文系のための数学

三角関数・ベクトル

MATHEMATICS FOR HUMANITIES

超基礎の数学

授業の記憶が飛び飛びな人でもなんとかなるレベルを目指して構成しています。

最低限の復習でヤマを張りたい！

そんな感じの、理解よりもコスパの良い問題を回収できるようになるための授業です。

結局数学も暗記なんですよ。

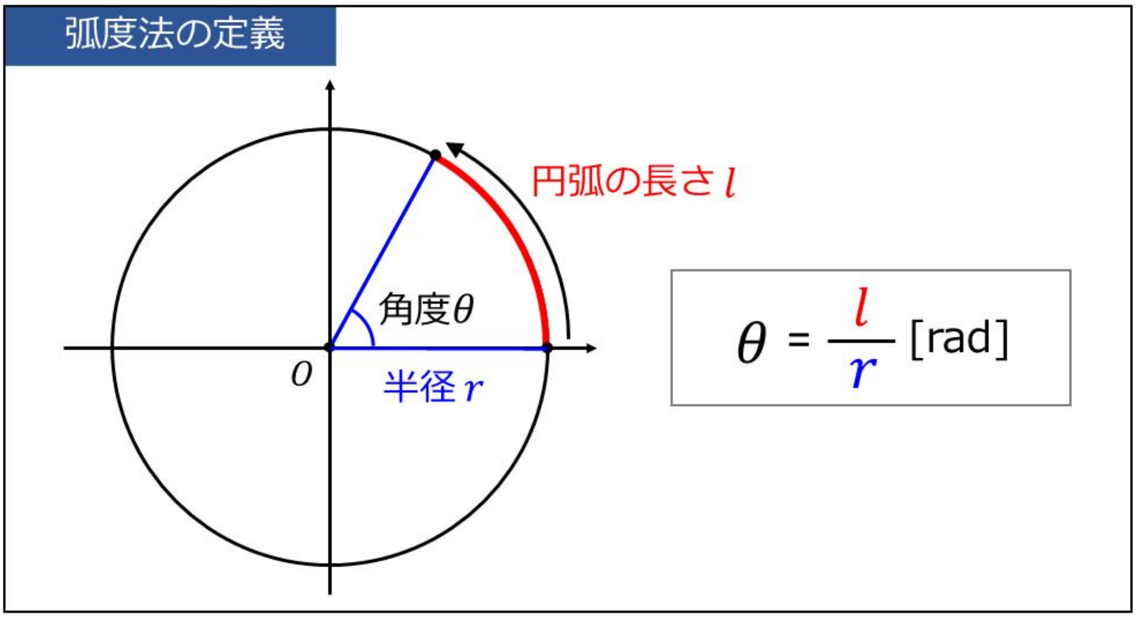
trigonometric functions

三角関数

目次

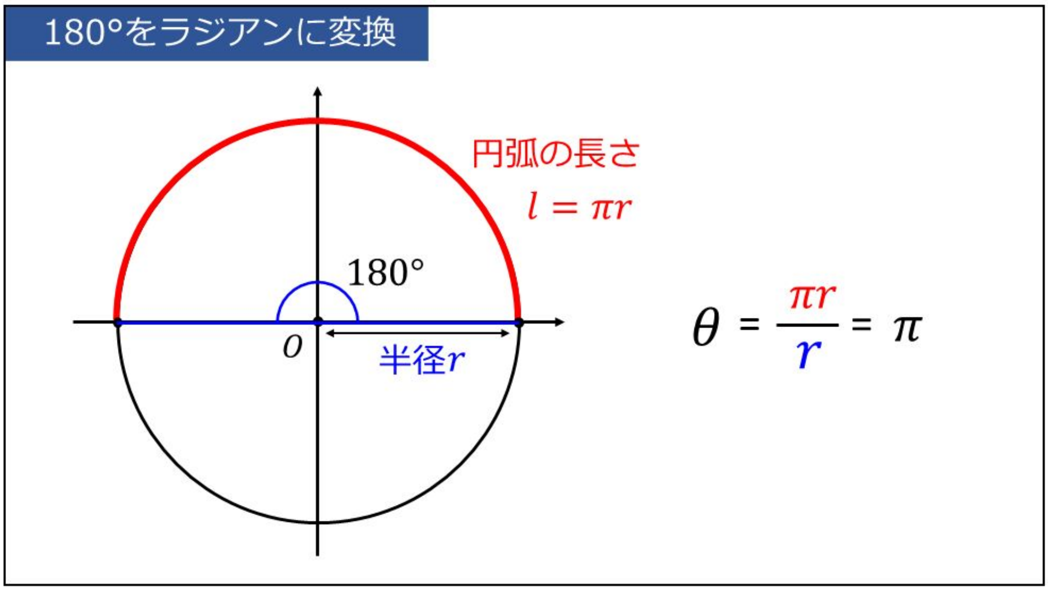
- 弧度法のマスター
- sin,cos,tanの式の変形に慣れる
- 三角関数を含む方程式/不等式を解けるようにする

弧度法



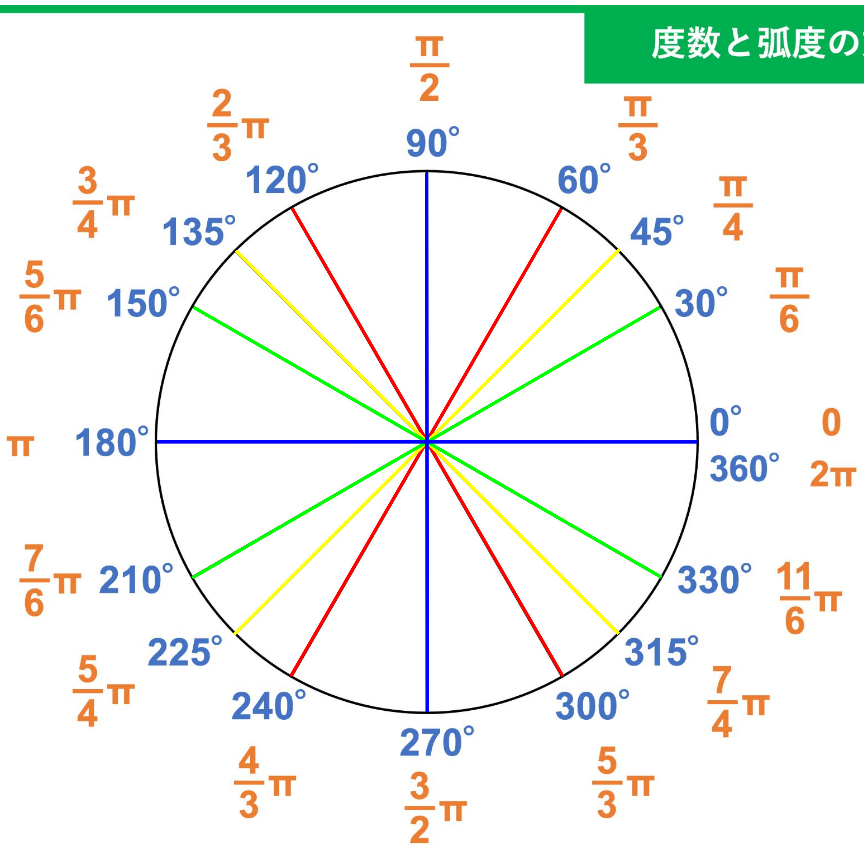
ラジアン(rad)＝半径を1とした時の弧の長さ

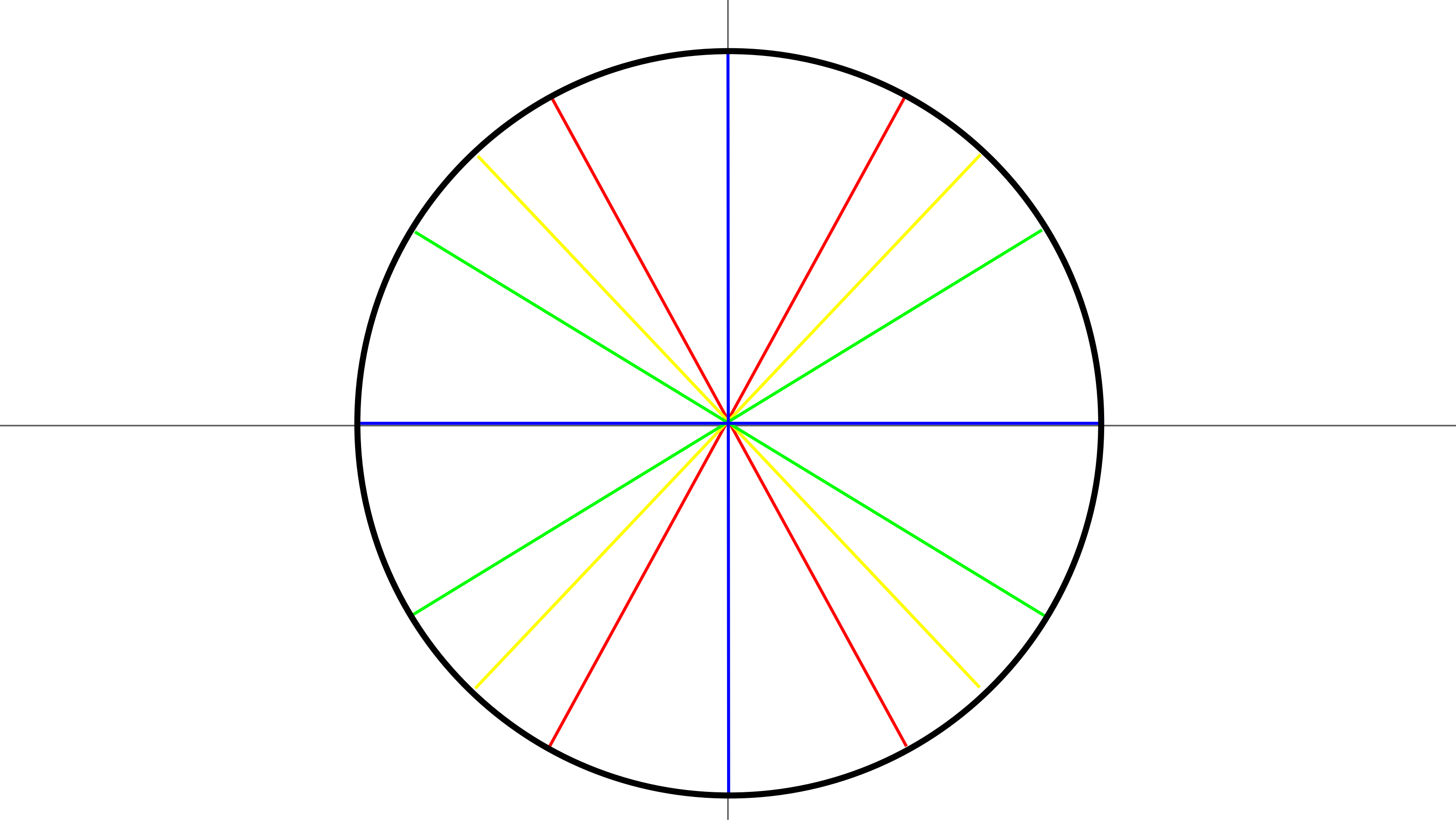
弧度法への変換

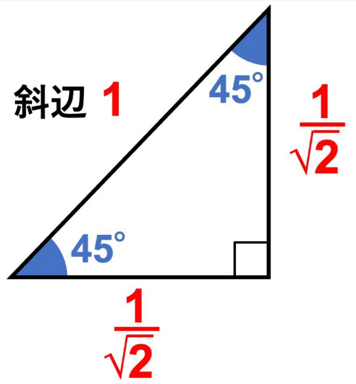
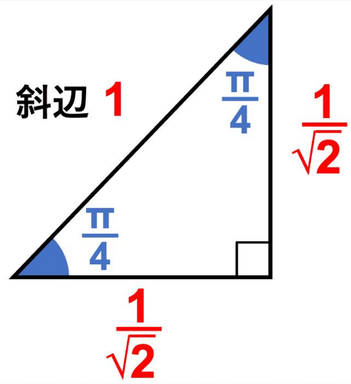
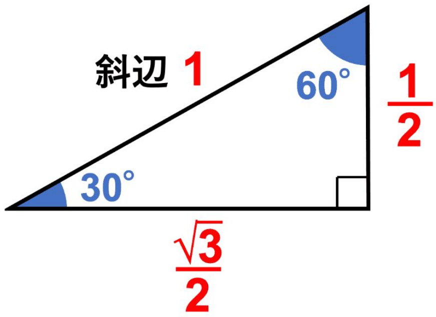
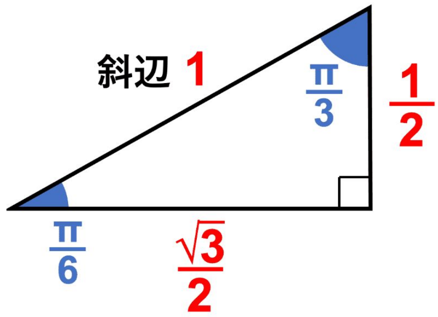


$$\pi \text{ rad} = 180°$$

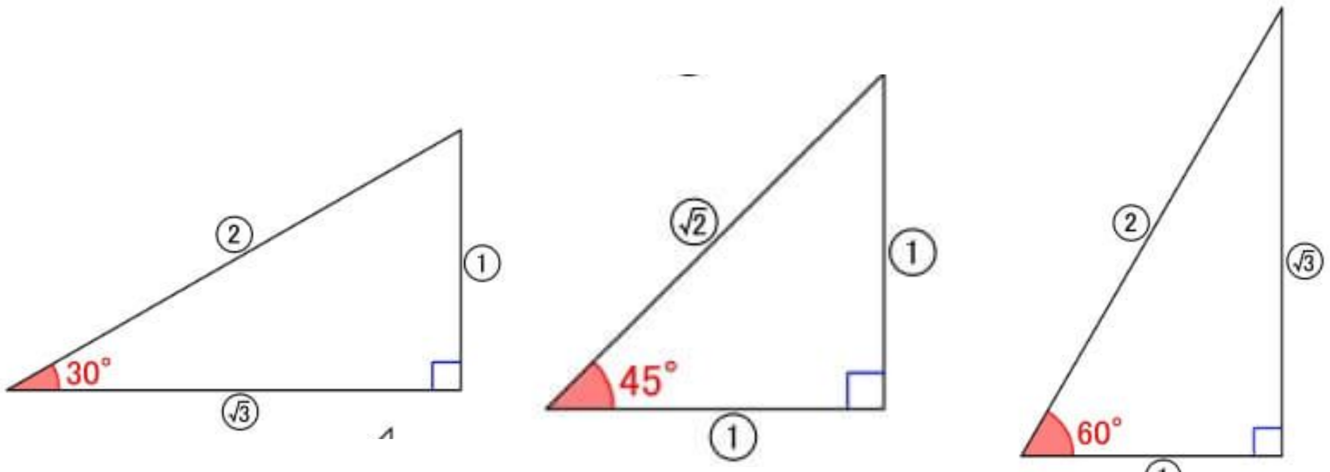
度数と弧度の対応


$\frac{\pi}{2}$
90°
$\frac{\pi}{3}$
60°
$\frac{\pi}{4}$
45°
$\frac{\pi}{6}$
30°
0°
0
360°
2π
$\frac{2}{3}\pi$
120°
$\frac{3}{4}\pi$
135°
$\frac{5}{6}\pi$
150°
π
180°
$\frac{7}{6}\pi$
210°
$\frac{5}{4}\pi$
225°
240°
$\frac{4}{3}\pi$
270°
$\frac{3}{2}\pi$
300°
$\frac{5}{3}\pi$
315°
$\frac{7}{4}\pi$
330°
$\frac{11}{6}\pi$

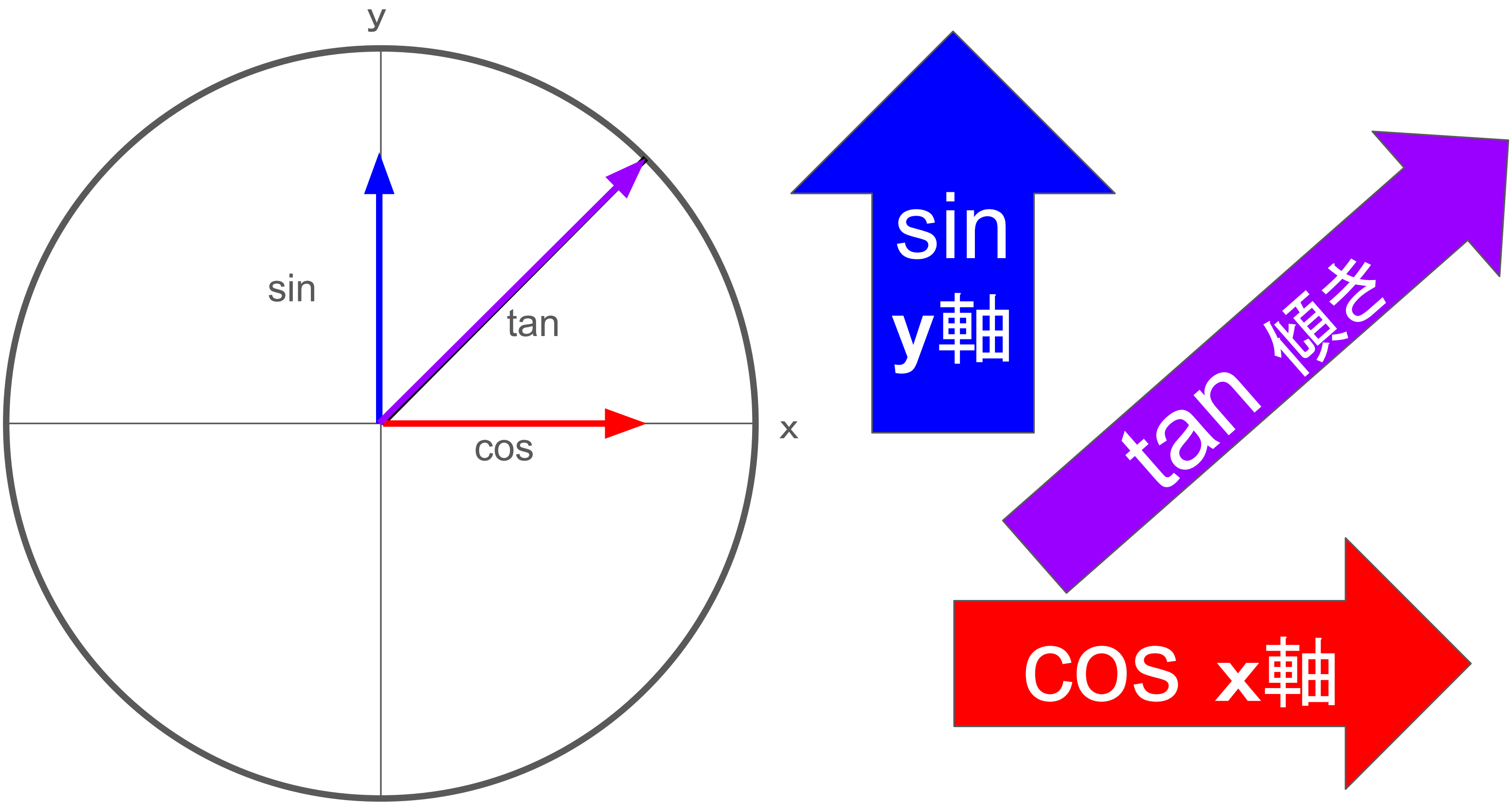


	度数法	弧度法
直角 三角形 ①		
直角 三角形 ②		

有名角の辺の比



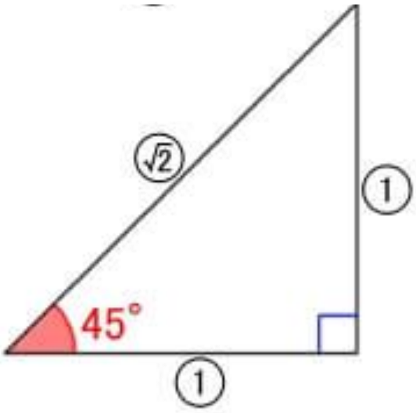
$$\frac{\pi}{6} \qquad \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{3}$$

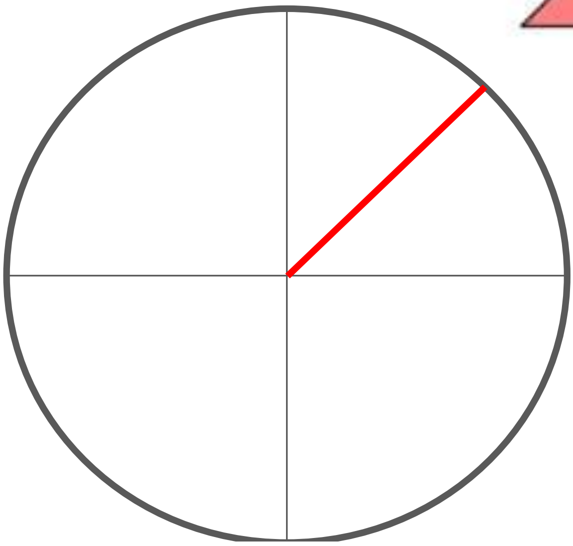

y
sin
tan
x
cos
sin
y軸
tan 傾き
cos x軸

Drum roll

Practice

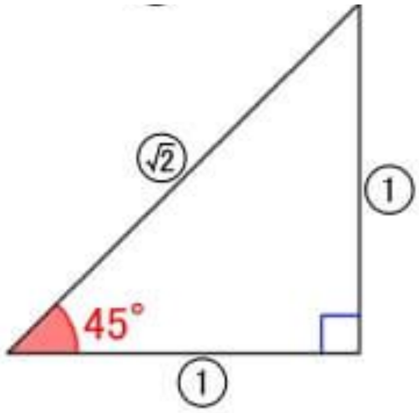
$$\sin \frac{1}{4} \pi$$

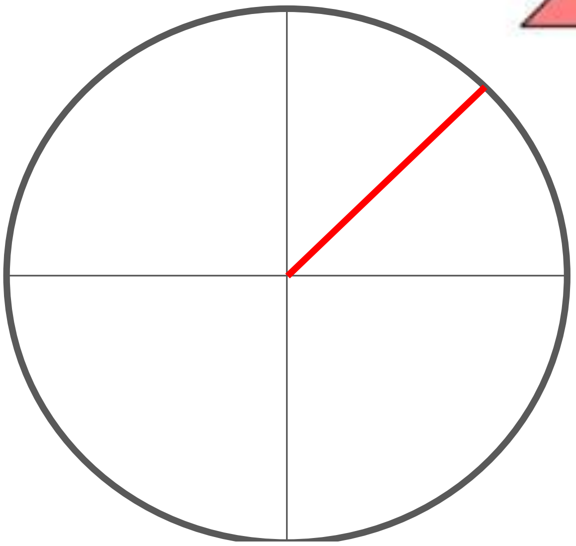




$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

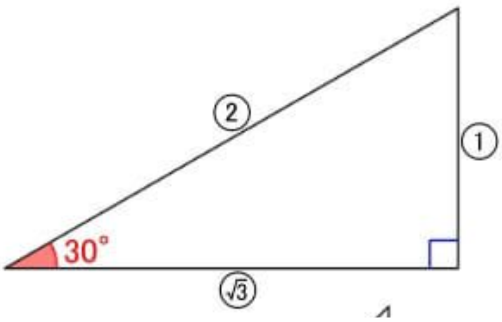
$$\cos \frac{1}{4} \pi$$

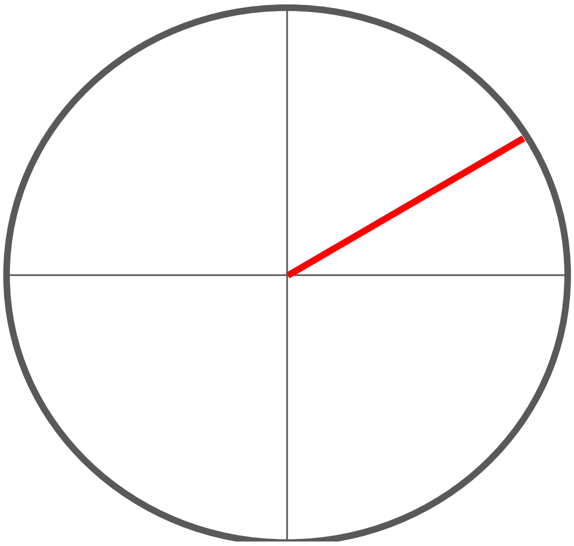




$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

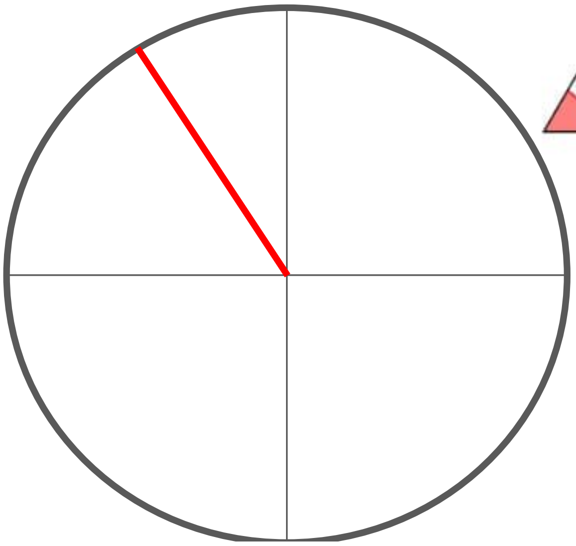
$$\sin \frac{1}{6}\pi$$

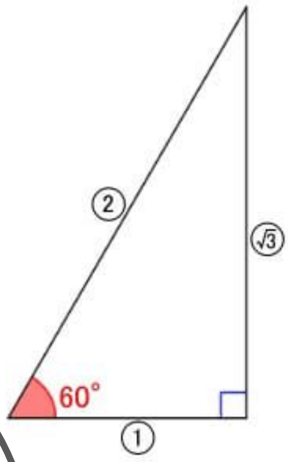




$$\frac{1}{2}$$

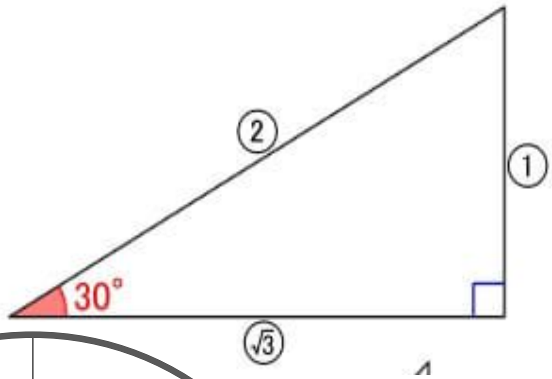
$$\tan \frac{2}{3} \pi$$

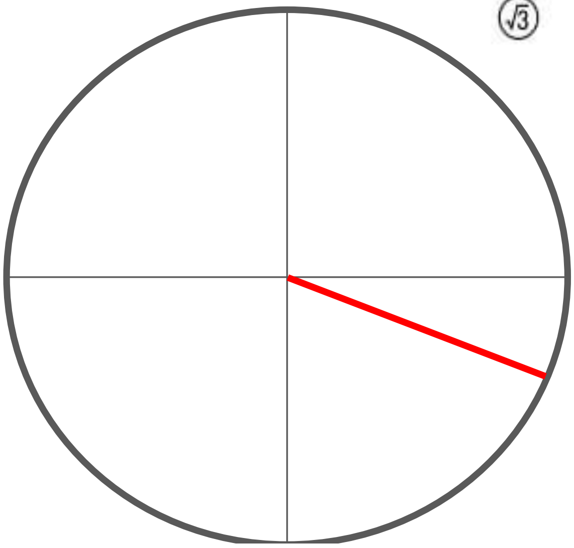




$$-\sqrt{3}$$

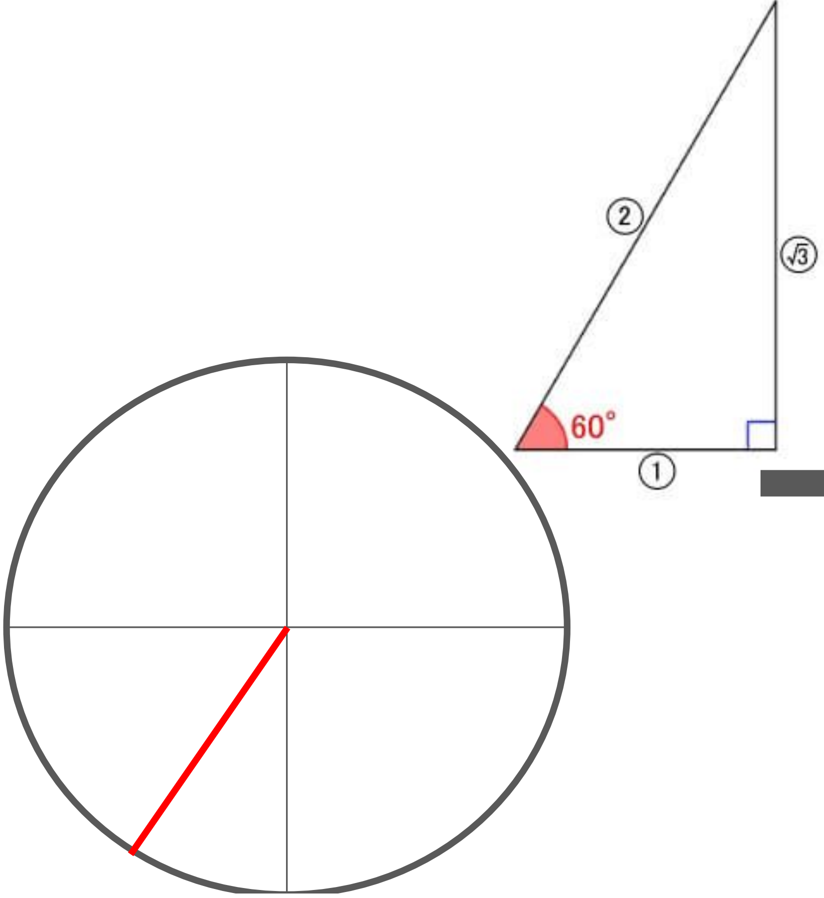
$$\sin \frac{11}{6}\pi$$





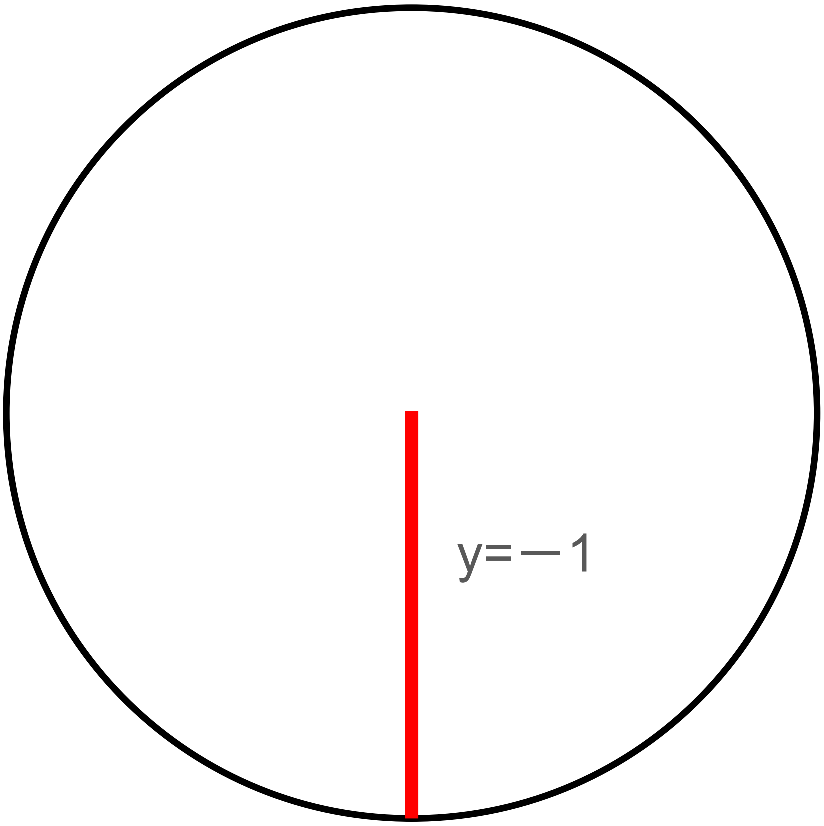
$$-\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{4}{3} \pi$$



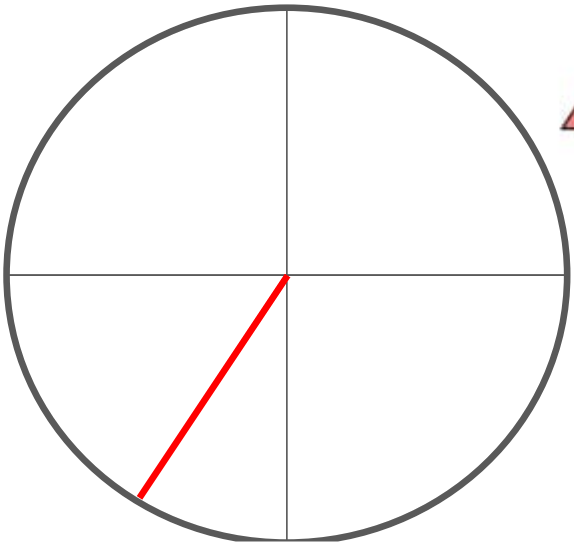
$$-\frac{1}{2}$$

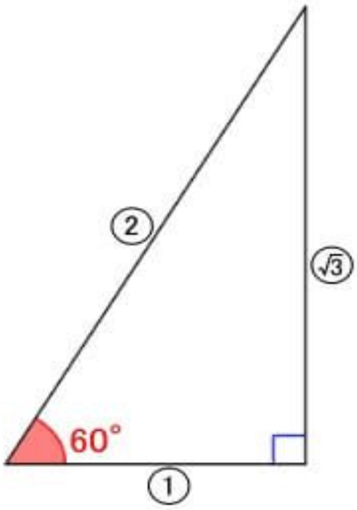
$$\sin \frac{3}{2}\pi$$



－1

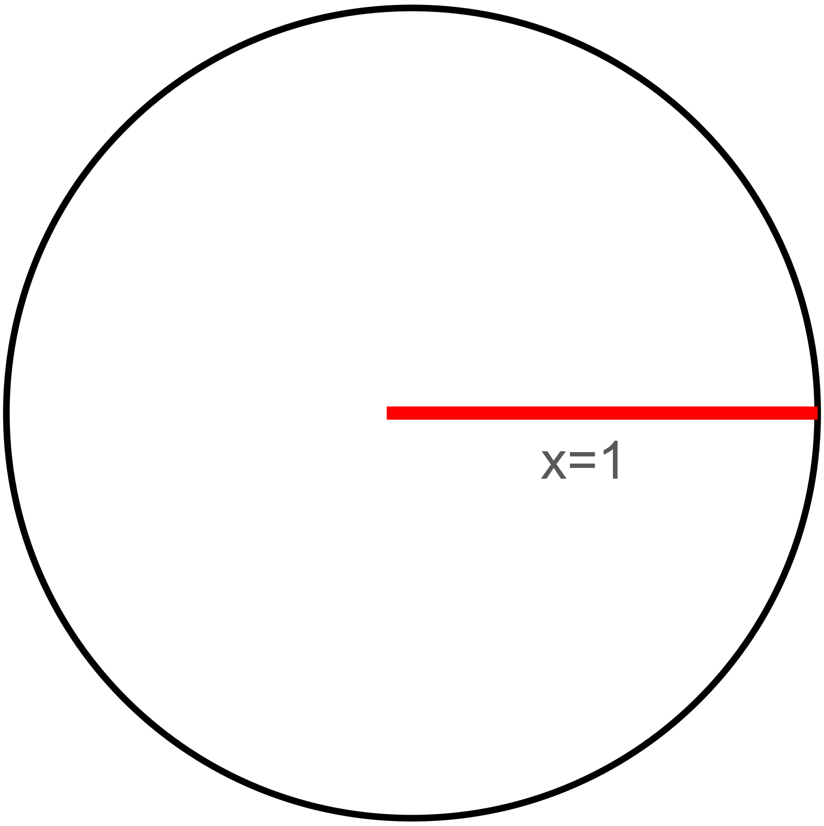
$$\tan \frac{16}{3} \pi$$





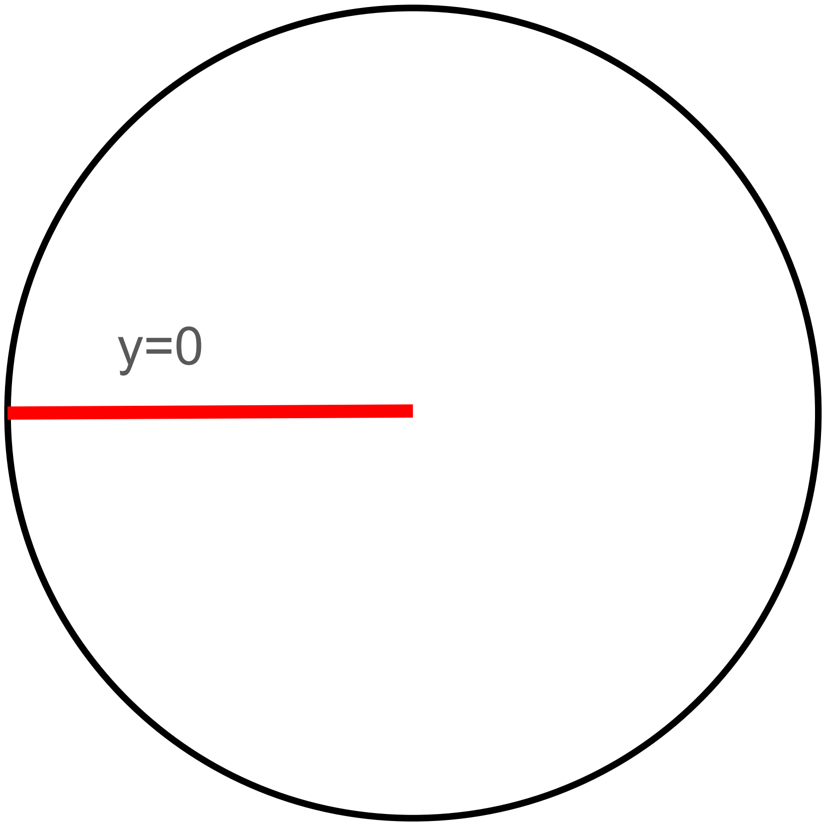
$$\sqrt{3}$$

$$\cos 2\pi$$



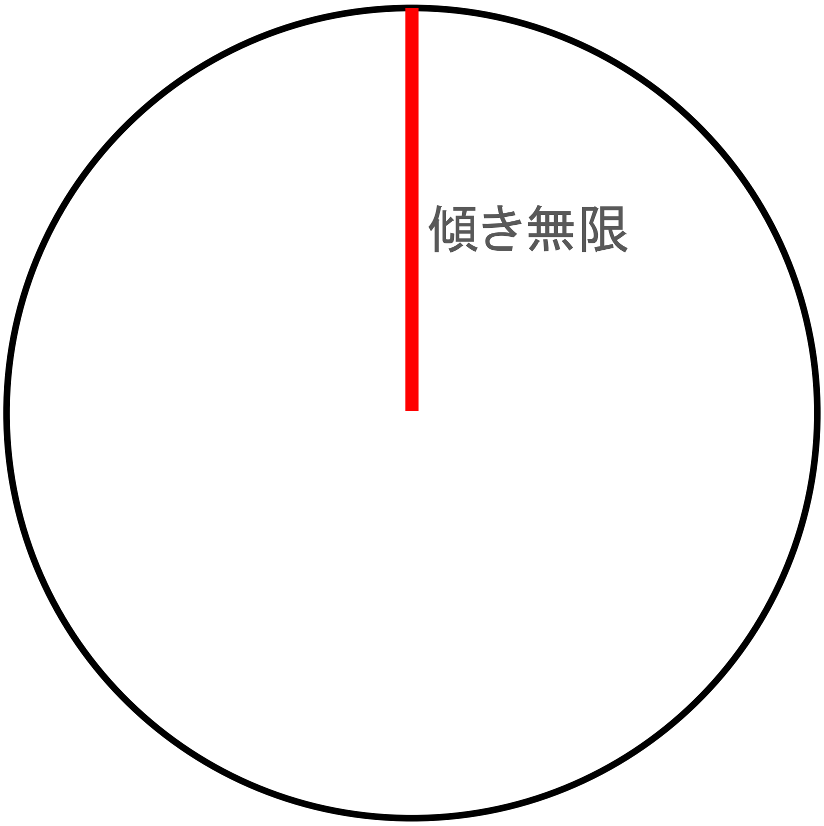
1

$$\cos \frac{500}{4} \pi$$



0

$$\tan\frac{\pi}{2}$$



なし

三角関数

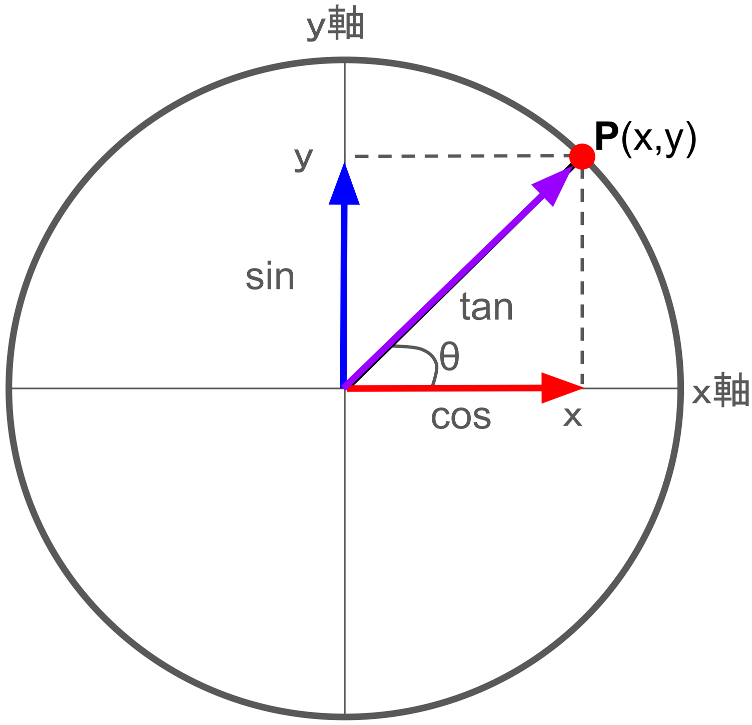
半径１の円（単位円）上の点Pの関数。

P（x,y）とすると、

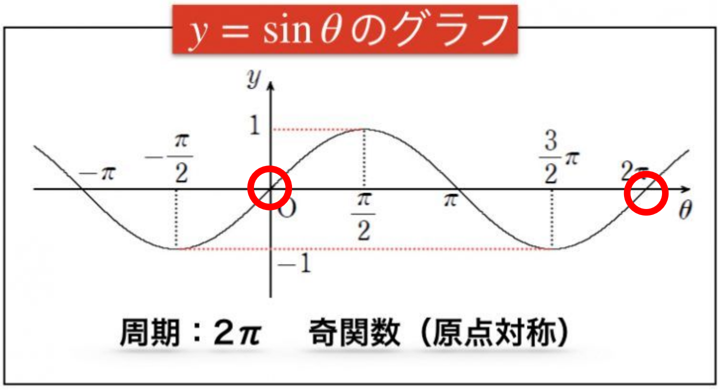
sinθ=y　　（y座標）

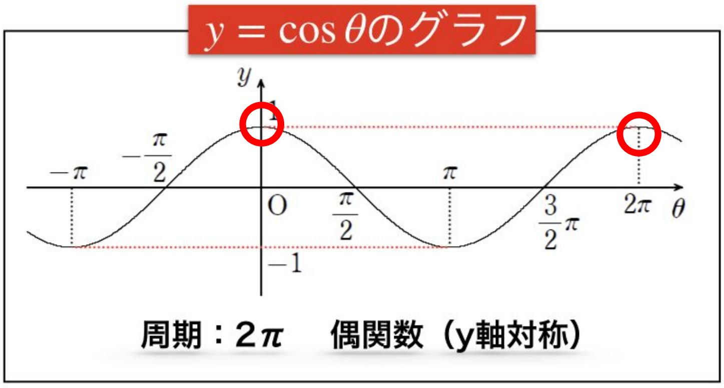
cosθ=x　　（x座標）

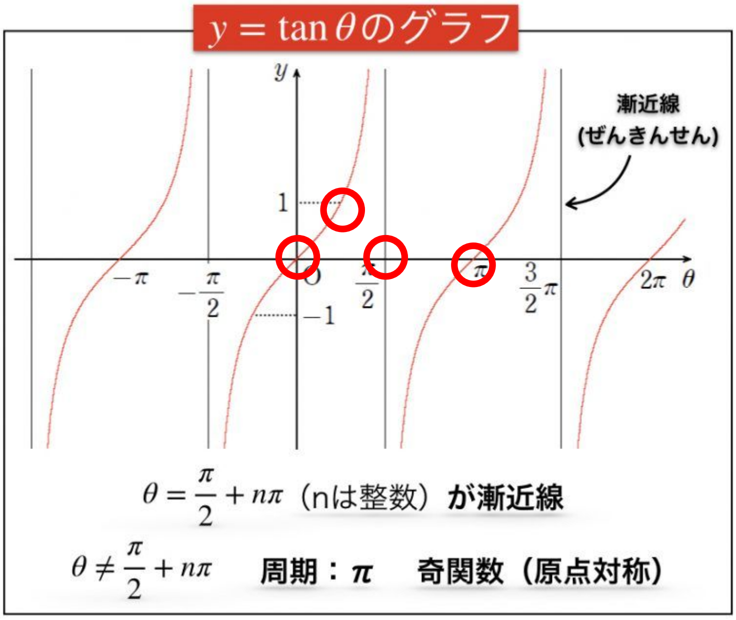
tanθ=y/x　（OPの傾き）



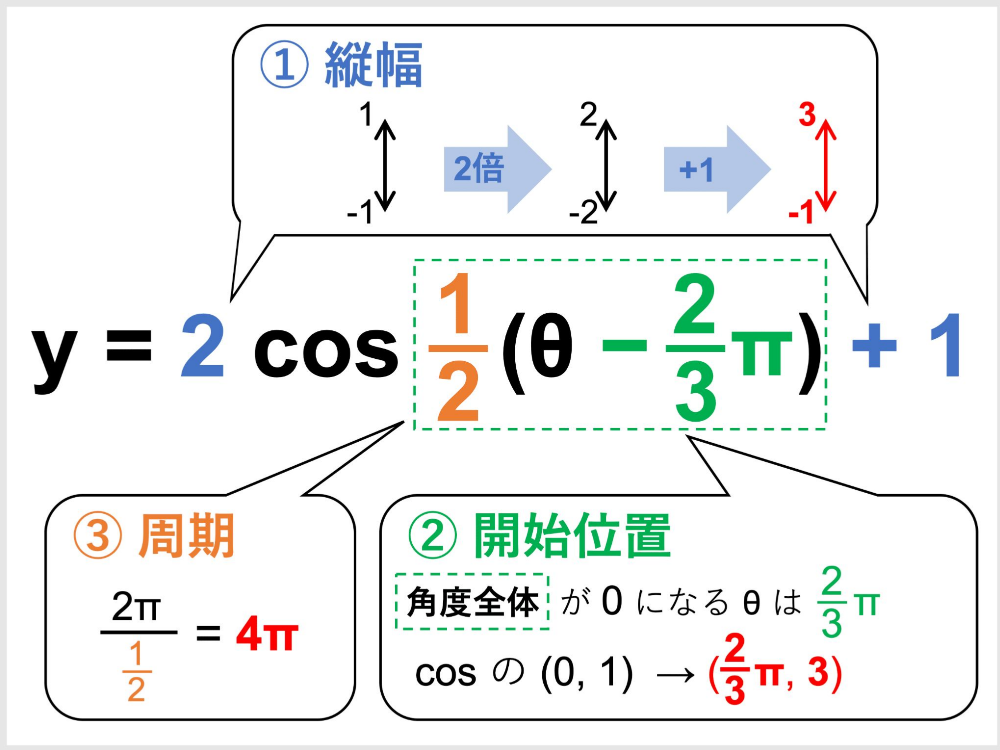
三角関数のグラフ
覚える！！







θについて


① 縦幅
1
-1
2倍
2
-2
+1
3
-1
$y = 2\cos\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + 1$
③ 周期
$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
② 開始位置
角度全体 が 0 になる θ は $\frac{2}{3}\pi$
cos の (0, 1) → $\left(\frac{2}{3}\pi, 3\right)$

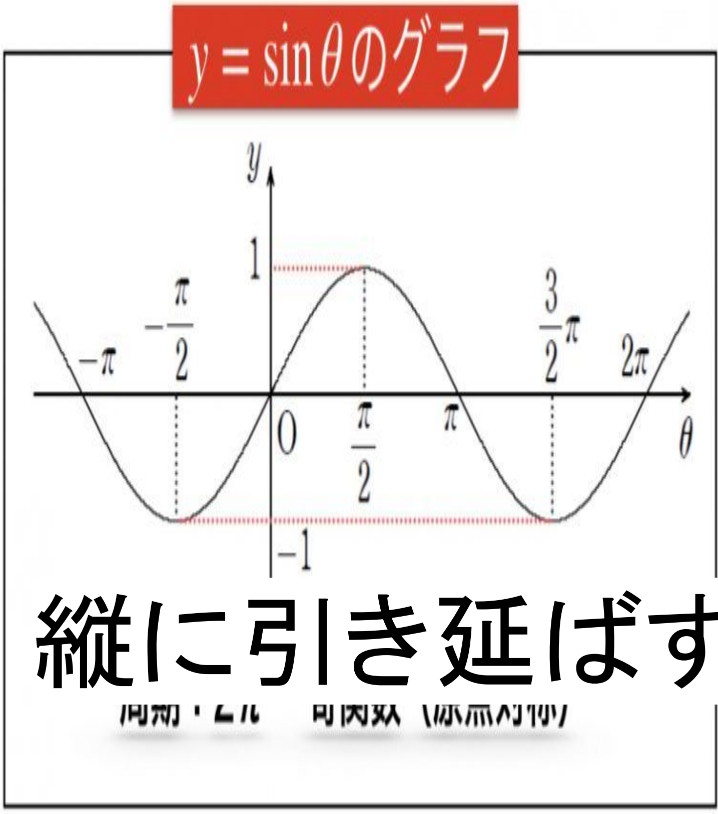
θについて

y=◇sin△(θ ー ◯)＋▽

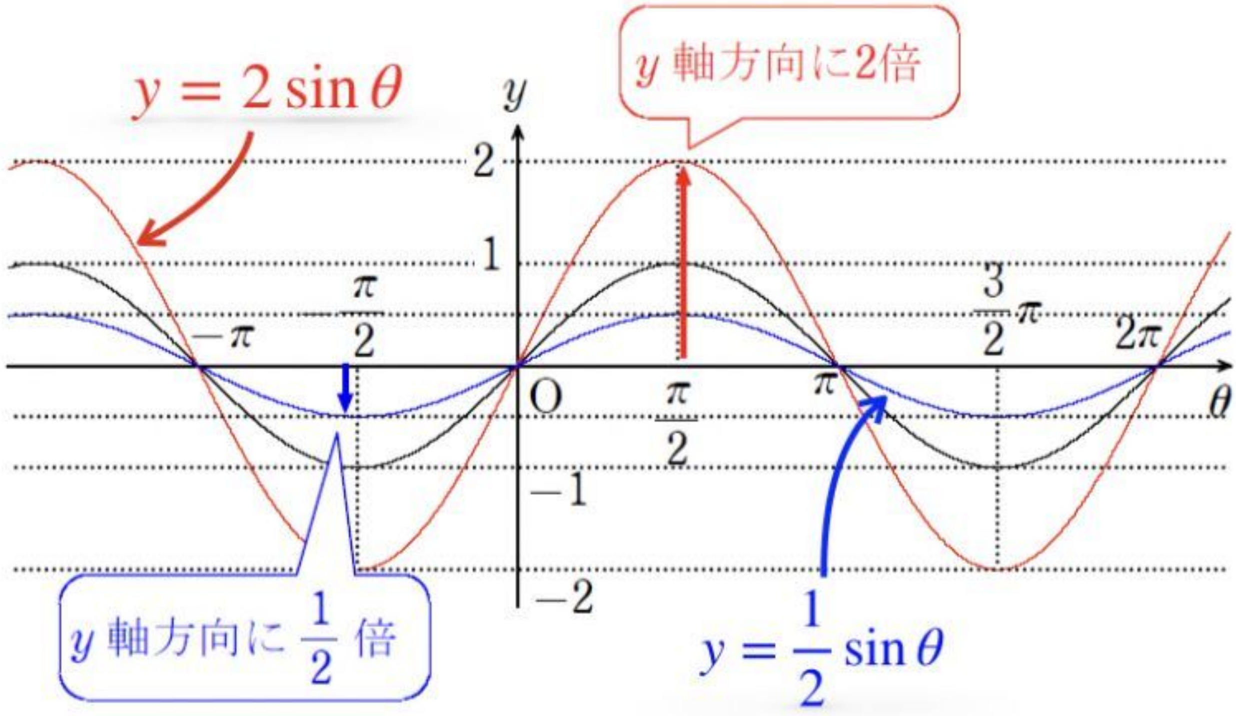
例：　y=3sin2(θ ー 2)＋1

θについて

$$y=\underline{\blacklozenge\sin\triangle(\theta-\bigcirc)}+\triangledown$$


$y = \sin\theta$のグラフ
y
1
-1
0
θ
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π

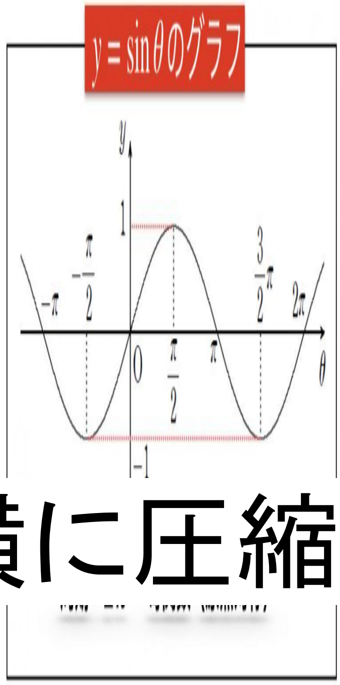
縦に引き延ばす



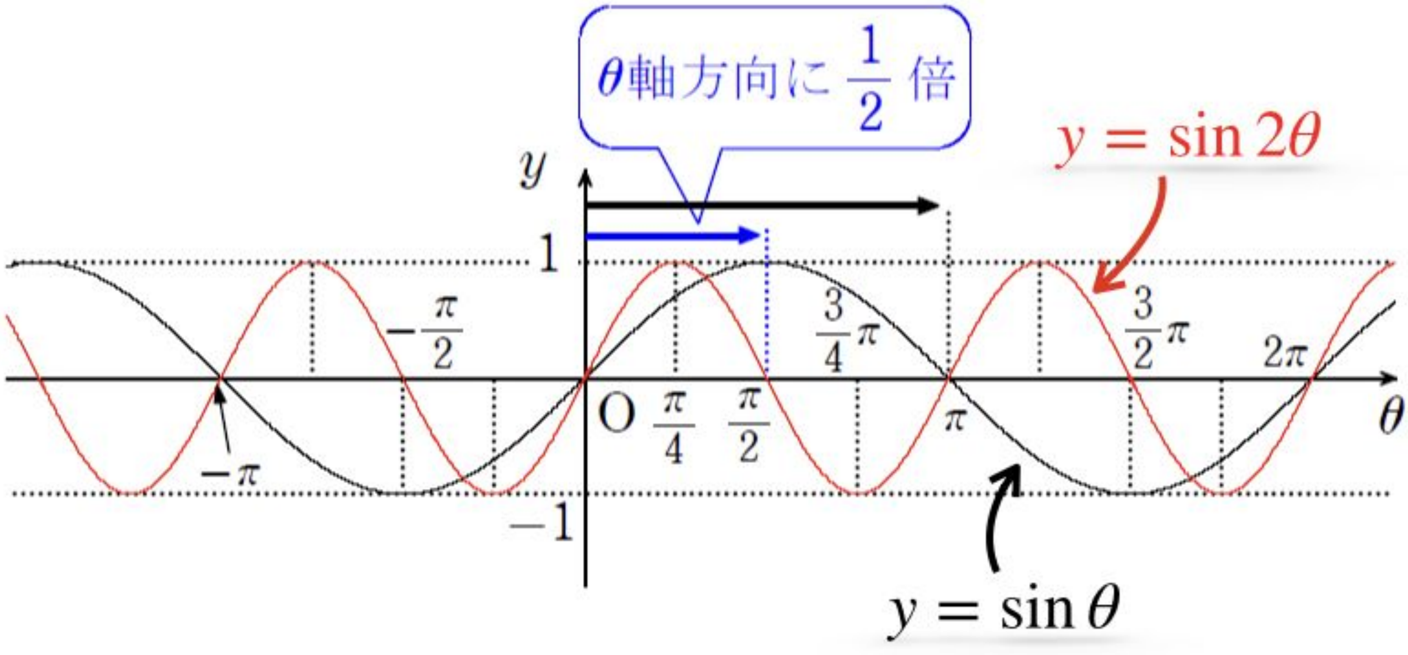
$y = 2\sin\theta$
y 軸方向に2倍
y
2
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
θ
-1
-2
y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍
$y = \frac{1}{2}\sin\theta$

θについて

$$y=\Diamond\sin\underline{\blacktriangle(\theta-\bigcirc)}+\triangledown$$

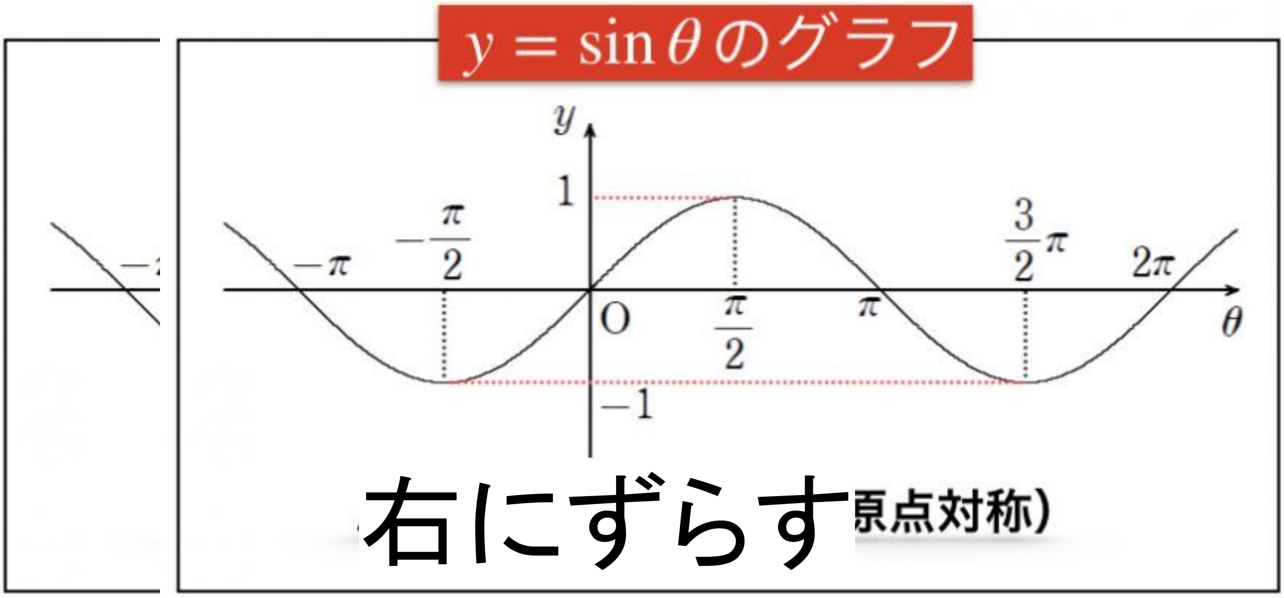


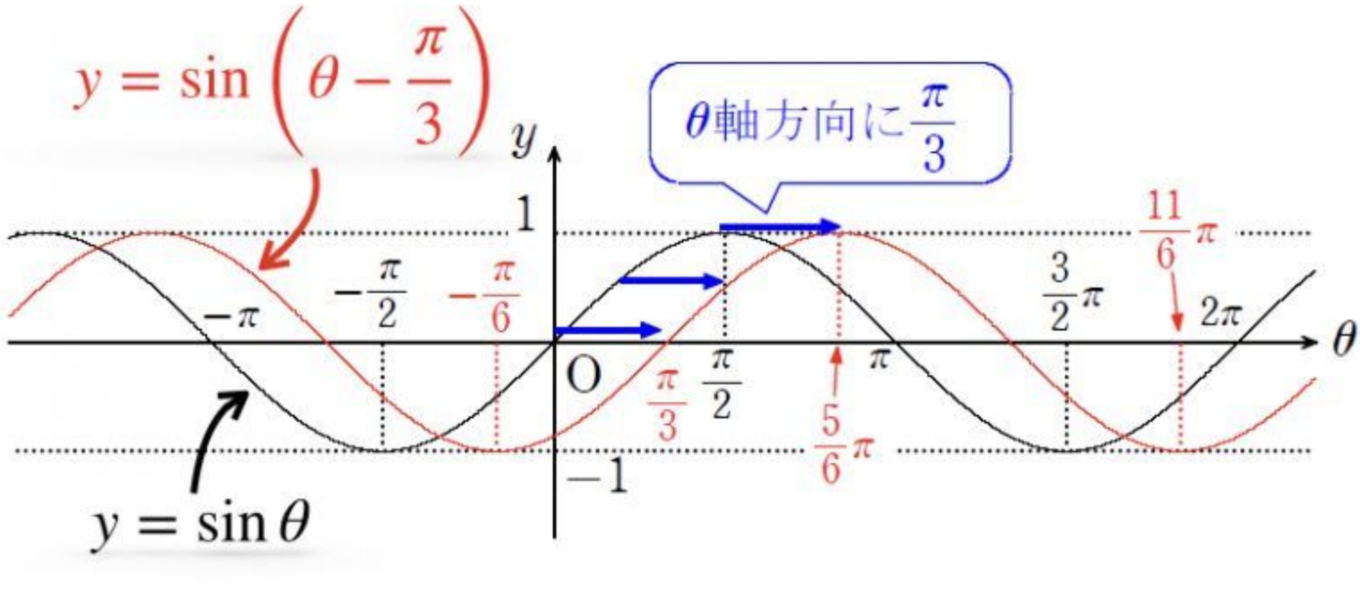
横に圧縮する


θ軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍
$y = \sin 2\theta$
y
1
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{3}{2}\pi$
2π
O
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
π
θ
$-\pi$
-1
$y = \sin\theta$

θについて

$$y=\Diamond \sin \triangle (\theta - \bullet) + \nabla$$


y = sin θのグラフ
y
1
−1
O
θ
−π
−π/2
π/2
π
3/2 π
2π
右にずらす
原点対称)

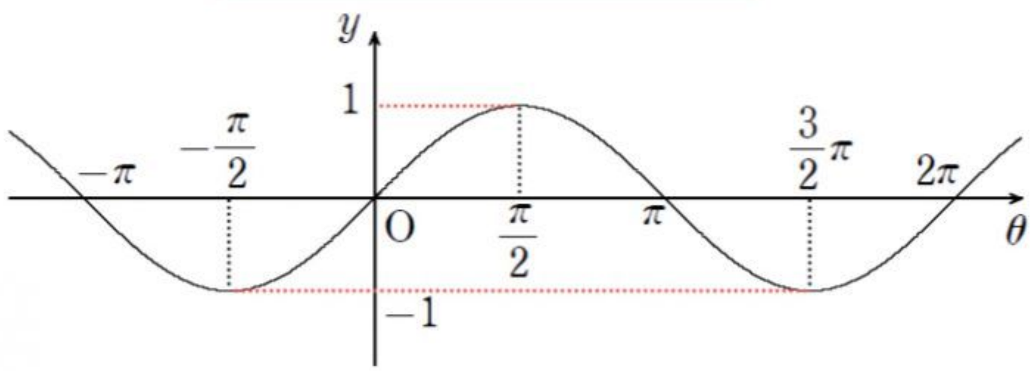


$y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$
θ軸方向に$\frac{\pi}{3}$
y
1
-1
O
θ
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$
π
$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{11}{6}\pi$
2π
$y = \sin\theta$

θについて

$$y=\Diamond\sin\triangle(\theta-\bigcirc)+\blacktriangledown$$

$y = \sin\theta$ のグラフ



周期：2π　　奇関数（原点対称）

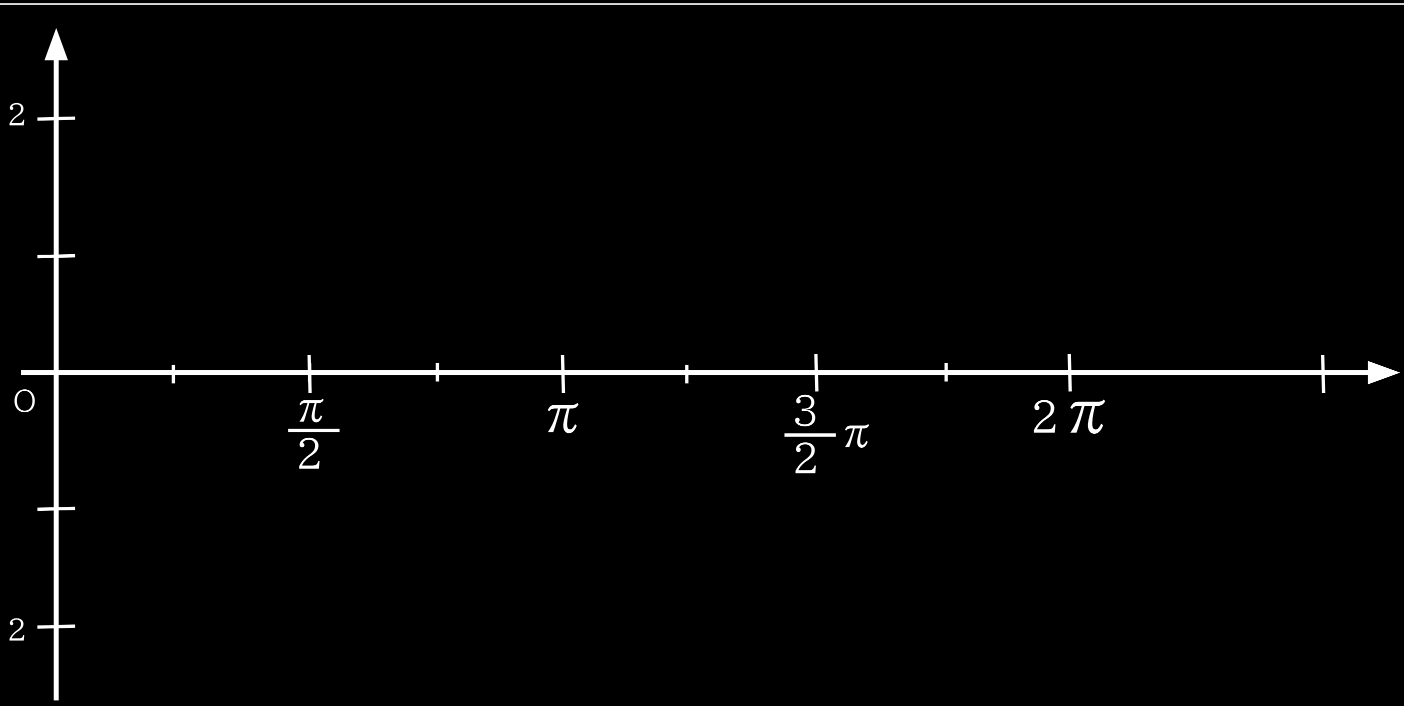
周期：2

上にずらす

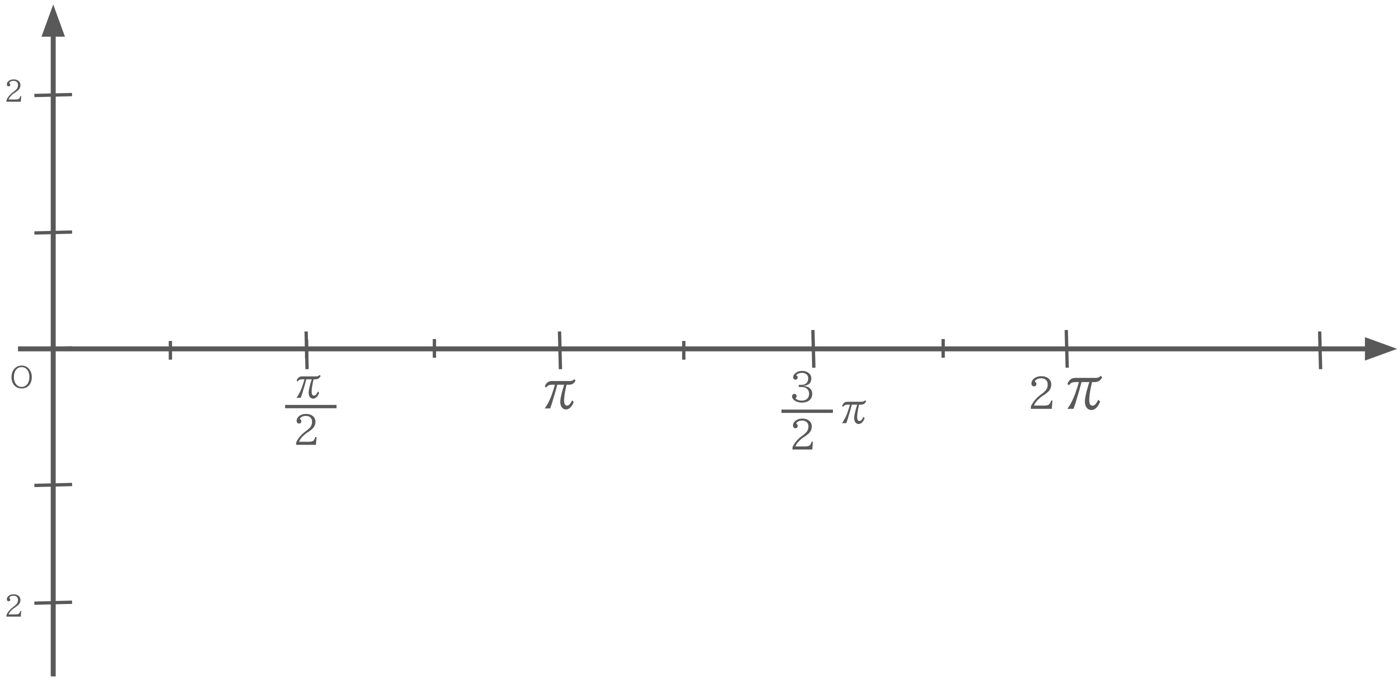
）

geogebraで見てみる

y=2sin½(θ+1)



$y=2\sin\frac{1}{2}(\theta+1)$



θの公式

考える前に覚えろ

どうせ覚えるくらいまで使うので、暗記でも問題ナシ

三角関数の性質 全パターン導出

三角関数 基本

$$\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta\\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta\\ \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta\end{cases}$$

★
$$\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

★
$$\begin{cases}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta\\ \tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}\end{cases}$$

★
$$\begin{cases}\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta\\ \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta\\ \tan(\theta+\pi)=\tan\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

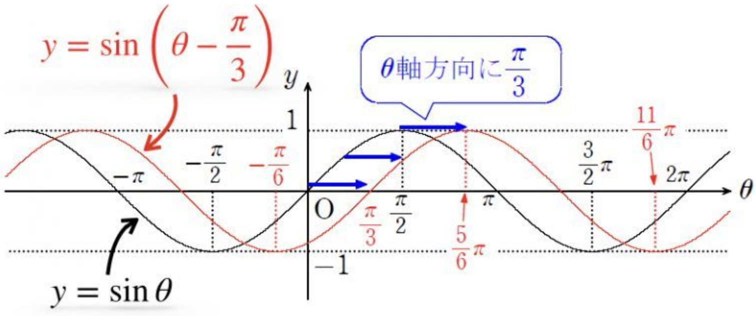
4step
p61

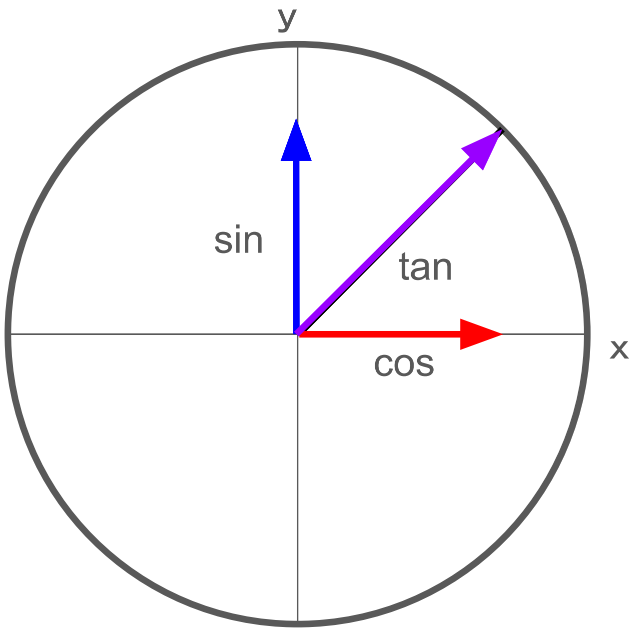
暗記したくない人へ…

θ周りだけ覚えて、グラフ（或いは　単位円）で考える

$\theta + \pi/2 \quad \pi/2 - \theta$

$\theta + \pi \qquad \pi - \theta$





geogebraで見てみる

sin,cos,tanの公式

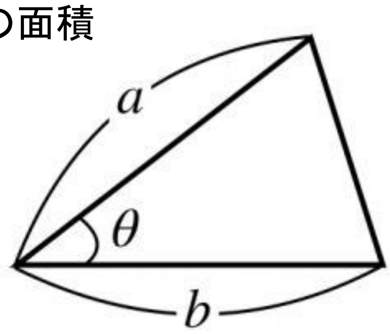
三角比の相互関係

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

② $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

sin,cos,tanの式を変形する

三角比の相互関係

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

② $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

←基本はこれを使う

良い感じに変形して1とかsinθとかの
簡単な形にまで変形する。

考えないための引き出し

$1=\sin^2+\cos^2$　　$\sin^2=1-\cos^2$　$\cos^2=1-\sin^2$

$1+\tan^2=1/\cos^2$　　$\cos^2=1/1+\tan^2$

$\tan=\sin/\cos$　　$\sin=\tan\cos$　$\cos=\sin/\tan$　$\tan^2=\sin^2/\cos^2$

上の形が隠れていないか見る　→ほしい文字があったら、それに関連する式を探す

同類項でくくってみる　　　→特に分数の形のものは疑っておく

２乗３乗の公式とかも意識する→三乗＋三乗とかにまとまったり

解と係数の関係も頭にいれる　→2つの解～が来たら要注意

とりあえず展開も一つの手　　→複雑にしようとくくるときと親切でくくる時がある

☐ **254** 次の等式を証明せよ。

(1) $(\tan\theta+\cos\theta)^2-(\tan\theta-\cos\theta)^2=4\sin\theta$

*(2) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

*(3) $(\tan\theta+1)^2+(1-\tan\theta)^2=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

(4) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

*(5) $\dfrac{\cos\theta-1}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta-1}=-\dfrac{2}{\sin\theta}$

等式の証明

次の等式を証明せよ　　　　　　（4ST 254）

(1)　$(\tan\theta+\cos\theta)^2-(\tan\theta-\cos\theta)^2=4\sin\theta$

等式の証明

次の等式を証明せよ　　　　　　　（4ST 254）

*(2)　$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

等式の証明

次の等式を証明せよ　　　　　　（4ST 254）

(*(3)　$(\tan\theta+1)^2+(1-\tan\theta)^2=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

等式の証明

☐ **256** 次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta-\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\tan^2\theta}$

*(2) $(1+\sin\theta+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta-\cos\theta)^2=4(1+\sin\theta)$

(3) $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

等式の証明

(1) $$\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{1}{\tan^2\theta}$$

等式の証明

*(2)　$(1+\sin\theta+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta-\cos\theta)^2=4(1+\sin\theta)$

等式の証明

4STEP p59

(3) $$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

等式の証明

4STEP p60

☐ **260** 2次方程式 $5x^2-7x+k=0$ の2つの解が $\sin\theta$, $\cos\theta$ のとき，定数 k の値を求めよ。また，2つの解を求めよ。

方程式･不等式

基本はsinθ、cosθ、tanθの値

式を満たすθが複数ある可能性（ほとんどそう）や、逆に範囲内にない可能性があることに注意する

手順

１　tに置き換えてtの範囲を出す（単純にθなら不要）

２　式を満たすt（θ）を求める

３　tをθに変換する

三角関数を文字と見て**二次関数などの形にする**のが多い

最大値・最小値

θの範囲を単位円に書いて、sinならy軸、cosならx軸、tanなら傾きが最大・最小になるところを探す。

正負に注意

このタイプはそんなに難しくない

最大値・最小値

三角関数が二次関数などの形になっている問題。

三角関数を文字と見て二次関数にして、二次関数の最大・最小を求め、θを出す

手順

１　tとおいて、二次関数の形にする

２　tの範囲を求める

３　最大値・最小値を求める

４　θを出す

最大値・最小値

(2)　$y=2\tan^2\theta+4\tan\theta+5 \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

領域

1 [2010 信州大]

不等式 $|2\sin(x+y)| \geqq 1$ の表す点 $(x,\ y)$ の領域を，$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ の範囲で図示せよ。

解の個数

4 三角関数を含む方程式の解の個数：文字定数

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $2(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 3 - a = 0$ の解の個数を，定数 a の値の範囲によって調べよ。

ベクトル

vector

ベクトルとは

方向が指定されている直線

単位ベクトルは、大きさが1のベクトル

逆ベクトル(ーA)は、大きさが同じで向きが逆のベクトル。

つまり、AB=ーBA

絶対値がつくと大きさを表す

ベクトルの計算

<u>A</u>B+C<u>A</u>=BC

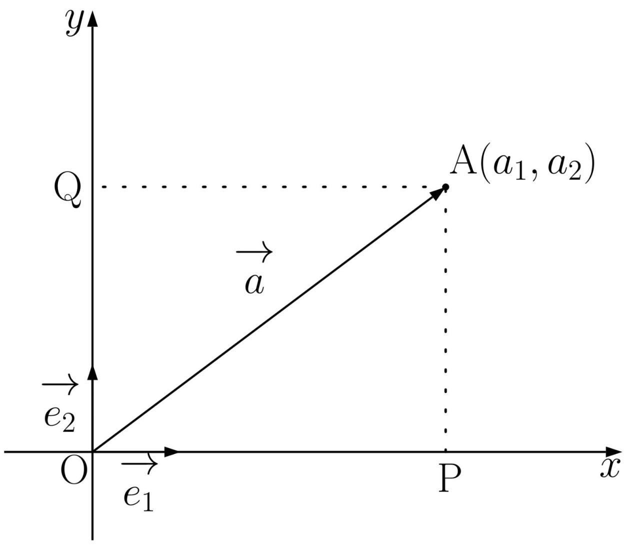
しりとり　りんごりら

AB-AC=<u>A</u>B+C<u>A</u>=BC

逆ベクトル のち りんごりら

ベクトルの成分

開始地点を原点と見たときのゴールの座標のこと



大きさ

三平方と同じ

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}$$

成分の計算

$\vec{a}=(x_1, y_1), \vec{b}=(x_2, y_2)$とする。

① $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$　【加法】

② $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$　【減法】

そりゃそうだ

内積

２つのベクトルの積を2つのなす角も加味してごにょごにょするやつ

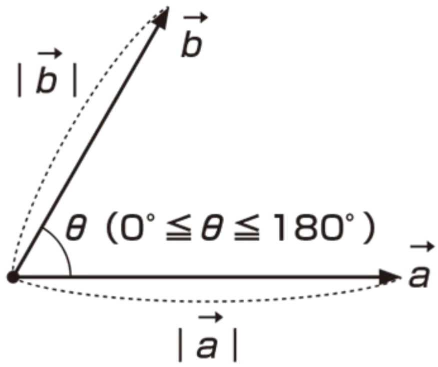
たくさん公式がある

だからこそ、内積とかからなす角が求められたりして便利らしい

２つのベクトルの大きさとなす角θ

内積

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとするとき
$\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2)$



内積　$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\theta$

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{x_1 x_2}_{x\text{成分の積}} + \underbrace{y_1 y_2}_{y\text{成分の積}}$

内積

$$\text{内積}\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

$$\text{内積}\,\vec{a}\cdot\vec{b}=\underbrace{x_1x_2}_{x\text{成分の積}}+\underbrace{y_1y_2}_{y\text{成分の積}}$$

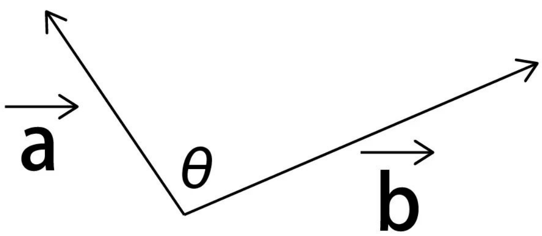
なす角θを求める

☑ **27** 次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

*(2) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6\sqrt{3}$

平行・垂直と内積



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$$

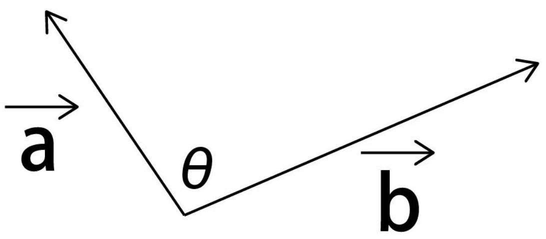
θ＝90°、270°（**垂直**）のとき

cos90°=0　cos270°=0
⇒<u>内積は0</u>

θ＝180°、360°（**平行**）のとき

cos180°=ー1　cos360°=1
⇒<u>内積は|a||b|cosθ×1か−1</u>

平行・垂直と内積



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$$

垂直のとき内積は0だから、

a・b=0

平行のとき内積は1か−1だから

a・b=|a||b|cosθ

垂直なベクトルを求める

☑*29　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

常用対数

Briggsian logarithm

常用対数

１０を底とした対数で全部解決しようとする考え方

log10（３）＝0.4771のように値を与えられ、それの形にまで変形するのが基本

$\log_{10}$◯＝△のとき…（△≧１）

１０の△乗＝◯　という意味

桁数

log$_{10}$◯＝△のとき…（△≧1）

◯は△＋1桁である

例）log150＝2.1761　なら、150は三桁

log 1/15　= -1.1761　なら、1/15は−2桁（小数点以下2位から）

とりあえず１０を底とする対数をとる！！

桁数

$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$とするとき、次の数は何桁の整数か。

（4ST 387）

（３） 6^{52}

とりあえず対数をとる！！

桁数（n進法）

$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$　とする。

12^{100}（10進法）を二進法で表したときの桁数

（4ST 390）

とりあえず対数をとる！！

桁数

正の整数a,b、a3が１３桁、ab3が３０桁のとき、a,bはそれぞれ何桁か

（三倉クラス復習プリント②）

とりあえず１０を底とする対数をとる！！

不等式

$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$　とする。

（4ST 389）

（１）$(1/3)^n<0.0001$をみたすn

とりあえず１０を底とする対数をとる！！

不等式

$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$ とする。

（4ST 389）

（２）2.25^nの整数部が3桁であるようなnの値

とりあえず１０を底とする対数をとる！！

不等式

$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$　とする。

（4ST 390）

（1）6^{20}は何桁の整数か

とりあえず１０を底とする対数をとる！！

不等式

$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$　とする。

（4ST 390）

（２）6^{20}の最高位の数字