《概率论与数理统计》A 卷评分标准与参考答案

（2 学分用）

一、 解：$\dfrac{C_1^1 C_8^1}{C_9^2} = \dfrac{2}{9}$

二、解：设 A={从事某职业的可疑病人}，B=｛患有肺癌｝ 2 分

$P(A) = 0.45$，$P(\overline{A}) = 0.55$，$P(B|A) = 0.9$，$P(B|\overline{A}) = 0.05$ 4 分

（1）$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 0.4325$ 8 分

（2）$P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = 0.9364$ 12 分

三、解：设 A=｛第一种工艺下的合格品｝，B=｛第二种工艺下的合格品｝，C=｛优质品｝

$P(C|A) = 0.9$，$P(C|B) = 0.8$ 3 分

D_i =｛表示第一种工艺下的第 i 道工序生产的废品｝，i=1，2，3

$P(D_1) = 0.05$，$P(D_2) = 0.10$，$P(D_3) = 0.25$ 5 分

E_i =｛表示第二种工艺下的第 i 道工序生产的废品｝，i=1，2

$P(E_1) = P(E_2) = 0.10$ 6 分

$P(A) = P(\overline{D}_1\overline{D}_2\overline{D}_3) = P(\overline{D}_1)P(\overline{D}_2)P(\overline{D}_3) = 0.95 * 0.90 * 0.75 = 0.6413$ 8 分

$P(B) = P(\overline{E}_1\overline{E}_2) = P(\overline{E}_1)P(\overline{E}_2) = 0.80 * 0.80 = 0.6400$ 9 分

$P(CA) = P(A)P(C|A) = 0.6413 * 0.9 = 0.5771$ 10 分

$P(CB) = P(B)P(C|B) = 0.64 * 0.8 = 0.512$ 11 分

答：第一种工艺得到的优等品概率大。 12 分

四、解：设 ξ 表示正常运行时间，$F(t) = P(\xi < t)$，当 $t \le 0$ 时，$F(t) = 0$ 2 分

t>0 时，题中条件为：$P(t < \xi < t + \Delta t \mid \xi > t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ 5 分

即： $\dfrac{P(t < \xi < t + \Delta t, \xi > t)}{P(\xi > t)} = \dfrac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\lambda(1-F(t))+o(1)$$

令 $\Delta t\to 0$，则 $\frac{dF(t)}{dt}=\lambda(1-F(t))$　　　　　　　　　　8 分

$\frac{d(1-F(t))}{dt}=-\lambda(1-F(t))$，$1-F(t)=ce^{-\lambda t}$，$\because F(0)=0$，$\therefore F(t)=1-e^{-\lambda t}$

故它正常运行时间大于 t 概率：$P(\xi>t)=e^{-\lambda t}$　　　　10 分

五、解：ξ 的取值：$m,m+1,\cdots$　　　　2 分

（1）$P(\xi=k)=C_{k-1}^{m-1}p^{m-1}(1-p)^{k-m}p=C_{k-1}^{m-1}p^{m}(1-p)^{k-m}$

$\xi=m,m+1,\cdots$　　　　　　　　6 分

（2）$E(\xi)=\sum_{k=m}^{\infty}kC_{k-1}^{m-1}p^{m}(1-p)^{k-m}$　　　　8 分

$=m\sum_{k=m}^{\infty}\frac{k!}{m!(k-m)!}p^{m}(1-p)^{k-m}=m\sum_{k=m}^{\infty}C_{k}^{m}p^{m}(1-p)^{k-m}$　　　　10 分

$=\frac{m}{p}$　　　　　　　　12 分

或：令η为首次取到 1 位离婚人士的调查人数，则η服从几何分布，即

$P(\eta=k)=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,\cdots$，$E\eta=\frac{1}{p}$

设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 独立同分布于η，则 $\xi=\eta_1+\cdots+\eta_m$，得 $E\xi=\frac{m}{p}$

六、解：（1）(ξ,η) 分布密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le x\le 2,1\le y\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$　　2 分，

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}\int_1^3\frac{1}{2}dy=1, & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$　　3 分

$$f_{\eta}(y)=\begin{cases}\int_1^2\frac{1}{2}dx=1/2, & 1\le y\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$　　4 分

（2） $P(\xi<1.5,\eta<4)=\int_1^{1.5}\mathrm{dx}\int_1^3\frac{1}{2}\mathrm{dy}$ 6 分

$=\int_1^{1.5}\mathrm{dx}=0.5$ 8 分

（3）因 $f(x,y)=\mathrm{f}_\xi(\mathrm{x})\cdot\mathrm{f}_\eta(\mathrm{y})$ 11 分

所以，随机变量ξ与η是独立的。 12 分

七、解：当 $\mathrm{y}\le 0$ 时，$\mathrm{F}_\eta(\mathrm{y})=\mathrm{P}\{\eta<\mathrm{y}\}=\mathrm{P}\{|\xi|<\mathrm{y}\}=0$，

所以，y<0 时，$\mathrm{f}(\mathrm{y})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\mathrm{F}_\eta(\mathrm{y})=0$， 3 分

当 $\mathrm{y}>0$ 时，$\mathrm{F}_\eta(\mathrm{y})=\mathrm{P}\{\eta<\mathrm{y}\}=\mathrm{P}\{|\xi|<\mathrm{y}\}=\mathrm{P}(-\mathrm{y}<\xi<\mathrm{y})$

$=\mathrm{P}(\xi<\mathrm{y})-\mathrm{P}(\xi<-\mathrm{y})=\mathrm{P}\left(\frac{\xi}{\sigma}<\frac{\mathrm{y}}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(\frac{\xi}{\sigma}<-\frac{\mathrm{y}}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\mathrm{y}}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\mathrm{y}}{\sigma}\right)$ 7 分

$\mathrm{f}(\mathrm{y})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\mathrm{F}_\eta(\mathrm{y})=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2}{2}}+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(-\frac{y}{\sigma}\right)^2}{2}}=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$ 10 分

八、解：设把机器分解为 n 个部分，各部分测量的误差分别为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，它们均服从区间(-1，1)上的均匀分布。 2 分

$E\xi_i=\int_{-1}^1\frac{x}{2}dx=0,\quad i=1,2,\cdots,n$，$E\xi_i^2=\int_{-1}^1\frac{x^2}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_{-1}^1=\frac{1}{3},\quad i=1,2,\cdots,n$

$D\xi_i=E\xi_i^2-(E\xi_i)^2=\frac{1}{3},\quad i=1,2,\cdots,n$ 5 分

即，总误差：$\eta=\sum_{i=1}^n\xi_i$，$E\eta=\sum_{i=1}^nE\xi_i=0$，$D\eta=\sum_{i=1}^nD\xi_i=\frac{n}{3}$ 7 分

由中心极限定理，

$P\{|\eta|<10\}=P\left\{\left|\frac{\eta}{\sqrt{\frac{n}{3}}}\right|<10\sqrt{\frac{3}{n}}\right\}\approx\Phi\left(10\sqrt{\frac{3}{n}}\right)-\Phi\left(-10\sqrt{\frac{3}{n}}\right)\ge 0.99$ 9 分

$10\sqrt{\frac{3}{n}}\ge u_{0.995}=2.58$，$n\le 45.06$ 11 分

答：最多可以把机器分解成 45 部分，才能以不低于 99％的概率保证测定的总重量误差的绝对值不超过 10kg。 12 分

九、解：由契比雪夫不等式，则

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\xi_i\right)\right|<\varepsilon\right)\le\frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i}{\varepsilon^2}\to 0 \qquad 8\text{ 分}$$

得

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\xi_i\right)\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad 10\text{ 分}$$