

Andreas Solymosi  
Ulrich Grude

# Grundkurs Algorithmen und Datenstrukturen in JAVA

Eine Einführung in die praktische Informatik

*5. Auflage*



Springer Vieweg

---

# Grundkurs Algorithmen und Datenstrukturen in JAVA

---

Andreas Solymosi • Ulrich Grude

# Grundkurs Algorithmen und Datenstrukturen in JAVA

Eine Einführung in die  
praktische Informatik

5., aktualisierte Auflage

Andreas Solymosi  
Ulrich Grude

FB VI  
Beuth-Hochschule für Technik Berlin  
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-658-06195-1  
DOI 10.1007/978-3-658-06196-8

ISBN 978-3-658-06196-8 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2000, 2001, 2002, 2008, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.  
[www.springer-vieweg.de](http://www.springer-vieweg.de)

## Vorwort zur 4. und 5. Auflage

Nachdem die 3. Auflage vergriffen wurde, macht die neue Version von Java notwendig, das Buch zu überarbeiten und der ausdrucksreicheren Sprache anzupassen. Generizität, Aufzählungstypen und die Zählschleife („verbesserte for-Schleife“) werden benutzt, um die Algorithmen noch verständlicher darzustellen. Leser, die diese neuen Sprachelemente noch nicht kennen, können sich mit Hilfe der Fußnoten damit vertraut machen.

In der 5. Auflage wurden die dankend entgegengenommenen Korrekturhinweise eingearbeitet sowie die Druckqualität verbessert. Auch der Online-Service wurde aktualisiert, um die im Buch vorgestellten Programme (s. Seite 175) sowie die Lösungen einiger Übungen von der angegebenen Internet-Adresse

`http://public.beuth-hochschule.de/oo-plug/A&D`

einfach laden und ausführen zu können.

---

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| Vorwort zur 4. und 5. Auflage .....               | V         |
| Einleitung .....                                  | XI        |
| Danksagungen .....                                | XIII      |
| <b>1. Begriffsbildung</b> .....                   | <b>1</b>  |
| 1.1. Algorithmus .....                            | 1         |
| 1.2. Komplexität .....                            | 4         |
| 1.3. Verbrauch und Komplexität .....              | 5         |
| <b>2. Gleichwertige Lösungen</b> .....            | <b>8</b>  |
| 2.1. Maximale Teilsumme .....                     | 8         |
| 2.1.1. Summen und Teilsummen .....                | 8         |
| 2.1.2. Aufgabenstellung .....                     | 9         |
| 2.1.3. Intuitive Lösung .....                     | 9         |
| 2.1.4. Zeitkomplexität der Lösung .....           | 10        |
| 2.1.5. Zeit für Raum .....                        | 12        |
| 2.1.6. Teile und herrsche .....                   | 13        |
| 2.1.7. Die optimale Lösung .....                  | 16        |
| 2.1.8. Messergebnisse .....                       | 18        |
| 2.1.9. Gleichwertigkeit von Algorithmen .....     | 19        |
| 2.2. Komplexitätsformel .....                     | 20        |
| 2.3. Datenstrukturen .....                        | 21        |
| 2.3.1. Reihungen .....                            | 22        |
| 2.3.2. Verkettete Listen .....                    | 23        |
| 2.3.3. Gleichwertigkeit von Datenstrukturen ..... | 26        |
| 2.3.4. Berechnung von Ausdrücken .....            | 29        |
| <b>3. Rekursion und Wiederholung</b> .....        | <b>30</b> |
| 3.1. Rekursive Algorithmen .....                  | 30        |
| 3.1.1. Fakultät .....                             | 30        |
| 3.1.2. Die Fibonacci-Zahlen .....                 | 31        |
| 3.1.3. Die Ackermann-Funktion .....               | 33        |
| 3.1.4. Die mathematische Induktion .....          | 34        |
| 3.1.5. Permutationen .....                        | 37        |

|   |           |
|---|-----------|
| 3.2. Abarbeitung von Datenstrukturen.....                         | 37        |
| 3.2.1. Iterative Abarbeitung von rekursiven Datenstrukturen ..... | 38        |
| 3.2.2. Rekursive Abarbeitung von rekursiven Datenstrukturen ..... | 39        |
| 3.2.3. Rekursive Abarbeitung von Reihungen .....                  | 40        |
| 3.2.4. Iteratoren .....   | 41        |
| 3.3. Rekursive Kurven.....  | 42        |
| 3.3.1. Schneeflockenkurve .....                                   | 43        |
| 3.3.2. Die Pfeilspitzenkurve.....                                 | 45        |
| 3.3.3. Die Hilbert-Kurve.....                                     | 47        |
| 3.3.4. Ersetzen der Rekursion durch Wiederholung .....            | 50        |
| 3.4. Zurückverfolgung .....                                       | 52        |
| 3.4.1. Labyrinth .....  | 52        |
| 3.4.2. Der Weg des Springers .....                                | 53        |
| 3.4.3. Die acht Damen .....                                       | 55        |
| <b>4. Suchen .....</b>  | <b>59</b> |
| 4.1. Textsuche.....   | 59        |
| 4.2. Suchen in Sammlungen .....                                   | 63        |
| 4.3. Suchen in einer Reihung.....                                 | 64        |
| 4.3.1. Suchen in einer unsortierten Reihung .....                 | 64        |
| 4.3.2. Lineares Suchen in einer sortierten Reihung .....          | 66        |
| 4.3.3. Binäres Suchen in einer sortierten Reihung.....            | 67        |
| 4.4. Suchen in einer verketteten Liste.....                       | 68        |
| 4.4.1. Lineares Suchen in einer unsortierten Liste.....           | 69        |
| 4.4.2. Lineares Suchen in einer sortierten Liste.....             | 70        |
| 4.5. Hash-Tabellen .....  | 70        |
| 4.5.1. Funktionalität.....  | 71        |
| 4.5.2. Datenorganisation .....                                    | 71        |
| 4.5.3. Hash-Funktionen.....                                       | 75        |
| 4.5.4. Weitere Aspekte .....                                      | 79        |
| 4.6. Zeitkomplexitäten beim Suchen .....                          | 79        |
| <b>5. Sortierverfahren .....</b>                                  | <b>82</b> |
| 5.1. Die Problemstellung.....                                     | 82        |
| 5.1.1. Präzisierung des Problems und Grundbegriffe.....           | 83        |
| 5.1.2. Zeitbedarf und Zeitkomplexität .....                       | 84        |
| 5.1.3. Sortieralgorithmen in Java-Standardbibliotheken .....      | 85        |
| 5.1.4. Entwurfsmuster Strategie.....                              | 86        |

|  |            |
|--|------------|
| 5.2. Quadratische Sortiervverfahren.....                       | 87         |
| 5.2.1. Sortieren durch Vertauschen benachbarter Elemente ..... | 88         |
| 5.2.2. Sortieren durch Einfügen .....                          | 90         |
| 5.2.3. Sortieren durch Auswählen .....                         | 92         |
| 5.3. Unterquadratische Verfahren .....                         | 93         |
| 5.4. Rekursive Verfahren .....                                 | 95         |
| 5.4.1. Quicksort .....   | 95         |
| 5.4.2. Sortieren mit Mischen.....                              | 98         |
| 5.5. Logarithmische Verfahren.....                             | 98         |
| 5.5.1. Halde.....  | 99         |
| 5.5.2. Die Haldenbedingung .....                               | 100        |
| 5.5.3. Senken.....   | 100        |
| 5.5.4. Zwei Phasen des Heap Sorts.....                         | 101        |
| 5.5.5. Sortieren auf der Halde .....                           | 102        |
| 5.6. Externe Sortiervverfahren.....                            | 104        |
| 5.6.1. Mischen.....  | 104        |
| 5.6.2. Sortierkanal .....                                      | 106        |
| 5.6.3. Mischkanal .....  | 108        |
| 5.6.4. Fibonacci-Mischen.....                                  | 108        |
| <br><b>6. Baumstrukturen .....</b>                             | <b>111</b> |
| 6.1. Binärbaum .....   | 111        |
| 6.1.1. Definition.....   | 111        |
| 6.1.2. Suchen im sortierten Binärbaum .....                    | 114        |
| 6.1.3. Darstellung von Binärbäumen.....                        | 115        |
| 6.2. Sortieren mit Binärbäumen .....                           | 116        |
| 6.2.1. Binärbaum als Halde.....                                | 117        |
| 6.2.2. Senken im Binärbaum.....                                | 118        |
| 6.2.3. Baumsort.....   | 120        |
| 6.2.4. Durchwandern eines Binärbaums.....                      | 121        |
| 6.3. Operationen für Binärbäume .....                          | 123        |
| 6.3.1. Binärbaum aus Knoten .....                              | 123        |
| 6.3.2. Eintragen in einen sortierten Binärbaum .....           | 124        |
| 6.3.3. Löschen in Binärbäumen .....                            | 125        |
| 6.4. Ausgeglichene Bäume.....                                  | 128        |
| 6.4.1. Eintragen in ausgeglichene Bäume .....                  | 129        |
| 6.4.2. Löschen in ausgeglichenen Bäumen .....                  | 133        |
| 6.5. 2-3-4-Bäume.....  | 135        |



|   |            |
|---|------------|
| 6.5.1. Definition.....                            | 135        |
| 6.5.2. Spalten .....                              | 136        |
| 6.5.3. Einfügen.....                              | 138        |
| 6.6. Rot-Schwarz-Bäume.....                       | 139        |
| 6.7. B-Bäume.....                                 | 146        |
| <b>7. Klassen von Algorithmen .....</b>           | <b>149</b> |
| 7.1. Was ist ein algorithmisches Problem? .....   | 149        |
| 7.2. Theoretische Lösbarkeit von Problemen .....  | 154        |
| 7.2.1. Definitionen.....                          | 154        |
| 7.2.2. Beispiele.....                             | 154        |
| 7.2.3. Das Halteproblem .....                     | 157        |
| 7.2.4. Das Kachelproblem .....                    | 159        |
| 7.2.5. Das Paligrammproblem.....                  | 161        |
| 7.2.6. Gleichwertigkeit von Grammatiken .....     | 162        |
| 7.3. Praktische Lösbarkeit von Problemen .....    | 163        |
| 7.3.1. Das zweite Kachelproblem.....              | 164        |
| 7.3.2. Das Rucksackproblem .....                  | 164        |
| 7.3.3. Das Aufteilungsproblem .....               | 165        |
| 7.3.4. Das Problem des Handelsreisenden .....     | 165        |
| 7.3.5. Hamiltonsche Wege durch einen Graphen..... | 166        |
| 7.3.6. Das Erfüllbarkeitsproblem .....            | 167        |
| 7.4. Die Klassen P und NP .....                   | 168        |
| 7.5. Ist $P = NP$ ?.....                          | 169        |
| 7.6. Übersicht über Problemklassen .....          | 171        |
| Literaturverzeichnis .....                        | 172        |
| Empfehlungen.....                                 | 173        |
| Programmverzeichnis .....                         | 175        |
| Abbildungs- und Tabellenverzeichnis.....          | 177        |
| Sachwortverzeichnis .....                         | 180        |

## Einleitung

Das Fach „Algorithmen und Datenstrukturen“ deckt „klassische Themen“ der Ausbildung von Informatikern ab. Es gibt viele Lehrbücher, die klassische Algorithmen (wie Sortierverfahren usw.) und klassische Datenstrukturen (wie Reihungen<sup>1</sup>, verkettete Listen, Bäume usw.) mehr oder weniger verständlich vorstellen. Die meisten – insbesondere die besten – von ihnen wurden vor einiger Zeit geschrieben, deswegen verwenden sie typischerweise auch eine „klassische“ Programmiersprache (wie Algol, Pascal, C o.ä.) und keine neuere Sprache wie Java.

Vermutlich verbreitet sich Java heute schneller als alle anderen Programmiersprachen. Dies hat im Wesentlichen zwei Gründe:

- die Plattformunabhängigkeit, die ihre Verwendung im Internet ermöglicht
- die Objektorientierung, die moderne Programmentwicklungstechniken und -paradigmen unterstützt.

Java wird auch zunehmend als erste Unterrichtssprache verwendet, z.B. in den Informatikstudiengängen an der *Beuth Hochschule Berlin*. So gibt es immer mehr Studenten, die noch keine andere Programmiersprache beherrschen. Um ihnen *Algorithmen und Datenstrukturen* fortlaufend unterrichten zu können, wurde dieses Lehrbuch entwickelt.

Es wendet sich an folgende Zielgruppen:

- Studenten von Informatikstudiengängen
- Schüler mit Leistungskurs Informatik
- Auszubildende in IT-Berufen mit Schwerpunkt Software
- Programmierer und
- Interessierte an anspruchsvollen Algorithmen

Es ist geeignet sowohl als Lehrmaterial für Vorlesungen und Kurse wie auch zum Selbststudium.

Der Leser sollte möglichst die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

- Erfahrung im Erstellen einfacherer Programme
- Kenntnisse der Programmiersprache Java
  - insbesondere die Behandlung von Reihungen<sup>1</sup> und Datenstrukturen, die durch Referenzen (Zeiger) miteinander verkettet sind
  - nicht aber die Standardbibliothek

---

<sup>1</sup> Felder, arrays

- und nicht die fortschrittlichen Mechanismen wie Polymorphie, Ausnahmebehandlung, abstrakte Klassen u.ä.

Zum Erlernen der Sprache Java werden zum Beispiel folgende Lehrbücher empfohlen:

*Solymosi, Schmiedecke*: Programmieren mit Java  
Vieweg Verlag 2001, ISBN 3-528-25697-4 (3. Auflage)

*Grude*: Java ist eine Sprache  
Vieweg Verlag 2005, ISBN 3-528-05914-1

Die meisten guten Bücher<sup>1</sup> zum Thema *Algorithmen und Datenstrukturen* haben einen hohen akademischen Anspruch. Es gibt nur einige, die als Lehrbücher (z.B. als Begleitliteratur für Hochschulvorlesungen) geeignet sind. Die Mehrzahl von diesen ist jedoch für Universitätsstudiengänge entstanden. Für Fachhochschulen, wo dem theoretischen Ansatz die Praxisrelevanz vorangestellt wird, sind sie oft zu anspruchsvoll. Die Informatikstudenten an Fachhochschulen sind weniger an mathematischen Beweisen als an verständlich formulierten Algorithmen interessiert.

Insbesondere wurde auf die *Lesbarkeit* der Programme in den meisten – hauptsächlich älteren – Lehrbüchern kein Schwerpunkt gesetzt. In der Zwischenzeit<sup>2</sup> wissen wir aber: Im Allgemeinen ist das Lesen von Programmen oftmals schwerer als das Schreiben. Bei der Entwicklung der Beispielprogramme dieses Lehrbuchs wurde auf die Lesbarkeit Acht gegeben:

- Wahl der Bezeichner
- angemessene Kommentare
- inhärente<sup>3</sup> Strukturierung
- konsequentes Druckbild (Einrückung, Klammerung, Schriftarten)

Hierdurch soll der Leser schneller den Sinn, den Ablauf und das Prinzip der Algorithmen erfassen können. Auch Studenten sollen sich daran gewöhnen, Programme mit hohem Lesbarkeitsgrad zu schreiben.

Beim Verfassen dieses Lehrbuchs wurden des Weiteren folgende Ziele verfolgt.

1. Einige wichtige und bekannte Algorithmen (z.B. die Algorithmen *Quicksort* und *Heapsort* zum Sortieren von Reihungen, der *Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus* zum Suchen einer Zeichenkette in einem Text, *Baumdurchläufe* usw.) werden vorgestellt.
2. Der Leser soll dabei Erfahrungen sammeln, wie man Algorithmen schreiben, lesen und wie man den dynamischen Ablauf eines Algorithmus darstellen kann.

---

<sup>1</sup> s. Literaturverzeichnis und Empfehlungen auf Seite 174

<sup>2</sup> durch die Entwicklung des *Software Engineering*

<sup>3</sup> sich aus dem Wesen der Aufgabe ergebende

Einen Algorithmus kann man z.B. in natürlicher Sprache, in „Pseudocode“, als Ablaufdiagramm („Kästchen mit Pfeilen dazwischen“), als Struktogramm („geschachtelte Kästchen“), als Java-Programm, als Assembler-Programm usw. darstellen.

3. Die Studenten von Lehrveranstaltungen dieses Fachs sollen auch üben, genau und verständlich über Algorithmen zu sprechen und zu schreiben. Sie sollen einige wichtige Fachbegriffe (z.B. *Algorithmus*, *B-Baum*, *Halde* usw.) kennen lernen und in ihr aktives Vokabular aufnehmen. Insbesondere sollen sie sich auch mit der Komplexität von Algorithmen befassen und ein Verständnis für die Algorithmen-Klassen  $P$  und  $NP$  gewinnen.

4. Sie sollen theoretisch und praktisch etwas über das Verhältnis von (abstrakten) Algorithmen und (konkreter) Programmierung erfahren.

Vertrautheit mit abstrakten Algorithmen ist eine notwendige, aber keineswegs hinreichende Voraussetzung für „gute Programmierung im Alltag“.

Die in diesem Buch abgedruckten Beispielprogramme stehen im Internet unter der folgenden Adresse zur Verfügung:

<http://www.beuth-hochschule.de/~oo-plug/A&D>

Fragen, Verbesserungsvorschläge und Kritik können an die folgenden Adressen gesendet werden:

[solymosi@beuth-hochschule.de](mailto:solymosi@beuth-hochschule.de) oder [grude@beuth-hochschule.de](mailto:grude@beuth-hochschule.de)

Die Autoren A. S. und U. G.

## Danksagungen

Ich danke den Studenten (auch von anderen Hochschulen), die durch aufmerksames Lesen des Buches einige Fehler und Unklarheiten entdeckt und uns Hinweise gegeben haben. Außerdem gebührt meiner Frau Dr. I. Solymosi und unseren vier Kindern Dank, die die Belastungen der Arbeit an so einem Buch ertragen und mitgetragen haben. Und nicht zuletzt danke ich Gott, meinem Schöpfer und liebendem Vater, der mich nicht nur mit Fähigkeiten für meinen Beruf ausgestattet, sondern durch sein persönliches Opfer auch erlöst hat.

Andreas Solymosi

# 1. Begriffsbildung

In diesem Kapitel sollen einige grundlegende Begriffe wie „Algorithmus“ und „Komplexität“ erläutert werden. Wir wollen sie nicht exakt definieren, wohl aber ein Grundverständnis für sie erarbeiten.

## 1.1. Algorithmus

Wollte man den Begriff „Algorithmus“ präzise definieren, so müsste man seine Bedeutung willkürlich einschränken. Deshalb soll dieser Begriff hier nicht *definiert*, sondern nur *erläutert* werden. Als „weicher“ Begriff mit großem Bedeutungsumfang wird er uns besonders nützlich sein.

Als Ausgangspunkt dieser Erläuterungen seien ein paar typische (und besonders berühmte) Beispiele für Algorithmen genannt:

- der Algorithmus von Euklid zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers („ggT“) zweier positiver ganzer Zahlen.
- der Algorithmus „Quicksort“ zum Sortieren von Reihungen
- der Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus zum Suchen einer (kürzeren) Zeichenkette in einem (längeren) Text
- Algorithmus zum Traversieren eines Baumes
- Algorithmus zum Finden des hamiltonschen Weges in einem Graphen

Algorithmen sind sehr *abstrakte* Gebilde. Man kann einen (abstrakten) Algorithmus auf verschiedene Weise und mehr oder weniger *konkret darstellen*.

Zum Beispiel beschreibt *Euklid*<sup>1</sup> seinen Algorithmus im 7. Buch seiner „Elemente“ so:

„Es seien AB, CD, die beyden gegebenen Zahlen, so dass die grössere, AB, von der kleinern, CD, nicht genau gemessen werde. Nimm immer die kleinere von der größern weg, bis ein Rest kommt, welcher die nächst-vorgehende Zahl genau mißt. Dieser Rest ist das gröste gemeinschaftliche Maaß der beyden gegebenen Zahlen.“<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 3. Jahrhundert v. Chr.

<sup>2</sup> aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz, s. [Eu] im Literaturverzeichnis

Mit der „Zahl AB“ ist die *Strecke* zwischen den Punkten A und B gemeint und „Die Zahl EF misst eine Zahl GH (genau)“ bedeutet: „Die (Länge der) Strecke GH ist ein *ganzzahlig Vielfaches* der (Länge der) Strecke EF“.<sup>1</sup>

Die folgende Java-Funktion `ggtIterativ` ist auch eine Darstellung des euklidischen Algorithmus. Sie enthält als wesentlichen Bestandteil eine **while**-Schleife:

```
static int ggtIterativ(int ersteZahl, int zweiteZahl) { // 2
    // requires3 ersteZahl > 0 && zweiteZahl > 0; ensures return > 0
    while (ersteZahl != zweiteZahl)
        if (ersteZahl > zweiteZahl)
            ersteZahl -= zweiteZahl; // 4
        else
            zweiteZahl -= ersteZahl;
    return ersteZahl;
}
```

Auch die folgende Java-Funktion `ggtRekursiv` stellt den euklidischen Algorithmus dar:

```
static int ggtRekursiv(int ersteZahl, int zweiteZahl) {
    // requires ersteZahl > 0 && zweiteZahl > 0; ensures return > 0
    if (ersteZahl > zweiteZahl)
        return ggtRekursiv(ersteZahl - zweiteZahl, zweiteZahl);
    else if (ersteZahl < zweiteZahl)
        return ggtRekursiv(ersteZahl, zweiteZahl - ersteZahl);
    else // ersteZahl == zweiteZahl
        return ersteZahl;
}
```

Wir haben hier also drei *Darstellungen* des Algorithmus von Euklid. Die (ins Deutsche übersetzte) Darstellung von Euklid selbst (s. Seite 1) ist ziemlich abstrakt, d.h. sie lässt noch viele Einzelheiten offen. Die beiden Java-Funktionen sind ungefähr gleich konkret und beide konkreter als die Beschreibung von Euklid. Der *Algorithmus* selbst ist das Abstrakte, welches allen drei Darstellungen gemeinsam ist.

<sup>1</sup> Das Zitat ist unvollständig. Wer sich für die vollständige Darstellung des Algorithmus interessiert, sollte sie bei Euklid nachlesen (ca. 2 Seiten, inklusive Korrektheitsbeweis).

<sup>2</sup> In Java sollten alle Methoden, die nicht auf Objektelemente zugreifen, als Klassenmethoden (**static**) vereinbart werden.

<sup>3</sup> Die aus der Sprache Eiffel (s. [Mey]) entliehenen reservierten Wörter **requires** und **ensures** sind *Zusicherungen* (in Java nur als Kommentar): Die Methode funktioniert nur dann erwartungsgemäß, wenn der Boolesche Ausdruck nach **requires** vor der Ausführung der Methode den Wert **true** liefert. Sie garantiert die Erfüllung der **ensures**-Bedingung nach der Ausführung.

<sup>4</sup> In Java werden Parameter per Wert („by value“) übergeben, d.h. im Methodenrumpf werden sie wie lokale Variablen behandelt: Sie können verändert werden, wenn sie nicht als **final** vereinbart worden sind.

Die Vorstellung, dass es einerseits *abstrakte Algorithmen* gibt und andererseits mehr oder weniger *konkrete Darstellungen* von Algorithmen, ist sehr praktisch und in vielen Zusammenhängen nützlich. Diese Vorstellung bringt aber auch gewisse Probleme mit sich<sup>1</sup>. Eines dieser Probleme soll hier anhand eines Beispiels skizziert werden.

Die folgende Java-Funktion berechnet ebenfalls den größten gemeinsamen Teiler von zwei natürlichen Zahlen:

```
static int ggt1(int ersteZahl, int zweiteZahl) {
    // requires ersteZahl > 0 && zweiteZahl > 0; ensures return > 0
    for (int i = Math.max(ersteZahl, zweiteZahl); i>0; i--) // 2
        if ((ersteZahl % i == 0) && (zweiteZahl % i == 0))
            return i;
    return 0; // wenn requires nicht erfüllt
}
```

Hier wird aber nirgends „die kleinere von der größeren [Zahl] weg[genommen]“ wie bei Euklid, also ist ggt1 offensichtlich keine Darstellung des euklidischen Algorithmus, sondern eine Darstellung eines anderen Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers.

Es ist aber fraglich, welchen Algorithmus wohl die folgende Java-Funktion darstellt:

```
static int ggt2(int ersteZahl, int zweiteZahl) { // Zusicherungen ähnlich
    while (ersteZahl != 0 && zweiteZahl != 0)
        if (ersteZahl > zweiteZahl)
            ersteZahl = ersteZahl % zweiteZahl;
        else
            zweiteZahl = zweiteZahl % ersteZahl;
    return ersteZahl + zweiteZahl;
}
```

Diese Funktion ggt2 hat Ähnlichkeit mit der Funktion ggtIterativ. Deshalb kann man ggt2 für eine Darstellung des euklidischen Algorithmus halten. Andererseits wird auch in der Funktion ggt2 nirgends „die kleinere von der größeren [Zahl] weg[genommen]“ wie bei Euklid. Deshalb kann man auch bestreiten, dass die Java-Funktion ggt2 eine Darstellung des euklidischen Algorithmus ist und sie für eine Darstellung eines anderen Algorithmus halten.

Wer dieser letzteren Meinung ist, sollte die folgende Java-Funktion untersuchen:

```
static int ggt3(int ersteZahl, int zweiteZahl) { // Zusicherungen ähnlich
    while (ersteZahl != zweiteZahl)
```

<sup>1</sup> Sie sind nicht speziell auf Algorithmen bezogen, sondern in allgemeinerer Form; das Verhältnis zwischen *abstrakt* und *konkret* wurde unter anderen schon von den griechischen Philosophen *Platon* und *Aristoteles* diskutiert.

<sup>2</sup> Alternative Formulierung ohne Benutzung von Standardklassen:

```
for (int i = ersteZahl > zweiteZahl ? ersteZahl : zweiteZahl; i>0; i--)
```

```

    if (ersteZahl > zweiteZahl)
        while (ersteZahl > zweiteZahl)
            ersteZahl -= zweiteZahl;
    else
        while (zweiteZahl > ersteZahl)
            zweiteZahl -= ersteZahl;
    return ersteZahl;
}

```

Diese Funktion `ggt3` ist nicht besonders elegant, aber auch sie berechnet den größten gemeinsamen Teiler und nimmt dazu „die kleinere von der größeren [Zahl] weg“, wie Euklid. Also ist die Java-Funktion `ggt3` eine Darstellung des euklidischen Algorithmus. Andererseits hat die Funktion `ggt3` sehr große Ähnlichkeit<sup>1</sup> mit der Funktion `ggt2`, die (zumindest nach Ansicht einiger) keine Darstellung des euklidischen Algorithmus ist.

Hier wird (hoffentlich) deutlich: Indem man eine Darstellung eines Algorithmus (z.B. eine Darstellung des Algorithmus von Euklid) in kleinen Schritten verändert, kann man es beliebig schwer machen zu entscheiden, ob die veränderte Darstellung noch den selben Algorithmus oder schon einen anderen Algorithmus darstellt. Der Begriff „Algorithmus von Euklid“ hat also keine scharfen Grenzen und lässt sich ohne Willkür auch kaum präzise fassen. Aber auch als „weicher“ Begriff wird er für uns brauchbar und nützlich sein. In Zweifelsfällen muss man versuchen, sich möglichst friedlich zu einigen, ob eine bestimmte konkrete Darstellung den einen oder einen anderen Algorithmus darstellt.

Die Vorstellung, dass es verschieden konkrete Darstellungen von abstrakten Algorithmen gibt, ist besonders dann wichtig und nützlich, wenn man verschiedene Algorithmen zur Lösung des selben Problems (z.B. verschiedene Sortieralgorithmen) miteinander *vergleichen* will. Algorithmen sind so abstrakt, dass ihr Vergleich meist nicht ganz einfach ist. Keinesfalls sollte man sich dabei so konkrete Ergebnisse erhoffen wie „dieser Algorithmus ist schneller als jener“ oder „dieser Algorithmus braucht weniger Speicherplatz als jener“ oder einfach „dieser Algorithmus ist besser als jener“.

## 1.2. Komplexität

Um (abstrakte) Algorithmen miteinander zu vergleichen, hat man den Begriff der *Komplexität eines Algorithmus* entwickelt. Sie beschreibt, wie ein Algorithmus mit den zur Verfügung stehenden *Betriebsmitteln (resources)*, insbesondere mit *Zeit* (Laufzeit) und *Raum* (Speicherplatz) wirtschaftet. Dementsprechend unterscheiden wir zwischen *Zeit-* und *Speicherkomplexität*: Die *Speicherkomplexität* eines Algorithmus sagt etwas über den Speicherbedarf der Programme aus, die den Algorithmus konkret darstellen. Entsprechend sagt die *Zeitkomplexität* eines Algorithmus etwas über die Laufzeit derselben Programme aus. Die Komplexität eines Algorithmus wird in Abhängigkeit von der *Menge* oder *Größe* der von ihm bearbeiteten Daten ausgedrückt.

<sup>1</sup> Der `%`-Operator ist jeweils durch eine entsprechende Schleife ersetzt.



Aber diese Aussagen muss man in jedem Anwendungsfall kritisch prüfen und „in die Praxis“ übersetzen. Abstrakte Algorithmen und konkrete Programme sind eben verschiedene Dinge.

### 1.3. Verbrauch und Komplexität

Um ein genaueres Verständnis von der Zeitkomplexität zu gewinnen, betrachten wir die folgende Java-Prozedur<sup>1</sup>:

```
static void proz0(int n) { // requires n >= 0
    proz1();
    proz1();
    for (int index1 = 1; index1 <= n; index1++) {
        proz2();
        proz2();
        proz2();
        for (int index2 = 1; index2 <= n; index2++) {
            proz3();
            proz3();
        };
    };
};
```

Wenn diese Prozedur `proz0` ausgeführt wird, dann werden die Prozeduren `proz1`, `proz2` und `proz3` aufgerufen. Wir können also zunächst drei Arten von Schritten unterscheiden:

```
proz1(); // ist ein Schritt der 1. Art
proz2(); // ist ein Schritt der 2. Art
proz3(); // ist ein Schritt der 3. Art
```

Wie oft wird jeder dieser Schritte ausgeführt, wenn man `proz0` einmal ausführen lässt? Die Antwort hängt offensichtlich vom Wert für den Parameter `n` ab, den man dabei an `proz0` übergibt:

- es werden 2 Schritte der 1. Art ausgeführt und
- es werden  $3n$  Schritte der 2. Art ausgeführt und
- es werden  $2n^2$  Schritte der 3. Art ausgeführt.

Wir gehen hier davon aus, dass die Ausführung dieser Schritte die meiste Zeit beanspruchen wird, und dass man die Verwaltung der Schleifen (Erzeugen der Indices `index1` und `index2`, Initialisieren, Erhöhen und Prüfen dieser Indices usw.) dagegen vernachlässigen kann. Wenn wir wüssten, wie lange *eine* Ausführung der verschiedenen Schritte dauert, dann könnten wir ausrechnen, wie lange *eine Ausführung von* `proz0` dauert. Natürlich wären diese Ausführungszeiten abhängig vom Parameter `n`.

---

<sup>1</sup> Java-Methoden mit einem Ergebnis (mit einem „**return**-Wert“) nennen wir Funktionen, **void**-Methoden nennen wir Prozeduren.

Verschiedene Rechner brauchen im Allgemeinen verschieden lange, um einen der Schritte auszuführen. Durch Messungen könnten wir z.B. zu folgender Tabelle gelangen:

|                   | 1. Art | 2. Art | 3. Art |
|-------------------|--------|--------|--------|
| Rechner <i>R1</i> | 3 sec  | 5 sec  | 4 sec  |
| Rechner <i>R2</i> | 5 sec  | 3 sec  | 7 sec  |

Tabelle 1.1 Zeitverbrauch für einen Schritt

Aus dieser Tabelle könnten wir ausrechnen, wie lange der Rechner *R1* bzw. der Rechner *R2* braucht, um das Programm `proz0` auszuführen (in Abhängigkeit von  $n$ ). Aber was wüssten wir dann über den *abstrakten Algorithmus*, der durch `proz0` realisiert wird? Und wie lange wird ein neuer Rechner *R3* brauchen, um `proz0` auszuführen?

Nehmen wir der Einfachheit halber einmal an, dass die Schritte der verschiedenen Arten ungefähr gleich viel Zeit brauchen. Dann könnten wir sagen:

- eine Ausführung von `proz0` besteht aus  $2n^2 + 3n + 2$  Schritten; oder
- der (genaue) Zeitverbrauch von `proz0` ist  $2n^2 + 3n + 2$ .

Diese Aussage gilt nicht nur für einen konkreten Rechner. Sie ist sinnvoll für alle Rechner, die für die verschiedenen Schritte etwa gleich lang brauchen (und bei denen man den Aufwand für die Schleifenverwaltung vernachlässigen kann).

Wir können aber noch eine abstraktere und allgemein gültige Aussage ableiten: Je größer der Parameter  $n$  wird, desto wichtiger werden die Schritte der 3. Art und desto unwichtiger werden die Schritte der 2. und 1. Art. Denn die Anzahl der Schritte der 3. Art wächst „viel schneller“ als die Anzahl der anderen Schritte, wie die folgende Tabelle verdeutlichen soll:

| $n$                        | 1 | 10  | 100   | 1000    |
|----------------------------|---|-----|-------|---------|
| Anzahl Schritte der 1. Art | 2 | 2   | 2     | 2       |
| Anzahl Schritte der 2. Art | 3 | 30  | 300   | 3000    |
| Anzahl Schritte der 3. Art | 2 | 200 | 20000 | 2000000 |

Tabelle 1.2: Anzahl der Schritte

Selbst wenn ein Schritt der 1. oder 2. Art „viel länger“ dauert, als ein Schritt der 3. Art, kann man für genügend große  $n$  die Schritte der 1. und 2. Art vernachlässigen.

**Aufgabe 1.1:** Angenommen, ein Schritt der 1. oder 2. Art dauert zehnmal so lange wie ein Schritt der 3. Art und  $n$  ist gleich 1000. Ein wie großer Prozentsatz der Laufzeit wird dann für Schritte der 3. Art verbraucht?

Man sagt, die Zeitkomplexität von `proz0` ist *von der Größenordnung*  $n^2$ . Dies wird mit  $O(n^2)$  ausgedrückt<sup>1</sup>. Wenn der genaue Zeitverbrauch von `proz0` ein *Polynom* in  $n$  ist, dann gibt man in den Klammern hinter dem  $O$  nur die höchste Potenz von  $n$  an, ohne irgendwelche Faktoren. Die Angaben  $O(3n^2)$  oder  $O(\frac{1}{2}n^2+25)$  sind unsinnig. Stattdessen sollte man  $O(n^2)$  schreiben.

Angenommen, ein Rechner braucht für die Ausführung von `proz0` mit einem bestimmten Wert  $n$  genau  $z$  Sekunden. Wie lange braucht er dann, wenn wir  $n$  verdoppeln? Aus der Zeitkomplexität  $O(n^2)$  folgt: Die Ausführungszeit wird vermutlich um den Faktor  $(2n)^2/n^2 = 4$  wachsen, der Rechner wird also (ungefähr)  $4z$  Sekunden brauchen.

Allgemein gilt: Wenn wir die Problemgröße  $n$  um den Faktor  $a$  vergrößern, dann wird sich die Laufzeit um den Faktor  $(an)^2/n^2 = a^2$  vergrößern.

Diese Aussage gilt nur „für genügend große  $n$ “, aber sie gilt *für alle Rechner*. Deshalb ist die Größenordnung der Zeitkomplexität  $O(n^2)$  nicht nur eine Eigenschaft der konkreten Java-Prozedur `proz0`, sondern auch eine Eigenschaft des abstrakten Algorithmus, der durch `proz0` dargestellt wird.

Ähnliche Überlegungen gelten auch für andere Komplexitäten. Die Zeitkomplexität  $O(n^3)$  bedeutet, dass die Verdoppelung von  $n$  (zumindest für große  $n$ 's) eine ungefähre Verachtfachung der nötigen Rechenzeit bewirkt, eine Verzehnfachung von  $n$  eine Vertausendfachung des Zeitverbrauchs.

---

<sup>1</sup> Man spricht von der *Landau-Notation*, benannt vom deutschen Mathematiker Edmund Landau (1877-1938).

## 2. Gleichwertige Lösungen

Für die Lösung jeder lösbaren Aufgabe gibt es eine unendliche Anzahl von (abstrakten und konkreten) Algorithmen. Das folgende Problem illustriert, dass eine Aufgabe einfacher oder komplizierter, aber auch „schlechter“ oder „besser“ gelöst werden kann.

### 2.1. Maximale Teilsumme

Wir haben den Kurs einer 1000-Euro-Aktie der Firma „MikroSofties“ verfolgt und wissen von jedem der letzten zehn Tage, wie viele Euro eine solche Aktie an diesem Tag an Wert gewonnen bzw. verloren hat, z.B. so:

| Tag            | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Gewinn/Verlust | +5 | -8 | +3 | +3 | -5 | +7 | -2 | -7 | +3 | +5 |

Tabelle 2.1: Veränderung des Aktienwerts

Insgesamt hat eine Aktie in den zehn Tagen ihren Wert um +4 Euro verändert (weil  $+5 - 8 + 3 + 3 - 5 + 7 - 2 - 7 + 3 + 5 = +4$  ist). Hätte man solche Aktien unmittelbar vor dem 3. Tag gekauft und unmittelbar nach dem 4. Tag verkauft, so hätte man pro Aktie 6 Euro Gewinn gemacht.

**Aufgabe 2.2:** Wie viel Gewinn pro Aktie hätte man (innerhalb der zehn Tage) *maximal* machen können?

**Lösung:** 8 Euro. Dazu hätte man vor dem 3. Tag kaufen und nach dem 6. Tag verkaufen oder aber vor dem 9. Tag kaufen und nach dem 10. Tag verkaufen sollen.

Wenn wir den Kurs einer Aktie nicht nur 10 Tage, sondern z.B. 365 Tage lang verfolgt haben, dann kann es ziemlich mühevoll sein, einen günstigsten Kauf- und Verkaufstermin zu finden.

#### 2.1.1. Summen und Teilsummen

Eine endliche *Folge* von ganzen Zahlen hat auch eine endliche *Summe*.

Beispielsweise hat die Folge (+5, -8, +3, +3, -5, +7, -2, -7, +3, +5) die Summe +4.

Als Definition können wir festhalten: Eine *Teilfolge* einer Folge besteht aus einem zusammenhängenden Teil der Folge. Jede Folge hat zwei extreme Teilfolgen: die leere Teilfolge () und die gesamte Folge (die auch als „unechte Teilfolge“ bezeichnet wird).

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die Folge  $= (+5, -8, +3, +3, -5, +7, -2, -7, +3, +5)$ , die unter anderen folgende Teilfolgen besitzt:

```

teilfolge1 = (+5, -8, +3, +3)    // echte Teilfolge mit vier Elementen
teilfolge2 = (+3, -5, +7, -2, -7) // echte Teilfolge mit fünf Elementen
teilfolge3 = (+5)                // echte Teilfolge mit einem Element
teilfolge4 = ()                  // echte Teilfolge mit null Elementen
teilfolge5 = (+5, -8, +3, +3, -5, +7, -2, -7, +3, +5)
                                   // unechte Teilfolge mit allen Elementen

```

`teilfolge3` kommt sogar mehrmals als Teilfolge in der obigen Folge vor.

Ist `folge` eine Folge und `teilfolge` eine Teilfolge von `folge`, so heißt die Summe von `teilfolge` auch *Teilsumme von `folge`*.

Die Folgen `teilfolge1`, `teilfolge2`, `teilfolge3`, `teilfolge4` und `teilfolge5` haben beispielsweise die Summen  $+3$ ,  $-4$ ,  $+5$ ,  $0$  und  $+4$ . Also sind die Zahlen  $+3$ ,  $-4$ ,  $+5$ ,  $0$  und  $+4$  *Teilsummen* der obigen Folge. Die Teilsumme  $+4$  kann man auch als „unechte Teilsumme der Folge“ bezeichnen, da es sich dabei um die Summe der Folge handelt.

## 2.1.2. Aufgabenstellung

Sei `folge` eine endliche Folge von ganzen Zahlen (in Form einer Reihung) gegeben. Im folgenden Abschnitt untersuchen wir, wie man die maximale Teilsumme von `folge` berechnen kann.

## 2.1.3. Intuitive Lösung

Man erzeugt der Reihe nach alle Teilfolgen der gegebenen Folge, berechnet von jeder Teilfolge die Summe und liefert die größte Summe als Ergebnis, etwa so:

```

static int maxTeilsumme3(final int[] folge) {
    int maxSumme = 0; // maximale Teilsumme ist mindestens 0 (Summe der leeren Teilfolge)
    for (int von = 0; von < folge.length; von++)
        for (int bis = von; bis < folge.length; bis++) { // Summe bilden
            int summe = 0;
            for (int i = von; i <= bis; i++)
                summe += folge[i];
            maxSumme = Math.max(summe, maxSumme); // Summe überprüfen, ob größer
        };
    return maxSumme;
}

```

Wir verwenden für Referenzparameter das reservierte Wort **final** im Sinne von **const**<sup>1</sup>, wie es in C++ bekannt ist. Damit wollen wir *andeuten*, dass das Parameterobjekt nicht verändert

---

<sup>1</sup> **const** ist ein reserviertes Wort in Java, wird aber von den derzeitigen Compilern nicht ausgewertet

wird; `final` in Java sichert nur die Unveränderbarkeit der Parameterreferenz innerhalb des Methodenrumpfs. Parameter primitiver Typen (z.B. `int`) werden typischerweise im Methodenrumpf nicht verändert, daher lassen wir dort `final` weg.

### 2.1.4. Zeitkomplexität der Lösung

Um etwas über die Schnelligkeit der Funktion `maxTeilsumme3` herauszufinden, könnten wir sie in einer bestimmten *Umgebung* laufen lassen und dabei Zeitmessungen vornehmen. Eine solche Umgebung kann z.B. aus einem Studenten bestehen, der Java-Programme mit Papier und Bleistift ausführen kann. Auf einem Rechner können wir eine Umgebung finden, zu der folgende „Dinge“ gehören:

- ein Java-Compiler, der den Programmtext von `maxTeilsumme3` in Bytecode umwandelt
- der Java-Interpreter, der den Bytecode ausführt
- das Betriebssystem, unter dem der Interpreter abläuft
- die Hardware, auf der der Interpreter und das Betriebssystem ausgeführt werden.

Solche Zeitmessungen können uns sehr konkrete Erkenntnisse über die Schnelligkeit der Funktion in einer konkreten Umgebung liefern. Andererseits haben sie den Nachteil, nur für diese eine Umgebung<sup>1</sup> zu gelten. Konkrete Zeitmessungen sagen also direkt nur etwas über die *Kombination* unserer Funktion `maxTeilsumme3` mit einer Umgebung aus. Über unsere Funktion `maxTeilsumme3` (und den abstrakten Algorithmus, den sie darstellt) sagen sie direkt nichts aus.

Wir interessieren uns hier aber in erster Linie nicht für Umgebungen, sondern für Eigenschaften der Funktion `maxTeilsumme3`. Umgebungen haben die unangenehme Eigenschaft, sehr zahlreich und sehr vergänglich zu sein. Heute schon gibt es unübersehbar viele verschiedene Hardwarechips, Betriebssysteme und Compiler. Und in ein paar Jahren wird es sicherlich noch mehr und ganz andere Hardwarechips, Betriebssysteme und Compiler geben. Unser Ziel soll es deshalb sein, etwas über „die Schnelligkeit der Funktion `maxTeilsumme3`“ herauszufinden, was möglichst *unabhängig von konkreten Umgebungen* ist und auch noch *in ein paar Jahren* gilt.

Wie lange die Funktion `maxTeilsumme3` braucht, um die maximale Teilsumme einer Folge zu berechnen, wird (vermutlich auch in den Umgebungen, die uns in ein paar Jahren zur Verfügung stehen) von der *Länge* der Folge abhängen. Aber *wie* hängt der Zeitbedarf der Funktion `maxTeilsumme3` von der Länge ihres Parameters ab? Oder: Wie verändert sich der Zeitbedarf von `maxTeilsumme3`, wenn wir die Länge von `folge` verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen... usw. ? Untersuchen wir dazu die folgenden Fragen:

---

<sup>1</sup> z.B. PC mit einem 500 MHz Pentium III-Prozessor unter MS-Windows NT Version 4.0 und dem jdk-Compiler, Version 2.1 (bei der 2. Auflage galt schon als veraltet)

**Aufgabe 2.3:** Wie oft wird `Math.max` in der Funktion `maxTeilsumme3` aufgerufen, wenn die Reihung `folge` genau  $n$  Elemente umfasst?

**Aufgabe 2.4:** Wie oft wird die Addition `summe += folge[i]` ausgeführt (wenn `folge.length` gleich  $n$  ist)?

**Lösung:** `Math.max` wird auf die Summe jeder echten Teilfolge von `folge` genau einmal angewendet. Wie viele echte Teilfolgen hat eine Folge der Länge  $n$ ? Es ist offensichtlich, dass eine Folge der Länge  $n$

- 1 Teilfolge der Länge  $n-0$  und
- 2 Teilfolgen der Länge  $n-1$  und
- 3 Teilfolgen der Länge  $n-2$  und
- ...
- $n-2$  Teilfolgen der Länge 3 und
- $n-1$  Teilfolgen der Länge 2 und
- $n-0$  Teilfolgen der Länge 1.

hat. Für die Anzahl der echten Teilfolgen einer Folge der Länge  $n$  gilt also:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

Diese Formel besagt, wie oft der Vergleich `maxSumme < summe` ausgeführt wird.

Jedes Element von jeder Teilfolge wird genau einmal auf die Summe addiert. Für die Anzahl der Additionen gilt also:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i(n+1-i) &= \sum_{i=1}^n in + i - i^2 = \sum_{i=1}^n in + \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= n \frac{1}{2}(n^2 + n) + \frac{1}{2}(n^2 + n) - \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n \end{aligned}$$

Wir sehen: Die Anzahl der Vergleiche wächst im Wesentlichen mit  $n^2$ . Die Anzahl der Summierungen wächst im Wesentlichen mit  $n^3$ . Wenn  $n$  genügend groß ist, werden die Additionen „den größten Teil der Laufzeit von `maxTeilsumme3`“ verbrauchen, selbst wenn ein Vergleich ein Vielfaches der Zeit einer Addition kosten würde.

Das Ergebnis unserer Untersuchung: Der Zeitbedarf der Funktion `maxTeilsumme3` wird für große  $n$  vermutlich mit der dritten Potenz von  $n$  (der Länge des Parameters `folge`) wachsen. Das heißt z.B.: Wenn wir  $n$  verdoppeln (d.h. ver-2-fachen), dann steigt der Zeitbedarf auf das 8-fache (weil  $2^3=8$  ist). Diese „abstrakte Erkenntnis“ ist unabhängig davon, ob wir die Funktion `maxTeilsumme3` auf einem PC oder einem Supercomputer laufen lassen. Und sie wird wahrscheinlich noch ein paar Jahre gültig bleiben.

Etwas informell kann die Komplexität am Programmtext erkannt werden: Die dreifach geschachtelte Schleife<sup>1</sup> deutet auf eine kubische Komplexität hin.

**Aufgabe 2.5:** Ist es möglich, dass man in Zukunft eine Umgebung (Compiler, Betriebssystem, Hardwarechip) entwickelt, in der die Funktion `maxTeilsumme3` ausgeführt werden kann und in der ihr Zeitbedarf *nicht* mit der dritten Potenz von  $n$  wächst? Wie könnte man das erreichen? Oder ist es unmöglich, das zu erreichen?

**Aufgabe 2.6:** Wie viel Speicherplatz benötigt die Funktion `maxTeilsumme3`? Versuchen Sie, diese Frage „nicht zu konkret“ zu beantworten.

### 2.1.5. Zeit für Raum

Wenn genügend Speicher zur Verfügung steht, kann die Zeitkomplexität auf  $O(n^2)$  reduziert werden, indem die Teilsummen in einer  $n \times n$ -Matrix<sup>2</sup> gespeichert werden.

Sie können für die Berechnung anderer Teilsummen gebraucht werden und ihre erneute Berechnung bleibt auf diese Weise erspart: Für die Berechnung der Teilsumme vom Index  $i$  bis zum Index  $j$  brauchen wir nur eine Addition, wenn die Teilsumme vom Index  $i$  bis zum Index  $j-1$  aus der Matrix geholt werden kann. Im Gegensatz dazu hat die intuitive Lösung aus dem vorigen Kapitel  $j-i$  Additionen gebraucht.

Zu diesem Zweck wird in einer doppelt geschachtelten Schleife jede Teilsumme (vom Index  $i$  bis zum Index  $j$ ) errechnet und im  $(i, j)$ -ten Element der Matrix gespeichert. In einer zweiten geschachtelten Schleife wird nun das Maximum aller Summen ermittelt.

Diese Vorgehensweise – mit einer „halben“, d.h. an der Diagonale durchgeschnittenen Matrix (Dreieckstabelle) – kann folgendermaßen als Java-Funktion formuliert werden:

```
static int maxTeilsumme2(final int[] folge) {
    final int n = folge.length;
    int[][] teilsummen = new int[n][n];
    /* Dreieckstabelle der Teilsummen: für  $i \geq j$  gilt
       teilsummen[i][j] ist Teilsumme i bis j, d.h. folge[i]+folge[i+1]+ ... +folge[j] */
    /* Jede Komponente teilsummen[von] mit einer int-Reihung der richtigen Länge
       (nämlich n-von) initialisieren und die 0-te Komponente dieser int-Reihung mit dem
       int-Wert folge[von] (mit der Summe der Teilfolge folge[von..von]) initialisieren: */
    for (int von = 0; von < folge.length; von++) {
        teilsummen[von] = new int[n - von]; // von-te Zeile des Dreiecks erzeugen
        teilsummen[von][0] = folge[von]; // 0-te Komponente initialisieren
    }
    // die Spalte 0 von teilsummen wurde initialisiert; jetzt die übrigen Spalten initialisieren:
    for (int von = 0; von < n; von++)
        for (int bis = 1; bis < n - von; bis++)
            teilsummen[von][bis] = teilsummen[von][bis - 1] + folge[von + bis];
}
```

<sup>1</sup> mit den Laufvariablen `von`, `bis` und `i`

<sup>2</sup> Mathematiker sagen *Matrix*, Java-Programmierer sagen *Tabelle*



```

/* Teilsummen 0 bis 1, ..., 0 bis n-1:
   Auf die vorherige Teilsumme wurde das nächste Element addiert. */
// die maximale Komponente in teilsummen ermitteln:
int maxSumme = 0;
for (int von = 0; von < n; von++)
    for (int bis = 0; bis < n - von; bis++)
        maxSumme = Math.max(maxSumme, teilsummen[von][bis]);
return maxSumme;
}

```

In dieser Lösung haben wir Laufzeit gespart, indem wir Speicherplatz geopfert haben: Aus den nur doppelt geschachtelten Schleifen<sup>1</sup> ist es ersichtlich, dass dieser Algorithmus eine Zeitkomplexität von nur  $O(n^2)$  hat. Dafür muss hier die Dreieckstabelle `teilsummen` erzeugt werden, deren Größe mit  $n$  auch quadratisch wächst: Die Speicherkomplexität ist also – im Gegensatz<sup>2</sup> zu `maxTeilsumme3` – jetzt  $O(n^2)$ .

Diese Überlegung gilt allerdings nur für hinreichend große  $n$ . Für kleines  $n$  (z.B. für  $n = 3$ ) kann es durchaus vorkommen, dass die Funktion `maxTeilsumme3` schneller ist.

Dies gilt allgemein für Komplexitätsbetrachtungen: Eine „bessere Komplexität“ ergibt eine „bessere Laufzeit“ oder einen „besseren Speicherplatzbedarf“ nur bei hinreichend großer Daten(menge). Für kleine Daten(menge) kann ein „schlechterer“ Algorithmus durchaus geeigneter sein.

### 2.1.6. Teile und herrsche

Wir wollen jetzt einen „noch schnelleren Algorithmus“ konstruieren, mit dem man die größte Teilsumme einer Zahlenfolge berechnen kann. Dabei wollen wir einer Strategie folgen, die sich bei der Lösung vieler Probleme bewährt hat. Diese Strategie wird häufig *Teile-und-herrsche-Strategie* genannt und ist als politisch-militärische Strategie mindestens seit *Machiavelli*<sup>3</sup> (wahrscheinlich aber schon viel länger) bekannt.

Auf ein algorithmisches Problem angewendet, legt diese Strategie folgende Vorgehensweise nahe:

1. Man nimmt das gesamte Problem (z.B. Berechnung der maximalen Teilsumme von `folge`) und teilt es in mehrere Teilprobleme ein. Besonders häufig teilt man das Gesamtproblem in *zwei etwa gleich große* Teilprobleme ein.
2. Man löst die Teilprobleme.
3. Aus der Lösung der Teilprobleme errechnet man eine Lösung für das Gesamtproblem.

<sup>1</sup> mit den Laufvariablen `von` und `bis`

<sup>2</sup> `maxTeilsumme3` kommt mit *konstantem Speicher* aus, d.h. der verbrauchte Speicher wächst nicht mit  $n$ ; seine Speicherkomplexität ist  $O(n^0) = O(1)$

<sup>3</sup> italienischer Historiker und Stratege, 1469-1527

Besonders interessant ist diese Strategie, wenn man sie *rekursiv* anwenden kann, d.h. wenn man die Teilprobleme nach der gleichen Strategie in noch kleinere Teil-Teilprobleme aufteilen kann, und diese Teil-Teilprobleme in noch kleinere Teil-Teil-Teilprobleme usw., bis man nur noch „atomare Problemchen“ hat, die man „direkt“ (d.h. ohne weitere Teilung) lösen kann.

Wie können wir das Problem „Berechne die maximale Teilsumme von *folge*“ in zwei ungefähr gleich große Teilprobleme zerlegen? Offenbar genügt es nicht, *folge* in zwei ungefähr gleich große Hälften *linkeHaelfte* und *rechteHaelfte* zu teilen, von jeder Hälfte die maximale Teilsumme zu berechnen und die größere dieser beiden Teilsummen als Gesamtergebnis zu nehmen. Denn die maximale Teilsumme von *folge* könnte die Summe einer Folge sein, die teilweise in *linkeHaelfte* und teilweise in *rechteHaelfte* liegt.

**Beispiel:** Sei *folge* = (-1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, -1). Die maximale Teilsumme ist offenbar +4, und die zugehörige Teilfolge (+1, +1, +1, +1) liegt

- teilweise in *linkeHaelfte* = (-1, -1, -1, +1, +1) und
- teilweise in *rechteHaelfte* = (+1, +1, -1, -1, -1) von *folge*.

Einige zusätzliche Begriffe werden die Konstruktion eines funktionierenden Algorithmus erleichtern.

**Definition:** Wir haben eine Folge *folge* und betrachten alle Teilfolgen, die irgendwo in *folge* anfangen und bis zum rechten Rand von *folge* reichen. Eine solche Teilfolge von *folge* nennen wir eine *rechte Randfolge* von *folge*. Jede rechte Randfolge hat eine Summe. Jetzt betrachten wir die Summen aller rechten Randfolgen von *folge*. Die größte dieser Summen heißt auch *rechtes Randmaximum* von *folge*. *Linke Randfolge* und *linkes Randmaximum* werden analog definiert.

**Aufgabe 2.7:** Berechnen Sie von folgenden Folgen jeweils die maximale Teilsumme sowie das rechte und das linke Randmaximum:

- *folge1* = (-3, +5, -20, +4, +8, -4, -9, -2, +3, +2)
- *folge2* = (+3, -2, +5, -20, +3, +3)
- *folge3* = (-20, +5, +3)
- *folge4* = (+1, +1, +1)
- *folge5* = (-1, -1, -1)
- *folge6* = (+27)
- *folge7* = (-27)
- *folge8* = ()

**Algorithmus** zur Berechnung der maximalen Teilsumme einer Folge *folge* nach der Teile-und-herrsche-Strategie:

1. Wenn *folge* nur aus einer Zahl *zahl* besteht, dann nimm das Maximum von *zahl* und 0.
2. Wenn *folge* aus zwei oder mehr Zahlen besteht dann:
  - 2.1. Teile *folge* in zwei etwa gleich große Hälften *linkeHaelfte* und *rechteHaelfte*.

- 2.2. Berechne die maximale Teilsumme `maxLinks` und das rechte Randmaximum `rechtesRandMax` von `linkeHaelfte`.
- 2.3. Berechne die maximale Teilsumme `maxRechts` und das linke Randmaximum `linkesRandMax` von `rechteHaelfte`.
- 2.4. Das Maximum der drei Zahlen `maxLinks`, `maxRechts` und `rechtesRandMax` + `linkesRandMax` ist die maximale Teilsumme von `folge`.

Im folgenden Programm formulieren wir zwei Java-Funktionen mit dem überladenen Namen<sup>1</sup> `maxTeilsummeRekursiv`. Die Version mit einem Parameter vom Typ `int[]` stellt die Lösung der Aufgabe dar:

```
private static int rechtesRandMax(final int[] folge, int links, int rechts) {
// 2
// requires 0 <= links <= rechts < folge.length
// berechnet rechtes Randmaximum in folge zwischen links und rechts
int bisherMax = 0, bisherSum = 0;
for (int i = rechts; i >= links; i--) {
    bisherSum += folge[i];
    bisherMax = Math.max(bisherMax, bisherSum);
};
return bisherMax;
}
private static int linkesRandMax(final int[] folge, int links, int rechts) {
// requires 0 <= links <= rechts < folge.length
// berechnet linkes Randmaximum in folge zwischen links und rechts
int bisherMax = 0, bisherSum = 0;
for (int i = links; i <= rechts; i++) {
    bisherSum += folge[i];
    bisherMax = Math.max(bisherMax, bisherSum);
};
return bisherMax;
}
private static int maxTeilsummeRekursiv(final int[] folge, int links, int
rechts) {
// requires 0 <= links <= rechts < folge.length
// berechnet maximale Teilsumme in folge zwischen links und rechts
if (links == rechts) // nur ein Element
    return Math.max(0, folge[links]);
else {
    final int mitte = (rechts + links)/2;
    final int maxLinks = maxTeilsummeRekursiv(folge, links, mitte);
    final int maxRechts = maxTeilsummeRekursiv(folge, mitte+1, rechts);
    final int rechtesMax = rechtesRandMax(folge, links, mitte);
    // linke Hälfte
```

<sup>1</sup> landsläufig: „überladene Funktionen“; jedoch nicht die Funktion, sondern ihr Name wird überladen

<sup>2</sup> Methoden sollten **private** vereinbart werden, wenn sie nur innerhalb der Klasse aufgerufen werden. In diesem Buch wurden die meisten Methoden „paketweit“ (d.h. ohne Zugriffsschutz) formuliert, außer wenn die Zugreifbarkeit „betont“ werden soll.

```

    final int linkesMax = linkesRandMax(folge, mitte+1, rechts);
    // rechte Hälfte
    return Math.max(maxRechts, Math.max(maxLinks, rechtesMax + linkesMax));
}
}
public static int maxTeilsummeRekursiv(final int[] folge) {
    // berechnet maximale Teilsumme von folge
    return maxTeilsummeRekursiv(folge, 0, folge.length-1);
}

```

**Aufgabe 2.8:** Wie oft<sup>1</sup> kann man eine Folge der Länge 2, der Länge 4, der Länge 8, ..., der Länge 1024 in zwei gleiche Hälften teilen?

**Aufgabe 2.9:** Wie oft kann man eine Folge der Länge 37, der Länge 578 oder der Länge 1234 in zwei ungefähr<sup>2</sup> gleich große Hälften teilen?

**Aufgabe 2.10:** Wenn man die Funktion `maxTeilsummeRekursiv` mit einer Folge der Länge  $n$  als Parameter aufruft, wie oft ruft sie sich dann rekursiv auf?

**Aufgabe 2.11:** „Wie viele Befehle“ werden bei jedem Aufruf von `maxTeilsummeRekursiv` ausgeführt, wenn man die rekursiven Aufrufe von `maxTeilsummeRekursiv` *nicht* mitzählt?

**Aufgabe 2.12:** Begründen Sie, dass der Zeitbedarf der Funktion `maxTeilsummeRekursiv` proportional zu  $n \log n$  wächst.

**Aufgabe 2.13:** Diskutieren Sie die „Geschwindigkeiten“ der Funktionen `maxTeilsumme3`, `maxTeilsumme2` und `maxTeilsummeRekursiv` relativ zueinander. Ist `maxTeilsummeRekursiv` immer schneller als `maxTeilsumme3`? Welche Rolle spielen die Umgebungen (Compiler, Hardware usw.), in denen die Funktionen ablaufen?

### 2.1.7. Die optimale Lösung

Die Funktion `maxTeilsumme3` hat eine Zeitkomplexität von  $O(n^3)$ , `maxTeilsumme2` hat eine Zeitkomplexität von  $O(n^2)$ , `maxTeilsummeRekursiv` hat eine Zeitkomplexität von  $O(n \log n)$ . Damit ist `maxTeilsummeRekursiv` (als abstrakter Algorithmus) „viel schneller“ als `maxTeilsumme3`. Häufig ist es so, dass die Teile-und-herrsche-Strategie zu einem „schnellsten“ Algorithmus führt. Für das Problem der maximalen Teilsumme einer Folge ist das nicht der Fall. Es gibt einen noch schnelleren Algorithmus als `maxTeilsummeRekursiv`.

Auch für die Funktion `maxTeilsummeRekursiv` gilt: Sie „fasst jedes Element der Folge `folge` mehrmals an“. Das tut sie, wenn sie die (rechten und linken) Randmaxima der beiden Hälften

<sup>1</sup> in wie vielen Schritten: Eine Folge der Länge 8 wird im 1. Schritt in zwei Folgen der Länge 4, im 2. Schritt in vier Folgen der Länge 2 und im 3. Schritt in acht Folgen der Länge 1 geteilt.

<sup>2</sup> wenn es nicht genau „aufgeht“: Eine Folge der Länge 37 kann in eine Folge der Länge 18 und eine Folge der Länge 19 aufgeteilt werden, die „ungefähr“ gleich lang sind.

ten, und dann der Hälften der Hälften usw. der Folge `folge` berechnet. Es ist aber möglich, die maximale Teilsumme von `folge` zu berechnen, indem man jedes Element von `folge` nur genau einmal „anfassen“.

**Algorithmus** zur Berechnung der maximalen Teilsumme von `folge`, bei dem jedes Element nur einmal angefasst wird:

Wir gehen elementweise von links nach rechts durch `folge`. Bei jedem Schritt berechnen wir für die schon „untersuchte“ linke Teilfolge von `folge` (sie beginnt am Anfang von `folge` und endet bei dem Element, welches wir gerade untersuchen):

1. die maximale Teilsumme dieser linken Teilfolge und
2. das rechte Randmaximum dieser linken Teilfolge.

```
static int maxTeilsumme1(final int[] folge) {  
    int bisherMax = 0;  
    int randMax = 0;  
    for (int zahl : folge) { // Zählschleife1  
        randMax = Math.max(0, randMax + zahl);  
        bisherMax = Math.max(bisherMax, randMax);  
    };  
    return bisherMax;  
}
```

**Aufgabe 2.14:** Wie verändert sich der Zeitbedarf der Funktion `maxTeilsumme1` wenn wir die Länge von `folge` verdoppeln? Welche Zeitkomplexität hat die Funktion `maxTeilsumme1` also?

**Aufgabe 2.15:** Halten Sie es für möglich, dass man in Zukunft einen Algorithmus `maxTeilsumme0` findet, der das selbe Problem löst wie `maxTeilsumme1`, aber eine noch bessere Zeitkomplexität besitzt? Wenn ja: Wie könnte `maxTeilsumme0` funktionieren? Wenn nein: warum nicht?

**Warnung:** Für das hier behandelte Problem der maximalen Teilsumme einer Folge und die vier Lösungen `maxTeilsumme3`, `maxTeilsumme2`, `maxTeilsummeRekursiv` und `maxTeilsumme1` gilt: `maxTeilsumme1` hat eine bessere Zeitkomplexität, besteht aus weniger Zeilen Java-Text und ist wohl nicht schwerer zu verstehen als die anderen Lösungen. Die Funktion `maxTeilsumme1` vereint also alle Vorzüge auf sich. Das ist *untypisch*. Für viele bekannte Probleme gilt: Je besser die Lösung, desto umfangreicher und schwerer verständlich ist sie. Aber der Wunschtraum eines jeden Algorithmusbauers ist es, für ein bekanntes Problem einen Lösungsalgorithmus zu finden, der schneller ist, weniger Speicher braucht, sich kürzer darstellen lässt und leichter verständlich ist als alle bisher bekannten Lösungen.

---

<sup>1</sup> Das Sprachelement *Zählschleife* (oder „verbesserte for-Schleife“) ab der Java Version 5 ermöglicht, alle Elemente aus einer Reihung in eine Variable hineinzulesen und sie im Schleifenrumpf zu verwenden.

### 2.1.8. Messergebnisse

Die Java-Funktionen `maxTeilsumme3`, `maxTeilsumme2`, `maxTeilsummeRekursiv` und `maxTeilsumme1` wurden in ein geeignetes Testprogramm eingebaut, mit dem `jdk`-Compiler der Version 2.1 in Bytecode umgewandelt und auf einem PC mit einem 500 MHz Pentium III Prozessor unter Windows NT 4.0 mit dem Java-Interpreter laufen gelassen. Das Testprogramm rief die Funktionen mit Folgen verschiedener Länge  $n$  auf und stoppte die Zeit, die die Funktionen brauchten. Die Messergebnisse wurden in der folgenden Tabelle erfasst:

| $n$  | <code>maxTeilsumme3</code> | <code>maxTeilsumme2</code> | <code>maxTeilsummeRekursiv</code> | <code>maxTeilsumme1</code> |
|------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| 100  | 609                        | 102                        | 11                                | 5                          |
| 200  | 4773                       | 208                        | 22                                | 6                          |
| 300  | 15955                      | 925                        | 33                                | 6                          |
| 400  | 37656                      | 1781                       | 50                                | 0                          |
| 500  | 73348                      | 2603                       | 61                                | 0                          |
| 600  | 126543                     | 3842                       | 77                                | 0                          |
| 700  |                            |                            | 88                                | 6                          |
| 800  |                            |                            | 99                                | 5                          |
| 900  |                            |                            | 115                               | 5                          |
| 1000 | 586303                     |                            | 126                               | 5                          |
| 2000 |                            |                            | 264                               | 16                         |
| 3000 |                            |                            | 412                               | 22                         |
| 4000 |                            |                            | 560                               | 33                         |
| 5000 |                            |                            | 703                               | 38                         |
| 6000 |                            |                            | 857                               | 50                         |
| 7000 |                            |                            | 1010                              | 55                         |
| 8000 |                            |                            | 1159                              | 61                         |

Tabelle 2.2: Zeitverbrauch in hundertstel Sekunden

**Aufgabe 2.16:** Wie passen diese Messergebnisse zu den theoretischen Zeitkomplexitäten?

**Aufgabe 2.17:** Nehmen wir an, dass die Prozedur `blubs` einen konstanten Zeitbedarf hat (d.h. jeder Aufruf von `blubs` benötigt für seine Ausführung gleich viel Zeit, z.B. 37 Millisekunden). Geben Sie für jede der folgenden Prozeduren `proz1`, `proz2`, ..., `proz9` an:

1. wie sich ihr Zeitbedarf verändert, wenn man den Parameter  $n$  verdoppelt und
2. welche Zeitkomplexität die Prozedur hat, z.B.  $O(n)$  oder  $O(n^2)$  oder  $O(n^3)$  oder  $O(n \log n)$  usw.

```
static void proz1(int n) { // requires n > 0
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        blubs();
}
static void proz2(int n) { // requires n > 0
    for (int i = 1; i <= n; i++)
```

```

    for (int j = 1; j <= n; j++)
        blubs();
}
static void proz3(int n) { // requires n > 0
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        blubs();
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        blubs();
}
static void proz4(int n) { // requires n > 0
    for (int i = 1; i <= 100; i++)
        for (int j = 1; j <= n; j++)
            for (int k = 1; k <= 100; k++)
                blubs();
}
static void proz5(int n) { // requires n > 0
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        for (int j = 1; j <= i; j++)
            blubs();
}
static void proz6(int n) { // requires n > 0
    for (int i = 1; i <= n/2; i++)
        for (int j = 1; j <= n/4; j++)
            for (int k = 1; k <= n/8; k++)
                blubs();
}
static void proz7(int n) { // requires n > 0
    for (int i = 1; i <= n * n; i++)
        for (int j = 1; j <= n * n * n; j++)
            blubs();
}
static void proz8(int n) { // requires n > 0
    blubs();
    if (n > 1)
        proz8(n-1);
}
static void proz9(int n) { // requires n > 0
    blubs();
    if (n > 1) {
        proz9(n-1);
        proz9(n-1);
    }
}
}

```

### 2.1.9. Gleichwertigkeit von Algorithmen

Die Algorithmen, die durch die Funktionen `maxTeilsumme3`, `maxTeilsumme2`, `maxTeilsummeRekursiv` und `maxTeilsumme1` dargestellt werden, sind *gleichwertig*.

Dies bedeutet, dass sie für jede Eingabe (für jede Folge) dieselbe Ausgabe (dasselbe Ergebnis, d.h. dieselbe Zahl als maximale Teilsumme) produzieren. Diese Aussage ist jedoch etwas gewagt, zumal sie zu beweisen ist nicht ganz einfach. Es gibt zwar Anstrengungen, die Gleichwertigkeit von Algorithmen mathematisch zu sichern; in der Praxis wird sie jedoch meistens nur durch *Tests* glaubhaft gemacht.

Ein Test kann die Korrektheit eines Programms nicht *beweisen*, sie höchstens einleuchtend – d.h. wahrscheinlich – machen<sup>1</sup>. So kann man auch die Gleichwertigkeit dieser Funktionen einsehen. Hierzu müssen *Testfälle* konstruiert werden. Ein Testfall für eine Funktion besteht aus einem aktuellen Parameter und aus dem erwarteten Ergebnis.

Im Falle der maximalen Teilsumme ist zum Beispiel

$$\text{folge} = (-1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, -1), \text{Ergebnis} = +4$$

ein Testfall. Es gibt typischerweise unendlich viele Testfälle<sup>2</sup>, deswegen können wir nicht alle durchprobieren und so die Korrektheit eines Programms beweisen. Mit einem geschickt zusammengestellten Satz von Testfällen kann sie aber einsichtig gemacht werden. Hierbei spielt neben einigen Strategien<sup>3</sup> – wie Äquivalenzklassenbildung, Betrachtung von Grenzfällen usw. – auch die gute Intuition des Programmierers eine wichtige Rolle.

Ähnlich wie die Korrektheit eines Programms kann die Gleichwertigkeit von Algorithmen nur einleuchtend gemacht werden, indem ein Satz von Testfällen mit ihnen bearbeitet wird. Wenn sie alle das gleiche Ergebnis produzieren, gehen wir davon aus, dass sie gleichwertig sind.

**Bemerkung:** Die Gleichwertigkeit (*Äquivalenz*) von Algorithmen allgemein zu beweisen ist ein *unlösbares Problem*. Dies bedeutet, dass es z.B. kein Java-Programm geben kann, das den Quellcode von zwei Java-Funktionen einliest und feststellt, ob sie zwei gleichwertige Algorithmen darstellen oder nicht. Wir werden uns im Kapitel 7.2. (ab Seite 154) mit unlösbaren Problemen auseinandersetzen.

## 2.2. Komplexitätsformel

Nach diesen konkreten Beispielen können wir nun die Formeln für Komplexität etwas präziser interpretieren.

Unter *konstanter Komplexität* verstehen wir, dass der Zeit- oder Speicherverbrauch des Algorithmus von der Menge (oder Größe) der Daten nicht abhängig ist. Sie wird mit der Formel  $O(1)$  oder  $O(n^0)$  bezeichnet<sup>4</sup>. Die *lineare Komplexität*  $O(n)$  oder  $O(n^1)$  bedeutet, dass der Verbrauch von Betriebsmitteln mit der Menge (oder Größe) der Eingabedaten proportional wächst: Doppelt so viele (oder große) Daten zu bearbeiten kostet doppelt so viel Zeit (oder Speicherplatz), dreimal oder zehnmal so viele Daten zu bearbeiten ist dreimal oder zehnmal so teuer. Die *quadratische Komplexität*  $O(n^2)$  heißt dementsprechend, dass doppelt, dreimal

<sup>1</sup> „... program testing can be used very effectively to show the presence of bugs, but never to show their absence.“ [EWD]

<sup>2</sup> s. *Unendlichkeitsbedingung* im Kapitel 7.1. (auf Seite 151)

<sup>3</sup> s. alle gängigen Lehrbücher für *Software Engineering*

<sup>4</sup> O steht für *Ordnung* oder *Größenordnung*



oder zehnmal so viele Daten einen vier-, neun- oder hundertfachen Verbrauch an Betriebsmitteln verursachen.

Die *logarithmische Komplexität* wird durch die Formel  $O(\log n)$  ausgedrückt, wobei die Basis des Logarithmus meistens 2 beträgt: Eine vierfache Datenmenge verursacht doppelten Verbrauch, eine acht- oder 1024-fache Menge einen drei- oder zehnfachen Verbrauch. Man sagt, sie sei „besser“ als die lineare, „schlechter“ als konstante. Diese Qualifikation gilt allerdings typischerweise nur für große Datenmengen. Manchmal wird die Komplexität  $O(n \log n)$  auch *logarithmisch* genannt: Sie ist „besser“ als die quadratische, „schlechter“ als lineare.

Man spricht von *polynomialer Komplexität*, wenn es eine Zahl  $k > 0$  gibt, dass die Komplexität „besser“ ist als  $O(n^k)$ . Manche Algorithmen sind „schlechter“ als polynomial: Ihre Komplexität kann dann *exponentiell* sein:  $O(2^n)$ . Hier bedeutet eine doppelte, drei- oder zehnfache Datenmenge eine 4-, 8- oder 1024-fache Bearbeitungszeit (bzw. einen solchen Speicherverbrauch). Die Basis 2 kann hierbei durch eine andere Zahl ersetzt werden.

Die Formel  $O(n^3)$  drückt etwa Folgendes aus: Es gibt eine Funktion  $f(n)$ , die in Abhängigkeit der (Menge oder Größe der) Eingabedaten den genauen Verbrauch an Betriebsmitteln beschreibt, und in der  $n$  in der dritten Potenz (und nicht in einer höheren) vorkommt. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies Folgendes<sup>1</sup>:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = c$$

Die Komplexität  $O(2^n)$  besagt, dass die Funktion  $f(n)$  die Variable  $n$  im Exponent enthält. Sie könnte z.B.  $f(n) = 31 \cdot 10^n + n^{25} + 22,5 \cdot n \log n + 370$  sein. Sie ist typischerweise schwer zu finden, man interessiert sich nur für ihr am schnellsten wachsendes Glied.

## 2.3. Datenstrukturen

Im Kapitel 2.1. (ab Seite 8) haben wir gesehen, dass es zur Lösung einer bestimmten Aufgabe gleichwertige Algorithmen mit unterschiedlichen Qualitätsmerkmalen geben kann. Ähnliches kann auch über Datenstrukturen gesagt werden.

Mit Hilfe von Datenstrukturen können *Behälterklassen*<sup>2</sup> erstellt werden, deren Objekte mehrere Werte eines Datentyps aufnehmen können. Typischerweise stellen diese Klassen Zugriffsmethoden zur Verfügung. Dem Benutzer bleibt der unkontrollierte, direkte Zugriff auf die Datenstruktur verwehrt.

---

<sup>1</sup>  $c$  ist eine Konstante ungleich 0

<sup>2</sup> nach der Terminologie von [SolSch] *Multibehälter*. In der Java-Bibliothek gibt es ähnliche Sammlungsklassen (*collection classes*).

Es gibt zwei typische Techniken für die Implementierung solcher Behälterklassen: diese als *Reihungen* oder als *verkettete Listen* zu programmieren. In [SolSch], [Gr] und in anderen Lehrbüchern für Programmiersprachen werden diese Techniken ausführlich behandelt. Uns interessiert an dieser Stelle nur die Gleichwertigkeit bzw. die Unterschiedlichkeit der beiden Datenstrukturen, d.h. wie weit wir mit ihrer Hilfe gleichwertige Algorithmen programmieren können.

Wir werden jetzt nur zwei typische Operationen für diese Datenstrukturen untersuchen: das Eintragen und das Löschen eines Elements.

### 2.3.1. Reihungen

Die Länge eines Reihungsobjekts wird in Java bei seiner Erzeugung (durch **new**) festgelegt und kann nicht mehr verändert werden. Dieser Umstand bedeutet, dass eine Reihung immer eine konstante Anzahl von Elementen enthält. Wenn einige von diesen irrelevant („Müll“) sind, muss dies neben der Datenstruktur gesondert vermerkt werden.

So kann zum Beispiel ein *Stapel*<sup>1</sup> (ein *LIFO*<sup>2</sup>-Behälter) intern aus einer Reihung bestehen, in der die gestapelten Elemente gespeichert werden, sowie einer Indexvariablen, in der vermerkt wird, wie viele Elemente der Stapel momentan enthält. Das Eintragen eines Elements in den Stapel bewirkt die Inkrementierung dieser Indexvariablen (im folgenden Beispiel *spitze*); ihre Dekrementierung bedeutet das Löschen des zuletzt eingetragenen Elements:

```
public class Stapel<E> { // 3
    private E[] inhalt;
    private int spitze; // Werte von 0 bis inhalt.length-1
    public Stapel(int groesse) { // maximale Größe
        inhalt = (E[]) new Object[groesse]; // 4
        spitze = -1; // Anfangswert: Stapel ist leer
    }
    public void eintragen(final E element) throws VollAusnahme {
        if (spitze < inhalt.length-1) {
            spitze++; // nächster freier Platz
            inhalt[spitze] = element;
        } else
            throw new VollAusnahme();
    }
    public void entfernen() throws LeerAusnahme {
```

<sup>1</sup> auf Englisch: *stack*; auch *Keller* genannt

<sup>2</sup> Abkürzung für *last in first out*

<sup>3</sup> *Generische Klassen* sind seit der Java Version 5 verwendbar. Der *Typparameter* *E* (wie *Element*) muss bei der Ausprägung (Instanziierung) der Klasse, ein beliebiger Referenztyp (Klasse, Schnittstelle oder Aufzählungstyp) eingesetzt werden.

<sup>4</sup> Es wäre eleganter und konsistenter, **new E[groesse]** schreiben zu können, aber Java 5 erlaubt keine *generic array creation*.

```

    if (spitze > -1)
        spitze--; // Platz des letzten eingetragenen Elements freigeben
    else
        throw new LeerAusnahme();
}
}

```

Weitere Methoden wie z.B. eine, um das Spitzenelement des Stapels zu lesen, sind denkbar.

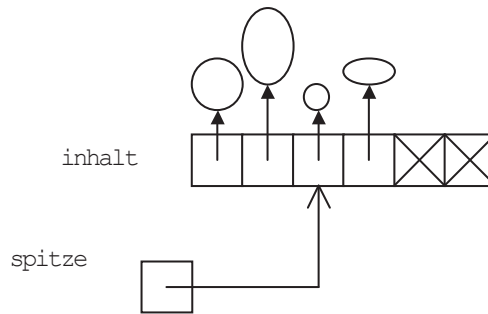


Abbildung 2.3: LIFO als Reihung mit drei Elementen

Die Komplexität dieser Algorithmen untersuchen wir im Kapitel 4.6. auf Seite 79 zusammen mit den Suchalgorithmen.

### 2.3.2. Verkettete Listen

Nicht nur Algorithmen, sondern auch Datenstrukturen können rekursiv sein: Auf die Definition einer Datenstruktur (einer Klasse) darf in derselben Definition – in Form einer Referenz – Bezug genommen werden<sup>1</sup>. Ein klassisches Beispiel hierfür ist die *verkettete Liste*. In diesem Kapitel werden wir die *vorwärts* und die *rückwärts* verkettete Liste untersuchen. Weitere verkettete Datenstrukturen, z.B. die *doppelt* verkettete Liste kann man ähnlich – wenn auch komplizierter – programmieren.

Eine Liste wird mit Hilfe von *Kettenelementen* implementiert. Ein Kettenelement wird typischerweise als eine (geschachtelte) Klasse `Knoten` vereinbart, die einen gespeicherten Wert sowie eine (oder evtl. mehrere) Referenz(en) enthält:

```

private static class Knoten<E> { // 2
    E wert; // Typparameter wird bei der Ausprägung eingesetzt
    Knoten<E> verbindung; // Rekursion
    Knoten(final E wert, final Knoten<E> verbindung) {

```

<sup>1</sup> in manchen anderen Programmiersprachen (wie Pascal oder C) erst nach einer **forward**-Vereinbarung

<sup>2</sup> `private static` ist sinnvoll, wenn `Knoten` geschachtelt (z.B. innerhalb einer generischen Klasse `Stapel` oder `Liste`, wie auch die folgenden Methoden) vereinbart wird.

```

        this.wert = wert;
        this.verbindung = verbindung;
    }
}

```

Über eine Referenz vom Typ `Knoten` kann die verkettete Liste erreicht werden. Wir nennen sie *Anker*:

```

Knoten<E> anker = null;
// Anfügen eines neuen Knotens:
anker = new Knoten<E>(element, anker); // neuer Knoten; der Alte wird verkettet
...
anker = anker.verbindung; // löschen des letzten Knotens der Liste

```

Der Anker adressiert das zuletzt erzeugte Kettenelement. Von hier kann man das davor erzeugte Element erreichen: `verbindung` referiert das zurückliegende Kettenelement. Alle Elemente können auf diese Weise bis zum ersten (ältesten) erreicht werden. Diese Technik heißt *Rückwärtsverkettung* und die Datenstruktur wird *rückwärts<sup>1</sup> verkettete Liste* genannt.

Zur obigen Implementierung des Stapels mit Hilfe einer Reihung ist die Technik der rückwärts verketteten Liste eine Alternative. Sie hat den Vorteil, dass die maximale Anzahl der Elemente nicht festgelegt werden muss:

```

private Knoten<E> anker;
public Stapel() {
    anker = null;
}
public void eintragen(final E element) throws VollAusnahme {
    try {
        anker = new Knoten<E>(element, anker);
    } catch (OutOfMemoryError exception) {
        throw new VollAusnahme();
    }
}
public void entfernen() throws LeerAusnahme {
    try {
        anker = anker.verbindung; // das letzte eingetragene Element ausketten
    } catch (NullPointerException exception) {
        throw new LeerAusnahme();
    }
}
}

```

Die hier verwendete **try-catch**-Alternative zur **if-else**-Technik (wie beim Stapel im vorigen Kapitel 2.3.1. auf Seite 22) für die Behandlung von Ausnahmensituationen wurde in [SolSch] ausführlich erläutert.

---

<sup>1</sup> Die Richtung ist zeitlich gemeint: Jeder Knoten referenziert den dahinterliegenden Knoten, der vor ihm eingetragen wurde, also rückwärts.

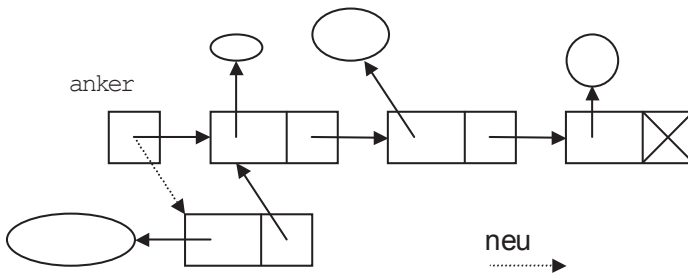


Abbildung 2.4: Eintragen in eine rückwärts verkettete Liste

*Vorwärts<sup>1</sup> verkettete Listen* sind geeignet, um *FIFO<sup>2</sup>*-Behälter (Warteschlangen) oder Listen mit freiem Zugriff zu programmieren. Beim Eintragen in eine solche Liste wird ein neues Knotenobjekt erzeugt, dessen *verbindung*-Komponente das (zeitlich) vorwärts liegende Knotenobjekt referiert:

```
public void eintragen(final E element) {
    Knoten<E> neu = new Knoten<E>(element, null);
    if (aelteste != null) { // Liste nicht leer
        juengste.verbindung = neu; // neuer jüngster Knoten wird eingefügt
        juengste = neu;
    } else { // Liste noch leer
        juengste = aelteste = neu;
    }
}
```

Hierbei sind *aelteste* und *juengste* jeweils die Anker<sup>3</sup> der Liste, die den ältesten bzw. jüngsten Knoten referieren; sie werden für eine leere Liste mit *null* vorbesetzt<sup>4</sup>. Der letzte Knoten der Liste wird mit einer *null* in ihrer *verbindung*-Komponente gekennzeichnet.

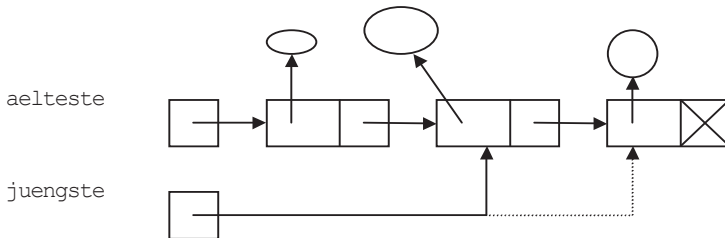


Abbildung 2.5: Eintragen in eine vorwärts verkettete Liste

<sup>1</sup> Jeder Knoten referenziert den Knoten, der nach ihm eingetragen wurde: vorwärts.

<sup>2</sup> Abkürzung für *first in first out*

<sup>3</sup> Es ist möglich, auch die vorwärts verkettete Liste mit nur einem Anker zu programmieren, indem *aelteste* im letzten Knoten (jetzt immer *null*) gespeichert wird.

<sup>4</sup> Eine alternative Technik ist, hierfür einen Pseudoknoten zu verwenden, wie im Kapitel 6.1.3. (ab Seite 118)

Das Löschen des ältesten Elements vom Ende der vorwärts verketteten Liste ist einfach:

```
public void loeschen() throws LeerAusnahme { // löscht das älteste Element
    if (aelteste != null)
        aelteste = aelteste.verbindung; // ältestes Element wird ausgehängt
    else // Liste leer
        throw new LeerAusnahme();
}
```

Um ein beliebiges Element (aus der Mitte) der verketteten Liste zu löschen, muss eine Referenz an das *vorangehende* Element vorhanden sein (dieses kann z.B. durch Suchen<sup>1</sup> gefunden werden):

```
private void loeschen(final Knoten<E> vorgaenger) throws LeerAusnahme { // 2
    // löscht das nachfolgende Element
    if (vorgaenger != null)
        vorgaenger.verbindung = vorgaenger.verbindung.verbindung;
    else // kein Element zum Löschen
        throw new LeerAusnahme();
}
```

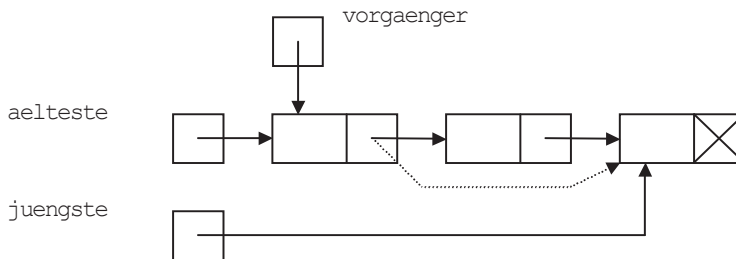


Abbildung 2.6: Löschen eines Elements aus der verketteten Liste

Im Kapitel 3.2. (auf Seite 37) werden wir auch komplexere Operationen an verketteten Listen untersuchen.

**Aufgabe 2.18:** Programmieren Sie das Eintragen in eine vorwärts verkettete Liste auf eine bestimmte (durch eine Knotenreferenz angegebene) Stelle. Überlegen Sie sich, welcher Knoten angegeben werden muss.

### 2.3.3. Gleichwertigkeit von Datenstrukturen

Mit den beiden vorgestellten Programmier Techniken können gleichwertige Klassen erstellt werden. Wir verstehen darunter Folgendes:

Nehmen wir an, zwei Klassen, die die beiden unterschiedlichen Techniken für die Datenstruktur verwenden, implementieren dieselbe Schnittstelle:

<sup>1</sup> s. Kapitel 4.2. (ab Seite 64)

<sup>2</sup> **public** ist nicht sinnvoll, wenn die innere Klasse **Knoten** **private** ist

```

public interface Stapel<E> {
    public void eintragen(E element) throws VollAusnahme;
    // requires !istVoll(); ensures !istLeer() & lesen() == element
    public E lesen() throws LeerAusnahme; // const1
    // requires !istLeer() // liefert das zuletzt eingetragene Element
    public void entfernen() throws LeerAusnahme;
    // requires !istLeer(); ensures !istVoll();
    // entfernt das zuletzt eingetragene Element
    public void entleeren(); // ensures istLeer(); // 2
    public boolean istLeer(); // const
    public boolean istVoll(); // const
    public void kopieren(final Stapel<E> quelle); // ensures istGleich(quelle);
    public boolean istGleich(final Stapel<E> stapel); // const
}

class StapelReihung<E> implements Stapel<E> { ... }

class StapelListe<E> implements Stapel<E> { ... }

```

Für die Schnittstelle können – ähnlich wie für Funktionen im Kapitel 2.1.9. (auf Seite 19) – *Testfälle* erstellt werden. Ein Testfall für eine Schnittstelle besteht jedoch nicht aus *einem* (parametrisierten) Aufruf, sondern aus einer *Folge* von Methodenaufrufen und den dazugehörigen aktuellen Parametern:

```

public static void testfall1(Stapel<Integer> stapel) {
    ...
    stapel.eintragen(new Integer(1));
    stapel.eintragen(new Integer(2));
    boolean ergebnis1 = stapel.istLeer();
    Integer ergebnis2 = stapel.lesen();
    ...
}

```

Ein Testfall enthält also Methodenaufrufe, die ihr Zielobjekt (**this**, das Objekt vor dem Punkt beim Aufruf) verändern<sup>3</sup>, und Methodenaufrufe, die es unverändert lassen, jedoch Information über seinen Zustand liefern<sup>4</sup>. Diese Information muss ausgewertet (im obigen vereinfachten Beispiel den Variablen `ergebnis1` und `ergebnis2` zugewiesen) und mit dem erwarteten Verhalten der Klasse verglichen werden.

Die beiden Klassen `StapelReihung` und `StapelListe` sind gleichwertig, wenn sie für *jeden* Testfall gleiche Ergebnisse liefern:

---

<sup>1</sup> Das Kommentar **const** (im Sinne von C++) wird verwendet, um anzudeuten, dass die Methode das Zielobjekt unverändert lässt.

<sup>2</sup> Die Methoden `entleeren` und `istLeer` bilden zusammen eine *Eigenschaft* (im Sinne von C#) und müssen konsistent implementiert werden

<sup>3</sup> nach der Terminologie von [SolSch] *Mutatoren*

<sup>4</sup> nach der Terminologie von [SolSch] *Informatoren*: Funktionsmethoden, die in der Schnittstelle mit `// const` gekennzeichnet wurden

```
Stapel<Integer> stapel = new StapelReihung<Integer>(GRÖSSE);  
testfall1(stapel);  
stapel = new StapelListe<Integer>();  
testfall1(stapel);
```

Die Testfälle können innerhalb eines *Stapeltesttreibers* programmiert werden. Es ist selbstverständlich nicht möglich, alle Testfälle zu erfassen, daher kann die Gleichwertigkeit von Klassen – ähnlich wie von Algorithmen – im Allgemeinen<sup>1</sup> auch nicht bewiesen werden. Eine ausreichende Anzahl von Testfällen macht jedoch die Gleichwertigkeit plausibel.

Bei einer korrekten Implementierung der beiden Klassen erhalten wir die gleichen Ergebnisse: Sie werden von den Aufrufen der Funktionsmethoden geliefert. Diese werden im Testtreiber miteinander verglichen und die Vergleichsergebnisse werden sinnvollerweise dokumentiert (z.B. in eine Datei ausgegeben).

Eine Alternative zum Stapeltesttreiber ist der *Dialogtesttreiber*; er enthält nicht die Testfälle, bietet nur einen Rahmen, sie im Dialog zu definieren und die einzelnen Aufrufe auszuführen. Sein Vorteil ist die Flexibilität, d.h. neue Testfälle können einfach – ohne Programmierung und Neuübersetzung des Testtreibers – angewendet werden. Sein Nachteil ist, dass bei der Veränderung (z.B. nach Fehlerkorrektur) einer der Klassen alle Testfälle neu eingegeben werden müssen.

Die Vorteile der beiden Testtreiberarten vereinigt der *Universaltesttreiber*, der die Testfälle in einem Dialog erfasst und sie in einer Datei speichert. Von hier aus können sie jederzeit abgerufen und wiederholt ausgeführt werden. So ein Universaltesttreiber kann aus der Schnittstelle *generiert* werden<sup>2</sup>.

Wenn die beiden oben vorgestellten Stapel-Klassen mit Hilfe von geeigneten Testtreibern miteinander verglichen werden, kann ein kleiner Unterschied zwischen ihnen übersehen werden: Die Reihungsimplementierung wirft die Ausnahme `VollAusnahme` aus, wenn es versucht wird, `GRÖSSE+1` Objekte<sup>3</sup> einzutragen; die Listenimplementierung wird auch das `GRÖSSE+1`-te Element aufnehmen, wenn die *Halde*<sup>4</sup> des Interpreters groß genug ist. Selbstverständlich ist es möglich, die Listenimplementierung künstlich einzuschränken, um volle Gleichwertigkeit zu erreichen; dadurch würde jedoch ihr wesentlicher Vorteil verloren gehen.

Weitere alternative Implementierungen sind denkbar. Ihre Gleichwertigkeit muss jedoch auf ähnliche Weise getestet werden.

---

<sup>1</sup> nur in Einzelfällen, und meistens nur schwer

<sup>2</sup> s. [SoIT]

<sup>3</sup> `GRÖSSE` ist der aktuelle Konstruktorparameter

<sup>4</sup> auf Englisch: *heap*; der Speicherbereich, wo die erzeugten Objekte abgelegt werden



### 2.3.4. Berechnung von Ausdrücken

Die oben dargestellten Datenstruktur `Stapel` oder auch `java.util.Stack` ist zum Beispiel geeignet, den Wert eines (*arithmetischen*) *Ausdrucks* (mit Klammern und Operatorpräzedenz) zu berechnen. Die folgende Prozedur verwendet zwei Stapel für die Operanden und die Operatoren:

```
private static Stack<Double> operanden = new Stack<Double>();
private static Stack<Integer> operatoren = new Stack<Integer>();
public static double auswerten(String[] ausdruck) {
    final String oper = "(+*/)"; // Operatoren
    final String prior = "311220"; // Präzedenz (Priorität, Vorrang) der Operatoren
    final int klammerAuf = oper.indexOf('('), klammerZu = oper.indexOf(')');
    operatoren.push(klammerAuf); // Boden des Stapels markieren
    for (String element : ausdruck) { // 1 // element ist ein double oder ein Operator
        char zeichen = element.charAt(0);
        if (Character.isDigit(zeichen)) // Operand
            operanden.push(Double.parseDouble(element)); // push trägt ein Element ein
        else for (int i = 0; i < oper.length(); i++) // Operator
            if (zeichen == oper.charAt(i)) { // Operator gefunden
                while (prior.charAt(i) <= prior.charAt(operatoren.peek()) &&
                    operatoren.peek() != klammerAuf) // Stapel leeren, gemäß Präzedenz
                    rechnen(operatoren.pop()); // pop liefert und entfernt das oberste Element
                if (zeichen != klammerZu) operatoren.push(i);
            }
    }
    while (!operatoren.isEmpty()) rechnen(operatoren.pop());
    return operanden.pop();
}
private static void rechnen(int operator) {
    switch (operator) {
        case 1: operanden.push(operanden.pop() + operanden.pop()); break; // '+'
        case 2: operanden.push(-(operanden.pop() - operanden.pop())); break; // '-'
        case 3: operanden.push(operanden.pop() * operanden.pop()); break; // '*'
        case 4: operanden.push(1/(operanden.pop() / operanden.pop())); break; // '/'
    }
}
```

---

<sup>1</sup> In der neuen („verbesserten“) `for`-Schleife nimmt `element` alle Werte aus der Reihung `ausdruck` auf.

### 3. Rekursion und Wiederholung

Im Kapitel 1.1. (ab Seite 1) haben wir den Algorithmus von Euklid sowohl iterativ wie auch rekursiv formuliert. Die Alternative ist typisch: Viele Aufgaben haben eine rekursive und eine iterative Lösung. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie weit die beiden Techniken austauschbar sind.

#### 3.1. Rekursive Algorithmen

Prinzipiell gilt: Alle Aufgaben, die mit einer Iteration<sup>1</sup> lösbar sind, sind auch ohne Schleife durch Rekursion lösbar. Es gibt sogar Programmiersprachen<sup>2</sup>, die keine Schleifen kennen, sondern Wiederholung durch Rekursion ausgedrückt werden muss.

Auch Rekursionen kann man meistens mit Hilfe von Iteration simulieren<sup>3</sup>. Oft sind die rekursiven Lösungen einfacher zu verstehen, verbrauchen aber für die Abarbeitung der Rekursion mehr Speicherplatz.

##### 3.1.1. Fakultät

Als erstes Beispiel für rekursive Algorithmen betrachten wir die Funktion *Fakultät*. Die mathematische Bezeichnung der Fakultät ist  $n!$ . Sie wird als das Produkt der ersten  $n$  natürlichen Zahlen durch die Formel

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

definiert. Die Wertetabelle der Funktion *Fakultät* ist:

|      |   |   |   |    |     |     |      |       |        |     |
|------|---|---|---|----|-----|-----|------|-------|--------|-----|
| $n$  | 1 | 2 | 3 | 4  | 5   | 6   | 7    | 8     | 9      | ... |
| $n!$ | 1 | 1 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 | 362880 | ... |

Tabelle 3.1: Wertetabelle der Fakultät

Diese Definition ermöglicht eine Berechnung mit Hilfe einer Schleife:

```
static int fakultaetIterativ(int n) { // requires n > 0
    int ergebnis = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        ergebnis *= i;
}
```

<sup>1</sup> Die Begriffe *Iteration*, *Wiederholung* und *Schleife* sind Synonyme; sie können miteinander ausgetauscht werden.

<sup>2</sup> z.B. *Prolog* oder *Logo*; in gewissem Sinne auch *XSLT*

<sup>3</sup> s. z.B. [Niev]

```
    return ergebnis;
}
```

Die rekursive Berechnung ist auf Grund der Formel

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n$$

möglich: fakultaetRekursiv(n) == n \* fakultaetRekursiv(n-1) für  $n \geq 2$ :

```
static int fakultaetRekursiv(int n) { // requires n > 0
    if (n <= 1)
        return 1;
    else
        return n * fakultaetRekursiv(n-1);
    // return n <= 1 ? 1 : n * fakultaetRekursiv(n-1); // 1
}
```

Der Nachteil der rekursiven Lösung gegenüber dem iterativen Programm ist der zusätzliche Verbrauch von Speicher: Die rekursiven Aufrufe werden auf dem Stapel (stack) abgelegt<sup>2</sup>. Die Größe des nötigen Speichers ist also proportional zum Parameter. Die *Speicherkomplexität* dieses Algorithmus ist dementsprechend *linear*. Die Speicherkomplexität der iterativen Lösung ist *konstant*, d.h. sie hängt nicht vom Parameter ab.

### 3.1.2. Die Fibonacci-Zahlen

Rekursionen können oft einfach durch Wiederholungen ersetzt werden.

Manchmal lohnt es sich, die kompliziertere Lösung mit der Schleife zu benutzen. Ein schönes Beispiel hierfür sind die *Fibonacci-Zahlen*. Sie werden durch die folgende rekursive Formel definiert:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2 \end{aligned}$$

Jede Fibonacci-Zahl ist also die Summe der beiden vorangehenden. Die ersten vierzehn Fibonacci-Zahlen sind:

| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12  | 13  | ... |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| $f_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | ... |

Tabelle 3.2: Wertetabelle der Fibonacci-Zahlen

Die folgende Funktion berechnet die Fibonacci-Zahlen nach der obigen Formel:

<sup>1</sup> diese alternative, kompaktere Lösung ist aber weniger lesbar

<sup>2</sup> gute Compiler können hier allerdings optimieren

```

static int fibonacciRekursiv(int n) {
    if (n <= 0)
        return 0;
    else if (n == 1)
        return 1;
    else
        return fibonacciRekursiv(n-1) + fibonacciRekursiv(n-2);
}

```

Wenn diese Funktion mit verschiedenen Parameterwerten aufgerufen wird, wächst die Rechenzeit für Parameterwerte oberhalb von 20 auffallend stark. Der Grund hierfür ist, dass viele Zwischenergebnisse mehrfach berechnet werden:

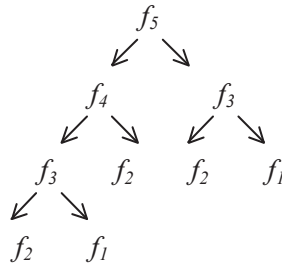


Abbildung 3.3: Berechnung von  $f_5$

Bei der Berechnung von  $f_5$  werden  $f_4$  und  $f_3$  berechnet; bei der Berechnung von  $f_4$  wird  $f_3$  wieder berechnet. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass dieser Algorithmus die *exponentielle Zeitkomplexität*  $O(2^n)$  hat. Um sie zu reduzieren, können die schon berechneten Fibonacci-Werte in einem *Gedächtnis* gespeichert werden. In der folgenden Klasse wird hierfür die `int`-Reihung `ged` mit 0 vorbesetzt; der Eintrag 0 kennzeichnet, dass die Fibonacci-Zahl für diesen Index noch nicht errechnet worden ist. Nach der (rekursiven) Berechnung wird sie hier gespeichert, um einer wiederholten Berechnung vorzubeugen:

```

class FibonacciMitGedaechtnis {
    private long ged[]; // Gedächtnis
    public FibonacciMitGedaechtnis(int max) {
        ged = new long[max]; // 1
    }
    public long fibonacci(int n) {
        // requires 0 <= n < max == ged.length
        if (ged[n] != 0) // schon errechnet
            return ged[n];
        else if (n < 2) { // 0 oder 1
            ged[n] = n;
            return ged[n];
        }
    }
}

```

<sup>1</sup> Eine Reihung aus Ganzzahlen wird in Java mit 0 vorbesetzt.

```

    else
        ged[n] = fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);
    return ged[n];
}
}

```

Auch die folgende iterative Lösung ist effizienter als `fibonacciRekursiv`, das Programm ist jedoch weniger verständlich. Hier werden die Fibonacci-Zahlen von unten nach oben in einer Zählschleife berechnet und die Zwischenergebnisse in lokalen Variablen gespeichert:

```

static int fibonacciIterativ(int n) { // requires n >= 0
    if (n > 0) {
        int aktuelle = 1, temp = 1, vorherige = 0;
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            temp = aktuelle;
            aktuelle = aktuelle + vorherige;
            vorherige = temp;
        }
        return aktuelle;
    }
    else
        return 0;
}

```

Die Zeitkomplexität von diesem Algorithmus ist linear, d.h. proportional zu  $n$ .

Eine mathematische Kuriosität ist, dass der irrational aussehende Bruch

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

einen Ganzzahlwert, und zwar die  $n$ -te Fibonacci-Zahl ergibt. Die Fibonacci-Zahlen spielen in Naturbeobachtungen bei der Verteilung von Eigenschaften (z.B. bei der Anordnung von Blättern auf Pflanzen) eine wichtige Rolle. Sie werden auch verwendet, um die Strategie des Mischens<sup>1</sup> einer größeren Anzahl von vorsortierten Sequenzen zu optimieren.

### 3.1.3. Die Ackermann-Funktion

| Rekursion ist geeignet, Funktionen zu definieren, die sehr schnell wachsen.

Die Werte der *Ackermann-Funktion*<sup>2</sup> (mit zwei Argumenten  $n$  und  $m$ ) werden durch die folgenden Formeln definiert:

<sup>1</sup> s. Kapitel 5.6.1. (auf Seite 107)

<sup>2</sup> benannt nach dem Mathematiker *F. W. Ackermann*, 1896 - 1962

$$a_m^0 = m + 1 \quad a_0^n = a_1^{n-1} \quad a_m^n = a_{a_{m-1}}^{n-1}$$

Diese Funktion ist ein Beispiel für eine Rekursion, die nicht (oder zumindest nicht direkt) durch Iteration ersetzt werden kann. Ihre interessante Eigenschaft ist, dass sie stärker wächst als jede *primitiv-rekursive Funktion*: Der Wert von `ackermann(4, 2)` kann mit 19729 Dezimalziffern beschrieben werden. Der Wert von `ackermann(4, 4)` ist größer als  $10^{10^{19000}}$ . Um die Größe dieser Zahl vorzustellen, kann beachtet werden, dass – nach einigen Abschätzungen – die Anzahl der Elementarteilchen im bekannten Universum etwa bei  $10^{70}$  liegt.

Die folgende Java-Methode implementiert die Ackermann-Funktion:

```
static int ackermann(int n, int m) { //1
    if (n == 0)
        return m + 1;
    else if (m == 0)
        return ackermann(n - 1, 1);
    else
        return ackermann(n - 1, ackermann(n, m - 1));
}
```

**Aufgabe 3.1:** Erstellen Sie eine Funktion, die die Werte der Ackermann-Funktion (zumindest für kleine Parameter) mit Hilfe eines Gedächtnisses liefert. Überwachen Sie die Laufzeit des Funktionsaufrufs mit Hilfe der Methode `getTime` der Klasse `java.util.Date`. Ermitteln Sie auch die Anzahl der rekursiven Aufrufe und stellen Sie eine Tabelle für verschiedene Parameterkombinationen zusammen.

### 3.1.4. Die mathematische Induktion

Ein weiteres Beispiel für rekursive Algorithmen ist die Lösung des altbekannten Problems mit dem Namen *Türme von Hanoi*: Eine gegebene Anzahl von gestapelten Ringen unterschiedlicher Größe muss von einer Stange auf eine andere mit Hilfe einer Dritten übertragen werden. Dabei darf ein größerer Ring nie auf einen kleineren gelegt werden:

---

<sup>1</sup> Diese Methode funktioniert nur im Wertebereich von `int` korrekt. Der Austausch der Parametertypen und des Ergebnistyps auf `long` würde ihre Brauchbarkeit nur ein bisschen verbessern. Die Benutzung von `java.math.BigDecimal`-Objekten statt `int`-Variablen hebt diese Einschränkung auf, führt allerdings zu enormen Rechenzeitsteigerung.

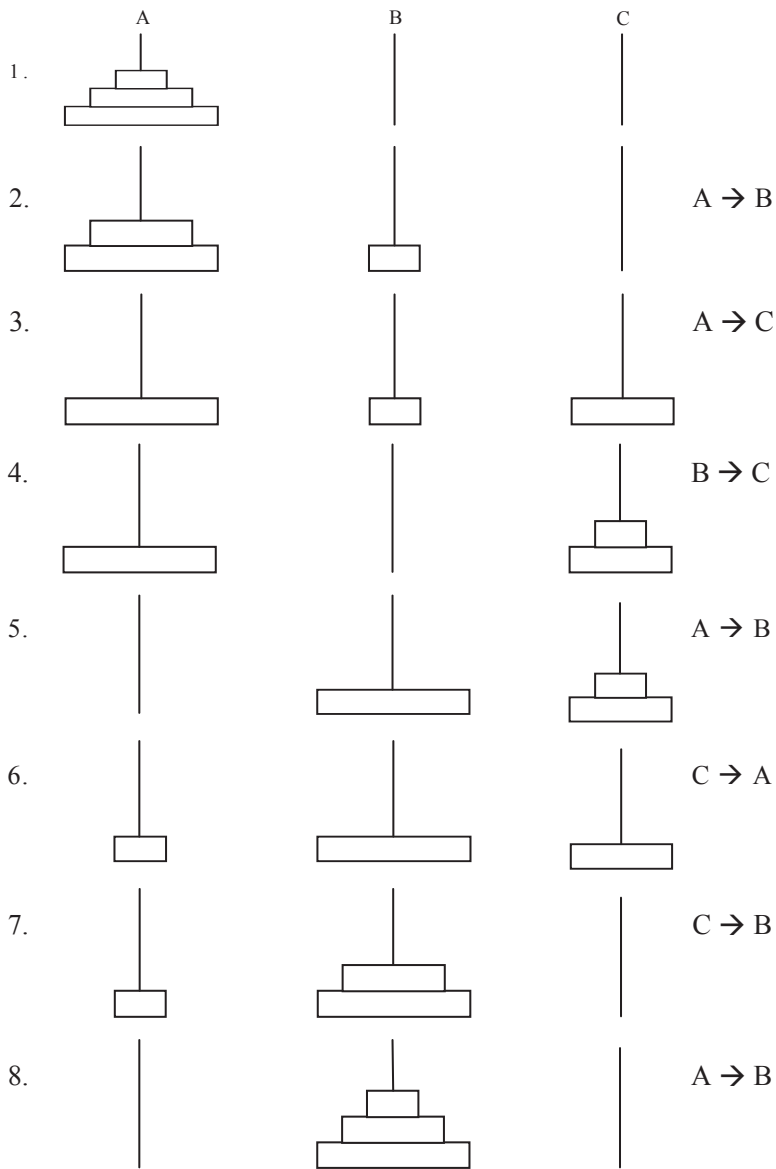


Abbildung 3.4: Türme von Hanoi

Ein Versuch, die Aufgabe mit mehreren (z.B. mit 5 oder 6) Scheiben zu lösen, dürfte die Komplexität der Problematik deutlich machen. Rekursion ist hier geeignet, einen verständlichen Algorithmus zu formulieren.

Die Idee für die rekursive Lösung ist das Prinzip der *mathematischen Induktion*. Um einen gegebenen Satz für eine beliebige natürliche Zahl  $n$  zu beweisen, führt man zwei Schritte durch: Man entwickelt

1. einen (trivialen) Beweis für  $n = 1$  (oder  $n = 0$ )
2. einen Beweis für  $n+1$  unter der Annahme, dass der Satz für  $n$  gilt.

Im Falle der Türme von Hanoi verwenden wir dieses Prinzip folgendermaßen. Wir nennen den (trivialen) Algorithmus für die Übertragung der kleinsten Scheibe von einer Stange auf eine andere  $A_1$ . Die zwei kleinsten Scheiben werden mit dem Algorithmus  $A_2$  übertragen usw. Wenn wir nun die  $n$  (kleinsten, oberen) Scheiben von einer Stange zur anderen mit einem Algorithmus  $A_n$  übertragen können, dann können wir  $n+1$  Scheiben folgendermaßen übertragen:

Zuerst übertragen wir die oberen  $n$  Scheiben mit dem Algorithmus  $A_n$  von der ersten Stange auf die zweite, dann übertragen wir die  $n+1$ -te (größte) Scheibe von der ersten auf die dritte Stange (die keine Scheibe enthält) mit dem trivialen Algorithmus  $A_1$ , und dann verwenden wir wieder den Algorithmus  $A_n$ , um die oberen  $n$  Scheiben von der zweiten auf die dritte Stange zu übertragen. Als Ergebnis erhalten wir den Algorithmus  $A_{n+1}$ . Auf dieselbe Weise erhalten wir den Algorithmus  $A_{n+2}$  usw. So können wir eine beliebige Anzahl von Scheiben übertragen.

Diese Beweisführung wird im folgenden einfachen rekursiven Programm implementiert:

```
private static void hanoi(int n, String a, String b, String c) {
    // überträgt n Scheiben von a nach b mit Hilfe von c
    if (n > 0) {
        hanoi(n-1, a, c, b);
        Console.println("Übertragung von " + a + " auf " + b);
        hanoi(n-1, c, b, a);
    }
}
public static void hanoi(int n) {
    hanoi(n, "A", "C", "B");
}
```

Der Aufruf `hanoi(3)`; bewirkt dann die Ausgabe auf der Konsole:

```
Übertragung von A auf B
Übertragung von A auf C
Übertragung von B auf C
Übertragung von A auf B
Übertragung von C auf A
Übertragung von C auf B
Übertragung von A auf B
```

Dies entspricht genau der Vorgehensweise auf der Abbildung 3.4.

Neben dieser einfachen rekursiven Lösung gibt es auch einen komplexen iterativen Algorithmus. Die Zeitkomplexität beider Algorithmen ist jedoch  $O(2^n)$ , der Vorteil des iterativen Algorithmus liegt nur in seiner konstanten *Speicherkomplexität* (gegenüber der logarithmischen Speicherkomplexität des obigen Programms).



### 3.1.5. Permutationen

Unter *Permutationen* verstehen wir die unterschiedlichen Anordnungen der Elemente einer Menge; z.B. alle Permutationen von {A, B, C} sind ABC ACB BAC BCA CAB CBA.

Die Anzahl der *Permutationen* aus  $n$  Elementen ist  $n!$ . Dies ist durch die folgende *mathematische Induktion* einleuchtend. Nehmen wir an, wir haben alle Permutationen aus  $n-1$  Elementen errechnet. Daraus erzeugen wir die Permutationen aus  $n$  Elementen, indem wir die Permutationen aus  $n-1$  Elementen  $n$ -mal kopieren. Das  $n$ -te Element wird nun in der ersten Kopie vor das erste Element geschoben, in der zweiten vor das zweite usw.; in der  $n-1$ -sten Kopie vor das  $n-1$ -ste (also das letzte) Element, schließlich in der  $n$ -ten Kopie nach dem letzten Element.

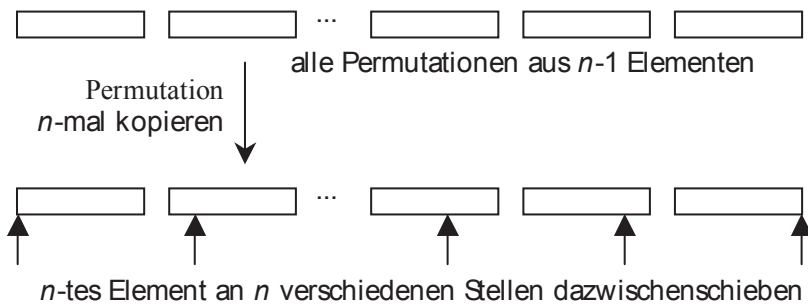


Abbildung 3.5: Permutationen

Wenn die Anzahl der Permutationen aus  $n-1$  Elementen  $p_{n-1}$  war, dann erhalten wir auf diese Weise  $np_{n-1}$  verschiedene Permutationen. Für  $n = 1$  ist diese Anzahl 1. Wenn  $p_{n-1} = (n-1)!$ , dann  $p_n = np_{n-1} = n(n-1)! = n!$ .

**Aufgabe 3.2:** Entwickeln Sie eine Funktion `permutationen` für die rekursive Berechnung von Permutationen. In der Funktion sollen Sie eine zweidimensionale Reihung lokal anlegen, die die Permutationen aus  $n-1$  Elementen enthält. Sie sollen diese in das Ergebnis (ebenfalls eine lokale zweidimensionale Reihung der Größe  $n! \cdot n$ )  $n$ -mal kopieren und das letzte Element an die 1-ste, 2-te, ...,  $n$ -te Stelle einschieben. Eine geschickte Manipulation der Reihungsindizes ist hier der Schlüssel für eine elegante Lösung.

## 3.2. Abarbeitung von Datenstrukturen

Im Kapitel 2.3.2. (auf Seite 23) haben wir die elementaren Operationen (eintragen, löschen) von Datenstrukturen (einer Reihung oder einer verketteten Liste) untersucht: Sie betrafen immer nur *ein* Element. Angenommen, wir wollen *alle* Elemente einer solchen Datenstruktur bearbeiten (z.B. um 1 erhöhen, halbieren oder aufsummieren). Dazu müssen wir durch die ganze Datenstruktur wandern und alle Elemente anfassen (lesen oder verändern). Wir nennen dies *Abarbeitung* einer Datenstruktur.

### 3.2.1. Iterative Abarbeitung von rekursiven Datenstrukturen

Eine verkettete Liste wird typischerweise mit einer **while**-Schleife<sup>1</sup> abgearbeitet. Beispielsweise kann der *Vergleich* zweier Listen (s. Abbildung 2.5 auf Seite 25) oder das *Kopieren* einer Liste wie folgt programmiert werden:

```
public boolean istGleichIter(final Liste<E> that) { // 2
    Knoten<E> diese = this.aelteste, jene = that.aelteste;
    while (diese != null && jene != null) { // Listen nicht zu Ende
        if (diese.wert != jene.wert) // Listen ungleich
            return false;
        diese = diese.verbindung;
        jene = jene.verbindung;
    }
    return diese == null && jene == null; // beide Listen zu Ende?
}
public void kopierenIter(final Liste<E> that) {
    this.juengste = this.aelteste = null; // Liste entleeren
    Knoten<E> jene = that.aelteste;
    while (jene != null) { // jeden Knoten-wert der Quelle eintragen
        this.eintragen(jene.wert);
        jene = jene.verbindung;
    }
}
```

Die Methode `kopieren` überträgt also den Inhalt des Parameterobjekts `that` in das Zielobjekt `this`; der alte Inhalt geht dabei verloren. Alternativ ist es möglich, denselben Algorithmus in einer Funktionsmethode zu formulieren:

```
public Liste<E> kopieren() {
    Liste<E> ergebnis = new Liste<E>();
    ... // der Algorithmus ist derselbe
    return ergebnis;
}
```

Eine dritte Möglichkeit ist, die Funktionsmethode **static** zu vereinbaren. Dann braucht sie (anstelle von **this**) einen Parameter:

```
public static <E> Liste<E> kopieren(Liste<E> that) { // 3
    ... // der Algorithmus ist derselbe
}
```

<sup>1</sup> bedingungsgesteuerte Schleife

<sup>2</sup> Diese Gleichheit ist weder „flach“ noch „tief“, sondern eine „logische Gleichheit“; ebenso die nachfolgende Kopie.

<sup>3</sup> **static**-Methoden können den Typparameter der generischen Klasse nicht benutzen; sie müssen selber als generische Methoden vereinbart werden.

### 3.2.2. Rekursive Abarbeitung von rekursiven Datenstrukturen

Die rekursive Definition der `Knoten`-Klasse auf der Seite 23 führt zur Idee, solche Methoden eleganter rekursiv zu programmieren. Hierzu werden zwei private Funktionen vereinbart, die jeweils ein Knotenpaar vergleichen bzw. einen Knoten kopieren:

```
public boolean istGleichRek(final Liste<E> that) {
    return istGleichRek(this.aelteste, that.aelteste); // rekursiver Knotenvergleich
}
private boolean istGleichRek(final Knoten<E> dieser, final Knoten<E> jener) {
    if (dieser == null || jener == null) // eine der Listen zu Ende
        return dieser == null && jener == null; // ob auch die andere?
    else
        return dieser.wert == jener.wert && // Vergleich der Werte
            istGleichRek(dieser.verbindung, jener.verbindung); // Restlisten
}

public void kopierenRek(final Liste<E> that) {
    this.aelteste = kopie(that.aelteste); // Knoten rekursiv kopieren
}
private Knoten<E> kopie(final Knoten<E> that) {
    if (that == null)
        return null; // Kennzeichnung des letzten Knotens
    else // Liste zu Ende
        return new Knoten<E>(that.wert, kopie(that.verbindung));
        // den Wert in den neuen Knoten kopieren, den Rest rekursiv kopieren
}
}
```

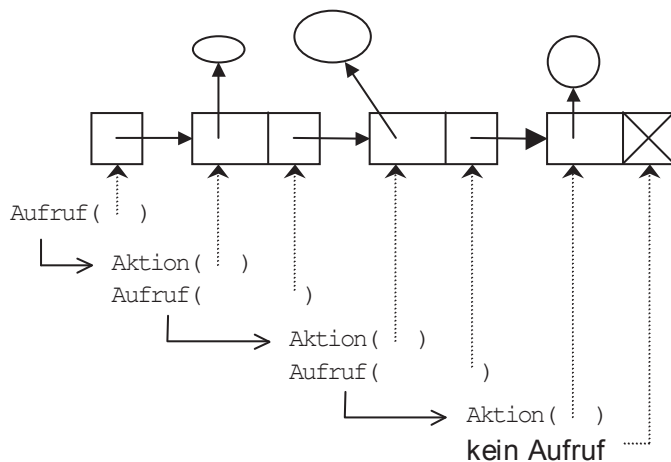


Abbildung 3.6: Rekursive Abarbeitung einer Liste

### 3.2.3. Rekursive Abarbeitung von Reihungen

Wie wir im Kapitel 2.3. (auf Seite 21) gesehen haben, bieten *Reihungen* zu verketteten Listen eine Alternative. Sie werden typischerweise mit *Zählschleifen*<sup>1</sup> abgearbeitet, da die Länge einer Reihung – im Gegensatz zur verketteten Liste – leicht ermittelbar ist<sup>2</sup>.

```
public class Reihung<E> {
    private E[] inhalt;
    public Reihung(int länge) {
        inhalt = (E[]) new Object[länge];
    }
    public boolean istGleichIter(final Reihung<E> that) {
        if (this.inhalt.length != that.inhalt.length) // Längen ungleich
            return false;
        for (int index = 0; index < inhalt.length; index++)
            if (this.inhalt[index] != that.inhalt[index]) // Werte ungleich
                return false;
        return true; // alle Werte gleich
    }

    public void kopierenIter(final Reihung<E> that) {
        this.inhalt = (E[]) new Object[that.inhalt.length];
        for (int index = 0; index < inhalt.length; index++)
            this.inhalt[index] = that.inhalt[index]; // Wert kopieren
    }
    ... // weitere Operationen für Schreiben und Lesen von Werten in der Reihung
}
```

Obwohl Reihungen – im Gegensatz zu verketteten Listen – nicht rekursiv definiert werden, ist es doch möglich – und manchmal auch sinnvoll –, Operationen, die die ganze Reihung bearbeiten (wie z.B. die Vergleich- und Kopieroperationen) rekursiv zu vereinbaren:

```
public boolean istGleichRek(final Reihung<E> that) {
    return this.inhalt.length == that.inhalt.length && this.istGleichRek(that,
0); //3
}
private boolean istGleichRek(final Reihung<E> that, int index) {
    // ist Inhalt von that ab index mit this gleich?
    if (index < this.inhalt.length && index < that.inhalt.length)
        return this.inhalt[index] == that.inhalt[index] && // gleich?
            this.istGleichRek(that, index+1); // rekursiv: Rest gleich?
    else
        return true; // alle Elemente gleich
}
```

<sup>1</sup> Schleifen, deren Durchlaufzahl beim Eintritt in die Schleife bekannt ist; in einigen Programmiersprachen wie Pascal (nicht in Java): **for**-Schleifen

<sup>2</sup> Listen in den Standardklassen enthalten eine Methode `size()`.

<sup>3</sup> `&&` ist die *kurzgeschlossene Konjunktion*: Der rechte Operand wird nur berechnet, wenn die Auswertung des linken Operanden **true** ergibt.

```

public void kopierenRek(final Reihung<E> that) {
    this.inhalt = (E[]) new Object[that.inhalt.length];
    this.kopierenRek(that, 0); // alle Werte kopieren
}
private void kopierenRek(final Reihung<E> that, int index) {
    if (index < this.inhalt.length) {
        this.inhalt[index] = that.inhalt[index]; // Wert kopieren
        this.kopierenRek(that, index+1); // rekursiv: Rest kopieren
    }
}

```

Durch dieses Programm und auf der Abbildung 3.7: wird illustriert, wie eine Schleife durch eine geeignet strukturierte Rekursion ersetzt werden kann.

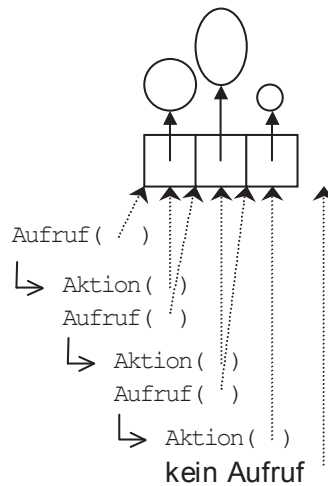


Abbildung 3.7: Rekursive Abarbeitung einer Reihung

### 3.2.4. Iteratoren

Die Schnittstelle `java.util.Iterator` dient dazu, über alle Elemente einer beliebigen Sammlung (wie Liste oder Reihung) durchzulaufen. Wenn Sie implementiert wird, ist es leicht, Methoden wie `istGleich` oder `kopieren` zu programmieren:

```

public Iterator<E> iterator() {
    return new Iterator<E>() { // anonyme Implementierung von Iterator
        private int i = 0;
        public boolean hasNext() { return i < inhalt.length; }
        public E next() { return inhalt[i++]; }
        public void remove() {} // leere Implementierung, da nicht benötigt
    };
}
public boolean istGleich(final Reihung<E> that) {
    Iterator<E> dieser = this.iterator(), jener = that.iterator();
    while (dieser.hasNext() && jener.hasNext())
        if (dieser.next() != jener.next())

```

```

        return false;
    return dieser.hasNext() == jener.hasNext();
}
public void kopieren(final Reihung<E> that) throws VollAusnahme {
    Iterator<E> jener = that.iterator();
    spitze = -1; // this entleeren
    while (jener.hasNext())
        eintragen(jener.next());
}

```

Wenn die Klasse `Reihung` die Schnittstelle `java.lang.Iterable` implementiert (sie enthält die einzige Methode `iterator()` (wie oben), dann kann sie in „verbesserten `for`-Schleifen“ (ab Java 5, s. Kapitel 2.1.7. ab Seite 16) verwendet werden.

**Aufgabe 3.3:** Implementieren Sie den `Iterator` für `Liste` und mit seiner Hilfe die Methoden `istGleich` und `kopieren`.

### 3.3. Rekursive Kurven

Das Wesen der Rekursion – insbesondere die *Selbstähnlichkeit* – kann mit Hilfe von *Monsterkurven* demonstriert werden; sie sind eindimensionale geometrische Gebilde unendlicher Länge, die eine Fläche abdecken:

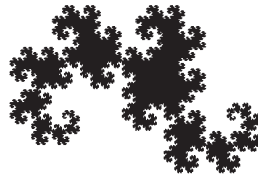


Abbildung 3.8: Monsterkurve

Monsterkurven werden nach einem regelmäßigen Muster schrittweise verfeinert. Sie können mit Hilfe von *Fraktalen*<sup>1</sup> erstellt werden. Die Rekursion ist geeignet, die unendlich lange Monsterkurve mit endlich langen Kurven anzunähern. Solche Annäherungen einer Monsterkurve nennen wir *rekursive Kurven*.

Für das Zeichnen von rekursiven Kurven verwenden wir die Technik der *Schildkrötengrafik*<sup>2</sup>, die durch einfache Methodenaufrufe zu steuern ist. Sie basiert auf der Vorstellung, dass auf der Zeichenfläche eine Schildkröte in die vorgegebene Richtung wandert und ihre Spur hinterlässt. In den folgenden Beispielen gehen wir davon aus, dass eine Klasse mit der fol-

<sup>1</sup> Fraktale sind geometrische Gebilde, deren Dimension keine Ganzzahl (wie 1, 2 oder 3), sondern eine Bruchzahl ist – wie z.B. bei einer Monsterkurve ca. 1,78 (eine irrationale Zahl) .

<sup>2</sup> auf Englisch: *turtle graphics*; ein Online-Beispiel ist auf der Adresse

<http://kaminari.istc.kobe-u.ac.jp/java/logo/> zu finden

genden Spezifikation zur Verfügung steht, die die Bewegung der Schildkröte z.B. im Fenster eines Java-Applets darstellt:

```
class Schildkröte {
    strecke(double länge); // Schildkröte zeichnet eine Strecke gegebener länge
    richtung(int grad); // Schildkröte wechselt Richtung um den gegebenen Grad
    // grad > 0 nach links, grad < 0 nach rechts, jeweils modulo 360
}
```

Die Schildkröte bewegt sich dabei in einem Fenster der Größe 1×1: Ihre x- und y-Koordinaten sind also **double**-Werte zwischen 0.0 und 1.0, mit dem Nullpunkt links unten.

### 3.3.1. Schneeflockenkurve

| Eine der einfachsten rekursiv definierbaren Kurven ist die *Schneeflockenkurve*.

Die ersten drei Verfeinerungen haben folgende Gestalt:

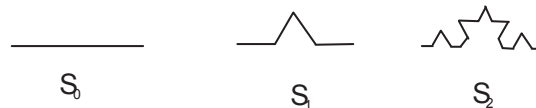


Abbildung 3.9: Initiator ( $S_0$ ) und Generator ( $S_1$ ) der Schneeflockenkurve

Wie aus der Darstellung ersichtlich ist, entsteht jede Stufe aus der vorangehenden dadurch, dass alle gerade Strecken dreigeteilt werden und der mittlere Teil durch die zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ersetzt wird.

Wir nennen die anfängliche Strecke der Länge 1 *Initiator* der Schneeflockenkurve. In jeder Stufe werden die Strecken gedrittelt, der *Seitenteiler* ist hier also 3. Der *Generator* ist die Figur, durch die der Initiator in jeder Stufe ersetzt wird. Bei der Schneeflockenkurve haben die zwei Seiten eines Dreiecks die Rolle des Generators, und nur der mittlere Teil des Initiators wird ersetzt.

Die folgende einfache Prozedur veranlasst eine Schildkröte (d.h. ein Objekt der Klasse *Schildkröte*), die Kurve  $S_0$  zu zeichnen:

```
void schneeflocke0(double seitenlänge) { // zeichnet 0-te Stufe
    k.strecke(seitenlänge); // k referiert ein Schildkröte-Objekt
}
```

Die Prozedur *schneeflocke1*, die die Kurve  $S_1$  zeichnet, ruft *schneeflocke0* dreimal mit durch den Seitenteiler dividierte Seitenlänge auf. Dazwischen wendet die Schildkröte um 60 Grad nach links bzw. 120 Grad nach rechts:

```
private final static int seitenteiler = 3;
void schneeflocke1(double seitenlänge) { // zeichnet 1-ste Stufe
    schneeflocke0(seitenlänge/seitenteiler);
    k.richtung(60); // 60 Grad nach links
    schneeflocke0(seitenlänge/seitenteiler);
```

```

k.richtung(-120); // 120 Grad nach rechts
schneeflocke0(seitenlänge/seitenteiler);
k.richtung(60); // 60 Grad nach links
schneeflocke0(seitenlänge/seitenteiler);
}

```

In der nächsten Stufe werden wieder Mittelstücke durch Dreiecke ersetzt:

```

void schneeflocke2(double seitenlänge) { // zeichnet 2-te Stufe
    schneeflocke1(seitenlänge/seitenteiler);
    k.richtung(60); // 60 Grad nach links
    schneeflocke1(seitenlänge/seitenteiler);
    k.richtung(-120); // 120 Grad nach rechts
    schneeflocke1(seitenlänge/seitenteiler);
    k.richtung(60); // 60 Grad nach links
    schneeflocke1(seitenlänge/seitenteiler);
}

```

Diese Prozedur ist der Prozedur `schneeflocke1` sehr ähnlich, außer dass sie eine andere Stufennummer hat. Hieraus ergibt sich die allgemeine rekursive Form:

```

void schneeflocke(int stufe, double seitenlänge) {
    // zeichnet Schneeflockenkurve der angegebenen Stufe
    if (stufe == 0) // Rekursion abbrechen
        k.strecke(seitenlänge); // Initiator: zeichnet Linie
    else { // viermal rekursiver Aufruf
        stufe--; seitenlänge /= seitenteiler;
        schneeflocke(stufe, seitenlänge);
        k.richtung(60); // 60 Grad nach links
        schneeflocke(stufe, seitenlänge);
        k.richtung(-120); // 120 Grad nach rechts
        schneeflocke(stufe, seitenlänge);
        k.richtung(60); // 60 Grad nach links
        schneeflocke(stufe, seitenlänge);
    }
}

```

Am einfachsten ist es, diese Prozedur in einem Applet aufzurufen:

```

public class Schneeflocke extends java.applet.Applet {
    private int stufe = 6; // kann z.B. über Buttons gesetzt werden
    private Schildkröte k;
    public void paint(java.awt.Graphics grafik) {
        k = new Schildkröte(grafik, getHeight()-1, getWidth()-1);
        schneeflocke(stufe, 1.0);
    }
}

```

Die Ausführung des Applets mit unterschiedlichen `stufe`-Werten zeichnet Annäherungen der Schneeflockenkurve:



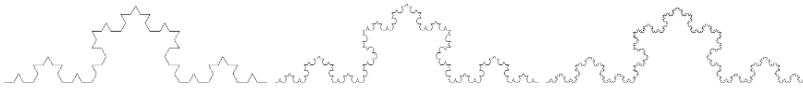


Abbildung 3.10: Drei Annäherungen der Schneeflockenkurve

**Aufgabe 3.4:** Programmieren Sie die Schneeflockenkurve mit einem gleichseitigen Dreieck als Initiator. Der Generator setzt auf jeder Seite des Dreiecks an.

### 3.3.2. Die Pfeilspitzenkurve

| Eine weitere interessante Kurve ist die *Pfeilspitzenkurve*<sup>1</sup>.

Ihr Generator der ist eine hausdachförmige Figur:

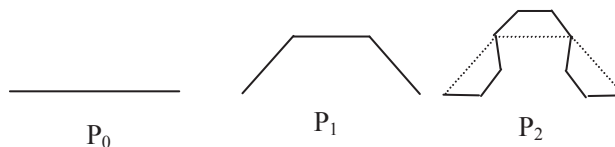


Abbildung 3.11: Initiator und Generator der Pfeilspitzenkurve

Der Initiator ist – wie bei der Schneeflockenkurve – die Einheitsstrecke:

```
void pfeilspitze0(double länge) {
    // zeichnet Pfeilspitzenkurve 0-ter Stufe
    k.strecke(länge);
}
```

Hier ist der Seitenteiler 2; der Generator besteht aus drei Initiatoren, jeweils um 60 Grad gedreht. Die Prozedur `pfeilspitze0` mit Parameter `länge/2` dreimal aufzurufen und die Schildkröte um 60 bzw. -60 Grad wenden zu lassen würde jedoch nicht den gewünschten Effekt erreichen, weil der Generator auf den Initiator abwechselnd von links und von rechts gelegt wird. Das Problem wird durch einen zusätzlichen Parameter `richtung` gelöst:

```
void pfeilspitze1(double länge, boolean richtung) {
    // zeichnet Pfeilspitzenkurve 1-ster Stufe
    final int grad = 60 * (richtung ? 1 : -1);
    k.richtung(grad); // nach links
    pfeilspitze0(länge/2);
    k.richtung(-grad); // nach rechts
    pfeilspitze0(länge/2);
    k.richtung(-grad); // nach rechts
    pfeilspitze0(länge/2);
    k.richtung(grad); // nach links
}
```

<sup>1</sup> Manche nennen sie *Sierpinski-Dreieck*.

Der allgemeine Fall fasst den Initiator und den Generator in der Rekursion zusammen :

```
void pfeilspitze (int stufe, double länge, boolean richtung) {
    // zeichnet Pfeilspitzenkurve
    if (stufe == 0) // Rekursion abbrechen
        k.strecke(länge); // zeichnet Linie
    else { // dreimal rekursiver Aufruf
        final int grad = 60 * (richtung ? 1 : -1);
        k.richtung(grad); // nach links
        pfeilspitze(stufe-1, länge/2, !richtung);
        k.richtung(-grad); // nach rechts
        pfeilspitze(stufe-1, länge/2, richtung);
        k.richtung(-grad); // nach rechts
        pfeilspitze(stufe-1, länge/2, !richtung);
        k.richtung(grad); // nach links
    }
}
```

Der dazugehörige Prozeduraufruf in der paint-Methode eines Applets ist:

```
int stufe = 9; // kann verändert werden
k = new Schildkröte(grafik, getHeight()-1, getWidth()-1);
pfeilspitze(stufe, 1.0, true);
```

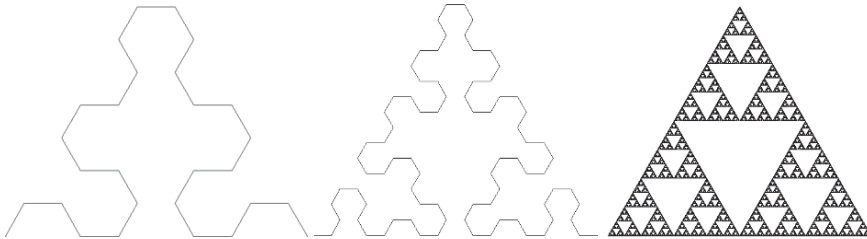


Abbildung 3.12: Drei Annäherungen der Pfeilspitzenkurve

**Aufgabe 3.5:** Untersuchen Sie das Programm der *Drachenkurve* und zeichnen Sie die ersten drei Stufen:

```
final static double wurzelZwei = Math.sqrt(2);
void drache(int stufe, double länge, boolean richtung) {
    // zeichnet Drachenkurve der angegebenen Stufe
    if (stufe == 0) // Rekursion abbrechen
        k.strecke(länge);
    else { // zweimal rekursiver Aufruf
        final int gradLinks = 45 * (richtung ? -1 : 1);
        final int gradRechts = 90 * (richtung ? 1 : -1);
        länge /= wurzelZwei;
        stufe--;
        k.richtung(gradLinks);
        drache(stufe, länge, false);
        k.richtung(gradRechts);
        drache(stufe, länge, true);
        k.richtung(gradLinks);
    }
}
```

```
}
}
```

Der Grenzwert der Drachenkurve<sup>1</sup> ist eine *Monsterkurve*: Wenn der Prozess der Verfeinerung unendlich lang läuft, bedeckt die (unendlich lange) Drachenkurve – wie mathematisch beweisbar –  $\frac{1}{4}$  einer begrenzten Fläche.

### 3.3.3. Die Hilbert-Kurve

Ein weiteres Beispiel für Monsterkurven ist die *Hilbert-Kurve*<sup>2</sup>, deren erste Verfeinerungen die Abbildung 3.13 zeigt:

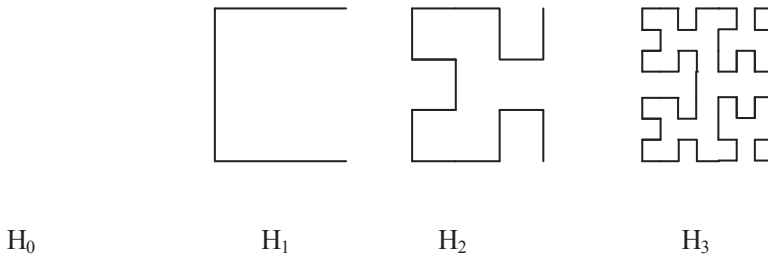


Abbildung 3.13: Initiator und Generator der Hilbert-Kurve

Jede Verfeinerungsstufe  $H_k$  heißt die  $k$ -te *Annäherung* der Hilbert-Kurve oder auch Hilbert-Kurve  $k$ -ter *Ordnung*. Sie wird aus vier Stücken von  $H_{k-1}$  zusammengesetzt: Ihre Größe wird halbiert, zwei von ihnen werden nach rechts bzw. links rotiert, und sie werden durch drei Strecken miteinander verbunden. So wird die Kurve  $H_1$  aus vier (leeren) Kurven  $H_0$  zusammengesetzt; sie besteht nur aus den drei verbundenen Strecken.

Weitere Verfeinerungen der Hilbert-Kurve werden immer „dichter“, entsprechend der mathematischen Tatsache, dass es für jedes  $\varepsilon > 0$  und für jeden Punkt des von  $H_1$  umschlossenen Quadrats eine Zahl  $k$  gibt, für die der Punkt der Kurve  $H_k$  näher als  $\varepsilon$  liegt. Mathematisch bedeutet dies, dass die Hilbert-Kurve, d.h. der Grenzwert aller Annäherungen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_k$$

eine endliche Fläche hat. Diese Eigenschaft beschreibt eine *Monsterkurve*.

Wenn eine Prozedur

```
void hilbert(int stufe, int richtung, boolean gespiegelt);
// richtung = 0, 1, 2 oder 3
```

<sup>1</sup> Eine Annäherung ist auf der Abbildung 3.8 (Seite 43) zu sehen.

<sup>2</sup> benannt nach *David Hilbert* (1862 – 1943), deutscher Mathematiker

die Annäherung der Hilbert-Kurve der gegebenen Stufe mit einer Öffnung in die gegebene Richtung (nach rechts, unten, links bzw. oben) zeichnen kann, dann kann die Prozedur `hilbert` rekursiv programmiert werden. Mit dem Parameter `gespiegelt` wird gesteuert, von welchem Ende an die Kurve gezeichnet werden soll:

```
void hilbert(int stufe, int richtung, boolean gespiegelt) {
    if (stufe != 0) { // keine leere Kurve
        stufe--;
        final int links = (richtung + 3) % 4;
        final int rechts = (richtung + 1) % 4;
        final int zurueck = (richtung + 2) % 4;
        final boolean gedreht = richtung % 4 == 1 || richtung % 4 == 3;
        hilbert(stufe, gedreht ? links : rechts, !gespiegelt);
        strecke(zurueck);
        hilbert(stufe, richtung, gespiegelt);
        strecke(gespiegelt ? rechts : links);
        hilbert(stufe, richtung, gespiegelt);
        strecke(richtung);
        hilbert(stufe, gedreht ? rechts : links, !gespiegelt);
    }
}
```

Die lokale Variable `gedreht` sorgt dafür, dass die Hilbert-Kurven an den Rändern in die richtige Richtung gedreht werden.

Im Rumpf der Prozedur `hilbert` haben wir jetzt nicht die Schildkrötengrafik verwendet, sondern die (von der Klasse `Schildkröte` unabhängige) Prozedur

```
void strecke(int richtung) // richtung = 0, 1, 2 oder 3
// Länge der Strecke ist 2**(-stufe)
```

deren Aufruf die Verbindungsstrecken zeichnet. Der Parameter `richtung` gibt an, ob die Strecke von rechts nach links, von oben nach unten, von links nach rechts bzw. von unten nach oben gezeichnet werden soll.

Diese Prozedur kümmert sich nicht um die Platzierung der Kurven und Strecken; dies wird durch zwei globale Variablen `x` und `y` gesteuert. Sie stellen die Anfangsposition der zu zeichnenden Strecke dar. Die Prozedur `strecke` setzt die Variablen an die Endposition der gezeichneten Strecke:

```
final int hoehe = getHeight()-1, breite = getWidth()-1;
final int groesse = (breite > hoehe ? hoehe : breite);
final int laenge = (int)(groesse/Math.pow(2, ordnung));
int x = 1; // Anfang links unten
int y = hoehe;
void strecke(int richtung) {
    switch (richtung) {
        case 0: // von rechts nach links
            g.drawLine(x, y, x - laenge, y); // g referiert ein Graphics-Objekt
            x -= laenge;
            break;
        case 1: // von oben nach unten
```

```

    g.drawLine(x, y, x, y + länge); y += länge;
    break;
case 2: // von links nach rechts
    g.drawLine(x, y, x + länge, y); x += länge;
    break;
case 3: // von unten nach oben
    g.drawLine(x, y, x, y - länge); y -= länge;
    break;
}
}

```

Die Abbildung 3.14 zeigt einige Annäherungen der Hilbert-Kurve:

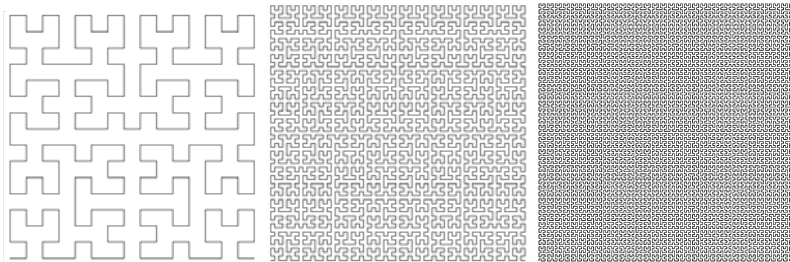


Abbildung 3.14: Drei Annäherungen der Hilbert-Kurve

**Aufgabe 3.6:** Die *Sierpinski-Kurve*<sup>1</sup> wird nach einem ähnlichen Prinzip, jedoch etwas komplexer aufgebaut:

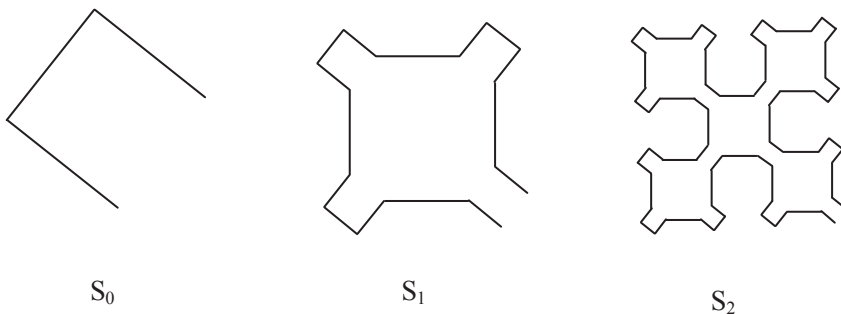


Abbildung 3.15: Initiator und Generator Sierpinski-Kurve

Hierbei besteht die Kurve  $S_k$  aus vier Exemplaren von  $S_{k-1}$ , die in unterschiedliche Richtungen gedreht und am Eck (rechts unten, rechts oben, links oben bzw. links unten) mit einer Verbindungsstrecke doppelter Länge verbunden werden.

<sup>1</sup> benannt nach *Wacław Sierpiński* (1882 – 1969), polnischer Mathematiker

Entwickeln Sie eine der Klasse `Hilbert` ähnliche Klasse `Sierpinski`, mit deren Hilfe Annäherungen der Sierpinski-Kurve gezeichnet werden können.

### 3.3.4. Ersetzen der Rekursion durch Wiederholung

Im Kapitel 3.2.3. (auf Seite 40) haben wir gesehen, wie die Iteration durch Rekursion ersetzt werden kann. Man kann beweisen, dass dies immer möglich ist. Einige Programmiersprachen bieten gar keine Wiederholungen an: Dort wird ausschließlich mit Rekursion gearbeitet.

Der umgekehrte Fall ist nicht ganz einfach. In der Praxis arbeitet der Java-Interpreter alle rekursiven Methodenaufrufe in einer Wiederholung ab. Seine Vorgehensweise ist dabei, am Stapel Information über alle rekursiven Aufrufe (inkl. aller lokalen Variablen) zu speichern.

Der Versuch, die Aufgabe *Türme von Hanoi*<sup>1</sup> oder eine rekursive Kurve iterativ zu programmieren, kann viel Arbeit kosten. Wir werden jetzt am Beispiel der Schneeflockenkurve zeigen, wie der Stapel des Interpreters nachgebaut werden kann. Die Idee ist dabei, die Anweisungen an die Schildkröte in einer Zeichenkette zu kodieren. Dadurch wird Rekursion vermieden; an ihrer Stelle steht eine Wiederholung.

Im nächsten Programm wird der Stapel im `String`-Objekt simuliert, das durch befehlsfolge referiert wird. Es beinhaltet eine Reihe von Zeichen 'S', (Code für eine gerade Strecke), 'L' (für Linksdrehung) und 'R' (für Rechtsdrehung). Es wird zu Anfang mit dem Initiator 'S', vorbesetzt. Die Funktion `aufbauen` ruft `stufe-mal` die Funktion `allesErsetzen` auf, die alle Vorkommnisse des Initiators 'S' durch den Generator "SLSRSLS" ersetzt. So entsteht der Code der Schneeflockenkurve der Stufe `stufe`.

Anstelle der rekursiven Aufrufe können wir auf diese Weise Wiederholungen verwenden:

```
public class ISchneeflocke extends java.applet.Applet { // iterativ
    // zeichenkodierte Programm für die Schneeflockenkurve:
    private final static char strecke = 'S', links = 'L', rechts = 'R';
    private final static char initiator = strecke;
    private final static String generator = // "SLSRSLS"
        "" + strecke + links + strecke + rechts + strecke + links + strecke;
    private final static int nachLinks = 60, nachRechts = -120; // Grad
    private final static int seitenteiler = 3;

    private String allesErsetzen(String kette, char zeichen, String teilkette) {
        // ersetzt jedes Vorkommnis von zeichen in kette durch teilkette
        String erg = "", restkette = kette;
        int pos = restkette.indexOf(zeichen); // erstes Vorkommnis von zeichen
```

<sup>1</sup> s. Kapitel 3.1.4. (auf Seite 34)

<sup>2</sup> hängt vom Java-Interpreter ab

<sup>3</sup> Der Interpreter löst die Ausnahme `StackOverflowError` aus, wenn die Anzahl der rekursiven Aufrufe (z.B. bei einer endlosen Rekursion) die Kapazität des Stapels überschreitet.

```

    while (pos > -1) { // solange zeichen in kette zu finden ist
        erg = erg + restkette.substring(0, pos) + teilkette;
        restkette = restkette.substring(pos+1, restkette.length());
        pos = restkette.indexOf(zeichen); // nächstes Vorkommenis
    };
    return erg + restkette;
}
private String aufbauen(int stufe, char initiator, String generator) {
    // baut repräsentierende Zeichenkette auf
    String befehlsfolge = new String("" + initiator);
    for (int i = 0; i < stufe; i++) {
        // diese Schleife ersetzt die Rekursion stufe-mal
        befehlsfolge = allesErsetzen(befehlsfolge, initiator, generator);
    }
    // in befehlsfolge wurde initiator stufe-mal durch generator ersetzt
    return befehlsfolge;
}

private void interpretieren(String kette, double seitenlänge, Schildkröte k)
{
    // interpretiert die Zeichen in kette
    for (int j = 0; j < kette.length(); j++) {
        switch (kette.charAt(j)) {
            case strecke: k.strecke(seitenlänge); break;
            case links: k.richtung(nachLinks); break;
            case rechts: k.richtung(nachRechts);
        }
    }
}

private final static int ordnung = 4;
public void paint(java.awt.Graphics grafik) {
    String befehlsfolge = aufbauen(ordnung, initiator, generator);
    Console.println(befehlsfolge); // kodierte Anweisungen ausgeben
    double seitenlänge = 1 / Math.pow(seitenteiler, ordnung);
    interpretieren(befehlsfolge, seitenlänge,
        new Schildkröte(grafik, getHeight()-1, getWidth()-1)
    );
}
}

```

Die Ausgabe des Programms ist die kodierte Befehlsfolge; für `stufe = 1` ist dies

SLSRSLS

während für `stufe = 2`:

SLSRSLSLSLSRSLSRSLSRSLSLSLSRSLS

Ähnlich wird in `stufe = 3` jedes Vorkommenis des Initiators `s` auf den Generator `SLSRSLS` ausgetauscht.

Dieses Beispiel soll auch zeigen, dass die rekursive Version oft viel einfacher zu lesen und zu erstellen ist als die iterative.

### 3.4. Zurückverfolgung

Es gibt viele Probleme, die am einfachsten durch die Methode *Versuch und Irrtum*<sup>1</sup> gelöst werden können. Sie kann elegant als rekursiver Algorithmus formuliert werden.

Hierbei wird der Lösungsprozess in einzelne Schritte aufgeteilt. In jedem Schritt öffnet sich eine endliche Anzahl von alternativen Wegen. Sie werden alle untersucht: Einige führen unmittelbar in eine Sackgasse; die anderen werden nach demselben Verfahren überprüft. Entweder führen schließlich einige Wege zum Erfolg, oder stellt es sich heraus, dass die Aufgabe keine Lösung hat.

#### 3.4.1. Labyrinth

Der Weg in einem Labyrinth – falls vorhanden – kann mit dieser Strategie gefunden werden. Hierbei wird von jedem Feld aus in alle offenen Richtungen der Versuch gemacht, weiterzukommen; einige Wege führen in eine Sackgasse, andere (möglicherweise mehrere) zum Erfolg:

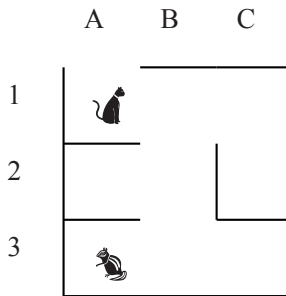


Abbildung 3.16: Labyrinth

Ausgehend aus dem Feld A1 kann die Katze auf folgenden Wegen versuchen, die Maus zu finden:

|    |   |    |   |    |   |    |           |
|----|---|----|---|----|---|----|-----------|
| A1 | → | B1 | → | C1 | → | C2 | Sackgasse |
|    |   | ↳  |   | B2 | → | A2 | Sackgasse |
|    |   |    |   | B3 | → | A3 | Erfolg    |
|    |   |    |   | ↳  |   | C3 | Sackgasse |

Abbildung 3.17: Wege im Labyrinth

<sup>1</sup> auf Englisch: *trial and error*



In diesem kleinen Labyrinth funktioniert diese Vorgehensweise sehr einfach. In einem größeren Labyrinth ist die Ausführung des Algorithmus deutlich aufwendiger, während bei einer sehr großen Anzahl von Feldern die Anzahl der möglichen Wege so stark explodieren kann, dass sie selbst von leistungsfähigen Rechnern nicht in zumutbarer Zeit ermittelt werden können.

### 3.4.2. Der Weg des Springers

Im Prinzip könnte auf diese Weise ein perfekter Schachalgorithmus programmiert werden: Alle möglichen Antworten auf einen Zug und somit alle Konsequenzen sollten bis zum Ende des Spiels verfolgt werden. Die große Anzahl der Züge und die große Anzahl der Möglichkeiten bei jedem Zug macht jedoch den Algorithmus unbrauchbar. Im Kapitel 7.3. (auf Seite 163) werden wir die Ursachen hierfür untersuchen. Teilaufgaben des Schachspiels können jedoch auf diese Weise, mit der Methode der *Zurückverfolgung*<sup>1</sup> gelöst werden.

So kann zum Beispiel auch die Frage beantwortet werden, ob und wie der *Springer* (der bei jedem Zug zwei Felder in eine beliebige Richtung *und* ein Feld in eine darauf senkrechte Richtung springt) von einer gegebenen Ausgangsposition heraus alle  $n^2$  Felder des Schachbretts genau einmal besuchen kann.

Die Regel für die erlaubten Züge des Springers kann in zwei Reihungsliteralen dargestellt werden:

```
private final static int springerX[] = {2, 1, -1, -2, -2, -1, 1, 2};  
private final static int springerY[] = {1, 2, 2, 1, -1, -2, -2, -1};
```

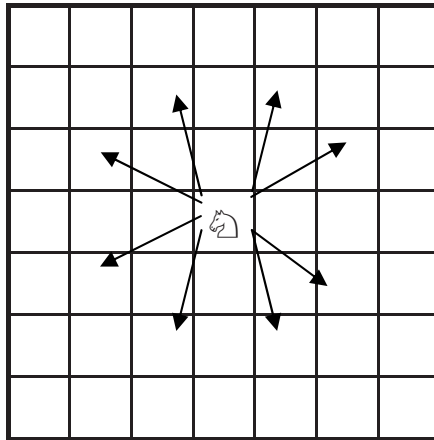


Abbildung 3.18: Erlaubte Züge des Springers

---

<sup>1</sup> auf Englisch *backtracking*

Von einer gegebenen Position mit Koordinaten  $x$  und  $y$  heraus gibt es acht mögliche Züge mit den Zielkoordinaten  $x + \text{springerX}[i]$  und  $y + \text{springerY}[i]$  für  $i = 0, 1, \dots, 7$ . Der Algorithmus soll alle diese Möglichkeiten durchprobieren, sofern die Zielkoordinaten noch auf das Schachbrett fallen. Die früher schon besuchten Felder fallen selbstverständlich aus – wir müssen darüber Buch führen. Hierzu ist eine quadratische Matrix geeignet. Als Komponententyp nehmen wir nicht `boolean`, sondern `int`, weil wir uns auch merken wollen, in welchem Zug das Feld besucht wurde:

```
int[][] schachbrett = new int[n] [n]; // Werte 0 bis n*n // 1
```

Ein Zug wird durch die zwei Ausgangskordinaten  $x$  und  $y$  (mit  $0 \leq x, y < n$ ) sowie durch ihre Folgenummer  $nr$  (mit  $0 < nr < n*n$ ) charakterisiert. Ob von dieser Position aus Züge noch möglich sind, gibt die Methode `versuchen` als `boolean`-Ergebnis zurück:

```
boolean versuchen(int x, int y, int nr);
```

Im Rumpf der Methode werden in den lokalen `int`-Variablen `xNeu` und `yNeu` die Zielkoordinaten des Zuges (nach den Schachregeln) gespeichert. Wenn diese auf dem Brett in ein noch leeres Feld fallen, wird die Nummer des Zuges in dieses Feld eingetragen und die Methode rekursiv mit diesen Koordinaten aufgerufen. Wenn der Aufruf ohne Erfolg verlaufen ist, wird das Feld wieder leer (auf 0) gesetzt und die nächste Möglichkeit ausprobiert:

```
static boolean versuchen(int x, int y, int nr) {
    schachbrett[x][y] = nr; // Feld besetzen
    if (nr == n*n) // alle Felder wurden besucht
        return true;
    else
        for (int versuch = 0; versuch < springerX.length; versuch++) {
            // 8 Durchläufe
            final int xNeu = x + springerX[versuch], yNeu = y + springerY[versuch];
            if (0 <= xNeu && xNeu < n && 0 <= yNeu && yNeu < n &&
                // xNeu und yNeu sind auf dem Brett
                schachbrett[xNeu][yNeu] == 0 && // noch unbesucht
                versuchen(xNeu, yNeu, nr+1)) // Erfolg
                return true;
        };
    schachbrett[x][y] = 0; // Feld zurücksetzen
    return false; // alle 8 Versuche blieben erfolglos
}
```

Wenn die Folgenummer  $nr$  (mit Anfangswert 1) den Wert  $n^2$  erreicht, ist die Matrix voll, alle Felder wurden besucht. Ansonsten muss von der gegebenen Position mit Koordinaten  $x$  und  $y$  heraus ein erfolgreicher Versuch durchgeführt werden. Es gibt acht potenzielle Möglichkeiten, die in den Reihungen `springerX` und `springerY` kodiert sind. Von diesen müssen allerdings nur diejenigen ausprobiert werden, die auf ein Feld auf dem Brett fallen ( $0 \leq$

---

<sup>1</sup> `requires n*n < Integer.MAX_VALUE`; andernfalls hilft die Verwendung von `long` oder `java.math.BigDecimal`.

`xNeu && xNeu < n && 0 <= yNeu && yNeu < n`), das noch nicht besucht wurde (`schachbrett[xNeu][yNeu] == 0`). Wenn das Feld noch unbesucht ist, wird auf dem Feld die Folgenummer des Schrittes vermerkt (`schachbrett[xNeu][yNeu] = nr`) und von diesem Feld aus werden die Versuche weitergeführt (die Methode wird rekursiv mit den neuen Koordinaten aufgerufen). Wenn einer von diesen erfolgreich ist, ist der aktuelle Versuch auch erfolgreich: Das Ergebnis **true** kann dem vorherigen Versuch zurückgereicht werden. Ansonsten ist auch der aktuelle Versuch erfolglos: Das Feld wird als unbesucht markiert (auf 0 zurückgesetzt), und in der **for**-Schleife wird der nächste Versuch durchgeführt. Wenn alle acht Versuche erfolglos waren, muss das Ergebnis **false** zurückgereicht werden.

Nach dem Aufruf der Methode mit dem Ergebnis **true** enthält die zweidimensionale Reihung `schachbrett` die Nummer der Züge, in welcher Reihenfolge der Springer die Felder besucht hat:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 1  | 6  | 15 | 10 | 21 |
| 14 | 9  | 20 | 5  | 16 |
| 19 | 2  | 7  | 22 | 11 |
| 8  | 13 | 24 | 17 | 4  |
| 25 | 18 | 3  | 12 | 23 |

Abbildung 3.19: Ein Weg des Springers auf einem  $5 \times 5$ -Feld

**Aufgabe 3.7:** Gestalten Sie den Algorithmus *Weg des Springers* so um, dass er nicht nur eine Lösung, sondern alle Lösungen ermittelt.

**Bemerkung:** Es ist ein nicht triviales mathematisches Problem zu entscheiden, ob zwei Lösungen für das Springer-Problem in irgendwelchem Sinne gleich sind, d.h. ob eine aus der anderen durch Rotieren oder Spiegeln zu bekommen ist.

### 3.4.3. Die acht Damen

Die obige Vorgehensweise ist charakteristisch für die Strategie der Zurückverfolgung: Die Methode `versuchen` ruft sich selbst mehrmals mit den verschiedenen Möglichkeiten auf. In globalen Variablen wird dabei Buch über die Versuche geführt, die Einträge werden bei erfolglosen Versuchen zurückgesetzt. Das Entscheidende dabei ist die geeignete Darstellung der Daten.

Beim nächsten Problem stellt sich die Frage, ob und wie acht *Damen* auf dem Schachbrett so aufgestellt werden können, dass sie sich nicht bedrohen. Eine Dame bedroht jede Figur in derselben Spalte, in derselben Reihe und in denselben Diagonalen, in denen sie steht:

|       |   | Diagonale<br>links |   | Spalte |   | Diagonale<br>rechts |   |
|-------|---|--------------------|---|--------|---|---------------------|---|
|       |   | ↖                  |   | ↑      |   | ↗                   |   |
|       |   |                    | ↖ | ↑      | ↗ |                     |   |
| Reihe | ← | ←                  | ← | ←      | ♙ | →                   | → |
|       |   |                    | ↙ | ↓      | ↘ |                     |   |
|       |   | ↙                  |   | ↓      |   | ↘                   |   |
|       | ↙ |                    |   | ↓      |   |                     | ↘ |
|       | ↙ |                    |   | ↓      |   |                     |   |
|       |   |                    |   | ↓      |   |                     |   |

Abbildung 3.20: Durch eine Dame bedrohte Felder

Daher kann in jeder Spalte nur eine Dame stehen. Es ist also hier nicht nötig, die Information über das Setzen der Damen in einer zweidimensionalen Reihung zu speichern. Es reicht, für jede der acht Damen zu merken, in welche Reihe sie platziert wurde: Die eindimensionale Reihung

```
private final static int n = 8;
private int[] dameInDerSpalte = new int[n]; // Werte 0 bis 7
```

kann die Reihennummer aufnehmen, in denen jeweils die Dame steht. Im Laufe der Versuche, die Damen in dieser Reihung zu platzieren, müssen wir Buch darüber führen, welche Reihen und welche Diagonalen noch frei sind. Auf einem  $n \times n$ -Schachbrett gibt es neben  $n$  Reihen insgesamt  $2n+1$  Diagonalen von links oben nach rechts unten (wir nennen sie *Diagonale links*) und genauso viele Diagonalen von rechts oben nach links unten (wir nennen sie *Diagonale rechts*). Für jede brauchen wir einen **boolean**-Wert:

```
private boolean[] reihe = new boolean[n], diagonaleLinks = new boolean[2*n-1],
    diagonaleRechts = new boolean[2*n-1]; // alles mit true vorbesetzt
```

Wenn eine Dame an das Feld mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  platziert wird, belegt sie neben der Spalte  $x$  noch die Reihe  $y$  sowie zwei Diagonalen. Ihre Indizes können folgendermaßen berechnet werden:

```
final int links = (x + y) % (2*n-1); // Index der Diagonale links
final int rechts = (x - y - 1 + 2*n) % (2*n-1); // der Diagonale rechts
```

Somit wird der Schritt, die Dame zu platzieren, durch folgende Anweisungen repräsentiert:

```
dameInDerSpalte[x] = y;
reihe[y] = diagonaleLinks[links] = diagonaleRechts[rechts] = false;
```

Die Dame darf also auf dieses Feld gesetzt werden, wenn zuvor die Bedingung

```
zeile[y] && diagonaleLinks[links] && diagonaleRechts[rechts]
```

erfüllt ist.

Hieraus ergibt sich der Algorithmus:

```
static boolean versuchen(int x) {
    // versucht, eine Dame in die Spalte x zu platzieren
    if (x == n)
        return true; // Erfolg
    else for (int y = 0; y < n; y++) { // probiert alle Reihen aus
        final int links = (x + y) % (2*n-1); // Index der Diagonale links
        final int rechts = (x - y - 1 + 2*n) % (2*n-1); // Diagonale rechts
        if (reihe[y] && diagonaleLinks[links] && diagonaleRechts[rechts]) {
            dameInDerSpalte[x] = y;
            reihe[y] = diagonaleLinks[links] = diagonaleRechts[rechts] = false;
            // Reihe und zwei Diagonalen sind jetzt besetzt
            final boolean erfolg = versuchen(x+1);
            if (erfolg)
                return true;
            else
                reihe[y] = diagonaleLinks[links] = diagonaleRechts[rechts] = true;
            // Reihe und zwei Diagonalen sind zurückgesetzt
        }
    }
    return false;
}
```

Nach dem Aufruf der Methode mit dem Ergebnis **true** enthält die Reihung `dameInDerSpalte` die Nummer der Spalten, in denen die Damen platziert werden können, ohne einander zu bedrohen. Die folgenden Werte in der Reihung `dameInDerSpalte` beschreiben *eine* Lösung des Problems:

0, 4, 7, 5, 2, 6, 1, 3

Diesen Werten entspricht die Aufstellung der acht Damen auf dem Schachbrett, wie auf der Abbildung 3.21 dargestellt wird:

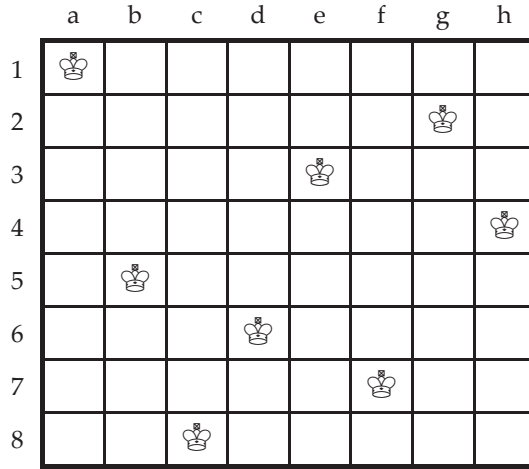


Abbildung 3.21: Die acht Damen

**Aufgabe 3.8:** Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das Problem der *Stabilen Liebesbeziehungen* löst. Hier müssen  $n$  Ehepaare so einander zuneigen, dass ihre Ehen ungefährdet sind. Jeder der  $2n$  Beteiligten besitzt eine Liste der Länge  $n$ , in der die Personen des anderen Geschlechts in der Reihenfolge der Zuneigung aufgeführt sind<sup>1</sup>. Eine Ehe gilt als gefährdet, wenn es einen anderen Mann und eine andere Frau gibt, dem die Frau bzw. der der Mann mehr zugeneigt ist als dem Ehepartner.

Die Abbildung 3.22 zeigt zum Beispiel eine instabile Liebesbeziehung, wenn die Größe der Pfeile das Maß der Zuneigung repräsentiert: Adam hat Bella lieber als seine Ehefrau Anna, und Bella hat Adam lieber als ihren Ehemann Berthold.

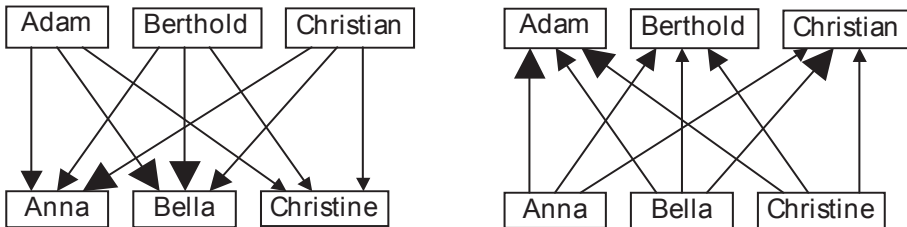


Abbildung 3.22: Instabile Liebesbeziehung

**Bemerkung:** Dieses Problem tritt oft bei Auswahlproblemen auf, wo die Wahl nach Bevorzugung getroffen werden muss, beispielsweise wenn Studienanfänger ihre Prioritätsliste von Hochschulen angeben<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Im idealen Fall steht der Ehepartner auf der ersten Stelle.

<sup>2</sup> in der Bundesrepublik Deutschland an die ZVS (Zentrale Vergabestelle)

## 4. Suchen

Das Problem *Suchen* stellt sich, wenn man ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften unter vielen ähnlichen Objekten finden möchte. In vielen Fällen ist die Lösung nicht trivial.

### 4.1. Textsuche

Als erstes Beispiel betrachten wir den Algorithmus für *Textsuche*, ein Problem, das in jedem Textverarbeitungsprogramm (auch in der Implementierung der Java-Funktion `String.indexOf`) gelöst werden muss. Gegeben sind zwei Zeichenketten `muster` und `text`; `muster` muss in `text` gefunden werden.

Konkreter: wir brauchen eine Java-Funktion mit der Spezifikation

```
static int suchen(final char[] muster, final char[] text);
```

die den Wert `-1` zurückgibt, wenn `muster` nicht im `text` vorkommt und sonst den Index, bei dem das erste Vorkommen von `muster` in `text` beginnt. Sie darf nur den Vergleich von Zeichen mit Hilfe des Operators `==` durchführen (d.h. keine Aufrufe aus den Standardbibliotheken sind erlaubt, die genau dieses Problem lösen).

Eine triviale Lösung beruht auf einer geschachtelten Schleife: Es wird ab jedem Zeichen im Text versucht, das Muster zu finden, d.h. die Zeichen im Muster werden einzeln mit den Zeichen im Text verglichen. Beim „Misserfolg“ erfolgt ein „Rücksprung“ im Text zum Anfang des Versuchs, und der nächste Versuch findet ab dem nächsten Zeichen im Text statt:

| D r e i        | r e i n e      | R e i s e n d e | Text   |
|----------------|----------------|-----------------|--------|
| <u>R</u> e i s |                |                 | Muster |
| R e i s        |                |                 |        |
| <u>R</u> e i s |                |                 |        |
| ..             |                |                 |        |
|                | R e i s        |                 |        |
|                | <u>R</u> e i s |                 |        |
|                | ..             |                 |        |
|                |                | R e i s         | Erfolg |

Tabelle 4.1: Suchen im Text

Bei den unterstrichenen Zeichen im Muster wurde der Misserfolg festgestellt.

Dieser Algorithmus kann in Java folgendermaßen formuliert werden:

```
static int suchen(final char[] muster, final char[] text) {
    for (int i = 0; i < text.length - muster.length + 1; i++) {
        boolean erfolg = true; // Versuch, ab text[i] muster zu finden:
        for (int j = 0; j < muster.length; j++)
```

```

    if (text[i + j] != muster[j])
        erfolg = false; // nicht gelungen
    if (erfolg) // gelungen
        return i; // vorzeitiger Abbruch der äußeren Schleife
}
return -1; // kein Versuch ist gelungen
}

```

Der Zeitbedarf dieser Funktion ist  $\text{muster.length} * (\text{text.length} - \text{muster.length})$  Zeichenvergleiche. Wir sagen, ihre Komplexität ist  $O(nm)$ , wo  $n$  die Länge des Textes und  $m$  die Länge des Musters ist. Es ist zwar möglich, die innere Schleife vorzeitig (bei „Misserfolg“) abzubrechen, die Komplexität (oder der durchschnittliche Aufwand) wird aber dadurch nicht verbessert. Etwas schlampig kann man diese Komplexität auch „quadratisch“ nennen.

Es ist jedoch möglich, das Problem mit einer Komplexität von  $O(n+m)$  zu lösen. Hierzu wird folgende Idee benutzt. Der obige Algorithmus springt beim „Misserfolg“ zum Anfang des Versuchs zurück und „vergisst“, was er in der Zwischenzeit an Information über die zu vergleichenden Texte gewonnen hat. In vielen Fällen ist dies ein echter Informationsverlust:

|          |          |          |          |          |          |   |   |   |        |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|---|---|--------|
| a        | b        | a        | b        | a        | a        | b | b | b | Text   |
| 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7 | 8 | 9 |        |
| <b>a</b> | <b>b</b> | <b>a</b> | <u>a</u> | b        | b        | b |   |   | Muster |
|          |          | <u>a</u> | b        | a        | a        | b | b | b |        |
|          |          |          | <b>a</b> | <b>b</b> | <b>a</b> | a | b | b | Erfolg |

Tabelle 4.2: Informationsverlust bei der Textsuche

Bei der Suche des Musters `abaabbb` im Text `ababaabbb` ist es nach dem zweiten Misserfolg (d.h. in der letzten Zeile) nicht nötig, den Versuch ab dem 3. Zeichen des Textes durchzuführen: Die Anfangsfolge `aba` des Musters wurde schon beim ersten Versuch mit Erfolg untersucht, und erst beim 4. Zeichen `a` des Musters wurde der Misserfolg festgestellt. Es reicht also, nachdem beim 3. Versuch (ab dem 3. Zeichen) ebenfalls die Anfangsfolge `aba` gesucht wird, erst ab dem 6. Zeichen weiterzusuchen.

Angenommen, das erste Zeichen kommt im Muster nicht mehr vor (z.B. im Muster `abbbbbbb`). Beim Feststellen eines Misserfolgs nach  $i$  Zeichen müssen wir dann im Text nicht  $i$  Stellen zurückspringen, da wir wissen, dass das Zeichen `a` an den letzten  $i$  Stellen nicht vorkam; wir können im Text von dem Zeichen an weitersuchen, wo wir den Misserfolg festgestellt haben. Solche speziellen Muster sind zwar selten, aber erstaunlicherweise ist es immer möglich, die Suche so vorzubereiten, dass sie nicht von Anfang an wiederholt werden muss.



Weil nur im Muster und nie im Text zurückgesprungen werden muss, ist es die Eigenschaft des Musters, wie weit der Rücksprung erfolgen soll. Daher kann er vor dem eigentlichen Suchen so aufbereitet werden, dass die Suche sehr schnell erfolgen kann. Hierzu schlägt der Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus<sup>1</sup> vor, eine sog. *next-Tabelle* zu errechnen. Sie ist eine Reihung aus nichtnegativen `int`-Werten, ihre Länge ist wie die des Musters. Jeder Ganzzahlwert zeigt an, wie viele Schritte beim Misserfolg „zurückgegangen“ werden muss.

Wir schieben hier eine Kopie des Musters sich selbst entlang und vergleichen die Zeichen untereinander. Die Anzahl der überlappenden Stellen gibt die Position an, wohin bei „Misserfolg“ zurückgesprungen werden muss. Die erste Stelle (Index 0) wird dabei mit -1 markiert.

| j | mus-<br>ter[j] | Rücksprung                            | next[j+1] |
|---|----------------|---------------------------------------|-----------|
| 0 | b              | <u>b</u> abaabbb<br>babaabbb          | 0         |
| 1 | a              | ba <u>a</u> abbb<br>babaabbb          | 0         |
| 2 | b              | ba <b>a</b> abbb<br>babaabbb          | 1         |
| 3 | a              | ba <b>a</b> abbb<br>babaabbb          | 2         |
| 4 | a              | baba <b>a</b> bbb<br>ba <b>a</b> abbb | 0         |
| 5 | b              | babaab <b>b</b> bb<br>babaabbb        | 1         |
| 6 | b              | babaab <b>b</b><br>ba <b>a</b> abbb   | 1         |
| 7 | b              | babaab <b>b</b><br>babaabbb           |           |

Tabelle 4.3: „next-Tabelle“ für das Muster babaabbb

Hieraus ergibt sich die folgende next-Tabelle für das Muster babaabbb:

0 0 1 2 0 1 1

Die next-Tabelle für ein bestimmtes Muster kann auch als ein endlicher Automat dargestellt werden:

<sup>1</sup> s. [Kn]

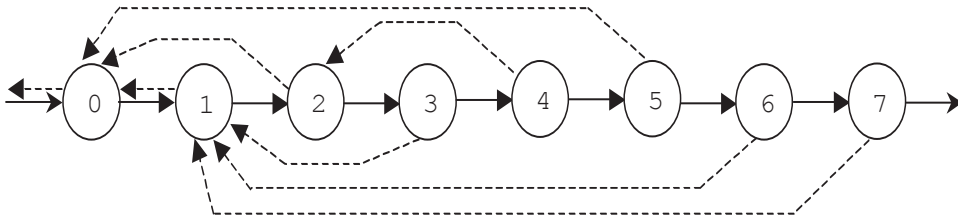


Tabelle 4.4: Endlicher Automat für das Muster babaabbb

Hier gibt es von jedem Zustand zwei Übergänge: bei Übereinstimmung nach rechts (dargestellt durch durchgezogene Pfeile) und bei Misserfolg Rücksprung nach links (dargestellt durch gestrichelte Pfeile); die next-Tabelle gibt den Zielort (Index) des Rücksprungs an.

Das folgende Programm enthält eine Prozedur für die Berechnung der next-Tabelle und die Suchfunktion nach dem Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus:

```
static int[] nextTabelle(final char[] muster) { // next-Tabelle für muster
    final int anfang = -1; // vor dem ersten Index in muster
    int[] next = new int[muster.length];
    next[0] = anfang; // Marke
    int tabIndex = 0, // indiziert die aufzubauende next-Tabelle
        rucksprung = anfang; // Index im muster, wohin zurückgesprungen wird
    while (tabIndex < muster.length - 1)
        if (rucksprung == anfang || muster[tabIndex] == muster[rucksprung]) {
            // Anfang des Musters oder Übereinstimmung
            tabIndex++; // weiterschreiten
            rucksprung++;
            next[tabIndex] = rucksprung; // so weit Übereinstimmung
        } else
            rucksprung = next[rucksprung]; // Rücksprung so weit nötig
    return next;
}

static int kmpSuchen(final char[] muster, final char[] text) {
    // stellt fest, ob muster im text vorkommt und falls ja, ab welchem Index
    final int anfang = -1; // vor dem ersten Index in muster
    final int[] next = nextTabelle(muster); // next-Tabelle für muster
    int textIndex = anfang, musterIndex = anfang; // Anfang der Suche
    do
        if (musterIndex == anfang || text[textIndex] == muster[musterIndex]) {
            textIndex++; // weiterschreiten
            musterIndex++;
        } else
            musterIndex = next[musterIndex]; // Rücksprung nur im Muster
    while (musterIndex < muster.length && textIndex < text.length);
    return musterIndex >= muster.length ?
        textIndex - muster.length : // gefunden
        -1; // nicht gefunden
}
```

Aufgabe 4.1: Der KNP-Algorithmus kann verbessert werden, wenn in der Funktion `nextTabelle` die Zuweisung

```
next[tabIndex] = rucksprung;
```

auf die etwas differenziertere Zuweisung

```
next[tabIndex] =
    muster[tabIndex] != muster[rucksprung] ?
    rucksprung :
    next[rucksprung];
```

ausgetauscht wird. Erklären Sie die Verbesserung und finden Sie Beispiele, bei denen sie zur Geltung kommt.

## 4.2. Suchen in Sammlungen

Häufig muss man in einer „Sammlung von Datenelementen (Objekten)“ nach einem Element mit bestimmten Eigenschaften suchen. Am Ende der Suche möchte man auf das gefundene Element zugreifen können oder sicher sein, dass es kein solches Element in der Sammlung gibt.

Oft besteht „Sammlung“ aus Objekten mit einer speziellen Komponente, genannt *Schlüssel*. Einfachheit halber nehmen wir an, dass er vom Typ `int` ist<sup>1</sup>. Weil er typischerweise in einer privaten Variable gespeichert wird, kann sie mit einer Funktion (z.B. `getSchluessel`) aus dem Objekt herausgelesen werden. In unseren Beispielen soll die Klasse dieser Objekte also die Schnittstelle<sup>2</sup>

```
interface Beschluesselt {
    int getSchluessel();
}
```

implementieren. Wir geben die spezielle Eigenschaft des gesuchten Objekts durch einen Schlüsselwert `suchSchluessel` an: Gesucht wird ein Objekt `element` aus der Sammlung, dessen Schlüssel `element.getSchluessel()` gleich `suchSchluessel` ist.

Hier wird der informelle Begriff „Sammlung“ verwendet, weil wir noch offen lassen wollen, ob die Objekte in einer Reihung, in einer verketteten Liste, in einem Baum, in einem Objekt vom Typ `java.util.Collection`<sup>3</sup> oder in einer anderen Datenstruktur untergebracht sind.

Wir unterscheiden dabei zwischen *internem* und *externem* Suchen. Ein *internes* Suchverfahren setzt voraus, dass alle Daten, unter denen gesucht wird, „vollständig in den Hauptspeicher unseres Computers passen“. Ein *externes* Suchverfahren wird dann benötigt, wenn die Ob-

<sup>1</sup> allgemein vom generischen Typ

<sup>2</sup> In der Java-Bibliothek wird zu diesem Zweck die generische Schnittstelle `java.util.Map.Entry<K, V>` angeboten, wo für `K` der (beliebige) Schlüsseltyp eingesetzt wird.

<sup>3</sup> auf Deutsch: *Sammlung*

jekte, aus denen eines identifiziert werden soll, auf einem externen Speicher stehen, z.B. auf einem Plattenspeicher oder auf einem Magnetband, und nicht „alle auf einmal“ in den Hauptspeicher passen. Sie müssen „portionsweise“ in den Hauptspeicher gelesen werden.

In diesem Kapitel befassen wir uns nur mit internem Suchen. Für die Konstrukteure von Datenbanken (und manchmal auch für die Benutzer von Datenbanken) ist externes Suchen ein grundlegendes Problem. Im Kapitel 6.7. (auf Seite 146) werden wir auch hierfür ein Beispiel sehen.

Für das Suchproblem ist es wichtig, ob in der Sammlung *mehrere Objekte mit gleichem Schlüssel* (sog. *Mehrfacheintragen*) vorkommen können oder ob das ausgeschlossen ist. Wenn Schlüssel mehrfach vorkommen können, dann muss man nicht nur in der Lage sein, *ein* Objekt mit `suchSchluessel` zu finden, sondern man muss auch *alle* Objekte mit diesem Schlüssel (der Reihe nach) finden können.

Um eine bestimmte Lösung für das (interne) Suchproblem genau zu verstehen und mit anderen Lösungen vergleichen zu können, sollte man folgende Fragen untersuchen:

- Wie sind die Objekte abgespeichert (in einer Reihung, als verkettete Liste, Baum usw.)? Wird Speicherplatz nur für die Objekte selbst gebraucht (das ist das notwendige Minimum) oder wird zusätzlicher Speicherplatz (z.B. für Referenzen) gebraucht? Wie viel zusätzlicher Speicher?
- Wie lange dauert es, ein weiteres Objekt in die Sammlung einzufügen?
- Wie lange dauert es, ein Objekt aus der Sammlung zu entfernen (zu löschen)?
- Wie lange dauert das Suchen mit einem bestimmten Schlüssel
  - im positiven Fall (wenn es in der Sammlung ein Objekt mit diesem Schlüssel gibt) und
  - im negativen Fall (wenn es in der Sammlung kein Objekt mit diesem Schlüssel gibt)?

### 4.3. Suchen in einer Reihung

Wenn man die Objekte, unter denen man suchen will, als Komponenten einer Reihung organisiert, dann muss man diese Reihung „von Anfang an“ so groß anlegen, dass alle späteren Einfügungen darin Platz haben. Dies kann zur „Verschwendung“ von Speicherplatz führen.

#### 4.3.1. Suchen in einer unsortierten Reihung

Der einfachste Fall ist das Suchen in einer unsortierten Reihung. Hier schreibt man die Objekte in eine Reihung namens `sammlung` in beliebiger Ordnung. Um weitere Elemente in die Reihung einfügen zu können, sollte man in einer Variable `frei` vom Typ `int` stets den Index des ersten freien<sup>1</sup> Elementes der Reihung `sammlung` aufbewahren. Wenn die Bedingung `frei`

<sup>1</sup> oder des letzten belegten

`== sammlung.length - 1` den Wert `true` ergibt, dann ist `sammlung` voll; weitere Eintragungen sind nicht möglich<sup>1</sup>.

Der Algorithmus kann verbal folgendermaßen formuliert werden:

Man sucht nach einem Element mit dem Schlüssel `suchSchluessel`, indem man die Reihungskomponenten `sammlung[i]` für alle `i` ab 0 durchgeht und ihre Schlüssel `sammlung[i].getSchluessel()` mit `suchSchluessel` vergleicht. Das macht man so lange, bis man eine passende Komponente `sammlung[i]` gefunden hat (positiver Fall) oder bis man das Ende der Reihung `sammlung` erreicht hat (negativer Fall).

In Java kann diese Suchfunktion folgendermaßen programmiert werden:

```
class Reihung<E extends Beschluesselt> { // 2
    protected E[] sammlung;
    ...
    public int suchen(int suchSchluessel) { // return -1, wenn nicht gefunden
        // ensures -1 <= return < sammlung.length;
        for (int i = 0; i < sammlung.length; i++)
            if (sammlung[i] != null && sammlung[i].getSchluessel() == suchSchluessel)
                return i;
        return -1;
    }
}
```

Diese Funktion liefert (im positiven Fall) als Ergebnis den Index der gesuchten Komponenten bzw. (im negativen Fall<sup>3</sup>) den `int`-Wert `-1`. Wenn mehrere Komponenten den gesuchten Schlüssel enthalten, wird (nach dem obigen Algorithmus) die zuletzt gefundene geliefert.

Wenn wir den Schlüssel nicht auf `int`-Werte beschränken wollen, müssen wir komplexere Signaturen benutzen:

```
interface Beschluesselt<Schluessel> {
    Schluessel getSchluessel();
}

class Reihung<Schluessel, Element extends Beschluesselt<Schluessel>> { // 4
    public int suchen(Schluessel suchSchluessel) { ... } // wie oben
}
```

<sup>1</sup> Diese Datenorganisation ist allerdings ungünstig, wenn Elemente aus der Sammlung gelöscht werden sollen.

<sup>2</sup> `extends` drückt aus, dass diese generische Klasse kann nur mit einem aktuellen Typparameter ausgeprägt werden kann, die die Klasse `Beschluesselt` erweitert.

<sup>3</sup> Vielleicht ist es eine bessere Idee im Sinne des modernen Software Engineering, im negativen Fall eine Ausnahme zu werfen.

<sup>4</sup> Diese Klasse muss mit zwei aktuellen Typparametern ausgeprägt werden, wobei der zweite ein Untertyp von `Beschluesselt<Schluessel>` sein muss.

**Bemerkung:** Auf folgende Weise kann man dieses Programm etwas eleganter und schneller machen: Bevor man zu suchen beginnt, bringt man den Suchschlüssel `suchSchluessel` in die erste freie Komponente der Reihung `sammlung`:

```
sammlung[frei].schluessel = suchSchluessel;
```

Dabei setzen wir voraus, dass für diesen Zweck immer mindestens eine Komponente der Reihung `sammlung` „freigehalten“ wird und dass die Suchmethode direkten Zugriff auf den Schlüssel der Elemente hat. Da wir jetzt sicher sind, eine Komponente mit dem Schlüssel `suchSchluessel` in `sammlung` zu finden, kann die Abbruchbedingung für die Suchschleife einfacher gestaltet werden. Diese Programmiertechnik heißt „Markieren“.

*Speicherbedarf:* minimal; außer der Reihung `sammlung` wird als *zusätzlicher Speicher* für Daten nur `frei` benötigt, außerdem die lokale Variable `index` beim Suchen. Möglicherweise muss man Speicherplatz „verschwenden“. Die Speicherkomplexität des Suchens ist also  $O(1)$ , d.h. sie hängt nicht von der zu speichernden Menge ab.

*Zeitbedarf für das Einfügen eines Elements:* 1 Schritt, unabhängig von der Größe der Reihung `sammlung`, da man weitere Elemente einfach „hinten anhängen“ kann (natürlich nur, solange es in `sammlung` noch Platz gibt). Somit ist die Zeitkomplexität für das Einfügen  $O(1)$ .

*Zeitbedarf für das Suchen:*

- im negativen Fall:  $n$  Vergleiche
- im positiven Fall: im Durchschnitt  $n/2$  Schritte (wenn alle Objekte in `sammlung` gleich häufig gesucht werden)

Somit ist die Zeitkomplexität für das Suchen  $O(n)$ .

#### 4.3.2. Lineares Suchen in einer sortierten Reihung

Wenn man dafür sorgt, dass die Reihung `sammlung` stets sortiert<sup>1</sup> ist (nach den Schlüsseln der Objekte), dann geht das Suchen im negativen Fall schneller. Dafür dauert das Einfügen eines Objekts länger. Mehrere Elemente mit gleichem Schlüssel kann man ganz ähnlich behandeln, wie im Falle einer unsortierten Reihung.

*Speicherbedarf:* wie im unsortierten Fall (minimal, möglicherweise mit „Verschwendung“):  $O(1)$ .

*Zeitbedarf für das Einfügen eines Elements:* Auch wenn man schon weiß, wo man ein Element in die Reihung `sammlung` einfügen will, muss man im Durchschnitt noch  $n/2$  viele Elemente „um eine Position nach rechts rutschen“. Die Zeitkomplexität ist also  $O(n)$ .

---

<sup>1</sup> Wie dies geschehen kann, untersuchen wir im Kapitel 5. (ab Seite 85).

Zeitbedarf für das Suchen:

- im negativen Fall: durchschnittlich  $n/2$  Vergleiche.
- im positiven Fall: durchschnittlich  $n/2$  Schritte (wenn alle Objekte in `sammlung` gleich häufig gesucht werden).

Somit ist die Zeitkomplexität für das Suchen  $O(n)$ .

Aufgabe 4.2: Programmieren Sie das Einfügen und das lineare Suchen in einer sortierten Reihung (mit der Technik der „Markierung“) als Klasse mit folgender Spezifikation:

```
class SortierteReihung<E extends Beschluesselt> extends Reihung<E> {
    public void einfuegen(final E element); // ensures sammlung sortiert
    public int suchen(int suchSchluessel); // requires sammlung sortiert
    // ensures -1 <= return < sammlung.length;
}
```

Wenn Sie den Schlüssel nicht auf `int`-Werte einschränken wollen, können Sie eine komplexere Signatur mit zwei Typparametern benutzen:

```
class SortierteReihung<S extends Comparable<S>,
    E extends Beschluesselt<S>> extends Reihung<S, E> { ... }
```

#### 4.3.3. Binäres Suchen in einer sortierten Reihung

Das Suchen nach der Strategie *teile und herrsche*<sup>1</sup> heißt *binäres Suchen*. Auch bei dieser Lösung (für das interne Suchproblem) schreibt man die Objekte in die Reihung `sammlung` und sorgt dafür, dass `sammlung` stets sortiert ist. Nach einem Objekt mit dem Schlüssel `suchSchluessel` sucht man dann folgendermaßen:

Wenn die Reihung `sammlung` die Länge 0 hat, dann ist man fertig (negativer Fall). Sonst vergleicht man den Suchschlüssel `suchSchluessel` mit dem Schlüssel eines Elementes `sammlung[mitte]`, welches möglichst genau in der Mitte der Reihung `sammlung` liegt. Wenn `suchSchluessel` gleich `sammlung[mitte].getSchluessel()` ist, dann ist man fertig (positiver Fall). Wenn `suchSchluessel` größer ist als `sammlung[mitte].getSchluessel()`, dann wendet man dieses Verfahren auf die „rechte Hälfte der Reihung `sammlung`“ an (d.h. auf die Elemente von `sammlung` mit Indizes `mitte+1` bis `sammlung.length-1`). Wenn `suchSchluessel` kleiner ist als `sammlung[mitte].getSchluessel()` dann wendet man dieses Verfahren auf die „linke Hälfte der Reihung `sammlung`“ an (d.h. auf den Teil `sammlung[0 bis mitte-1]`).

```
class SortierteReihungBinaer<E extends Beschluesselt>
    extends SortierteReihung<E> {
    public int suchen(int suchSchluessel) {
        // ensures -1 <= return < sammlung.length;
        int links = 0; int rechts = sammlung.length - 1 ;
        while (links <= rechts) {
            int mitte = (links + rechts) / 2;
            if (sammlung[mitte] != null
```

<sup>1</sup> s. Kapitel 2.1.6. (auf Seite 13)

```

        && suchSchluessel < sammlung[mitte]. getSchluessel())
        rechts = mitte - 1;
    else
        links = mitte + 1;
    }
    links--; // zurücksetzen
    return suchSchluessel == sammlung[links-1].getSchluessel() ? // gefunden
        links : -1; // nicht gefunden: -1
    }
}

```

Der *Speicherbedarf* ist daher minimal, wie beim linearen Suchen in einer Reihung. Der *Zeitbedarf* für das *Einfügen* eines Elementes ist wie beim linearen Suchen in einer sortierten Reihung: im Durchschnitt  $n/2$  Schritte. Die Zeitkomplexität ist also  $O(n)$ .

*Zeitbedarf für das Suchen:*

- im negativen Fall:  $\log n$  Schritte
- im positiven Fall:
  - in einem günstigsten Fall: 1 Schritt
  - in einem ungünstigsten Fall:  $\log n$  Schritte

Im Durchschnitt werden  $\log n$  Schritte benötigt. Der Grund hierfür ist, dass es mehr „ungünstige Fälle“ gibt als „günstige Fälle“: Wenn wir alle möglichen Fälle untersuchen, den Zeitbedarf summieren und mit der Anzahl der Fälle dividieren, erhalten wir ca. den Durchschnittswert von  $\log n$ . Somit ist die Zeitkomplexität für das Suchen  $O(\log n)$ .

Falls *mehrere Elemente* den *gleichen Schlüssel* haben können, dann ist es nicht trivial, alle diese Elemente zu finden. Der hier vorgestellte Algorithmus „binäres Suchen“ garantiert nur, dass man irgendein Element mit dem Suchschlüssel findet, und im Allgemeinen wird man *nicht* das erste solche Element (d.h. das mit dem kleinsten Index) finden. Rechts *und* links von dem gefundenen Element können also noch Elemente mit dem gleichem Schlüssel liegen.

Aufgabe 4.3: Programmieren Sie das *Löschen* in einer sortierten Reihung:

```

class SortierteReihungLoeschbar <E extends Beschluesselt>
    extends SortierteReihung<E> {
    void loeschen(int index); // requires 0 <= index < sammlung.length;
    }

```

Wir gehen davon aus, dass der Index des zu löschenden Elements zuvor (z.B. durch *suchen*) ermittelt wurde. Was ist die Komplexität der Methode?

## 4.4. Suchen in einer verketteten Liste

Wenn man die Elemente in einer Reihung ablegt, muss man von Anfang genügend Speicherplatz für die erwarteten Einfügungen reservieren (plus evtl. ein Element für die „Markierung“). Die einmal im Konstruktor festgelegte Reihungsgröße kann nicht mehr verändert werden: Entweder droht die Ausnahme `IndexOutOfBoundsException` oder es muss unverhältnismäßig viel Speicherplatz als Reserve angelegt werden.



Verkettete Listen – wie wir sie schon im Kapitel 2.3.2. (auf Seite 23) gesehen haben – können wachsen und schrumpfen: Eine neue Komponente wird hinzugefügt oder eine alte entfernt. So kann man genau dann Speicher für weitere Objekte reservieren, wenn man sie einfügen will.

**Bemerkung:** Einige Algorithmen für verkettete Listen werden eleganter, wenn man eine leere Liste durch zwei Pseudo-Kettenglieder darstellt und die „eigentlichen“ Kettenglieder zwischen diese beiden hängt.

```
Knoten<E> anfang = new Knoten<E>(); // Inhalt1 z.B.: Integer.MIN_VALUE
Knoten<E> ende = new Knoten<E>(); // Inhalt z.B.: Integer.MAX_VALUE
anfang.naechster = ende;
```

Die Referenzvariablen `anfang` und `ende` zeigen auf zwei Pseudoknoten. Alle „richtigen Knoten“ der Liste werden zwischen diesen beiden Pseudoknoten eingefügt. Der Pseudoknoten `anfang` erleichtert das Löschen des vordersten richtigen Knotens. Der Pseudoknoten `ende` dient zur Beschleunigung des Suchens.

*Speicherbedarf:* Insgesamt brauchen wir zwei zusätzliche Pseudo-Kettenglieder und pro Objekt eine zusätzliche Referenz. Dies ergibt eine *lineare* Speicherkomplexität  $O(n)$ . Andererseits belegt diese Lösung in jedem Augenblick nur so viel Speicher, wie sie in diesem Augenblick wirklich braucht, und es muss kein Speicher „auf Vorrat reserviert“ werden (wie bei den Lösungen mit einer Reihung).

#### 4.4.1. Lineares Suchen in einer unsortierten Liste

Die Objekte können in einer Liste in beliebiger Reihenfolge hintereinander („wie sie gerade kommen“) gespeichert werden; sie werden nicht sortiert.

```
void eintragen (final E element) {
    anker = new Knoten<E>(element, anker);
}
Knoten<E> suchen (int suchSchluessel) {
    Knoten<E> knoten = anker;
    while (knoten != null && knoten.wert.getSchluessel() != suchSchluessel) // 2
        knoten = knoten.verbindung;
    return knoten; // null wenn nicht vorhanden
}
```

*Zeitbedarf für das Einfügen eines Elementes:* Das Einfügen erfordert immer nur einen Schritt, unabhängig von der Länge der verketteten Liste. Man kann neue Glieder z.B. immer am Anfang der Liste „einhängen“ (oder immer am Ende). Die Zeitkomplexität ist also  $O(1)$ .

*Zeitbedarf für das Suchen:*

- im negativen Fall: immer  $n$  Vergleiche

<sup>1</sup> nützlich bei einer sortierten Liste, s. Kapitel 4.4.2. (auf Seite 72)

<sup>2</sup> Es wird angenommen, dass `E` `extends` `Beschluesselt`, s. Kapitel 4.2. (ab Seite 64).

- im positiven Fall: im Durchschnitt  $n/2$  Schritte (wenn alle Objekte in der Sammlung gleich häufig gesucht werden)

Somit ist die Zeitkomplexität für das Suchen  $O(n)$ .

Aufgabe 4.4: Modifizieren Sie das lineare Suchen mit „Markierung“: Vereinfachen Sie die Abbruchbedingung der **while**-Schleife, nachdem Sie den gesuchten Schlüssel im Pseudo-Endknoten speichern.

Aufgabe 4.5: Programmieren Sie den Algorithmus für `suchen` rekursiv.

#### 4.4.2. Lineares Suchen in einer sortierten Liste

Wenn man dafür sorgt, dass die Liste stets sortiert ist, wird nur das Suchen im negativen Fall schneller im Vergleich zur vorigen Lösung (lineares Suchen in einer unsortierten Liste). Somit bleiben alle Zeitkomplexitäten und der Speicherbedarf gleich.

*Zeitbedarf für das Einfügen eines Elementes:* Wenn man schon weiß, wo man das neue Element einfügen will, braucht man nur einen Schritt, unabhängig von der Länge der verketteten Liste. Um die Stelle zu finden, an der man einfügen sollte, muss man zuvor einmal suchen.

*Zeitbedarf für das Suchen:*

- im negativen Fall: Im Durchschnitt  $n/2$  Vergleiche.
- im positiven Fall: im Durchschnitt  $n/2$  Schritte (wenn alle Objekte in der Sammlung gleich häufig gesucht werden).

Somit ist die Zeitkomplexität für das Suchen  $O(n)$ .

Aufgabe 4.6: Erläutern Sie, warum man in einer verketteten Liste nicht so „binär suchen“ kann wie in einer sortierten Reihung.

Aufgabe 4.7: Programmieren Sie das Einfügen und das lineare Suchen in einer sortierten verketteten Liste. Was ist der Vorteil gegenüber der unsortierten Liste?

## 4.5. Hash-Tabellen

Das binäre Suchen verkürzt das Auffinden von Elementen in einer Reihung; das Eintragen wird jedoch wesentlich komplexer. Die Technik der *Hash-Tabellen* (auch *Streuwerttabellen* genannt) ist ein erstaunlich effizienter Kompromiss: Sowohl das Eintragen wie auch das Auffinden wird etwas aufwändiger, aber ihre Komplexität bleibt (meistens<sup>1</sup>) *konstant*. Der Preis dafür ist, dass das Löschen ein Umorganisieren vieler Einträge erfordern kann. Darüber hinaus muss – wie auch bei der Reihung – Speicher in „Reserve“ im Voraus belegt werden. Diesen bei Bedarf zu vergrößern ist sehr aufwändig.

---

<sup>1</sup> bei einer gut organisierten Tabelle; im ungünstigsten Fall *linear*

Für professionelle Anwendungen bietet die generische Klasse `java.util.Hashtable<K,V>` eine umfassende Lösung. Im Folgenden werden wir das Prinzip kennen lernen, wie so eine Hash-Tabelle funktioniert.

#### 4.5.1. Funktionalität

In einer Hash-Tabelle können Elemente (z.B. Telefonnummer) zusammen mit einem Schlüssel (z.B. dazugehörige Namen) eingetragen und die Elemente mit Hilfe des Schlüssels wieder gefunden werden. Prinzipiell ist der Schlüssel unabhängig vom Element – wichtig ist nur, dass der Benutzer das Element vergessen kann und sich nur den Schlüssel merkt. Der Benutzer kann aber den Schlüssel auch aus den Daten des Elements mit Hilfe einer *Hash-Funktion* errechnen. Hierzu liefert die Standardklasse `Object` eine Methode `hashCode`, die für ein beliebiges Objekt einen seinen Inhalt identifizierenden `int`-Wert liefert. Dieser kann als Schlüssel verwendet werden. Der Benutzer kann den Schlüssel auch selber errechnen, indem er die Methode `hashCode` in seiner Elementklasse überschreibt.

```
public int hashCode();
```

Dies ist insbesondere dann nötig, wenn die Hash-Tabelle (z.B. in einer Datei) zwischengespeichert wird: `Object.hashCode()` kann nämlich zum selben Objekt bei unterschiedlichen Programmläufen unterschiedliche Werte liefern.

Für die Effizienz der Tabelle ist wichtig, dass die Hash-Funktion für unterschiedliche Objekte möglichst unterschiedliche Werte liefert. Ist z.B. der Schlüssel eine Zeichenkette, bildet die Summe (modulo ein Maximalwert wie `Integer.MAX_VALUE`) der Unicode-Werte der Zeichen eine zwar nicht optimale<sup>1</sup>, aber doch geeignete Hash-Funktion.

Die Definition der Hash-Tabelle legt fest, ob Eintragungen mit gleichen Schlüsseln möglich sind oder nicht. Es ist möglich, dass die Methode `eintragen` mit einem schon vorhandenen Schlüssel den alten Eintrag überschreibt<sup>2</sup>. Alternativ kann die Hash-Tabelle unterschiedliche Einträge mit gleichem Schlüssel speichern (z.B. wenn jemand zwei Telefonnummern besitzt). Beim Suchen wird dann eines der eingetragenen Elemente geliefert; die weiteren können mit einer anderen Methode (z.B. `naechstesSuchen()`, ohne `schluessel`-Parameter) gefunden werden.

#### 4.5.2. Datenorganisation

Der Algorithmus kann verbal folgendermaßen formuliert werden.

---

<sup>1</sup> Mit besseren Hash-Funktionen ist die Wahrscheinlichkeit von Kollisionen (s. unten) geringer.

<sup>2</sup> Eine (vielleicht bessere) Alternative ist es, dass `eintragen` eine Ausnahme auslöst, wenn er mit einem schon vorhandenem Schlüssel aufgerufen wird – dann findet die Eintragung nicht statt.

Durch die Operation `eintragen` wird ein neues Element in die Tabelle eingetragen. Mit ihm zusammen wird auch der Schlüssel angegeben. Aus dem Schlüssel wird ein Tabellenindex (sein `hashCode()` modulo<sup>1</sup> Tabellengröße) errechnet. An diesem Index wird das neue Element (zusammen mit dem Schlüssel) eingetragen. Es kann aber vorkommen, dass dieser Platz in der Tabelle schon belegt ist, wenn ein anderer Eintrag zufällig denselben Indexwert ergeben hat. Man spricht dann von *Kollision*. In diesem Fall wird ein freier Platz in der Tabelle gesucht. Dieser Vorgang heißt *Sondieren*. Auf welche Weise gesucht wird, hängt von der *Kollisionsstrategie* (oder auch *Sondierungsstrategie*) ab.

Die einfachste Kollisionsstrategie ist die *lineare*: Der nächste freie Platz wird schrittweise und zyklisch gesucht; zyklisch bedeutet dabei, dass dem letzten Index (`tabelle.length-1`) der Erste (0) folgt. Diese Strategie garantiert, dass wenn kein Platz mehr gefunden wird, die Tabelle voll ist.

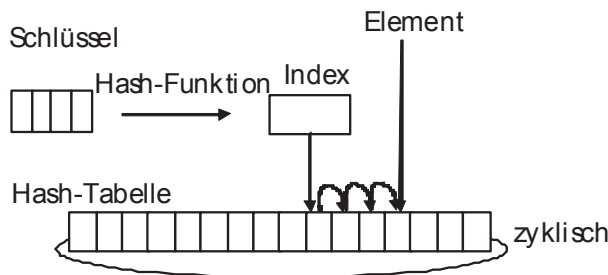


Abbildung 4.5: Hash-Tabelle

Der Nachteil der linearen Kollisionsstrategie ist, dass sich leicht *Klumpen* bilden, insbesondere, wenn die viele Elemente auf denselben Index abgebildet werden. Man kann eine Kollisionsstrategie verwenden, die nicht in Einzelschritten nach einem freien Platz sucht, sondern in jedem Schritt der Index mit Hilfe der *Sondierungsfunktion* (z.B. ein Polynom) modifiziert wird. Der Modulo-Operator (in Java `%`) garantiert dabei, dass der Index immer innerhalb den Reihungsgrenzen bleibt. Der Nachteil anderer Sondierungsfunktionen ist, dass sie – im Gegensatz zur linearen – möglicherweise nicht alle freien Plätze finden.

Die lineare Sondierungsfunktion kann folgendermaßen formuliert werden:

$$i_k = i_0 + k \bmod n$$

wo  $i_0$  den Hash-Wert (d.h. den ersten Sondierungsindex),  $i_k$  den Index beim  $k$ -ten Versuch,  $n$  die Tabellengröße bedeutet. Demgegenüber lautet eine quadratische Sondierungsfunktion:

$$i_k = i_0 + k^2 \bmod n$$

<sup>1</sup> Restbestimmung; in Java der Operator `%`

Ähnlich können auch andere (typischerweise polynomiale) Sondierungsfunktionen formuliert werden. Sie helfen mehr oder weniger, die Klumpenbildung zu reduzieren.

Die Operation `suchen` berechnet aus dem Parameterschlüssel einen Tabellenindex auf demselben Wege. Von diesem Index an wird der Schlüssel (bis zum nächsten freien Platz) mit Hilfe derselben Sondierungsfunktion gesucht. Wenn er gefunden wurde, wird das mit ihm gespeicherte Element zurückgegeben; wenn nicht, wird dies (z.B. durch Ausnahme) an den Benutzer zurückgemeldet. Um dieser Ausnahme vorzubeugen, kann die Operation `vorhanden` zuvor aufgerufen werden. Damit der Index hierbei nicht wiederholt errechnet werden muss (vielleicht ist die Hash- oder die Sondierungsfunktion aufwändig), kann er in einer privaten Variable gemerkt werden.

Wenn die Hash-Tabelle nicht allzu voll ist, wird der gesuchte Eintrag sehr schnell (in 1-3 Schritten) gefunden. Je voller sie ist, desto länger muss gesucht werden; wenn die Tabelle fast voll ist, muss sie u.U. ganz durchsucht werden. Um dem Benutzer die Information zur Verfügung zu stellen, wie effektiv seine Hash-Tabelle ist, kann die Gesamtzahl der Verschiebungen durch eine Methode

```
public int kollisionen();
```

zur Verfügung gestellt werden. Zu Anfang ist dieser Wert 0; jede Eintragung, die wegen Kollision einen freien Platz suchen muss, erhöht den Wert um die Anzahl der notwendigen Schritte.

Hier folgt eine einfache Implementierung der Hash-Tabelle. Sie verwendet die lineare Kollisionsstrategie und erlaubt keine Doppeleinträge, d.h. der Eintrag mit einem schon vorhandenem Index wird einfach überschrieben:

```
class HashTabelle<Element, Schlüssel> {
    private static class Eintrag<E, S> { // Tabelleneintrag
        E element; S schluessel; boolean belegt;
    }
    private Eintrag<Element, Schlüssel>[] tabelle; // die eigentliche Hashtabelle
    private int anzahl; // der eingetragenen Elemente, anfänglich 0
    public HashTabelle(int groesse) {
        tabelle = (Eintrag<Element, Schlüssel>[]) new Eintrag[groesse]; // 1
        for (int i = 0; i < tabelle.length; i++) {
            tabelle[i] = new Eintrag<Element, Schlüssel>(); tabelle[i].belegt =
false;
        }
        anzahl = 0;
    }
    private int index; // wird von vorhanden() beschrieben (Nebeneffekt!)
    public boolean vorhanden(Schlüssel schluessel) {
        index = schluessel.hashCode() % tabelle.length; // Nebeneffekt!
```

---

<sup>1</sup> Weil Java keine Erzeugung von Reihungsobjekten mit dem generischen Typ erlaubt, muss `Eintrag[]` als *roher Typ* (ohne Typparameter) ausgeprägt werden.

```

// hashCode kann in der aktuellen Schlüssel-Klasse überschrieben werden
while (tabelle[index].belegt && schluessel != tabelle[index].schluessel)
    index = (index + 1) % tabelle.length; // lineare Sondierungsfunktion
// Platz gefunden:
if (schluessel == tabelle[index].schluessel)
    // index zeigt auf den Platz, wo der letzte Schlüssel steht
    return true;
else // ! inhalt[index].belegt, index zeigt auf einen freien Platz
    return false;
}
/** ein Element mit vorhandenem Schlüssel wird überschrieben */
public void eintragen(Schlüssel schluessel, Element element) throws Voll {
    if (anzahl == tabelle.length)
        throw new Voll();
    else if (! vorhanden(schluessel)) {
        // Nebeneffekt: vorhanden() hat index auf einen freien Platz positioniert
        // neu eintragen, da ! vorhanden():
        tabelle[index].schluessel = schluessel;
        tabelle[index].belegt = true;
        anzahl++;
    }
    tabelle[index].element = element; // wenn vorhanden(), dann überschreiben
}
public Element suchen(Schlüssel schluessel) throws NichtVorhanden {
    if (! vorhanden(schluessel)) // Nebeneffekt: vorhanden() hat index positioniert
        throw new NichtVorhanden();
    else // vorhanden hat index auf den Platz von schluessel positioniert
        return tabelle[index].element;
}
}

```

Viele Hash-Tabellen arbeiten die Kollisionen nicht mit Verschiebungen, sondern bilden die *Klumpen* (Elemente mit gleichem Hash-Wert) auf verkettete Listen ab:

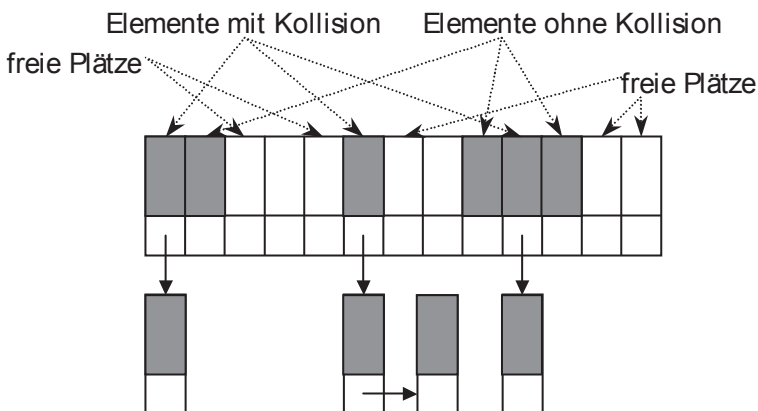


Abbildung 4.6: Kollisionsbehandlung mit verketteter Liste

Der wesentliche Nachteil dieses Verfahrens ist, dass für jeden Eintrag in der Tabelle ein zusätzlicher Speicherplatz für die Referenz auf die verkettete Liste reserviert werden muss. Die meisten von diesen (zumindest bei einer nicht zu vollen Tabelle) bleiben leer. Darüber hinaus ist es nachteilig, dass die verklumpten Elemente in der verketteten Liste linear gesucht werden müssen. Trotzdem wird diese Kollisionsbehandlung in der Praxis oft verwendet.

Aufgabe 4.8: Erweitern Sie die obige Implementierung `HashTabelle` mit den erwähnten Verbesserungen: Methoden `kollisionen` und `naechstesSuchen` (für Mehrfacheintragungen mit demselben Schlüssel) und einer quadratischen Sondierungsfunktion.

#### 4.5.3. Hash-Funktionen

Im vorigen Kapitel haben wir offen gelassen, ob die für `Schluessel` eingesetzte Klasse die von `Object` geerbte Funktion `hashCode()` enthält oder diese überschreibt. Jetzt beschäftigen wir uns mit der Frage, wie solche Hash-Funktionen schlechter oder besser programmiert werden können.

Hash-Tabellen und dazugehörige Hash-Funktionen gibt es in zahlreichen Varianten. Hier soll nur ihr Grundprinzip anhand einer besonders einfachen Varianten dargestellt werden.

Wir betrachten jetzt eine Hash-Tabelle als eine Reihung von Listen. Etwas konkreter: Jede Komponente der Reihung ist der Beginn einer Liste und hat entweder den Wert `null` (dann ist diese Liste noch leer) oder enthält eine Referenz auf das erste Objekt einer Liste.

Die Reihung, aus der eine Hash-Tabelle besteht, hat eine im Konstruktor festgelegte, unveränderbare Länge. Die einzelnen Listen in der Reihung haben anfänglich alle die Länge 0, können aber jederzeit verlängert werden, indem man ein weitere Objekte einfügt. Normalerweise sind die einzelnen Listen *unsortiert* (es gibt aber auch eine Variante von Hash-Tabellen, bei der die Listen *sortiert* gehalten werden).

In der Hash-Tabelle speichert man Objekte ab, die im einfachsten Fall nur aus einem *Schlüssel* (und in realistischeren Fällen aus einem Schlüssel und irgendwelchen dazugehörigen *Daten*) bestehen. Als konkretes Beispiel wollen wir folgenden Fall betrachten: Die vierzehn Schlüssel (vom Typ `String`)

```
"Ali", "Babsy", "Alfred", "Arno", "Alice", "Benno", "Kurt", "Alex", "Angy",  
"Bine", "Max", "Franz", "Susi", "Alf"
```

sollen (ohne weitere dazugehörige Daten) in eine Hash-Tabelle der Länge 10 eingefügt werden. Nach dem Einfügen der Schlüssel soll es dann möglich sein, von einem beliebigen Schlüssel (`String`) zu prüfen, ob er in der Hash-Tabelle vorkommt oder nicht.

Das *Einfügen* eines neuen Objektes in die Hash-Tabelle erfolgt in zwei Schritten:

**Schritt 1:** Aus dem Schlüssel des neuen Objekts wird mit der *Hash-Funktion* ein *Index* (in unserem Beispiel: eine Zahl zwischen 0 und 9) berechnet.

**Schritt 2:** Dann wird das neue Objekt in die (dem Index) entsprechende Liste *eingefügt*.

Das *Suchen* eines Schlüssels in der Hash-Tabelle erfolgt ebenfalls in zwei Schritten:

**Schritt 1:** Aus dem Schlüssel, nach dem gesucht werden soll, wird mit der Hash-Funktion ein Index (im Beispiel: eine Zahl zwischen 0 und 9) berechnet.

**Schritt 2:** Dann wird der Schlüssel in der (dem Index) entsprechenden Liste gesucht.

Hier wird also vorausgesetzt, dass der Leser weiß, wie man ein Objekt in eine Liste einfügt bzw. wie man einen Schlüssel in einer Liste sucht (siehe Kapitel 4.4. auf Seite 68).

Das Geheimnis der Hash-Tabelle steckt also im Wesentlichen in der verwendeten *Hash-Funktion*. Es gibt sehr viele verschiedene Hash-Funktionen. Was sie leisten und was sie gut oder schlecht macht, soll anhand einiger konkreter Beispiele erläutert werden.

Jede Hash-Funktion hat den *Schlüssel* als Parameter (in unserem Beispiel ist das ein Parameter vom Typ `String`) und liefert als Ergebnis einen *Index* der Hash-Tabelle (im Beispiel ein `int`-Wert zwischen 0 und 9). Beginnen wir mit einer der schlechtesten Hash-Funktionen die es gibt:

```
static int hash01(String s) {
    return 3; // oder eine andere Zahl zwischen 0 und 9
}
```

Wenn man diese Hash-Funktion verwendet, werden alle Objekte in die Liste 3 der Hash-Tabelle eingefügt und die anderen Listen (0 bis 2 und 4 bis 9) bleiben leer:

| Index | Elemente in den Listen   |
|-------|--|
| 3     | Ali Babsy Alfred Arno Alice Benno<br>Kurt Alex Angy Bine Max Franz<br>Susi Alf |

Tabelle 4.7: Konstante Hash-Funktion

Die Anzahl der *Suchschritte* mit `hash01` ist insgesamt 105. Dies bedeutet: Wenn man jeden Schlüssel, der in der Hash-Tabelle vorkommt, *einmal* sucht, braucht man dazu insgesamt (und „im wesentlichen“) 105 „Listen-Suchschritte“. Den Schlüssel „Ali“ findet man nach einem Schritt, für „Babsy“ braucht man zwei Schritte, für „Alfred“ drei Schritte, ... und für „Alf“ 14 Schritte, macht insgesamt 105 Schritte. Diese Zahl ist ein Maß für die Güte (bzw. für die „Schlechtigkeit“) der verwendeten Hash-Funktion.

Wenn man die Funktion `hash01` als Hash-Funktion verwendet, dauert das Einfügen eines Objekts und das Suchen eines Schlüssels etwa so lange wie bei einer *Liste* (hinzu kommt sogar noch je ein Aufruf der Hash-Funktion, der allerdings häufig vernachlässigt werden kann).

Die folgende Funktion `hash02` ist schon etwas besser als `hash01`:

```
static int hash02(String s) {
    if(s.charAt(0) % 2 == 0)
```



```

    return 3;
else
    return 4;
}

```

Je nachdem ob das erste Zeichen des Schlüssels (`s.charAt(0)`) durch eine gerade oder durch eine ungerade Zahl kodiert wird, liefert diese Hash-Funktion den Index 3 oder den Index 4. Alle Objekte werden also in die Liste 3 oder in die Liste 4 eingefügt, die Listen 0 bis 2 und 5 bis 9 bleiben garantiert leer:

| Index | Elemente in den Listen                               |
|-------|--|
| 3     | Babsy Benno Bine Franz                               |
| 4     | Ali Alfred Arno Alice Kurt Alex Angy Max<br>Susi Alf |

Tabelle 4.8: Zweiwertige Hash-Funktion

Die Anzahl der Suchschritte mit `hash02` ist insgesamt 65. Hieran kann man erkennen, dass die Funktion `hash02` besser als `hash01` ist.

Hier ist eine noch bessere Hash-Funktion:

```

static int hash03(String s) {
    return s.charAt(0) % tabelle.length;
}

```

Hier wird der Index aus dem ersten Zeichen des Schlüssels berechnet. Die Operation `%` stellt sicher, dass wir immer einen gültigen Index der Hash-Tabelle bekommen:

| Index | Elemente in den Listen                   |
|-------|--|
| 0     | Franz                                    |
| 3     | Susi                                     |
| 5     | Ali Alfred Arno Alice Kurt Alex Angy Alf |
| 6     | Babsy Benno Bine                         |
| 7     | Max                                      |

Tabelle 4.9: Alphabetische Hash-Funktion

Die Anzahl der Suchschritte mit `hash03` ist insgesamt 45. Man sieht: Die Funktion `hash03` bewirkt, dass alle Schlüssel mit gleichem Anfangsbuchstaben in dieselbe Liste kommen. Allerdings können in einer Liste auch Schlüssel mit verschiedenen Anfangsbuchstaben stehen (weil z.B. `'A' % 10` gleich `'K' % 10` gleich 5 ist).

Aufgabe 4.9: Die Funktion `hash03` bewirkt, dass alle mit `'A'` und alle mit `'K'` beginnenden Schlüssel in die Liste 5 kommen. Nennen Sie einen weiteren Anfangsbuchstaben, der von `hash03` der Liste 5 zugeordnet wird.

Für ein genaueres Verständnis von Hash-Funktionen besonders wichtig ist die folgende Tatsache: Ob die Funktion `hash03` besonders gut oder schlecht oder mittelmäßig ist, kann man nicht allein anhand der Funktion selbst entscheiden. Vielmehr muss man auch die Schlüssel berücksichtigen, auf die man sie anwendet. Für die vierzehn Beispiel-Schlüssel ist

hash03 nicht besonders gut, denn sie lässt 5 der 10 Listen unserer Hash-Tabelle leer und bewirkt, dass acht der vierzehn Schlüssel in dieselbe Liste (Liste 5) eingefügt werden. Am besten ist es, wenn eine Hash-Funktion alle Schlüssel *möglichst gleichmäßig* auf alle Listen verteilt.

Aufgabe 4.10: Geben Sie vierzehn Schlüssel (möglichst allgemein bekannte Vornamen) an, die von der Hash-Funktion hash03 möglichst gleichmäßig auf die zehn Listen der Hash-Tabelle verteilt werden (dabei heißt „möglichst gleichmäßig“: pro Liste ein oder zwei Schlüssel).

Die folgende Funktion hash04 ist für die vierzehn Beispiel-Schlüssel besser als hash03:

```
static int hash04(String s) { // Der Index wird aus drei Zeichen von s berechnet
    // (dem ersten und dem letzten Zeichen und einem Zeichen aus der Mitte):
    int vorn = s.charAt(0) % 3;
    int mitte = s.charAt(s.length()/2) % 5;
    int hinten = s.charAt(s.length()-1) % 7;
    return (vorn + mitte + hinten) % tabelle.length;
}
```

Hier ist die mit Hilfe der Funktion hash04 gefüllte Hash-Tabelle:

| Index | Elemente in den Listen |
|-------|------------------------|
| 2     | Susi                   |
| 3     | Bine                   |
| 4     | Alex                   |
| 5     | Ali Babsy Alice Max    |
| 6     | Benno Franz            |
| 7     | Angy                   |
| 8     | Alfred Arno Kurt       |
| 9     | Alf                    |

Tabelle 4.10: Hash-Funktion aus drei Zeichen

Suchschritte insgesamt mit hash04: 24. Man sieht: Hier sind nur noch zwei der zehn Listen leer und die längsten Listen enthalten drei Schlüssel. Die folgende Hash-Funktion ist für die vierzehn Beispiel-Schlüssel noch etwas besser:

```
static int hash05(String s) {
    // Der Index wird aus allen Zeichen von s nach einer mittelkomplizierten Formel berechnet:
    int i = 0;
    for (int j = 0; j < s.length(); j++)
        i += s.charAt(j) % 32 + j;
    return i % tabelle.length;
}
```

Die Funktion hash05 verteilt die vierzehn Beispiel-Schlüssel wie folgt auf die zehn Listen unserer Hash-Tabelle:

| <i>Index</i> | <i>Elemente in den Listen</i> |
|--------------|-------------------------------|
| 0            | Alice Benno                   |
| 1            | Alfred Max                    |
| 2            | Alf                           |
| 3            | Angy                          |
| 4            | Arno Susi                     |
| 5            | Ali Franz                     |
| 6            | Kurt Bine                     |
| 8            | Alex                          |
| 9            | Babsy                         |

Tabelle 4.11: Hash-Funktion nach Formel

Suchschritte insgesamt mit `hashFunk05`: 19. Das ist schon nahe am Optimum: Nur noch eine Liste ist leer geblieben und keine Liste enthält mehr als zwei Schlüssel.

#### 4.5.4. Weitere Aspekte

In Zusammenhang mit Hash-Tabellen können noch folgende Überlegungen getroffen werden:

Indem man eine Hash-Tabelle verlängert (d.h. die Anzahl der Listen erhöht) kann man häufig die Länge der einzelnen Listen günstig beeinflussen (Kompromiss zwischen Zeit und Raum).

Bei einer guten Hash-Tabelle (d.h. bei einer Hash-Tabelle mit einer guten Hash-Funktion) ist die Zeit für das Suchen eines Schlüssels fast eine Konstante und nur sehr schwach abhängig von der Größe der Tabelle (d.h. von der Länge der Hash-Tabelle und von der Anzahl der eingetragenen Objekte).

Hash-Funktionen werden in der Praxis typischerweise von Spezialisten entwickelt, die fundierte Kenntnis in Statistik haben.

Je mehr man über die Schlüssel weiß, die in die Hash-Tabelle eingefügt werden sollen, desto besser kann man die Hash-Funktion konstruieren.

Eine typische Anwendung: Viele Compiler verwenden eine Hash-Tabelle, um die vom Programmierer erfundenen Bezeichner (und das, wofür diese Bezeichner stehen) zu speichern.

## 4.6. Zeitkomplexitäten beim Suchen

Wenn man Lösungen für das Problem „Suchen eines Objekts anhand eines Schlüssels in einer Sammlung“ miteinander vergleichen will, dann genügt es häufig nicht, die Zeitkomplexitäten der Operation `suchen` zu betrachten. Vielmehr ist es meistens notwendig und sinnvoll, die Operationen `einfuegen` (eines Objekts in die Sammlung) und `loeschen` (eines Objekts aus der Sammlung) zu betrachten. Außerdem sollte man `suchen` „positiv“ (bei dem man ein Objekt findet) und „negativ“ (bei dem man feststellt, dass kein Objekt mit dem betreffenden Schlüssel in der Sammlung vorhanden ist) unterscheiden.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über den Zeitbedarf der Operationen `ein-fuegen`, `loeschen`, `suchen „positiv“` und `suchen „negativ“` in Abhängigkeit davon, wie die Sammlung organisiert ist: als unsortierte Reihung, als unsortierte Liste, als sortierte Reihung, als sortierte Liste bzw. als sortierter ausgeglichener *Baum*. Diese letztere Datenstruktur werden wir im Kapitel 6. (ab Seite 111) studieren.

Die Anzahl der nötigen Schritte wurden jeweils in einem besten Fall, im Durchschnitt und in einem schlechtesten Fall ermittelt:

|                   |               | Reihung<br>unsortiert | Liste<br>unsortiert | Reihung<br>sortiert <sup>1</sup> | Liste<br>sortiert | Baum<br>sortiert |
|-------------------|---------------|-----------------------|---------------------|----------------------------------|-------------------|------------------|
| ein-<br>fuegen    | bester        | 1                     | 1                   | $\log n + 1$                     | $1+1$             | $\log n + 1$     |
|                   | Durchschnitt  | 1                     | 1                   | $\log n + n/2$                   | $n/2 + 1$         | $\log n + 1$     |
|                   | schlechtester | 1                     | 1                   | $\log n + n$                     | $n + 1$           | $\log n + 1$     |
| loe-<br>schen     | bester        | 1                     | 1                   | 1                                | 1                 | 1                |
|                   | Durchschnitt  | $n/2$                 | 1                   | $n/2$                            | 1                 | ?                |
|                   | schlechtester | $n$                   | 1                   | $n$                              | 1                 | $\log n$         |
| suchen<br>positiv | bester        | 1                     | 1                   | 1                                | 1                 | 1                |
|                   | Durchschnitt  | $n/2$                 | $n/2$               | ?                                | $n/2$             | ?                |
|                   | schlechtester | $n$                   | $n$                 | $\log n$                         | $n$               | $\log n$         |
| suchen<br>negativ | bester        | $n$                   | $n$                 | $\log n$                         | 1                 | $\log n$         |
|                   | Durchschnitt  | $n$                   | $n$                 | $\log n$                         | $n/2$             | $\log n$         |
|                   | schlechtester | $n$                   | $n$                 | $\log n$                         | $n$               | $\log n$         |

Tabelle 4.12: Zeitbedarf der Operationen (Anzahl der Schritte)  
in einer Sammlung der Größe  $n$

Jeder Eintrag in der Tabelle besteht aus einer Formel für die Schrittzahl. Wenn eine Formel für die Schrittzahl nicht leicht abzuleiten bzw. zu begründen ist, wurden stattdessen Fragezeichen ? eingetragen.

Wenn als Schrittzahl für die Operation `ein-fuegen` eine Summe angegeben ist (z.B.  $1+1$ ), dann bezieht sich der erste Summand auf das Suchen, und der zweite auf das eigentliche Einfügen (nachdem man „die richtige Stelle“ gefunden hat).

Die Angaben zur Operation `loeschen` gelten unter der Voraussetzung, dass man schon weiß, welches Objekt in der Sammlung man löschen will (d.h. man hat den entsprechenden Index oder die Referenz schon ermittelt, z.B. mit Hilfe der Operation `suchen`). Im Gegensatz

<sup>1</sup> Der Funktionsname `log` bindet stärker als der Operator `+` („log-Rechnung geht vor Strichrechnung“). Das heißt z.B., dass die Formel  $\log n + 1$  das Gleiche bedeutet wie  $(\log n) + 1$  und nicht das Gleiche wie  $\log(n + 1)$ .

dazu schließen die Angaben zur Operation `einfuegen` den Aufwand für das Suchen „der richtigen Stelle“ mit ein.

**Begründung:** Bei jeder Organisationsform muss man vor dem Löschen eines Objekts ermitteln, „wo er steht“. Wer will, kann also bei jeder Organisationsform zum Aufwand für einen Löschvorgang noch den Aufwand für einen (positiven) Suchvorgang addieren. Beim Einfügen hängt es dagegen von der Organisationsform ab, ob man erstmals „die richtige Stelle zum Einfügen“ suchen muss oder nicht. Es würde also ein falsches Bild ergeben, wenn man beim `einfuegen` den Aufwand für das vorherige `suchen` weglassen würde, da dieser Aufwand bei einigen Organisationsformen eine unwichtige Konstante ist (ein Schritt), bei anderen dagegen ins Gewicht fällt.

Die Angaben für die Organisationsform „sortierter Baum“ gelten nur, wenn der Baum ausgeglichen<sup>1</sup> ist, d.h. wenn alle Wege von der Wurzel zu einem Blatt einigermaßen gleich lang sind. Ein Baum kann im schlimmsten Fall zu einer (sortierten) Liste entarten. In diesem Fall gelten die (schlechteren) Zeitkomplexitäten für die Organisationsform sortierte Liste.

Die nächste Tabelle enthält die Zeitkomplexitäten für die Operationen `einfuegen`, `loeschen`, `suchen`:

|                        | <i>Reihung</i><br>unsortiert | <i>Liste</i><br>unsortiert | <i>Reihung</i><br>sortiert | <i>Liste</i><br>sortiert | <i>Baum</i><br>sortiert |
|------------------------|------------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|-------------------------|
| <code>einfuegen</code> | $O(1)$                       | $O(1)$                     | $O(n)$                     | $O(n)$                   | $O(\log n)$             |
| <code>loeschen</code>  | $O(1)$                       | $O(1)$                     | $O(n)$                     | $O(1)$                   | $O(\log n)$             |
| <code>suchen</code>    | $O(n)$                       | $O(n)$                     | $O(\log n)$                | $O(n)$                   | $O(\log n)$             |

Tabelle 4.13: Zeitkomplexität von Operationen

<sup>1</sup> s. Kapitel 6.4. (auf Seite 130)

## 5. Sortiervverfahren

### 5.1. Die Problemstellung

Gegeben sei eine *Reihung* namens `sammlung`. Jede Komponente `sammlung[i]` dieser Reihung ist eine Referenz auf ein *Objekt*. Die Klasse dieser Objekte hat eine öffentliche numerische<sup>1</sup> Komponente `schluessel` und möglicherweise noch weitere Datenkomponenten. Der Schlüssel der *i*-ten Reihungskomponente also ist `sammlung[i].schluessel`. Für die Schlüsselkomponente stehen dann die Vergleichsoperatoren `<`, `<=`, `==`, `>=` und `>` zur Verfügung. Ein Sortieralgorithmus soll die Objekte in der Reihung `sammlung` so umordnen, dass ihre Schlüssel eine aufsteigende Folge bilden:

```
sammlung[i].schluessel ≤ sammlung[i+1].schluessel
für alle i = 0,1,...,sammlung.length - 2
```

Ein Sortieralgorithmus darf keine Elemente aus der Reihung `sammlung` entfernen und keine hinzufügen. Er darf die Elemente nur umordnen.

Eine allgemeinere Lösung liegt vor, wenn die Elementklasse nicht ihre Datenkomponente `schluessel` veröffentlicht, sondern die (generische) Schnittstelle `Comparable` implementiert. Dann muss sie die `int`-Funktion `compareTo` enthalten, die das aktuelle Objekt mit ihrem Parameterobjekt vergleicht und feststellt, ob es kleiner, gleich oder größer ist. Sie liefert dementsprechend das Ergebnis `-1`, `0` oder `+1`.

Beispielsweise, wenn wir Telefonbucheinträge sortieren müssen, kann die Klasse folgendermaßen formuliert werden:

```
class Telefonbucheintrag implements Comparable<Telefonbucheintrag> {
    private String name; // Schlüssel
    private String telefonnummer; // Daten
    public int compareTo(Telefonbucheintrag that) { // 2
        return this.name.compareTo(that.name);
    }
    ...
}
```

Darüber hinaus gelten – wir definieren es so – zwei `Telefonbucheintrag`-Objekte als gleich, wenn ihre Schlüssel gleich sind:

```
Telefonbucheintrag t1 = new Telefonbucheintrag("Solymosi", "74704");
Telefonbucheintrag t2 = new Telefonbucheintrag("Solymosi", "74705");
```

Hier gilt `t1.compareTo(t2) == 0`, also ist – im Sinne des Benutzers – `t1` gleich `t2`.

<sup>1</sup> d.h. Basistyp wie `int`, `char` oder `float`, aber kein `boolean`

<sup>2</sup> der generische Parameter `<Telefonbucheintrag>` stellt sicher, dass `compareTo` zwei Objekte vom gleichen Typ vergleicht.

Mit dieser Verallgemeinerung gilt das Sortierkriterium folgendermaßen:

```
sammlung[i].compareTo(sammlung[i+1]) < 0 für alle i = 0, 1, ..., sammlung.length - 2
```

Alternativ zur Implementierung der Schnittstelle `Comparable` kann man primitive Variablen miteinander vergleichen. In unseren Beispielen werden wir *Buchstaben* sortieren. Darunter verstehen wir Objekte mit Schlüsseln vom Typ `char`. Wir schreiben nur den Schlüssel der Objekte auf und sortieren sie; die anderen Komponenten (die Daten) der Objekte betreffen den Sortieralgorithmus nicht.

Wir werden den sortierten Teil einer Reihung auch *Sequenz* nennen. In der Reihung

```
char sammlung[] = {'E', 'F', 'A', 'C', 'H', 'B', 'G', 'D'};
```

bildet beispielsweise der Teil { 'A', 'C', 'H' } zwischen den Indizes 2 und 4 eine Sequenz.

### 5.1.1. Präzisierung des Problems und Grundbegriffe

Ähnlich wie beim Suchen im Kapitel 4.2. (auf Seite 63) unterscheiden wir zwischen *internen* und *externen* Sortierverfahren.

Ein *internes* Sortierverfahren setzt voraus, dass der Hauptspeicher des Rechners groß genug ist, die zu sortierende Reihung `sammlung` vollständig zu erfassen. Das heißt, wir können die Schlüssel `sammlung[i].schluessel` und `sammlung[j].schluessel` von zwei beliebigen Elementen der Reihung (direkt und ohne vorherige „Leseoperationen“) miteinander *vergleichen*, und wir können zwei beliebige *Elemente* `sammlung[i]` und `sammlung[j]` (direkt und ohne vorherige „Leseoperationen“) miteinander *vertauschen*.

Ein *externes* Sortierverfahren wird dann benötigt, wenn die zu sortierenden Objekte auf einem externen Speicher stehen. Externe Speicher erlauben nur die beiden Operationen *lesen* und *schreiben*, aber keine Operationen wie *Vergleichen* oder *Vertauschen*.

Für ein Sortierverfahren ist es wesentlich, ob in der zu sortierenden Reihung `sammlung` jeder Schlüsselwert höchstens einmal vorkommen kann oder ob Schlüsselwerte auch mehrfach vorkommen können. Wenn mehrere verschiedene Elemente der Reihung `sammlung` den gleichen Schlüssel haben können, dann unterscheidet man zwischen *stabilen* und *instabilen* Sortierverfahren. Ein stabiles Sortierverfahren verändert die ursprüngliche Reihenfolge von Elementen mit gleichem Schlüssel *nicht*.

Viele Sortierverfahren wenden auf die Schlüssel nur Vergleichsoperatoren (<, <=, ==, !=, >= und >) an. Man nennt sie *vergleichsbasierte* Verfahren. Im Gegensatz zu den vergleichsbasierten Verfahren gibt es die so genannten *Radix-Verfahren*. Sie setzen z.B. voraus, dass die Schlüssel ganze Zahlen sind und wenden Operatoren wie Addition (+), Division (/), Restbestimmung (% modulo) usw. darauf an. Oder sie setzen voraus, dass die Schlüssel Zeichenketten sind, und sortieren z.B. zuerst nach dem letzten Zeichen der Schlüssel, dann nach dem vorletzten Zeichen usw. Radix-Verfahren wenden also auf die Schlüssel nicht nur Ver-

gleichsoperationen an, sondern noch weitere und speziellere Operationen. In diesem Lehrbuch beschäftigen wir uns nicht mit Radix-Verfahren.

Einige Sortialgorithmen lesen die zu sortierenden Daten aus einer Reihung, ordnen sie im eigenen Speicherbereich ein und schreiben sie schließlich nach Größe geordnet in die Reihung zurück. Sie brauchen also zusätzlichen Speicherplatz: Ihre *Speicherkomplexität* wächst mit der Menge der zu sortierenden Daten *linear*. Es gibt Sortialgorithmen mit *konstanter* Speicherkomplexität: Der über die Speicherung der Eingabedaten hinausgehende Speicherbedarf wächst nicht mit der Menge der Daten.

Interne Sortiervverfahren kann man also nach ihrer *Speicherkomplexität* in drei Klassen einteilen:

1. Verfahren, die außer dem Speicherplatz für die Reihung `sammlung` nur „sehr wenig Speicher für weitere Daten“ benötigen. Die Größe des zusätzlichen Speicherplatzes wächst nicht mit der Länge der Reihung `sammlung`.
2. Verfahren, bei denen die zu sortierenden Objekte mit Hilfe von Referenzen zu einer *linearen Liste* oder zu einem *Baum* verbunden werden. Diese Verfahren benötigen pro Objekt (mindestens) einen zusätzlichen Speicherplatz für eine Referenz.
3. Verfahren, die außer dem Platz für `sammlung` noch einen ebenso großen Speicherplatz benötigen, in dem eine „sortierte Kopie“ der Reihung `sammlung` erzeugt wird.

Im ersten Fall sprechen wir über Speicherkomplexität von  $O(1)$ , in den beiden anderen sprechen wir über Speicherkomplexität von  $O(n)$ . In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Sortiervverfahren mit Speicherkomplexität von  $O(1)$ . Im Kapitel 6.2. (auf Seite 116) werden wir Algorithmen kennen lernen, die zwar sehr schnell sind, aber die zu sortierenden Daten in einem extra Speicherbereich (in einem Baum) abspeichern.

### 5.1.2. Zeitbedarf und Zeitkomplexität

Wie lange es dauert, die Reihung `sammlung` zu sortieren, wird im Allgemeinen sicherlich von der Länge der Reihung `sammlung` (d.h. von `sammlung.length`) abhängen.

Aber anders als beim Problem der maximalen Teilsumme einer Folge<sup>1</sup> hängt der genaue Zeitbedarf vieler (aber nicht aller) Sortialgorithmen auch von den Daten ab, die in der Reihung `sammlung` stehen. Wenn `sammlung` schon „fast sortiert“ ist, dann brauchen einige Verfahren weniger Zeit, als wenn `sammlung` „umgekehrt“ sortiert ist oder „eine zufällige Unordnung“ enthält. Manche Verfahren arbeiten aber langsamer mit einer „fast sortierten“ Reihung `sammlung` als mit einer zufälligen Ordnung.

Wir müssen bei Sortialgorithmen den Zeitbedarf also differenzierter abschätzen. Man unterscheidet meistens:

---

<sup>1</sup> s. Kapitel 2.1. (auf Seite 8)



1. Der *Zeitbedarf in einem ungünstigsten Fall*. Welche Fälle am ungünstigsten sind, ist von Algorithmus zu Algorithmus verschieden.
2. Der *durchschnittliche Zeitbedarf* (die *Zeitkomplexität*). Dazu nimmt man eine Reihung, in der alle Elemente verschiedene Schlüssel haben, und wendet den Sortieralgorithmus auf alle Permutationen<sup>1</sup> der Reihung `sammlung` an, addiert die Laufzeiten und teilt das Ergebnis durch die Anzahl der Permutationen.
3. Der *Zeitbedarf in einem besten Fall* ist nicht besonders wichtig. Denn man kann vor jeden Sortieralgorithmus eine Prüfung einbauen, die eine schon sortierte Reihung erkennt und eine weitere (unnötige) Bearbeitung verhindert. Eine solche Prüfung kostet zwar auch Aufwand, verschlechtert aber den Zeitbedarf im ungünstigsten Fall nur geringfügig und die Zeitkomplexität gar nicht. Jeder Sortieralgorithmus kann so modifiziert werden, dass er im besten Fall eine optimale Zeitkomplexität hat.

**Aufgabe 5.1:** Skizzieren Sie einen Algorithmus, der von einer Reihung `sammlung` feststellt, ob sie schon sortiert ist oder noch nicht. Welche Zeitkomplexität hat Ihr Algorithmus?

### 5.1.3. Sortieralgorithmen in Java-Standardbibliotheken

In der Standardklasse `java.util.Arrays` befinden sich eine Reihe von Sortiermethoden, z.B.

```
static void sort (byte[] a); // sortiert den Inhalt einer byte-Reihung
static void sort (byte[] a, int fromIndex, int toIndex); // sortiert eine Teilreihung
```

und so für alle 8 primitive Typen wie `char`, `double`, `int`, usw. Diese sind geeignet, Reihungen aus den entsprechenden primitiven Typen zu sortieren. In der Praxis kommt es jedoch selten vor, eine Menge von ganzen Zahlen oder Brüchen sortieren zu wollen. Die typische Aufgabe ist eher, dass Kundensätze oder Datenbankeinträge von einem gegebenen Referenztyp nach einem bestimmten Schlüssel (wie Kundennummer oder Geburtsdatum) sortiert werden. Die `Array`-Methode

```
static void sort (Object[] a);
```

ist hierfür geeignet, ist jedoch typ-unsicher: Ihre Dokumentation fordert nur verbal, dass alle Reihungselemente die `Comparable`-Schnittstelle (mit der `compareTo`-Methode) implementieren sollen und sie alle damit gegenseitig vergleichbar sein sollen. Der Compiler prüft diese Forderung nicht, d.h. es ist nicht schwer, die Methode zur Laufzeit mit einer falsch zusammengestellten Reihung (z.B. deren einige Elemente `Comparable` nicht implementieren) zum Absturz (d.h. zu einer Ausnahme `ClassCastException`) zu bringen.

Dieser Fehler kann mit Verwendung von Generizität vermieden werden. Die generische Methode in `java.util.Array` mit der interessanten Signatur

---

<sup>1</sup> s. Kapitel 3.1.5. (auf Seite 37)

```
static <T> void sort (T[] a, Comparator<? super T> c);
```

(auch mit den zusätzlichen Parametern `fromIndex` und `toIndex`) braucht jedoch einen Parameter vom Typ `java.util.Comparator`, d.h. ein Objekt, dessen Klasse die Schnittstelle `Comparator` implementiert. Deren einzige Methode

```
int compare (T o1, T o2);
```

vergleicht zwei beliebige Objekte vom generischen Typ `T`, d.h. zwei beliebige Elemente der zu sortierenden Reihung `a` (des Parameters der Methode `sort`). Da `Comparator` selber eine generische Schnittstelle ist, muss sie mit `T` (demselben aktuellen Typparameter wie `sort`), oder ggf. – wie „? **super**“ das erlaubt – mit einem Obertyp von `T` ausgeprägt werden:

```
class Kunde { int kdNr; ... } // weitere Daten
class Kundenvergleich implements Comparator<Kunde> {
public int compare (Kunde o1, Kunde o2) { return o1.kdNr<o2.kdNr ? -1 : 1; } //1
}
...
Kunde[] kartei = ...
sort(kartei, new Kundenvergleich()); // Ausprägung und Aufruf der generischen Methode
```

Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass dieselbe Reihung mit einer zweiten Implementierung von `Comparator` nach einem anderen Kriterium (z.B. nach Geburtsdatum) sortiert werden kann:

```
sort(kartei, new Geburtsdatumvergleich());
```

Ähnliche Sortiermethoden befinden sich auch in der Klasse `java.util.Collections`, jedoch nicht für Reihungen sondern für `List`-Objekte.

#### 5.1.4. Entwurfsmuster Strategie

In den folgenden Kapiteln werden wir nicht fertige Sortiermethode aufrufen, sondern verschiedene Sortieralgorithmen selber programmieren. Hierzu verwenden wir eine etwas einfachere aber genauso typsichere Signatur:

```
static <E extends Comparable<E>> void sort(E[] sammlung);
```

Diese generische Methode kann mit einem aktuellen Typparameter (normalerweise eine Klasse wie z.B. `Integer` oder `String`, ggf. eine Schnittstelle) ausgeprägt werden, die (wie **extends** das fordert) `java.lang.Comparable` implementiert (bzw. erweitert), d.h. in der die Methode

```
int compareTo(T o1);
```

vorhanden ist. Im Gegensatz zu `Comparable.compare()` vergleicht sie nicht ihre zwei Parameter miteinander, sondern ihren (einzigen) Parameter mit ihrem Zielobjekt (**this**, das Objekt vor dem Punkt beim Aufruf).

---

<sup>1</sup> Wir gehen davon aus, dass es keine zwei Kunden mit gleicher Kundennummer gibt.

Die geschachtelte Generizität ist dadurch bedingt, dass `Comparable` selber eine generische Schnittstelle ist: Sie muss mit dem selben Typ (hier: `E`) ausgeprägt werden wie `sort`, d.h. mit dem Elementtyp der zu sortierenden Reihung. Bei dem Aufruf dieser Sortiermethode muss also `Comparator` nicht extra (wie oben) implementiert werden; dafür muss die Klasse der zu sortierenden Objekte `Comparable` implementieren:

```
class Kunde implements Comparable<Kunde> { int kdNr; ... // weitere Daten
    public int compareTo(Kunde o) { return this.kdNr < o.kdNr ? -1 : 1; }
}
...
Kunde[] kartei = ...
sort(kartei); // Ausprägung und Aufruf der generischen Methode
```

Logisch: Wenn Kunden sortiert werden, dann müssen zwei Kunden miteinander auf ihre Reihenfolge verglichen werden können. Mit `Comparable` wird der Vergleich innerhalb der Klasse `Kunde` programmiert, bei `Comparator` getrennt.

Wenn verschiedene Algorithmen für die Lösung desselben Problems entwickelt werden, ist es zweckmäßig, das Entwurfsmuster<sup>1</sup> *Strategie* zu verwenden. In diesem Fall besteht es daraus, dass die Signatur der Sortiermethoden in einer Schnittstelle vorgegeben ist:

```
interface Sort<E extends Comparable<E>> { // Entwurfsmuster Strategie
    void sort(E[] sammlung);
}
```

Die einzelnen Algorithmen platzieren wir in Klassen, die diese Schnittstelle implementieren. Ein Vorteil davon ist z.B., dass nur eine Testmethode entwickelt werden muss:

```
static <E extends Comparable<E>> void sorttest(E[] sammlung, Sort<E> algorithmus){
    ... // Testdaten werden vorbereitet
    algorithmus.sort(sammlung); // Sortiermethode wird aufgerufen
    ... // Ergebnis wird geprüft (z.B. ausgegeben)
}
```

Diese Methode kann dann für die verschiedenen Sortieralgorithmen (und wegen der Generizität auch für verschiedene Datentypen) aufgerufen werden:

```
sorttest(testdaten, new BubbleSort<Testdatentyp>());
sorttest(kartei, new HeapSort<Kunde>());
```

## 5.2. Quadratische Sortiervverfahren

| Die einfachsten Sortieralgorithmen haben eine quadratische Zeitkomplexität  $O(n^2)$ .

---

<sup>1</sup> design pattern, s. z.B. [Gam]

### 5.2.1. Sortieren durch Vertauschen benachbarter Elemente

Vielleicht das bekannteste (weil einfachste) Sortierv Verfahren ist der *bubble sort*<sup>1</sup>. Der Name stammt aus der Vorstellung, dass in einer vertikal stehenden Reihung die kleineren Elemente wie Blasen aufwärts<sup>2</sup> steigen. Das Verfahren kann verbal folgendermaßen formuliert werden:

- Wiederhole Folgendes `sammlung.length-1` mal:
  - Lass den Index `i` die Werte `0` bis `sammlung.length-2` annehmen und mache für jedes `i` Folgendes:
    - Wenn die benachbarten Komponenten `sammlung[i]` und `sammlung[i+ 1]` nicht in der richtigen Reihenfolge liegen, dann vertausche sie.

Die folgende Java-Prozedur `bubbleSort` implementiert dieses Verfahren. Der Typ der zu sortierenden Objekte in der Reihung `sammlung` lassen wir dabei offen als formaler generischer Parameter. Weil wir aber für diese Objekte die Methode `compareTo` aufrufen müssen, soll ihre Klasse die (generische) Schnittstelle `Comparable` implementieren. `compareTo` vergleicht dann das Zielobjekt mit dem Parameterobjekt (vielleicht ihre Schlüsselkomponenten, vielleicht auf andere Weise).

```
class BubbleSort<E extends Comparable<E>> implements Sort<E> {
    public void sort(E[] sammlung) {
        for (int i = 0; i < sammlung.length; i++)
            for (int j = 0; j < sammlung.length-1; j++)
                if (sammlung[j+1].compareTo(sammlung[j]) < 0) { // vergleichen3
                    final E temp = sammlung[j+1]; // austauschen
                    sammlung[j+1] = sammlung[j];
                    sammlung[j] = temp;
                }
    }
}
```

Die Idee des *bubble sort* ist es also, dass zwei benachbarte Elemente (vom Parameter `E`) vertauscht werden, wenn das größere vorne liegt. Durch die geschachtelte Schleife<sup>4</sup> ist es einleuchtend, dass in einer Reihung der Länge  $n$  die Anzahl der Vergleiche  $n^2$  beträgt. Optimierungen dieses Verfahrens und andere, ähnliche Verfahren ergeben zwar eine leichte Verbesserung des *Zeitbedarfs*, die *Zeitkomplexität* dieser Algorithmen bleibt aber  $O(n^2)$ .

Die Sortierung der Folge (E F A C H B G D) erfolgt in den folgenden Schritten; die benachbarten auszutauschenden Elemente wurden dabei mit einem Doppelpfeil markiert:

<sup>1</sup> auf Deutsch: *Blasensort*

<sup>2</sup> bei aufsteigenden Sortierung

<sup>3</sup> Der geschachtelte generische Parameter `<E extends Comparable<E>>` stellt sicher, dass `compareTo` zwei Objekte vom selben (aktuellen generischen) Typ vergleicht.

<sup>4</sup> mit den Laufvariablen `i` und `j`

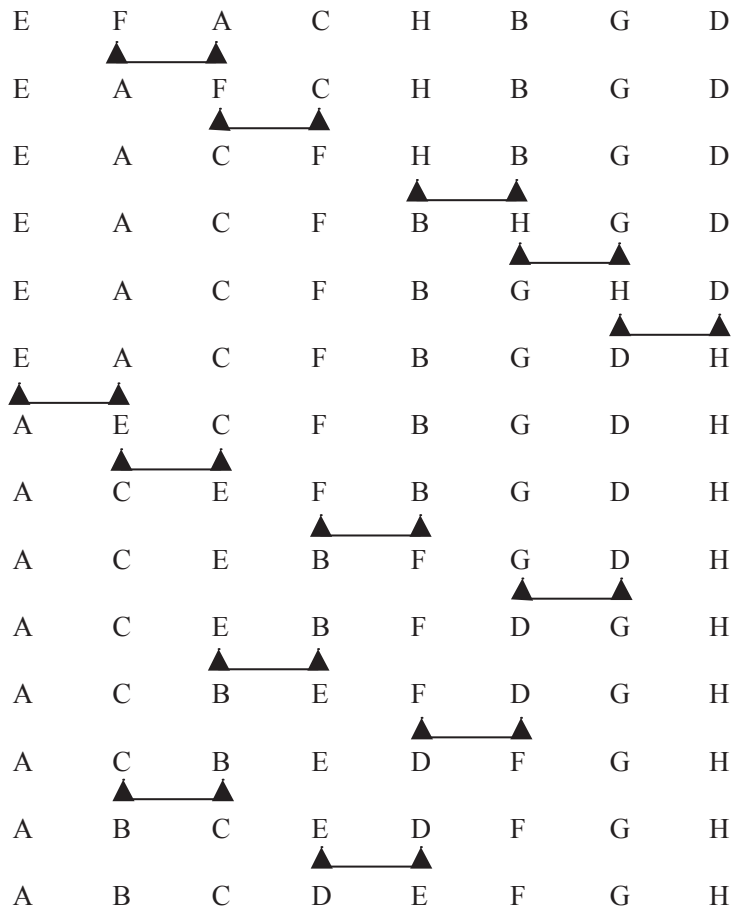


Abbildung 5.1: Bubble sort

*Bubble sort* kann etwas verbessert werden, indem die Reihung durch die geschachtelte Schleife nicht immer unbedingt  $n^2$  mal durchlaufen wird, sondern die äußere Schleife abgebrochen wird, wenn in der inneren Schleife kein Austausch mehr stattgefunden hat.

Eine weitere Verbesserung des Verfahrens ist *shaker sort*. Hier wird die Durchlaufrichtung abwechselnd geändert: Nachdem eine „leichte Blase“ aufwärts gestiegen ist, steigt eine „schwere Blase“ nach unten:

```
public void sort(E[] sammlung) { // 1
    boolean austausch;
```

<sup>1</sup> Wir gehen hier und im Weiteren davon aus, dass sich die Methode `sort` (wie oben) in einer generischen Klasse nach dem Entwurfsmuster *Strategie* befindet.

```

int links = 1; // anfangen beim zweiten Element
int rechts = sammlung.length-1;
int fertig = rechts;
do {
    austausch = false;
    for (int ab = rechts; ab >= links; ab--) // abwärts
        if (sammlung[ab].compareTo(sammlung[ab-1]) < 0) {
            austausch = true; fertig = ab;
            final E temp = sammlung[ab-1];
            sammlung[ab-1]=sammlung[ab]; sammlung[ab]=temp;
        }
    links = fertig + 1;
    for (int auf = links; auf <= rechts; auf++) // aufwärts
        if (sammlung[auf].compareTo(sammlung[auf-1]) < 0) {
            austausch = true; fertig = auf;
            final E temp = sammlung[auf-1];
            sammlung[auf-1] = sammlung[auf]; sammlung[auf] = temp;
        }
    rechts = fertig - 1;
} while (austausch);
}

```

Der *shaker sort* arbeitet also wie *bubble sort* (hier mit vorzeitigem Abbruch, wenn kein Austausch mehr stattgefunden hat), jedoch mit abwechselnder Richtung des Austausches.

**Aufgabe 5.2:** Welche sind „die wichtigsten Operationen“ bei jedem dieser Verfahren? Welchen Einfluss haben die Verbesserungen auf die Zeitkomplexität?

### 5.2.2. Sortieren durch Einfügen

Der Sortieralgorithmus *straight insertion*<sup>1</sup> hat dieselbe Komplexität wie *bubble sort*, wenn auch in manchen Situationen sein Zeitbedarf etwas niedriger als der von *bubble sort* liegt. Er kann verbal folgendermaßen formuliert werden:

- Lass den index die Werte 0 bis `sammlung.length-1` durchlaufen und mache für jeden Wert von index Folgendes:
  1. Fertige eine Kopie `elementZumEinfuegen` vom Objekt `sammlung[index]` an.
  2. Verschiebe alle Objekte, die links von `sammlung[index]` liegen und einen größeren Schlüssel haben als `elementZumEinfuegen` (die Kopie von `sammlung[index]`) um eine Position nach rechts.
  3. Kopiere `elementZumEinfuegen` an die durch den Schritt 2. freigewordene Stelle in der Reihung `sammlung`.

Die folgende Java-Prozedur implementiert dieses Verfahren:

---

<sup>1</sup> auf Deutsch: *direktes Einfügen*

```

public void sort(E[] sammlung) {
    for (int index = 1; index < sammlung.length; index++) { // anfangen beim 2. Element
        final E elementZumEinfuegen = sammlung[index];
        int einfuegestelle = index;
        while (einfuegestelle > 0 &&
            elementZumEinfuegen.compareTo(sammlung[einfuegestelle-1]) < 0) {
            sammlung[einfuegestelle] = sammlung[einfuegestelle-1];
            // nach oben schieben
            einfuegestelle--;
        }; // Einfuegestelle gefunden: entweder weil einfuegestelle = 0, oder
        // weil !elementZumEinfuegen.compareTo(sammlung[einfuegestelle - 1]) < 0
        sammlung[einfuegestelle] = elementZumEinfuegen;
    }
}

```

Die Idee des direkten Einfügens ist also: Das `index`-te Element (von der zweiten Stelle an bis nach `sammlung.length-1`) wird in die schon sortierte Sequenz 1 bis `index-1` eingefügt. Die Einfügestelle wird in der Sequenz 1 bis `index-1` gesucht, und dabei wird jedes Element nach hinten geschoben.

Bei der Sortierung der Folge (E F A C H B G D) wurde das einzufügende Element mit Pfeil markiert; die eingerahmte Teilfolge zwischen dem einzufügenden Element und der Einfügestelle wird dabei nach rechts verschoben:

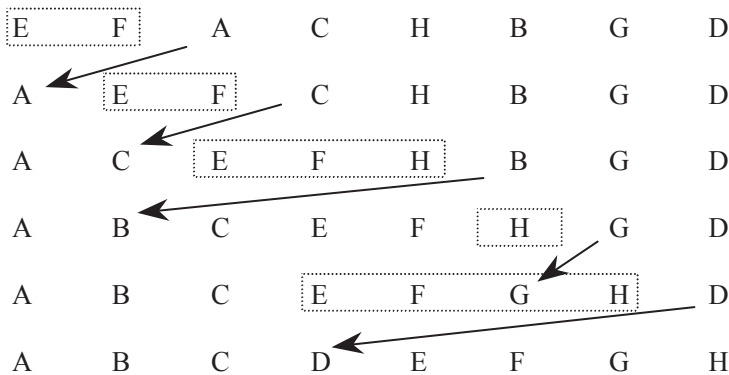


Abbildung 5.2: Straight insertion

**Aufgabe 5.3:** Verbessern Sie die Prozedur *straight insertion* um das *binäre Suchen*<sup>1</sup>, in dem die Suche nach der Einfügestelle in der Sequenz nicht sequenziell erfolgt, sondern nach der Strategie *teile und herrsche*.

<sup>1</sup> s. Kapitel 4.3.3. (auf Seite 69)

### 5.2.3. Sortieren durch Auswählen

Das folgende Verfahren zum Sortieren einer Reihung wird *straight selection*<sup>1</sup> genannt:

- Finde die Komponente mit dem *kleinsten* Schlüssel und vertausche sie mit der *ersten* Komponente der Reihung *sammlung*.
- Finde anschließend die Komponente mit dem *zweitkleinsten* Schlüssel und vertausche sie mit der *zweiten* Komponente von *sammlung*.
- Finde anschließend die Komponente mit dem *drittkleinsten* Schlüssel und vertausche sie mit der *dritten* Komponente von *sammlung*.
- ...
- Finde anschließend die Komponente mit dem *i-kleinsten* Schlüssel und vertausche sie mit der *i-ten* Komponente von *sammlung*.
- ...
- Finde schließlich die Komponente mit dem *zweitgrößten* Schlüssel und vertausche sie mit der *vorletzten* Komponente von *sammlung*.

Im Algorithmus *straight selection* wird also in jedem Schritt das kleinste Element gefunden und mit dem ersten unsortierten Element ausgetauscht. In der schrittweisen Darstellung der Veränderungen unserer Folge haben wir mit dem linken Pfeil das linkste unsortierte Element, mit dem rechten das ausgewählte (kleinste) Element markiert:

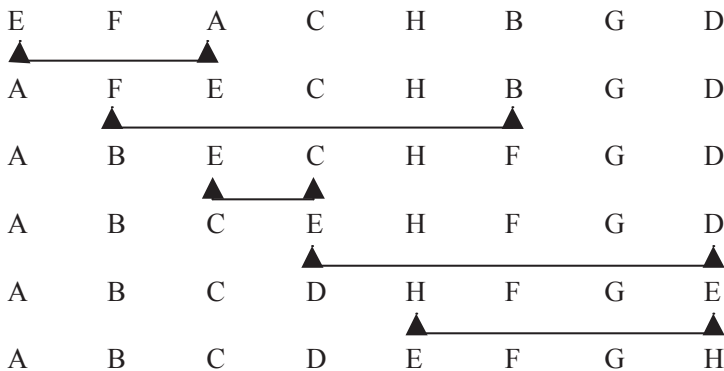


Abbildung 5.3: Straight selection

Das Verfahren kann in Java folgendermaßen formuliert werden:

```
public void sort(E[] sammlung) {
    for (int index = 0; index < sammlung.length-1; index++) {
        // bis zum vorletzten Element
        int austauschstelle = index;
        E elementZumAustauschen = sammlung[index];
```

<sup>1</sup> auf Deutsch: *direktes Auswählen*



```

for (int kleinstes = index + 1; kleinstes < sammlung.length;
    kleinstes++) {
    if (sammlung[kleinstes].compareTo(elementZumAustauschen) < 0) {
        austauschstelle = kleinstes; // index merken
        elementZumAustauschen = sammlung[kleinstes];
    }; // Austauschstelle gefunden
}
if (austauschstelle != index) { // Austausch nötig
    sammlung[austauschstelle] = sammlung[index];
    sammlung[index] = elementZumAustauschen;
}
}
}

```

Die Idee des direkten Auswählens ist also, das kleinste Element mit dem untersten unsortierten Element auszutauschen.

### 5.3. Unterquadratische Verfahren

Die *unterquadratischen Sortierverfahren* ermöglichen eine bessere Zeitkomplexität als  $O(n^2)$ .

Einer der am häufigsten verwendeten Algorithmen ist der *Shell sort*<sup>1</sup>. Er ist eine Verbesserung des Algorithmus *straight insertion*. Dort wandern nämlich die Elemente in Einzelschritten auf ihren Platz: Nach dem Finden des kleinsten Elements werden die dazwischenliegenden einzeln hochgeschoben und nur das kleinste „springt“. Die meisten (d.h.  $n$ ) Elemente werden von ihrem ursprünglichen Platz in durchschnittlich  $n/3$  Schritten zu ihrem endgültigen Platz geschoben.

Beim Shell-Sort führen wir abnehmende *Schrittweiten*  $k_1, k_2, \dots, k_t$  ein, wobei die letzte Schrittweite immer  $k_t = 1$  ist. Wir führen nacheinander  $t$  Schritte durch; im  $m$ -ten Schritt springen die Elemente in Richtung ihres zukünftigen Platzes um jeweils  $k_m$  Stellen. Im ersten Schritt werden diejenigen Elemente untereinander sortiert, die  $k_1$  Stellen voneinander entfernt sind; dann diejenigen, die eine Entfernung  $k_2$  voneinander haben usw. Das Effekt dieser Vorgehensweise ist es, dass die Elemente im ersten Durchgang nicht um einen, sondern um  $k_1$  Stellen zu ihrem Platz „springen“.

Die letzte Schrittweite  $k_t$  ist 1, d.h. zum Schluss wird ein ganz normaler Sortiervorgang *straight insertion* durchgeführt. Dies garantiert, dass am Ende die Reihung sortiert ist. Der Algorithmus braucht jedoch kaum noch etwas zu tun, da die vorherigen Schritte die Reihung schon fast vollständig sortiert haben.

Die folgende Methode braucht als Parameter die Schrittweiten, daher passt sie nicht in die Signatur des Entwurfsmusters. Deswegen implementieren wir sie unabhängig davon als generische Methode:

<sup>1</sup> benannt nach D. L. Shell, s. [Sh]

```

public static <E extends Comparable<E>> void sort(E[] sammlung,
    final int[] schrittweiten) { // requires schrittweiten.length-1 == 1
    for (int schrittweite : schrittweiten) {
        // straight insertion mit schrittweite
        for (int index = schrittweite; index < sammlung.length; index++){
            E elementZumEinfuegen = sammlung[index];
            int einfuegestelle = index;
            while (einfuegestelle - schrittweite >= 0 &&
                elementZumEinfuegen.compareTo(sammlung[einfuegestelle-schrittweite]) <
0) {
                sammlung[einfuegestelle] = sammlung[einfuegestelle - schrittweite];
                einfuegestelle -= schrittweite; // Sprung um schrittweite
            }
            sammlung[einfuegestelle] = elementZumEinfuegen;
        }
    }
}

```

Die Veränderungen der Testfolge (mit Schrittweiten 7, 3, 1) sind:

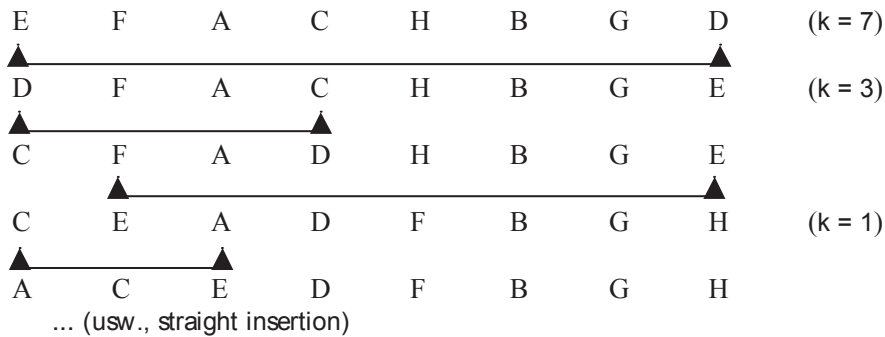


Abbildung 5.4: Shell sort

Der Vorteil des Verfahrens ist bei kurzen Folgen wie der obigen nur oberflächlich wahrnehmbar: Durch die größeren Schrittweiten am Anfang machen die Elemente größere Sprünge zu ihrem endgültigen Platz hin. Somit wird die Folge bis zum letzten Schritt „fast sortiert“ und die Sortierung mit Schrittweite 1 (*straight insertion*) ist weniger aufwändig als ohne die Vorsortierung.

Durch die geeignete Wahl der Schrittweiten  $k_1, k_2, \dots, k_t$  kann der Sortieraufwand deutlich reduziert werden. Für die Schrittweiten (1, 3, 7, 15, 31, ...) wurde nachgewiesen<sup>1</sup>, dass die Zeitkomplexität des Algorithmus

$$O(n^{1,2}) = O(n^{6/5}) = O(n\sqrt[5]{n})$$

<sup>1</sup> z.B. in [Kn]

beträgt. Hier ist  $k_{m+1} = 2k_m + 1$  mit einer Anzahl der Schrittweiten von  $t = \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ , wo  $n$  die Länge der zu sortierenden Reihung ist und die Zeichen  $\lfloor$  und  $\rfloor$  das Abschneiden von Dezimalstellen (die kleinste nicht größere ganze Zahl) bedeuten.

Eine noch bessere Komplexität ergibt die Schrittweitenfolge (1, 4, 13, 40, 121, ...) mit der Formel  $k_{m+1} = 3k_m + 1$  und einer Länge von  $t = \lfloor \log_3 n \rfloor - 1$ .

Es kann mathematisch bewiesen werden, dass es kein Sortierv Verfahren mit linearer Zeitkomplexität  $O(n)$  gibt, wenn auch sie mit besseren Schrittweitenfolgen beliebig angenähert werden kann. Dies bedeutet, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Schrittweitenfolge (wenn auch sehr schwer) gefunden werden kann, mit der die Zeitkomplexität des Sortierens  $O(n^{1+\varepsilon})$  beträgt.

**Aufgabe 5.4:** Führen Sie die Prozedur `shellSort` aus, nachdem Sie sie durch Ausgaben über `Console.println` ergänzt haben. Sie können damit ihre Arbeitsweise verstehen. Führen Sie den Algorithmus mit 25 Zahlen auf Papier durch und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Ausgabe.

## 5.4. Rekursive Verfahren

Die Zeitkomplexität  $O(n^2)$  ist für große Datenmengen (d.h. für großes  $n$ ) schlechter als  $O(n^{1.2})$ ; für kleine Datenmengen kann allerdings ein einfacheres Verfahren geeigneter sein. Noch „besser“ sind die *logarithmischen Verfahren*.

### 5.4.1. Quicksort

Das bekannteste von ihnen ist das rekursive *quick sort*. Er arbeitet nach der Strategie *teile und herrsche*, wie wir sie im Kapitel 2.1.6. (auf Seite 13) kennen gelernt haben: Die Reihung wird in eine linke und eine rechte Hälfte geteilt. Zuerst werden durch Austausch alle Elemente in der linken Hälfte kleiner (oder gleich) als alle Elemente in der rechten Hälfte. Anschließend werden die beiden Hälften auf dieselbe Weise sortiert, die dann zusammen eine sortierte Sequenz ergeben.

Es folgt eine in einigen Details noch nicht ganz präzise Darstellung dieses Algorithmus in natürlicher Sprache:

1. Wenn die zu sortierende Reihung `sammlung` die Länge 0 oder die Länge 1 hat, dann tue nichts (denn dann ist `sammlung` schon sortiert).
2. Wenn aber `sammlung.length` größer oder gleich 2 ist, dann tue Folgendes:
  - 2.1. Wähle irgendein Element mit Index `ausgewaehlt` der Reihung aus (z.B. `sammlung[0]` mit `ausgewaehlt = 0`, oder `sammlung[sammlung.length-1]` mit `ausgewaehlt = sammlung.length-1`, oder ein anderes Element, am besten irgendwo in der Mitte).
  - 2.2. Bringe alle Komponenten der Reihung `sammlung`, deren Schlüssel kleiner sind als der von `sammlung[mitte]`, in den „linken Teil“ der Reihung `sammlung`, und bringe alle Elemente von `sammlung`, deren Schlüssel größer sind als der von `sammlung[mitte]`, in den „rechten Teil“ der Reihung `sammlung`. Elemente mit dem gleichen Schlüssel können

wahlweise dem linken Teil oder dem rechten Teil der Reihung `sammlung` zugeschlagen werden (auch „teils teils“).

2.3. Sortiere den „linken Teil“ und den „rechten Teil“ nach dem hier beschriebenen Verfahren.

**Achtung:** Im Allgemeinen wird der linke und der rechte Teil nicht gleich groß sein (auch nicht „ungefähr gleich groß“). Denn in dem Moment, wo man „irgendeine Komponente `sammlung[mitte]`“ wählt, weiß man nicht, wie viele Elemente der Reihung `sammlung` größere Schlüssel haben als `sammlung[mitte]` und wie viele Elemente kleinere Schlüssel haben. Wenn man Pech hat, dann hat z.B. der „linke Teil“ ein Element, und der „rechte Teil“ umfasst alle übrigen Komponenten der Reihung `sammlung` oder umgekehrt: Der „rechte Teil“ hat die Länge 1, und der „linke Teil“ umfasst alle übrigen Komponenten der Reihung `sammlung`:

```
class QuickSort<E extends Comparable<E>> implements Sort<E> {
    private void sort(E[] sammlung, int links, int rechts) {
        int auf = links; // linke Grenze
        int ab = rechts; // rechte Grenze
        final E ausgewaehlt = sammlung[(links + rechts) / 2];
            // ausgewähltes Element
        do {
            while (sammlung[auf].compareTo(ausgewaehlt) < 0)
                auf ++; // suchen größeres Element von links an
            while (ausgewaehlt.compareTo(sammlung[ab]) < 0)
                ab --; // suchen kleineres Element von rechts an
            if (auf <= ab) { // austauschen auf und ab:
                final E temp = sammlung[auf];
                sammlung[auf] = sammlung[ab];
                sammlung[ab] = temp;
                auf ++; // linke und rechte Grenze verschieben:
                ab --;
            };
        } while (auf <= ab); // Überschneidung
        if (links < ab)
            sort(sammlung, links, ab); // linke Hälfte sortieren
        if (auf < rechts)
            sort(sammlung, auf, rechts); // rechte Hälfte sortieren
    }

    public void sort(E[] sammlung) {
        sort(sammlung, 0, sammlung.length-1); // die ganze Reihung sortieren
    }
}
```

In unserer Testfolge ist die Trennung in zwei Teilfolgen (wobei die Elemente der linken kleiner sind als die Elemente der rechten) ist in der Abbildung 5.5 durch Einrahmung dargestellt.

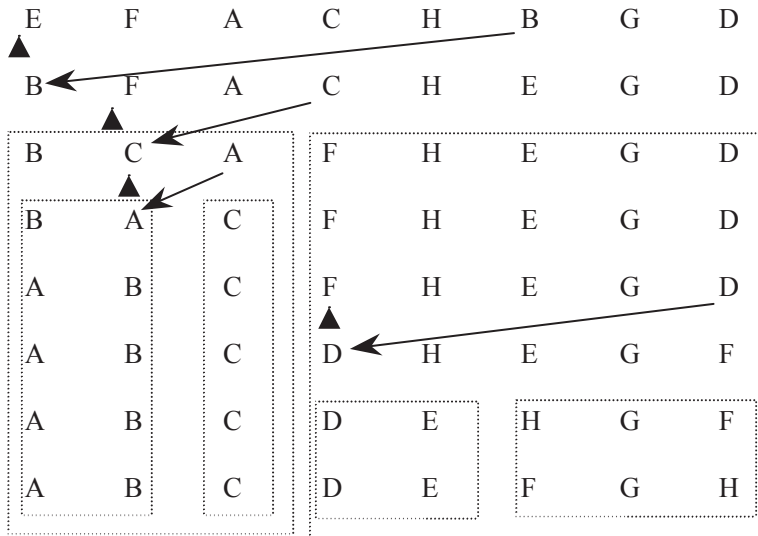


Abbildung 5.5: Quick sort

**Aufgabe 5.5:** Geben Sie eine Reihung der Länge 8 an, welche „besonders *günstige* Daten“ für quickSort enthält. Welchen Zeitbedarf hat quickSort in einem solchen günstigsten Fall?

**Aufgabe 5.6:** Geben Sie eine Reihung der Länge 8 an, welche „besonders *ungünstige* Daten“ für quickSort enthält. Welchen Zeitbedarf hat quickSort in einem solchen ungünstigsten Fall?

Glücklicherweise ist der durchschnittliche Zeitbedarf (die Zeitkomplexität) von quickSort nicht das arithmetische Mittel aus dem günstigsten und dem ungünstigsten Fall. „Viele Reihungen ähneln einer günstigsten Reihung und nur wenige Reihungen ähneln einer ungünstigsten Reihung“. Für die Zahl der Schlüsselvergleiche, die durchgeführt werden müssen, gilt:

Die Prozedur quickSort muss im Durchschnitt  $2n \log_2 n$  Vergleiche (Aufrufe von compareTo) durchführen<sup>1</sup>. Ihre Zeitkomplexität ist also  $O(n \log n)$ . Darüber hinaus ist der *schlimmste Fall* („worst case“) problematisch: Eine schon sortierte (oder umgekehrt sortierte) Reihung wird mit einer Zeitkomplexität von  $O(n^2)$  sortiert.

Die Prozedur quickSort ruft sich rekursiv auf. Bei jedem Aufruf muss auf dem Stapel (stack) eine bestimmte Anzahl von Speicherplätzen reserviert werden. Wie viele Speicherplätze das sind, hängt von der Umgebung (vom Compiler, von der Hardware, vom Betriebssystem usw.) ab. Wir wollen den für einen Aufruf benötigten Speicherplatz *eine QUICK-Speichereinheit* nennen. In einer bestimmten Umgebung könnte eine solche QUICK-

<sup>1</sup> s. z.B. [Sed]

Speichereinheit 100 Bytes umfassen, in einer anderen Umgebung 598 Bytes usw. Aber bei jedem Aufruf von `quickSort` muss ein gleich großer Speicherplatz, nämlich eine QUICK-Speichereinheit, auf dem Stapel reserviert werden.

**Aufgabe 5.7:** Wie groß muss der Stapel für die Ausführung von `quickSort` im günstigsten bzw. im ungünstigsten Fall bzw. durchschnittlich sein? Geben Sie die Größe des Stapels in QUICK-Speichereinheiten an.

#### 5.4.2. Sortieren mit Mischen

Die im Kapitel 5.1.3. (auf Seite 85) erwähnte Methode `Array.sort` verwendet den Algorithmus *Mergesort*. Er teilt die Daten (ähnlich wie Quicksort im vorigen Kapitel) auch in zwei Hälften, sortiert sie einzeln rekursiv und mischt die zwei sortierten Hälften nach dem Algorithmus *merge* im Kapitel 5.6.1. (auf Seite 104). Er hat auch eine Zeitkomplexität von  $O(n \log n)$ , jedoch eine schlechtere Speicherkomplexität: Er sortiert nicht „vor Ort“ (innerhalb der Reihung) sondern braucht zusätzlichen Speicherplatz für das Ergebnis. Wir programmieren sie als generische Funktion mit Parameter- und Ergebnistyp `java.util.List`:

```
public static <E extends Comparable<E>> List<E> mergeSort(List<E> sammlung) {
    if (sammlung.size() <= 1)
        return sammlung;
    else {
        int länge = sammlung.size();
        List<E> links = mergeSort(sammlung.subList(0, länge/2));
        List<E> rechts = mergeSort(sammlung.subList(länge/2, länge)); // 1
        if (links.size() == 0)
            return rechts;
        else if (rechts.size() == 0)
            return links;
        else { // ensures merge's Vorbedingung
            List<E> ergebnis = new Vector<E>(); // hier wird zusätzlicher Platz verbraucht2
            merge(ergebnis, links.iterator(), rechts.iterator()); // s. Kapitel 5.6.1.
            return ergebnis;
        }
    }
}
```

## 5.5. Logarithmische Verfahren

*Heap sort*<sup>3</sup> ist vielleicht der eleganteste Sortieralgorithmus; er verbindet die konstante Speicherkomplexität mit logarithmischer Zeitkomplexität.

<sup>1</sup> `subList` enthält das Element mit dem Index des zweiten Parameters nicht.

<sup>2</sup> In einer Version mit komplexerer Signatur (mit einem zusätzlichen Ausgabeparameter, wie bei *merge*) wird die Erzeugung des Ausgabeobjekts dem Benutzer überlassen.

<sup>3</sup> s. [Wil]

### 5.5.1. Halde

Das Wort *Halde*<sup>1</sup> hat zwei *verschiedene Bedeutungen*. Zum einen verwendet man für die Ausführung von Java-Programmen<sup>2</sup> üblicherweise einen *Stapel* (*stack*) und eine *Halde* (*heap*). Auf dem Stapel werden die „kurzlebigen“ lokalen Variablen von Funktionen und Prozeduren angelegt. Auf der Halde werden die „dynamischen Objekte“ angelegt, die der Programmierer mit dem Operator **new** erzeugt. Hier ist eine Halde also ein bestimmter Bereich im Speicher einer Maschine.

Zum anderen ist eine *Halde* eine bestimmte *Datenstruktur*, die in verschiedenen Algorithmen verwendet wird, insbesondere beim „Sortieren auf einer Halde“. Diese Datenstruktur wird hier näher erläutert, und in diesem Kapitel verstehen wir unter einer Halde immer eine solche Datenstruktur (wenn nicht ausdrücklich anders gesagt).

Diese Datenstruktur wird in einer Reihung abgelegt. Wir nennen sie *reihung*. Die Komponente `reihung[0]` bleibt unbenutzt. Die Komponente `reihung[1]` enthält die *Spitze* der Halde. Die Komponenten `reihung[2]` und `reihung[3]` enthalten die *Nachfolger* von `reihung[1]`; `reihung[4]` und `reihung[5]` sind die *Nachfolger* von `reihung[2]` usw. Allgemein gilt:

1. Die *Nachfolger* von `reihung[i]` sind `reihung[2*i]` und `reihung[2*i+1]`.
2. Der *Vorgänger* von `reihung[i]` ist `reihung[i/2]`.<sup>3</sup>

Man kann in der *reihung* also „ganz leicht“ (mit ein bisschen Indexrechnung) von einer Komponente `reihung[i]` zu ihrem Vorgänger bzw. zu ihren Nachfolgern kommen, obwohl die Komponenten „unverzeigert nebeneinander“ stehen.

**1. Bemerkung:** Unter dem *Vorgänger* von `reihung[i]` verstehen wir in einer Halde *nicht* die Komponente `reihung[i-1]`, sondern die Komponente `reihung[i/2]`, und die beiden Komponenten `reihung[2i]` und `reihung[2i+1]` sind die *Nachfolger* von `reihung[i]`. Das Element `reihung[i+1]` bezeichnen wir *nicht* als Nachfolger von `reihung[i]` (sondern als „die Komponente, welche in der *reihung* unmittelbar rechts neben der Komponenten `reihung[i]` steht“).

**2. Bemerkung:** Eine Halde kann auch als ein Binärbaum angesehen werden, der auf besondere Art in einer Reihung gespeichert wurde. Wir werden diese Sicht im Kapitel 6.2.1. (auf Seite 117) untersuchen.

---

<sup>1</sup> auf Englisch: *heap*

<sup>2</sup> auch bei anderen Programmiersprachen wie C, Pascal oder Ada, nicht aber bei Cobol und (der Originalversion von) Fortran

<sup>3</sup> Der Operator `/` bezeichnet die Ganzzahldivision, d.h.  $1/2=0$ ,  $2/2=1$ ,  $3/2=1$ ,  $4/2=2$ , usw.

### 5.5.2. Die Haldenbedingung

Eine Halde ist eine Reihung `reihung`, bei der keine Komponente `reihung[i]` einen größeren<sup>1</sup> Schlüssel hat als ihr Vorgänger `reihung[i/2]`. Wir sagen, dass alle Elemente einer Halde erfüllen die *Haldenbedingung*.

Die folgende Reihung `reihung` ist eine Halde:

|                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| <code>reihung</code> | X | U | S | M | N | N | D | L | L | A  | B  | B  | A  |
| Indices:             | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Tabelle 5.6: Halde

**Aufgabe 5.8:** Warum ist die folgende Reihung keine Halde?

|                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| <code>reihung</code> | M | K | J | J | K | H | I | F | G | G  | F  | G  | I  |
| Indices:             | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Tabelle 5.7: Keine Halde

**Aufgabe 5.9:** Geben Sie eine Halde mit sieben Komponenten an, die die Schlüssel A, B, C, D, E, F und G haben.

### 5.5.3. Senken

Die folgende Hilfsprozedur `senken` dient dazu, eine „fast-Halde“, die nur an der Spitze „gestört“ ist, zu reparieren und in eine richtige Halde zu verwandeln. Die Prozedur heißt `senken`, weil sie das „falsche Spitzenelement“ solange in der Halde „nach unten sickern“ lässt, bis er an einer passenden Stelle steht. Als Beispiel betrachten wir die folgende Reihung:

|                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| <code>reihung</code> | B | H | G | F | E | E | C | A | C | A  | D  | D  | B  |
| Indices:             | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Tabelle 5.8: Eine „an der Spitze gestörte“ Halde

Diese Reihung enthält fast eine Halde. Nur der Schlüssel der Spitze (B) ist *kleiner* als die Schlüssel seiner Nachfolger (H und G). Wie können wir diese Störung reparieren? Hier ein Algorithmus zur Lösung dieses Problems:

1. Wir fertigen eine Kopie `zuSenken` der Spitze an.
2. Dann ersetzen wir, mit der Spitze beginnend, jeweils eine Komponente durch seinen größeren Nachfolger (und ersetzen dann diesen Nachfolger durch seinen größeren Nachfolger usw.), bis wir eine Komponente `nachfolger` „nach oben kopiert“ haben,

<sup>1</sup> Es gibt natürlich auch „umgekehrte Halden“, bei denen keine Komponente einen kleineren Schlüssel hat als ihr Vorgänger.



dessen Nachfolgerkomponenten Schlüssel haben, die kleiner oder gleich dem Schlüssel von `zuSenken` sind (oder bis `nachfolger` eine Komponente ohne Nachfolger ist).

3. Wir kopieren `zuSenken` (die Kopie der ursprünglichen Spitze) nach `nachfolger`.

Nach Anwendung dieses Algorithmus erfüllt die Reihung die Haldenbedingung und sieht so aus:

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| reihung  | H | F | G | C | E | E | C | A | B | A  | D  | D  | B  |
| Indices: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Tabelle 5.9: „Reparierte“ Halde

**Aufgabe 5.10:** Wenden Sie diesen Algorithmus auf die folgenden Reihungen an:

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | Y | U | A | B | A | C |
|   |   |   |   |   |   |   |

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | K | M | D | B | B | C |
|   |   |   |   |   |   |   |

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | B | B | B | B | B |
|   |   |   |   |   |   |   |

#### 5.5.4. Zwei Phasen des Heap Sorts

Der Algorithmus „Sortieren auf einer Halde“ besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten:

1. Schritt: Man überführt die zu sortierende Reihung in eine Halde (indem man gewisse Elemente der Reihung umordnet)
2. Schritt: Man überführt die Halde in eine sortierte Reihung (indem man gewisse Elemente der Halde umordnet).

Ein Algorithmus für den 1. Schritt:

Man geht von rechts nach links durch die `reihung` und macht jedes Element `reihung[index]` zur Spitze einer „kleinen Halde“, indem man `senken(reihung[index])` aufruft. Wenn man beim Element `reihung[1]` angelangt ist, dann ist die ganze `reihung` eine Halde.

Ein Algorithmus für den 2. Schritt:

2.1. Lasse einen `index` die Werte `n` bis `2` durchlaufen und mache für jedes `index` Folgendes:

2.1.1. Vertausche `reihung[1]` mit `reihung[index]`

2.1.2. Wende die Prozedur `senken` an auf die Sequenz

`reihung[1] ... reihung[index - 1]`

**Aufgabe 5.11:** Beantworten Sie folgende Fragen: Welche Fälle sind für die Prozedur `senken` besonders günstig? Welche sind besonders ungünstig? Welchen Zeitbedarf hat die Prozedur

senken im günstigsten und im ungünstigsten Fall? Welchen Zeitbedarf hat der oben beschriebene Algorithmus, der eine Reihung in eine Halde umwandelt („1. Schritt“), im ungünstigsten Fall? Welchen Zeitbedarf hat der oben beschriebene Algorithmus, der eine Halde in eine sortierte Reihung umwandelt („2. Schritt“), im ungünstigsten Fall? Welchen Zeitbedarf hat die Prozedur `heapSort` im ungünstigsten Fall?

### 5.5.5. Sortieren auf der Halde

Die Idee des Sortierens ist also, innerhalb der Reihung eine Halde zu bilden. Der Index 1 repräsentiert die Spitze der Halde. Für jeden Eintrag mit `index` befindet sich der linke Nachfolger am Index  $2 \cdot \text{index}$  und der rechte Nachfolger am Index  $2 \cdot \text{index} + 1$  – falls sich diese noch in der Reihung befinden. Das größte Element steht an der Spitze der Halde (d.h. am Index 1), und für jeden Eintrag sind beide Nachfolger kleiner (oder gleich).

In der ersten Phase des Sortieralgorithmus wird in der Reihung zuerst eine solche *Halde* aufgebaut. Hierzu wird dafür gesorgt, dass jede Komponente der Reihung die Haldenbedingung erfüllt, d.h. keine der beiden Nachfolger (falls vorhanden) darf größer sein. Für die hintere Hälfte der Reihung (d.h. für die Komponenten mit den Indizes `reihung.length/2` bis `reihung.length-1`) ist dies von vornherein gegeben, da sie keine Nachfolger haben. So wird von der Mitte an nach vorne bis zum ersten Eintrag Schritt für Schritt jedes Element *gesenkt*. Schließlich entsteht in der ganzen Reihung eine Halde: Ihr größtes Element befindet sich an der Spitze, d.h. am Index 1.

In der zweiten Phase wird dieses größte Element mit dem hintersten Element ausgetauscht, es kommt also auf seinen endgültigen Platz. Die Halde wird hinten um eine Stelle verkürzt und das neu auf die Spitze getauschte Element wird so weit *gesenkt*, dass die Haldenbedingung wieder erfüllt wird. Das nächstgrößte Element gerät dadurch auf die Spitze, das wieder nach hinten getauscht werden kann. Am Ende der zweiten Phase ist die Reihung sortiert.

In Java kann der Algorithmus folgendermaßen formuliert werden:

```
public class HeapSort<E extends Comparable<E>> implements Sort<E> {
    /* die Sequenz innerhalb von reihung zwischen a und b erfüllt die
       Haldenbedingung, wenn für jedes i mit  $2 \cdot i + 1 \leq b$  gilt
       (sofern  $2 \cdot i$  und  $2 \cdot i + 1 < \text{reihung.length} - 1$ ):
       reihung[i] > reihung[2*i] && reihung[i] > reihung[2*i+1] */
    private void senken(E[] reihung, int links, int rechts) {
        /* Die Halde zwischen links und rechts wird durch das Senken
           des Elements reihung[links - 1] nach unten erweitert:
           Die Elemente zwischen links - 1 und rechts bilden eine Halde */
        int index = links - 1; // linke Grenze der neuen Halde
        int nachfolger = 2 * index; // linker Nachfolger
        final E zuSenken = reihung[index];
        while (true) { // zwei Abbruchstellen
            if (nachfolger > rechts) break; // weil kein Nachfolger
            if (nachfolger < rechts &&
```

```

        reihung[nachfolger].compareTo(reihung[nachfolger + 1]) < 0)
        // kleineren nachfolger oder nachfolger + 1 auswählen
        nachfolger++;
    if (reihung[nachfolger].compareTo(zuSenken) < 0) break;
    // weil Platz gefunden
    reihung[index] = reihung[nachfolger]; // hochrücken
    index = nachfolger; // nach unten gehen
    nachfolger = 2 * index; // linker Nachfolger, wenn existiert
};
reihung[index] = zuSenken; // Element einfügen
}
public void sort(E[] reihung) { // reihung[0] ungenutzt
    /* Halde aufbauen; die obere Hälfte zwischen reihung.length/2+1 und
       reihung.length-1 erfüllt die Haldenbedingung immer: */
    int rechts = reihung.length-1;
    for (int links = rechts / 2 + 1; links > 1; links--)
        // untere Hälfte einzeln hinzufügen
        senken(reihung, links, rechts);
    // Elemente zwischen 1 und reihung.length-1 erfüllen die Bedingung
    // Halde wird abgebaut, d.h. reihung wird sortiert:
    final int links = 1; // reihung[0] ungenutzt
    for (rechts = reihung.length-1; rechts > links; rechts--) {
        // austauschen der äußeren Elemente:
        final E groesstesElement = reihung[links]; // Spitze
        reihung[links] = reihung[rechts];
        // hinteres Element nach vorne eintauschen
        reihung[rechts] = groesstesElement; // Element nach hinten
        senken(reihung, links + 1, rechts - 1); // Element senken
    }
}
}

```

In unserer Testfolge wird die Sequenz, die eine Halde bildet, eingerahmt. Die Indizierung ist von 1 bis 8; die (in der zweiten Phase nach dem Austausch) zu senkenden Elemente sind markiert:

**Aufgabe 5.12:** Ergänzen Sie das obige Programm durch Ausgaben (`Console.println`), damit Sie seine Arbeitsweise verstehen können. Führen Sie die Algorithmen mit 20 Zahlen auf Papier durch und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Ausgabe.

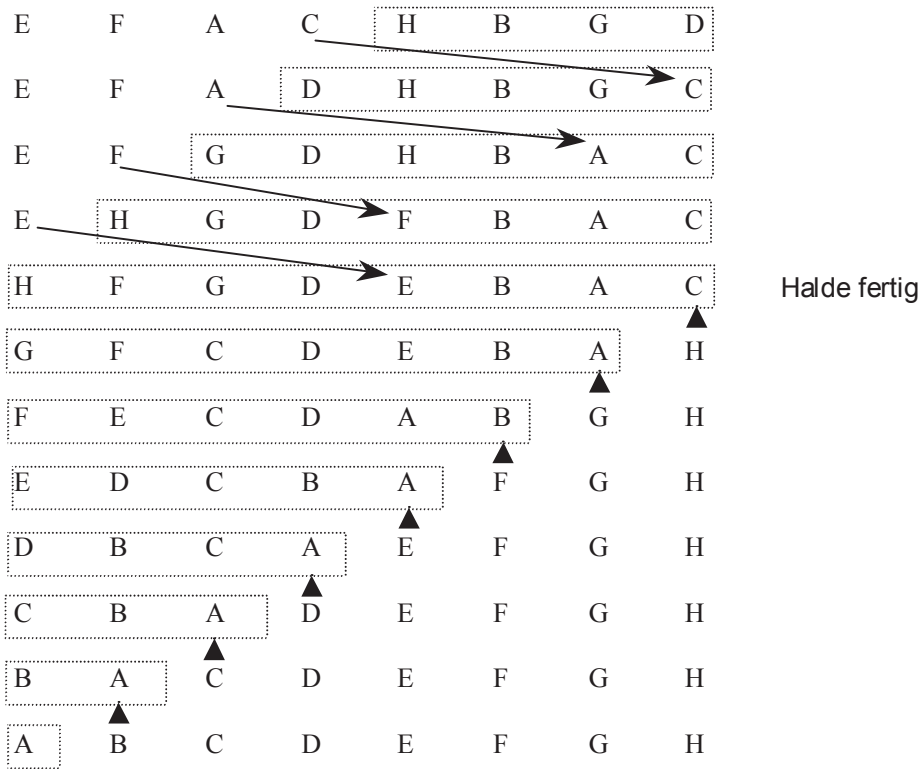


Abbildung 5.10: Heap sort

## 5.6. Externe Sortiervverfahren

*Externe Sortiervverfahren* müssen verwendet werden, wenn interne nicht ausreichen: wenn die Menge der Daten größer ist als das, was in den Hauptspeicher passt.

Die einfachste Lösung, wenn man in zwei Phasen sortiert:

1. Zuerst werden die Daten so aufgeteilt, dass jede Portion mit einem internen Verfahren sortiert werden kann. Jede Portion wird für sich sortiert und in als sortierte Sequenz in eine Datei geschrieben.
2. Die sortierten Sequenzen werden parallel eingelesen und *gemischt*<sup>1</sup>.

### 5.6.1. Mischen

Die folgende generische Prozedur implementiert das *Mischen* zweier sortierter Sequenzen (z.B. aus zwei Dateien), die von zwei Iteratoren geliefert werden: Ein Objekt vom Typ ja-

<sup>1</sup> auf Englisch *merge*

`va.util.Iterator<E>` kann jedem Behälterobjekt (wie z.B. eine sequenzielle Datei) zugeordnet werden<sup>1</sup>. Seine Methoden **boolean** `hasNext()` und `E next()` liefern die enthaltenen Elemente (vom Typ `E`) nacheinander. Das Ergebnis (die sortierte Sequenz) wird in ein Parameterobjekt<sup>2</sup> vom Typ `java.util.List` (mit der Methode `add`) geschrieben (z.B. in eine sequenzielle Datei, deren Klasse die Schnittstelle `List<E>` implementiert). Den Aufruf der Methode haben wir schon im Kapitel 5.4.2. (auf Seite 98) illustriert.

Die folgende Methode muss nicht unbedingt mit `java.util.Iterator` und `java.util.List` übersetzt werden. Die Schnittstellen `Iterator` (mit `hasNext` und `next`) sowie `List` (mit `add`) können auch im eigenen Paket definiert und beliebig (z.B. als sequenzielle Dateien) implementiert werden:

```
public static <E extends Comparable<E>> void merge(List<E> ausgabe,
    Iterator<E> eingabel, Iterator<E> eingabe2) {
    // vorsortierte Sequenzen (geliefert von zwei Iteratoren) werden gemischt
    // requires eingabel.hasNext() && eingabe2.hasNext() // d.h. Eingaben sind nicht leer
    E element1 = eingabel.next(), element2 = eingabe2.next(); // erste Elemente
    while (true)
        if (element1.compareTo(element2) < 0) {
            ausgabe.add(element1); // das kleinere Element ausgeben
            if (eingabel.hasNext())
                element1 = eingabel.next(); // ein neues Element einlesen
            else {
                ausgabe.add(element2);
                break;
            }
        } else { // symmetrisch: eingabel.compareTo(eingabe2) >= 0
            ausgabe.add(element2);
            if (eingabe2.hasNext())
                element2 = eingabe2.next();
            else {
                ausgabe.add(element1);
                break;
            }
        } // eine der Eingabesequenzen ist erschöpft, die andere kopieren:
    while (eingabel.hasNext())
        ausgabe.add(eingabel.next());
    while (eingabe2.hasNext())
        ausgabe.add(eingabe2.next());
} // eine der beiden Schleifen ist leer
```

Zwei Sequenzen der Länge  $n$  werden mit Hilfe der obigen Prozedur in *eine* Sequenz der Länge  $2n$  gemischt. Wenn mehrere Eingabesequenzen vorliegen, können sie als *variable*

---

<sup>1</sup> häufig durch die Implementierung der Schnittstelle `Iterable<E>`, die die Funktion `iterator()` enthält; diese liefert ein `Iterator`-Objekt

<sup>2</sup> Wir könnten auch eine Funktion `merge` mit dem Ergebnistyp `Collection<E>` schreiben. Der Vorteil hier, dass der Benutzer die Klasse des Ergebnisobjekts bestimmen kann.

Parameter <sup>1</sup> (...) übergeben werden. Sie werden im Methodenrumpf als Elemente einer Reihung (hier: `eingabe[]`) erreicht:

```
public static <E extends Comparable<E>> void multiMerge(List<E> ausgabe,
    Iterator<E>... eingabe) { // variable Parameter
    // vorsortierte Sequenzen (geliefert von einer Iterator-Reihung) werden gemischt
    E[] elemente = (E[])new Comparable[eingabe.length];
    for (int i = 0; i < elemente.length; i++) // erste Elemente der Eingaben
        elemente[i] = eingabe[i].hasNext() ? eingabe[i].next() : null;
    // null markiert eine erschöpfte Eingabesequenz
    while (true) { // Das kleinste Element wird gesucht. Wenn es keine gibt, ist min=-1
        int min = -1; // markieren: es gibt (noch) kein kleinstes Element
        for (int i = 0; i < elemente.length; i++) // erstes nicht-null-Element suchen
            if (elemente[i] != null) {
                min = i; // gefundenes Element
                break; // for-Schleife wird abgebrochen
            }
        if (min == -1) break; // alle Elemente sind null; while-Schleife wird abgebrochen
        for (int i = min + 1; i < elemente.length; i++) {
            if (elemente[i] != null && elemente[i].compareTo(elemente[min]) < 0)
                min = i; // neues kleinstes Element
        }
        ausgabe.add(elemente[min]); // kleinstes Element ausgeben
        elemente[min] = eingabe[min].hasNext() ? eingabe[min].next() : null;
    }
}
```

Die variable Anzahl von Parametern (gekennzeichnet mit ...) erlauben, dass diese Prozedur mit einer beliebigen Anzahl (null, eins, zwei, usw.) von Parametern oder mit einem Reihungsparameter aufgerufen werden kann:

```
Vector<Character> eingabe1, eingabe2, eingabe3, ausgabe;
... // Die Vector-Objekte müssen erzeugt und mit char-Werten gefüllt werden.
multiMerge(ausgabe); // ohne Eingabe bleibt die Ausgabe leer
multiMerge(ausgabe, eingabe1.iterator()); // Eingabe wird in die Ausgabe kopiert
multiMerge(ausgabe, eingabe1.iterator(), eingabe2.iterator()); // Eingaben mischen
multiMerge(ausgabe, eingabe1.iterator(), eingabe2.iterator(), eingabe3.iterator());
multiMerge(ausgabe, eingaben); // Iterator<Character>[] eingaben
```

### 5.6.2. Sortierkanal

Um die Anzahl der Mischläufe möglichst gering zu halten, braucht man möglichst lange sortierte Sequenzen.

<sup>1</sup> genauer: eine variable Anzahl von Parametern, eingeführt in Java 5

Mit einem konventionellen Sortierverfahren kann in einer Reihung der Länge  $n$  eine Sequenz der Länge  $n$  erzeugt werden. Mit einem *Sortierkanal* können Sequenzen mit einer Durchschnittslänge von ca.  $2n$  erreicht werden. Er arbeitet nach der folgenden Strategie auf der Basis des Heap sorts<sup>1</sup>.

Die ersten  $n$  Elemente werden eingelesen und in die Reihung von hinten nach vorne einsortiert. Von der Mitte an werden die Elemente gesenkt, damit eine Halde entsteht. An der Spitze der Halde steht diesmal jedoch nicht das größte Element, sondern das kleinste: Das Ergebnis der Methode `compareTo` in der Prozedur `senken` muss negiert verglichen werden.

Wenn die Halde voll ist, muss ihr kleinstes Element ausgegeben werden, bevor ein neues Element in die Halde einsortiert werden kann. Ist das eingelesene Element kleiner als das auf der Spitze, soll es gleich in eine Datei ausgegeben werden.

Ist das eingelesene Element kleiner als das gerade ausgegebene, würde sie sofort auf der Spitze der Halde landen und als Nächstes ausgegeben werden. Damit wäre die aktuelle Sequenz beendet und eine neue angefangen, obwohl sie noch fortgesetzt werden könnte, da die Halde noch (größere) Elemente enthält, die hineinpassen würden. Um dies zu verhindern, soll es nicht in die aktuelle Halde einsortiert werden. Stattdessen wird sie hinten um eine Stelle verkürzt und hier eine neue Halde angefangen (wird nennen sie *Zweithalde*).

Der Prozess setzt sich fort: Ein neues Element wird eingelesen, und falls es nicht sofort ausgegeben wird, muss in einer der beiden Halden Platz geschaffen werden, um es einsortieren zu können. Dies wird erreicht, indem das Spitzenelement in die laufende Sequenz ausgegeben wird. Das neue Element kann einsortiert werden. In welche Halde, hängt davon ab, ob es kleiner als die zuvor ausgegebene ist oder nicht: im ersten Fall in die Zweithalde, im zweiten in die Aktuelle.

Wenn die aktuelle Halde leer geworden ist, gibt es keine Elemente mehr, die in die aktuelle Sequenz passen würden. Jetzt muss sie unaufschiebbar abgeschlossen werden; eine neue Sequenz fängt an. Die Zweithalde belegt jetzt die ganze Reihung, sie wird zur Aktuellen erklärt. Ihr Spitzenelement ist das erste Element der neuen Sequenz.

**Aufgabe 5.13:** Programmieren Sie dieses Verfahren. Implementieren Sie eine abstrakte Klasse `Sortierkanal` mit den aufgeschobenen Methoden `lesen`, `schreiben` und `sequenzEnde`. Diese müssen erst vom Benutzer implementiert werden, können aber von `sortierkanal` aufgerufen werden:

```
abstract class Sortierkanal<E extends Comparable<E>> {
    void sortierkanal(int groesse);
    // ruft lesen öfter auf, um das nächste Element einzulesen
    // ruft schreiben öfter auf, um das kleinste bis jetzt gelesene Element auszugeben
    // ruft sequenzEnde auf, wenn das nächste auszugebende Element kleiner ist als das letzte
```

---

<sup>1</sup> s. Kapitel 5.5. (auf Seite 101)

```

abstract E lesen() throws Ende; // Ausnahme wenn keine Elemente mehr gibt
abstract void schreiben(final E element);
abstract void sequenzEnde();
}

```

### 5.6.3. Mischkanal

Das Mischverfahren im Kapitel 5.6.1. (auf Seite 104) geht davon aus, dass die Sequenzen zuvor mit einem internen Algorithmus sortiert worden sind. Die Betriebsmittel werden dadurch unwirtschaftlich genutzt: Zuerst wird der interne Speicher gebraucht, die externen Speicher (die Dateien) bleiben ungenutzt. Anschließend werden die Dateien benutzt, der Mischalgorithmus braucht aber den Speicherplatz nicht.

Betriebsmittel können mit Hilfe eines *Mischkanals* parallel genutzt werden. Er ist die Kombination des Sortierkanals und des Mischens. Er arbeitet mit drei Dateien und mit einem Speicher mit Platz für  $n$  Datensätze nach dem folgenden Konzept:

1. Aus der Eingabedatei Nr. 1 werden ca.  $2n$  Datensätze über den Sortierkanal in eine Ausgabedatei Nr. 2. sortiert. Der Sortierkanal enthält zum Schluss weitere  $n$  Datensätze.
2. Die Datei Nr. 2. wird fürs Lesen geöffnet. Die sortierten Daten werden nun gelesen und mit den Daten des Sortierkanals sowie den nächsten  $n$  Datensätzen von der Eingabedatei Nr. 1 in die Datei Nr. 3 gemischt. Die Länge der erhaltenen Sequenz ist somit ca.  $4n$ .
3. Die Dateien Nr. 2 und 3 tauschen nun Rolle; die Sequenz wird weiter mit den Daten des Sortierkanals gemischt. Die Ausgabedatei enthält nun  $6n$  Datensätze.
4. usw.; mit jedem Schritt verlängert sich die Sequenz um  $2n$ .

Dieses Verfahren funktioniert allerdings nur dann gut, wenn die Größe der ursprünglichen Eingabedatei nicht wesentlich über  $n$  liegt (vielleicht bis zu  $10n$ ); ansonsten wird bei jedem Durchgang immer „mehr kopiert“ und immer „weniger sortiert“. Bei größeren Eingabemengen ist es sinnvoll, Sequenzen der Länge  $4n$  (immerhin das Doppelte wie beim Sortierkanal und das Vierfache eines konventionellen Sortiervorgangs) zu erzeugen und sie dann konventionell zu mischen.

### 5.6.4. Fibonacci-Mischen

Wenn die Eingabemenge die Speichergröße wesentlich übersteigt, müssen auf jeden Fall sortierte Sequenzen (der Länge  $4n$ ) erzeugt werden, die später gemischt werden. Um sich überflüssige Kopieroperationen zu ersparen, sind hierfür mindestens vier Dateien notwendig: In jedem Durchlauf wird der Inhalt zweier Eingabedateien auf zwei Ausgabedateien gemischt und dabei die Sequenzlänge verdoppelt. Im nächsten Durchlauf werden die Rollen vertauscht, und die gerade geschriebenen Sequenzen werden eingelesen, um sie auf die frei gewordenen Ausgabedateien zu mischen.

Die folgende Tabelle zeigt ein Beispiel für  $N = 1000$  und  $4n = 1000$  (d.h. den Fall, wo eine Million Datensätze sortiert werden müssen, aber nur 250 in den Speicher passen):



| Durchlauf | 1    | 2   | 3   | 4   | 5  | 6  | 7  | 8   | 9   | 10  | 11   |
|-----------|------|-----|-----|-----|----|----|----|-----|-----|-----|------|
| Anzahl    | 1000 | 500 | 250 | 125 | 63 | 32 | 16 | 8   | 4   | 2   | 1    |
| Länge     | 1    | 2   | 4   | 8   | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1000 |

Tabelle 5.11: Anzahl und Länge (in 1000) der Sequenzen mit vier Dateien

Wenn ursprünglich  $N$  Sequenzen erzeugt wurden, dann ist die Anzahl der Durchläufe mit vier Dateien  $\lceil \log_2 N \rceil$ . Mit sechs Dateien kann die Sequenzlänge verdreifacht, mit  $k$  Dateien ver- $k$ -facht werden. Die Anzahl der Durchläufe mit dieser Strategie ist dann  $\lceil \log_{k/2} N \rceil$ :

| Durchlauf | 1    | 2   | 3   | 4  | 5  | 6   | 7   | 8    |
|-----------|------|-----|-----|----|----|-----|-----|------|
| Anzahl    | 1000 | 334 | 112 | 38 | 13 | 5   | 3   | 1    |
| Länge     | 1    | 3   | 9   | 27 | 81 | 243 | 729 | 1000 |

Tabelle 5.12: Anzahl und Länge (in 1000) der Sequenzen mit sechs Dateien

Es stellt sich die Frage, ob diese triviale Strategie der gleichmäßigen Verteilung der Sequenzen auf die  $k/2$  Dateien optimal ist. Von den  $k/2$  Ausgabedateien wird nämlich immer nur eine benutzt. Es besteht jedoch keine Notwendigkeit, die Ein- und Ausgabedateien *gleichzeitig* umzuschalten. Dann kann man die Daten von  $k-1$  Eingabedateien lesen (das Mischen läuft effizienter) und immer nur eine Ausgabedatei offen halten. Beispielsweise können 65 Sequenzen auf sechs Dateien nach der folgenden Tabelle gemischt werden:

| Durchlauf: | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 |
|------------|----|----|----|---|---|---|
| 1. Datei   | 16 | 8  | 4  | 2 | 1 | 0 |
| 2. Datei   | 15 | 7  | 3  | 1 | 0 | 1 |
| 3. Datei   | 14 | 6  | 2  | 0 | 1 | 0 |
| 4. Datei   | 12 | 4  | 0  | 2 | 1 | 0 |
| 5. Datei   | 8  | 0  | 4  | 2 | 1 | 0 |
| 6. Datei   | 0  | 8  | 4  | 2 | 1 | 0 |
| $\Sigma$   | 65 | 33 | 17 | 9 | 5 | 1 |

Tabelle 5.13: Fibonacci-Mischen mit sechs Dateien

Hiernach werden die 65 Sequenzen auf fünf Dateien nach der ersten Spalte ( $16 + 15 + 14 + 12 + 8$ ) verteilt. Beim ersten Durchlauf wurden acht Mischläufe in die Datei Nr. 6 durchgeführt. In der zweiten Spalte steht die Anzahl der restlichen Sequenzen auf jeder Datei. Ihre Gesamtzahl beträgt jetzt 33: In der (vorherigen Ausgabe-) Datei Nr. 6 sind jetzt acht (längere) Sequenzen, auf der Datei Nr. 5 gibt es jetzt keine mehr (zumal es ursprünglich nur acht gab).

Deswegen können im zweiten Durchlauf die vier Mischläufe in die Datei Nr. 5 ausgegeben werden (da sich in der Datei Nr. 4 nur vier Sequenzen befinden). Die Datei Nr. 4 wird dadurch leer, kann im dritten Durchlauf als Ausgabedatei benutzt werden. Hier finden zwei Mischläufe statt, in den letzten zwei nur je einer. Schließlich befindet sich nur eine sortierte Sequenz in der Datei Nr. 2.

Die Verteilung der 65 Sequenzen nach der Tabelle 5.13 hat *Gilstad*<sup>1</sup> vorgeschlagen. Um seine Strategie zu verstehen, untersuchen wir, wie 21 Sequenzen mit Hilfe von drei Dateien gemischt werden können. In der Tabelle stellen wir nun das Umschalten nicht mehr dar, d.h. in jedem Durchlauf notieren wir nur die Anzahl der Eingabedateien sowie ihre Summe:

| Durchlauf: | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------|----|----|---|---|---|---|---|
| 1. Datei   | 13 | 8  | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 2. Datei   | 8  | 5  | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| $\Sigma$   | 21 | 13 | 8 | 5 | 3 | 2 | 1 |

Tabelle 5.14: Fibonacci-Mischen mit drei Dateien

Es ist wahrnehmbar, dass die Verteilung nach den *Fibonacci-Zahlen*<sup>2</sup> erfolgt. Diese heißen auch Fibonacci-Zahlen der 1. Ordnung, da die Formel  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$  eine Addition stattfindet. Ähnlich gibt es Fibonacci-Zahlen der 2., 3. usw. Ordnung:  ${}^2f_{n+1} = {}^2f_n + {}^2f_{n-1} + {}^2f_{n-2}$  (für  $n \geq 3$ ),  ${}^3f_{n+1} = {}^3f_n + {}^3f_{n-1} + {}^3f_{n-2} + {}^3f_{n-3}$ , usw. Die *Fibonacci-Zahlen der k. Ordnung* werden nach der Formel

$${}^k f_{n+1} = {}^k f_n + {}^k f_{n-1} + \dots + {}^k f_{n-k}$$

errechnet; die ersten  $k$  Werte sind dabei  ${}^k f_1 = {}^k f_2 = \dots = {}^k f_{k-1} = 1$ . Beispielsweise sind die Fibonacci-Zahlen der 4. Ordnung:

| $n$       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 | 11  | 12  | ... |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|
| ${}^4f_n$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 9 | 17 | 33 | 65 | 129 | 253 | ... |

Tabelle 5.15: Fibonacci-Zahlen der 4. Ordnung

In der Tabelle 5.13 können wir sehen, dass die Gesamtzahl der Dateien in jedem Durchlauf die Fibonacci-Zahlen der 4. Ordnung bilden. Wenn  $k$  Dateien zur Verfügung stehen, können wir die Fibonacci-Zahl der  $k-2$ -ten Ordnung für die Verteilung der Sequenzen benutzen. Die Zahl der Sequenzen auf den einzelnen Bändern ergibt sich aus einer Tabelle für die Fibonacci-Zahlen der  $k-2$ -ten Ordnung, die ähnlich wie die Tabelle 5.13 aufgebaut ist.

**Aufgabe 5.14:** Entwickeln Sie eine Tabelle für  $k = 4$ , ähnlich der Tabelle 5.13. Zeichnen Sie das Verfahren, wie 100 Sequenzen nach dem Fibonacci-Algorithmus gemischt werden.

<sup>1</sup> s. [Gil]

<sup>2</sup> s. Kapitel 3.1.2. (auf Seite 31)

## 6. Baumstrukturen

Bis jetzt haben unsere Algorithmen Reihungen bearbeitet; eine Ausnahme hiervon bilden die Algorithmen aus dem Kapitel 4.4. (auf Seite 68), die verkettete Listen bearbeitet haben. In diesem Kapitel werden wir Algorithmen untersuchen, die *Bäume* bearbeiten.

Wir betrachten hier Bäume, bei denen jeder Knoten eine *Folge* von Nachfolgern hat, und nicht eine *Menge* von Nachfolgern. Bei einer Menge spielt die Reihenfolge der Elemente keine Rolle, bei einer Folge spielt sie eine wichtige Rolle. Wir betrachten die beiden Bäume in der Abbildung 6.1 also als *verschiedene* Bäume.

Manchmal betrachtet man Bäume auch als „Mobiles“ (die an der Decke hängen und sich im Wind drehen können) und abstrahiert von der Reihenfolge der Nachfolger eines Knotens. Bei dieser Betrachtungsweise sind die beiden Bäume in Abbildung 6.1 *gleich*.

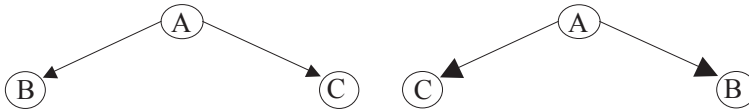


Abbildung 6.1: Zwei verschiedene Bäume

### 6.1. Binärbaum

Als Erstes lernen wir dabei den *Binärbaum* kennen.

#### 6.1.1. Definition

Ein *Binärbaum* ist ein Baum, bei dem jeder Knoten höchstens zwei *Nachfolger* hat. Seine Datenstruktur besteht aus Knotenobjekten mit zwei Knotenreferenzen<sup>1</sup>. Jeder Knoten hat also zwei Nachfolger.

Im Binärbaum wird jeder Knoten genau einmal referiert, d.h. in einem Binärbaum hat jeder Knoten, mit Ausnahme des Wurzelknotens, genau einen *Vorgänger*<sup>2</sup>. Ein *Blatt* ist ein Knoten, der keinen Nachfolger hat. Die anderen Knoten heißen auch *innere Knoten*.

<sup>1</sup> und evtl. weitere Komponenten für die „Daten“, die man im Binärbaum speichern möchte

<sup>2</sup> oder: einen *Vater*, evtl.: eine *Mutter*

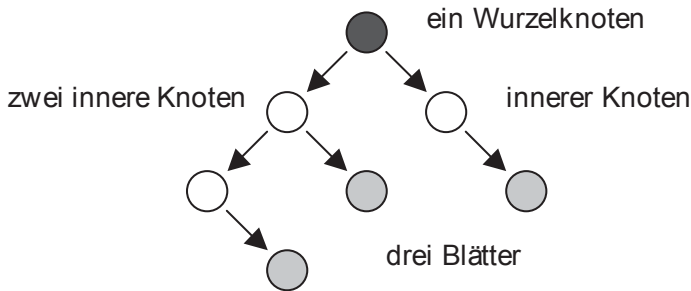


Abbildung 6.2: Knotenarten im Baum

Es liegt nahe, die Knoten eines Binärbaums in *Ebenen* einzuteilen:

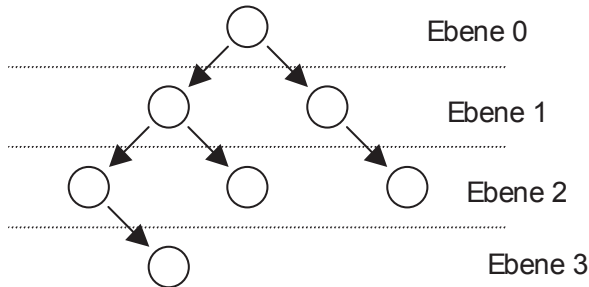


Abbildung 6.3: Die Ebenen eines Baumes

Ein Binärbaum heißt *voll*, wenn außer der letzten alle seine Ebenen „voll besetzt sind“, d.h. wenn die Ebene  $k$  genau  $2^k$  Knoten enthält. Die letzte Ebene darf auch in einem vollen Baum weniger als  $2^k$  Knoten enthalten. Der Baum in der vorigen Abbildung 6.3 ist nicht voll, da die Ebene 2 nur drei (statt vier) Knoten enthält. Der folgende Baum ist voll:

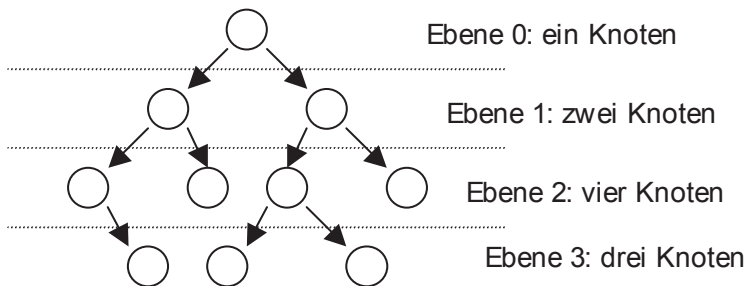


Abbildung 6.4: Ein voller Binärbaum

Ein Binärbaum heißt *komplett*, wenn er voll ist und die Knoten auf der letzten Ebene „alle linksbündig und dicht“ angeordnet sind. Der Baum in der vorigen Abbildung 6.4 ist zwar voll, aber nicht komplett, da die Ebene 3 „Löcher“ enthält. Der folgende Binärbaum ist komplett:

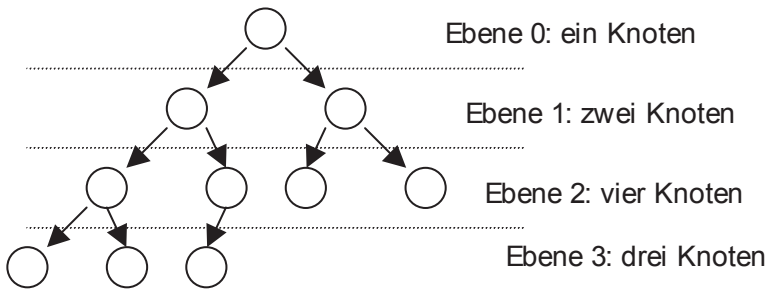


Abbildung 6.5: Ein kompletter Binärbaum

Alle Knoten auf der Ebene 3 stehen „linksbündig und dicht“.

Ein Binärbaum ist *sortiert*, wenn für jeden Knoten gilt:

1. kein Knoten im linken Unterbaum hat einen größeren Schlüssel
2. kein Knoten im rechten Unterbaum hat einen kleineren Schlüssel.

Die *Tiefe* eines Binärbaums gibt an, wie weit die „tiefsten“ Blätter von der Wurzel entfernt sind. Sein *Gewicht* ist die Anzahl der Knoten:

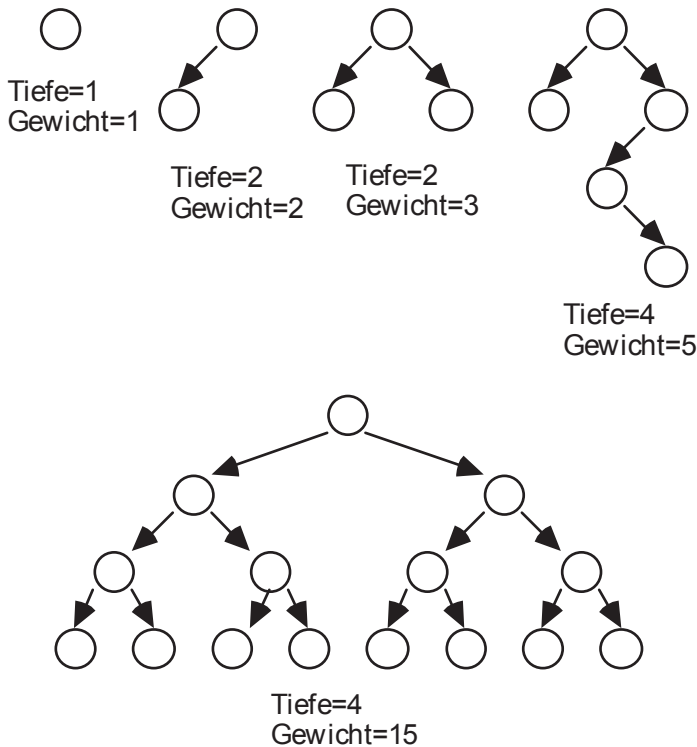


Abbildung 6.6: Binärbäume verschiedener Tiefen und Gewichte

Die Behandlung von mehreren Elementen mit dem gleichen Schlüssel wird etwas einfacher, wenn man den Begriff „sortiert“ etwas strenger fasst: Ein Binärbaum ist *streng sortiert*, wenn für jeden Knoten gilt:

1. alle Knoten im linken Unterbaum haben kleinere Schlüssel, und
2. alle Knoten im rechten Unterbaum haben größere oder gleiche Schlüssel<sup>1</sup>.

**Aufgabe 6.1:** Beweisen Sie, dass ein Baum der Tiefe  $n$  (höchstens)  $2^n - 1$  Knoten besitzen kann. Oder anders herum: Ein Binärbaum mit  $n$  Knoten hat mindestens die Tiefe  $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ .<sup>2</sup>

**Aufgabe 6.2:** Bilden Sie alle sortierten Binärbäume mit drei Knoten, die die Schlüssel 1, 2 und 3 haben.

**Aufgabe 6.3:** Wie kann man die Anzahl der sortierten Binärbäume mit  $n$  Knoten (die die Schlüssel 1 bis  $n$  haben) berechnen?

**Aufgabe 6.4:** Geben Sie einen Baum an, der zwar sortiert, aber nicht streng sortiert ist.

### 6.1.2. Suchen im sortierten Binärbaum

Das im Kapitel 4.3.3. (auf Seite 67) vorgestellte Verfahren für das *binäre Suchen* in einer (sortierten) Reihung ist „sehr schnell“, hat aber den Nachteil: Das Einfügen hat eine Zeitkomplexität von  $O(n)$  und die Reihung muss „von Anfang an“ so groß vereinbart werden, dass alle späteren Einfügungen darin Platz haben.

Dagegen hatten die Lösungen mit einer verketteten Liste den Vorteil, dass Speicherplatz erst dann reserviert werden muss, wenn er wirklich gebraucht wird, und dass das Einfügen eines Elementes (wenn man erst mal weiß, *wo* man es einfügen will) in einem Schritt geht, unabhängig von der Länge der Liste. Leider ist das Suchen in einer verketteten Liste (im Vergleich zum binären Suchen) relativ langsam.

Man kann die Vorteile einer sortierten Reihung beim Suchen und die Vorteile einer verketteten Liste beim Einfügen kombinieren, indem man die Objekte zu einem *sortierten Binärbaum* zusammenfügt. Wie lange das Suchen in einem sortierten Binärbaum dauert, hängt auch ganz wesentlich davon ab, wie „gut“ bzw. „schlecht“ der Baum ist. Gut ist z.B. ein voller Baum mit  $n$  Knoten, dessen Tiefe gleich  $1 + \log_2 n$ . Ein besonders schlechter Baum hat Tiefe  $n$ ; er hat die gleiche Struktur wie eine verkettete Liste.

Glücklicherweise gibt es mehr „gute“ Binärbäume als „schlechte“. Wenn man alle sortierten Binärbäume mit den Schlüsseln 1 bis  $n$  betrachtet, dann haben sie im Durchschnitt eine Tiefe von  $2 \log_2 n$ .

<sup>1</sup> Eine alternative Definition ist, wenn die gleichen Schlüssel im linken Unterbaum platziert werden.

<sup>2</sup> Die Operation  $\lfloor x \rfloor$  rundet die Bruchzahl  $x$  auf die nächstkleinere oder gleiche Ganzzahl ab (s. auch die Java-Funktion `Math.floor`).

**Zahlenbeispiel:** Der beste sortierte Binärbaum mit 1023 Knoten hat die Tiefe 10, der schlechteste hat die Tiefe 1023, und im Durchschnitt haben solche Bäume etwa die Tiefe 20. Der Durchschnitt 20 liegt also viel näher am besten Fall 10 als am schlechtesten Fall 1023.

### 6.1.3. Darstellung von Binärbäumen

Eine Klasse, die einen allgemeinen Binärbaum implementiert, ist:

```
class Binaerbaum<E extends Comparable<E>> {
    protected static class Knoten<E extends Comparable<E>> {
        private E inhalt;
        private Knoten<E> links, rechts;
        public Knoten(E inhalt) { this.inhalt = inhalt; }
    }
    protected Knoten<E> wurzel;
    ... // Zugriffsmethoden
}
```

Der Typ der `wert`-Komponente eines Knotens ist vom Typparameter `E`, von der nur die Implementierung der `Comparable`-Methode `compareTo` erwartet wird. Alternativ können auch primitive Typen wie `int` usw. als `wert`-Komponente vereinbart werden – dann müssen aber die `compareTo`-Aufrufe auf Operatoraufrufe `<` ausgetauscht werden.

Eine alternative Darstellung ist, ähnlich wie bei verketteten Listen im Kapitel 4.4. (auf Seite 68), wenn man einen leeren Baum durch zwei Pseudoknoten (d.h. nicht etwa durch `null` Knoten) darstellt. Dadurch werden einige Algorithmen eleganter und schneller. Der eine Pseudoknoten stellt den „Beginn“ des Binärbaumes dar. In sortierten Bäumen sollte er den kleinsten möglichen Schlüssel (z.B. `Integer.MIN_VALUE`) enthalten, und seine Referenz `rechts` auf den rechten Nachfolger sollte normalerweise auf den Wurzelknoten des Binärbaumes zeigen (der „Beginn-Pseudoknoten“ liegt also noch über oder vor dem Wurzelknoten). Der zweite Pseudoknoten stellt das „Ende“ des Binärbaumes dar: Alle `links`- und `rechts`-Referenzen, die auf keinen richtigen Nachfolger-Knoten zeigen, sollten statt `null` auf diesen Ende-Pseudoknoten zeigen.

Ein leerer Binärbaum besteht dann nur aus den beiden Pseudoknoten, und die `rechts`-Referenz des Beginn-Knotens zeigt direkt auf den Ende-Knoten (er kann nicht auf den Wurzelknoten zeigen, weil ein leerer Baum noch nicht einmal einen Wurzelknoten besitzt).

In der folgenden Abbildung 6.7 sind die beiden Pseudoknoten durch Rechtecke (unterschiedlicher Größe) und die eigentlichen Knoten durch Kreise dargestellt. Trotzdem sollen *alle* Knoten (die eigentlichen Knoten und die Pseudoknoten) von derselben Klasse `Knoten` sein.

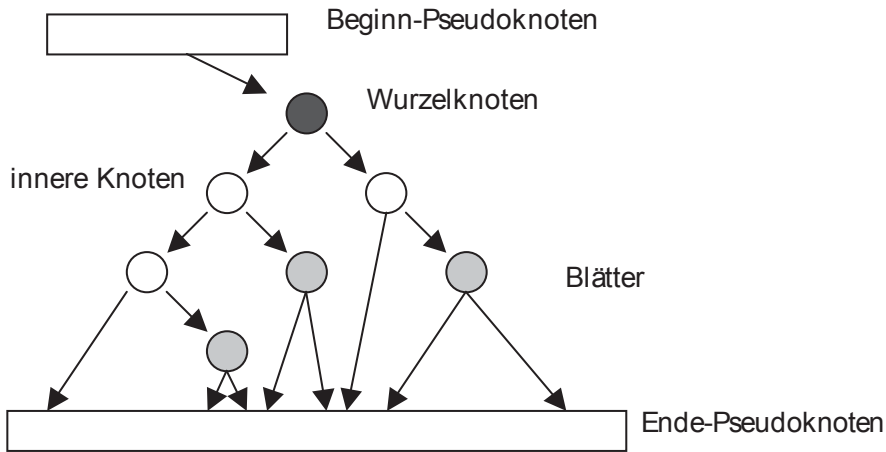


Abbildung 6.7: Ein Binärbaum mit sieben Knoten und zwei Pseudoknoten

Bevor man in einem solchen Baum nach einem Schlüssel `schluessel` sucht, sollte man diesen Suchschlüssel in den Ende-Knoten bringen. Auf diese Weise ist man sicher, dass man einen Knoten mit dem Schlüssel `schluessel` finden wird; die Abbruchbedingung für die Suchschleife wird dadurch einfach.

Wenn man in einem *streng sortierten* Binärbaum einen Knoten mit einem gegebenen Schlüssel gefunden hat, dann weiß man, dass alle weiteren Knoten mit dem gleichen Schlüssel im rechten Unterbaum stehen müssen. Es gilt sogar: Knoten mit gleichem Schlüssel bilden eine verkettete Liste. Eine solche Liste besteht aus Knoten, die jeweils nur einen rechten Nachfolger, aber keinen linken Nachfolger haben. Nur das letzte Listenelement bildet eine Ausnahme und kann einen linken Nachfolger haben. Diese „Listen von Knoten mit gleichem Schlüssel“ können einen Baum sehr unausgeglich machen und den Suchalgorithmus verlangsamen.

**Aufgabe 6.5:** Programmieren Sie eine Klasse mit zwei Methoden `einfuegen` und `suchen`; durch sie kann man ein Element in einen sortierten Binärbaum einfügen bzw. einen Knoten aus dem Baum entfernen bzw. ein Element suchen.

```
public void einfuegen(E element);
public Knoten<E> suchen(E element);
```

Der Konstruktor Ihrer Klasse soll die zwei Referenzen `beginn` und `ende` initialisieren, die auf den Beginn-Pseudo-Knoten bzw. auf den Ende-Pseudo-Knoten zeigen.

## 6.2. Sortieren mit Binärbäumen

Im Folgenden interessieren wir uns für Binärbäume, bei denen jeder Knoten eine Referenz auf ein *Objekt* enthält. Jedes Objekt enthält eine Schlüsselkomponente `schluessel` oder die Vergleichsmethode `compareTo` sowie eventuell weitere Datenkomponenten.



In den grafischen Darstellungen werden wir nur die Schlüsselkomponente in die Knoten einzeichnen und die weiteren Datenkomponenten weglassen. Als Schlüssel werden wir *Buchstaben* verwenden. Ein Beispiel ist

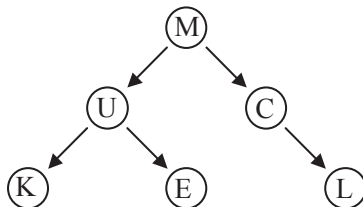


Abbildung 6.8: Ein Baum mit eingezeichneten Schlüsseln

### 6.2.1. Binärbaum als Halde

Bäume lassen sich auf sehr verschiedene Weise in einem Rechner darstellen. Viele Darstellungen verwenden *Referenzen*, um die einzelnen Knoten eines Baumes miteinander zu verbinden („zu verzeigern“). Diese Referenzen belegen natürlich „extra“ Speicherplatz. Für *komplette* Binärbäume gibt es aber auch eine besonders „elegante“ Darstellung, die *ohne Referenzen* auskommt. Einen Baum mit  $n$  Knoten schreibt man in eine Reihung *sammlung* mit  $n$  Elementen. In *sammlung* benutzen wir dabei nur die Indices 1 bis  $n$ , der Platz mit dem Index 0 bleibt unbenutzt. Man schreibt die Knoten des Baumes einfach „Ebene für Ebene“ von links nach rechts in die Reihung:

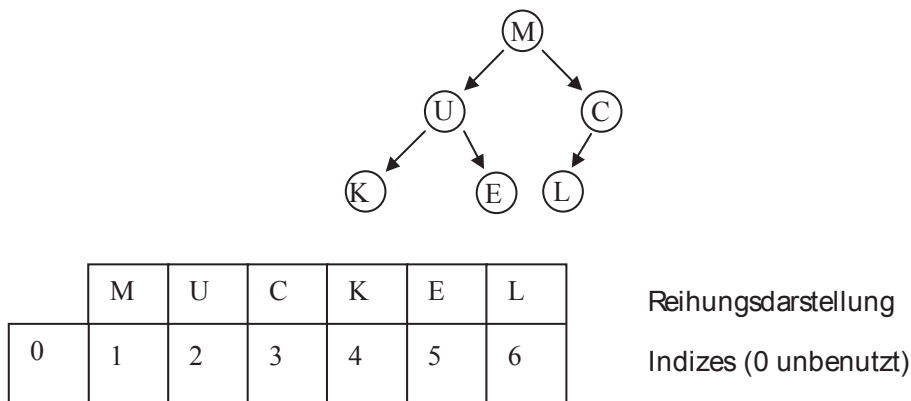


Abbildung 6.9: Ein kompletter Binärbaum

**Bemerkung:** In diesem Sinne ist der im Kapitel 5.5. (auf Seite 98) eingeführte Begriff *Halde* die Reihungsdarstellung eines Binärbaums. Dort haben wir in der Reihung *sammlung* immer einen *kompletten Binärbaum* abgespeichert. Die Komponenten der Reihung *sammlung* entsprechen den Knoten des Binärbaums. Der *Vorgänger* bzw. *Nachfolger* einer Komponente *samm-*

`lung[i]` entspricht genau dem *Vorgänger* bzw. *Nachfolger* des entsprechenden Knotens im Binärbaum.

**Aufgabe 6.6:** Welche Probleme bekommt man, wenn man *nicht*-komplette, Binärbäume auf die oben geschilderte, elegante Weise (ohne Referenzen) darstellt?

**Aufgabe 6.7:** Statt „Binärbaum“ schreiben wir kürzer „2-Baum“ und verstehen unter einem 3-Baum einen Baum, bei dem jeder Knoten höchstens drei Nachfolger hat. Kann man komplette 3-Bäume ähnlich elegant in einer Reihung abspeichern wie 2-Bäume? Was ist mit 4-Bäumen, 5-Bäumen usw.?

### 6.2.2. Senken im Binärbaum

Die im Kapitel 5.5.3. (auf Seite 100) vorgestellte Hilfsprozedur `senken` arbeitet an Binärbäumen, die in einer Reihung abgespeichert wurden. Sie repariert eine „fast-Halde“, die nur an der Wurzel „gestört“ ist, zu einer Halde. Die Halde aus der Tabelle 5.8 kann als Baum folgendermaßen dargestellt werden:

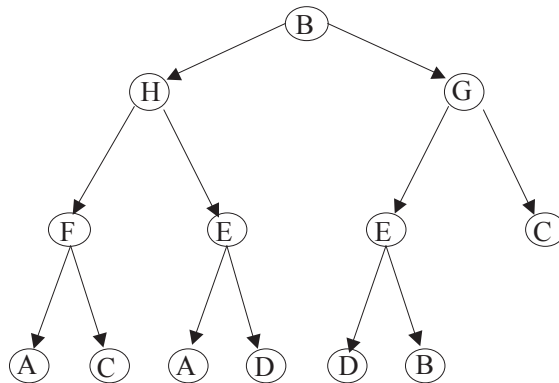


Abbildung 6.10: Ein an der Wurzel „gestörter sortierter“ Binärbaum

Dieser Baum stellt einen fast sortierten Binärbaum dar. Nur der Schlüssel der Wurzel (B) ist *kleiner* als die Schlüssel seiner Nachfolger (H und G). Wir wenden die Prozedur `senken` auf diesen Baum an:

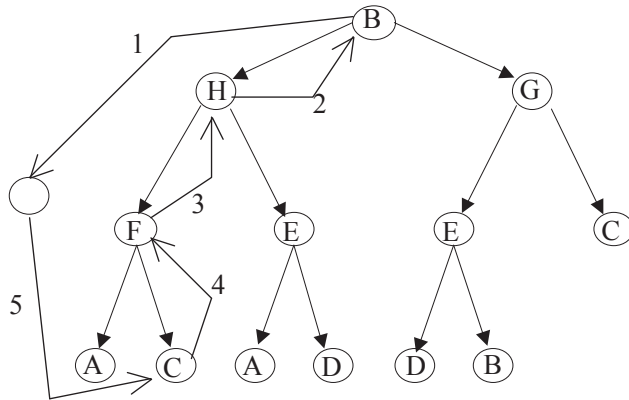


Abbildung 6.11: Senken

Nach Anwendung des Algorithmus `senken` ist der Baum sortiert (die entsprechende Reihung in der Tabelle 5.9 ist eine Halde):

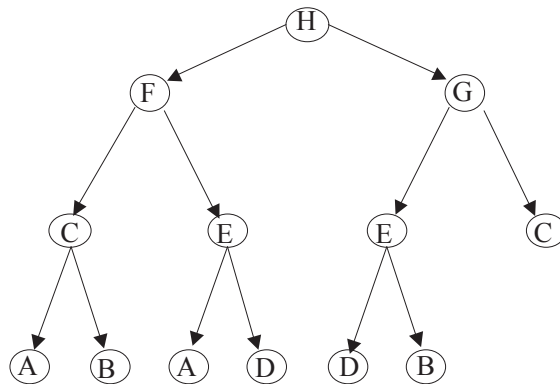


Abbildung 6.12: Reparierter Binärbaum

Hier folgt die Prozedur `senken` für einen Binärbaum aus einer generischen Klasse mit Typparameter `E` **implements** `Comparable<E>`:

```
void senken() { // der störende Wurzelknoten wird gesenkt
    final E zuSenken = wurzel.inhalt;
    Knoten<E> nachfolger = wurzel.rechts; // rechter Nachfolger
    while (nachfolger != null && nachfolger.inhalt.compareTo(zuSenken) < 0) {
        nachfolger.inhalt = nachfolger.rechts.inhalt; // hochrücken
        nachfolger = nachfolger.rechts; // nach unten gehen
    };
    nachfolger.inhalt = zuSenken; // Element einfügen
}
```

**Aufgabe 6.8:** Die Prozedur `senken` kann rekursiv noch eleganter<sup>1</sup> programmiert werden. Fertigen Sie nun eine entsprechende Version an.

**Aufgabe 6.9:** Welche Fälle sind für die Prozedur `senken` für Bäume besonders günstig? Welche sind besonders ungünstig? Welche Zeitkomplexität hat die Prozedur `senken` im günstigsten und im ungünstigsten Fall? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen der Aufgabe 5.11 auf Seite 101.

**Aufgabe 6.10:** Formulieren Sie in einer Baumklasse die Methode `sort` auf die Analogie von `heapSort`: Tauschen Sie alle Blätter (alle Knoten der letzten Ebene) gegen den Wurzelknoten aus und senken sie.

### 6.2.3. Baumsort

Im vorherigen Kapitel haben wir einen Binärbaum zu einem sortierten Binärbaum umgewandelt. Jetzt wollen wir mit Hilfe eines sortierten Binärbaumes eine unsortierte Folge in eine sortierte Folge umwandeln.

Wir gehen davon aus, dass sich die Eingabedaten (wie im Kapitel 5.6.1. auf Seite 104) von einem `Iterator`-Parameter geliefert und die Ergebnisdaten von einem `List`-Parameter aufgenommen werden:

```
class BaumSort<E extends Comparable<E>> {
    protected class Knoten { // 2
        private E inhalt;
        private Knoten links, rechts; // links enthält kleinere, rechts größere Werte
        public Knoten(E inhalt) { this.inhalt = inhalt; }
        public void aufbau(E wert) {
            if (inhalt.compareTo(wert) > 0) { // wert ist kleiner
                if (links == null)
                    links = new Knoten(wert);
                else
                    links.aufbau(wert); // rekursiv
            } else { // wert ist größer, ähnlich
                if (rechts == null)
                    rechts = new Knoten(wert);
                else
                    rechts.aufbau(wert);
            }
        }
    }
}
```

<sup>1</sup> allerdings mit der Erhöhung der Speicherkomplexität durch den Verbrauch von Stack

<sup>2</sup> diesmal ist `Knoten` eine innere Klasse (nicht `static`)

```

    public void abbau() {
        if (links != null)
            links.abbau();
        ausgabe.add(inhalt);
        if (rechts != null)
            rechts.abbau();
    }
}
private Knoten wurzel;
private Iterator<E> eingabe; private List<E> ausgabe;
public BaumSort(Iterator<E> eingabe, List<E> ausgabe) {
    // requires eingabe.hasNext(); // d.h. eingabe nicht leer
    this.eingabe = eingabe; this.ausgabe = ausgabe;
    this.wurzel = new Knoten(eingabe.next()); // erstes Element von eingabe
    while (eingabe.hasNext()) // vom zweiten Element an
        wurzel.aufbau(eingabe.next());
    wurzel.abbau(); // Elemente werden sortiert ausgegeben
}
}

```

**Aufgabe 6.11:** Ergänzen Sie das obige Programm durch geeignete Ausgaben (auf `Console.println`), damit Sie seine Arbeitsweise nachvollziehen können. Führen Sie den Algorithmus mit 20 Zahlen auf Papier durch und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Ausgabe. Was ist die Zeit- und Speicherkomplexität des Baumsorts?

#### 6.2.4. Durchwandern eines Binärbaums

Um ein bestimmtes Element im Baum zu finden, muss er *durchwandert* (*traversiert*) werden. Das obige Sortierverfahren ist ein Beispiel dafür.

Ein Binärbaum kann auf mehrere verschiedene Arten durchwandert werden. Drei von diesen Arten heißen *preorder*, *inorder* und *postorder*. Bei der ersten Art wird die Wurzel des Baumes *vor* den beiden Teilbäumen besucht. Bei „inorder“-Durchsuchen wird die Wurzel *zwischen* den beiden Teilbäumen manipuliert, dagegen wird beim „postorder“ die notwendige Operation zuerst an den beiden Teilbäumen, anschließend an der Wurzel durchgeführt:

```

void inorder() {
    if (links != null) // zuerst linken Baum durchwandern
        links.inorder();
    operation(inhalt); // dann Operation durchführen
    if (rechts != null) // schließlich rechten Baum durchwandern
        rechts.inorder();
}
void preorder() {
    operation(inhalt); // zuerst Operation durchführen
    if (links != null) // dann linken Baum durchwandern
        links.preorder();
    if (rechts != null) // schließlich rechten Baum durchwandern
        rechts.preorder();
}

```

```

void postorder() {
    if (links != null) // zuerst linken Baum durchwandern
        links.postorder();
    if (rechts != null) // dann rechten Baum durchwandern
        rechts.postorder();
    operation(inhalt); // schließlich Operation durchführen
}

```

Als Beispiel für das Durchwandern eines Binärbaum betrachten wir den sortierten Binärbaum

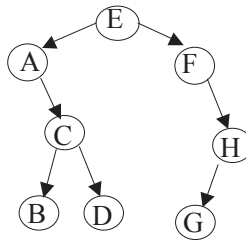


Abbildung 6.13: Sortierter Binärbaum

In der operation-Methode setzen wir einfach `Console.println` ein, um zu erkennen, in welcher Reihenfolge die Knoten beim Traversieren besucht werden. Das *inorder*-Durchwandern besucht zuerst den linken Teilbaum, d.h. alle kleineren Knoten, dann den aktuellen, anschließend den rechten Teilbaum, d.h. alle größeren Knoten. Das Ergebnis ist die sortierte Folge:

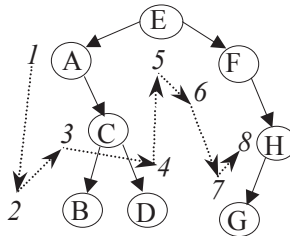


Abbildung 6.14: „inorder“ Traversieren

Die Reihenfolge ist also die sortierte: „A B C D E F G H“

Beim *preorder*-Durchwandern wird der Baum „von oben nach unten“ etwa „außen herum“ durchsucht: zuerst der aktuelle Knoten, dann der linke Teilbaum, schließlich der rechte Teilbaum. Die Reihenfolge ist hier „E A C B D F H G“. Das *postorder*-Traversieren dient dazu, den Baum „von unten nach oben“ durchzuwandern; die Knoten werden aber „von innen herum“ besucht. Die Reihenfolge ist „B D C A G H F E“.

Eine Anwendung des postorder-Traversierungsverfahrens ist das Suchen eines Elements in einem geordneten Binärbaum:

```
public boolean vorhanden(final E element) {
    if (element.compareTo(inhalt) < 0)
        return links != null && links.vorhanden(element); // 1
    else if (inhalt.compareTo(element) < 0)
        return rechts != null && rechts.vorhanden(element);
    else
        return inhalt == element;
}
```

Zuerst wird der linke Teilbaum durchsucht, dann der rechte; wenn ohne Erfolg, dann wird schließlich der aktuelle Knoten untersucht, ob er das gesuchte Element enthält.

**Aufgabe 6.12:** Ergänzen Sie das obige Programm durch Ausgaben (`Console.println`), damit Sie seine Arbeitsweise nachvollziehen können. Führen Sie den Algorithmus mit 20 Zahlen auf Papier durch und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Ausgabe.

### 6.3. Operationen für Binärbäume

Die im Kapitel 5. (ab Seite 82) vorgestellten Sortiervverfahren arbeiten in Reihungen; diese werden typischerweise mit Iterationen abgearbeitet. Rekursiv definierte Datenstrukturen werden typischerweise mit *Rekursion* abgearbeitet.

#### 6.3.1. Binärbaum aus Knoten

Im Kapitel 6.1.3. (auf Seite 115) haben wir die leeren Zweige mit Pseudoknoten markiert. Im Kapitel 6.2.3. (auf Seite 120) haben wir in die Referenzen `links` bzw. `rechts` ggf. einen `null`-Wert gesetzt. Wir lernen jetzt eine dritte Alternative zur Darstellung von Bäumen kennen<sup>2</sup>. Hier enthält jedes `Baum`-Objekt genau eine Referenz auf ein `Knoten`-Objekt. Wenn diese `null` ist, ist der Baum leer. Ansonsten enthält der Knoten den Wert und die Referenzen auf den linken und rechten Baum, die ihrerseits leer sein können, wenn ihre (einzige) Knoten-Komponente `null` ist. Die Referenzen `links` und `rechts` in der Knoten-Klasse sind jedoch nie `null`, bestenfalls referieren sie einen „leeren Baum“:<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Durch die „kurzgeschlossene“ Konjunktion `&&` wird der zweite Operand (der rekursive Aufruf) wird nur ausgeführt, wenn der erste Operand `true` ergibt, d.h. wenn die Referenz `links` bzw. `rechts` ungleich `null` ist.

<sup>2</sup> Diejenige ist vorzuziehen, mit der der Algorithmus am elegantesten formulieren lässt.

<sup>3</sup> In C++ kann man leere Bäume noch einfacher darstellen, weil dort Parameter „per Referenz“ übergeben werden können; in Java muss dies „nachgebaut“ werden.

```

class Baum<E extends Comparable<E>> {
    private static class Knoten<E extends Comparable<E>> {
        private E inhalt;
        private Baum<E> links, rechts;
        public Knoten(E inhalt) { // ensures links != null && rechts != null
            this.inhalt = inhalt;
            links = new Baum<E>();
            rechts = new Baum<E>();
        }
    }
    private Knoten<E> knoten;
    public Baum() { knoten = null; }
    public boolean istLeer() { return knoten == null; }
    ... // Methoden in den nächsten Kapiteln
}

```

### 6.3.2. Eintragen in einen sortierten Binärbaum

Die Traversierungsalgorithmen aus dem Kapitel 6.2.4. (auf Seite 121) funktionieren an jedem Binärbaum, ob er sortiert ist oder nicht. Beim Eintragen in einen Baum muss zuerst festgelegt werden, an welcher Stelle die Eintragung erfolgen kann. Das Einfachste dabei ist das Kriterium der Sortierung.

In der Klasse `SortierBaum` im Kapitel 6.2.3. (auf Seite 120) haben wir Algorithmen verwendet, die denen in einer allgemeinen `Baum`-Klasse ähnlich sind:

```

public void eintragen(final E element) { // ensures vorhanden(element);
    if (istLeer())
        knoten = new Knoten<E> (element);
    else if (element.compareTo(knoten.inhalt) < 0)
        knoten.links.eintragen(element);
    else // rechts eintragen, auch wenn gleich
        knoten.rechts.eintragen(element);
}

```

Als Beispiel tragen wir die Buchstaben (E F A C H B G D) einen nach dem anderen sortiert in den Baum ein:



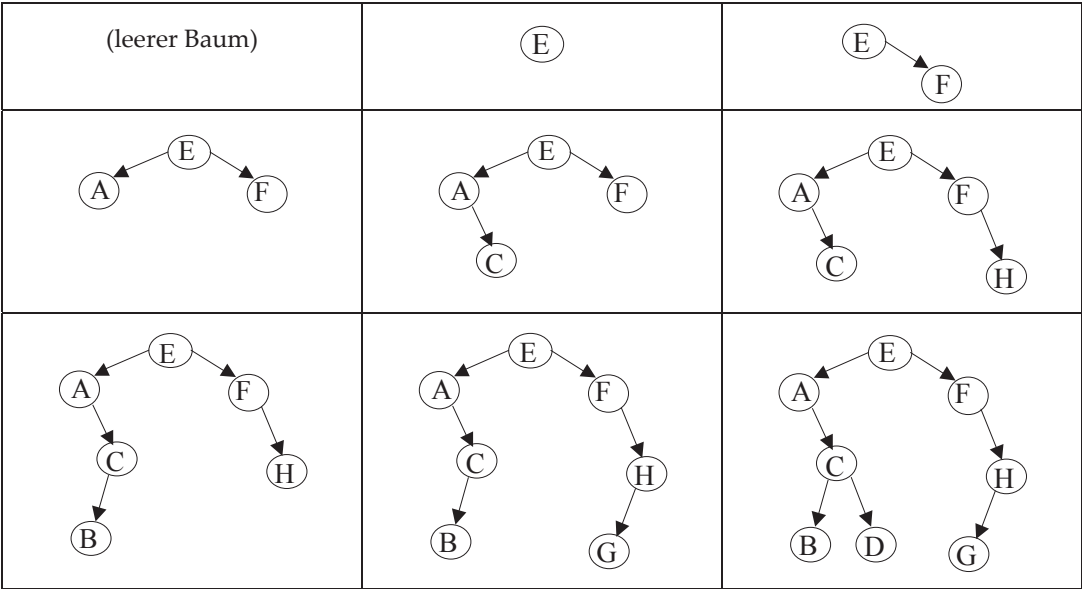


Abbildung 6.15: Eintragen in einen sortierten Binärbaum

**Aufgabe 6.13:** Programmieren Sie die Methoden

```
public E kleinstesElement(); // liefert das kleinste Element im Baum
public E groesstesElement(); // liefert das größte Element im Baum
```

sowohl rekursiv wie auch mit Wiederholung.

**Aufgabe 6.14:** Ergänzen Sie das obige Programm durch Ausgaben. Tragen Sie 20 Zahlen auf Papier in den Baum ein und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Ausgabe.

**6.3.3. Löschen in Binärbäumen**

Der Algorithmus für `loeschen` ist nicht einfach. Nach der rekursiven Suche muss unterschieden werden, wie viele Nachfolger der zu löschende Knoten hat: keinen (Fall 1), einen (Fall 2) oder zwei (Fall 3). Der Fall 1 ist problemlos: Die `Knoten`-Referenz im Baum (ohne Nachfolger) muss einfach auf `null` gesetzt werden.



Abbildung 6.16: Fall 1 (kein Nachfolger: löschen)

Im Fall 2 muss der Nachfolgeknoten an die Stelle des zu löschenden Knotens umgehängt werden.

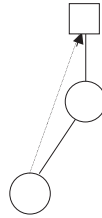


Abbildung 6.17: Fall 2 (ein Nachfolger: umhängen)

Fall 3 ist deswegen schwierig, weil man zwei Teilbäume (den linken und den rechten Nachfolger des zu löschenden Knotens) an die Stelle des zu löschenden Knotens einhängen muss. Hierzu wird der Baum lokal etwas umorganisiert: Das kleinste Element des rechten (oder alternativ das größte Element des linken) Teilbaums muss gefunden werden. Dieser Knoten hat höchstens einen Nachfolger. Der Inhalt dieses Elements wird in den zu löschenden Knoten kopiert. Wenn er der unmittelbare (rechte) Nachfolgeknoten des zu löschenden Elements ist, wird er direkt ausgehängt (indem sein rechter Nachfolger als rechter Nachfolger des gefundenen Knotens eingehängt wird). Ansonsten kann dieses kleinste Element rekursiv gelöscht werden. Da es höchstens einen (rechten) Nachfolger hat, läuft die Rekursion in den Fall 1 oder 2 hinaus.

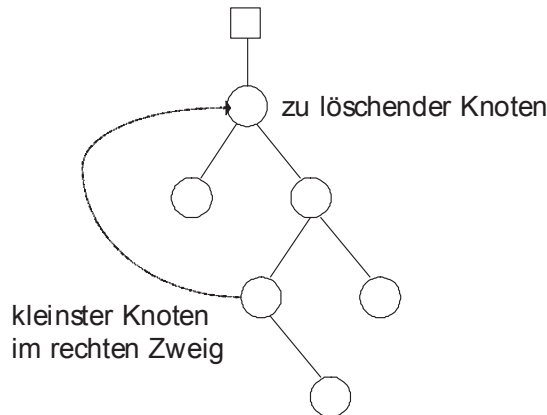


Abbildung 6.18: Fall 3 (zwei Nachfolger: austauschen)

In Java kann dies folgendermaßen programmiert werden:

```
public void loeschen(final E element) {
    if (istLeer())
        return; // element ist nicht vorhanden; Alternativ: Ausnahme auslösen
    else if (element.compareTo(knoten.inhalt) < 0) // element < inhalt
        knoten.links.loeschen(element); // suchen im linken Teilbaum
    else if (knoten.inhalt.compareTo(element) < 0) // element > inhalt
        knoten.rechts.loeschen(element); // suchen im rechten Teilbaum
    // else element == inhalt; Element gefunden
    else if (knoten.links.istLeer()) { // höchstens ein Nachfolger
```

```

    if (knoten.rechts.istLeer()) // kein Nachfolger; Fall 1
        knoten = null; // gefundenen Knoten einfach vernichten
    else // ein Nachfolger rechts; Fall 2
        knoten = rechterKnoten(); // rechten Teilbaum umhängen
}
else if (knoten.rechts.istLeer()) // ein Nachfolger links; Fall 2
    knoten = linkerKnoten(); // linken Teilbaum umhängen
// else zwei Nachfolger: Fall 3
/* das kleinste Element im rechten (größeren) Teilbaum wird gesucht,
   dann mit dem gefundenen Element ausgetauscht und gelöscht: */
else if (rechterKnoten().links.istLeer()) {
    // rechts hat keinen linken Nachfolger: kann kopiert und aushängt werden
    knoten.inhalt = rechterKnoten().inhalt; // Inhalt von rechts kopieren
    knoten.rechts = rechterKnoten().rechts; // Knoten aushängen
} else { // das kleinste Element in rechts suchen, austauschen und löschen:
    Baum<E> vorgaenger = knoten.rechts.vorgaengerDesKleinsten();
    Baum<E> kleinster = vorgaenger.knoten.links;
    // kleinster hat höchstens einen (rechten) Nachfolger
    this.knoten.inhalt = kleinster.knoten.inhalt; // Inhalt kopieren
    vorgaenger.loeschen(kleinster.knoten.inhalt); // kleinsten Knoten löschen
}
}
private Baum<E> vorgaengerDesKleinsten() {
    // liefert den Baum, dessen linker Nachfolger den kleinsten Wert hat
    if (linkerKnoten().links.istLeer()) // links hat keinen linken Nachfolger
        return this;
    else
        return knoten.links.vorgaengerDesKleinsten(); // rekursiv
}
private Knoten<E> linkerKnoten() { return knoten.links.knoten; }
private Knoten<E> rechterKnoten() { return knoten.rechts.knoten; }

```

Durch den wiederholten Austausch des kleinsten Elements des rechten Teilbaums im Fall 3 kann der Baum „einseitig“ werden. Das Verfahren ist etwas besser, wenn die Methode `vorgaengerDesGroessten` (mit geeigneter Vereinbarung) alternierend zu `vorgaengerDesKleinsten` aufgerufen wird. Dadurch wird der Baum etwas ausgeglichener, es wird hierfür jedoch keine Garantie geboten. Im nächsten Kapitel lernen wir einen Algorithmus kennen, der die Ausgeglichenheit des Baumes sicherstellt.

Nach dem obigen Algorithmus löschen wir jetzt die Buchstaben (E F A C H B G D) in derselben Reihenfolge aus dem Baum, der nach der Abbildung 6.15 auf Seite 125 aufgebaut wurde:

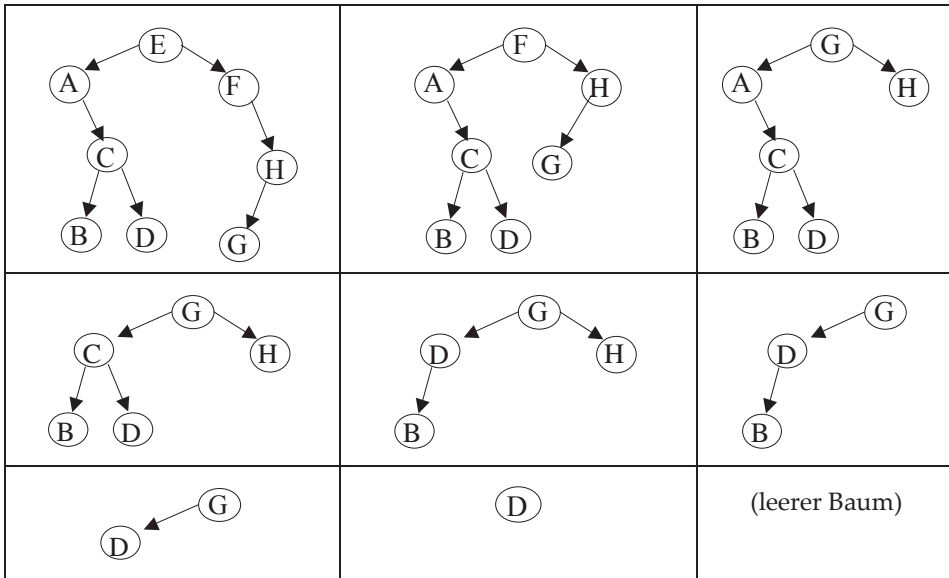


Abbildung 6.19: Löschen im sortierten Binärbaum

**Aufgabe 6.15:** Modifizieren Sie Ihren Testtreiber aus der vorigen Aufgabe 6.14: Nachdem Sie den Baum aufgebaut haben, löschen Sie alle Elemente nacheinander; rufen Sie nach jedem Löschen `inorder` auf. Üben Sie den Algorithmus vorher auf Papier und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Ausgabe.

**Aufgabe 6.16:** Der Löschalgorithmus ist auch für eine Baumdarstellung implementierbar, die um eine Datenkomponente ergänzt wird, durch die jeder Knoten seinen Vaterknoten referiert. Dann kann ein gefundenes Element leicht ausgehängt werden. Der Wurzelknoten muss allerdings immer gesondert behandelt werden.

Erweitern Sie nun die Klasse `Binaerbaum` auf diese Weise und implementieren Sie darin `loeschen`. Der Testtreiber aus der vorherigen Übung soll hierfür – nach geeigneter Umgestaltung – auch funktionieren.

## 6.4. Ausgeglichene Bäume

Ein Baum wird aufgebaut, indem die Operation `eintragen` (z.B. in einer Schleife) öfter aufgerufen wird. Wenn die `element`-Parameter dieser Aufrufe eine zufällige Folge bilden, wird ein Baum mit mehr oder weniger gleichmäßig verteilten Zweigen und Blättern erzeugt. Seine *Tiefe* ist ca.  $2 \log_2 n$ , wo  $n$  die Anzahl der Knoten im Baum ist. Wenn aber die einzutragenden Werte eine sortierte (oder umgekehrt sortierte) Folge bilden, entsteht ein entarteter Baum: Alle Referenzen `links` (bzw. `rechts`) sind `null`, die Referenzen `rechts` (bzw. `links`) bilden eine verkettete Liste. Die Tiefe des Baumes ist  $n$  und das `eintragen` hat die Zeitkomplexität  $O(n)$ .

Ein verbesserter Algorithmus des Eintragens (und des Löschens) erzeugt einen *ausgeglichenen Baum*. Ein Baum heißt *vollständig ausgeglichen*, wenn sich das *Gewicht* (die Anzahl der Knoten) des linken und rechten Teilbaums jedes Knotens höchstens um 1 unterscheidet. In diesem Fall ist die Tiefe des Baumes mit  $n$  Elementen kleiner als  $\log_2(n+1)$ . Die Algorithmen der Methoden `eintragen` und `loeschen` sind dann aber unwirtschaftlich: Der Baum muss regelmäßig (im Durchschnitt bei jedem 2. Aufruf) umstrukturiert werden. Adelson-Velskii und Landis<sup>1</sup> haben eine weichere Definition der Ausgeglichenheit vorgeschlagen, die den Operationen eine Zeitkomplexität von  $O(\log_2 n)$  garantiert.

Sie nennen einen Baum *ausgeglichen*, wenn sich nicht die *Gewichte*, sondern die *Tiefen* für jeden Knoten des rechten und des linken Teilbaums höchstens um 1 unterscheiden. Solche Bäume heißen *AVL-Bäume*<sup>2</sup>. Alle Methoden, die den Baum verändern, sollen dafür Sorge tragen, dass die Ausgeglichenheit nicht verletzt wird; gegebenenfalls sollen sie den Baum umstrukturieren. Bemerkenswert hierbei ist, dass die Umstrukturierung entweder lokal bleibt (beim `eintragen`) oder höchstens einem Pfad entlang<sup>3</sup> durchgeführt wird; die Komplexität des Umstrukturierens ist also  $\log_2 n$ .

Um die Ausgeglichenheit zu überwachen, wird jedem Knoten eine zusätzliche Komponente `ausgleich` hinzugefügt, die drei `enum`-Werte aufnehmen kann: `LINKS` (für *linkslastig*), `AUSG` (für *ausgeglichen*) und `RECHTS` (für *rechtslastig*). Jede verändernde Methode muss diese Komponente aktualisieren und dafür sorgen, dass die Ausgeglichenheit bewahrt bleibt.

#### 6.4.1. Eintragen in ausgeglichene Bäume

Für die Methode `eintragen` an einen bestimmten Knoten müssen wir folgende Fälle unterscheiden:

- Die beiden Tiefen sind vor dem Methodenaufruf gleich (`AUSG`); durch das `eintragen` werden sie unterschiedlich (`LINKS` oder `RECHTS`), die Bedingung wird also nicht verletzt.
- Die Tiefe des Teilbaums (`links` oder `rechts`), in den das neue Element eingefügt werden soll, ist kleiner als die des anderen (`RECHTS` bzw. `LINKS`). Durch das `eintragen` werden die Tiefen gleich (`AUSG`).
- Der Teilbaum (`links` oder `rechts`), in den das neue Element eingefügt werden soll, ist tiefer als der andere (`LINKS` bzw. `RECHTS`). Durch das `eintragen` wird die Ausgeglichenheit verletzt. Der Baum muss umstrukturiert werden.

---

<sup>1</sup> s. [AVL]

<sup>2</sup> nach den Entwicklern Adelson-Velskii und Landis

<sup>3</sup> d.h. von der Wurzel über innere Knoten bis zum Blatt

Den Prozess der Umstrukturierung nennen Adelson-Velskii und Landis *Rotieren*. Sie unterscheiden zwischen *einfachem* und *doppeltem* Rotieren. Folgende Fälle können dabei auftreten<sup>1</sup>:

**Fall 1:** Nach dem *eintragen* wird der Baum *B* auf der Abbildung 6.20 *außen* schwer: Der schwere Zweig wird von der Wurzel mit links-links (bzw. rechts-rechts) erreicht. Das *einfache* Rotieren der Knoten *A* und *B* gleicht die Tiefen der Wurzel aus:

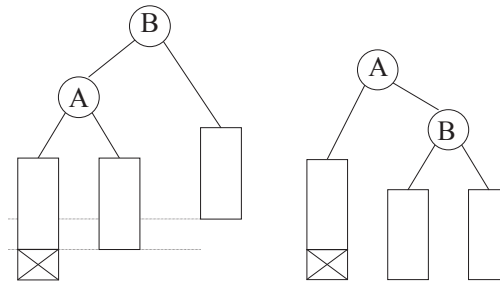


Abbildung 6.20: Fall 1 – einfaches Rotieren<sup>2</sup>

**Fall 2:** Nach dem *eintragen* wird der Baum *C* auf der Abbildung 6.21 *innen* schwer: Der schwere Zweig wird von der Wurzel mit links-rechts (bzw. rechts-links) erreicht. Das *doppelte* Rotieren der Knoten *A*, *B* und *C* gleicht die Tiefen der Wurzel aus:

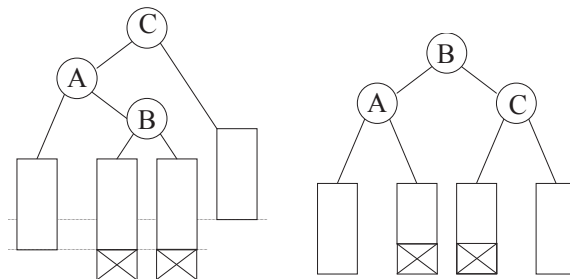


Abbildung 6.21: Fall 2 – doppeltes Rotieren<sup>3</sup>

Die Algorithmen für das Rotieren werden verbal für die linke (bzw. rechte) Seite folgendermaßen formuliert:

- Wenn von der Wurzel (*B* in der Abbildung 6.20) zum schweren Ast (*A.links* bzw. symmetrisch *A.rechts*) zweimal die gleiche Richtung (links-links bzw. rechts-rechts) führt, dann ist der Baum *außen schwer*; den Knoten (*A* in der Abbildung 6.20) direkt un-

<sup>1</sup> Die Zeichnungen gelten hier nur für die linke Seite; für die rechte Seite ist die Darstellung symmetrisch.

<sup>2</sup> Die Zeichnung stammt aus [Wir]; die symmetrischen Fälle werden nicht dargestellt.

<sup>3</sup> Nur einer der gekennzeichneten Äste (auf dem Baum *B*) ist zu lang.

ter dem gestörten Knoten (B) muss man hochziehen. Wir sprechen in diesem Fall vom *einfachen Rotieren*:

- Der schwere Knoten A wird zur neuen Wurzel;
- der schwere Ast wird rechts (bzw. links) an die neue Wurzel gehängt;
- die alte Wurzel (B) wird links (bzw. rechts) an die neue Wurzel gehängt.
- Wenn von der Wurzel (C in der Abbildung 6.21) zum schweren Ast (B.links oder B.rechts) unterschiedliche Richtungen (links-rechts bzw. symmetrisch rechts-links) führen, dann ist der Baum *innen schwer*; den unteren schweren Knoten (B) muss man um zwei Ebenen hochziehen. Dieser Vorgang heißt *doppeltes Rotieren*:
  - Der untere schwere Knoten (B) wird zur neuen Wurzel;
  - die alte Wurzel (C) wird rechts (bzw. symmetrisch links) an die neue Wurzel gehängt;
  - der obere schwere Knoten (A) wird links (bzw. symmetrisch rechts) an die neue Wurzel gehängt;
  - die alten Äste (B.links und B.rechts, von denen einer den neuen Knoten enthält) der neuen Wurzel (B) müssen an die gesenkten Knoten verteilt werden (A.rechts und C.links rechts unten in der Abbildung 6.20).

Der zu lange Ast wird in beiden Fällen nach oben gezogen; im Endeffekt entsteht ein ausgeglichener Baum.

Die Algorithmen fürs Rotieren formulieren wir in Methoden der Klasse AVLBaum:

```
class AVLBaum<E extends Comparable<E>> { // 1
    private static enum Ausgleich { LINKS, AUSG, RECHTS } // 2 linkslastig, ausgeglichen,
    private static class Knoten<E extends Comparable<E>> {
        E inhalt;
        AVLBaum<E> links, rechts;
        Ausgleich ausgleich; // momentaner Zustand der Ausgeglichenheit
        int anzahl; // beim Eintragen mit demselben inhalt wird hochgezählt
        Knoten(final E inhalt) { // ensures links != null && rechts != null
            this.inhalt = inhalt;
            links = new AVLBaum<E>(); // ensures links.istLeer();
            rechts = new AVLBaum<E>(); // ensures rechts.istLeer();
            ausgleich = Ausgleich.AUSG;
            anzahl = 1;
        }
        void linkslastiger() { // Zweig wird linkslastiger
            ausgleich = ausgleich == Ausgleich.RECHTS ? Ausgleich.AUSG : Ausgleich.LINKS;
        }
        void rechtslastiger() { ... } // symmetrisch: Zweig wird rechtslastiger
        void kopieren(AVLBaum<E> quelle) {
```

<sup>1</sup> Eine Erweiterung von Baum und Baum.Knoten wäre möglich aber zu aufwändig.

<sup>2</sup> Eine Aufzählungsvariable vom Typ enum (seit der Java-Version 5) kann die in der Definition angegebenen Werte aufnehmen. Sein Typ erweitert java.lang.Enum.

```

        inhalt = quelle.knoten.inhalt; anzahl = quelle.knoten.anzahl;
    }
} // Knoten
private Knoten<E> knoten;
private boolean istLeer() { return knoten == null; }
private boolean linksIstLeer() { return knoten.links.istLeer(); }
private boolean rechtsIstLeer() { return knoten.rechts.istLeer(); }
private AVLBaum(final AVLBaum<E> quelle) { // privater Kopierkonstruktor
    knoten = new Knoten<E>(quelle.knoten.inhalt);
    knoten.anzahl = quelle.knoten.anzahl;
    knoten.links = quelle.knoten.links;
    knoten.rechts = quelle.knoten.rechts;
}
public AVLBaum() { knoten = null; }
public boolean eintragen(final E element) {
    // ensures vorhanden(element);
    // boolean-Ergebnis wird nur privat benutzt: besagt, ob der Ast verlängert wurde
    boolean astVerlängert = false;
    if (istLeer()) // Baum ist leer
        knoten = new Knoten<E>(element);
    else if (element.compareTo(knoten.inhalt) < 0) { // Eintragen in links
        if (linksIstLeer()) { // Einfügestelle gefunden
            knoten.links.knoten = new Knoten<E>(element);
            knoten.links.lastiger(); // Zweig wird linkslastiger
            astVerlängert = rechtsIstLeer();
        } else { // ! knoten.links.istLeer()
            astVerlängert = knoten.links.eintragen(element); // rekursiv
            if (astVerlängert) // Ausgeglichenheit prüfen
                switch (knoten.ausgleich) {
                    case AUSG: // Ausgeglichenheit bleibt erhalten
                        knoten.ausgleich = Ausgleich.LINKS; // Baum wird linkslastig
                        break;
                    case RECHTS: // Ausgeglichenheit bleibt erhalten
                        knoten.ausgleich = Ausgleich.AUSG;
                        astVerlängert = false;
                        break;
                    case LINKS: // Ausgeglichenheit verletzt, Rotieren nötig
                        if (linkerKnoten().ausgleich == Ausgleich.RECHTS) // innen schwer:
                            doppeltesRotierenLinks();
                        else // außen schwer:
                            einfachesRotierenLinks();
                        knoten.ausgleich = Ausgleich.AUSG;
                        astVerlängert = false;
                }
            };
        }
    } else if (element.compareTo(knoten.inhalt) > 0) { ... // rechts symmetrisch
    } else // element.compareTo(knoten.inhalt) == 0, Element im Baum gefunden
        knoten.anzahl++; // hochzählen
    return astVerlängert;
}
private Knoten<E> linkerKnoten() { return knoten.links.knoten; }
private Knoten<E> rechterKnoten() { return knoten.rechts.knoten; }
private void einfachesRotierenLinks() {
    final AVLBaum<E> zweigB = new AVLBaum<E>(this);

```



```

    final AVLBaum<E> zweigA = knoten.links;
    final AVLBaum<E> mittlererAst = zweigA.knoten.rechts;
    knoten.kopieren(zweigA); // schwerer Knoten wird neue Wurzel
    knoten.rechts = zweigB; // Knoten umhängen
    knoten.links = zweigA.knoten.links;
    knoten.linkslastiger(); // Zweig wird linkslastiger
    zweigB.knoten.links = mittlererAst; // mittleren Ast umhängen
    // äußere Zweige bleiben
    zweigB.knoten.ausgleich = Ausgleich.AUSG;
}
private void einfachesRotierenRechts() { ... } // symmetrisch
private void doppeltesRotierenLinks() {
    final AVLBaum<E> zweigC = new AVLBaum<E>(this);
    final AVLBaum<E> zweigA = zweigC.knoten.links;
    final AVLBaum<E> zweigB = zweigA.knoten.rechts;
    final AVLBaum<E> linkerAst = zweigB.knoten.links; // schwerer Ast
    final AVLBaum<E> rechterAst = zweigB.knoten.rechts; // anderer Ast
    knoten.kopieren(zweigB); // schwerer Knoten wird hochgezogen
    knoten.links = zweigA; // Knoten an die neue Wurzel umhängen:
    knoten.rechts = zweigC;
    zweigA.knoten.rechts = linkerAst; // Äste in der Mitte umhängen
    zweigC.knoten.links = rechterAst; // die äußeren Äste bleiben
    if (zweigB.knoten.ausgleich == Ausgleich.LINKS)
        zweigC.knoten.ausgleich = Ausgleich.RECHTS;
    else
        zweigC.knoten.ausgleich = Ausgleich.AUSG;
    zweigA.knoten.linkslastiger(); // ZweigA wird linkslastiger
    knoten.ausgleich = Ausgleich.AUSG;
}
private void doppeltesRotierenRechts() { ... } // symmetrisch
... // weitere Methoden im nächsten Kapitel
}

```

**Aufgabe 6.17:** Ergänzen Sie das obige Programm durch Ausgaben. Tragen Sie 20 Zahlen auf Papier in den AVL-Baum ein und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Ausgabe.

#### 6.4.2. Löschen in ausgeglichenen Bäumen

Das Löschen eines Knotens mit gegebenem Inhalt im ausgeglichenen Baum ist etwas aufwändiger als das Einfügen. Es kann aber nach demselben Prinzip durchgeführt werden: Im Baum wird zuerst der zu löschende Knoten gefunden. Nach dem Löschen des gefundenen Knotens muss jedoch *jeder* Knoten auf dem Pfad bis zur Wurzel auf Ausgeglichenheit überprüft und gegebenenfalls rotiert werden:

```

public boolean loeschen(final E element) {
    // boolean Ergebnis wird nur privat benutzt: besagt, ob der Ast gekürzt wurde
    boolean astGekuerzt = false;
    if (istLeer()) ; // element ist nicht vorhanden
    else if (element.compareTo(knoten.inhalt) < 0) { // element kleiner
        astGekuerzt = knoten.links.loeschen(element); // suchen links
        if (astGekuerzt)

```

```

        astGekuerzt = linksAusgleichen();
    }
    else if (element.compareTo(knoten.inhalt) > 0) { ... } // symmetrisch rechts
    else if (knoten.anzahl > 1) // element.compareTo(knoten.inhalt) == 0, gefunden
        knoten.anzahl --;
    else { // anzahl == 1, der Knoten soll gelöscht werden
        if (linksIstLeer()) { // kein linker Nachfolger
            knoten = rechterKnoten(); astGekuerzt = true; // rechten Ast umhängen
        } else if (rechtsIstLeer()) { // kein rechter Nachfolger
            knoten = linkerKnoten(); astGekuerzt = true; // linken Ast umhängen
        } else { /* zwei Nachfolger: der kleinste Knoten im rechten Zweig
            (wäre genauso gut: der Größte im linken Zweig) soll hochgezogen werden */
            AVLBaum<E> kleinster = rechterKnoten().links.istLeer() ?
                // rechts hat keinen linken Nachfolger:
                rechterKnoten().rechts :
                // rechts hat einen linken Nachfolger; der Kleinste muss gesucht werden:
                knoten.rechts.vorgaengerDesKleinsten().knoten.links;
            if (kleinster.istLeer()) // weder links noch rechts wurde ein Kleinsten gefunden
                kleinster = knoten.rechts; // der Kleinste ist rechts
            // kleinster hat höchstens einen (und zwar den rechten) Nachfolger
            knoten.kopieren(kleinster);
            kleinster.knoten.anzahl = 1;
            // kleinsten Knoten im rechten Zweig löschen:
            astGekuerzt = knoten.rechts.loeschen(kleinster.knoten.inhalt);
            if (astGekuerzt)
                astGekuerzt = rechtsAusgleichen();
        }
    }
    return astGekuerzt;
}

private AVLBaum<E> vorgaengerDesKleinsten() { // 1
    return linkerKnoten().links.istLeer() ?
        this : // links hat keinen linken Nachfolger
        knoten.links.vorgaengerDesKleinsten(); // rekursiv
}

private boolean linksAusgleichen() { // linker Ast wurde kürzer
    // boolean Ergebnis besagt, ob der Ast gekürzt wurde
    boolean astGekuerzt = true;
    Ausgleich ausgleichRechts = Ausgleich.AUSG;
    if (!rechtsIstLeer())
        ausgleichRechts = rechterKnoten().ausgleich;
    switch (knoten.ausgleich) {
        case LINKS: knoten.ausgleich = Ausgleich.AUSG; break;
        case AUSG: knoten.ausgleich = Ausgleich.RECHTS; astGekuerzt = false; break;
        case RECHTS: // Ausgleich nötig
            switch (ausgleichRechts) {
                case LINKS: doppeltesRotierenRechts(); break;
                case AUSG: einfachesRotierenRechts();
                    linkerKnoten().ausgleich = Ausgleich.RECHTS;
            }
    }
}

```

---

<sup>1</sup> eine elegantere Formulierung der Methode aus Kapitel 6.3.3. (ab Seite 127)

```

        knoten.ausgleich = Ausgleich.LINKS;
        astGekuerzt = false;
        break;
    case RECHTS: einfachesRotierenRechts();
        linkerKnoten().ausgleich = knoten.ausgleich = Ausgleich.AUSG;
    }
}
return astGekuerzt;
}
private boolean rechtsAusgleichen() { ... } // symmetrisch

```

**Aufgabe 6.18:** Setzen Sie die Aufgabe 6.17 fort, indem Sie die 20 Zahlen nacheinander aus dem AVL-Baum löschen. Ergänzen Sie auch Ihren Testtreiber durch geeignete Ausgaben (z.B. Aufruf eines preorder-Iterators nach jedem `loeschen`), mit denen Sie Ihre Ergebnisse vergleichen können.

## 6.5. 2-3-4-Bäume

Das AVL-Kriterium ist nur *eine* Möglichkeit, das Wachstum der Bäume zu steuern und Ausgeglichenheit zu bewahren. Eine Alternative hierzu sind die *2-3-4-Bäume*.

### 6.5.1. Definition

In einem sortierten Binärbaum dauert das Einfügen eines Elementes nur einen Schritt (wenn man schon weiß, *wo* man das Element einfügen will bzw. muss). Das Suchen braucht im Durchschnitt nur etwa  $2 \log_2 n$  viele Schritte und wenn der Baum besonders gut ausgeglichen ist, dann braucht man sogar etwa  $\log_2 n$  Schritte. Es bleibt aber ein kleiner Pferdefuß: Wenn der Suchbaum extrem unausgeglichen ist, dann braucht man zum Suchen bis zu  $n$  Schritte (im positiven und im negativen Fall).

Im Folgenden wird eine weitere Technik beschrieben, mit der man verhindern kann, dass ein Baum unausgeglichen wird. Diese Technik basiert nicht auf Binärbäumen (die man auch 2-Bäume nennen könnte) sondern auf so genannten *2-3-4-Bäumen*.

Ein 2-3-4-Baum kann nicht nur *2-er-Knoten* enthalten (die aus einem Schlüssel und zwei Referenzen bestehen), sondern auch *3-er-Knoten* (die aus zwei Schlüsseln und drei Referenzen bestehen) und *4-er-Knoten* (die aus drei Schlüsseln und vier Referenzen bestehen).<sup>1</sup>

Der folgende 2-3-4-Baum besteht aus einem 3-er-Knoten, zwei 4-er-Knoten und einem 2-er-Knoten:

---

<sup>1</sup> Die Beispiele stammen (nach Überarbeitung) aus [Sed].

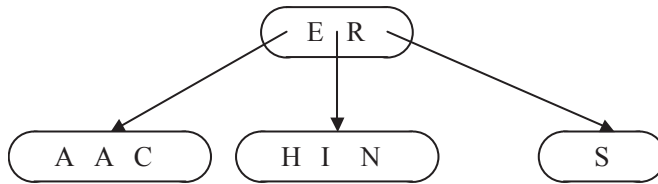


Abbildung 6.22: Ein sortierter 2-3-4-Baum

**Aufgabe 6.19:** Zeichnen Sie einen (sortierten) 2-3-4-Baum, der aus mindestens einem 2-er-, einem 3-er- und einem 4-er-Knoten besteht und in dem die 12 Schlüssel „A“ bis „L“ vorkommen.

### 6.5.2. Spalten

2-3-4-Bäume sind für uns nur dann interessant, wenn sie *sortiert* sind. Wir setzen ab jetzt voraus, dass alle hier erwähnten 2-3-4-Bäume sortiert sind, auch wenn das nicht jedes Mal ausdrücklich erwähnt wird.

Im folgenden Algorithmus ist es notwendig, 4-er-Knoten in einem 2-3-4-Baum zu „spalten“. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

**Fall 1:** Der zu spaltende 4-er-Knoten ist der Wurzelknoten des Baumes<sup>1</sup>:

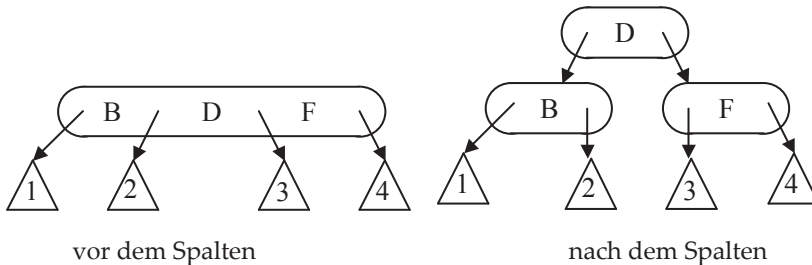
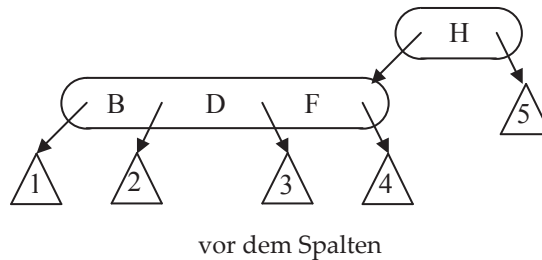


Abbildung 6.23: Spalten eines Wurzelknotens

**Fall 2:** Der zu spaltende 4-er-Knoten hängt an einem 2-er-Knoten:



vor dem Spalten

<sup>1</sup> Die Dreiecke mit den Ziffern darin bezeichnen beliebige Unterbäume.

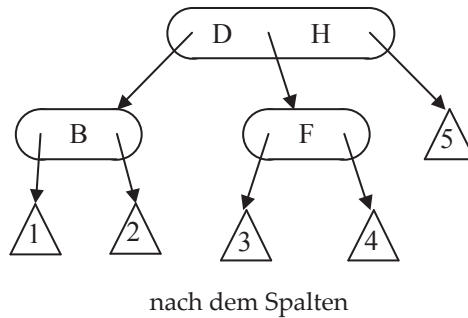


Abbildung 6.24: Spalten des Unterknotens eines 2-er-Knotens

Es soll beachtet werden, dass alle oben beschriebenen Spaltungen rein *lokal* ablaufen können. Dies heißt, dass unabhängig von der Größe des Baums, in dem man einen 4-er-Knoten spalten will, immer nur zwei bzw. drei Knoten mit ihren Schlüsseln und Referenzen von der Spaltung betroffen sind. Alle anderen Knoten des Baumes bleiben völlig unverändert. Somit kann man jede Spaltung als *einen* (komplexen) Schritt auffassen. Seine Komplexität ist  $O(1)$ .

**Fall 3:** Der zu spaltende 4-er-Knoten hängt an einem 3-er-Knoten:

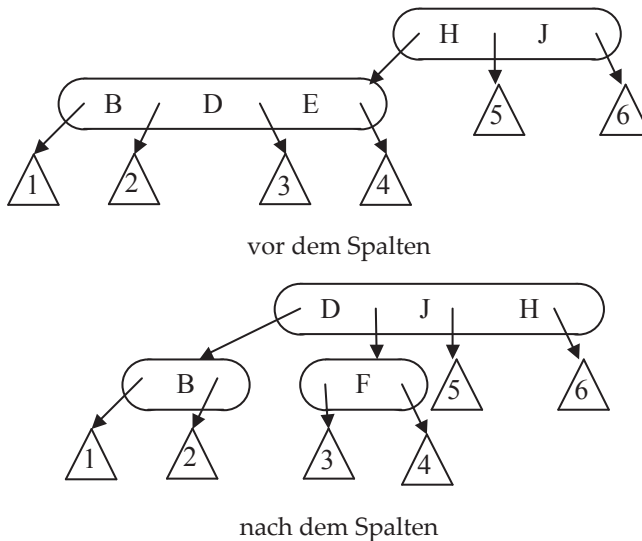


Abbildung 6.25: Spalten des Unterknotens eines 3-er-Knotens

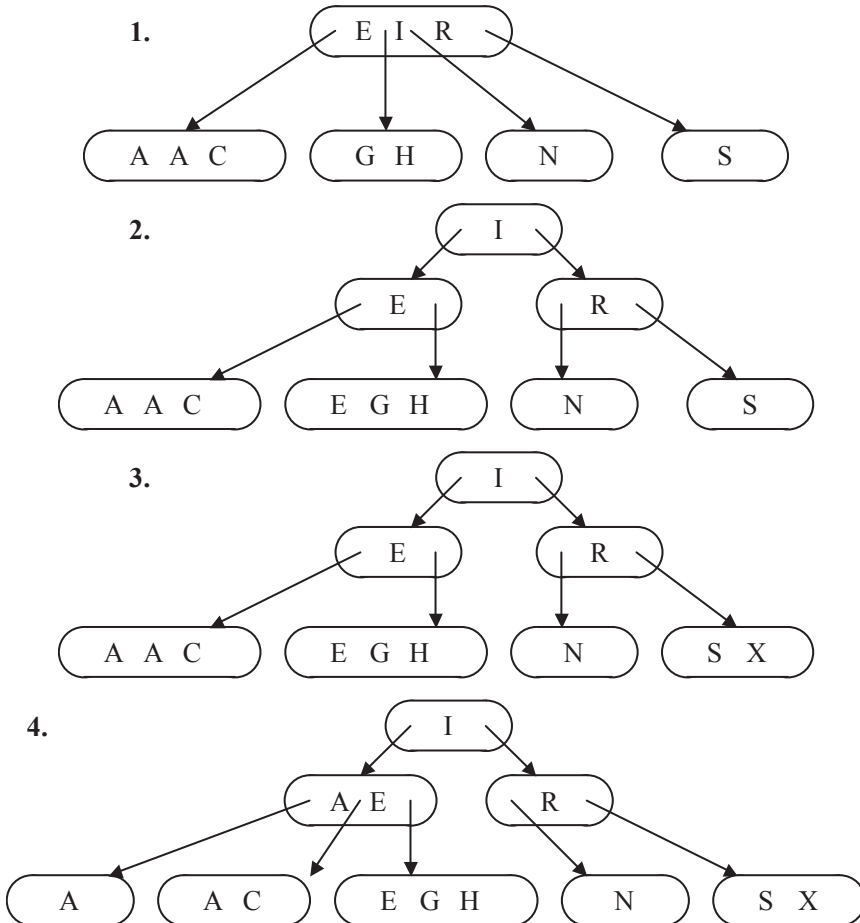
Im Fall 3 haben wir einen 4-er-Knoten gespalten und damit beseitigt, aber gleichzeitig haben wir aus einem 3-er-Knoten einen neuen 4-er-Knoten gemacht. In einem gewissen Sinn haben wir also einen 4-er-Knoten um eine Ebene nach oben *verschoben*. Ein wiederholtes Spalten dieses Knotens kann um eine weitere Ebene nach oben verschoben werden. Somit ist die Operation *Spalten* für einen 4-er-Knoten nicht lokal, wohl aber *einem Pfad* entlang durchführbar. Ihre Komplexität ist also  $O(\log n)$ .

### 6.5.3. Einfügen

Wenn wir ein Element in einen 2-3-4-Baum einfügen wollen, dann gehen wir folgendermaßen vor.

Wir suchen von oben nach unten im Baum nach dem Knoten, in den das neue Element hineingehört. Wenn wir bei dieser Suche an einem 4-er-Knoten vorbeikommen, dann spalten wir ihn, wie oben beschrieben. Mit diesem „suchen und spalten“ hören wir erst auf, wenn wir auf der untersten Ebene des Baumes angekommen sind. Der Knoten auf der untersten Ebene, bei dem unsere Suche endet, ist sicher kein 4-er-Knoten (sonst hätten wir ihn vorher gespalten), sondern ein 2-er- oder ein 3-er-Knoten. Diesen Knoten erweitern wir mit dem einzufügenden Element zu einem 3-er- bzw. zu einem 4-er-Knoten.

**Beispiel:** In den folgenden 2-3-4-Baum werden Elemente mit den Schlüssel E, X, A, M, P, L und E (in dieser Reihenfolge) eingefügt:



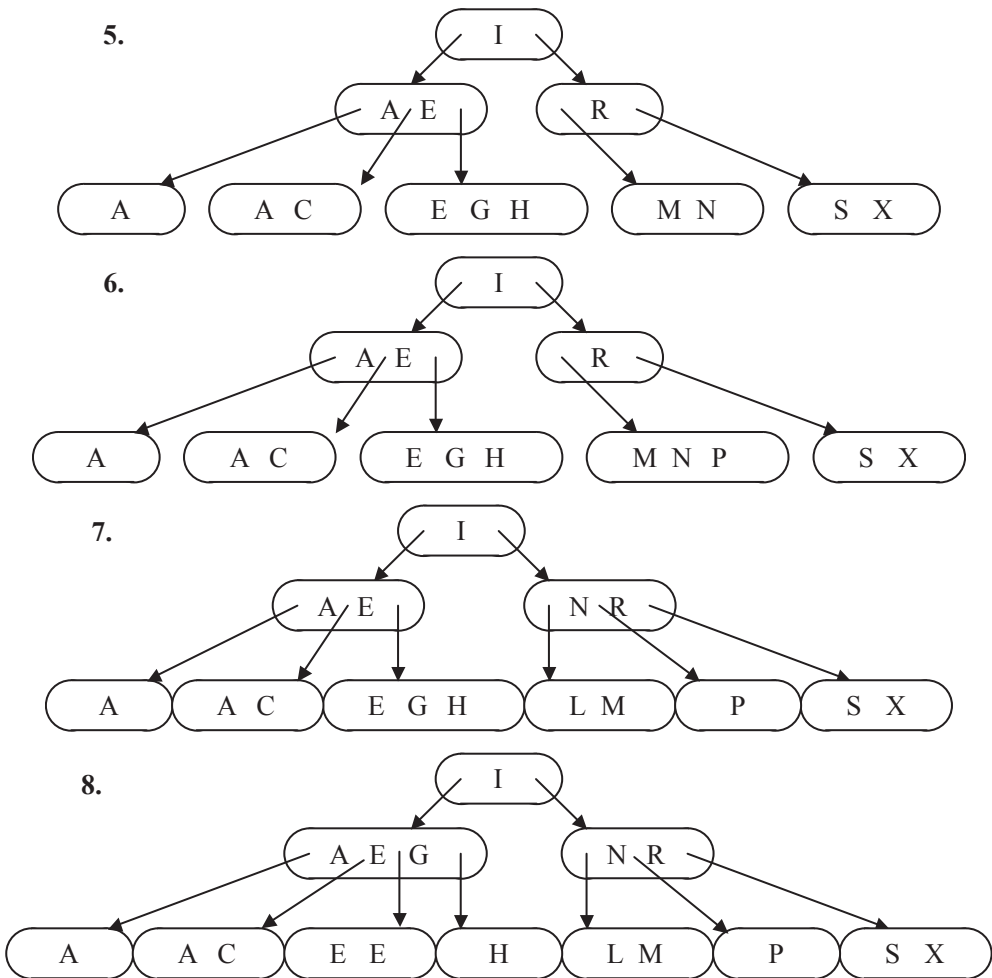


Abbildung 6.26: Einfügen im 2-3-4-Baum

**Aufgabe 6.20:** Fügen Sie Elemente mit den Schlüsseln H, A, L, L, O, S, U, S und I (in dieser Reihenfolge) in einen anfänglich leeren 2-3-4-Baum ein.

## 6.6. Rot-Schwarz-Bäume

2-3-4-Bäume sind nicht ganz einfach zu implementieren. Insbesondere die Operation „einen 4-er-Knoten spalten“ ist ziemlich kompliziert.

Statt 2-3-4-Bäume *direkt* zu implementieren (indem man z.B. drei Klassen `ZweierKnoten`, `DreierKnoten` und `ViererKnoten` und die Fallunterscheidungen in den Operationen `einfuegen`, `spalten`, `suchen` usw. vereinbart), kann man sie auch durch *Binärbäume* darstellen und diese Binärbäume implementieren. Die entsprechenden Binärbäume nennt man dann *Rot-*

*Schwarz-Bäume.* Die Grundidee dabei ist: Die 3-er- und 4-er-Knoten der 2-3-4-Bäume stellt man als „kleine Binärbäume“ dar und nennt die Kanten in diesen kleinen Binärbäumen *rote* Kanten.

Die Übersetzung von 3-er-Knoten ist also nicht eindeutig, man kann sie wahlweise in einen kleinen Binärbaum mit einer nach *links* oder nach *rechts* *geneigten* roten Kante übersetzen. Die 2-er-Knoten brauchen bei der Übersetzung von 2-3-4-Bäumen in Rot-Schwarz-Bäume nicht verändert zu werden. Sie können „so wie sie sind“ übernommen werden.

Die *roten Kanten* in einem Rot-Schwarz-Baum halten also die „kleinen Binärbäume“ zusammen, die einem 3-er- oder einem 4-er-Knoten entsprechen. Die *schwarzen Kanten* in einem Rot-Schwarz-Baum entsprechen genau den Kanten des 2-3-4-Baumes. Die ursprünglichen Kanten „bleiben schwarz“.

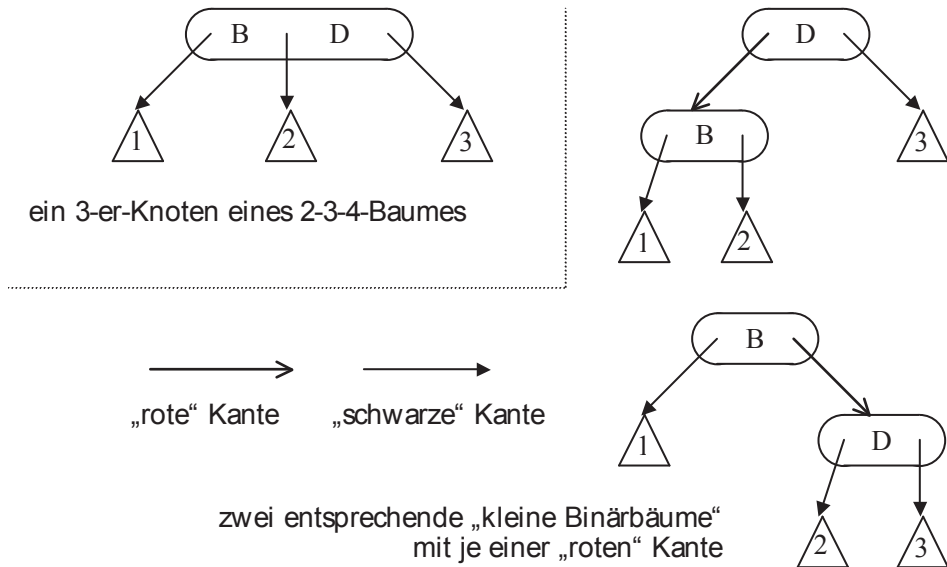


Abbildung 6.27: „Rote“ und „schwarze“ Kanten

**Aufgabe 6.21:** Zeichnen Sie den 2-3-4-Baum, der folgendem Rot-Schwarz-Baum entspricht:



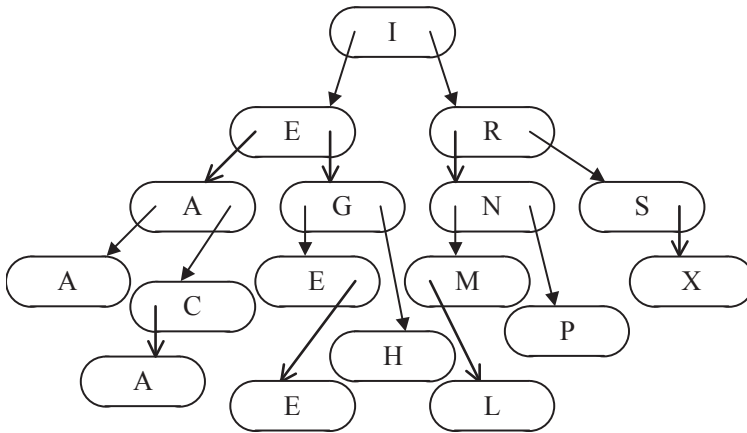


Abbildung 6.28: Ein Rot-Schwarz-Baum

Einige wichtige Eigenschaften von Rot-Schwarz-Bäumen sind folgende:

1. Auf keinem Ast (von der Wurzel zu einem Blatt) liegen zwei rote Kanten hintereinander.
2. Möglicherweise gibt es einen (längsten) Ast, der zur Hälfte aus roten und zur Hälfte aus schwarzen Kanten besteht (alternierend: rot, schwarz, rot, schwarz usw.; oder: schwarz, rot, schwarz, rot usw.).
3. Möglicherweise gibt es einen (kürzesten) Ast, der nur aus schwarzen Kanten besteht.

Der längste Ast ist also höchstens doppelt so lang wie der kürzeste Ast.

Rote und schwarze Kanten kann man besonders „billig“ unterscheiden: Man ergänzt jeden Knoten um eine **boolean**-Variable namens `rot`.

```
class RotSchwarzKnoten extends Knoten {
    boolean rot;
}
```

Wenn die Kante, die zu diesem Knoten führt, rot ist, wird diese Variable auf **true** gesetzt und sonst auf **false**. Man braucht also pro Knoten nur ein zusätzliches Bit.

Um in einem Rot-Schwarz-Baum zu *suchen*, kann man den Suchalgorithmus für „normale“ Binärbäume wörtlich übernehmen. Der Suchalgorithmus ignoriert nur die `rot`-Komponente in den Knoten.

Um in einen Rot-Schwarz-Baum neue Elemente *einzu*fügen, braucht man eine Hilfsoperation, die wir `rotieren` nennen wollen. Man kann sie auf einen Knoten `x` und seinen Vater `vx` anwenden (`gvx` ist der Großvater von `x`, er wird der Vollständigkeit halber mit angegeben). Die Operation `rotieren` hat die folgende Wirkung:

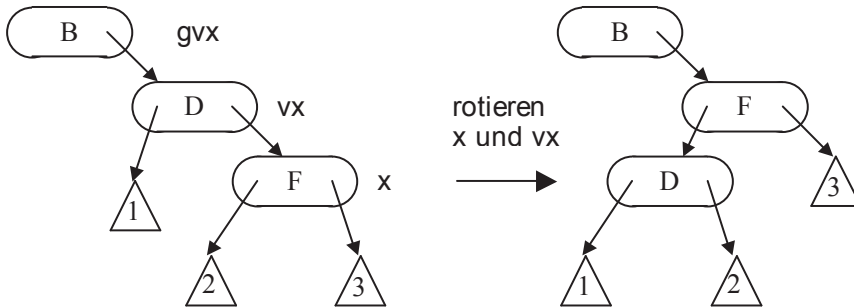


Abbildung 6.29: Rotieren im Rot-Schwarz-Baum

Die Dreiecke bedeuten hier beliebige (evtl. leere) Unterbäume. Der symmetrische Fall wird ähnlich dargestellt:

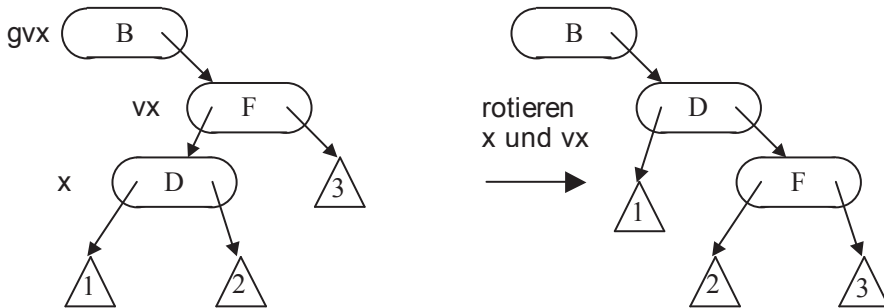


Abbildung 6.30: Symmetrisches Rotieren im Rot-Schwarz-Baum

Zwei Rotationen heben sich also gegenseitig auf.

Wichtig ist: Die Operation *rotieren* lässt einen *sortierten* Binärbaum *sortiert*. Sie ändert zwar die Struktur des Baumes, bringt aber seine Sortierung nicht durcheinander.

Jedem 4-er-Knoten in einem 2-3-4-Baum entspricht ein Baum mit drei Knoten und zwei roten Kanten im entsprechenden Rot-Schwarz-Baum. Jedem 3-er-Knoten in einem 2-3-4-Baum entspricht ein Baum mit zwei Knoten und einer roten Kante im entsprechenden Rot-Schwarz-Baum. Jedem 2-er-Knoten in einem 2-3-4-Baum entspricht ein Baum mit einem Knoten und ohne rote Kante im entsprechenden Rot-Schwarz-Baum. Beim Einfügen von Elementen in einen Rot-Schwarz-Baum müssen wir also 4-er-Bäume *spalten*. Dabei müssen wir insgesamt vier Fälle unterscheiden: Fall 1, Fall 2.1, Fall 2.2 und Fall 2.3.

Im Folgenden bezeichnet  $x$  immer den obersten Knoten des zu spaltenden 4-er-Baumes,  $vx$  den Vater von  $x$ ,  $gvx$  den Großvater von  $x$  und  $ugvx$  den Urgroßvater von  $x$ . Statt „die Kante, die zum Knoten  $a$  führt, rot machen“ sagen wir einfacher: „den Knoten  $a$  rot machen“.

**Fall 1:** Der zu spaltende 4-er-Baum hängt an einem 2-er-Baum. Wir spalten ihn, indem wir  $\times$  rot und die Kinder von  $\times$  schwarz machen:

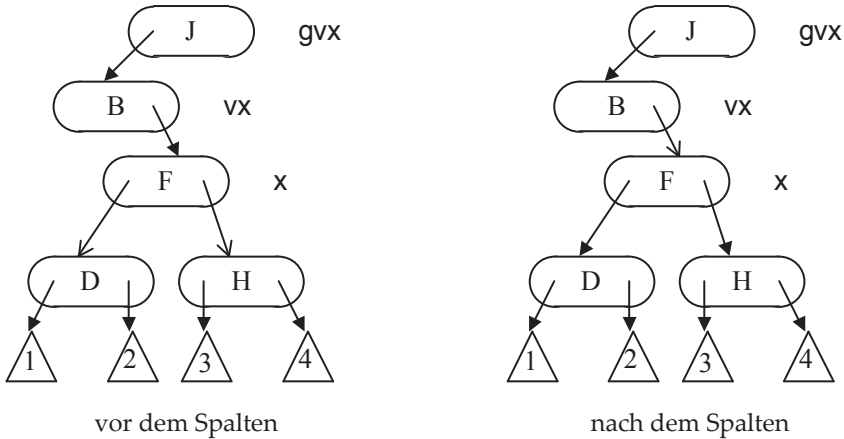


Abbildung 6.31: Spalten, Fall 1

**Fall 2:** Der zu spaltende 4-er-Baum hängt an einem 3-er-Baum. Je nachdem, *wo* er an dem 3-er-Baum hängt, müssen wir drei Unterfälle unterscheiden, die unterschiedlich schwer zu behandeln sind. Die folgende Abbildung zeigt die möglichen „Aufhängungspunkte“ und wie schwer die entsprechenden Unterfälle zu behandeln sind:

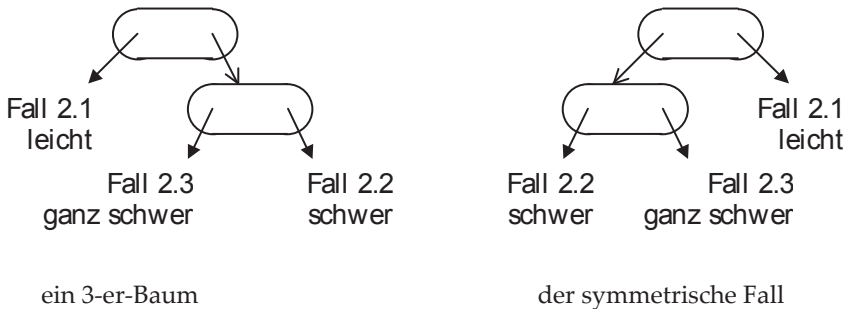


Abbildung 6.32: Spalten, Fall 2

**Fall 2.1:** Auch in diesem Fall genügt es,  $\times$  rot und die Kinder von  $\times$  schwarz zu machen:

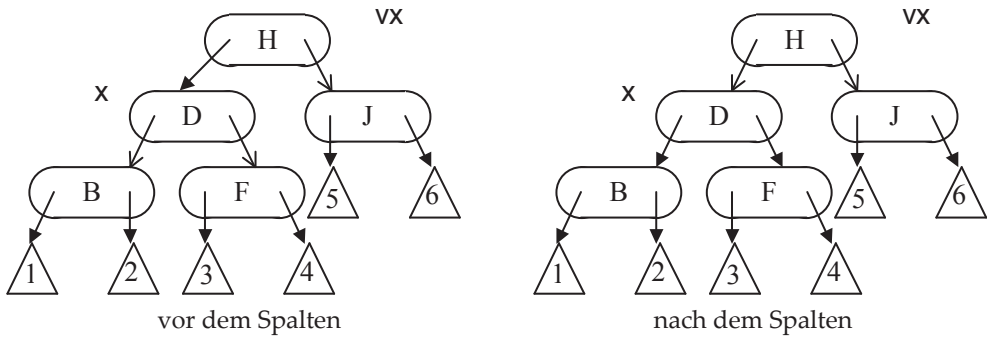


Abbildung 6.33: Spalten, Fall 2.1

**Fall 2.2:** In diesem Fall erfordert das Spalten zwei Schritte.

1. Der Knoten  $x$  wird rot, seine Kinder werden schwarz („wie immer“). Danach stehen aber zwei rote Kanten hintereinander (was in einem Rot-Schwarz-Baum verboten ist).
2. Der Vater und Großvater von  $x$  ( $vx$  und  $gvx$ ) werden rotiert. Danach ist wieder „alles in Ordnung“.

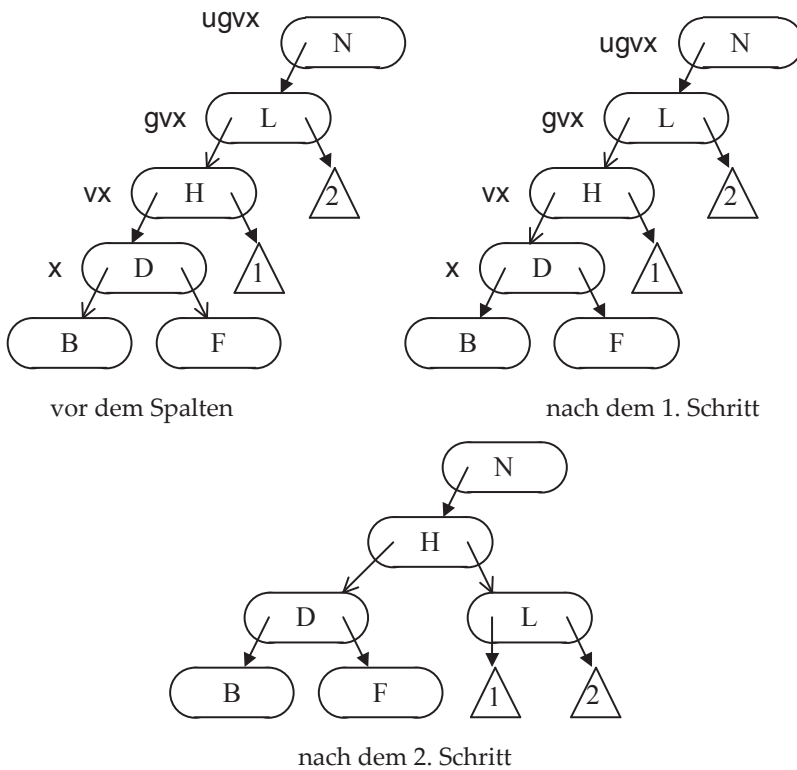


Abbildung 6.34: Spalten, Fall 2.2

**Fall 2.3:** In diesem Fall erfordert das Spalten sogar drei Schritte:

1. Der Knoten  $x$  wird rot, seine Kinder werden schwarz („wie immer“). Danach stehen aber zwei rote Kanten hintereinander (was in einem Rot-Schwarz-Baum verboten ist!)
2.  $x$  und sein Vater  $vx$  werden rotiert. Danach stehen immer noch zwei rote Kanten hintereinander.
3.  $x$  und sein Großvater  $gvx$  werden rotiert. Danach ist wieder „alles in Ordnung“.

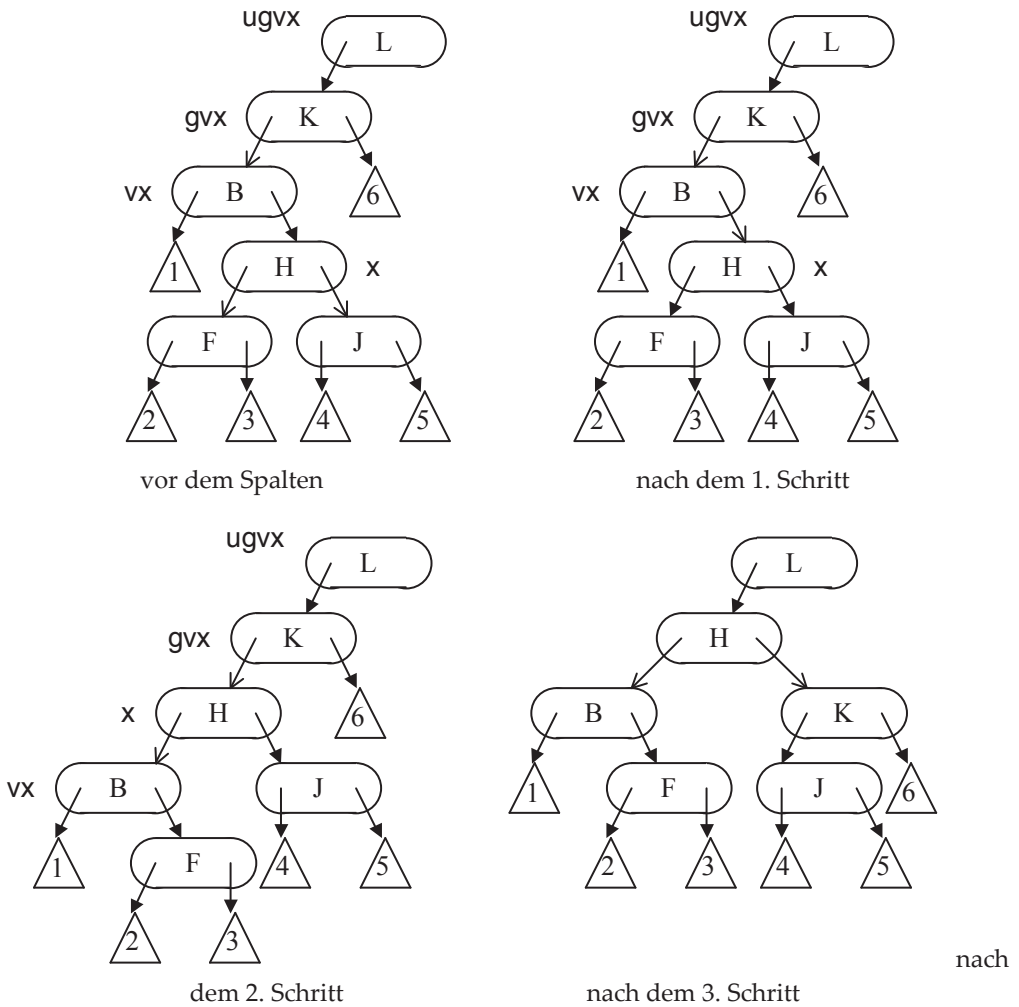


Abbildung 6.35: Spalten, Fall 2.3

Der Algorithmus zum Spalten von Knoten in einem Rot-Schwarz-Baum findet eine wichtige Anwendung in *B-Bäumen*.

## 6.7. B-Bäume

Der Begriff *B-Baum* ist eine Verallgemeinerung des Begriffs 2-3-4-Baum. 2-3-4-Bäume sind B-Bäume zweiter Ordnung.

Während die Knoten eines 2-3-4-Baums zwei oder drei oder vier Schlüssel enthalten, können B-Bäume der  $n$ -ten Ordnung  $m$  Schlüssel in ihren Knoten speichern, wobei  $n \leq m \leq 2n$ . Neben den  $m$  Schlüsseln enthält ein solcher Knoten auch  $m+1$  Verweise (Referenzen) auf weitere Knoten.

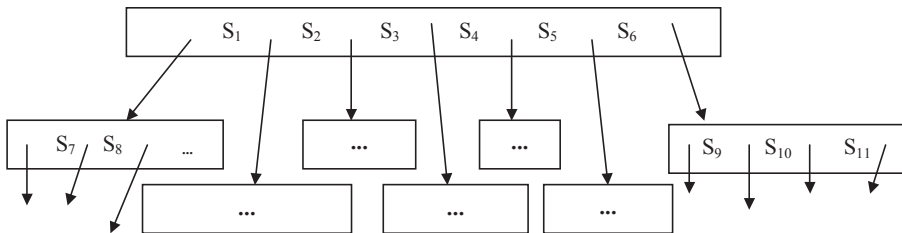


Abbildung 6.36: Knoten eines B-Baums mit Schlüsseln und Verweisen

AVL-Bäume und 2-3-4-Bäume (und somit Rot-Schwarz-Bäume) werden primär bei *internen Verfahren* verwendet; B-Bäume dagegen bei *externen Verfahren*. Insbesondere bei der Organisation von *Datenbanken* haben sich B-Bäume bewährt. Diese Organisationsform heißt auch *index-sequenzielle* oder *indiziert sequenzielle Datei*.

Externe Datenspeicher arbeiten typischerweise mit Blöcken; ein Block kann mit einem (recht langsamen) Zugriff gelesen oder geschrieben werden. Seine Größe ist charakteristisch für das verwendete Medium (z.B. Festplatte). Wenn die Daten unsortiert auf den Datenträger gespeichert werden, muss man – wie wir im Kapitel 4.3.1. (auf Seite 64) gesehen haben – im Durchschnitt die halbe Datei durchlesen, um ein gesuchtes Element zu finden. Wenn auf einem Block  $n$  Objekte Platz haben, dann kostet dies  $N/(2n)$  Lesezugriffe bei  $N$  gespeicherten Objekten: Das Suchen hat eine lineare Zeitkomplexität.

Wenn die Daten Schlüssel haben, die geordnet werden können, kann man die Daten auch so organisieren, dass sie mit logarithmischer Zeitkomplexität gefunden werden können. Insbesondere soll man die Schlüssel so auf den Blöcken (auf den „Knoten des B-Baums“) verteilen, dass die Anzahl der Zugriffe minimiert wird. Hierzu wird der Speicher in *Indexblöcke* und *Datenblöcke* aufgeteilt. Die Indexblöcke bilden die Knoten des B-Baums. Neben jedem Schlüssel enthalten sie auch die Adresse eines Datenblocks, wo sich die dazugehörigen (typischerweise längeren) Daten befinden. Somit findet das Suchen in den Indexblöcken statt, und nur ein letzter Zugriff holt den gefundenen Datenblock.

Das folgende Verfahren von R. Bayer und E. McCreight<sup>1</sup> hat sich für die Organisation des B-Baums bewährt. Demnach enthält jeder Knoten mindestens  $n$ , höchstens  $2n$  Schlüssel (mit dazugehörigen Datenblock-Adressen). Ein spezieller *Wurzelblock* kann weniger als  $n$  Schlüssel enthalten. Jeder Knoten mit  $m$  Schlüsseln ( $n \leq m \leq 2n$ ) ist entweder ein *Blatt* (dann enthält er keine Verweise) oder enthält er  $m+1$  Verweise auf weitere Knoten.

Innerhalb eines Knotens sind die Schlüssel sortiert, d.h. für jedes  $i \leq m-1$  gilt: Der  $i$ -te Schlüssel ist nicht größer als der  $i+1$ -ter Schlüssel. Darüber hinaus gilt für den  $i$ -ten und den  $i-1$ -ten Verweis, dass alle Schlüssel auf dem  $i-1$ -ten Knoten (d.h. Knoten, der über den Verweis Nr.  $i-1$  erreicht wird) nicht größer sind als der  $i$ -te Schlüssel, und dass alle Schlüssel auf dem  $i$ -ten Knoten nicht kleiner sind als der  $i$ -te Schlüssel:

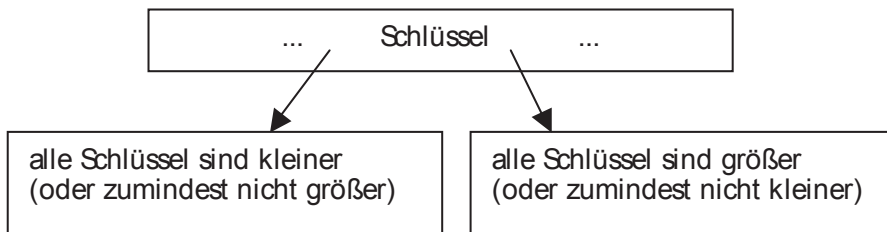


Abbildung 6.37: Sortierkriterium im B-Baum

Auf dem Knoten Nr. 1 (falls es ihn gibt) sind also alle Schlüssel kleiner, auf dem Knoten Nr.  $m$  sind alle Schlüssel größer als die Schlüssel auf dem aktuellen Knoten.

Des Weiteren befinden sich alle Blätter (Knoten ohne Verweise) auf der gleichen Ebene, d.h. ihre Entfernung vom Wurzelknoten ist gleich.

Folgender Suchalgorithmus kann auf einem B-Baum verwendet werden:

1. den Wurzelblock einlesen
2. gegebenen Schlüssel  $S$  auf dem eingelesenen Block (z.B. binär) suchen
3. wenn gefunden, Datenblock lesen, fertig
4. ansonsten  $i$  finden, sodass  $S_i < S < S_{i+1}$  (wenn  $S < S_1$  oder  $S_m < S$ , dann  $i = 0$  bzw.  $i = m+1$ )
5. Block Nr.  $i$  einlesen, Schritte 2-5 wiederholen

Die gleichmäßige Verteilung der Schlüssel auf den Blöcken garantiert, dass die Anzahl der Zugriffe unter  $\log_n N$  bleibt, wo  $n$  die Ordnung des B-Baums ist (die Anzahl der Schlüssel pro Knoten) und  $N$  die Anzahl der Knoten ( $nN$  ist also die Anzahl der Schlüssel und der Datensätze).

Die gleichmäßige Verteilung wird beim Eintragen und beim Löschen durch *Spaltung* sichergestellt, ähnlich wie es für 2-3-4-Bäume im Kapitel 6.5. (auf Seite 135) vorgestellt wurde.

<sup>1</sup> s. [Bay]

Dadurch, dass die meisten Knoten weniger als die maximale Anzahl von  $n$  Schlüsseln haben, bestehen die meisten Eintragungen aus einem Zugriff (nachdem der Eintragungsort gesucht wurde): In den gefundenen Block wird der Schlüssel eingefügt. Wenn innerhalb eines Blocks die Schlüssel linear organisiert sind, ist dies zwar aufwändig, aber im Vergleich zu einem Blockzugriff typischerweise vernachlässigbar. Wenn nötig, kann man die Schlüssel innerhalb eines Blocks auch besser als linear (z.B. als Binärbaum) organisieren.

Die Struktur des B-Baums wird nur dann beeinträchtigt, wenn der neue Schlüssel in einen vollen Block eingefügt werden soll. Dann muss er gespalten werden: Ein neuer Block wird erzeugt, die  $m+1$  Schlüssel werden gleichmäßig auf den beiden Blöcken verteilt, der mittlere Schlüssel wird in den darüber liegenden Block (in den *Vorgängerknoten*) nach demselben Verfahren eingefügt. Im Extremfall (wenn alle Indexblöcke dem Pfad entlang voll sind) verbreitet sich die Spaltung bis zum Wurzelblock; dann erhöht sich der B-Baum.

Das Kriterium  $n < m < 2n$  grenzt jedoch das Wachstum ein, sodass in der Praxis (selbst bei großen Datenbanken) die Höhe selten 4 oder 5 übersteigt. Dies bedeutet, dass jedes Objekt mit gegebenem Schlüssel in höchstens 5 oder 6 Zugriffen gefunden werden kann – eine beträchtliche Optimalität.

Dies ist darauf zurückzuführen, dass jede Erhöhung des B-Baums seine Kapazität um mehr als auf das  $n$ -fache steigert; er wächst also mit der Anzahl der Erhöhungen *exponentiell*.



## 7. Klassen von Algorithmen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man algorithmische Probleme entsprechend ihrer „Schwierigkeit“ in *drei Klassen* einteilen kann. Zuvor müssen wir etwas genauer erläutern, was man unter einem *algorithmischen Problem* und unter seiner *Schwierigkeit* versteht.

### 7.1. Was ist ein algorithmisches Problem?

Unter einem algorithmischen Problem wollen wir ein Problem verstehen, welches sich auf eine bestimmte Weise *beschreiben* lässt. Hier ein paar Beispiele solcher *Beschreibungen*:

**AP1:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten (s. Kapitel 2.1. auf Seite 8):

**Eingabe:** eine Folge von ganzen Zahlen

**Ausgabe:** die maximale Teilsumme der Folge

**AP2:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten (s. Kapitel 4.1. auf Seite 59):

**Eingabe:** ein (längerer) Text und ein (kürzeres) Wort

**Ausgabe:** eine natürliche Zahl  $n$ , die angibt, ab welcher Stelle im Text das Wort (zum ersten Mal) vorkommt bzw. -1, falls das Wort nirgends im Text vorkommt

**AP3:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten (s. Kapitel 4.1. auf Seite 59):

**Eingabe:** ein Text und ein Wort (wie in **AP2**)

**Ausgabe:** „Ja“, wenn das Wort im Text vorkommt, „Nein“ sonst

**AP4:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten (s. Kapitel 5. auf Seite 82):

**Eingabe:** eine Reihung von Objekten mit Schlüsselkomponente

**Ausgabe:** eine Reihung, welche die gleichen Objekte enthält, aber sortiert ist nach Schlüsseln

**AP5:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine positive ganze Zahl  $n$ , d.h.  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

**Ausgabe:** die  $n$ -te Primzahl

Solche Beschreibungen nennen wir Ein-/Ausgabe-Beschreibungen oder kurz *E/A-Beschreibungen*, weil sie eine Menge von *erlaubten Eingaben* und eine Menge von *erwarteten Ausgaben* beschreiben.

Damit wir eine E/A-Beschreibung als Beschreibung eines algorithmischen Problems anerkennen, muss sie die drei folgenden Bedingungen erfüllen:

**Bedingung 1:** (*Endlichkeitsbedingung*): Jede einzelne erlaubte Eingabe und jede einzelne erwartete Ausgabe muss (durch) eine *endliche* Zeichenkette (darstellbar) sein.

**Bedingung 2:** (*Unendlichkeitsbedingung*): Es müssen (abzählbar) *unendlich* viele verschiedene Eingaben erlaubt sein.

**Bedingung 3:** (*Lösbarkeitsbedingung*): Für jede einzelne erlaubte Eingabe muss es „im Prinzip“ möglich sein, die entsprechende erwartete Ausgabe zu ermitteln.

Die Bedingung 3 schließt z.B. die folgenden Probleme aus der Klasse der *algorithmischen* Probleme aus:

**P6:** Gesucht wird ein Algorithmus, mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine ganze Zahl  $z$

**Ausgabe:** eine ganze Zahl  $w$ , für die gilt:  $w \cdot w = z$

Viele ganze Zahlen haben keine ganzzahlige Wurzel, z.B. 2, 3, 5, ..., und alle negativen Zahlen. Also ist **P6** kein *algorithmisches* Problem. Man könnte **P6** als „unlösbares mathematisches Problem“ bezeichnen.

**P7:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine natürliche Zahl  $n$

**Ausgabe:** ein Zauberwort, mit dem man  $n$  kg Blei in Gold verwandeln kann

Da es – nach unseren heutigen Erkenntnissen – noch nicht einmal „im Prinzip möglich“ ist, mit Hilfe eines Zauberwortes Blei in Gold umzuwandeln, ist auch **P7** kein *algorithmisches* Problem. Man könnte **P7** ein „(wahrscheinlich) unlösbares alchemistisches Problem“ nennen.

Gegen die *Endlichkeitsbedingung* verstoßen z.B. die folgenden Problembeschreibungen:

**P8:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine positive, ganze Zahl  $n$ , d.h.  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

**Ausgabe:** der Kehrwert von  $n$  (d.h.  $1/n$ ), dargestellt als Dezimalbruch, vollständig und ohne „Abkürzungen“ wie „usw. usw.“ oder „...“ oder Ähnliches

Der Kehrwert von vielen natürlichen Zahlen ist ein Dezimalbruch mit unendlich vielen Stellen, z.B.  $1/3 = 0,333333\dots$ . Man kann **P8** in ein *algorithmisches* Problem verwandeln, indem man eine Schreibweise für Perioden und die übliche Überstreichung der sich wiederholenden Ziffernfolge erlaubt.

**P9:** Gesucht wird ein Algorithmus, mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** keine

**Ausgabe:** die Zahl  $\pi$  in Dezimalbruch-Schreibweise

Die Zahl  $\pi$  hat (in Dezimalbruch-Schreibweise,  $\pi = 3,141.592.653.589.793.238.462.643$  usw.) bekanntlich unendlich viele Ziffern und ist nicht periodisch (wie z.B.  $1/3$ ). Es ist kein *algorithmisches* Problem, unendlich viele Ziffern auszugeben (sondern einfach unmöglich).

Das folgende Problem **AP10** ist dem Problem **P9** sehr ähnlich, erfüllt aber unsere drei Bedingungen und ist somit ein algorithmisches Problem:

**AP10:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine natürliche Zahl  $n$

**Ausgabe:** die ersten  $n$  Ziffern der Zahl  $\pi$

Man beachte genau: Wir dürfen zwar beliebig große natürliche Zahlen eingeben, aber jede einzelne Zahl, die wir eingeben dürfen, ist nur endlich groß, und die zugehörige Ausgabe ist ebenfalls nur eine endliche Folge von Ziffern.

Jetzt müssen wir noch die *Unendlichkeitsbedingung begründen*. Warum schließen wir Probleme, die nur *endlich viele Eingaben* erlauben, aus der Klasse der algorithmischen Probleme aus? Warum schließen wir z.B. die folgenden Probleme **P11** und **P12** aus?

**P11:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine natürliche Zahl  $n$  zwischen 1 und 10

**Ausgabe:** die ersten  $n$  Ziffern der Zahl  $\pi$

**P12:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** keine

**Ausgabe:** die zwölfte Ziffer der Zahl  $\pi$

Probleme, deren Lösungsalgorithmen *keine* Eingabe erfordern und deshalb immer die gleiche Ausgabe liefern, sollen hier *Einzelprobleme* genannt werden. **P12** ist ein typisches Einzelproblem. Warum betrachten wir Einzelprobleme *nicht* als *algorithmische* Probleme?

**Antwort:** Weil man bei ihrer Lösung „schummeln“ kann.

Unser Ziel ist es, alle algorithmischen Probleme entsprechend ihrer „Schwierigkeit“ in Klassen einzuteilen. Nun kann ein algorithmisches Problem aus zwei verschiedenen Gründen „schwierig“ sein:

**Grund 1:** Die *Entwicklung* eines Lösungsalgorithmus ist „schwierig“ (hoher Entwicklungsaufwand).

**Grund 2:** Wir haben einen Lösungsalgorithmus (entwickelt oder gefunden), aber seine *Ausführung* ist „schwierig“ (hoher Ausführungsaufwand).

Da wir einen Algorithmus nur *einmal* zu entwickeln brauchen und ihn dann *sehr häufig* ausführen (lassen) können, ist der Ausführungsaufwand (d.h. die *Komplexität*) eines Algorithmus im Allgemeinen viel wichtiger als der Entwicklungsaufwand. Eine Ausnahme von dieser Regel: wenn der Entwicklungsaufwand unendlich groß ist, d.h. wenn das Problem garantiert nicht lösbar ist. Dann ist der Ausführungsaufwand der Lösungsalgorithmen *nicht* wichtig.

Demnach unterscheiden wir zwischen dem

- Entwicklungsaufwand und dem
- Ausführungsaufwand (Komplexität)

eines Algorithmus.

Wenn man für ein (lösbares) Einzelproblem (z.B. für *P12*) einen Lösungsalgorithmus entwickelt, dann kann man immer auf folgende Weise „schummeln“: Man berechnet die erwartete Ausgabe, schreibt sie (z.B. als Konstante) in den Lösungsalgorithmus und lässt sie ausgeben. Für *P12* könnte ein solcher „geschummelter Lösungsalgorithmus“ z.B. so aussehen:

```
static void geschummelt() {  
    Console.println("8");  
}
```

Dieser Algorithmus ist *sehr leicht* auszuführen, aber diese „Leichtigkeit“ sagt nichts darüber aus, wie schwer es war, herauszufinden, dass die zwölfte Ziffer von  $\pi$  eine 8 ist.

Mit diesem Beispiel sollte gezeigt werden: Bei der Lösung von Einzelproblemen kann man immer einen Teil des Ausführungsaufwandes durch Entwicklungsaufwand ersetzen. Wenn ein Problem zwar Eingaben zulässt, aber nur endlich viele, dann kann man (zumindest theoretisch) den gleichen „Trick“ anwenden: Man berechnet (während der Entwicklung eines Lösungsalgorithmus) für jede erlaubte Eingabe die entsprechende Ausgabe (eventuell mit sehr großer Mühe), und macht daraus eine Tabelle. Ein Lösungsalgorithmus, der nur in einer solchen Tabelle nachschaut, ist für viele Probleme viel schneller, als ein „richtiger Lösungsalgorithmus“, aber auch diese Schnelligkeit sagt nichts über die „Schwierigkeit“ des gelösten Problems.

Bei einem Problem mit unendlich vielen verschiedenen Eingaben ist dieser „Tabellen-Trick“ grundsätzlich nicht anwendbar: Man könnte höchstens für endlich viele Eingaben die entsprechende Ausgabe im Voraus berechnen und in einer Tabelle speichern. Wenn dann ein Algorithmen-Tester eine Eingabe wählt, deren Ausgabe nicht in der Tabelle steht, dann müsste der Algorithmus seine „wahre Zeitkomplexität“ zeigen.

Weil die Zeitkomplexität von Algorithmen, die nur endlich viele Eingaben erlauben, nicht unbedingt etwas über die „Schwierigkeit“ des damit gelösten Problems aussagt, schließen wir die entsprechenden Probleme hier aus.

Bei einem algorithmischen Problem sucht man also immer nach einem Algorithmus, der unendlich viele verschiedene Eingaben zulässt. *Ein* solcher Algorithmus muss also *unendlich viele* Einzelprobleme lösen können. Jedes dieser Einzelprobleme muss lösbar sein (sonst handelt es sich nicht um ein *algorithmisches* Problem).

Mit anderen Worten: Ein algorithmisches Problem hat immer die Form: „Kann man eine bestimmte Menge von *unendlich vielen* lösbaren Einzelproblemen mit *einem* Algorithmus lösen?“ Oder: „Kann man *unendlich viele* (Einzelproblem-) Fliegen mit *einer* (algorithmischen) Klappe treffen?“.

In der Praxis gilt die Verwendung von „Lösungstabellen“ zur Beschleunigung von Programmen nicht als „fieser Trick“, sondern als eine empfehlenswerte Programmier Technik. Natürlich muss man in jedem Einzelfall kritisch prüfen, ob sich diese Technik vorteilhaft einsetzen lässt.

Bei jedem algorithmischen Problem muss die Menge der erwarteten Ausgaben *mindestens zwei Elemente* enthalten (warum wohl?). Algorithmische Probleme, bei denen die Menge der erwarteten Ausgaben *genau zwei* Elemente enthält (z.B. die Elemente "Ja" und "Nein", oder 'Y' und 'N', oder 0 und 1, oder **true** und **false** oder so ähnlich), nennt man *Entscheidungsprobleme*. **AP3** ist zum Beispiel ein Entscheidungsproblem. **AP2** ist mit **AP3** nah verwandt, aber kein Entscheidungsproblem.

**Aufgabe 7.1:** Entwerfen Sie eine schnelle Java-Funktion, die das Problem **P11** löst (Eingabe: Eine natürliche Zahl  $n$  zwischen 1 und 10, Ausgabe: Die ersten  $n$  Ziffern der Zahl  $\pi$ ).

**Aufgabe 7.2:** Ist das folgende Problem ein algorithmisches Problem? Begründen Sie Ihre Antwort.

**P13:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine positive Zweierpotenz  $n$ , d.h.  $n \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$

**Ausgabe:** der Logarithmus (zur Basis 2) von  $n$  in Binärbruch-Schreibweise, ohne Abkürzungen

**Aufgabe 7.3:** Ist das folgende Problem ein algorithmisches Problem? Begründen Sie Ihre Antwort.

**P14:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine natürliche Zahl  $n$ , d.h.  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

**Ausgabe:** der Logarithmus (zur Basis 2) von  $n$  in Binärbruch-Schreibweise, ohne Abkürzungen

**Aufgabe 7.4:** Ist das folgende Problem ein algorithmisches Problem? Begründen Sie Ihre Antwort.

**P15:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine ganze Dezimalzahl  $d$  ohne Vorzeichen, d.h.  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

**Ausgabe:** die entsprechende Binärzahl  $b$ , ohne Abkürzungen

**Aufgabe 7.5:** Ist das folgende Problem ein algorithmisches Problem? Begründen Sie Ihre Antwort.

**P16:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** ein Dezimalbruch  $d$  mit genau einer Stelle hinter dem Komma (z.B.  $d = 7,0$  oder  $36,5$  oder  $789,4$  oder  $0,1$  usw.)

**Ausgabe:** ein entsprechender Binärbruch  $b$ , ohne Abkürzungen.

**Aufgabe 7.6:** Ist das folgende Problem ein algorithmisches Problem? Begründen Sie Ihre Antwort.

**P17:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine dreistellige Dezimalzahl  $d$ , z.B.  $d = 123$  oder  $002$  usw.

**Ausgabe:** die entsprechende Binärzahl  $b$ , ohne Abkürzungen

## 7.2. Theoretische Lösbarkeit von Problemen

Die Klasse aller algorithmischen Probleme kann man (entsprechend der „Schwierigkeit“, für sie eine Lösung zu entwickeln) in zwei Klassen einteilen:

- **Klasse 1:** algorithmische Probleme, die aus theoretischen Gründen nicht lösbar sind
- **Klasse 2:** algorithmische Probleme, die (zumindest theoretisch) lösbar sind.

### 7.2.1. Definitionen

„Theoretisch lösbar“ soll heißen: Für ein solches Problem existiert ein Lösungsalgorithmus. Ob dieser Algorithmus praktisch wirklich ausführbar ist (oder ob seine „Komplexität zu groß ist“), ist eine andere Frage, die im nächsten Kapitel behandelt wird.

Alle Probleme, die wir bisher behandelt oder erwähnt haben, sind (zumindest theoretisch) lösbar. Eigentlich ist es sehr erstaunlich, dass es theoretisch unlösbare algorithmische Probleme gibt. Denn wir haben ein algorithmisches Problem ausdrücklich als eine (unendliche) Menge von *lösba*ren Einzelproblemen definiert.

Um zu zeigen, dass ein algorithmisches Problem zur Klasse 1 gehört („unlösbar“), genügt es natürlich *nicht*, eine bestimmte Zeit nach einem Lösungsalgorithmus zu suchen und keinen zu finden. Auch wenn die besten Informatiker der Welt sich jahrelang vergeblich bemüht haben, einen Lösungsalgorithmus zu entwickeln, so folgt daraus noch *nicht*, dass das Problem unlösbar ist. Man muss vielmehr *beweisen*, dass *kein Lösungsalgorithmus existiert*.

### 7.2.2. Beispiele

Wie beweist man, dass ein bestimmter mathematischer Gegenstand (z.B. eine Zahl, die eine bestimmte Bedingung erfüllt oder ein Algorithmus, der ein bestimmtes Problem löst) *nicht* existiert? Hier folgt ein ganz einfaches Beispiel für solch einen Nicht-Existenz-Beweis:

**Behauptung:** Es gibt keine *ganze* Zahl, deren Quadrat gleich 5 ist.

**Beweis:** Wenn es eine ganze Zahl  $n$  mit  $n^2 = 5$  gäbe, dann müsste wegen

- $4 < 5 < 9$  und somit
- $2^2 < n^2 < 3^2$  auch
- $2 < n < 3$  gelten, d.h. die ganze Zahl  $n$  müsste zwischen 2 und 3 liegen. Dies ist ein Widerspruch, da 2 und 3 aufeinander folgende ganze Zahlen sind.

Wir können offensichtlich ganz sicher sein, dass auch in Zukunft niemand eine ganze Zahl  $n$  finden wird, für die  $n^2 = 5$  gilt. Denn wir haben gezeigt, dass eine solche Zahl nicht existiert.

Bevor wir von einem bestimmten algorithmischen Problem beweisen, dass dazu kein Algorithmus existiert, sei hier ein anderer (aber ähnlicher und nah verwandter) Widerspruchsbeweis skizziert. Dieser klassische Beweis betrifft Dörfer, in denen einige Männer leben, von denen genau einer ein Barbier ist. Jeden Samstag steht die Rasur an, einige rasieren sich selbst und einige werden vom Barbier rasiert.

**Behauptung:** Es kann kein Dorf geben, in dem der Barbier genau die Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

**Beweis:** Angenommen, ein solches Dorf würde existieren. Dann müsste der Barbier dieses Dorfes entweder sich selbst rasieren (Fall 1) oder sich nicht selbst rasieren (Fall 2). Aber beide Fälle sind unmöglich. Denn da der Barbier genau die Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren, müsste gelten: Wenn der Barbier sich selbst rasiert (Fall 1), dann darf er sich nicht rasieren. Wenn er sich aber nicht selbst rasiert (Fall 2), dann müsste er sich rasieren. Einen Barbier, der sich gleichzeitig rasiert und nicht rasiert, kann es nicht geben.

Offensichtlich hat dieser Beweis nichts mit den handwerklichen Fähigkeiten oder Unfähigkeiten von Barbieren zu tun. Auch ganz neue und revolutionäre Arten von Rasierapparaten oder Rasiermethoden werden den Beweis nicht ungültig machen. Die Annahme, es gäbe ein Dorf, in dem der (männliche, selbst im Dorf lebende) Barbier genau die Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren, führt zu einem logischen Widerspruch. Also kann es ein solches Dorf nicht geben.

Im Folgenden wird ein bestimmtes algorithmisches Problem (das so genannte *Halteproblem*) beschrieben und anschließend bewiesen, dass zu diesem Problem kein Lösungsalgorithmus existiert. Beim Halteproblem betrachtet man Programme einer (beliebigen, aber dann festen) Programmiersprache. Wir wollen hier Prozeduren (d.h. `void`-Methoden) betrachten, die in Java geschrieben sind. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Prozeduren, die genau *einen* Parameter haben. Wir interessieren uns dafür, welche Prozeduren für welche aktuellen Parameterwerte nach endlich vielen Ausführungsschritten *halten* und welche Prozeduren für welche aktuellen Parameterwerte *nicht halten*<sup>1</sup>.

#### Beispiel 1:

```
static void haeltNie(int n) {  
    while (true)  
        Console.println(n);  
}
```

Die Prozedur `haeltNie` hält nicht, egal mit welchem Wert für ihren Parameter `n` wir sie aufrufen.

---

<sup>1</sup> d.h. in eine Endlosschleife oder eine Endlosrekursion oder ähnliches geraten

**Beispiel 2:**

```
static void haeltImmer(final String s) {
    Console.println(s);
}
```

Diese Prozedur `haeltImmer` hält, egal mit welchem Wert für ihren Parameter `s` wir sie aufrufen.

**Beispiel 3:**

```
static void haeltWennGroesser1(int n) {
    while (n != 1)
        n = n/2;
}
```

Diese Prozedur `haeltWennGroesser1` hält für alle  $n$ , die größer oder gleich 1 sind. Für alle  $n$ , die kleiner sind als 1, hält `haeltWennGroesser1` nicht.

**Beispiel 4:**

```
static void haeltWennNichtLeer(final String s) {
    if (s.length() > 10)
        Console.println(s);
    else
        haeltWennNichtLeer(s + s);
}
```

Diese Prozedur hält nicht, wenn wir sie mit der leeren Zeichenkette als Parameter aufrufen (z.B. so: `haeltWennNichtLeer("")`). Für alle anderen Zeichenketten als Parameter hält sie.

Die meisten Interpreter werden die Ausführung der Prozedur `haeltWennNichtLeer` auch dann nach endlich vielen Schritten abbrechen, wenn wir sie mit der leeren Zeichenkette als Parameter aufrufen, etwa mit der Fehlermeldung:

```
java.lang.StackOverflowError after 5729 recursive calls of method
haeltWennNichtLeer
```

Aber dieser „Abbruch“ einer Ausführung von `haeltWennNichtLeer` liegt ausschließlich an der Beschränktheit der verwendeten Umgebung (Compiler, Interpreter, Betriebssystem, Rechner), nicht am Algorithmus, der von der Prozedur `haeltWennNichtLeer` dargestellt wird. Solche Abbrüche wegen Speichermangels oder wegen eines Überlaufs einer numerischen Variablen oder wegen ähnlicher Gründe gilt *nicht* als „Halten der Prozedur“. Wir interessieren uns hier für das Halten (oder Nicht-Halten) von Algorithmen, nicht für die Beschränktheiten konkreter Rechnerumgebungen.

**Beispiel:** Im Kapitel 3.1.3. (auf Seite 33) haben wir die *Ackermann-Funktion* kennen gelernt. Sie kann auch in dieser Reihe betrachtet werden, obwohl sie – ausnahmsweise und der Einfachheit halber – eine *Funktion* mit *zwei* Parametern (statt einer *Prozedur* mit *einem* Parameter) ist. Es ist überhaupt nicht selbstverständlich, dass die Funktion für *alle* Parameterwerte (d.h. für alle Zahlenpaare  $m$  und  $n$ ) hält. F.W. Ackermann hat dies jedoch bewiesen.



**Aufgabe 7.7:** Für welche Parameterwerte hält die folgende Prozedur `haelt7`, und für welche hält sie nicht?

```
static void haelt7(int n) { // requires n > 0
    while (n != 7)
        n = n-3;
}
```

**Aufgabe 7.8:** Für welche Parameterwerte hält die folgende Prozedur `haeltVielleicht` und für welche hält sie nicht?

```
static void haeltVielleicht(int n) { // requires n > 0
    while (n != 1)
        if ((n % 2) == 0) // n ist gerade
            n = n / 2;
        else // n ist ungerade
            n = 3 * n + 1;
}
```

Diese Aufgabe sieht auf den ersten Blick vielleicht „harmlos“ aus, aber bisher konnte noch niemand beweisen, dass `haeltVielleicht` für alle erlaubten Eingaben (d.h. für alle natürlichen Zahlen) hält.

### 7.2.3. Das Halteproblem

Im Folgenden betrachten wir (der Einfachheit halber) nur noch Prozeduren, die einen Parameter vom Typ `String` haben.

**Halteproblem:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** zwei Zeichenketten (der Klasse `String`) `programm` und `eingabe`.

**Ausgabe:** `true`, wenn `programm` eine Java-Prozedur mit einem Parameter vom Typ `String` ist und der Aufruf

```
programm(eingabe);
```

hält; `false` in allen anderen Fällen (d.h. wenn `programm` keine Java-Prozedur mit einem `String`-Parameter ist oder wenn `programm(eingabe);` nicht hält.

Nach genauer Prüfung dürfte es klar sein, dass dieses Problem alle drei im Kapitel 7.1. auf Seite 149 erwähnten Bedingungen erfüllt (jede einzelne Eingabe und jede einzelne Ausgabe ist endlich groß, es gibt unendlich viele Eingaben, für jede Eingabe ist es im Prinzip möglich, die richtige Ausgabe (`true` bzw. `false`) zu ermitteln. Offenbar handelt es sich hier um ein Entscheidungsproblem.

**Behauptung:** Es gibt keine Implementierung der Java-Funktion

```
static boolean goedel(String programm, String eingabe);
```

die das Halteproblem löst. (Der Name der Funktion erinnert an den österreichischen Mathematiker *Kurt Gödel*, der im Jahre 1931 bewiesen hat, dass alle logischen Systeme<sup>1</sup> unlösbare Probleme enthalten.)

**Beweis:**

1. Angenommen, es gäbe eine solche Funktion `goedel`. Dann könnten wir folgende Java-Prozedur `programm` schreiben:

```
static void programm(String s) {
    if (goedel(s, s))
        while (true); // hier gerät programm in eine Endlosschleife
    else
        ; // hier hält programm sofort
}
```

2. Dann rufen wir die Prozedur `programm` folgendermaßen auf:

```
programm(
    "void programm(String s) {if (goedel(s, s)) while (true); else ;}"
);
```

Wir übergeben also der Prozedur `programm` den Text ihrer eigenen Vereinbarung als Parameter (vom Typ `String`) und beobachten, ob `programm` für diesen Parameterwert hält oder nicht hält.

3. Die Prozedur `programm` (angewendet auf ihren eigenen Text) ruft die Funktion `goedel` auf und „fragt sie“, ob die Prozedur `programm`, angewendet auf ihren eigenen Text, hält oder nicht. Die Funktion `goedel` muss, da sie laut Annahme das Halteproblem löst, nach endlich vielen Schritten mit **true** oder mit **false** antworten.

- Wenn die Funktion `goedel` mit **true** antwortet, dann geht die Prozedur `programm` (angewendet auf ihren eigenen Text) in eine Endlosschleife und hält nicht. Die Antwort **true** von `goedel` wäre in diesem Falle falsch.
- Wenn die Funktion `goedel` mit **false** antwortet, dann hält die Prozedur `programm` (angewandt auf ihren eigenen Text) sofort an. Auch in diesem Fall ist die Antwort von `goedel` falsch.

4. Daraus folgt: Die Funktion `goedel` kann gar nicht richtig antworten. Egal, was sie über die Prozedur `programm` (angewendet auf ihren eigenen Text) behauptet, `programm` macht genau das Gegenteil. Also kann es keine Funktion `goedel` geben, die das Halteproblem löst.

Diese Unlösbarkeit des Halteproblems ist eine der wichtigsten und tiefsten Erkenntnisse über Algorithmen, die Mathematiker, Logiker und Informatiker bisher gewonnen haben.

---

<sup>1</sup> mit bestimmten Eigenschaften

Mit den philosophischen Konsequenzen beschäftigen sich auch zahlreiche Schriften, so auch das Buch [KesSol].

**Bemerkung:** Das im Kapitel 2.1.9. (auf Seite 19) erwähnte Problem der *Gleichwertigkeit* (*Äquivalenz*) von Algorithmen ist eng mit dem Halteproblem verknüpft: Wenn man eins der beiden Probleme lösen könnte, könnte man auch das andere Problem lösen. Ein ähnlicher Zusammenhang besteht auch zu den in den nächsten Kapiteln vorgestellten bekannten unlösbaren Problemen.

#### 7.2.4. Das Kachelproblem

Verschiedene algorithmische Probleme (einige davon theoretisch unlösbar, andere lösbar) basieren auf der anschaulichen Vorstellung von Kacheln und gekachelten Flächen. Dabei ist eine Kachel ein Quadrat, welches durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke eingeteilt ist. Jedes dieser Dreiecke ist mit einer bestimmten „Farbe“<sup>1</sup> angemalt (oder mit einer entsprechenden Zahl gekennzeichnet). Es folgen einige Beispiele für einzelne Kacheln:



Abbildung 7.1: Kachel

Die Kacheln sollten nicht gedreht werden, sondern ihre anfängliche Orientierung stets beibehalten. Außerdem dürfen sie nur „genau nebeneinander“ gelegt werden, wie auf ein Schachbrett-Muster.

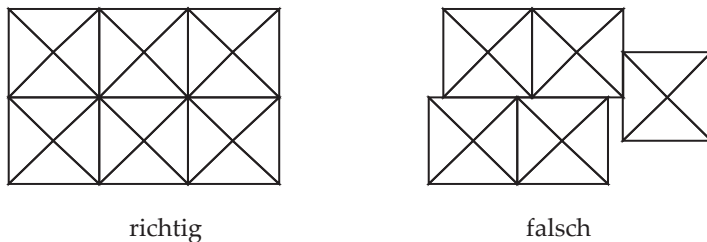
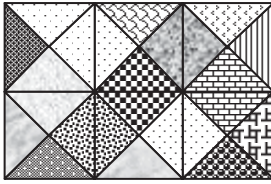


Abbildung 7.2: Auslegen von Kacheln

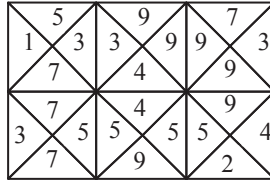
Eine Fläche ist ordnungsgemäß gekachelt, wenn sie mit Kacheln bedeckt ist und folgende Bedingung erfüllt ist:

**Anschlussbedingung:** Da, wo zwei Kacheln sich berühren, müssen sie die gleiche Farbe haben (bzw. mit der gleichen Zahl markiert sein).

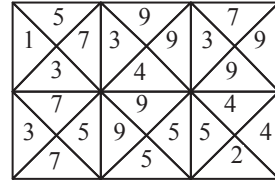
<sup>1</sup> im schwarz-weiß-Druck: „Muster“



richtig



richtig

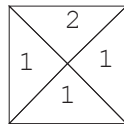


falsch

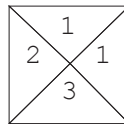
Abbildung 7.3: Anschlussbedingung

Ein *Kachelkatalog* ist eine endliche Menge von *Kachelmustern* zusammen mit der Berechtigung, von jedem Muster beliebig viele Kacheln zu bestellen.

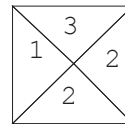
Mit Kacheln aus dem folgenden Katalog kann man jede endliche Fläche kacheln:



Muster 1



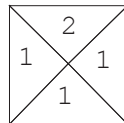
Muster 2



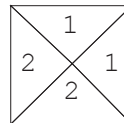
Muster 3

Abbildung 7.4: Erfüllbarer Kachelkatalog

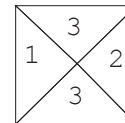
Mit Kacheln aus dem folgenden Katalog kann man *nicht* jede endliche Fläche kacheln:



Muster 1



Muster 2



Muster 3

Abbildung 7.5. Unerfüllbarer Kachelkatalog

**Aufgabe 7.9:** Zeigen Sie, dass man mit dem Katalog in der Abbildung 7.5 noch nicht einmal eine  $3 \times 3$  Fläche kacheln kann.

Vom folgenden algorithmischen Problem kann man beweisen, dass es dazu keinen Lösungsalgorithmus gibt:

**Kachelproblem:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** ein Kachelkatalog

**Ausgabe:** „Ja“, wenn man mit (Kacheln aus) diesem Katalog jede endliche Fläche kacheln kann; „Nein“ sonst

7.2.5. Das Paligrammproblem

Beim *Paligrammproblem*<sup>1</sup> wird die Frage gestellt, ob es möglich ist, aus zwei Folgen von Wörtern (Zeichenketten, in Java Objekte der Klasse `String`) dasselbe Wort mit derselben Indexfolge „auszulegen“. Es wird also ein Wort gesucht, das durch *Konkatenation* (in Java durch den `String`-Operator `+`) sowohl aus der ersten Wortfolge, wie auch aus der zweiten Wortfolge entstehen kann.

Beispielsweise sollen zwei Wortfolgen  $u$  und  $v$  aus den Wörtern,  $\{abb, a, bab, baba, aba\}$  bzw.  $\{bbab, aa, ab, aa, a\}$  bestehen. In Java bilden wir sie in zwei Reihungen  $u$  und  $v$  vom Typ `String[]` ab; sie haben die gleiche Länge (nämlich 5) und enthalten als Komponenten Zeichenketten unterschiedlicher Längen, d.h. Wörter:

```
String[] u = { "abb", "a", "bab", "baba", "aba" };
String[] v = { "bbab", "aa", "ab", "aa", "a" };
```

| Index | 1    | 2  | 3   | 4    | 5   |
|-------|------|----|-----|------|-----|
| u     | abb  | a  | bab | baba | aba |
| v     | bbab | aa | ab  | aa   | a   |

Tabelle 7.6: Lösbares Paligrammproblem

Für diese beiden Reihungen gilt:

```
u[2] + u[1] + u[1] + u[4] + u[1] + u[5] == "aabbabbbabaabbaba"
v[2] + v[1] + v[1] + v[4] + v[1] + v[5] == "aabbabbbabaabbaba"
```

Oder mathematisch ausgedrückt, es gilt:

$$u_2 u_1 u_1 u_4 u_1 u_5 = v_2 v_1 v_1 v_4 v_1 v_5 = aabbabbbabaabbaba$$

Die Indexfolge  $\{2\ 1\ 1\ 4\ 1\ 5\}$  ist also eine Lösung für das Paligrammproblem mit den beiden Wortfolgen  $u$  und  $v$ : Das Wort *aabbabbbabaabbaba* kann aus den Wörtern sowohl aus  $u$  wie auch aus  $v$  mit der Indexfolge  $\{2\ 1\ 1\ 4\ 1\ 5\}$  ausgelegt werden:

| Index | 2         | 1           | 1           | 4           | 1           | 5          |
|-------|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| $u$   | <i>a</i>  | <i>abb</i>  | <i>abb</i>  | <i>baba</i> | <i>abb</i>  | <i>aba</i> |
| $v$   | <i>aa</i> | <i>bbab</i> | <i>bbab</i> | <i>aa</i>   | <i>bbab</i> | <i>a</i>   |

Tabelle 7.7: Lösung des Paligrammproblems aus der Tabelle 7.6

Für die folgenden beiden Reihungen  $u_1$  und  $v_1$  kann man *keine* Folge  $i_1, i_2, \dots, i_n$  von Indices finden, sodass

```
u1[i3] + u1[i4] + ... + u1[in] == v1[i3] + v1[i4] + ... + v1[in]
```

gilt:

<sup>1</sup> auch *Wortproblem* genannt; *Paligramm* ist ein Wortspiel, in dem aus den Buchstaben eines Worts ein anderes Wort ausgelegt werden muss

| Index | 1   | 2  | 3   | 4    | 5   |
|-------|-----|----|-----|------|-----|
| u1    | bb  | a  | bab | baba | aba |
| v1    | bab | aa | ab  | aa   | a   |

Tabelle 7.8: Unlösbares Paligrammproblem

Allerdings ist es nicht ganz einfach zu beweisen, dass das so ist. Denn es gibt unendlich viele Folgen von Indices, sodass man unmöglich all diese Folgen „durchprobieren“ kann. Aber mit ein bisschen Übung ist es gar nicht so schwer, einen Beweis zu finden.

Hier folgt ein weiteres algorithmisches Problem, von dem man zeigen kann, dass es dafür keinen Lösungsalgorithmus gibt:

**Paligrammproblem:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** zwei gleich lange Reihungen  $u$  und  $v$  von Wörtern.

**Ausgabe:** „Ja“, wenn es eine Folge  $i_1, i_2, \dots, i_n$  von Indices gibt, sodass

$$u[i_1] + u[i_2] + \dots + u[i_n] == v[i_1] + v[i_2] + \dots + v[i_n]$$

gilt, und „Nein“ sonst

### 7.2.6. Gleichwertigkeit von Grammatiken

Programmiersprachen werden durch (typischerweise *kontextfreie*) *Grammatiken*<sup>1</sup> beschrieben werden. Eine solche Grammatik besteht aus (endlich vielen endlich langen) Regeln. Trotzdem kann man aus *einer* solchen Grammatik *unendlich viele* Zeichenketten ableiten. Beispielsweise kann man aus der Grammatik von Java genau die Zeichenketten ableiten, die als Java-Programme zulässig sind und jede Zeichenkette, die man nicht aus der Java-Grammatik ableiten kann, ist auch garantiert kein richtiges Java-Programm. Man kann also mit der *endlich großen* Java-Grammatik die *unendlich große* Menge aller zulässiger Java-Programme präzise beschreiben.<sup>2</sup>

Nun kann man eine und dieselbe Programmiersprache (z.B. Java) durch *verschiedene* Grammatiken beschreiben. Einige dieser Grammatiken bestehen aus relativ vielen, aber einfachen und leicht verständlichen Regeln. Andere Grammatiken bestehen aus weniger, aber komplizierteren Regeln. Für Programmierer ist die erste Art besser geeignet. Als Grundlage für den Bau eines Compilers ist die zweite Art besser geeignet. Man hätte also gern (mindestens) zwei verschiedene Grammatiken für Java. Diese beiden Grammatiken „taugen“ aber nur dann etwas, wenn sie garantiert *genau die gleiche Sprache* (nämlich Java) beschreiben. Wenn es auch nur eine Zeichenkette gibt, die man aus der einen Grammatik ableiten kann, aber aus der anderen Grammatik nicht, dann wäre das ein schwer wiegender Fehler.

<sup>1</sup> oder durch entsprechende *Syntaxdiagramme*

<sup>2</sup> „Compilerbauer“ mögen bemerken, dass und warum diese Behauptung nicht ganz richtig ist, aber vorläufig ist sie „richtig genug“.

Man nennt zwei Grammatiken *äquivalent* („gleichwertig“), wenn man aus ihnen genau die gleichen Sprachen ableiten kann. Leider ist auch das folgende algorithmische Problem nicht lösbar:

**Äquivalenz von kontextfreien Grammatiken:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** zwei kontextfreie Grammatiken

**Ausgabe:** „Ja“, wenn die beiden Grammatiken äquivalent sind, „Nein“ sonst

Für die Praxis bedeutet dies: Man kann das Problem, die Äquivalenz zweier Grammatiken zu zeigen, nicht „ein und für alle mal“ durch einen Algorithmus erledigen. Stattdessen muss man jedes Mal, wenn man von zwei Grammatiken wissen will, ob sie äquivalent sind, „die Ärmel hochkrempeln“ und den Beweis der Äquivalenz (oder der Nicht-Äquivalenz) „von Hand“ führen.

Aus einem ähnlichen Grund kann – wie schon im Kapitel 2.1.9. (auf Seite 19) angedeutet – auch die Äquivalenz (Gleichwertigkeit) von Algorithmen nicht bewiesen werden.

### 7.3. Praktische Lösbarkeit von Problemen

Die Klasse 2 der *theoretisch* lösbaren algorithmischen Probleme aus dem Kapitel 7.2. (auf Seite 154) kann man nochmals in zwei Teilklassen aufteilen:

- **Klasse 2.1.** die *praktisch* nicht lösbaren algorithmischen Probleme
- **Klasse 2.2.** die *praktisch* lösbaren algorithmischen Probleme

Ob ein algorithmisches Problem zur Klasse 1 (theoretisch nicht lösbar) oder zur Klasse 2 (theoretisch lösbar) gehört, hat mit dem *Aufwand für die Entwicklung* eines Lösungsalgorithmus zu tun: Wenn der Aufwand unendlich groß ist (d.h. wenn man beweisen kann, dass kein Lösungsalgorithmus existiert), dann gehört das Problem zur Klasse 1. Wenn der Entwicklungsaufwand „nur“ endlich groß ist, gehört das Problem zur Klasse 2.

Es gibt zwar Probleme, von denen man (heute noch) nicht weiß, ob sie lösbar sind oder nicht. Die Grenzen zwischen der Klasse 1 und der Klasse 2 sind aber völlig *scharf* und lassen keinen Spielraum für „persönliche Ansichten“.

Ob ein bestimmtes algorithmisches Problem zur Klasse 2.1. (praktisch nicht lösbar) oder zur Klasse 2.2. (praktisch lösbar) gehört, hat mit dem *Aufwand für die Ausführung* der besten bekannten Lösungsalgorithmen zu tun, d.h. mit der Zeitkomplexität der Lösungsalgorithmen. Die Grenze zwischen den Klassen 2.1. und 2.2. ist *nicht scharf*. Man kann der Ansicht sein, dass eine Rechenzeit von zehn (oder von 100 usw.) Jahren noch durchaus „machbar“ ist, oder man kann alle Rechenzeiten oberhalb von einem Jahr (oder von einem Monat usw.) als „unrealistisch“ ausschließen.

Allgemein hat sich folgende Definition der Klassen 2.1. und 2.2. eingebürgert und als erstaunlich sinnvoll und robust erwiesen:

**Klasse 2.1.** Ein schnellster Lösungsalgorithmus hat eine *exponentielle* (oder „schlimmere“) Zeitkomplexität.

**Klasse 2.2.** Es gibt einen Lösungsalgorithmus mit *polynomialer* Zeitkomplexität.

### Beispiele

- für exponentielle Zeitkomplexitäten:  $2^n$  oder  $1,0001^n$  oder  $500^n$
- für „noch schlimmere“ Zeitkomplexitäten:  $n^n$  oder  $n!$  oder  $n(n^n)$
- für polynomiale Zeitkomplexitäten: 1 oder  $n$  oder  $n^2$  oder  $n^3$  oder  $n^{1000}$

Mit einigen algorithmischen Problemen aus der Klasse 2.2. (praktisch lösbar) haben wir uns schon befasst (Problem der maximalen Teilsumme, Sortierproblem, Suchproblem usw.). Hier folgen einige Beispiele für algorithmische Probleme, die (nach allem was man heute weiß) zur Klasse 2.1. (praktisch unlösbar) gehören.

#### 7.3.1. Das zweite Kachelproblem

Im Kapitel 7.2.4. (auf Seite 159) haben wir schon das Kachelproblem formuliert. Es konnte bewiesen werden, dass es unlösbar ist. Das zweite Kachelproblem ist aber lösbar:

**2. Kachelproblem:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:**  $n^2$  viele Kacheln, wobei  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$  ist.

**Ausgabe:** „Ja“, wenn man mit diesen Kacheln ein  $n \cdot n$ -Quadrat kacheln kann, „Nein“ sonst

**Aufgabe 7.10:** Entwerfen Sie einen einfachen Lösungsalgorithmus und ermitteln Sie seine Zeitkomplexität. Die besten bekannten Lösungsalgorithmen sind nicht „wesentlich“ schneller als der von Ihnen entwickelte Algorithmus.

Offensichtlich ist das Einzelproblem für  $n = 2$  leicht lösbar. Aber schon für  $n = 5$  gibt es  $25!$  verschiedene Anordnungen der 25 Kacheln, das sind ungefähr  $1,55 \cdot 10^{25}$  Anordnungen. Ein Jahr hat ungefähr  $3,15 \cdot 10^7$  Sekunden. Wenn man pro Sekunde 1 Milliarde von Anordnungen prüfen kann, dann braucht man ungefähr  $1,55 \cdot 10^{18}$  Sekunden, d.h. ungefähr  $4,92 \cdot 10^8$  Jahre, d.h. ungefähr eine halbe Milliarde von Jahren, um alle möglichen Anordnungen zu prüfen.

Heutige (Mitte 2001) Supercomputer wären durchaus in der Lage, jede Sekunde ungefähr 1 Milliarde Anordnungen von 25 Kacheln zu überprüfen (d.h. zu prüfen, ob die Anschlussbedingung überall erfüllt ist).

Das heißt: Für „sehr kleine  $n$ “ ist das zweite Kachelproblem durchaus lösbar. Aber spätestens ab  $n = 5$  ist es, gemessen an den heutigen Möglichkeiten von Computern, praktisch unmöglich, alle möglichen Anordnungen der Kacheln durchzuprobieren.

#### 7.3.2. Das Rucksackproblem

Dem zweiten Kachelproblem ähnlich einfach ist die triviale Lösung des *Rucksackproblems*; sie ist aber für das allgemeine Problem ähnlich unrealistisch ausführbar:



**Rucksackproblem:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine Liste von „Gegenständen“ (z.B. Schlafsack, Feldflasche, Zelt usw.). Jeder Gegenstand hat ein Gewicht (eine natürliche Zahl, z.B. die Anzahl der Gramm) und einen „Wert“ (ebenfalls durch eine natürliche Zahl ausgedrückt). Außerdem ist bekannt, wie viel Gramm in den Rucksack passen, z.B. 15 000 Gramm.

**Ausgabe:** eine Liste der Gegenstände, die eine möglichst wertvolle Füllung des Rucksacks ausmachen. Dies bedeutet, dass keine andere Menge von Gegenständen, die in den Rucksack passt, einen höheren Wert hat.

**Aufgabe 7.11:** Entwerfen Sie einen Lösungsalgorithmus und ermitteln Sie seine Zeitkomplexität.

### 7.3.3. Das Aufteilungsproblem

Eine Mutter hinterlässt ihren beiden Töchtern eine Menge von Diamanten. Jeder Diamant hat einen festgelegten Wert (ausgedrückt durch eine natürliche Zahl). Der Erbverwalter muss die Diamanten in zwei möglichst *gleich wertvolle* Teilmengen teilen. Nur im günstigsten Fall werden die beiden Teile gleich wertvoll sein. Aber in jedem Fall soll der Wertunterschied möglichst gering sein.

**Beispiel:** Wenn die Mutter fünf Diamanten mit den Werten 1, 2, 5, 5 und 12 hinterlässt, dann ist  $\{2, 5, 5\}$  und  $\{1, 12\}$  eine günstigste Aufteilung.

**Aufteilungsproblem:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine Liste der (Diamanten-) Werte

**Ausgabe:** die (oder eine) günstigste Aufteilung.

**Aufgabe 7.12:** Entwerfen Sie einen Lösungsalgorithmus und ermitteln Sie seine Zeitkomplexität.

### 7.3.4. Das Problem des Handelsreisenden

Das bekannte Problem des Handelsreisenden („*traveling salesman problem*“) gehört auch zu den praktisch unlösbaren Problemen:

**Das Problem des Handelsreisenden:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** ein Graph mit „Städten“ als Knoten und „Straßen“ als Kanten. Jede Straße zwischen zwei Städten ist mit einer (natürlichen) Zahl markiert, die die Entfernung der Städte voneinander angibt.

**Ausgabe:** ein Plan für die kürzeste „Rundreise“, die bei einer beliebigen Stadt anfängt und bei derselben Stadt endet und genau einmal bei jeder anderen Stadt vorbeiführt.

**Beispiel:** Eingabe sei der Graph

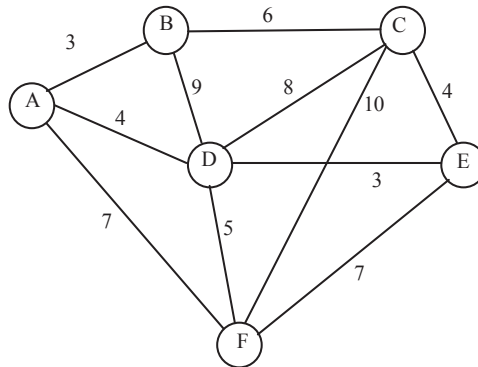


Abbildung 7.9: Das Problem des Handelsreisenden

**Ausgabe:** A, B, C, E, D, F, A, Gesamtlänge: 28

### 7.3.5. Hamiltonsche Wege durch einen Graphen

Ein *Hamilton-Weg* durch einen ungerichteten Graphen ist ein Weg, der an jedem Knoten genau einmal vorbeiführt. Hier folgen zwei Beispiele:

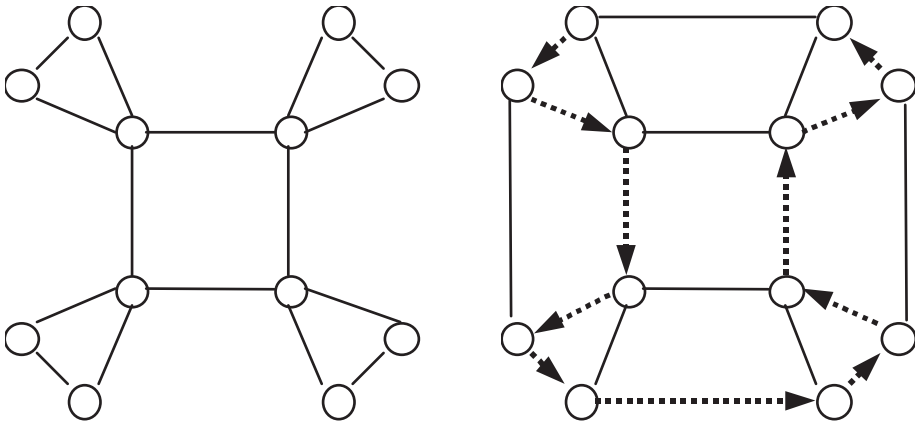


Abbildung 7.10: Graph ohne und mit hamiltonischem Weg

**Hamiltonsche Wege:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** ein (ungerichteter) Graph

**Ausgabe:** „Ja“, wenn der Graph einen hamiltonschen Weg besitzt, „Nein“ sonst

**Aufgabe 7.13:** Entwerfen Sie einen Lösungsalgorithmus und ermitteln Sie seine Zeitkomplexität.

### 7.3.6. Das Erfüllbarkeitsproblem

Bei diesem Problem geht es um *aussagenlogische Formeln*. Eine solche Formel darf aus Variablen ( $a, b, c, \dots$ ), den logischen Operationen  $\&$ ,  $|$  und  $!$  und aus Klammern bestehen. Einige Beispiele:

Formel1:  $a | (! a \& b)$

Formel2:  $a \& (b | ! a) \& ! b$

Formel3:  $a | (b \& ! a) | ! b$

Formel4:  $(a | ! b) \& (b | c | ! d) \& (c | ! e | f) \& (! f | g | ! h)$

Eine Variablenbelegung für eine Formel besteht darin, dass man jede Variable (die in der Formel vorkommt) mit einem Wahrheitswert (**true** bzw. **false**) belegt. Hier folgen zwei Variablenbelegungen für die Formel1:

Variablenbelegung11:  $a = \text{true}; b = \text{false}$

Variablenbelegung12:  $a = \text{false}; b = \text{false}$

Wenn man die Variablenbelegung Variablenbelegung11 zu Grunde legt, dann ergibt die Formel1 den Wert **true**. Wenn man dagegen die Variablenbelegung Variablenbelegung12 nimmt, dann ergibt die Formel1 den Wert **false**.

Die Formel2 ergibt bei jeder möglichen Variablenbelegung den Wert **true**. Da in der Formel2 zwei Variablen vorkommen und jede dieser Variablen zwei verschiedene Werte annehmen kann, gibt es vier verschiedene Variablenbelegungen für Formel2. Die kann man alle durchprobieren.

Die Formel3 ergibt bei jeder möglichen Variablenbelegung **false**. Dazu sagt man auch: Formel3 ist *unerfüllbar*, d.h. es gibt keine Variablenbelegung, die der Formel3 zum Wert **true** verhelfen würde.

Ist die Formel4 erfüllbar? Eine „einfache“ Methode, um das herauszufinden, besteht darin, alle möglichen Variablenbelegungen durchzuprobieren. Wie viele Variablenbelegungen gibt es für Formel4?

**Erfüllbarkeitsproblem:** Gesucht wird ein Algorithmus mit folgendem Ein-/Ausgabeverhalten:

**Eingabe:** eine aussagenlogische Formel, in der  $n$  Variablen vorkommen

**Ausgabe:** „Ja“, wenn die Formel erfüllbar ist und „Nein“ sonst

Statt dieses Problem als Entscheidungsproblem zu formulieren (d.h. als Ja-/Nein-Problem), hätten wir als Ausgabe auch eine Variablenbelegung verlangen können, die die Formel erfüllt (falls eine solche Variablenbelegung existiert). Dadurch wäre das Problem auch nicht schwerer geworden.

## 7.4. Die Klassen P und NP

Die Klasse 2.2. (der nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch lösbaren algorithmischen Probleme) heißt offiziell einfach **P** (weil die Lösungsalgorithmen eine **p**olynomialen Zeitkomplexität haben). Die Klasse 2.1. (der nur theoretisch, aber nicht praktisch lösbaren algorithmischen Probleme) heißt offiziell **NP** (wie „**n**icht-deterministisch **p**olynomial“). Ein Problem gehört zur Klasse **NP**, wenn es einen Lösungsalgorithmus gibt, der sich auf einer *nicht-deterministischen Maschine* in polynomialer Zeit ausführen lässt.

Eine nicht-deterministische Maschine zu bauen ist etwa genauso schwierig, wie alle Stellen der Zahl  $\pi$  auszurechnen. Vollständig kann man also eine solche Maschine nicht bauen. Aber so, wie sich eine „schlechte Approximation“ von  $\pi$ , die nur aus fünf Ziffern besteht, relativ leicht und eine „gute Approximation“ mit 5000 Ziffern schon wesentlich weniger leicht berechnen lässt, so kann man eine nicht-deterministische Maschine mit mehr oder weniger Aufwand mehr oder weniger gut approximieren.

Eine nicht-deterministische Maschine kann man sich auf zwei verschiedene Weisen vorstellen:

1. als Maschine mit einem magischen Orakel
2. als Maschine mit unbegrenzt vielen parallelen Prozessoren

Hier sollen diese beiden Vorstellungen anhand des Erfüllbarkeitsproblems aus dem Kapitel 7.3.6. (auf Seite 167) erläutert werden. Wie würde eine nicht-deterministische Maschine das Erfüllbarkeitsproblem lösen?

Eine *Maschine mit magischem Orakel* fragt, nachdem wir ihr eine aussagenlogische Formel eingegeben haben, ihr Orakel: „Welche Variablenbelegung soll ich ausprobieren?“. Das Orakel nennt (so sind Orakel nun mal) sofort eine Variablenbelegung  $v$  und garantiert, dass wenn es überhaupt Variablenbelegungen gibt, unter denen die Formel den Wert **true** ergibt, dann ist  $v$  eine solche Belegung. Wenn dagegen die Variablenbelegung  $v$  die Formel **false** ergibt, dann gibt es garantiert keine Belegung, die die Formel zu **true** auswertet: Dann ist die Formel unerfüllbar. Die Maschine braucht also nur zu prüfen, ob die Formel durch die Variablenbelegung  $v$  **true** wird (dann ist die Formel offenbar erfüllbar) oder **false** (dann ist die Formel nicht erfüllbar, das garantiert das Orakel). Diese Prüfung nimmt nur polynomial viel Zeit in Anspruch.

Maschinen mit magischem Orakel sind zwar „unrealistisch“, aber weit weniger, als es auf den ersten Blick erscheinen mag. Gute Mathematiker besitzen eine bestimmte Intuition, und nicht wenige schwierige Probleme sind schon auf diesem Wege gelöst worden. Einem Orakel entspricht in einem bestimmten Sinn auch eine unbegrenzte Anzahl von parallelen Prozessoren.

Eine Maschine mit unbegrenzt vielen parallelen Prozessoren würde das Erfüllbarkeitsproblem folgendermaßen lösen: Nachdem wir dem Hauptprozessor die aussagenlogische Formel eingegeben haben, zählt er die darin vorkommenden Variablen (es sind  $n$  Variablen). Für  $n$  Variablen gibt es  $2^n$  viele Variablenbelegungen. Er reicht also die Formel an  $2^n$  viele Prozessoren weiter und beauftragt jeden dieser Prozessoren, eine bestimmte Variablenbelegung auszuprobieren. Innerhalb eines bestimmten Zeitraums (der von der Länge der Formel, d.h. von  $n$  polynomial abhängt) sind alle Prozessoren mit dem Ausprobieren fertig. Wenn einer der  $2^n$  Prozessoren feststellt, dass die Formel unter seiner Variablenbelegung **true** ergibt, dann meldet er das an den Hauptprozessor zurück. Wenn er innerhalb der bestimmten (von  $n$  polynomial abhängigen) Zeit keine solche Erfolgsmeldung erhalten hat, dann ist die Formel unerfüllbar.

Offensichtlich gilt

$$P \subseteq NP$$

d.h. alle Probleme aus der Klasse  $P$  (die auf einer deterministischen Maschine polynomial gelöst werden können), auf der Klasse  $NP$  angehören, d.h. sie können auch auf einer nicht-deterministischen Maschine polynomial gelöst werden.

## 7.5. Ist $P = NP$ ?

Für viele algorithmische Probleme kennt man Lösungsalgorithmen mit polynomialer Zeitkomplexität. Diese Probleme gehören zur Klasse  $P$ . Für andere algorithmische Probleme würden auch die besten bekannten Lösungsalgorithmen eine nicht-deterministische Maschine brauchen, um in polynomialer Zeit ausführbar zu sein<sup>1</sup>. Diese Probleme gehören zur Klasse  $NP$ .

Aber bis heute konnte nicht bewiesen werden, dass man Probleme aus der Klasse  $NP$  nicht doch eines Tages mit einem besonders genialen Algorithmus in polynomialer Zeit lösen kann. Anders ausgedrückt weiß man nicht, ob die beiden Klassen  $P$  und  $NP$  in Wirklichkeit nur eine Klasse sind ( $P = NP$ ) oder ob sie tatsächlich verschiedene Klassen sind ( $P \subset NP$ ). Dieses Problem ist seit 1971 bekannt und – trotz ziemlich großer Anstrengungen auf diesem Gebiet – ungelöst. So gut wie alle Wissenschaftler, die sich mit diesem Problem befassen haben, sind fest davon überzeugt, dass  $P \neq NP$  gilt. Aber noch niemand hat es bewiesen.

---

<sup>1</sup> Auf einer deterministischen Maschine brauchen die besten Algorithmen eine schlechtere Komplexität als polynomial.

Zum genaueren Verständnis: Man kann z.B. beweisen, dass es keinen Sortieralgorithmus mit einer besseren Zeitkomplexität als  $n \log n$  gibt. Aber bisher konnte niemand beweisen, dass es keinen Algorithmus gibt, der z.B. das Erfüllbarkeitsproblem in polynomialer Zeit löst. Wenn morgen jemand einen solchen „schnellen Lösungsalgorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem“ veröffentlicht, dann würde das zwar sehr großes Aufsehen erregen, aber es würde keinem Beweis widersprechen.

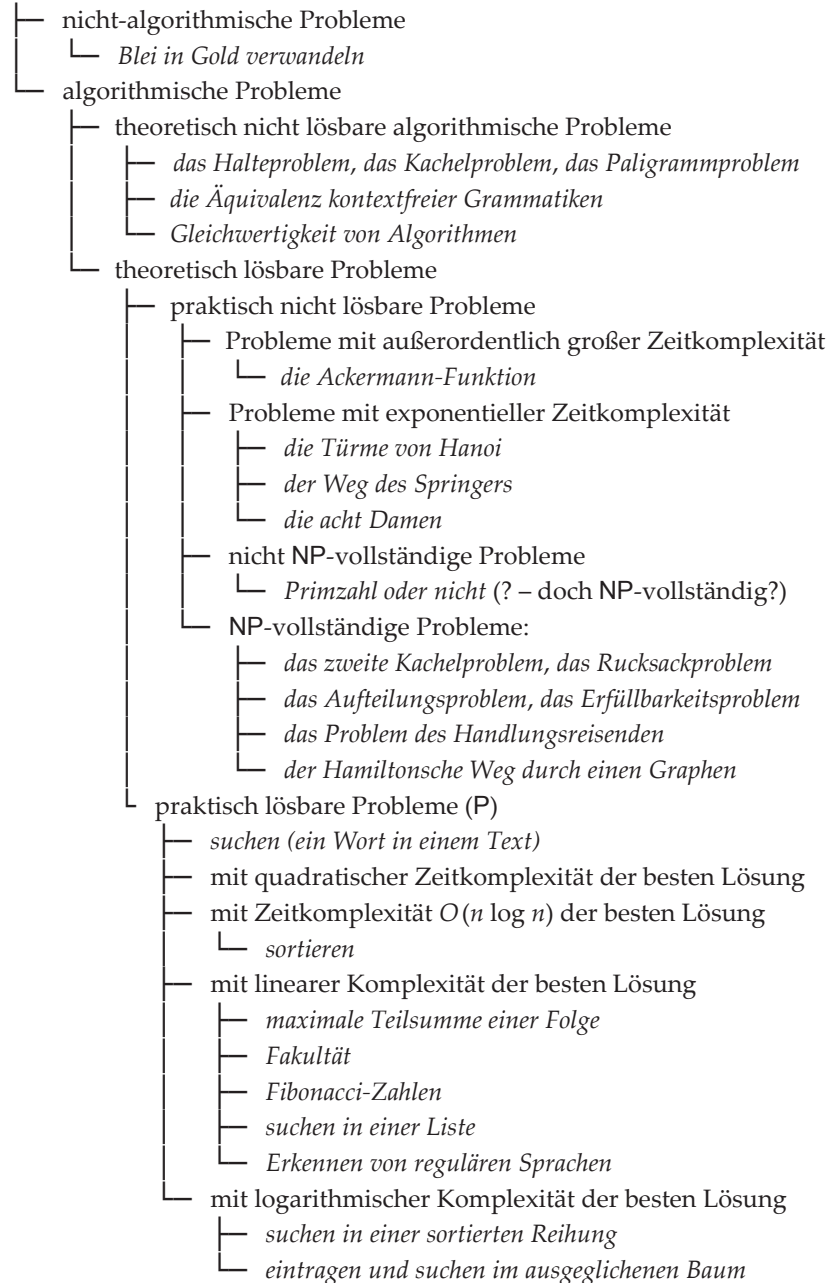
Man kann allerdings beweisen, dass viele Probleme in der Klasse NP „eng miteinander zusammenhängen“: Wenn man für *eines* dieser Probleme einen Algorithmus mit polynomialer Zeitkomplexität entwickeln könnte, dann könnte man das auch für *alle* Probleme dieser Klasse. Probleme mit dieser Eigenschaft heißen *NP-vollständig*.

Alle im Kapitel 7.3. (auf Seite 163) angeführten Beispiele für Probleme aus der Klasse NP sind NP-vollständig. Es gibt auch Gegenbeispiele: Das Problem, von einer natürlichen Zahl festzustellen, ob sie eine Primzahl ist oder nicht, gehört nach heutigen Erkenntnissen zur Klasse NP. Man konnte bisher aber nicht beweisen, dass dieses Problem NP-vollständig ist.

## 7.6. Übersicht über Problemklassen

Die untersuchten Probleme können nach folgendem Schema kategorisiert werden:

Probleme aller Art



## Literaturverzeichnis

- [ArnGos] *Arnold, Gosling*: Die Programmiersprache Java (*Addison-Wesley*)
- [AU] *Aho, Ullmann*: Principles of Compiler Design (*Addison-Wesley*, 1977)
- [AVL] *Adelson-Velskii, Landis*: Ein Algorithmus zur Informationsorganisation (auf Russisch; *Doklady Akademii Nauk SSSR* 146 – 1962, Seiten 263-266)
- [Bay] *Bayer, McCreight*: Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes (*Acta Informatica* 1, No. 3 – 1972, Seiten 173-189)
- [EWD] *Dijkstra Archive* (auf Englisch; [www.cs.utexas.edu/users/EWD](http://www.cs.utexas.edu/users/EWD))
- [Eu] *Euklid*: Elemente (Buchhandlung des Waysenhauses, Halle 1781)
- [JLS] *Gosling, Joy, Steele*: Java – Die Sprachspezifikation (*Addison-Wesley*)
- [Nut] *Flanagan*: Java in a Nutshell (*O'Reilly*)
- [Gam] *Gamma u.a.*: Design Patterns (*Addison-Wesley*, Reading 1994)
- [Gil] *Gilstad*: Polyphase Merge Sorting (Proc. AFIPS Eastern Jt, 1960)
- [Gr] *Grude*: Java ist eine Sprache (*Vieweg*, 2005)
- [KesSol] *Kessler, Solymosi*: Ohne Glauben kein Wissen (*Schwengeler*, 1995)
- [Mey] *Meyer*: Objektorientierte Softwareentwicklung (*Hanser Verlag*, 1988)
- [Nie] *Nievergelt, Solymosi*: Schulbeispiele zur Rekursion (*Informatik Spektrum*, April 1990, Band 13 Seiten 106-108)
- [Sh] *Shell*: A Highspeed Sorting Procedure (*CACM*, 1959)
- [SolC] *Solymosi*: Objektorientiertes Plug and Play – Ein Lehrbuch für Programmieren in C++ (*Vieweg*, 1997)
- [SolN] *Solymosi*: Effizient Programmieren in C# und .NET (*Vieweg*, 2001)
- [SolS] *Solymosi*: Synthese von analysierenden Automaten auf Grund von formalen Grammatiken (*Arbeitsberichte des IMMD*, Erlangen, 1978)
- [Wil] *Williams*: Heapsort (*Communications of ACM*, 1964)



## Empfehlungen

[Ott] T. Ottmann, P. Widmayer: Algorithmen und Datenstrukturen  
BI Wissenschaftsverlag, Reihe Informatik Band 70, 1990, ca. 690 Seiten

Das Buch ist auf Deutsch und gut lesbar geschrieben. Viele wichtige Algorithmen werden besprochen. Es enthält eine gute Einleitung und ein umfangreiches Literaturverzeichnis (179 Einträge), aber ohne Kommentare. Die Algorithmen werden in Pascal dargestellt.

[Sed] R. Sedgewick: Algorithms  
Addison-Wesley, Second Edition, 1989, ca. 650 Seiten

Ein sehr sorgfältig und gut gestaltetes Buch in Englisch. Die Abläufe und die Ergebnisse vieler Algorithmen werden durch spezielle und sehr anschauliche Grafiken dargestellt. Es enthält sehr gute und verständliche Erklärungen zu schwierigen Algorithmen sowie viele Beispiele. Das Literaturverzeichnis ist nach Problemgebieten organisiert und enthält Kommentare. Die Algorithmen werden in Pascal dargestellt. Es gibt auch eine deutsche Übersetzung.

[Gon] G. H. Gonnet, R. Baeza-Yates: Handbook of Algorithms and Data Structures, Addison-Wesley, Second Edition 1991, ca. 420 Seiten

Ein Werk zum Nachschlagen, keines zum „Durcharbeiten“. Es werden sehr viele Algorithmen („alle wichtigen und einige weniger wichtige Varianten“) in Pascal und in C dargestellt. Die Erläuterungen zu den einzelnen Algorithmen sind eher sparsam und beschränken sich auf das Allernötigste. Es gilt als eine Anschaffung fürs Leben, ähnlich wie ein gutes Lexikon. Ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis (mehr als 1300 Einträge) ohne Kommentare ist vorhanden.

[Harel] David Harel: The Science of Computing, Addison-Wesley 1989, ca. 350 Seiten

Eine hervorragend einfach und verständlich geschriebene Einführung in das Gebiet der Algorithmen in Englisch. Es geht nicht um „brauchbare Algorithmen für die Praxis“, sondern um ein tieferes Verständnis des Gebietes.

[Kn] Donald E. Knuth: The Art of Computer Programming, Addison-Wesley

- Vol. 1: „Fundamental Algorithms“, 1973
- Vol. 2: „Seminumerical Algorithms“, 1969
- Vol. 3: „Sorting and Searching“, 1973

Der Klassiker in Englisch. Die Algorithmen werden in einer Assemblersprache dargestellt.

[SolSch] *Solymosi, Schmiedecke*: Programmieren mit Java – Das Lehrbuch zum sicheren Umgang mit Objekten, *Vieweg Verlag*, 1999, ca. 350 Seiten

In Deutsch. Eine Einführung in die objektorientierte Programmierung im Allgemeinen und in die Programmiersprache Java speziell. Viele auch im vorliegenden Buch benutzte Begriffe (z.B. „Zusicherungen“) werden erläutert.

[Wir] *Nikolaus Wirth*: Algorithmen und Datenstrukturen (*Teubner Verlag*)

Dieses Buch zählt ebenfalls zu den Klassikern im deutschsprachigen Raum. Viele bekannte Algorithmen werden in Pascal (und in einer späteren Ausgabe in Modula) formuliert, beschrieben und auch mathematisch analysiert.

## Programmverzeichnis

| <i>Kapitel</i> | <i>Seite</i> | <i>Klasse/Methode</i>  | <i>Datei</i>                    |
|----------------|--------------|--|---------------------------------|
| 1.1.           | 1            | ggtIterativ, ggtRekursiv   | Euklid.java                     |
| 1.3.           | 5            | ggt1, ggt2, ggt3<br>proz0  | Komplexitaet.java               |
| 2.1.3.         | 9            | maxTeilsomme3  | Teilsomme.java                  |
| 2.1.5.         | 12           | maxTeilsomme2  |                                 |
| 2.1.6.         | 13           | rechtesRandMax,<br>linkesRandMax<br>maxTeilsommeRekursiv<br>maxTeilsommel      |                                 |
| 2.1.7.         | 16           |  |                                 |
| 2.3.1.         | 22           | Stapel   | Stapel.java                     |
| 2.3.2.         | 23           | Knoten   | Warteschlange.java              |
| 2.3.3.         | 26           | Stapel   | Stapel.java                     |
| 2.3.4.         | 29           | auswerten  | Ausdruck.java                   |
| 3.1.1.         | 30           | fakultaetIterativ<br>fakultaetRekursiv   | Rekursion.java                  |
| 3.1.2.         | 31           | fibonacciRekursiv<br>FibonacciMitGedaechtnis<br>fibonacciIterativ<br>ackermann |                                 |
| 3.1.3.         | 33           | hanoi  |                                 |
| 3.1.4.         | 34           |  |                                 |
| 3.2.1.         | 38           | istGleichIter,<br>kopierenIter   | Liste.java                      |
| 3.2.2.         | 39           | istGleichRek, kopierenRek  |                                 |
| 3.2.3.         | 40           | istGleichIter,<br>kopierenIter<br>istGleichRek, kopierenRek                    | Reihung.java                    |
| 3.3.           | 42           | Schildkröte  | Schildkröte.java                |
| 3.3.1.         | 43           | schneeflocke   | Schneeflocke.java               |
| 3.3.2.         | 45           | pfeilspitze<br>drache  | Pfeilspitze.java<br>Drache.java |
| 3.3.3.         | 47           | hilbert  | Hilbert.java                    |
| 3.3.4.         | 50           | ISchneeflocke  | ISchneeflocke.java              |
| 3.4.2.         | 53           | versuchen  | Springer.java                   |
| 3.4.3.         | 55           | versuchen  | Damen.java                      |
| 4.1.           | 59           | suchen, nextTabelle<br>kmpSuchen   | Suchen.java                     |
| 4.3.           | 64           | Reihung  | Beschluesselt.java              |
| 4.3.2.         | 66           | SortierteReihung   | Reihung.java                    |
| 4.3.3.         | 67           | SortierteReihungBinaer<br>SortierteReihungLoeschbar                            | BinaeresSuchen.java             |

|        |     |                               |                                    |
|--------|-----|-------------------------------|------------------------------------|
| 4.5.2. | 71  | HashTabelle                   | HashTabelle.java                   |
| 4.4.   | 68  | Knoten, eintragen, suchen     | Liste.java                         |
| 4.5.2. | 71  | HashTabelle                   | HashTabelle.java                   |
| 4.5.3. | 75  | hash01, hash02, ...           | HashFunktionen.java                |
| 5.1.4. | 86  | Sort                          | Sort.java<br>SortTest.java         |
| 5.2.1. | 88  | BubbleSort                    | BubbleSort.java                    |
|        |     | Shaker Sort                   | ShakerSort.java                    |
| 5.2.2. | 90  | Straight Insertion            | StraightInsertion.java             |
| 5.2.3. | 92  | Straight Selection            | StraightSelection.java             |
| 5.3.   | 93  | Shell Sort                    | ShellSort.java                     |
| 5.4.1. | 95  | QuickSort                     | QuickSort.java                     |
| 5.4.2. | 98  | mergeSort                     | MergeSort.java                     |
| 5.5.   | 98  | HeapSort                      | HeapSort.java                      |
| 5.6.1. | 104 | merge                         | Merge.java                         |
| 6.1.3. | 115 | Binaerbaum                    | MultiMerge.java<br>Binaerbaum.java |
| 6.2.2. | 118 | senken                        | BaumSort.java                      |
| 6.2.3. | 120 | BaumSort                      |                                    |
| 6.2.4. | 121 | inorder, preorder, post-order |                                    |
| 6.3.1. | 123 | vorhanden                     |                                    |
| 6.3.2. | 124 | Baum                          | Baum.java                          |
| 6.3.3. | 125 | eintragen                     |                                    |
| 6.4.   | 128 | loeschen                      |                                    |
| 6.4.2. | 133 | AVLbaum                       | AVLbaum.java                       |
| 7.1.   | 149 | loeschen                      |                                    |
|        |     | geschummelt                   | Algorithmen.java                   |
|        |     | haeltNie, haeltImmer          |                                    |
|        |     | haeltWennGroesser1            |                                    |
|        |     | haeltWennNichtLeer            |                                    |
|        |     | haelt7, haeltVielleicht       |                                    |
|        |     | goedel, programm              |                                    |

Die übersetzbaren, lauffähigen Quelltextdateien (4. Spalte) sind im Internet unter der folgenden Adresse zu finden:

<http://public.beuth-hochschule.de/oo-plug/A&D>

## Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

|                 |   |
|-----------------|---|
| Tabelle 1.1     | Zeitverbrauch für einen Schritt                               |
| Tabelle 1.2:    | Anzahl der Schritte   |
| Tabelle 2.1:    | Veränderung des Aktienwerts                                   |
| Tabelle 2.2:    | Zeitverbrauch in hundertstel Sekunden                         |
| Abbildung 2.3:  | LIFO als Reihung mit drei Elementen                           |
| Abbildung 2.4:  | Eintragen in eine rückwärts verkettete Liste                  |
| Abbildung 2.5:  | Eintragen in eine vorwärts verkettete Liste                   |
| Abbildung 2.6:  | Löschen eines Elements aus der verketteten Liste              |
| Tabelle 3.1:    | Wertetabelle der Fakultät                                     |
| Tabelle 3.2:    | Wertetabelle der Fibonacci-Zahlen                             |
| Abbildung 3.3:  | Berechnung von $f_5$  |
| Abbildung 3.4:  | Türme von Hanoi   |
| Abbildung 3.5:  | Permutationen   |
| Abbildung 3.6:  | Rekursive Abarbeitung einer Liste                             |
| Abbildung 3.7:  | Rekursive Abarbeitung einer Reihung                           |
| Abbildung 3.8:  | Monsterkurve  |
| Abbildung 3.9:  | Initiator und Generator der Schneeflockenkurve                |
| Abbildung 3.10: | Annäherungen der Schneeflockenkurve                           |
| Abbildung 3.11: | Initiator und Generator der Pfeilspitzenkurve                 |
| Abbildung 3.12: | Annäherungen der Pfeilspitzenkurve                            |
| Abbildung 3.13: | Initiator und Generator der Hilbert-Kurve                     |
| Abbildung 3.14: | Annäherungen der Hilbert-Kurve                                |
| Abbildung 3.15: | Initiator und Generator Sierpinski-Kurve                      |
| Abbildung 3.16: | Labyrinth   |
| Abbildung 3.17: | Wege im Labyrinth   |
| Abbildung 3.18: | Erlaubte Züge des Springers                                   |
| Abbildung 3.19: | Ein Weg des Springers auf einem $5 \times 5$ -Feld            |
| Abbildung 3.20: | Durch eine Dame bedrohte Felder                               |
| Abbildung 3.21: | Die acht Damen  |
| Abbildung 3.22: | Instabile Liebesbeziehung                                     |
| Abbildung 3.23: | Übergangsdiagramm   |
| Tabelle 3.24:   | Steuerungstabelle   |
| Abbildung 3.25: | Arbeitsweise mit dem Wort <code>aaaaabb</code>                |
| Tabelle 3.26:   | Vereinfachte Darstellung der Arbeitsweise                     |
| Tabelle 3.27:   | Falsche Wörter: <code>aaaa, abaa, bbb</code>                  |
| Tabelle 3.28:   | Endlicher Automat für Bezeichner in Ada-Stil                  |
| Tabelle 3.29:   | Arbeitsweise des Automaten mit dem Wort <code>PROZ_23A</code> |

|                 |  |
|-----------------|--|
| Tabelle 3.30:   | Falsches Wort:      PROZ <u>  </u> 23A                     |
| Tabelle 3.31:   | Kellerautomat für $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$            |
| Tabelle 4.1:    | Suchen im Text   |
| Tabelle 4.2:    | Informationsverlust bei der Textsuche                      |
| Tabelle 4.3:    | „next-Tabelle“ für das Muster babaabbb                     |
| Abbildung 4.4:  | Endlicher Automat für das Muster babaabbb                  |
| Abbildung 4.5:  | Hash-Tabelle   |
| Abbildung 4.6:  | Kollisionsbehandlung mit verketteter Liste                 |
| Tabelle 4.7:    | Konstante Hash-Funktion                                    |
| Tabelle 4.8:    | Zweiwertige Hash-Funktion                                  |
| Tabelle 4.9:    | Alphabetische Hash-Funktion                                |
| Tabelle 4.10:   | Hash-Funktion aus drei Zeichen                             |
| Tabelle 4.11:   | Hash-Funktion nach Formel                                  |
| Tabelle 4.12:   | Zeitbedarf der Operationen in einer Sammlung der Größe $n$ |
| Tabelle 4.13:   | Komplexität von Operationen                                |
| Abbildung 5.1:  | Bubble sort  |
| Abbildung 5.2:  | Straight insertion   |
| Abbildung 5.3:  | Straight selection   |
| Abbildung 5.4:  | Shell sort   |
| Abbildung 5.5:  | Quick sort   |
| Tabelle 5.6:    | Halde  |
| Tabelle 5.7:    | Keine Halde  |
| Tabelle 5.8:    | Eine „an der Spitze gestörte“ Halde                        |
| Tabelle 5.9:    | „Reparierte“ Halde   |
| Abbildung 5.10: | Heap sort  |
| Tabelle 5.11:   | Mischen mehrerer Sequenzen                                 |
| Tabelle 5.12:   | Anzahl und Länge (in 1000) der Sequenzen mit 4 Dateien     |
| Tabelle 5.13:   | Anzahl und Länge (in 1000) der Sequenzen mit 6 Dateien     |
| Tabelle 5.14:   | Fibonacci-Mischen mit sechs Dateien                        |
| Tabelle 5.15:   | Fibonacci-Mischen mit drei Dateien                         |
| Tabelle 5.16:   | Fibonacci-Zahlen der 4. Ordnung                            |
| Abbildung 6.1:  | Zwei verschiedene (bzw. gleiche) Bäume                     |
| Abbildung 6.2:  | Knotenarten im Baum  |
| Abbildung 6.3:  | Die Ebenen eines Baumes                                    |
| Abbildung 6.4:  | Ein voller Binärbaum                                       |
| Abbildung 6.5:  | Ein kompletter Binärbaum                                   |
| Abbildung 6.6:  | Binärbäume verschiedener Tiefen und Gewichte               |
| Abbildung 6.7:  | Ein Binärbaum mit 7 Knoten und 2 Pseudoknoten              |
| Abbildung 6.8:  | Ein Baum mit eingezeichneten Schlüsseln                    |
| Abbildung 6.9:  | Ein kompletter Binärbaum                                   |
| Abbildung 6.10: | Ein an der Wurzel „gestörter sortierter“ Binärbaum         |
| Abbildung 6.11: | Senken   |

- Abbildung 6.12: Reparierter Binärbaum  
Abbildung 6.13: Sortierter Binärbaum  
Abbildung 6.14: „inorder“ Traversieren  
Abbildung 6.15: „preorder“ Traversieren  
Abbildung 6.16: „postorder“ Traversieren  
Abbildung 6.17: Eintragen in einen sortierten Binärbaum  
Abbildung 6.18: Fall 1 (kein Nachfolger: löschen)  
Abbildung 6.19: Fall 2 (ein Nachfolger: umhängen)  
Abbildung 6.20: Fall 3 (zwei Nachfolger: austauschen)  
Abbildung 6.21: Löschen im sortierten Binärbaum  
Abbildung 6.22: Fall 1 – einfaches Rotieren  
Abbildung 6.23: Fall 2 – doppeltes Rotieren  
Abbildung 6.24: Ein sortierter 2-3-4-Baum  
Abbildung 6.25: Spalten eines Wurzelknotens  
Abbildung 6.26: Spalten des Unterknotens eines 2-er-Knoten  
Abbildung 6.27: Spalten des Unterknotens eines 3-er-Knoten  
Abbildung 6.28: Einfügen im 2-3-4-Baum  
Abbildung 6.29: Rote und schwarze Kanten  
Abbildung 6.30: Ein Rot-Schwarz-Baum  
Abbildung 6.31: Rotieren im Rot-Schwarz-Baum  
Abbildung 6.32: Symmetrisches Rotieren im Rot-Schwarz-Baum  
Abbildung 6.33: Spalten, Fall 1  
Abbildung 6.34: Spalten, Fall 2  
Abbildung 6.35: Spalten, Fall 2.1  
Abbildung 6.36: Spalten, Fall 2.2  
Abbildung 6.37: Spalten, Fall 2.3  
Abbildung 6.38: Knoten eines B-Baums mit Schlüsseln und Verweisen  
Abbildung 6.39: Sortierkriterium im B-Baum  
Abbildung 7.1: Kachel  
Abbildung 7.2: Auslegen von Kacheln  
Abbildung 7.3: Anschlussbedingung  
Abbildung 7.4: Erfüllbarer Kachelkatalog  
Abbildung 7.5: Unerfüllbarer Kachelkatalog  
Tabelle 7.6: Lösbares Paligrammproblem  
Tabelle 7.7: Lösung des Paligrammproblems aus der Tabelle 7.6  
Tabelle 7.8: Unlösbares Paligrammproblem  
Abbildung 7.9: Das Problem des Handelsreisenden  
Abbildung 7.10: Graph ohne und mit hamiltonischem Weg

## Sachwortverzeichnis

### A

Abarbeitung 37  
abstrakter Algorithmus 1, 6  
Ackermann-Funktion 33, 156  
algorithmisches Problem 149  
Algorithmus 1  
Anker 24  
Annäherung 47  
Anschlussbedingung 159  
äquivalente Grammatiken 163  
Äquivalenz 20, 159  
arithmetischer Ausdruck 29  
Aufteilungsproblem 165  
Aufzählung 131  
Ausdruck 29  
ausgeglichener Baum 81, 129  
aussagenlogische Formel 167  
AVL-Baum 129

### B

backtracking 53  
Baum 111  
Baumsort 120  
B-Baum 146  
Behälter 21  
Betriebsmittel 4  
Binärbaum 111  
binäres Suchen 67, 91, 114  
Blasensort 88  
Blatt 81, 111, 147  
bubble sort 88

### C

const 9, 27

### D

Dame 56  
Darstellung eines Algorithmus 2  
deterministische Maschine 168  
Dialogtesttreiber 28  
direktes Auswählen 92  
direktes Einfügen 90  
Drachenkurve 46, 47  
durchschnittlicher Zeitbedarf 85  
durchwandern 121

### E

Ebene 112  
Eigenschaft 27  
Ein-/Ausgabe-Beschreibung 149  
einfügen 66, 138  
eintragen 124  
Einzelproblem 151  
Endlichkeitsbedingung 150  
ensures 2  
Entscheidungsproblem 153  
Entwurfsmuster 87  
enum 131  
Erfüllbarkeitsproblem 167  
Euklid 1  
exponentielle Komplexität 21, 32, 164  
externes Sortierverfahren 83, 104  
externes Suchen 63

### F

Fakultät 30  
Fibonacci-Mischen 108  
Fibonacci-Zahlen 31, 110



FIFO 25  
Folge 8  
Fraktal 42

## G

Gedächtnis 32  
generische Klasse 22  
generische Methode 86  
geschachtelte Schleife 13  
Gewicht 113, 129  
ggT 1  
Gleichwertigkeit 19, 159  
Gödel 158  
Grammatik 162  
größter gemeinsamer Teiler 1

## H

Halde 28, 99, 117  
Haldenbedingung 100  
Halteproblem 157  
Hamilton-Weg 166  
Handelsreisende 165  
Hash-Funktion 71  
Hash-Tabelle 70  
heap 28, 99, 117  
heap sort 98  
Hilbert-Kurve 47

## I

index-sequenzielle Datei 146  
Induktion 35  
Informator 27  
innerer Knoten 111  
inorder 121  
instabiles Sortiervverfahren 83  
internes Sortiervverfahren 83  
internes Suchen 63  
Iteration 30

## K

Kachelpproblem 159, 164  
Keller 22  
Kettenelement 23  
Klumpen 72  
Knoten 23  
Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus 61  
Kollision 72  
kompletter Binärbaum 112  
Komplexität 4, 151  
konkreter Algorithmus 1  
konstante Komplexität 20  
kontextfreie Grammatik 162  
kurzgeschlossen 40

## L

Landau-Notation 7  
lineare Kollisionsstrategie 72  
lineare Komplexität 20  
lineares Suchen 66, 69  
logarithmische Komplexität 21  
logarithmisches Sortiervverfahren 95  
Lösbarkeitsbedingung 150  
löschen 125, 133

## M

Machiavelli 13  
Markierung 67, 70  
mathematische Induktion 35, 37  
Matrix 12  
maximale Teilsumme 9, 149  
Mehrfacheintragung 64  
Mergesort 98  
Messergebnisse 18  
mischen 104  
Mischkanal 108  
Monsterkurve 47  
Multibehälter 21  
Mutator 27

**N**

Nachfolger 99, 111  
next-Tabelle 61  
nicht-deterministisch polynomial 168  
NP-vollständig 170

**O**

Ordnung einer Kurve 47

**P**

Paligrammproblem 161  
parallele Prozessoren 169  
Permutation 37  
Pfeilspitzenkurve 45  
Polynom 7  
polynomiale Komplexität 21, 164, 168  
postorder 121  
preorder 121  
primitiv-rekursive Funktion 34  
private 15  
Pseudo-Kettenglied 69  
Pseudoknoten 115

**Q**

quadratische Komplexität 21  
quadratisches Sortiervverfahren 88  
quick sort 95

**R**

Radix-Sortiervverfahren 83  
Randfolge 14  
Reihung 22, 64, 82  
Rekursion 30  
rekursiv 2, 14, 123  
rekursive Kurve 42  
requires 2  
roher Typ 73  
rotieren 130  
Rot-Schwarz-Baum 140

Rucksackproblem 164  
rückwärts verkettete Liste 24  
Rückwärtsverkettung 24

**S**

Sammlung 63  
Schildkrötengrafik 42  
Schleife 30  
Schlüssel 63, 71, 82  
Schneeflockenkurve 43  
Schrittweite 93  
senken 100, 118  
Sequenz 83, 105  
shaker sort 89  
Shell sort 93  
Sierpinski-Dreieck 45  
Sierpinski-Kurve 49  
Sondieren 72  
Sondierungsfunktion 72  
Sortieren 82  
Sortierkanal 106  
sortierte Liste 70  
sortierter Baum 81, 113  
spalten 136, 147  
Speicherkomplexität 4, 31, 84  
Springer 53  
stabiles Sortiervverfahren 83  
stack 22, 99  
Stapel 22, 99  
Stapeltesttreiber 28  
static 2  
straight insertion 90, 93  
straight selection 92  
Strategie 87  
streng sortierter Binärbaum 114  
Streuwerttabelle 70  
Suchen 59, 66, 79  
Suchschlüssel 65  
Syntaxdiagramm 162

**T**

Teile-und-herrsche-Strategie 13, 67, 91  
Teilfolge 8  
Teilsumme 9  
Test 20  
Testfall 20, 27  
Testtreiber 28  
Textsuche 59  
Tiefe 113, 128, 129  
traversieren 121  
Türme von Hanoi 34  
turtle graphics 42  
Typparameter 22

**U**

Umgebung 10  
umhängen 125  
Unendlichkeitsbedingung 20, 150, 151  
Unicode 71  
Universaltesttreiber 28  
unlösbares Problem 20  
unterquadratisch 93

**V**

variable Parameter 106

Verbrauch 5  
vergleichen 83  
vergleichsbasiertes Sortiervverfahren 83  
Vergleichsoperator 82  
verkettete Liste 22, 68  
vertauschen 83  
voller Binärbaum 112  
vollständig ausgeglichener Baum 129  
Vorgänger 99, 111  
vorwärts verkettete Liste 25

**W**

Wertetabelle 30  
Wiederholung 30  
Wortproblem 161  
Wurzel 81, 99, 100, 147

**Z**

Zählschleife 17  
Zeitbedarf 80, 84, 88, 178  
Zeitkomplexität 4, 79, 88  
Zeitverbrauch 5  
Zugriffschutz 15  
Zurückverfolgung 53  
Zusicherung 2  
2-3-4-Baum 135