姓名________ 学号________ 学院________ 专业________ 座位号________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考,考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学期末考试

《概率论与数理统计》试卷(A)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚；

2. 允许使用计算器，所有答案请直接答在试卷上；

3．考试形式：闭卷；

4. 本试卷共八大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得 分										
评卷人										

Φ(1)=0.8413, Φ(1.65)=0.95, Φ(1.96)=0.975, Φ(1.622)=0.9474,
Φ(1.298)=0.9032, **错误！未找到引用源。**，**错误！未找到引用源。**，
错误！未找到引用源。，**错误！未找到引用源。**

一（10 分）已知在 10 件相同的玩具中有 2 件次品，从中随机取出两件，求以下事件的概率：

（1） 两件都是正品

（2） 一件是正品，一件是次品

解： (1)取出两件玩具的样本数是**错误！未找到引用源。**

两件都是正品的概率**错误！未找到引用源。** 5 分

(2)一件正品一件次品的概率**错误！未找到引用源。** 10 分

二（12 分）今有两口箱子，第一箱装有 2 个红球1个白球，第二箱装有 3 个红球 2 个白球。现在从两箱中任取一箱，然后再从该箱中任取两球，每次取一个，不放回。

（1） 求第一次取到红球的概率；

（2） 在第一次取到红球的条件下，求第二次取到红球的概率；

解：记 $A_i=\{第i次取到红球\}(i=1,2)$, $B_j=\{取到第j箱\}(j=1,2)$

$$p(B_1)=p(B_2)=\frac{1}{2},\ p(A_1|B_1)=\frac{2}{3},\ p(A_1|B_2)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$$ 4 分

$$p(A_1)=p(A_1|B_1)p(B_1)+p(A_1|B_2)p(B_2)=\frac{19}{30}$$ 6 分

（2） $p(A_1A_2)=p(A_1A_2|B_1)+p(A_1A_2|B_2)p(B_2)=\dfrac{19}{60}$ 10 分

$$p(A_2|A_1)=\frac{p(A_1A_2)}{p(A_1)}=\frac{1}{2}$$ 12 分

三（10 分）某工厂甲、乙、丙三车间生产同一种产品，产量分别占 25%, 35%, 40%, 废品率分别为 5%, 4%和 2%. 产品混在一起，求：

（1） 总的废品率

（2）抽检到废品时，这只废品是由甲车间生产的概率.

解：设 A_1={产品由甲厂生产}, A_2={产品由乙厂生产}, A_3={产品由丙厂生产},

B={产品是废品},由题意

$P(A_1)=25\%$, $P(A_2)=35\%$, $P(A_3)=40\%$;

$P(B|A_1)=5\%$, $P(B|A_2)=4\%$, $P(B|A_3)=2\%$. 3 分

由全概率公式,

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.25\times 0.05+0.35\times 0.04+0.40\times 0.02=0.0345,$$

5 分

从而由贝叶斯公式,

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.25\times 0.05}{0.0345}=0.36.$$

10 分

四（12 分）设考生的外语成绩（百分制）X 服从正态分布，平均成绩（即参数 μ 之值）为 72 分，96 分以上的人占考生总数的 2.3%，今任取 100 个考生的成绩，以 Y 表示成绩在 60 分至 84 分之间的人数，求（1）Y 的分布列.（2）EY 和 DY.

解：(1) Y～B（100，p），其中

$$p=P(60<X\le 84)=\Phi\left(\frac{84-72}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{60-72}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{12}{\sigma}\right)-1$$

由 0.023= $p(X>96)=1-\Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right)=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})$ 4 分

得 $\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.997$, 即 $\frac{24}{\sigma}=2$，故 $\frac{12}{\sigma}=1$ 5 分

所以 $p=2\Phi(1)-1=0.6826$ 6 分

故 Y 的分布列为 $p(Y=k)=C_{100}^{k}(0.6826)^{k}(0.3174)^{100-k}$ 8 分

（2）$EY=100\times 0.6826=68.26$, $DY=68.26\times 0.3174=21.6657$ 12 分

五(12 分)设 ξ, η 是两个随机变量，其联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1, y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）求 ξ, η 边缘密度函数；**错误！未找到引用源。**

(2)判断ξ，η是否相互独立，并求随机变量 ζ=ξ+η **错误！未找到引用源。**的概率密度函数。

解：（1）已知**错误！未找到引用源。**

则有**错误！未找到引用源。**所以**错误！未找到引用源。** 3 分

错误！未找到引用源。所以**错误！未找到引用源。** 6 分

（2）因为**错误！未找到引用源。** 所以 X Y 相互独立。 7 分

错误！未找到引用源。 8 分

此时应满足**错误！未找到引用源。**既**错误！未找到引用源。**

错误！未找到引用源。 10 分

既有**错误！未找到引用源。** 12 分

六（10 分）学校食堂出售盒饭，共有三种价格 4 元，4.5 元，5 元。出售哪一种盒饭是随机的，售出三种价格盒饭的概率分别为 0.3，0.2，0.5。已知某天共售出 200 盒，试用中心极限定理求这天收入在 910 元至 930 元之间的概率。

解：设 X_i 为第 i 盒的价格 $(i=1,2,\cdots,200.)$，则总价 $X=\sum_{i=1}^{200}X_i$ 1 分

$$E(X_i)=4.6,\quad D(X_i)=0.19$$ 3 分

$$E(X)=\sum_{i=1}^{200}E(X_i)=200\times4.6=920.$$ **4 分**

$$D(X)=\sum_{i=1}^{200}D(X_i)=200\times0.19=38.$$ 5 分

$$P(910\le X\le930)=P\left(\frac{910-920}{\sqrt{38}}\le\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\le\frac{930-920}{\sqrt{38}}\right)$$

$$\approx2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{38}}\right)-1=2\Phi(1.622)-1=2\times0.9474-1=0.8948$$ 9 分

[$P(912\le X\le928)\approx2\Phi(1.298)-1=0.8064$] 10 分

七（2 学分）（12 分）设 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=Ay(1-x),0\le x\le1,0\le y\le x$，

（1）求系数 A；

（2）求 (X,Y) 的联合分布函数。

解：（1）由**错误！未找到引用源。**有

$$1=\int_0^1\int_0^x Ay(1-x)\,dydx=\int_0^1 A(1-x)\cdot\frac{1}{2}y^2|_0^x dx=\int_0^1 A(1-x)\frac{1}{2}x^2dx=\frac{A}{24}$$

所以可得：A=24 6 分

（2）根据**错误！未找到引用源。**可得：

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0 \quad 或 \quad y<0\\ 3y^4-8y^3+12(x-x^2/2)y^2 & 0\le x<1 \quad 0\le y<x\\ 3y^4+8y^3+6y^2 & x\ge 1 \quad 0\le y<1\\ 4x^3-3x^4 & 0\le x<1 \quad x\le y\\ 1 & x\ge 1 \quad y\ge 1\end{cases}$$

6 分

八、（2 学分）（10 分）若连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & 当0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

已知 $EX=\frac{1}{2}$，$DX=\frac{3}{20}$，求系数 a、b、c.

解： 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，所以 $\int_0^1(ax^2+bx+c)dx=1$，即

$$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=1 \qquad (1)$$

已知 $EX=\frac{1}{2}$，所以有 $\int_0^1 x(ax^2+bx+c)dx=\frac{1}{2}$，即

$$\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

由 $DX=EX^2-(EX)^2$ 知 $EX^2=\frac{2}{5}$，所以 $\int_0^1 x^2(ax^2+bx+c)dx=\frac{2}{5}$，即

$$\frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}c=\frac{2}{5} \qquad (3)$$

联立式（1）（2）（3），解得 $a=12,b=-12,c=3$.

（九）（2 学分）（12 分） 今有两封信投入编号为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的 3 个邮筒，设 X、Y 分别表示投入第Ⅰ号和第Ⅱ号邮筒信的数目，试求：（1）(X,Y) 的联合分布；（2）X 和 Y 是否独立；（3）随机变量 $U=\max(X,Y)$ 及 $V=\min(X,Y)$ 的分布律.

（1）(X,Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

4 分

（2）

Y	0	1	2
1	4/9	4/9	1/9

X	0	1	2
1	4/9	4/9	1/9

因 P(X=0)*P(Y=0)≠P(X=0,Y=0)

X 与 Y 不相互独立.　　　　8 分

（3）U、V 的分布列分别为

U	0	1	2
P	1/9	6/9	2/9

V	0	1	2
P	7/9	2/9	0

12 分

（七）（3、4 学分）(10 分)某糖厂用自动打印机装糖，已知每袋糖的质量（单位：kg）服从正态分布**错误！未找到引用源。**。现随机地抽取 9 袋，并称出它们的质量，计算得样本均值**错误！未找到引用源。**，样本标准差 S＝2.5，在下列两种情形下，分别检验**错误！未找到引用源。**。取显著性水平α＝0.05。

（1）已知**错误！未找到引用源。**（2）**错误！未找到引用源。**未知。

解：(1)①提出假设 $H_0: \mu=\mu_0=50$.　　1 分

②找统计量.$u=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.　　2 分

③求临界值.对给定的$\alpha=0.05$,查表得$u_{0.025}=1.96$.　　3 分

④求观察值.$u=2.25$.　　4 分

⑤作出判断.当$\alpha=0.05$时,$|u|=2.25>1.96$,所以拒绝H_0.　　5 分

(2)①提出假设$H_0:\mu=\mu_0=50$.　　6 分

②找统计量.$t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.　　7 分

③求临界值.对给定的$\alpha=0.05$,查表得$t_{0.025}(8)=2.31$.　　8 分

④求观察值.$\bar{X}=48.5,S=2.5,t=-1.8$.　　9 分

⑤作出判断.当$\alpha=0.05$时, $|t|=1.8<2.31$,所以接受H_0.　　10 分

（八）（3、4 学分）（12 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}\quad \theta>-1\text{为未知参数.}$$

已知$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体 X 的一个样本。求：

(1) 未知参数θ的矩估计量；
(2) 未知参数θ的极大似然估计量；
(3) $E(X)$的极大似然估计量.

解：(1)　矩估计量　$\hat{\theta}=\dfrac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$　　[$\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$]　　4 分

（2）　极大似然估计量　$\hat{\theta}=-1-\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$　　[$\hat{\theta}=-\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$]　　8 分

（3）　$E(X)$的极大似然估计量

$\hat{E}(X)=\dfrac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$　　[$\hat{E}(X)=\dfrac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-1}$]　　12 分

（九）（3、4 学分）（12 分）设某种油漆的 9 个样本,其干燥时间(单位:h)分别为:6.0,5.7,5.8,6.5,7.0,6.3,5.6,6.1,5.0.设干燥时间总体服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$,求 μ 的置信度为 95%的置信区间: (1)若由以往知 $\sigma=0.6\mathrm{h}$; (2)若 σ 未知.

解：(1)当方差 σ^2 已知时, μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$$

2 分

已知 $1-\alpha=0.95,\alpha=0.05,\alpha/2=0.025,n=9,\sigma=0.6$

$$\bar{X}=\frac{1}{9}\left(6.0+5.7+\cdots+5.0\right)=6$$

4 分

查表得 $Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}=1.96$,将这些值代入上面的区间得 $\left(5.608,6.392\right)$. 6 分

(2)当方差 σ^2 未知时, μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}\left(n-1\right),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}\left(n-1\right)\right)$$

8 分

已知 $1-\alpha=0.95,\alpha=0.05,\alpha/2=0.025,n-1=8$

$$\bar{X}=\frac{1}{9}\left(6.0+5.7+\cdots+5.0\right)=6,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=0.33$$

10 分

查表得 $t_{\alpha/2}\left(n-1\right)=t_{0.025}\left(8\right)=2.3060$,将这些值代入上面的区间得 $\left(5.558,6.442\right)$. 12 分

分