2 学分参考答案

一、（10 分）假设一枚弹道导弹击沉航空母舰的概率为$\frac{1}{3}$，击伤的概率为$\frac{1}{2}$，击不中的概率为$\frac{1}{6}$，并设击伤两次也会导致航空母舰沉没，求发射 4 枚弹道导弹能击沉航空母舰的概率？

解：设 A_i =｛第 i 枚弹道导弹击沉航空母舰｝，B_i =｛第 i 枚弹道导弹击伤航空母舰｝

C_i =｛第 i 枚弹道导弹没有击中航空母舰｝，i=1，2，3，4

D=｛发射 4 枚弹道导弹能击沉航空母舰｝

$P(A_i)=\frac{1}{3}$，$P(B_i)=\frac{1}{2}$，$P(C_i)=\frac{1}{6}$，i=1，2，3，4

$$\overline{D}=C_1C_2C_3C_4UB_1C_2C_3C_4UC_1B_2C_3C_4UC_1C_2B_3C_4UC_1C_2C_3B_4$$

$$P(\overline{D})=P(C_1C_2C_3C_4)+P(B_1C_2C_3C_4)+P(C_1B_2C_3C_4)+P(C_1C_2B_3C_4)+P(C_1C_2C_3B_4)$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^4+4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{13}{6^4}$$

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{13}{6^4}=0.99$$

二、（12 分）在某种牌赛中，5 张牌为一组，其大小与出现的概率有关。一付 52 张的牌（四种花色：黑桃、红心、方块、梅花各 13 张，即 2-10、J、Q、K、A），

求（1）同花顺（5 张同一花色连续数字构成）的概率；

（2）3 张带一对（3 张数字相同、2 张数字相同构成）的概率；

（3）3 张带 2 散牌（3 张数字相同、2 张数字不同构成）的概率。

解：（1）A=｛同花顺（5 张同一花色连续数字构成）｝

$$P(A)=\frac{4\times(13-4)}{C_{52}^5}=\frac{36}{C_{52}^5}$$（只要说明顺子的构成，分子 40 也算对）

（2）A=｛3 张带一对（3 张数字相同、2 张数字相同构成）｝

$$P(A)=\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2}{C_{52}^5}$$

（3）A=｛3 张带 2 散牌（3 张数字相同、2 张数字不同构成）｝

$$P(A)=\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^2C_4^1C_4^1}{C_{52}^5}$$

三、（10 分）某安检系统检查时，非危险人物过安检被误认为是危险人物的概率是 0.02；而危险人物又被误认为非危险人物的概率是 0.05。假设过关人中有 96%是非危险人物。问：

（1）在经检查后认为是非危险人物而确实是非危险人物的概率？

（2）如果要求对危险人物的检出率超过 0.999 概率，至少需安设多少道这样的检查关卡？

解：（1）设 A＝｛被查后认为是非危险人物｝， B＝｛过关的人是非危险人物｝，则

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.96\times 0.98+0.04\times 0.05=0.9428$$

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=0.998$$

（2）设需要 n 道卡，每道检查系统是相互独立的，则

Ci=｛第 i 关危险人物被误认为非危险人物｝，$P\{C_1\cdots C_n\}=0.05^n$，所以

$1-0.05^n\geq 0.999$，$n\geq\frac{\ln 0.0001}{\ln 0.05}$，即 $n=\left[\frac{\ln 0.0001}{\ln 0.005}\right]+1$=[3.0745]+1 = 4

四、（8 分）随机变量 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=a^X, a>0$ 的密度函数

解：当 $a=1$ 时，$Y=1$，则 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\leq 1\\ 1 & y>1\end{cases}$

当 $0<a<1$ 时，当 $y\leq 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y<y)=0$，$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(a^X<y)=P(X\ln a<\ln y)$

$$F_Y(y)=P\left(X>\frac{\ln y}{\ln a}\right)=1-P\left(X\leq\frac{\ln y}{\ln a}\right)=1-\Phi\left(\frac{\ln y}{\ln a}\right)$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=-\frac{1}{y\ln a}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{\ln y}{\ln a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

当 $a>1$ 时，当 $y\leq 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y<y)=0$，$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\left(X<\frac{\ln y}{\ln a}\right)=\Phi\left(\frac{\ln y}{\ln a}\right)$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{y\ln a}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{\ln y}{\ln a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

五、（12 分）设随机变量 X、Y 的联合分布律为：

X \ Y	-1	0	1	2
-2	a	0	0	0
-1	0.14	b	0	0
0	0.01	0.02	0.03	0

1	0.12	0.13	0.14	0.15

已知 E(X+Y)=0，求：(1)a，b；（2）X 的概率分布函数；（3）E(XY)。

解：（1）E(X+Y)=

$= -3a - 2\times 0.14 - b - 1\times 0.01 + 1\times 0.03 + 1\times 0.13 + 2\times 0.14 + 3\times 0.15$

$= -3a - b + 0.6 = 0$

$a + 0.14 + b + 0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.12 + 0.13 + 0.14 + 0.15 = a + b + 0.74 = 1$

联立解得：$a = 0.17$，$b = 0.09$

（2）X 的概率分布函数：

X	-2	-1	0	1
	0.17	0.23	0.06	0.54

（3）$E(XY) = 2\times 0.17 + 1\times 0.14 - 1\times 0.12 + 1\times 0.14 + 2\times 0.15 = 0.8$

六、(10 分) 某学校北区食堂为提高服务质量，要先对就餐率 p 进行调查。决定在某天中午，随机地对用过午餐的同学进行抽样调查。设调查了 n 个同学，其中在北区食堂用过餐的学生数为 m，若要求以大于 95%的概率保证调查所得的就餐频率与 p 之间的误差上下在 10% 以内，问 n 应取多大？

解：$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0.1\right\} \geq 0.95$，因 $\dfrac{\frac{m}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$

$$P\left\{\frac{\left|\frac{m}{n} - p\right|}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{0.1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right\} \geq 0.95，\quad \frac{0.1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq u_{0.975} = 1.96$$

$n \geq (19.6)^2 p(1-p)$；因为 $p(1-p) \leq 1/4$，取 $n \geq (19.6)^2/4$=96.04 即 $n = 97$

七、(10 分)

设二维随机变量(X,Y)在区域：$\{0 < x < a,\ \ 0 < y < b\}$上服从均匀分布。(1) 求(X,Y)的联合概率密度及边缘概率密度；(2) 已知 $DX = 12, DY = 36$，求参数 a、b；(3) 判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立？

解：(1) 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度：

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/ab, & 0 < x < a, 0 < y < b \\ 0, & others \end{cases}$$

边缘概率密度：$f_X(x) = \begin{cases} 1/a, & 0 < x < a \\ 0, & others \end{cases}$，$f_Y(y) = \begin{cases} 1/b, & 0 < y < b \\ 0, & others \end{cases}$

(2) $DX = (1/12)a^2 = 12, DY = (1/12)b^2 = 36$，$a = 12, b = 12\sqrt{3}$

（3）随机变量 X 与 Y 相互独立，因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

八、（8 分）证明：如果 $E|\xi|^3=c$ 存在，则 $P(|\xi|>t)\le\dfrac{c}{t^3}$

解：$P(|\xi|>t)=\int\limits_{|x|>t}dF(x)\le\int\limits_{|x|>t}\dfrac{|x|^3}{t^3}dF(x)\le\int\limits_{|x|\ge0}\dfrac{|x|^3}{t^3}dF(x)=\dfrac{E|\xi|^3}{t^3}=\dfrac{c}{t^3}$

九、（12 分）设（X，Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求（1）常数 A；（2）P(X<0.4，Y<1.3)；（3）Ee^{tX+sY}；（4）EX，DX，Cov(X，Y)。

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^1 Axydy\right)dx=\dfrac{A}{4}=1$，A＝4

（2）P(X<0.4，Y<1.3)$=\int_0^{0.4}\left(\int_0^1 4xydy\right)dx=0.16$

（3）$Ee^{tX+sY}=\int_0^1\left(\int_0^1 e^{tx+sy}4xydy\right)dx=\int_0^1 e^{tx}4x\left(\left(\dfrac{ye^{sy}}{s}\right)\Bigg|_0^1-\dfrac{1}{s}\int_0^1 e^{sy}dy\right)dx$

$=4\left(\dfrac{e^s}{s}-\dfrac{e^s}{s^2}+\dfrac{1}{s^2}\right)\left(\dfrac{e^t}{t}-\dfrac{e^t}{t^2}+\dfrac{1}{t^2}\right)$

（4）$EX=\int_0^1\left(\int_0^1 4x^2ydy\right)dx=\dfrac{2}{3}$，$EX^2=\int_0^1\left(\int_0^1 4x^3ydy\right)dx=\dfrac{1}{2}$

$DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$，$E(XY)=\int_0^1\left(\int_0^1 4x^2y^2dy\right)dx=\dfrac{4}{9}$

$Cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\dfrac{4}{9}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=0$

十、（8 分）电视台有一节日"幸运观众有奖答题"：有两类题目，A 类题答对一题奖励 1000 元，B 类题答对一题奖励 500 元。答错无奖励，并带上前面得到的钱退出；答对后可继续答题，并假设节目可无限进行下去（有无限的题目与时间），选择 A、B 类型题目分别由抛硬币的正、反面决定。

已知某观众 A 类题答对的概率都为 0.4，答错的概率都为 0.6；B 类题答对的概率都为 0.6，答错的概率都为 0.4。

（1）求该观众答对题数的期望值。

（2）求该观众得到奖励金额的期望值。

解：（1）设 ξ 表示该观众答对题数，$\xi=0,1,2,\cdots$

则第ξ+1 次解答答错（即首次出错）。

答对一题的概率为

$P(\text{答对题})=P(\text{答对A题}|\text{选择A题})\text{P}(\text{选择A题})+P(\text{答对B题}|\text{选择B题})\text{P}(\text{选择B题})$

$=0.4\times0.5+0.6\times0.5=0.5$

答错一题的概率为 0.5

所以$P(\xi=k)=0.5^k\times0.5=0.5^{k+1}$； $E\xi=\sum\limits_{k=0}^{\infty}k\cdot0.5^{k+1}=1$

（2）观众得到奖励金额η的期望值：

令$X=\begin{cases}1, & 答对A题\\ 2, & 答对B题\\ 3, & 答错题\end{cases}$，则$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$，

$E\eta=E(E(\eta\mid X))\quad 0.2\times E(1000+\eta)+0.3\times E(500+\eta)+0.5\times0$

$\therefore E\eta=700$

或：答对一题得到奖金的期望为：$0.5\times0.4\times1000+0.5\times0.6\times500=350$

进入第k题答题环节的概率为：0.5^{k-1}

因此，总奖金的期望为：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}350\times0.5^{k-1}=700$