1 <解答>

(1) $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$.

① $\{a_n\}$の一般項.

☆ $S_n-S_{n-1}=a_n$を利用し, a_nの式にする

$$S_n-S_{n-1}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n+5)$$
$$=\frac{1}{6}n\{(2n^2+9n+7)-(2n^2+3n-5)\}$$
$$=n(n+2).\quad (n\geqq 2).\quad また, a_1=S_1=3.$$

$\therefore a_n=n(n+2)$. これはn=1でも成り立つ.

② $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

(2) $\{a_n\}$ 2 6 12 20 30 42, ……

$\{b_n\}$ 4 6 8 10 12 ……

$b_n=4+(n-1)\cdot 2$ より. $b_n=2n+2$. $n\geqq 2$のとき,

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=2+2\sum_{k=1}^{n-1}k+2(n-1)$$
$$=2+n(n-1)+2n-2$$
$$=n^2+n \quad これはn=1をみたす.$$

① $$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

② $$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{S_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot 4}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n(n+1)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{3n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

(3) $\frac{1}{1} \,\Big|\, \frac{2}{2}\ \frac{3}{2} \,\Big|\, \frac{4}{3}\ \frac{5}{3}\ \frac{6}{3} \,\Big|\, \frac{7}{4}\ \frac{8}{4}\ \frac{9}{4}\ \frac{10}{4} \,\Big|\, \frac{11}{5}$ ……

第k群にk個の数が入るように数列を上のように前から分ける.

・第n群の初項の分子は $\sum_{k=1}^{n-1} k + 1 = \frac{1}{2}(n-1)n + 1$

第n群の末項の分子は $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

∴第n群の総和は $\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$

$$= \frac{n^2+1}{2}$$

第210項が第n項に含まれるとすると, $\frac{1}{2}(n-1)n < 210 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$.

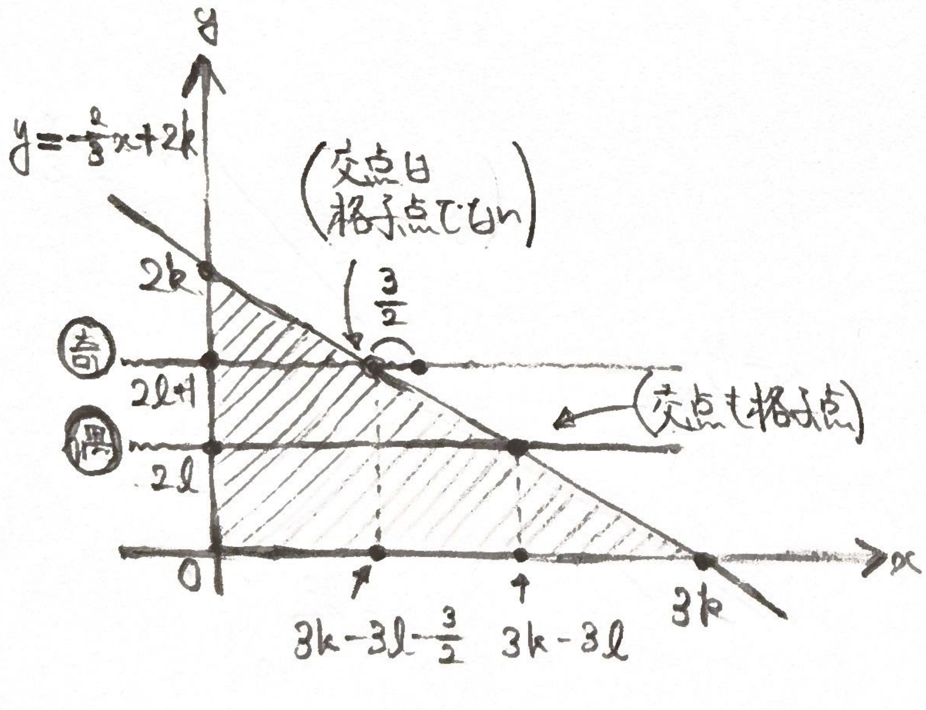
$$\iff (n-1)n < 420 \leqq n(n+1).$$

$$\therefore n = 20$$

第210項は分母が20の数のうち最後の数である.

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{k^2+1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\overset{10}{\cancel{20}}\cdot\overset{7}{\cancel{21}}\cdot 41+20\right) = 1445$$

(4) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq k$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ の表す領域は下図斜線部.(境界を含む).



i) 直線 $y=2l$ ($l=0,1,2,\cdots k$)上の格子点について.

$$(3k-3l)-0+1$$
$$=3k-3l+1 \text{ コ.}$$

ii) 直線 $y=2l+1$ ($l=0,1,2,\cdots k-1$)上の格子点について

$$(3k-3l-2)-0+1$$
$$=3k-3l-1 \text{ コ.}$$

i) ii) より,求める格子点の個数は $k\neq 0$ のとき,

$$\sum_{l=1}^{k}(3k-3l+1)+\sum_{l=1}^{k-1}(3k-3l-1)$$
$$=3k^2+3k+1 \text{ コ}$$ (これは $k=0$ でも成立)

$\boxed{2}$ 〈解答〉

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+(2n+1)\cdot 3^n$

★ $a_{n+1}=a_n+\boxed{nの式}\rightarrow$ 階差

$\therefore a_n=a_1+\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot 3^k}_{(等差)\times(等比)型}\quad (n\geqq 2)$

$\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot 3^k=S$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
S&=3\cdot 3^1+5\cdot 3^2+7\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-2}+(2n-1)\cdot 3^{n-1}\\
-)\ 3S&=\qquad\quad 3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-5)\cdot 3^{n-2}+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2S&=9+2(3^2+3^3+3^4+\cdots\cdots+3^{n-2}+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n\\
&=9+2\cdot\frac{3^2(3^{n-2}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^n\\
&=9+3^n-9-(2n-1)\cdot 3^n\\
&=3^n(-2n+2)\qquad\qquad \therefore S=(n-1)\cdot 3^n
\end{aligned}
$$

$\therefore a_n=(n-1)\cdot 3^n+2$ 　これはn=1もみたす //

(2) $a_1=6,\ a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$

★ 3^{n+1}で割ると、$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$、$2\cdot\frac{a_n}{3^n}$ の形ができる

$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{3^n}+1$

$\frac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと、$b_{n+1}=2b_n+1$ 　$\boxed{\begin{aligned}&\alpha=2\alpha+1\\&\therefore \alpha=-1\end{aligned}}$

$\Leftrightarrow b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

$b_n+1=c_n$ とおくと、$c_{n+1}=2c_n$ 　$c_1=b_1+1=\frac{6}{3}+1=3$

$\therefore c_n=3\cdot 2^{n-1}$

$\therefore b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

$\therefore a_n=3^n(3\cdot 2^{n-1}-1)$

よって、$a_n=9\cdot 6^{n-1}-3^n$ //

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3^n+4$]文字置き.

$a_{n+1}+p\cdot 3^{n+1}+q=2(a_n+p\cdot 3^n+q)$

$a_{n+1}=2a_n+(-p)\cdot 3^n+q.$

与式と係数を比較して. $p=-1,\ q=0.$

$\therefore\ a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$

$a_n-3^n=b_n$ とおくと, $b_{n+1}=2b_n.\ \ b_1=a_1-3^1=-2.$

$\therefore\ b_n=-2^n$ したがって, $a_n=3^n-2^n$ //

(4) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$

$a_{n+1}=(a_n-1)^2+1$

$\Longleftrightarrow\ a_{n+1}-1=(a_n-1)^2$ 平方完成により. 同形をつくる.

☆ $a_n^{\bigcirc}=\bigcirc\log_{\square}a_n$ で. 指数は係数に.

両辺正より. 両辺の2を底とする対数をとると,

$\log_2(a_{n+1}-1)=2\log_2(a_n-1)$

$b_n=\log_2(a_n-1)$ とおくと, $b_{n+1}=2b_n.\ \ b_1=\log_2 2=1$

$\therefore\ b_n=2^{n-1}$

$\therefore\ \log_2(a_n-1)=2^{n-1}$

すなわち. $a_n-1=2^{2^{n-1}}$

$\therefore\ a_n=2^{2^{n-1}}+1$ //

(5) $a_1=-5,\ na_{n+1}=(n+2)a_n+4(n+1)$

☆ 辺々を $n(n+1)(n+2)$ で割って同形をつくる

$\therefore\ \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}a_n+4\cdot\dfrac{1}{n(n+2)}$

$\dfrac{1}{n(n+1)}a_n=b_n$ とおくと, $b_{n+1}=b_n+4\cdot\dfrac{1}{n(n+2)}.\ \ b_1=\dfrac{1}{1\cdot 2}\cdot(-5)=-\dfrac{5}{2}$

$b_n=-\dfrac{5}{2}+4\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k(k+2)}\quad(n\geqq 2)$

$=-\dfrac{5}{2}+4\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=-\dfrac{5}{2}+2\left\{\begin{array}{ll}\left(\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right) & \cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{n-3}}-\cancel{\dfrac{1}{n-1}}\right)\\ +\left(\dfrac{1}{2}-\cancel{\dfrac{1}{4}}\right) & \cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{n-2}}-\dfrac{1}{n}\right)\\ +\left(\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right) & \cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{n-1}}-\dfrac{1}{n+1}\right)\end{array}\right\}$

$\therefore b_n = -\frac{5}{2} + 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$= -\frac{5}{2} + 2\cdot\frac{3n^2-n-2}{2n(n+1)}$

$= \frac{n^2-7n-4}{2n(n+1)}$

したがって. $\frac{1}{n(n+1)}a_n = \frac{n^2-7n-4}{2n(n+1)}$

より. $a_n = \frac{n^2-7n-4}{2}$ これは $n=1$ をみたす //

(6) $a_1=0, a_2=3, a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$.

$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

$\boxed{x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \quad \therefore x=3.}$

$\therefore a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

$a_2-3a_1=3$ より. $a_{n+1}-3a_n=3^n$.

$\iff a_{n+1}=3a_n+3^n$.

辺々 3^{n+1} で割って $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$

$\frac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと. $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}$. $b_1=\frac{a_1}{3^1}=0$.

$\therefore b_n=\frac{1}{3}(n-1)$

すなわち. $a_n=(n-1)\cdot 3^{n-1}$ //

(7) $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+2}$

漸化式より. $a_n=0$ とすると. $a_{n+1}=0$.

同様にして. $a_n=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2=a_1=0$ これは $a_1=1$ であることに矛盾する.

$\therefore$ すべての自然数 n について. $a_n\neq 0$

$\therefore$ 辺々の逆数をとって. $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+3$.

$\boxed{\alpha=2\alpha+3 \quad \alpha=-3}$

$\frac{1}{a_n}=b_n$ とおくと. $b_1=\frac{1}{a_1}=1$, $b_n=2b_n+3$.

$\iff (b_{n+1}+3)=2(b_n+3)$.

$b_n+3=c_n$ とおくと. $c_{n+1}=2c_n$. $c_1=b_1+3=4$ $\therefore c_n=2^{n+1}$.

すなわち. $b_n=2^{n+1}-3$.

$\therefore a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$ //

(8) $\dfrac{S_n - 2n + 1}{a_n - 2} = 2$

★ S_n が出てきた.

$\longrightarrow$ $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ を利用.

$\longrightarrow$ まず $S_n = ●$ の形にする.

$$S_n - 2n + 1 = 2(a_n - 2)$$

$$\Longleftrightarrow S_n = 2a_n + 2n - 5$$

$$\therefore a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \{2a_{n+1} + 2(n+1) - 5\} - \{2a_n + 2n - 5\}$$

$$\Longleftrightarrow a_{n+1} = 2a_n - 2$$

$$\Longleftrightarrow (a_{n+1} - 2) = 2(a_n - 2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= 2\alpha - 2 \\ \alpha &= 2 \end{aligned}}$$

$b_n = a_n - 2$ とおくと, $b_{n+1} = 2b_n$. $b_1 = a_1 - 2 = S_1 - 2 = 1$.

$\therefore b_n = 2^{n-1}$ $\quad\therefore a_n = 2^{n-1} + 2$ //