数学Ⅱα 後期中間考査 問題編

問0.
4次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。　　　　　　（2024年九大／理系）

問1.
点$(0, 1)$を通り、曲線 $y = x^3 - ax^2$ に接する直線がちょうど2本存在するとき、実数　aの値と2本の接線の方程式を求めよ。
（阪大）

問2.
曲線C:$y = x^3$ 上の点Pにおける接戦をlとし、CとlがPとは異なる交点を持つと　き、その点をQとする。PがCの $x>0$ 上を動くとき、線分PQの中点の軌跡を求めよ。
（2015年早稲田大／理系）

問3.
2つの曲線
$$y = x^3 + x^2 - x - 1 ,\ y = x^2$$
の両方に接するすべての接戦の方程式を求めよ。
（2025年九大／文系）

問4.
放物線C: $y = 3x^2$ 上の点$P(-a, 3a^2)$（$a>0$）における法線とCとの交点で点Pと異なる点のx座標を$X(a)$とする。このとき、$X(a)$を関数として表し、$X(a)$の最小値を答えよ。
（2017年慶応大／理工５ 改改題）

問5.
kを実数とする。3次関数 $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち、極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき、kの値を求めよ。
（2019年九大／文系）

問6.
次の関数の最大値と最小値を求めよ。
(1) $y = (\log_2 x)^3 + \log_2 x^3$ $(\sqrt{2} \leqq x \leqq 4)$
(2) $y = \log_2(x + 1) + 2\log_2(3 - x)$
（https://examist.jp/mathematics/differential/taisuu-bibun-maxmin/）

問7.
α,βは定数で、$\alpha>0$、$\beta>0$とする。xの3次方程式
$18x^3 - 6\alpha x + \beta = 0$ …①
について、この方程式がただ一つの実数解をもつときの必要十分条件を求めよ。
（2017年慶応大／理工５ 改改題）

問8.
3次の整式 $f(x) = X^3 + x^2 + px + q$（ただし、$q \neq p$、$p \neq 0$）、および $g(x) = -1/x + 1$ が次の条件(＊)を満たすとする。

（＊）$f(x) = 0$ の任意の解αに対して $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である。

次の問に答えよ。

(1) q, p の値を求めよ。
(2) $f(x) = 0$ は $-2 < x < 2$の範囲に3つの実数解を持つことを示せ。
(3) $f(x) = 0$ の任意の解を$2\cos\theta$ とするとき、$2\cos 2\theta$、$2\cos 3\theta$も解であることを示せ。
(4) $2\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$ が $f(x)$ の解であるとき、θの値を求めよ。

（2017年早稲田大／理工５）

問9.
αを実数とし、２つの関数 $f(x) = x^3 - (a + 2)x^2 + (a - 2)x + 2a + 1$ と $g(x) = -x^2 + 1$ を考える。

(1) $f(x) - g(x)$ を因数分解せよ。
(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点が2個であるようなaの値を求めよ。
(3) aは(2)の条件を満たし、さらに $f(x)$ の極大値は1よりも大きいとする。
　$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフを同じ座標平面に図示せよ。

（2023年名古屋大／文系）

問10.
2次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ の2つの解α、βに対し、$\alpha^n + \beta^n - 3^n$ はすべての正の整数nについて5の整数倍になることを示せ。

（2013年東京工業大）

問11.
数列$\{a_n\}$は次の関係式 i) , ii) を満たしている。

i) $a_1 = 1$

ii) $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_{n+1} = 2(a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1)$ $(n = 1, 2, \cdots)$

この数列の第n項a_nがnであることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

問12. ｹﾞｷﾑｽﾞ
nを自然数、$P(x)$ をn次の多項式とする。このとき、

$P(1), P(2), P(3), \cdots, P(n)$

がすべて整数なら、任意の整数mに対して$P(m)$が整数であることを証明せよ。

（1993年東工大）

発展？
問13.
１個のさいころを3回続けて投げ、出る目を順にa、b、cとする。

整式 $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ をみたす実数xの個数が1個である確率を求めよ。

(2) $f(x) = 0$ をみたす自然数xの個数が3個である確率を求めよ。

（2025年九大／理系）