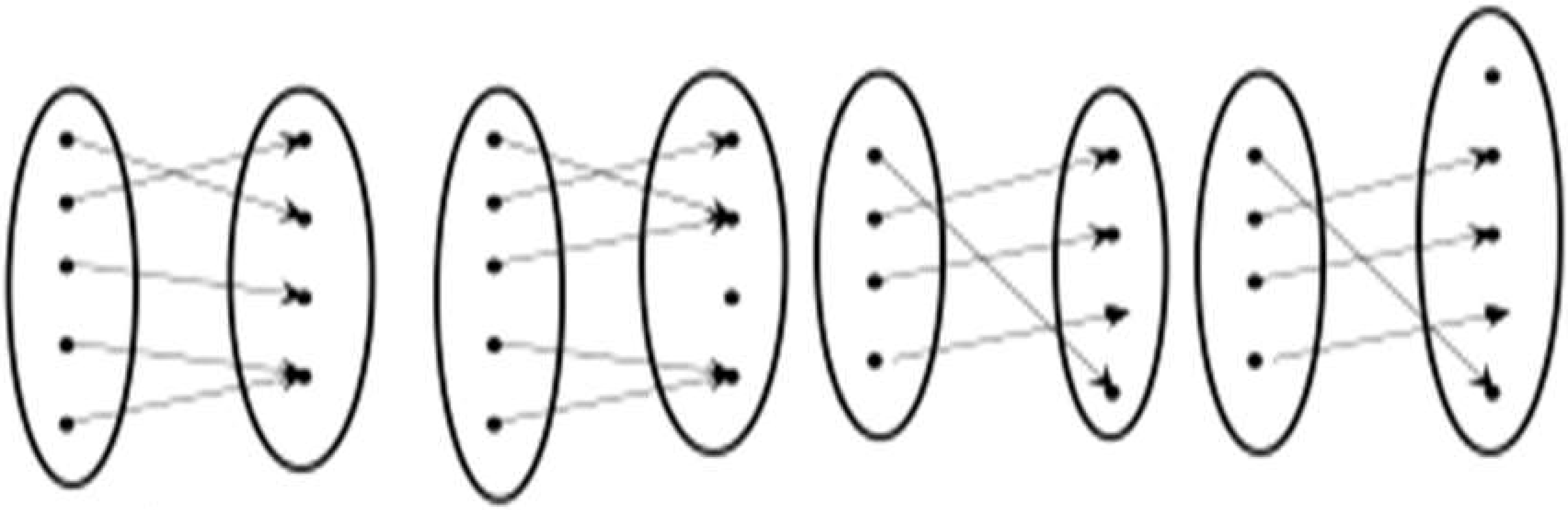


Ánh xạ g không phải là toàn ánh vì $g(A)=\{x,y\}\neq B$

2.3. Một số loại ánh xạ hay dùng

Giả sử *X, Y* là các tập hợp.

- **Song ánh:** Ánh xạ *f* từ *X* vào *Y* được gọi là *song ánh* (*bijection*), nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.



2.3. Một số loại ánh xạ hay dùng

Ví dụ:

f_j: N→ N	Đơn ánh ?	Toàn ánh?
$f_1(n) = n^2$		
$f_2(n) = n+2$		
$f_3(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$		
$f_4(n) = \begin{cases} n-1, & \text{odd } n \\ n+1, & \text{even } n \end{cases}$		

Ứng dụng

- **Xét bài toán:** Đếm số phần tử của tập X. Giả sử Y là tập mà số phần tử của nó là đã biết: $n_y = |Y|$. Giả sử ta có thể xây dựng được ánh xạ f từ X vào Y. Khi đó
  - Nếu f là đơn ánh, thì ta có $|X| \le n_y$
  - Nếu f là toàn ánh, thì ta có $|X| \ge n_y$
  - Nếu f là song ánh, thì ta có $|X| = n_y$
- Trong tình huống thứ ba ta giải được bài toán đếm đặt ra, nhờ xây dựng được song ánh từ tập các cấu hình tổ hợp cần đếm (tập X) vào tập các cấu hình tổ hợp mà ta đã biết trước số phần tử (tập Y).