Chương 1
SỰ KIỆN NGẪU NHIÊN VÀ PHÉP TÍNH XÁC SUẤT

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

(1) Phòng 201.BIS-D3.5

GIỚI THIỆU CHƯƠNG 1

Chương này tập trung phân tích về sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất. Nội dung bao gồm:

- Giới thiệu về không gian mẫu, sự kiện và mối quan hệ giữa các sự kiện.
- Trình bày một số phương pháp đếm các phần tử của sự kiện và không gian mẫu.
- Trình bày khái niệm về xác suất và một số định nghĩa xác suất (theo quan điểm cổ điển, hình học, thống kê).
- Phân tích một số công thức tính xác suất (công thức cộng, xác suất có điều kiện, công thức nhân, công thức Bernoulli, công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes).

1.1. PHÉP THỬ VÀ SỰ KIỆN

Phép thử ngẫu nhiên

Khái niệm 1

Một phép thử có thể dẫn đến các kết cục khác nhau, mặc dù nó được lặp lại như nhau theo cùng một cách ở mọi thời điểm, được gọi là một phép thử ngẫu nhiên.
Ký hiệu phép thử ngẫu nhiên là $\mathcal{C}$ và gọi tắt là phép thử.

Ví dụ 1

Dưới đây là một số ví dụ về phép thử $\mathcal{C}$.

(a) Gieo một đồng xu trên mặt phẳng cứng và quan sát xem nó xuất hiện mặt sấp hay ngửa.

(b) Gieo một đồng xu trên mặt phẳng cứng ba lần và quan sát dãy mặt sấp, ngửa xuất hiện.

Không gian mẫu

Định nghĩa 1

Tập hợp tất cả các kết cục có thể có của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử đó. Ký hiệu không gian mẫu là S.

✍ Không gian mẫu có thể được biểu diễn dưới dạng liệt kê.

Ví dụ 2

(a) Không gian mẫu trong Ví dụ 1(a) là

$$S = \{H, T\},$$

ở đây, H là kết cục "xuất hiện mặt sấp" và T là kết cục "xuất hiện mặt ngửa".

(b) Không gian mẫu trong Ví dụ 1(b) là

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}.$$

Không gian mẫu

✍ Không gian mẫu có thể được biểu diễn dưới dạng một biểu thức toán học.

Ví dụ 3

Xét một phép thử chọn đầu nối của một sản phẩm rồi đo độ dày của nó. Các giá trị có thể có của độ dày phụ thuộc vào độ phân giải của dụng cụ đo và chúng cũng phụ thuộc vào giới hạn trên và giới hạn dưới của độ dày. Tuy nhiên, ta có thể xác định không gian mẫu của độ đo này là các số thực dương,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \quad \text{hay} \quad S = \mathbb{R}^+.$$

Nếu biết độ dày của các đầu nối được hạn chế từ 10 milimét đến 11 milimét thì không gian mẫu trong trường hợp này là

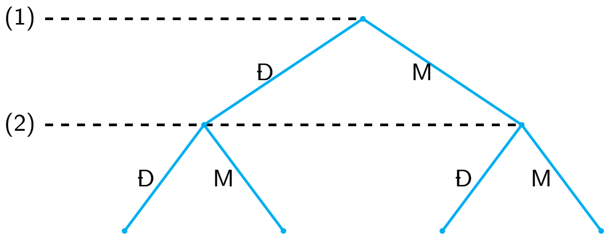
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 11\}.$$

Không gian mẫu

✍ Không gian mẫu có thể được mô tả bằng đồ thị với sơ đồ cây.

Ví dụ 4

Mỗi tin nhắn được phát đi có thể đến nơi nhận đúng giờ (Đ) hoặc muộn giờ (M) so với thiết kế. Có hai tin nhắn được phát đi liên tiếp, các kết cục có thể xảy ra được hiển thị bằng bốn nhánh trong sơ đồ cây (Hình 1).



Hình 1: Sơ đồ cây

1.1. PHÉP THỬ VÀ SỰ KIỆN

Sự kiện ngẫu nhiên. Sự kiện sơ cấp

Khái niệm 2

(a) Một sự kiện ngẫu nhiên là một tập hợp các kết cục của một phép thử. Ta cũng có thể định nghĩa một sự kiện ngẫu nhiên là một tập hợp con của một không gian mẫu.
Ký hiệu sự kiện ngẫu nhiên là A, B, C hoặc A_1, A_2 ... và gọi tắt là sự kiện.

(b) Sự kiện sơ cấp là sự kiện chỉ chứa duy nhất một kết cục của một phép thử.

Sự kiện ngẫu nhiên. Sự kiện sơ cấp

Ví dụ 5

Gieo một con xúc xắc và quan sát số chấm xuất hiện trên mặt của nó. Ký hiệu E_i, $i = 1, \ldots, 6$, chỉ kết cục xuất hiện i chấm trên mặt con xúc xắc.

(a) Không gian mẫu là $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$.

(b) Mỗi tập hợp con của S là một sự kiện. Chẳng hạn,

- E_1 là sự kiện "xuất hiện mặt một chấm".
- $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ là sự kiện "xuất hiện mặt chấm chẵn".
- $B = \{E_4, E_5, E_6\}$ là sự kiện "xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 3".
- $C = \{E_1, E_4\}$ là sự kiện "xuất hiện mặt có số chấm là bình phương của một số tự nhiên".

(c) Các sự kiện sơ cấp bao gồm E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 và E_6.

Sự kiện ngẫu nhiên. Sự kiện sơ cấp

Ví dụ 6

Quan sát một người gọi điện thoại và ta quan tâm đến thời gian của cuộc gọi đó. Ký hiệu x là thời gian quan sát được, không gian mẫu là

$$S = \{x \mid x \geq 0\}.$$

Sự kiện A "cuộc gọi kéo dài hơn 5 phút" là

$$A = \{x \mid x > 5\}.$$

Sự kiện chắc chắn. Sự kiện không thể có

Khái niệm 3

(a) Sự kiện chắc chắn là sự kiện nhất định sẽ xuất hiện khi thực hiện một phép thử. Sự kiện chắc chắn tương ứng với toàn bộ tập S.

(b) Sự kiện không thể có là sự kiện nhất định không xuất hiện khi thực hiện một phép thử. Sự kiện không thể có tương ứng với tập con $\varnothing$ của S.

Ví dụ 7

Gieo một con xúc xắc.

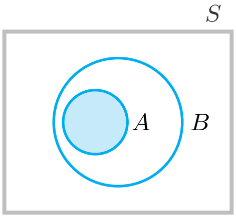
(a) Sự kiện "xuất hiện mặt có số chấm ≤ 6 và ≥ 1" là sự kiện chắc chắn.

(b) Sự kiện "xuất hiện mặt 7 chấm" là sự kiện không thể có.

Quan hệ kéo theo

Định nghĩa 2

- Sự kiện A được gọi là kéo theo sự kiện B, ký hiệu $A \subset B$, nếu khi A xảy ra thì B xảy ra.
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai sự kiện A và B trùng nhau, viết là $A = B$.



Hình 2: Sơ đồ Venn của $A \subset B$

Ví dụ 8

Trong Ví dụ 5, E_2 là sự kiện "xuất hiện mặt 2 chấm", A là sự kiện xuất hiện mặt chấm chẵn, thì $E_2 \subset A$.

Hợp các sự kiện. Giao các sự kiện

Định nghĩa 3

Sự kiện A được gọi là hợp của các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nếu A xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong các sự kiện A_i xảy ra, $i = 1, 2, \ldots, n$ và viết là:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Để tiện cho việc trình bày, ta sẽ viết

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

✍ Mọi sự kiện ngẫu nhiên đều có thể biểu diễn dưới dạng hợp của một số sự kiện sơ cấp nào đó. Sự kiện chắc chắn là hợp của mọi sự kiện sơ cấp có thể có.

Hợp các sự kiện. Giao các sự kiện

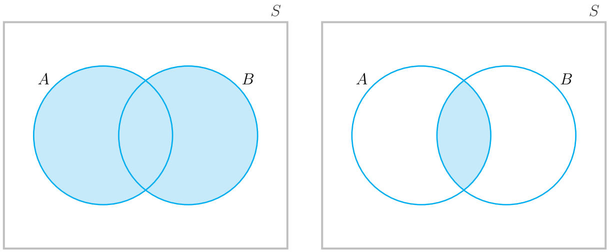
Định nghĩa 4

Sự kiện B được gọi là giao của các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nếu B xảy ra khi và chỉ khi tất cả các sự kiện A_i xảy ra, $i = 1, 2, \ldots, n$ và viết là:

$$B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Để tiện cho trình bày, ta sẽ viết

$$B = A_1 A_2 \ldots A_n.$$



Hình 3: Sơ đồ Venn của $A \cup B$ và $A \cap B$

Hợp các sự kiện. Giao các sự kiện

Ví dụ 9

(a) Một mạng điện gồm ba bóng đèn mắc nối tiếp. Gọi A_i là sự kiện "bóng đèn thứ i bị cháy", $i = 1, 2, 3$. Gọi A là sự kiện "mạng mất điện". Ta thấy rằng mạng bị mất điện khi ít nhất một trong ba bóng bị cháy. Do đó,

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

(b) Nếu ba bóng đèn mắc song song, thì mạng bị mất điện khi cả ba bóng bị cháy. Do đó,

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Sự kiện xung khắc. Sự kiện đối lập

Định nghĩa 5

(a) Hai sự kiện A và B được gọi xung khắc với nhau nếu chúng không thể đồng thời xảy ra trong cùng một phép thử.

(b) Hệ n sự kiện $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ được gọi là xung khắc từng đôi nếu hai sự kiện bất kỳ của hệ xung khắc với nhau.

✍

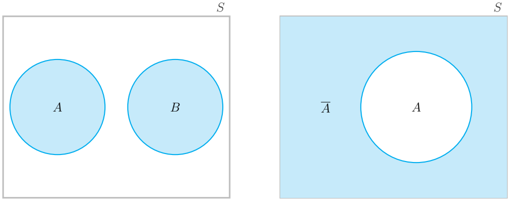
- Nếu A và B xung khắc thì $A \cap B = \varnothing$.
- Nếu hệ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ xung khắc từng đôi thì $A_i \cap A_j = \varnothing$ với mọi $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Sự kiện xung khắc. Sự kiện đối lập

Định nghĩa 6

Sự kiện không xảy ra sự kiện A được gọi là sự kiện đối lập của A, ký hiệu là $\overline{A}$.

✍ Hai sự kiện A và $\overline{A}$ thỏa mãn tính chất: $A \cup \overline{A} = S$ và $A \cap \overline{A} = \varnothing$.



Hình 4: Sơ đồ Venn của sự kiện xung khắc và sự kiện đối lập

Sự kiện xung khắc. Sự kiện đối lập

Ví dụ 10

Trong Ví dụ 5,

(a) Gọi E_i là sự kiện xuất hiện mặt i chấm, $i = 1, 2, \ldots, 6$, thì

- E_1 và E_2 xung khắc nhau.
- Hệ $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ xung khắc từng đôi.

(b) Gọi A là sự kiện xuất hiện mặt chấm chẵn, thì sự kiện đối lập của A là $\overline{A} = \{E_1, E_3, E_5\}$.

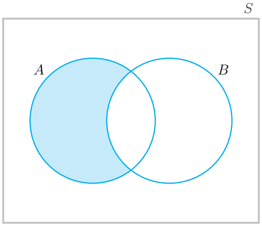
Hiệu hai sự kiện

Định nghĩa 7

Hiệu của hai sự kiện A và B, ký hiệu là $A - B$, là sự kiện xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra nhưng B không xảy ra.

✍

- Trường hợp hay sử dụng sự kiện hiệu là $\overline{A} = S - A$ và $A = S - \overline{A}$.
- Ta thường biến đổi hiệu hai sự kiện thành sự kiện giao như sau: $A - B = A \cap \overline{B}$.



Hình 5: Sơ đồ Venn của hiệu hai sự kiện

Hệ đầy đủ các sự kiện

Định nghĩa 8

Hệ n sự kiện $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ được gọi là hệ đầy đủ các sự kiện nếu nhất định phải xảy ra một và chỉ một trong các sự kiện A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sau phép thử.

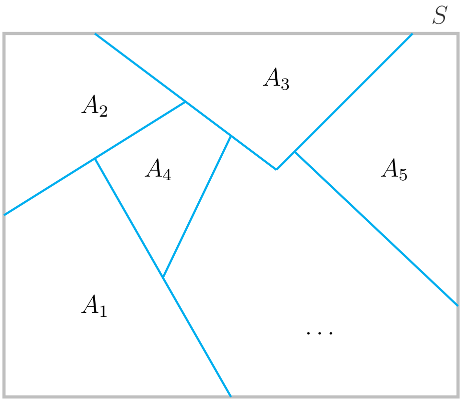
✍

- Hệ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là hệ đầy đủ các sự kiện nếu

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S. \end{cases}$$

- Đối với một sự kiện A thì ta có hệ đầy đủ $\{A,\ \overline{A}\}$.
- Đối với hai sự kiện A và B, một hệ đầy đủ là $\{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$.

Hệ đầy đủ các sự kiện



Hình 6: Sơ đồ Venn của hệ đầy đủ các sự kiện

Hệ đầy đủ các sự kiện

Ví dụ 11

Trong Ví dụ 5, gọi E_i là sự kiện xuất hiện mặt i chấm, $i = 1, 2, \ldots, 6$ và A là sự kiện xuất hiện mặt chấm chẵn, thì

- Hệ $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ là một hệ đầy đủ các sự kiện.
- Hệ $\{A,\ \overline{A}\}$ là một hệ đầy đủ các sự kiện.

Ví dụ 12

Một nhà máy có ba phân xưởng sản xuất ra cùng một loại sản phẩm. Giả sử rằng mỗi sản phẩm của nhà máy chỉ do một trong ba phân xưởng này sản xuất. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy và gọi C_i là sự kiện "sản phẩm được chọn do phân xưởng i sản xuất", $i = 1, 2, 3$. Khi đó, hệ $\{C_1, C_2, C_3\}$ là một hệ đầy đủ các sự kiện.

Tính chất của hợp và giao các sự kiện

Tính chất 1

(a) Tính chất giao hoán: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(b) Tính chất kết hợp: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(c) Tính chất phân phối của phép hợp và phép giao: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Đặc biệt $A \cup A = A$ và $A \cap A = A$.

Tính chất của hợp và giao các sự kiện

Hệ quả 1

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cup \varnothing = A$.
3. $A \cup S = S$.
4. $A \cap S = A$.
5. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
6. $A \cup \overline{A} = S$.
7. $\overline{S} = \varnothing$.
8. $\overline{\varnothing} = S$.
9. $\overline{(\overline{A})} = A$.
10. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
11. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
12. $A = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Bài tập

Bài 1

Một hộp có 8 viên bi, trong đó, có 6 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi và xem màu. Gọi:

- A là sự kiện "lấy được 3 viên bi xanh";
- B là sự kiện "lấy được 3 viên bi màu đỏ";
- C là sự kiện "lấy được 3 viên bi".

Sự kiện nào là (a) Sự kiện chắc chắn; (b) Sự kiện không thể có; (c) Sự kiện ngẫu nhiên?

Bài tập

Bài 2

Có ba sinh viên A, B và C cùng thi môn Xác suất thống kê. Gọi A, B và C lần lượt là sự kiện "sinh viên A, B và C thi qua môn Xác suất thống kê".

(a) Gọi A_2 là sự kiện "có đúng hai sinh viên thi qua môn Xác suất thống kê". Sự kiện $A_2\overline{B}$ là:

A. Sinh viên B thi không qua môn

B. Chỉ có sinh viên B thi qua môn

C. Có hai sinh viên thi qua môn

D. Chỉ có sinh viên B thi không qua môn

(b) Gọi H là sự kiện "Có đúng một sinh viên thi không qua môn". Kết quả nào dưới đây là ĐÚNG:

A. $AB\overline{C} = H$

B. $\overline{C} = H$

C. $\overline{A}BC \subset H$

D. $\overline{B}C \subset H$

Bài tập

Bài 3

Có ba sinh viên học môn Xác suất thống kê. Gọi A_1, A_2 và A_3 lần lượt là sự kiện "sinh viên thứ nhất, thứ hai và thứ ba đạt điểm tổng kết môn học là A". Hãy biểu diễn các sự kiện sau theo A_1, A_2, A_3:

(a) A: "sinh viên thứ nhất có điểm tổng kết không phải loại A".

(b) B: "cả ba sinh viên có điểm tổng kết loại A".

(c) C: "có ít nhất một trong ba sinh viên có điểm tổng kết loại A".

(d) D: "có duy nhất một trong ba sinh viên có điểm tổng kết loại A".

Bài tập

Bài 4

Cho A, B và C là các sự kiện của cùng một phép thử. Biểu thức nào sau đây là SAI:

A. $A\overline{B+C} = A\,\overline{B} + A\,\overline{C} - A\,\overline{B}\,\overline{C}$

B. $\overline{ABC} = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

C. $(A+B)(\overline{A} + \overline{B}) = A\,\overline{B} + \overline{A}\,B$

D. $\overline{A+B+C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

E. $A(B+C) = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$

Bài tập

Bài 5

Cho A, B và C là các sự kiện của cùng một phép thử. Biểu thức nào sau đây là SAI:

A. $(A + \overline{B})(\overline{A} + B) \subset A + B$

B. $A\overline{B}C \subset (A + B)C$

C. $AB\overline{C} \subset (AB + \overline{C})$

D. $A(B + C) \subset A$

E. $A + \overline{B}\,\overline{C} \subset A + \overline{B} + \overline{C}$

F. $\overline{A}B + \overline{B}C \subset B$