TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

# Toán rời rạc

**Nguyễn Khánh Phương**

**Bộ môn Khoa học máy tính**
**E-mail: phuongnk@soict.hust.edu.vn**

## Phần thứ nhất

# LÝ THUYẾT TỔ HỢP

## Combinatorial Theory

**Nguyễn Khánh Phương**

Bộ môn Khoa học Máy tính,
Viện CNTT và Truyền thông,
Đại học Bách khoa Hà nội,
E-mail: phuongnk@soict.hust.edu.vn

# Nội dung phần 1

Chương 0. Tập hợp

Chương 1. Bài toán đếm

**Chương 2. Bài toán tồn tại**

Chương 3. Bài toán liệt kê tổ hợp

Chương 4. Bài toán tối ưu tổ hợp

# Nội dung chi tiết

1. **Giới thiệu bài toán**
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet

# 1. Giới thiệu bài toán

- Trong chương trước, ta đã tập trung chú ý vào việc đếm số cấu hình tổ hợp. Trong những bài toán đó, sự tồn tại của các cấu hình là hiển nhiên, và công việc chính là đếm số phần tử thỏa mãn tính chất đặt ra.
- Tuy nhiên, trong rất nhiều bài toán tổ hợp, việc chỉ ra sự tồn tại của 1 cấu hình thỏa mãn các tính chất cho trước là hết sức khó khăn.
  – Chẳng hạn khi 1 cầu thủ cần tính toán các nước đi của mình để giải đáp xem liệu có khả năng thắng hay không ?
  – Một người giải mật mã cần tìn kiếm chìa khóa giải cho một bức mật mã mà anh ta không biết liệu đây có đúng là bức điện thật được mã hóa của đối phương hay không, hay chỉ là bức mật mã của đối phương tung ra nhằm đảm bảo an toàn cho bức điện thật...
- Trong tổ hợp xuất hiện vấn đề thứ 2 rất quan trọng là: xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp với các tính chất cho trước – ***bài toán tồn tại tổ hợp***.

# Bài toán về 36 sĩ quan

- Bài toán này được Euler đề nghị, nội dung của nó như sau:

*"Có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: thiếu úy, trung uý, thượng uý, đại uý, thiếu tá, trung tá về tham gia duyệt binh ở sư đoàn bộ. Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi một hàng ngang cũng như mỗi một hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và của cả 6 cấp bậc sĩ quan."*

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# Bài toán về 36 sĩ quan

- Sử dụng:
  - A, B, C, D, E, F để chỉ các phân hiệu trung đoàn,
  - a, b, c, d, e, f để chỉ các cấp bậc sĩ quan.
- Bài toán này có thể tổng quát hóa nếu thay con số 6 bởi $n$.
- Trong trường hợp $n = 4$, một lời giải của bài toán là

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ab | Dd | Ba | Cc |
| Bc | Ca | Ad | Db |
| Cd | Bb | Dc | Aa |
| Da | Ac | Cb | Bd |

- Một lời giải trong trường hợp $n = 5$:

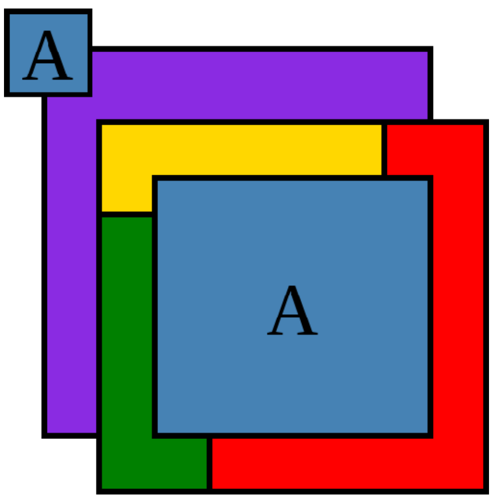
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Aa | Bb | Cc | Dd | Ee |
| Cd | De | Ea | Ab | Bc |
| Eb | Ac | Bd | Ce | Da |
| Be | Ca | Db | Ec | Ad |
| Dc | Ed | Ae | Ba | Cb |

# Bài toán về 36 sĩ quan

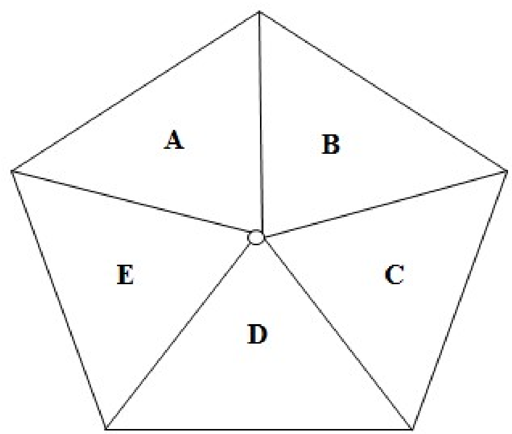
- Do lời giải của bài toán có thể biểu diễn bởi 2 hình vuông với các chữ cái la tinh hoa và thường chồng cạnh nhau nên bài toán tổng quát đặt ra còn được biết dưới tên gọi bài toán về *hình vuông la tinh trực giao*.
- Euler đã mất rất nhiều công sức để tìm lời giải cho bài toán 36 sĩ quan thế nhưng ông đã không thành công. Từ đó ông đã đề ra một giả thuyết tổng quát là: Không tồn tại hình vuông la tinh trực giao cấp $n = 4k + 2$.
- Tarri, năm 1901 chứng minh giả thuyết đúng với $n = 6$, bằng cách duyệt tất cả mọi khả năng xếp.
- Năm 1960 ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker, Srikanda chỉ ra được một lời giải với $n = 10$ và sau đó chỉ ra phương pháp xây dựng hình vuông la tinh trực giao cho mọi $n = 4k+2$, với $k > 1$.

# Bài toán 4 màu

- Có những bài toán mà nội dung của nó có thể giải thích cho bất kỳ ai, tuy nhiên lời giải của nó thì ai cũng có thể thử tìm, nhưng mà khó có thể tìm được. Bài toán 4 màu là một bài toán như vậy.
- Bài toán có thể phát biểu trực quan như sau: Chứng minh rằng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có hai nước láng giềng nào lại bị tô bởi cùng một màu.
- Chú ý rằng, ta xem như mỗi nước là một vùng liên thông và hai nước được gọi là láng giềng nếu chúng có chung biên giới là một đường liên tục.




A không phải là một vùng liên thông

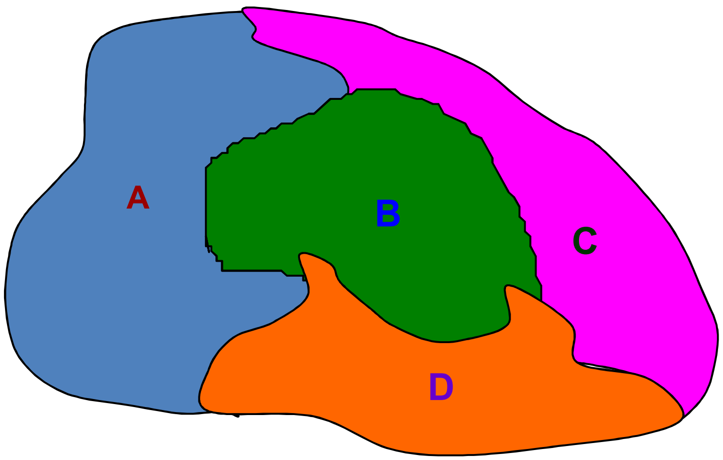



A và C không phải là láng giềng

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# Bài toán 4 màu

- Con số 4 không phải là ngẫu nhiên. Người ta đã chứng minh được rằng mọi bản đồ đều được tô với số mầu lớn hơn 4, còn với số mầu ít hơn 4 thì không tô được. Chẳng hạn bản đồ gồm 4 nước ở hình dưới không thể tô được với số mầu ít hơn 4.




NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# Bài toán 4 màu

- Vấn đề này được đề cập trong bức thư của Augustus De Morgan gửi W. R. Hamilton năm 1852 (De Morgan biết sự kiện này từ Frederick Guthrie, còn Guthrie từ người anh trai của mình...)
- Trong 110 năm rất nhiều chứng minh được công bố nhưng đều có lỗi.
- Năm 1976, Appel và Haken đã đưa ra chứng minh ***bằng máy tính điện tử!***

**K. Appel and W. Hankin,** "Every planar map is 4-colorable," Bulletin of the AMS, Volume 82 (1976), 711-712.

# Nội dung chi tiết

1. Giới thiệu bài toán
2. **Các kỹ thuật chứng minh cơ bản**
3. Nguyên lý Dirichlet

# 2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản

**2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct Proof)**

2.2. Chứng minh bằng phản chứng (Proof by Contradiction)

2.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học (Proof by Mathematical Induction)

# 2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct proofs)

**Chúng ta bắt đầu bằng ví dụ chứng minh tính bắc cầu của tính chất chia hết.**

**Định lý. Nếu *a* chia hết *b* và *b* chia hết *c* thì *a* chia hết *c*.**

**Chứng minh.** Theo giả thiết, và định nghĩa tính chia hết, ta suy ra tồn tại các số nguyên $k_1$ và $k_2$ sao cho

$$a = b\,k_1 \text{ và } b = c\,k_2.$$

- Suy ra

$$a = b\,k_2 = c\,k_1\,k_2.$$

- Đặt $k = k_1\,k_2$. Ta có $k$ là số nguyên và $a = c\,k$, do đó theo định nghĩa về tính chia hết, $a$ chia hết $c$.

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# 2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct proofs)

**Nếu P, thì Q (If P, Then Q)**

- Phần lớn các định lý (các bài tập hay bài kiểm tra) mà bạn cần chứng minh hoặc ẩn hoặc hiện có dạng “Nếu P, Thì Q".
- Trong ví dụ vừa nêu: **Nếu *a* chia hết *b* và *b* chia hết *c* thì *a* chia hết *c*.**
  - "P" là “Nếu *a* chia hết *b* và *b* chia hết *c* " còn "Q" là "*a* chia hết *c*".
- Đây là dạng phát biểu chuẩn của rất nhiều định lý.
- Chứng minh trực tiếp có thể hình dung như là một dãy các suy diễn bắt đầu từ “P” và kết thúc bởi "Q“:

$$P \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q$$

- Phần lớn các chứng minh là chứng minh trực tiếp. Khi phải chứng minh, bạn nên thử bắt đầu từ chứng minh trực tiếp, ngoại trừ tình huống bạn có lý do xác đáng để không làm như vậy.

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# Ví dụ

**Ví dụ 1.** Mỗi số nguyên lẻ đều là hiệu của hai số chính phương.

- **Chứng minh.** Giả sử $2a+1$ là số nguyên lẻ, khi đó

$$2a+1 = (a+1)^2 - a^2.$$

**Ví dụ 2.** Nếu $n$ là số nguyên chẵn thì $n^2$ cũng là số nguyên chẵn

- **Chứng minh.** Vì $n$ là số nguyên chẵn → $n = 2a$

→ $n^2 = (2a)^2 = 2(2a^2)$

→ $n^2$ là số chẵn

# 2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct Proof)

**2.2. Chứng minh bằng phản chứng (Proof by Contradiction)**

2.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học (Proof by Mathematical Induction)

# 2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Trong chứng minh bằng phản chứng ta sử dụng các giả thiết và mệnh đề phủ định kết quả cần chứng minh và từ đó cố gắng suy ra các điều phi lý hoặc các mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.
- Nghĩa là nếu phải chứng minh "Nếu P, Thì Q", ta giả thiết rằng "P và Not Q" là đúng. Mâu thuẫn thu được có thể là một kết luận trái với một trong những giả thiết đã cho hoặc điều phi lý, chẳng hạn như 1 = 0.

# 2.2. Chứng minh bằng phản chứng

**Ví dụ 1**. Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

**Giải**:

- Chú ý rằng, cần và đủ để 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác là tổng độ dài của 2 đoạn nhỏ phải lớn hơn độ dài của đoạn lớn.
- Sắp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài, ta có:

$$10 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_7 < 100.$$

- Cần chứng minh rằng trong dãy đã xếp luôn tìm được 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối. Giả thiết điều này không xảy ra.

# 2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Từ giả thiết phản chứng suy ra đồng thời xảy ra các bất đẳng thức:

$$a_1 + a_2 \le a_3,$$
$$a_2 + a_3 \le a_4,$$
$$a_3 + a_4 \le a_5,$$
$$a_4 + a_5 \le a_6,$$
$$a_5 + a_6 \le a_7.$$

- Từ giả thiết $a_1$, $a_2$ có giá trị lớn hơn 10, ta nhận được $a_3 > 20$. Từ $a_2 > 10$ và $a_3 > 20$, ta nhận được $a_4 > 30$, ..., cứ như vậy ta nhận được $a_5 > 50$, $a_6 > 80$ và $a_7 > 130$.
- Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn với giả thiết các độ dài nhỏ hơn 100 và điều đó chứng minh kết luận của Ví dụ 1.

# 2.2. Chứng minh bằng phản chứng

**Ví dụ 2.** Các đỉnh của một thập giác đều được đánh số bởi các số nguyên 0, 1, ... , 9 một cách tuỳ ý. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh liên tiếp có tổng các số là lớn hơn 13.

**Giải:** Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ là các số gán cho các đỉnh của 1, 2,..., 10 của thập giác. Giả sử ngược lại là không tìm được ba đỉnh nào thoả mãn khẳng định của ví dụ. Khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 13,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \le 13,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_9 + x_{10} + x_1 \le 13,$$
$$x_{10} + x_1 + x_2 \le 13,$$

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# 2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Cộng vế với vế tất cả các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$3(x_1 + x_2 + . . . + x_{10}) \le 130.$$

- Mặt khác do

$$3(x_1 + x_2 + . . . + x_{10})$$
$$= 3\ (0 + 1 + 2 + . . . + 9)$$
$$= 135,$$

- Suy ra

$$135 = 3(x_1 + x_2 + . . . + x_{10}) \le 130.$$

- Mâu thuẫn thu được đã chứng tỏ khẳng định trong ví dụ là đúng.

## 2.2. Chứng minh bằng phản chứng

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng không thể nối 31 máy vi tính thành một mạng sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác.

**Giải:** Giả sử ngược lại là tìm được cách nối 31 máy sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác. Khi đó số lượng kênh nối là

$$5\times31/2 = 75,5 \text{ ?!}$$

Điều phi lý thu được đã chứng minh khẳng định trong ví dụ là đúng.

# 2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct Proof)

2.2. Chứng minh bằng phản chứng (Proof by Contradiction)

**2.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)**

2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học (Proof by Mathematical Induction)

## 2.3. Chứng minh bằng phản đề

- Chứng minh bằng phản đề sử dụng sự tương đương của hai mệnh đề "P kéo theo Q" và "Phủ định Q kéo theo phủ định P".

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Ví dụ:

khẳng định "Nếu đó là xe của tôi thì nó có màu mận"

là tương đương với

"Nếu xe đó không có màu mận thì nó không phải của tôi".

- Do đó, để chứng minh "Nếu P, Thì Q" bằng phương pháp phản đề, ta chứng minh "Nếu phủ định Q thì có phủ định P" ("If Not Q, Then Not P").

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# Ví dụ $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

**Ví dụ 1.** Nếu $x$ và $y$ là hai số nguyên sao cho $x+y$ là số chẵn, thì $x$ và $y$ có cùng tính chẵn lẻ.

**Chứng minh.** Mệnh đề phản đề của khẳng định đã cho là

"Nếu $x$ và $y$ là hai số nguyên không cùng chẵn lẻ, thì tổng của chúng là số lẻ."

- Vì thế ta giả sử rằng $x$ và $y$ không cùng chẵn lẻ. Không giảm tổng quát, giả sử rằng $x$ là chẵn còn $y$ là lẻ. Khi đó ta tìm được các số nguyên $k$ và $m$ sao cho $x = 2k$ và $y = 2m+1$. Bây giờ ta tính tổng $x+y = 2k + 2m + 1 = 2(k+m) + 1$, mà rõ ràng là số lẻ.
- Từ đó suy ra khẳng định cuả ví dụ là đúng.

# Ví dụ $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

**Ví dụ 2.** Nếu *n* là số nguyên dương sao cho *n* mod 4 là bằng 2 hoặc 3, thế thì *n* không là số chính phương.

**Chứng minh.** Ta sẽ chứng minh mệnh đề phản đề:

"Nếu *n* là số chính phương thì *n* mod 4 phải bằng 0 hoặc 1."

- Giả sử $n = k^2$. Có 4 tình huống có thể xảy ra.
  - Nếu *k* mod 4 = 0, thì $k = 4q$, với *q* nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16q^2 = 4(4q^2)$ , suy ra *n* mod 4 = 0.
  - Nếu *k* mod 4 = 1, thì $k = 4q + 1$, với *q* nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16q^2 + 8q + 1 = 4(4q^2 + 2q) + 1$, suy ra *n* mod 4 = 1.
  - Nếu *k* mod 4 = 2, thì $k = 4q + 2$, với *q* nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16q^2 + 16q + 4 = 4(4q^2 + 4q + 1)$, suy ra *n* mod 4 = 0.
  - Nếu k mod 4 = 3, thì $k = 4q + 3$, với *q* nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16q^2 + 24q + 9 = 4(4q^2 + 6q + 2) + 1$, suy ra *n* mod 4 = 1.

# 2.3. Chứng minh bằng phản đề

Chứng minh bằng phản đề khác chứng minh phản chứng ở chỗ nào?

Ta xét việc áp dụng chúng vào việc chứng minh "If P, Then Q”:

- Chứng minh bằng phản chứng: Giả sử “có P và Not Q”, ta cố gắng chỉ ra điều mâu thuẫn → giả sử là sai.
- Chứng minh bằng phản đề: Giả sử có Not Q và ta phải chứng minh not P.

Phương pháp chứng minh bằng phản đề có ưu điểm là bạn có mục đích rõ ràng là: Chứng minh Not P. Trong phương pháp phản chứng, bạn phải cố gắng chỉ ra điều mâu thuẫn mà ngay từ đầu bạn chưa thể xác định được đó là điều gì.

# 2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct Proof)

2.2. Chứng minh bằng phản chứng (Proof by Contradiction)

2.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

**2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học (Proof by Mathematical Induction)**

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

## 2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học

- Đây là kỹ thuật chứng minh rất hữu ích khi ta phải chứng minh mệnh đề $P(n)$ là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.
- Tương tự như nguyên lý "hiệu ứng domino".
- Sơ đồ chứng minh:

$$\frac{\begin{array}{l} P(n_0) \\ \forall n \geq n_0\ (P(n) \rightarrow P(n+1)) \end{array}}{\text{Kết luận: } \forall n \geq n_0\ P(n)}$$

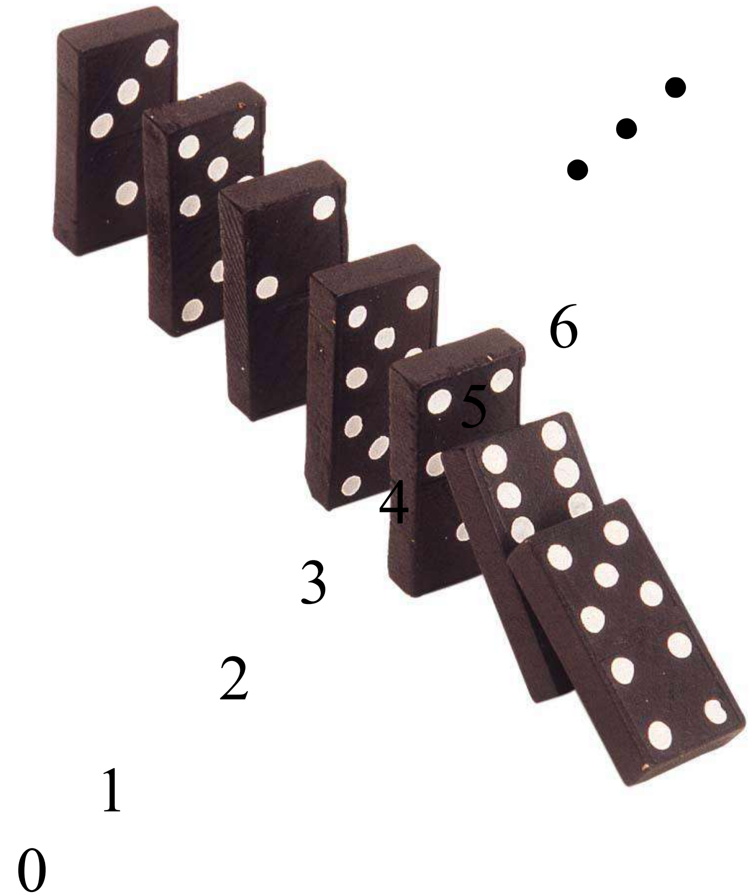
*"Nguyên lý qui nạp toán học thứ nhất"*

*"The First Principle of Mathematical Induction"*

# The "Domino Effect"

- **Bước #1:** Domino #0 đổ.
- **Bước #2:** Với mọi $n \in \mathbf{N}$, nếu domino #$n$ đổ, thì domino #$n$+1 cũng đổ.
- **Kết luận:** Tất cả các quân bài domino đều đổ!

**Chú ý:**
điều này xảy ra
ngay cả khi
có vô hạn
quân bài domino!



# Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp yếu

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq n_0$ .

- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(n_0)$ là đúng.
- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(n)$ là đúng
- **Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq n_0$.

## Qui nạp mạnh (Second Principle of Induction – Strong Induction)

Sơ đồ chứng minh:

- $P(n_0)$
  $\forall n \geq n_0 : (\underbrace{\forall\ n_0 \leq k \leq n\ \ P(k)}_{P \text{ là đúng trong } mọi \text{ tình huống trước}}) \rightarrow P(n+1)$
  Kết luận $\forall n \geq n_0 : P(n)$
- Sự khác biệt với sơ đồ qui nạp "yếu" ở chỗ:
  – Bước chuyển qui nạp sử dụng giả thiết *mạnh* hơn: $P(k)$ là đúng cho *mọi* số nhỏ hơn $k \leq n$, chứ không phải chỉ riêng với $k=n$ như trong nguyên lý qui nạp thứ nhất.

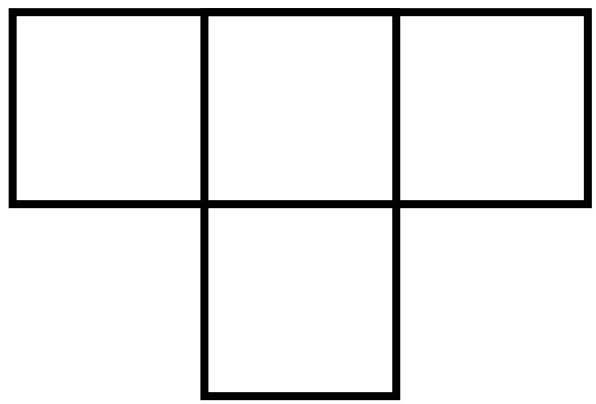
# Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp mạnh

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq n_0$.

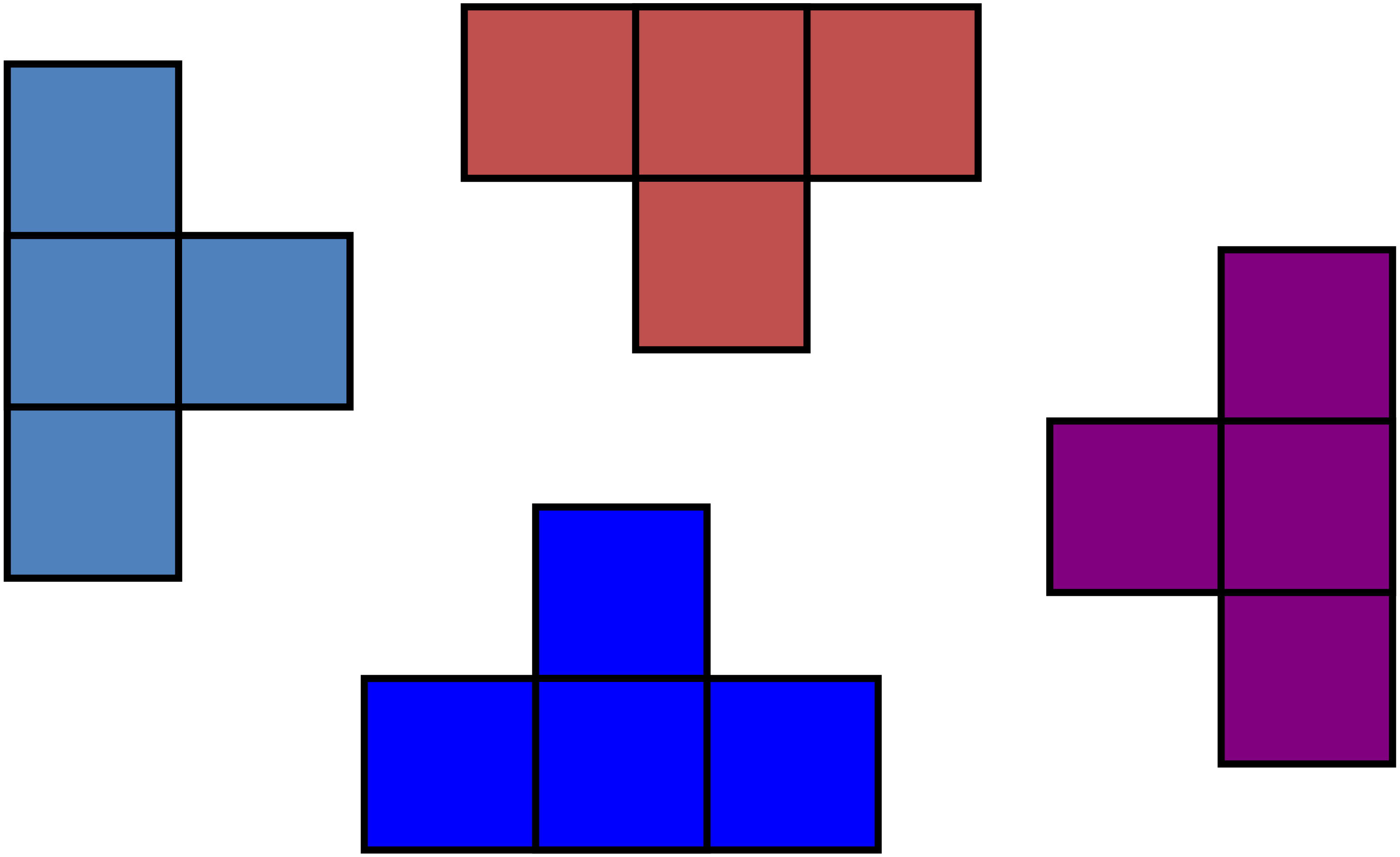
- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(n_0)$ là đúng.
- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(k)$ là đúng $\forall\ n_0 \leq k \leq n$.
- **Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq n_0$.

# Ví dụ 1

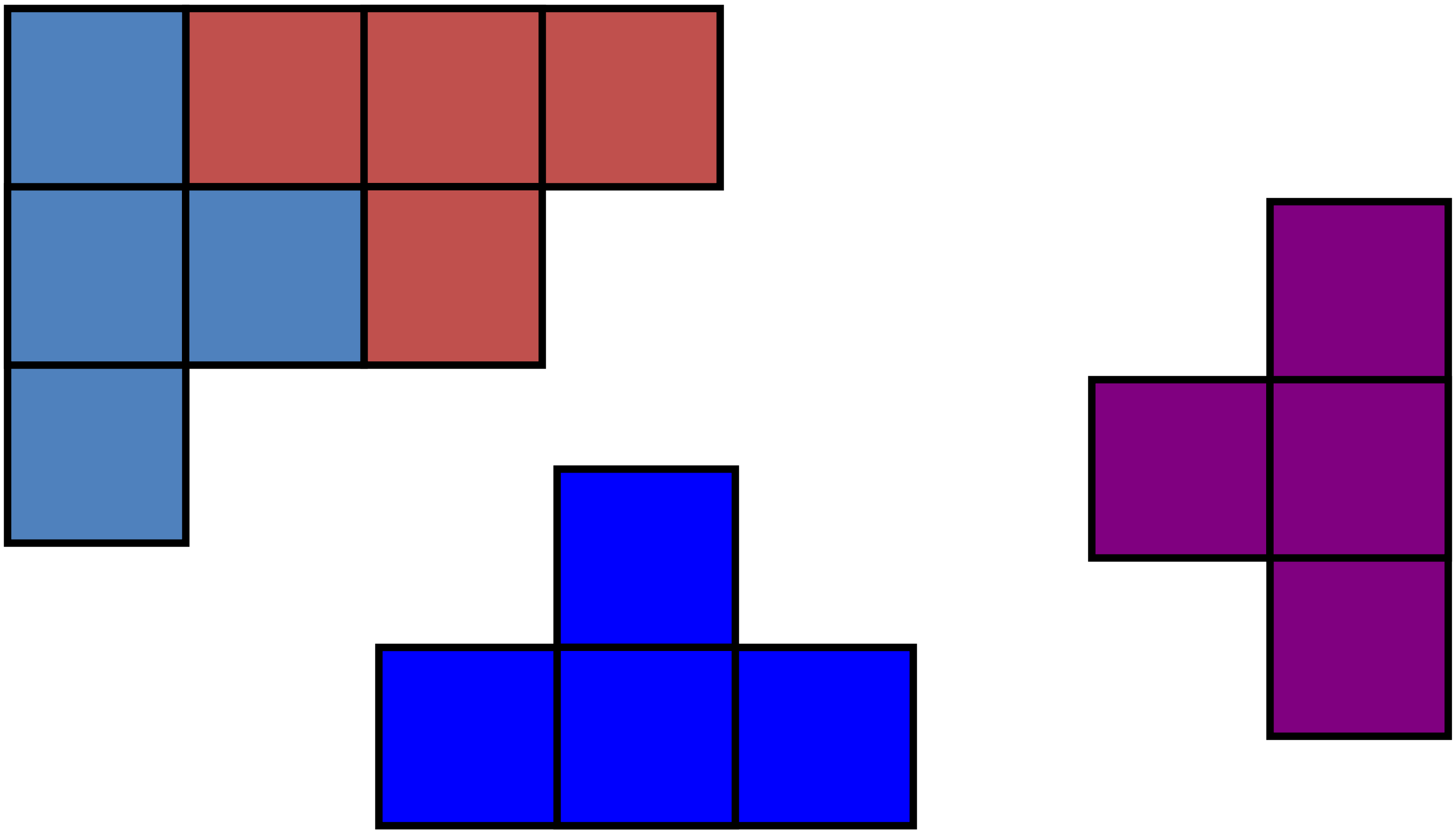
Chứng minh rằng luôn có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$ $(n > 1)$ bởi các quân bài hình chữ T (T-omino).



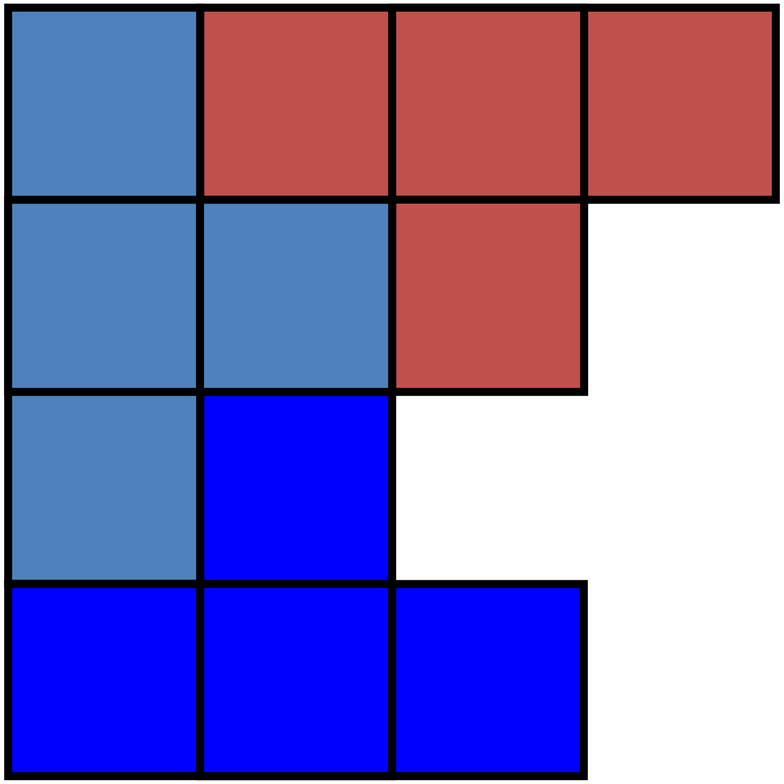
# Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2$ x $2^2$

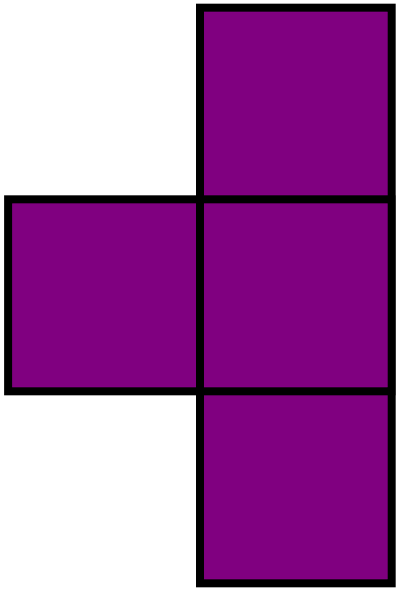


# Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2$ x $2^2$

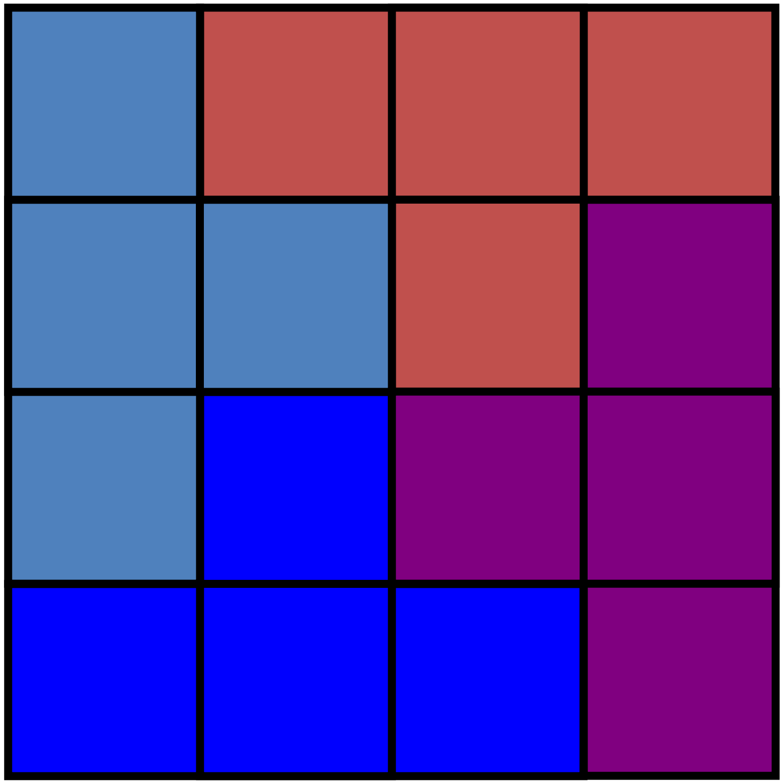


# Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2$ x $2^2$





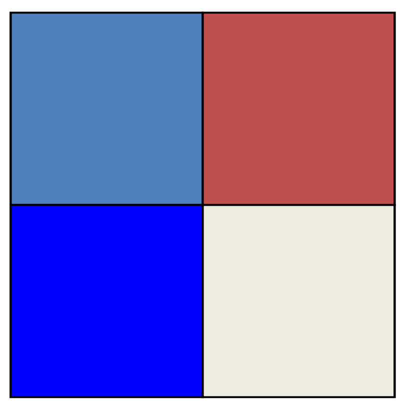
# Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2$ x $2^2$



# Bước chuyển qui nạp

Giả sử ta có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$. Ta phải chứng minh có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

Thực vậy, chia bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ra thành 4 phần, mỗi phần kích thước $2^n \times 2^n$. Theo giả thiết qui nạp mỗi phần này đều có thể phủ kín bởi các quân bài chữ T. Đặt chúng vào bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ta thu được cách phủ cần tìm.



# Ví dụ 2

- Kết thúc một giải vô địch bóng chuyền gồm *n* đội tham gia, trong đó các đội thi đấu vòng tròn một lượt người ta mời các đội trưởng của các đội ra đứng thành một hàng ngang để chụp ảnh.
- P(*n*): Luôn có thể xếp *n* đội trưởng ra thành một hàng ngang sao cho ngoại trừ hai người đứng ở hai mép, mỗi người trong hàng luôn đứng cạnh một đội trưởng của đội thắng đội mình và một đội trưởng của đội thua đội mình trong giải.

# Ví dụ 2

**Chứng minh.** Ta chứng minh bằng qui nạp toán học.

- Cơ sở qui nạp: Rõ ràng P(1) là đúng.
- Giả sử P($n$-1) là đúng, ta chứng minh P($n$) là đúng.
  - Trước hết, ta xếp $n$-1 đội trưởng của các đội 1, 2,..., $n$-1. Theo giả thiết qui nạp, luôn có thể xếp họ ra thành hàng ngang thoả mãn điều kiện đầu bài. Không giảm tổng quát ta có thể giả thiết hàng đó là:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow n\text{-}1$$

(1 thắng 2, 2 thắng 3, … $n$-2 thắng $n$-1)

# Ví dụ 2

– Bây giờ ta sẽ tìm chỗ cho đội trưởng của đội $n$. Có 3 tình huống:
  - Nếu đội $n$ thắng đội 1, thì hàng cần tìm là:

    $n \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow n\text{-}1.$
  - Nếu đội $n$ thua đội $n$-1, thì hàng cần tìm là:

    $1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow n\text{-}1 \rightarrow n\ .$
  - Nếu đội $n$ thua đội 1 và thắng đội $n$-1:
    – Gọi $k$ là chỉ số nhỏ nhất sao cho đội $n$ thắng đội $k$.
    – Rõ ràng tồn tại $k$ như vậy.
    – Hàng cần thu được từ hàng gồm $n$-1 đội đã xếp bằng cách chèn đội trưởng đội $n$ vào vị trí giữa đội trưởng của đội $k$-1 và đội $k$.

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow n\text{-}1$$

(1 thắng 2, 2 thắng 3, … $n$-2 thắng $n$-1)

# Ví dụ 2

$1 \to 2 \to \dots \to k-1 \to k \to k+1 \to \dots \to n-1$

Hàng cần tìm: $1 \to \dots \to k-1 \to n \to k \to k+1 \to \dots \to n-1$

# Ví dụ 3

**Với mọi số nguyên $n \geq 0$, ta có $10 | n^5 - n$**

Chứng minh: sử dụng quy nạp mạnh

- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(0)$ là đúng.

Với $n = 0$: ta có $0^5$-0=0 và 10|0 → mệnh đề đúng với $n = 0$

- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(k)$ là đúng $\forall\ 0 \leq k \leq n$.

Giả sử $k \geq 0$, và $10 \mid k^5 - k$ là đúng với $0 \leq k \leq n$

Vì $0 \leq n\text{-}1 \leq n$, theo giả thiết qui nạp ta có P($n$-1) là đúng, tức là

$(n\text{-}1)^5 - (n\text{-}1) = 10c$ với $c$ là số nguyên

- **Bước chuyển qui nạp: Chứng minh $P(n+1)$ là đúng**

$$10 \mid (n+1)^5 - (n+1)$$

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# Ví dụ 3

$$(n+1)^5 - (n+1)$$

$$= [(n-1)+2]^5 - [(n-1)+2]$$

$$= (n-1)^5 + 10(n-1)^4 + 40(n-1)^3 + 80(n-1)^2 + 80(n-1) + 32$$

$$-(n-1) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2$$

$$= \underbrace{\boxed{[(n-1)^5 - (n-1)]}}_{10c} + 10[(n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3]$$

$$= 10\,[\underbrace{c + (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3}_{\text{nguyên}}]$$

$$\rightarrow 10 \mid (n+1)^5 - (n+1)$$

# Ví dụ 3

**Với mọi số nguyên $n \geq 0$, ta có $10 | n^5 - n$**

Chứng minh: sử dụng qui nạp mạnh

- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(0)$ là đúng.

Với $n = 0$: ta có $0^5$-0=0 và 10|0 → mệnh đề đúng với $n = 0$

Với $n = 1$: ta có $1^5$-1=0 và 10|0 → mệnh đề đúng với $n = 1$

- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(k)$ là đúng $\forall\ 0 \leq k \leq n$.

Giả sử $k \geq 0$, và $10 \mid k^5 - k$ là đúng với $0 \leq k \leq n$

Vì $\boxed{0 \leq n\text{-}1 \leq n}$, theo giả thiết qui nạp ta có P($n$-1) là đúng, tức là

$(n\text{-}1)^5 - (n\text{-}1) = 10c$ với $c$ là số nguyên

- **Bước chuyển qui nạp: Chứng minh $P(n+1)$ là đúng**

$$10 \mid (n+1)^5 - (n+1)$$

NGUYỄN KHÁNH PHƯƠNG
Bộ môn KHMT – ĐHBK HN

# Ví dụ 4

**Cho $g_n$ là dãy số được định nghĩa đệ qui như sau $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 6$, $g_n = (n^3 - 3n^2 + 2n)g_{n-2}$ với mọi $n \geq 4$. Chứng minh $g_n = n!$ $\forall n \in N$**

Chứng minh: Sử dụng qui nạp mạnh

**Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(1)$ đúng

Với $n = 1$: ta thấy $1! = 1$, nên mệnh đề đúng với $n = 1$.

**Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(k)$ là đúng $\forall\ 1 \leq k \leq n$.

Giả sử $1 \leq k \leq n$, và $g_k = k!$.

**Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.

$$g_{n+1} = (n+1)!$$

# Nội dung chi tiết

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. **Nguyên lý Dirichlet**

# 3. Nguyên lý Dirichlet

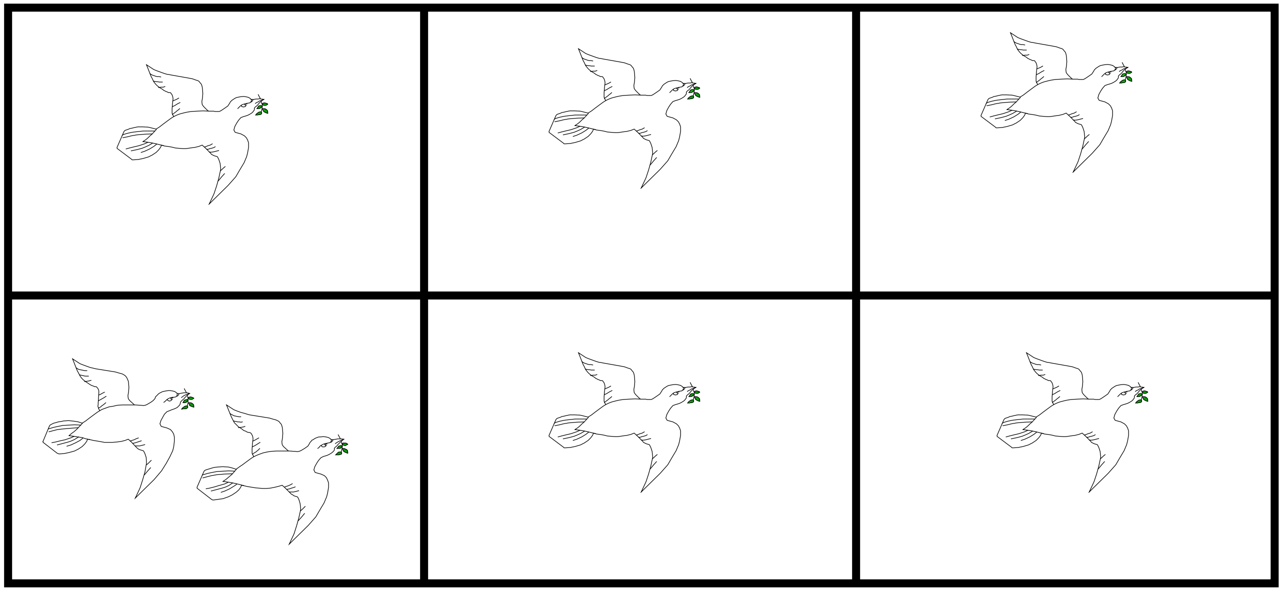
## 3.1. Phát biểu nguyên lý

## 3.2. Các ví dụ ứng dụng

# 3.1. Phát biểu nguyên lý

***Nếu xếp nhiều hơn n đối tượng vào n cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa ít ra là hai đối tượng ( ≥ 2 ).***

- 7 đối tượng
- 6 hộp



**Chứng minh.** (Phản chứng).

Giả sử ngược lại là không tìm được cái hộp nào chứa **≥ 2** đối tượng.

➔ Điều đó có nghĩa là mỗi cái hộp chứa **≤ 1** đối tượng.

➔ Tổng số đối tượng xếp trong *n* cái hộp ≤ ***n***

➔ Trái với giả thiết là có nhiều hơn *n* đối tượng được xếp trong chúng.

# 3.1. Phát biểu nguyên lý

- Nếu xếp nhiều hơn $n$ con chim bồ câu vào $n$ chuồng, thì bao giờ cũng tìm được một cái chuồng có nhiều hơn 1 con chim (chứa >=2 con).

Có $m$ = 10 con chim vào $n$ = 9 cái chuồng. Vì 10 lơn hơn 9, nguyên lý cho ta: có ít nhất 1 cái chuồng có chứa nhiều hơn 1 con chim

Có $m$ = 10 con chim vào $n$ = 9 cái chuồng. Vì 10 lơn hơn 9, nguyên lý phát biểu rằng: có ít nhất 1 cái chuồng có chứa nhiều hơn 1 con chim. Trong trường hợp này, có 2 chuồng ở góc trên chứa 2 con chim, chuồng ở góc trái dưới trống. Nguyên lý không nói gì về trường hợp chuồng rỗng

# 3.1. Phát biểu nguyên lý

Lập luận trên đã được nhà toán học người Đức là Dirichlet vận dụng thành công vào việc giải quyết rất nhiều bài toán tồn tại tổ hợp.

Trong tài liệu tiếng Anh lập luận đó lại được trình bày trong ngôn ngữ của các con chim bồ câu:

> *"Nếu đem nhốt nhiều hơn n con chim bồ câu vào n cái lồng thì bao giờ cũng tìm được ít nhất 1 cái lồng chứa ít ra là 2 con chim bồ câu".*

Vì thế nguyên lý còn có tên gọi là "Nguyên lý về các lồng chim bồ câu".

# Ví dụ

***Nếu xếp nhiều hơn n đối tượng vào n cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa ít ra là hai đối tượng ( ≥ 2 ).***

**Ví dụ 1.** Trong số 13 người luôn tìm được 2 người sinh cùng tháng vì chỉ có tất cả 12 tháng.

**Ví dụ 2.** Trong kì thi học sinh giỏi điểm bài thi được đánh giá bởi 1 số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất phải có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được 2 học sinh có kết quả thi như nhau?

Giải. Có 101 kết quả điểm thi khác nhau

➔ Theo nguyên lý Dirichlet, số học sinh cần tìm là 102

## Nguyên lý Dirichlet tổng quát
## Generalized Pigeonhole Principle

*Nguyên lý Direchlet: "Nếu xếp nhiều hơn n đối tượng vào n cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa ≥* **2** *đối tượng".*

Khi số lượng đối tượng vào *k* cái hộp vượt quá số lượng cái hộp nhiều lần thì rõ ràng khẳng định trong nguyên lý về sự tồn tại cái hộp chứa ít ra là 2 đối tượng là quá ít. Trong trường hợp như vậy ta sử dụng nguyên lý Dirichlet tổng quát sau đây:

*"Nếu đem bỏ n đối tượng vào k cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa* $\geq \lceil n/k \rceil$ *đối tượng".*

Ở đây ký hiệu $\lceil \alpha \rceil$ gọi là phần nguyên giả của số thực $\alpha$ - theo định nghĩa là số nguyên nhỏ nhất còn lớn hơn hoặc bằng $\alpha$.

## Nguyên lý Dirichlet tổng quát
## Generalized Pigeonhole Principle

*“Nếu đem bỏ n đối tượng vào k cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa ≥ $\lceil n/k \rceil$ đối tượng”.*

Chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử khẳng định của nguyên lý là không đúng.

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{ mỗi hộp chứa } \le \lceil n/k \rceil - 1 < [(n/k)+1] - 1 = n/k \text{ đối tượng} \\ \text{Có } k \text{ cái hộp} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ có } < k(n/k) = n \text{ đối tượng}$

Mâu thuẫn thu được đã chứng minh nguyên lý.

# Ví dụ

*"Nếu đem bỏ n đối tượng vào k cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa ≥ $\lceil n/k \rceil$ đối tượng".*

**Ví dụ 3.** Trong nhóm gồm 100 người có ít nhất bao nhiêu người sinh cùng 1 tháng ?.

**Giải**: Xếp những người cùng sinh 1 tháng vào 1 nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 1 nhóm có không ít hơn $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người

**Ví dụ 4.** Có 5 loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau?

Giải. Số sinh viên ít nhất cần có để đảm bảo rằng có 6 sinh viên cùng nhận học bổng như nhau là số nguyên nhỏ nhất $n$ sao cho $\lceil n/5 \rceil = 6$. Số nguyên nhỏ nhất đó là $n = 5 \times 5 + 1 = 26$.

Vậy 26 là số lượng sinh viên nhỏ nhất để đảm bảo chắc chắn là có 6 sinh viên cùng hưởng 1 loại học bổng

# Ví dụ

**Ví dụ 5**. Cần tối thiểu bao nhiêu mã vùng để đảm bảo rằng 25 triệu chiếc điện thoại, mỗi chiếc gán với một số điện thoại duy nhất có dạng 10 số NXX-NXX-XXXX với 3 số đầu tiên là mã vùng, N biểu diễn các số từ 2 đến 9, và X biểu diễn các số từ 0 đến 9

**Giải**: Số lượng số điện thoại có dạng NXX-XXXX là: 8 triệu

Vậy theo nguyên lý Dirichlet, trong số 25 triệu chiếc điện thoại, luôn tìm được ít nhất $\lceil 25/8 \rceil = 4$ chiếc có số giống nhau. Vì vậy, cần ít nhất 4 mã vùng để đảm bảo rằng 25 triệu chiếc điện thoại không có chiếc nào bị trùng số.

# Ví dụ

*“Nếu đem bỏ n đối tượng vào k cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa $\geq \lceil n/k \rceil$ đối tượng”.*

**Ví dụ 6**. Có 50 cái giỏ đựng táo. Giỏ nào cũng đựng táo nhưng không chứa nhiều hơn 24 quả táo. Chứng minh rằng có ít nhất 3 cái giỏ có chứa cùng số táo.

**Giải**:

Số đối tượng ~ Số giỏ ➔ 50 giỏ

Số hộp ~ số lượng táo trong mỗi giỏ → 24 hộp.

| 1 | 2 | 3 | 24 |
|---|---|---|---|

Ta sẽ đặt mỗi giỏ vào một trong số 24 cái hộp tùy thuộc vào số táo có trong giỏ.

Vậy theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất một hộp có chứa $\lceil 50/24 \rceil = 3$ cái giỏ

➔ có ít nhất 3 cái giỏ thuộc cùng 1 hộp (cùng số táo)

# Ví dụ

**Ví dụ 7**. Chứng minh rằng trong 4 số tự nhiên bất kì, luôn tìm được 2 số có hiệu chia hết cho 3

**Giải**: Khi chia một số tự nhiên cho 3, có thể có 3 số dư (0, 1 hoặc 2). Ta có 4 số, vậy theo nguyên lí Dirichlet, cứ 2 trong số chúng phải có cùng số dư khi chia cho 3, nên ta có thể viết:

$n_1 = 3k_1 + r$

$n_2 = 3k_2 + r$

với $r$ là số dư khi chia cho 3. Khi đó hiệu của chúng là

$n_1 - n_2 = (3k_1+r) - (3k_2+r) = 3(k_1-k_2)$

→ $n_1 - n_2$ chia hết cho 3

# Ví dụ

**Ví dụ 8**. 15 sinh viên viết chung 1 quyển báo cáo. Lan mắc 13 lỗi, mỗi sinh viên còn lại mắc ít hơn 13 lỗi. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 sinh viên mắc cùng 1 số lượng lỗi.

*Chứng minh:*

Số đối tượng ~ Số sinh viên

Số hộp ~ số lượng lỗi sinh viên mắc phải

- Hộp 0: sinh viên không mắc lỗi,
- Hộp 1: sinh viên mắc đúng 1 lỗi
- …..

Hộp thứ 13 chỉ có sinh viên Lan.

Áp dụng nguyên lý Direchlet: xếp 14 sinh viên vào 13 cái hộp (0,1…,12)→ luôn tồn tại 1 cái hộp chứa >= 2 sinh viên

➔ Ít nhất 2 sinh viên cùng mắc số lượng lỗi như nhau

# Ví dụ

**Ví dụ 9**. Giả sử tập S gồm 6 số nguyên từ 1 đến 12. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 tập con khác rỗng của tập S sao cho tổng của các số trong 2 tập con này là bằng nhau.

- Số tập con khác rỗng của S = ?

  $= 2^6 - 1 = 63$

- Tổng của các phần tử trong S lớn nhất là 7+8+9+10+11+12 = 57.

➔ Tổng của các phần tử của bất kì tập con khác rỗng nào của S đều có giá trị ít nhất là 1 và lớn nhất là 57; có 57 khả năng.

➔ đpcm

# Ví dụ

**Ví dụ 10**. Trong một phòng họp bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là bằng nhau.

**Giải.** Gọi số người dự họp là *n*, khi đó số người quen của 1 người nào đó trong phòng họp chỉ có thể nhận các giá trị từ 0 đến *n*-1.

Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai cả) và có người có số người quen là *n*-1 (tức là quen tất cả). Vì vậy, theo số lượng người quen ta chỉ có thể phân *n* người thành *n*-1 nhóm

Theo nguyên lý Dirichlet, suy ra có ít nhất một nhóm phải có không ít hơn 2 người, tức là luôn tìm được ít ra là 2 người có số người quen là bằng nhau


*n* nhóm (*n*-1) nhóm

# Ví dụ

**Ví dụ 11.** Trong 1 tháng gồm 30 ngày, một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất 1 trận, nhưng không chơi quá 45 trận. Hãy chứng minh rằng phải tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận

**Giải**: Giả sử $a_j$ là tổng số trận thi đấu cho đến hết ngày thứ $j$ của đội. Khi đó

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}$$

là dãy tăng các số nguyên dương và đồng thời $1 \leq a_j \leq 45$. Suy ra dãy

$$a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+14$$

cũng là dãy tăng các số nguyên dương và $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.

- Tất cả có 60 số nguyên dương

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+14,$$

trong đó tất cả đều nhỏ hơn hoặc bằng 59

- Vì vậy, theo nguyên lý Dirichlet, hai trong số các số nguyên này phải bằng nhau. Vì các số $a_1$, ..., $a_{30}$ là đôi một khác nhau và các số $a_1+14$, ..., $a_{30}+14$ cũng là đôi một khác nhau, nên suy ra phải tìm được chỉ số $i$ và $j$ sao cho $a_i = a_j+14$. Điều đó có nghĩa là có đúng 14 trận đấu trong giai đoạn từ ngày $j+1$ đến ngày $i$.