MATHS Tle EXPERTES

Auteurs
Delphine ARNAUD
Thibault FOURNET-FAYAS
Hélène GRINGOZ
Marie HASCOËT
Laura MAGANA
Paul MILAN

Livre du professeur

MAGNARD

Édition : Julie Drappier
Responsable éditorial : Adrien Fuchs
Maquette de couverture : Primo&Primo
Mise en pages et schémas : Nord-compo

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 Nombres complexes : point de vue algébrique et polynômes

Manuel p. 10-41

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans les deux premiers chapitres de ce manuel, nous allons introduire et étudier un nouvel ensemble de nombres : l'ensemble des nombres complexes. Nous allons étudier ce nouvel ensemble avec deux points de vue différents : le point de vue algébrique et le point de vue géométrique.

Les nombres complexes sont des outils importants notamment en physique et en économie.

Dans ce premier chapitre, nous verrons le point de vue algébrique.

Dans un premier temps, nous introduirons ce nouvel ensemble, noté $\mathbb{C}$, à l'aide d'une approche historique. Puis nous étudierons différentes propriétés algébriques (égalité dans $\mathbb{C}$, opérations dans $\mathbb{C}$).

Dans un deuxième temps, nous étudierons la notion de conjugué d'un nombre complexe.

Enfin, dans un dernier temps, nous ferons le lien entre nombres complexes et polynômes, avec la formule du binôme de Newton, la résolution d'équations du second degré et la factorisation de polynômes.

Objectifs

- → **Déterminer et utiliser la forme algébrique d'un nombre complexe.**
- → **Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes et résoudre une équation linéaire $az = b$.**
- → **Déterminer le conjugué d'un nombre complexe et résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\bar{z}$.**
- → **Utiliser la formule du binôme de Newton.**
- → **Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.**
- → **Factoriser un polynôme dont une racine est connue.**
- → **Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 11

1. Réduire une expression

a) $A = 3 + 2x$ **b)** $B = 1 + 4x$

2. Utiliser la distributivité

a) $A = 2 - 4x$

b) $B = 12 - 12x + 6x - 6x^2 = -6x^2 - 6x + 12$

3. Calculer avec des racines carrées

1. a) $A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

2. $C = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2}$

Donc $C = \sqrt{2} - 1$.

3. $D = \frac{1+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-3}$

Donc $D = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

4. Calculer un discriminant

a) $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = -31$

b) $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 25 = 0$

c) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 32$

d) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 0$

5. Déterminer la forme canonique d'un trinôme

a) $f(x) = (x-3)^2 - 3^2 + 5 = (x-3)^2 - 4$

b) $g(x) = 3(x^2 + 3x + 6)$

$$= 3\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6\right]$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right] = 3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{45}{4}$$

6. Résoudre une équation du second degré

a) $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-9) - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -1$

et $x_2 = \dfrac{-(-9) + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 4$

Donc S = $\{-1\ ;\ 4\}$.

b) $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 7 = -31 < 0$

Donc S = $\varnothing$.

c) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 0$

$x_0 = \dfrac{-(-2)}{2 \times 2} = \dfrac{1}{2}$. Donc S = $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

d) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = -2$

Donc S = $\{-2\ ;\ 1\}$.

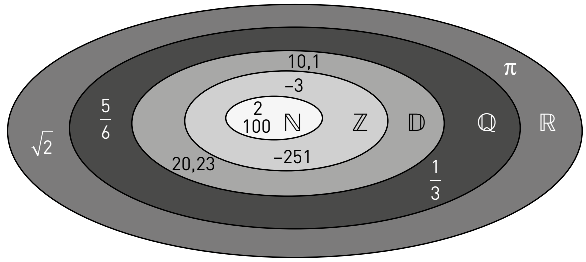
Activités

p. 12-13

1 Faire le point sur les ensembles de nombres

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Faire le point sur les différents ensembles de nombres vus les années précédentes (Seconde et Première) et résoudre des équations dans ces différents ensembles.

1.



2. $x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = -1$

a) Dans $\mathbb{N}$, S = $\varnothing$. **b)** Dans $\mathbb{Z}$, S = $\{-1\}$.

3. $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

a) Dans $\mathbb{N}$, S = $\varnothing$. **b)** Dans $\mathbb{Z}$, S = $\varnothing$.

c) Dans $\mathbb{R}$, S = $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

4. $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

Dans $\mathbb{R}$, S = $\varnothing$ car un carré est positif ou nul.

2 Découvrir une approche historique

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir un nouvel ensemble de nombres, l'ensemble des nombres complexes, à l'aide d'une approche historique.

1. Soit x et y deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit à 40.

$x + y = 10$ et $x \times y = 40$. Donc $y = 10 - x$.

$x \times y = 40$ devient $x \times (10 - x) = 40$.

2. $x \times (10 - x) = 40 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 40 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-40) = -60 < 0$

Donc dans $\mathbb{R}$, S = $\varnothing$.

3. $(5 + \sqrt{-15})(10 - (5 + \sqrt{-15}))$

$= (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15})$

$= 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - 15 = 10$

Donc $5 + \sqrt{-15}$ vérifie bien l'équation.

De même, $(5 - \sqrt{-15})(10 - (5 - \sqrt{-15}))$

$= (5 - \sqrt{-15})(5 + \sqrt{-15})$

$= 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - 15 = 10$

Donc $5 - \sqrt{-15}$ vérifie bien l'équation.

4. a) $i^2 = -1$, donc $i^2 + 1 = 0$.

Donc i est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

b) $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

5. a) 2i. En effet, $(2i)^2 = 4i^2 = -4$.

b) $i\sqrt{2}$. En effet, $(i\sqrt{2})^2 = 2i^2 = -2$.

c) $i\sqrt{15}$. En effet, $(i\sqrt{15})^2 = 15i^2 = -15$.

6. Les solution proposées par Cardan s'écrivent $5+i\sqrt{15}$ et $5-i\sqrt{15}$.

3 Calculer avec des nombres complexes

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Calculer avec des nombres complexes (addition, multiplication, inverse).

A. Addition et multiplication

1. $A = 1 - x$ $\quad B = -2x^2 + 7x - 6$

2. $C = 1 - i$

$D = -6 + 3i + 4i - 2i^2$

$= -6 + 7i - 2 \times (-1) = -4 + 7i$

3. $E = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$

$F = a + ib - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b')$

$G = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb'$

$= aa' + iab' + iba' - bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

B. Inverse

1. a) $(2 - i)(2 + i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 4 - (-1) = 5$

b) $H = \dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$

2. a) $(a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - i^2b^2$

$= a^2 + b^2$

b) $H = \dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}$

$= \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$

4 Découvrir le conjugué d'un nombre complexe

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir le conjugué d'un nombre complexe et quelques propriétés sur le conjugué.

1. $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a$

$z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib$

$z \times \overline{z} = (a + ib) \times (a - ib) = a^2 + b^2$

2.a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0$

a) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0$

5 Résoudre des équations du second degré

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir comment résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

1. a) $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$

Donc dans $\mathbb{R}$, $S = \varnothing$.

b) $x^2 + 4 = x^2 - (-4) = x^2 - (2i)^2$

c) $x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$

d) $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2i = 0$ ou $x + 2i = 0$

$\Leftrightarrow x = 2i$ ou $x = -2i$

Donc dans $\mathbb{C}$, $S = \{-2i ; 2i\}$.

2. a) $f(x) = (x + 1)^2 - 1^2 + 10 = (x + 1)^2 + 9$

b) $f(x) = (x+1)^2 - (-9) = (x + 1)^2 - (3i)^2$

c) $f(x) = (x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 - 3i = 0$ ou $x + 1 + 3i = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 + 3i$ ou $x = -1 - 3i$

Donc dans $\mathbb{C}$, $S = \{-1 + 3i ; -1 - 3i\}$.

À vous de jouer p. 15-25

1. a) $z = -2$ $\quad$ **b)** $z = 0$

2. a) $z = -4 + 6i$. Donc $\text{Re}(z) = -4$ et $\text{Im}(z) = 6$.

b) $z = 3$. Donc $\text{Re}(z) = 3$ et $\text{Im}(z) = 0$.

3. $x = 3$ et $y = -4$.

4. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Donc $x = -1$ et $y = 2$.

5. a) $z_1 - z_2 = 1 + i$ $\quad$ **b)** $-3z_1 = 6 - 9i$

c) $2{z_1}^2 = 2 \times (4 - 12i + (3i)^2) = 2 \times (4 - 12i - 9)$

$= 2 \times (-5 - 12i) = -10 - 24i$

6. a) $(3 - i)(4 + 2i) = 12 + 6i - 4i - 2i^2$

$= 12 + 2i + 2 = 14 + 2i$

b) $(5 - i)(5 + i) = 5^2 - i^2 = 26$

7. a) $z_1 = \dfrac{3-i}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3-i}{3^2-i^2} = \dfrac{3-i}{9+1} = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}i$

b) $z_2 = \dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{1} = -i$

8. a) $(1-\mathrm{i})\times z = 1+\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+\mathrm{i}+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+2\mathrm{i}-1}{1+1}$$

$$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$$

Donc $S = \{\mathrm{i}\}$.

b) $(5+3\mathrm{i})z - 2 = \mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{2+\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(2+\mathrm{i})(5-3\mathrm{i})}{(5+3\mathrm{i})(5-3\mathrm{i})}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{10-6\mathrm{i}+5\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{5^2-(3\mathrm{i})^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{10-\mathrm{i}+3}{25+9}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{13}{34}-\frac{1}{34}\mathrm{i}$$

Donc $S = \left\{\dfrac{13}{34}-\dfrac{1}{34}\mathrm{i}\right\}$.

9. Pour tout nombre complexe z non nul, notons

$Z = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}$.

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} - \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{\overline{z}}}$$

$$= \frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right) = -Z$$

Donc Z est un nombre imaginaire pur.

10. Pour tout nombre complexe z non nul, notons

$Z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$.

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} + \frac{1}{\overline{\overline{z}}}$$

$$= \frac{1}{\overline{z}} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = Z$$

Donc Z est un nombre réel.

11. a) $2\overline{z} = 4+\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = 2+\dfrac{1}{2}\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 2-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

Donc $S = \left\{2-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

b) $-3\overline{z} = -2-\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

Donc $S = \left\{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right\}$.

12. a) Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$z - 3\overline{z} = 6 - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b - 3(a - \mathrm{i}b) = 6 - 2\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow -2a + \mathrm{i}4b = 6 - 2\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 6 \\ 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{-3-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

b) Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$-z + 4\overline{z} = 5 - 7\mathrm{i} \Leftrightarrow -(a+\mathrm{i}b) + 4(a-\mathrm{i}b) = 5 - 7\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow 3a - \mathrm{i}5b = 5 - 7\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 5 \\ -5b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{3} \\ b = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{3}\mathrm{i}\right\}$.

13. $(1-\mathrm{i})^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}1^k(-\mathrm{i})^{5-k} = -4+4\mathrm{i}$

14. $z = (a-\mathrm{i})^3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}a^k(-\mathrm{i})^{3-k}$

$$= \binom{3}{0}a^0(-\mathrm{i})^3 + \binom{3}{1}a^1(-\mathrm{i})^2 + \binom{3}{2}a^2(-\mathrm{i})^1 + \binom{3}{3}a^3(-\mathrm{i})^0$$

$$= \mathrm{i} - 3a - 3a^2\mathrm{i} + a^3 = a^3 - 3a + \mathrm{i}(1-3a^2)$$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ou } a = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Donc z est un nombre réel si et seulement si

$a = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ou $a = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

15. a) $z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 5$.

Dans $\mathbb{R}$, $S = \left\{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\right\}$.

Dans $\mathbb{C}$, $S = \left\{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\right\}$.

b) $z^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -5$.

Dans $\mathbb{R}$, $S = \varnothing$. Dans $\mathbb{C}$, $S = \left\{-i\sqrt{5} ; i\sqrt{5}\right\}$.

c) Dans $\mathbb{R}$, $S = \varnothing$. Dans $\mathbb{C}$, $S = \{-3i ; 3i\}$.

16. a) $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 25 = 0$

$x_0 = \dfrac{-(-20)}{2 \times 4} = \dfrac{5}{2}$

Donc dans $\mathbb{R}$, $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.

Dans $\mathbb{C}$, $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.

b) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 4 = -16 < 0$

$x_1 = \dfrac{-(-4) - i\sqrt{16}}{2 \times 2} = 1 - i$ et $x_2 = \dfrac{-(-4) + i\sqrt{16}}{2 \times 2} = 1 + i$

Donc dans $\mathbb{R}$, $S = \varnothing$.

Dans $\mathbb{C}$, $S = \{1 - i ; 1 + i\}$.

17. $z^3 - 2^3 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$

Or $(z - 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \\ c = 4 \end{cases}$

Donc $z^3 - 2^3 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$.

18. $z^3 - (3i)^3 = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$

Or $(z - 3i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 3ia)z^2 + (c - 3ib)z - i3c$

Par identification,

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3ia = 0 \\ c - 3ib = 0 \\ -3ic = -(3i)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3i \\ c = 3i \times 3i \\ c = 9i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3i \\ c = -9 \\ c = -9 \end{cases}$

Donc $z^3 - (3i)^3 = (z - 3i)(z^2 + 3iz - 9)$.

19. 1. $(-3)^3 + 3 \times (-3)^2 + (-3) + 3 = 0$

Donc -3 est une solution de l'équation.

2. $z^3 + 3z^2 + z + 3 = (z + 3)(az^2 + bz + c)$

Or $(z + 3)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b + 3a)z^2 + (c + 3b)z + 3c$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b + 3a = 3 \\ c + 3b = 1 \\ 3c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $z^3 + 3z^2 + z + 3 = (z + 3)(z^2 + 1)$

$z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0 \Leftrightarrow (z + 3)(z^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z + 3 = 0$ ou $z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = -3$ ou $z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = -3$ ou $z = -i$ ou $z = i$

Donc $S = \{-3 ; -i ; i\}$.

20. 1. $1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$

Donc 1 est une solution de l'équation.

2. $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z - 1)(az^2 + bz + c)$

Or $(z - 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$.

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -6 \\ c - b = 11 \\ -c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \\ c = 6 \end{cases}$

Donc $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z - 1)(z^2 - 5z + 6)$.

$z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 - 5z + 6) = 0$

$\Leftrightarrow z - 1 = 0$ ou $z^2 - 5z + 6 = 0$

Résolvons $z^2 - 5z + 6 = 0$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$

Donc l'équation $z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0$ a pour ensemble de solution dans $\mathbb{C}$: $S = \{1 ; 2 ; 3\}$.

21. a) $3z - 4 = iz + 5i - 1 \Leftrightarrow z \times (3 - i) = 3 + 5i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3 + 5i}{3 - i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(3 + 5i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{4}{10} + \dfrac{18}{10}i$

Donc $S = \left\{\dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{5}i\right\}$.

b) $z = -\dfrac{2}{z} + 1 \Leftrightarrow z^2 = -2 + z \Leftrightarrow z^2 - z + 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$

$z_1 = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$

Donc $S = \left\{\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} ; \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right\}$.

22. a) Posons $z = a + \mathrm{i}b$

$z = 4\overline{z} + 4 - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = 4(a - \mathrm{i}b) + 4 - 2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = 4a + 4 + \mathrm{i}(-4b - 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4a + 4 \\ b = -4b - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4}{3} \\ b = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{-\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{5}\mathrm{i}\right\}$.

b) $(z + \mathrm{i})z^2 + (z + \mathrm{i}) \times 5 = 0 \Leftrightarrow (z + \mathrm{i})(z^2 + 5) = 0$

$\Leftrightarrow z + \mathrm{i} = 0$ ou $z^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z = -\mathrm{i}$ ou $z^2 = -5$

$\Leftrightarrow z = -\mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{5}$ ou $z = \mathrm{i}\sqrt{5}$

Donc $S = \left\{-\mathrm{i} ; -\mathrm{i}\sqrt{5} ; \mathrm{i}\sqrt{5}\right\}$.

23. 1. $z_1 = \mathrm{i} \times 0 + 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$; $z_2 = \mathrm{i} \times 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = -2 + 2\mathrm{i}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \mathrm{i} \times z_n + 2\mathrm{i} - (-1 + \mathrm{i}) = \mathrm{i} \times z_n + 1 + \mathrm{i}$

Or $u_n = z_n - z_A$, donc $z_n = u_n + z_A = u_n - 1 + \mathrm{i}$.

Donc $u_{n+1} = \mathrm{i} \times (u_n - 1 + \mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i}$

$= \mathrm{i} \times u_n - \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + 1 + \mathrm{i} = \mathrm{i} \times u_n$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = z_0 - z_A = 1 - \mathrm{i}$ et $(1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^0 = 1 - \mathrm{i}$. Donc $u_0 = (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

$u_{n+1} = \mathrm{i} \times u_n = \mathrm{i} \times (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^{n+1}$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_n - z_A$, donc $z_n = u_n + z_A = u_n - 1 + \mathrm{i}$.

Donc $z_n = (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n - 1 + \mathrm{i}$.

d) $z_{62} = (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^{62} - 1 + \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i}) \times (\mathrm{i}^2)^{31} - 1 + \mathrm{i}$

$= (1 - \mathrm{i}) \times (-1)^{31} - 1 + \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(-1) - 1 + \mathrm{i}$

$= -2 + 2\mathrm{i}$

24. 1. $z_1 = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{i}} = 1 - \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}$. Donc $z_1 = 1 + \mathrm{i}$.

$z_2 = 1 - \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$

Donc $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

$z_3 = 1 - \dfrac{1}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}} = 1 - \dfrac{2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

Donc $z_3 = \mathrm{i}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $z_{3n} = z_0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $z_{3\times 0} = z_0$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $z_{3n} = z_0$.

Donc $z_{3n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_{3n}} = 1 - \dfrac{1}{z_0} = z_1$.

Donc $z_{3n+2} = 1 - \dfrac{1}{z_{3n+1}} = 1 - \dfrac{1}{z_1} = z_2$.

Donc $z_{3n+3} = 1 - \dfrac{1}{z_{3n+2}} = 1 - \dfrac{1}{z_2} = z_3$.

Donc $z_{3(n+1)} = z_3 = \mathrm{i} = z_0$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc $z_{3n} = z_0$.

3. $z_{99} = z_{3\times 33} = z_0 = \mathrm{i}$.

Exercices apprendre à démontrer p. 26

Pour s'entraîner

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $z_{2n} = z_0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $z_{2\times 0} = z_0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $z_{2n} = z_0$.

Donc $z_{2n+1} = \overline{z_{2n}} = \overline{z_0}$.

Donc $z_{2n+2} = \overline{z_{2n+1}} = \overline{\overline{z_0}} = z_0$.

Donc $z_{2(n+1)} = z_0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc $z_{2n} = z_0$.

Exercices calculs et automatismes p. 27

25. Partie réelle, partie imaginaire

1. a) et d) **2.** b) et c)

3. a) et c) **4.** b) et c)

26. Réel ou imaginaire pur

a) Fausse. **b) Vraie.**

c) Vraie. **d) Fausse.** ($z_4 = \mathrm{i}$ donc z_4 est un nombre imaginaire pur).

27. Forme algébrique (somme)

a) $z_1 = -1 + 2\mathrm{i}$ **b)** $z_2 = 3 + \mathrm{i}$

c) $z_3 = 3 + 2\mathrm{i}$ **d)** $z_4 = 1 + 2\mathrm{i}$

28. Forme algébrique (produit)

a) $z_1 = \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = -1 + \mathrm{i}$ **b)** $z_2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$

c) $z_3 = 1 - \mathrm{i}^2 = 2$ **d)** $z_4 = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = -2\mathrm{i}$

29. Inverse d'un complexe

Pour déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe de la forme $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b}$ avec a et b deux réels, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par $a - \mathrm{i}b$.

30. Forme algébrique (inverse)

a) $z_1 = \dfrac{1 \times (-\mathrm{i})}{\mathrm{i} \times (-\mathrm{i})} = \dfrac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}^2} = -\mathrm{i}$

b) $z_2 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1^2 - \mathrm{i}^2} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

31. Conjugué (1)

1. b) **3.** d)

2. b) **4.** c)

32. Conjugué (2)

1. Fausse. Si $z = \mathrm{i}$, alors $z + \overline{z} = \mathrm{i} + (-\mathrm{i}) = 0$ et z n'est pas réel

2. Vraie. Voir démonstration dans le cours : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

3. Vraie. Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels. Alors $z \times \overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2$.

33. Équation de la forme $x^2 = a$

1. b) **2.** d)

34. Calcul d'un discriminant

a)

35. Équations du second degré

1. d)

36. Factorisation

Soit P un polynôme de degré 3 et r une racine de P.

Alors on a $P(z) = (z - r) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus 2.

Donc $P(z) = (z - r) \times (az^2 + bz + c)$ avec a, b et c des réels .

Il faut ensuite développer $(z - r) \times (az^2 + bz + c)$, et identifier les coefficients de cette expression avec ceux de $P(z)$.

Exercices d'application p. 28-30

Déterminer et utiliser la forme algébrique

37. a) $\mathrm{Re}(z_1) = 5$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -2$.

b) $\mathrm{Re}(z_2) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_2) = \sqrt{3}$.

c) $\mathrm{Re}(z_3) = 4 + \sqrt{2}$ et $\mathrm{Im}(z_3) = 0$.

d) $\mathrm{Re}(z_4) = -3$ et $\mathrm{Im}(z_4) = 2$.

38. a) $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -1$.

b) $\mathrm{Re}(z_2) = 1 + \sqrt{2}$ et $\mathrm{Im}(z_2) = 1$.

c) $\mathrm{Re}(z_3) = \sqrt{2} + 6$ et $\mathrm{Im}(z_3) = 0$.

d) $\mathrm{Re}(z_4) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_4) = \mathrm{e}^2$.

39. a) $z_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, donc z_1 est un nombre imaginaire pur.

b) $z_2 = -2$, donc z_2 est un nombre réel.

c) $z_3 = 3 + \sqrt{5}$, donc z_3 est un nombre réel.

d) $z_4 = 2 - \text{i}$, donc z_4 est un nombre complexe quelconque.

40. 1. $\text{i}^2 = -1$

$\text{i}^3 = \text{i}^2 \times \text{i} = -\text{i}$

$\text{i}^4 = (\text{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1$

2. $\text{i}^{50} = (\text{i}^2)^{25} = (-1)^{25} = -1$

3. $\text{i}^{2\,000} = (\text{i}^2)^{1\,000} = (-1)^{1\,000} = 1$

41. a) $z_1 = 5 + \frac{2}{3}\text{i}$ **b)** $z_2 = 1 + 2\text{i}$.

42. $\begin{cases} 1 + 2x = 5 \\ 1 - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Donc $x = 2$ et $y = -\frac{3}{2}$.

43. $\begin{cases} -2 + 3x = 2 \\ \frac{3}{2}y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \end{cases}$

Donc $x = \frac{4}{3}$ et $y = -\frac{8}{3}$.

44. a) $\begin{cases} 1 + 3x = 0 \\ 2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases}$

Donc $x = -\frac{1}{3}$ et $y = 2$.

b) $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + x + 7 - 5 = 0 \\ y = x + 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{13}{2} \end{cases}$

Donc $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{13}{2}$.

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x - 3(2 - x) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x - 6 + 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5} \\ x = \frac{7}{5} \end{cases}$

Donc $x = \frac{7}{5}$ et $y = \frac{3}{5}$.

Calculer la somme et le produit de deux nombres complexes

45. a) $4 - 7\text{i}$ **b)** $3 - 4\text{i}$

c) $4 + 2\text{i}$ **d)** $-1 + \frac{5}{3}\text{i}$

46. a) $z_1 = 6 - \frac{3}{4}\text{i}$

Donc $\text{Re}(z_1) = 6$ et $\text{Im}(z_1) = -\frac{3}{4}$.

b) $z_2 = 1 + 3\text{i}$

Donc $\text{Re}(z_2) = 1$ et $\text{Im}(z_2) = 3$.

c) $z_3 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\text{i}$

Donc $\text{Re}(z_3) = \frac{1}{4}$ et $\text{Im}(z_3) = -\frac{2}{3}$.

d) $z_4 = \frac{3}{4} - \frac{4}{3}\text{i}$

Donc $\text{Re}(z_4) = \frac{3}{4}$ et $\text{Im}(z_4) = -\frac{4}{3}$.

47. a) $6 + 12\text{i}$ **b)** $-1 + 3\text{i}$

c) $-2 - 3\text{i}$ **d)** $5 + \text{i}$

48. a) $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \text{i}(1 + \sqrt{6})$ **b)** $\frac{11}{5} + \frac{83}{10}\text{i}$

49. a) $z_1 = 2^2 + 4\text{i} + \text{i}^2 = 3 + 4\text{i}$

b) $z_2 = 2^2 - 4\text{i} + \text{i}^2 = 3 - 4\text{i}$

c) $z_3 = 2^2 - \text{i}^2 = 5$

d) $z_4 = 2\text{i} - 4 + \text{i}^2 - 2\text{i} = -5$

50. a) Posons $z_1 = (2\text{i} - 3)(3 - 2\text{i})$.

$z_1 = 6\text{i} - 4\text{i}^2 - 9 + 6\text{i} = -5 + 12\text{i}$

Donc $\text{Re}(z_1) = -5$ et $\text{Im}(z_1) = 12$.

b) Posons $z_2 = \text{i}(3 + \text{i})$.

$z_2 = 3\text{i} + \text{i}^2 = -1 + 3\text{i}$

Donc $\text{Re}(z_2) = -1$ et $\text{Im}(z_2) = 3$.

c) Posons $z_3 = (2 + \text{i})(1 - 2\text{i}) + 1 - 5\text{i}$.

$z_3 = 2 - 4\text{i} + \text{i} - 2\text{i}^2 + 1 - 5\text{i} = 5 - 8\text{i}$

Donc $\text{Re}(z_3) = 5$ et $\text{Im}(z_3) = -8$.

d) Posons $z_4 = (1 + i)(1 - i)(2 - 3i)$.

$z_3 = (1 - i^2)(2 - 3i) = 2(2 - 3i) = 4 - 6i$

Donc $\text{Re}(z_4) = 4$ et $\text{Im}(z_4) = -6$.

51. a) $(a + ib)^2 = a^2 + 2 \times a \times ib + (ib)^2$
$= a^2 - b^2 + i \times 2ab$

b) $(a - ib)^2 = a^2 - 2 \times a \times ib + (ib)^2$
$= a^2 - b^2 - i \times 2ab$

c) $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$

d) $(a + ib)(2a - ib) = 2a^2 - iab + i2ab - i^2b^2$
$= 2a^2 + b^2 + iab$

52. a) Posons $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

$z \times i = 3 + i \Leftrightarrow (a + ib) \times i = 3 + i \Leftrightarrow ia - b = 3 + i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc $S = \{1 - 3i\}$.

b) Posons $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

$$z(1 + i) = 7 + 3i \Leftrightarrow (a + ib)(1 + i) = 7 + 3i$$
$$\Leftrightarrow a + ia + ib + i^2b = 7 + 3i$$
$$\Leftrightarrow a - b + i(a + b) = 7 + 3i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 7 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ b + 7 + b = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}$$

Donc $S = \{5 - 2i\}$.

53. a) Posons $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

$$(4 + i)z = i \Leftrightarrow (4 + i)(a + ib) = i$$
$$\Leftrightarrow 4a + i4b + ia + i^2b = i$$
$$\Leftrightarrow 4a - b + i(a + 4b) = i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 0 \\ a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ a + 4 \times 4a = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{4}{17} \\ a = \dfrac{1}{17} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{\dfrac{1}{17} + \dfrac{4}{17}i\right\}$.

b) Posons $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

$$(i - 2)z = 3 \Leftrightarrow (i - 2)(a + ib) = 3$$
$$\Leftrightarrow ia + i^2b - 2a - i2b = 3$$
$$\Leftrightarrow -2a - b + i(a - 2b) = 3$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b = 3 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(2b) - b = 3 \\ a = 2b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{3}{5} \\ a = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{-\dfrac{6}{5} - \dfrac{3}{5}i\right\}$.

Calculer l'inverse et le quotient de nombres complexes

54. a) $z_1 = \dfrac{-2i}{2i \times (-2i)} = \dfrac{-2i}{-4i^2} = \dfrac{-2i}{4} = -\dfrac{1}{2}i$

b) $z_2 = \dfrac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \dfrac{2 - 3i}{2^2 - (3i)^2} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$

c) $z_3 = \dfrac{5 + 2i}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \dfrac{5 + 2i}{5^2 - (2i)^2} = \dfrac{5}{29} + \dfrac{2}{29}i$

d) $z_4 = \dfrac{2i + 5}{(2i - 5)(2i + 5)} = \dfrac{2i + 5}{(2i)^2 - 5^2} = -\dfrac{5}{29} - \dfrac{2}{29}i$

55. a) $z_1 = \dfrac{i}{(-i)i} = \dfrac{i}{-i^2} = i$

Donc $\text{Re}(z_1) = 0$ et $\text{Im}(z_1) = 1$.

b) $z_2 = \dfrac{4 - 7i}{(4 + 7i)(4 - 7i)} = \dfrac{4 - 7i}{4^2 - (7i)^2} = \dfrac{4}{65} - \dfrac{7}{65}i$

Donc $\text{Re}(z_2) = \dfrac{4}{65}$ et $\text{Im}(z_2) = -\dfrac{7}{65}$.

c) $z_3 = \dfrac{10 + 3i}{(10 - 3i)(10 + 3i)} = \dfrac{10 + 3i}{10^2 - (3i)^2} = \dfrac{10}{109} + \dfrac{3}{109}i$

Donc $\text{Re}(z_3) = \dfrac{10}{109}$ et $\text{Im}(z_3) = \dfrac{3}{109}$.

d) $z_4 = \dfrac{\sqrt{2} - i}{(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)} = \dfrac{\sqrt{2} - i}{(\sqrt{2})^2 - i^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3}i$

Donc $\text{Re}(z_4) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $\text{Im}(z_4) = -\dfrac{1}{3}$.

56. a) $z_1 = \dfrac{5(-2i)}{2i(-2i)} = \dfrac{-10i}{-4i^2}$

Donc $z_1 = -\dfrac{5}{2}i$.

b) $z_2 = \dfrac{(1-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i-2i+3i^2}{2^2-(3i)^2}$

Donc $z_2 = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i$.

c) $z_3 = \dfrac{(1+i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \dfrac{5+2i+5i+2i^2}{5^2-(2i)^2}$

Donc $z_3 = \dfrac{3}{29} + \dfrac{7}{29}i$.

d) $z_4 = \dfrac{(3+2i)(2i+5)}{(2i-5)(2i+5)} = \dfrac{6i+15+4i^2+10i}{(2i)^2-5^2}$

Donc $z_4 = -\dfrac{11}{29} - \dfrac{16}{29}i$.

57. a) $z_1 = \dfrac{7(-i)}{i(-i)} = \dfrac{-7i}{-i^2}$

Donc $z_1 = -7i$.

b) $z_2 = \dfrac{(7-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{21-28i-6i+8i^2}{3^2-(4i)^2}$

Donc $z_2 = \dfrac{13}{25} - \dfrac{34}{25}i$.

c) $z_3 = \dfrac{(1+i\sqrt{2})(1+i\sqrt{2})}{(1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{2})} = \dfrac{1+i2\sqrt{2}+(i\sqrt{2})^2}{1^2-(i\sqrt{2})^2}$

Donc $z_3 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$.

d) $z_4 = \dfrac{(i+2)(i+3)}{(i-3)(i+3)} = \dfrac{i^2+3i+2i+6}{i^2-3^2}$

Donc $z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

58. a) $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{15-8i} = \dfrac{15+8i}{(15-8i)(15+8i)}$

Donc $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{15}{289} + \dfrac{8}{289}i$.

b) $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{23+14i} = \dfrac{23-14i}{(23+14i)(23-14i)}$

Donc $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{23}{725} - \dfrac{14}{725}i$.

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(15-8i)(23-14i)}{(23+14i)(23-14i)}$
$= \dfrac{345-210i-184i+112i^2}{23^2-(14i)^2}$

Donc $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{233}{725} - \dfrac{394}{725}i$.

d) $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{(23+14i)(15+8i)}{(15-8i)(15+8i)}$
$= \dfrac{345+184+210i+112i^2}{15^2-(8i)^2}$

Donc $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{233}{289} + \dfrac{394}{289}i$.

59. a) $z_1 = \dfrac{6+4i+9i+6i^2}{5+5i} = \dfrac{13i}{5+5i}$

$z_1 = \dfrac{13i(5-5i)}{(5+5i)(5-5i)} = \dfrac{65i-65i^2}{5^2-(5i)^2}$

Donc $z_1 = \dfrac{65}{50} + \dfrac{65}{50}i = \dfrac{13}{10} + \dfrac{13}{10}i$.

Donc $\text{Re}(z_1) = \dfrac{13}{10}$ et $\text{Im}(z_1) = \dfrac{13}{10}$.

b) $z_2 = \dfrac{6+4i+9i+6i^2}{-1+i} = \dfrac{13i}{-1+i}$

$z_2 = \dfrac{13i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \dfrac{-13i-13i^2}{(-1)^2-i^2}$

Donc $z_2 = \dfrac{13}{2} - \dfrac{13}{2}i$.

Donc $\text{Re}(z_2) = \dfrac{13}{2}$ et $\text{Im}(z_2) = -\dfrac{13}{2}$.

60. a) $(3-5i)z = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{3-5i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3+5i}{(3-5i)(3+5i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3+5i}{3^2-(5i)^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3}{34} + \dfrac{5}{34}i$

Donc $S = \left\{\dfrac{3}{34} + \dfrac{5}{34}i\right\}$.

b) $(-2\mathrm{i})z = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{-2\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{2\mathrm{i}}{(-2\mathrm{i})(2\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2\mathrm{i}}{-4\mathrm{i}^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

Donc $S = \left\{\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

61. a) $\mathrm{i}z = 1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{-\mathrm{i}^2} \Leftrightarrow z = -1 - \mathrm{i}$

Donc $S = \{-1 - \mathrm{i}\}$.

b) $(2 + \mathrm{i})z = 1 + 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(1+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2-\mathrm{i}+6\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{2^2-\mathrm{i}^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{5+5\mathrm{i}}{5} \Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}$

Donc $S = \{1 + \mathrm{i}\}$.

Déterminer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe

62. a) $9 - \mathrm{i}$ **b)** $13 + 24\mathrm{i}$

c) $-2 - 5\mathrm{i}$ **d)** $\dfrac{3}{7} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

63. a) $\sqrt{7} - \mathrm{i}\pi$ **b)** $3 + \sqrt{2} - 5\mathrm{i}$

c) $\dfrac{4}{3} + 2$ **d)** $\mathrm{i}\sqrt{2}$

64. a) $3\overline{z}$ **b)** $\overline{z} + 5 + \mathrm{i}$

c) $(\overline{z})^2 + 2\overline{z}$ **d)** $\dfrac{\overline{z}+1}{3}$

e) $-\mathrm{i}\overline{z} + 2$ **f)** $\dfrac{-\mathrm{i}-\overline{z}}{\overline{z}+1}$

65. a) $2\overline{z} - z$ **b)** $\overline{z} + \dfrac{1}{z}$

c) $(\overline{z})^2 + z^2$ **d)** $-\mathrm{i}z$

e) $\overline{z} - \mathrm{i}z$ **f)** $-2z$

66. Voir manuel page 18.

67. 1. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

2. z est réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow 2\ \mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z) = 0$

$\Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$

68. a) Posons $Z = z^2 + \overline{z}^2$

$\overline{Z} = \overline{z^2 + \overline{z}^2} = \overline{z}^2 + \overline{\overline{z}}^2 = \overline{z}^2 + z^2 = Z$

Donc Z est un nombre réel.

b) Posons $Z = z^2 - \overline{z}^2$

$\overline{Z} = \overline{z^2 - \overline{z}^2} = \overline{z}^2 - \overline{\overline{z}}^2 = \overline{z}^2 - z^2 = -(z^2 - \overline{z}^2) = -Z$

Donc Z est un nombre imaginaire pur.

69. Posons $Z = \dfrac{z-\overline{z}}{z\times\overline{z}}$

$\overline{Z} = \overline{\left(\dfrac{z-\overline{z}}{z\times\overline{z}}\right)} = \dfrac{\overline{z}-\overline{\overline{z}}}{\overline{z}\times z} = \dfrac{\overline{z}-z}{\overline{z}\times z} = \dfrac{-(z-\overline{z})}{z\times\overline{z}} = -Z$

Donc Z est un nombre imaginaire pur.

70. a) $\overline{z} = 2\overline{z} + 1 \Leftrightarrow \overline{z} = -1 \Leftrightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{-1} \Leftrightarrow z = -1$

Donc $S = \{-1\}$.

b) $-\overline{z} = 1 + \mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = -1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow z = -1 + \mathrm{i}$

Donc $S = \{-1 + \mathrm{i}\}$.

c) Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$z + 5\overline{z} = 7 - 8\mathrm{i} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b + 5(a - \mathrm{i}b) = 7 - 8\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 6a - \mathrm{i}4b = 7 - 8\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 7 \\ -4b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{6} \\ b = 2 \end{cases}$

Donc $S = \left\{\dfrac{7}{6} + 2\mathrm{i}\right\}$.

d) Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$z = 3\overline{z} + 5 - \mathrm{i} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = 3(a - \mathrm{i}b) + 5 - \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = 3a + 5 + \mathrm{i}(-3b - 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3a + 5 \\ b = -3b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{2} \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Donc $S = \left\{-\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{4}\mathrm{i}\right\}$.

71. a) Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$z + \overline{z} = 3\mathrm{i} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 3\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 2a = 3\mathrm{i} \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

C'est impossible car a est un réel.

Donc S = $\varnothing$.

b) Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$(3 + \mathrm{i})\overline{z} + 2z = 0 \Leftrightarrow (3 + \mathrm{i})(a - \mathrm{i}b) + 2(a + \mathrm{i}b) = 0$

$\Leftrightarrow 3a - \mathrm{i}3b + \mathrm{i}a - \mathrm{i}^2b + 2a + \mathrm{i}2b = 0$

$\Leftrightarrow 5a + b + \mathrm{i}(a - b) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + a = 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc S = {0}.

c) $-2\overline{z} + (2 + \mathrm{i})\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z}(-2 + 2 + \mathrm{i}) = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})} \Leftrightarrow \overline{z} = -\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{-\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$

Donc S = {i}.

d) Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$2\mathrm{i}\overline{z} = 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i}z \Leftrightarrow 2\mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) = 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i}(a + \mathrm{i}b)$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{i}a - 2\mathrm{i}^2b = 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i}a + 2\mathrm{i}^2b$

$\Leftrightarrow 2b + \mathrm{i} \times 2a = -2b + \mathrm{i}(3 + 2a)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -2b \\ 2a = 3 + 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}$

Donc S = $\varnothing$.

72. 1. $f(z) = 3(a - \mathrm{i}b) + \mathrm{i} - 2$

$= 3a - 2 + \mathrm{i}(1 - 3b)$

$\mathrm{Re}(f(z)) = 3a - 2$

$\mathrm{Im}(f(z)) = 1 - 3b$

2. $f(z) = z \Leftrightarrow 3\overline{z} + \mathrm{i} - 2 = z$

$\Leftrightarrow 3a - 2 + \mathrm{i}(1 - 3b) = a + \mathrm{i}b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 = a \\ 1 - 3b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Donc $f(z) = z$ a pour solution $z = 1 + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$.

73. 1. $f(z) = 3(a - \mathrm{i}b) + a + \mathrm{i}b - 5$

$= 4a - 5 - \mathrm{i}2b$

$\mathrm{Re}(f(z)) = 4a - 5$

$\mathrm{Im}(f(z)) = -2b$

2. a) $f(z) = 2 \Leftrightarrow 4a - 5 - \mathrm{i}2b = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 5 = 2 \\ -2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{4} \\ b = 0 \end{cases}$

Donc S = $\left\{\dfrac{7}{4}\right\}$.

b) $f(z) = 4\mathrm{i} \Leftrightarrow 4a - 5 - \mathrm{i}2b = 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 5 = 0 \\ -2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{4} \\ b = -2 \end{cases}$

Donc S = $\left\{\dfrac{5}{4} - 2\mathrm{i}\right\}$.

c) $f(z) = z \Leftrightarrow 4a - 5 - \mathrm{i}2b = a + \mathrm{i}b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 5 = a \\ -2b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{3} \\ b = 0 \end{cases}$

Donc S = $\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

Utiliser la formule du binôme de Newton

74. 1. a) $(2 + \mathrm{i})^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^k \mathrm{i}^{4-k} = -7 + 24\mathrm{i}$

b) $(1 - 2\mathrm{i})^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 1^k (-2\mathrm{i})^{5-k} = 41 + 38\mathrm{i}$

2. $(x + 3)^8 = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} x^k 3^{8-k} \binom{8}{k}$

Donc le coefficient de x^6 est $3^{8-6}\dbinom{8}{6}$, soit 252.

75. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$

76. 1. $(x - 1)^3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k (-1)^{3-k} = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

2. $999^3 = (1\,000 - 1)^3$

$= 1000^3 - 3 \times 1\,000^2 + 3 \times 1\,000 - 1$

$= 997\,002\,999$

77. 1. $(x+1)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^k 1^{4-k} = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$(x-1)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^k(-1)^{4-k} = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Donc $(x+1)^4 - (x-1)^4 = 8x^3 + 8x$

2. $1\,001^4 - 999^4 = (1\,000+1)^4 - (1\,000-1)^4$
$= 8 \times 1\,000^3 + 8 \times 1\,000$
$= 8\,000\,008\,000$

78. 1. $z = (1+\mathrm{i}b)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}1^k(\mathrm{i}b)^{3-k}$
$= (\mathrm{i}b)^3 + 3(\mathrm{i}b)^2 + 3(\mathrm{i}b) + 1$
$= -\mathrm{i}b^3 - 3b^2 + 3\mathrm{i}b + 1 = 1 - 3b^2 + \mathrm{i}(-b^3 + 3b)$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -b^3 + 3b = 0 \Leftrightarrow b \times (-b^2 + 3) = 0$
$\Leftrightarrow b = 0$ ou $-b^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $b^2 = 3$
$\Leftrightarrow b = 0$ ou $b = -\sqrt{3}$ ou $b = \sqrt{3}$

z est réel lorsque $b = 0$, $b = -\sqrt{3}$ ou $b = \sqrt{3}$.

2. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow b = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $b = \sqrt{\frac{1}{3}}$

z est imaginaire pur lorsque $b = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $b = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

79. a) $z^2 = -64$. Dans $\mathbb{R}$, $S = \varnothing$. Dans $\mathbb{C}$, $S = \{-8\mathrm{i}\,;\,8\mathrm{i}\}$.

b) $z^2 = 3$. Dans $\mathbb{R}$, $S = \{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}$.

Dans $\mathbb{C}$. $S = \{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}$.

c) $z^2 = 6$. Dans $\mathbb{R}$, $S = \{-\sqrt{6}\,;\,\sqrt{6}\}$.

Dans $\mathbb{C}$. $S = \{-\sqrt{6}\,;\,\sqrt{6}\}$.

d) $z^2 = -13$. Dans $\mathbb{R}$, $S = \varnothing$.

Dans $\mathbb{C}$, $S = \{-\mathrm{i}\sqrt{13}\,;\,\mathrm{i}\sqrt{13}\}$.

80. a) $z^2 - 3z = 0 \Leftrightarrow z(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z - 3 = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 3$

Donc $S = \{0\,;\,3\}$.

b) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.

$z_1 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

Donc $S = \left\{\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

c) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 5 = -64 < 0$.

$z_1 = \frac{-(-4)-\mathrm{i}\sqrt{64}}{2\times 4}$ et $z_2 = \frac{-(-4)+\mathrm{i}\sqrt{64}}{2\times 4}$

Donc $S = \left\{\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,;\,\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right\}$.

d) $\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times 5 = 76 > 0$.

$z_1 = \frac{-6-\sqrt{76}}{2\times(-2)}$ et $z_2 = \frac{-6+\sqrt{76}}{2\times(-2)}$

Donc $S = \left\{\frac{3+\sqrt{19}}{2}\,;\,\frac{3-\sqrt{19}}{2}\right\}$.

81. a) $z^2 = -7z \Leftrightarrow z^2 + 7z = 0 \Leftrightarrow z(z+7) = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z + 7 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = -7$

Donc $S = \{0\,;\,-7\}$.

b) $2z^2 - 3z + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0$.

$z_1 = \frac{-(-3)-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2\times 2}$ et $z_2 = \frac{-(-3)+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2\times 2}$

Donc $S = \left\{\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}\,;\,\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}\right\}$.

c) $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$.

$z_1 = \frac{-(-2)-\mathrm{i}\sqrt{4}}{2\times 1}$ et $z_2 = \frac{-(-2)+\mathrm{i}\sqrt{4}}{2\times 1}$

Donc $S = \{1 - \mathrm{i}\,;\,1 + \mathrm{i}\}$.

d) $-8 = 3z^2 \Leftrightarrow z^2 = -\frac{8}{3}$. Donc $S = \left\{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{8}{3}}\,;\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{8}{3}}\right\}$.

82. a) $3z^2 - 2z - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0$.

$z_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times 3}$ et $z_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times 3}$

Donc $S = \left\{-\frac{1}{3}\,;\,1\right\}$.

b) $2z^2 - z - 3 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 > 0.$

$z_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 2}$ et $z_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 2}$

Donc $S = \left\{-1 ; \dfrac{3}{2}\right\}$.

c) $\dfrac{z^2 + 9}{3} = 0 \Leftrightarrow z^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -9$

Donc $S = \{-3i ; 3i\}$.

d) $\dfrac{3 - z^2}{3} = 3 \Leftrightarrow 3 - z^2 = 9 \Leftrightarrow z^2 = -6$

Donc $S = \left\{-i\sqrt{6} ; i\sqrt{6}\right\}$.

Factoriser un polynôme

83. a) $z^2 - 2^2 = (z - 2)(z + 2)$

b) $z^3 - 3^3 = (z - 3)(az^2 + bz + c)$

Or $(z - 3)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 3a) z^2 + (c - 3b) z - 3c$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 0 \\ c - 3b = 0 \\ -3c = -3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 9 \\ c = 9 \end{cases}$

Donc $z^3 - 3^3 = (z - 3)(z^2 + 3z + 9)$.

84. 1. $z^3 + 3^3 = z - (-3)^3$

2. Donc $z^3 + 3^3 = (z - (-3))(az^2 + bz + c)$

$= (z + 3)(az^2 + bz + c)$

Or $(z + 3)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b + 3a) z^2 + (c + 3b) z + 3c$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b + 3a = 0 \\ c + 3b = 0 \\ 3c = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 9 \\ c = 9 \end{cases}$

Donc $z^3 + 3^3 = (z + 3)(z^2 - 3z + 9)$.

85. 1. $i^3 = i^2 \times i = -i$

2. $z^3 + i = z^3 - i^3$

Donc $z^3 + i = (z - i)(az^2 + bz + c)$.

Or $(z - i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$.

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = 0 \\ c - ib = 0 \\ -ic = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = i \\ c = i^2 \\ c = -1 \end{cases}$

Donc $z^3 + i = (z - i)(z^2 + iz - 1)$.

86. 1. $P(1) = 1^3 - 1^2 + 2 - 2 = 0$.

Donc 1 est une racine de P.

2. P est un polynôme de degré 3, donc

$P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$.

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b = 2 \\ -c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ c = 2 \end{cases}$

Donc $P(z) = (z - 1)(z^2 + 2)$.

87. 1. $P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 + 3(-1) + 4$

$P(-1) = 0$. Donc -1 est une racine de P.

2. P est un polynôme de degré 4, donc

$P(z) = (z + 1)(az^3 + bz^2 + cz + d)$

$P(z) = az^4 + (b + a)z^3 + (c + b)z^2 + (d + c)z + d$.

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 2 \\ c + b = 0 \\ d + c = 3 \\ d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 4 \\ d = 4 \end{cases}$

Donc $P(z) = (z + 1)(z^3 + z^2 - z + 4)$.

88. 1. $P(-2) = -2(-2)^3 + 2(-2)^2 + 20(-2) + 16$

$P(-2) = 0$. Donc -2 est une racine de P.

2. P est un polynôme de degré 3, donc

$P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + (b + 2a)z^2 + (c + 2b)z + 2c$.

Par identification $\begin{cases} a = -2 \\ b + 2a = 2 \\ c + 2b = 20 \\ 2c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \\ c = 8 \\ c = 8 \end{cases}$

Donc $P(z) = (z + 2)(-2z^2 + 6z + 8)$.

Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels

89. 1. $P(3) = 3^3 - 5 \times 3^2 + 9 \times 3 - 9$

$P(3) = 0$. Donc 3 est une racine de P.

2. $P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + (b - 3a)z^2 + (c - 3b)z - 3c$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -5 \\ c - 3b = 9 \\ -3c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \\ c = 3 \end{cases}$

Donc $P(z) = (z - 3)(z^2 - 2z + 3)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z^2 - 2z + 3) = 0$

$\Leftrightarrow z - 3 = 0$ ou $z^2 - 2z + 3 = 0$

Résolvons $z^2 - 2z + 3 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$.

$z_1 = \dfrac{2 - \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \dfrac{2 + \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$

Donc les racines de P sont :

$$3 ; 1 - \mathrm{i}\sqrt{2} ; 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

3. $P(z) = (z - 3)(z - (1 - \mathrm{i}\sqrt{2}))(z - (1 + \mathrm{i}\sqrt{2}))$

$P(z) = (z - 3)(z - 1 + \mathrm{i}\sqrt{2})(z - 1 - \mathrm{i}\sqrt{2})$

90. 1. $3^3 - 3 \times 3^2 + 4 \times 3 - 12 = 0$

Donc 3 est une solution de (E).

2. Posons $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.

3 est une racine de P, donc

$P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + (b - 3a)z^2 + (c - 3b)z - 3c$.

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -3 \\ c - 3b = 4 \\ -3c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 4 \\ c = 4 \end{cases}$

Donc $P(z) =(z - 3)(z^2 + 4)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z^2 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z - 3 = 0$ ou $z^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z = 3$ ou $z^2 = -4$

$\Leftrightarrow z = 3$ ou $z = 2\mathrm{i}$ ou $z = -2\mathrm{i}$

Donc l'ensemble de solutions de (E) est :

$S = \{3 ; 2\mathrm{i} ; -2\mathrm{i}\}$.

91. 1. $1^3 - 1 = 0$.

Donc 1 est une solution de (E′)

2. Posons $P(z) = z^3 - 1$.

1 est une racine de P, donc

$P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$.

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $P(z) = (z - 1)(z^2 + z + 1)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z - 1 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

Résolvons $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.

$z_1 = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

Donc l'ensemble des solutions de (E′) est :

$S = \left\{1 ; \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

92. 1. $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$.

Donc -1 est une solution de (E″)

2. Posons $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$.

-1 est une racine de P, donc

$P(z) = (z + 1)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + (b + a)z^2 + (c + b)z + c$.

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 \\ c + b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $P(z) = (z + 1)(z^2 + 1)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 1)(z^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z + 1 = 0$ ou $z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = -1$ ou $z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = -1$ ou $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$

Donc l'ensemble des solutions de (E″) est :

$S = \{1 ; \mathrm{i} ; -\mathrm{i}\}$.

Exercices d'entraînement p. 31-33

Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$

93. 1.

$$i^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 4k, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ i \text{ si } n = 4k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -1 \text{ si } n = 4k+2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -i \text{ si } n = 4k+3, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété :

$$i^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 4k, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ i \text{ si } n = 4k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -1 \text{ si } n = 4k+2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -i \text{ si } n = 4k+3, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Initialisation : pour $n = 0$, $i^0 = 1$ et $n = 4 \times 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons $P(n + 1)$.

$$i^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 4k, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ i \text{ si } n = 4k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -1 \text{ si } n = 4k+2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -i \text{ si } n = 4k+3, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Or $i^{n+1} = i^n \times i$. Donc

$$i^{n+1} = \begin{cases} i \text{ si } n = 4k, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ i^2 \text{ si } n = 4k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -i \text{ si } n = 4k+2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -i^2 \text{ si } n = 4k+3, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$i^{n+1} = \begin{cases} i \text{ si } n+1 = 4k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -1 \text{ si } n+1 = 4k+2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -i \text{ si } n+1 = 4k+3, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ 1 \text{ si } n+1 = 4k+4, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$i^{n+1} = \begin{cases} 1 \text{ si } n+1 = 4k', \text{ avec } k' \in \mathbb{N} \\ i \text{ si } n+1 = 4k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -1 \text{ si } n+1 = 4k+2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -i \text{ si } n+1 = 4k+3, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. $i^{2021} = i^{4\times 505+1} = i$

94. 1. Vraie. Si le dénominateur est non nul.

Posons $z = ib$ et $z' = ib'$ avec avec $b' \neq 0$.

$\frac{z}{z'} = \frac{ib}{ib'} = \frac{b}{b'}$, donc $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$.

2. Fausse. $z = 2$ et $z' = 4$. $\frac{z}{z'} = \frac{2}{4} \in \mathbb{R}$

95. Posons $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

$(1 - i)z = (1 - i)(a + ib) = a + ib - ia - i^2b$

$= a + b + i(b - a)$

$(1 - i)z$ est réel si, et seulement si, $b - a = 0$, soit $a = b$.

96. 1. $z_1 \times z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$

$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$

$= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2)$

2.

```
def f(a1,b1,a2,b2):
    return([a1*a2-b1*b2,a1*b2+b1*a2])
```

Remarque: par défaut un programme Python ne fait pas de calcul formel, il renverra donc une valeur approchée des parties réelles et imaginaires.

97. 1. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a_1 + ib_1} = \frac{a_1 - ib_1}{(a_1 + ib_1)(a_1 - ib_1)}$

$= \frac{a_1 - ib_1}{a_1^2 - i^2b_1^2} = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - i\frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2}$

2.

```
def g(a1,b1):
   return([a1/(a1**2+b1**2),-b1/(a1**2+b1**2)])
```

98. 1. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)}$

$= \frac{a_1a_2 - ia_1b_2 + ib_1a_2 - i^2b_1b_2}{a_2^2 - i^2b_2^2}$

$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(-a_1b_2 + b_1a_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$

2.

```
def h(a1,b1,a2,b2):
    return([(a1*a2+b1*b2)/(a2**2+b2**2),
(a2*b1-a1*b2)/(a2**2+b2**2)])
```

99. a) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2 = \frac{1^2}{(1-i)^2} = \frac{1}{1-2i+i^2} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{(-2i)i} = \frac{1}{2}i$

b) $7+\dfrac{3+10i}{5-5i}=\dfrac{7(5-5i)+3+10i}{5-5i}=\dfrac{38-25i}{5-5i}$

$=\dfrac{(38-25i)(5+5i)}{(5-5i)(5+5i)}$

$=\dfrac{190+190i-125i-125i^2}{5^2-(5i)^2}$

$=\dfrac{315+65i}{50}=\dfrac{63}{10}+\dfrac{13}{10}i$

c) $\dfrac{1}{3-2i}+\dfrac{2i}{2-i}=\dfrac{1(2-i)+2i(3-2i)}{(3-2i)(2-i)}=\dfrac{2-i+6i-4i^2}{6-3i-4i+2i^2}$

$=\dfrac{6+5i}{4-7i}=\dfrac{(6+5i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)}$

$=\dfrac{24+42i+20i+35i^2}{4^2-(7i)^2}=\dfrac{-11+62i}{65}$

$=-\dfrac{11}{65}+\dfrac{62}{65}i$

d) $\dfrac{2-i}{3+i}-\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{(2-i)(1-i)-2(3+i)}{(3+i)(1-i)}$

$=\dfrac{2-2i-i+i^2-6-2i}{3-3i+i-i^2}=\dfrac{-5-5i}{4-2i}$

$=\dfrac{(-5-5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}$

$=\dfrac{-20-10i-20i-10i^2}{4^2-(2i)^2}$

$=\dfrac{-10-30i}{20}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

Conjugué

100. a) $z_1=4-\dfrac{5}{3}i$. Donc $\overline{z_1}=4+\dfrac{5}{3}i$

b) $z_2=3+\sqrt{2}-5i$. Donc $\overline{z_2}=3+\sqrt{2}+5i$

c) $z_3=\dfrac{5}{2}+2i$. Donc $\overline{z_3}=\dfrac{5}{2}-2i$

d) $z_4=5\sqrt{2}+15i-i\sqrt{2}-3i^2=5\sqrt{2}+3+i(15-\sqrt{2})$

Donc $\overline{z_4}=5\sqrt{2}+3+i(-15+\sqrt{2})$

101. 1. $z=\dfrac{(2+3i)(7+i)}{(7-i)(7+i)}=\dfrac{14+2i+21i+3i^2}{49-i^2}$

$=\dfrac{11}{50}+\dfrac{23}{50}i$

2. $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)=\dfrac{11}{25}$

$z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)=\dfrac{23}{25}i$

102. Pour tout nombre complexe z, posons

$Z=z-\overline{z}+\dfrac{3}{2}i$

$\overline{Z}=\overline{z-\overline{z}+\dfrac{3}{2}i}=\overline{z}-\overline{\overline{z}}-\dfrac{3}{2}i=\overline{z}-z-\dfrac{3}{2}i=-\left(z-\overline{z}+\dfrac{3}{2}i\right)$

$=-Z$

Donc Z est un nombre imaginaire pur.

103. Pour tout nombre complexe z, posons

$Z=(z\times\overline{z}\times i)^3$.

$\overline{Z}=\overline{(z\times\overline{z}\times i)^3}=(\overline{z\times\overline{z}\times i})^3=(\overline{z}\times\overline{\overline{z}}\times(-i))^3$

$=-(\overline{z}\times z\times i)^3=-Z$

Donc Z est un nombre imaginaire pur.

104. Posons $z=a+ib$, avec a et b deux réels.

$Z=a+ib+2(a-ib)=3a-ib$

a) Z est réel $\Leftrightarrow -b=0\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow z$ est réel

b) Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow 3a=0\Leftrightarrow a=0$

$\Leftrightarrow z$ est imaginaire pur

105. Posons $z=a+ib$, avec a et b deux réels.

$Z=\dfrac{a+ib+1}{a-ib+1}=\dfrac{a+1+ib}{a+1-ib}=\dfrac{(a+1+ib)(a+1+ib)}{(a+1-ib)(a+1+ib)}$

$=\dfrac{(a+1)^2+2(a+1)ib+(ib)^2}{(a+1)^2-(ib)^2}$

$=\dfrac{(a+1)^2-b^2}{(a+1)^2+b^2}+i\dfrac{2(a+1)b}{(a+1)^2+b^2}$

a) Z est réel $\Leftrightarrow\dfrac{2(a+1)b}{(a+1)^2+b^2}=0$

$\Leftrightarrow 2(a+1)b=0$

$\Leftrightarrow a+1=0$ ou $b=0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=-1$ ou z réel

b) Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow\dfrac{(a+1)^2-b^2}{(a+1)^2+b^2}=0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2-b^2=0$

$\Leftrightarrow b^2=(a+1)^2$

$\Leftrightarrow b=a+1$ ou $b=-(a+1)$

Donc Z est imaginaire pur, si et seulement si, z est de la forme $a+i(a+1)$, ou $a-i(a+1)$ avec $a\in\mathbb{R}$.

106. 1. Voir cours page 18.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $z \in \mathbb{C}$,

notons $Z = z^n + \overline{z}^n$

$\overline{Z} = \overline{z^n + \overline{z}^n} = \overline{z^n} + \overline{\overline{z}^n} = \overline{z}^n + \overline{\overline{z}}^n = \overline{z}^n + z^n = Z$

Donc Z est un nombre réel, soit $z^n + \overline{z}^n$ est un nombre réel.

3. $(2-i)^{2n} + (3+4i)^n = ((2-i)^2)^n + (3+4i)^n$

$= (4 - 4i + i^2)^n + (3+4i)^n$

$= (3-4i)^n + (3+4i)^n$

$= (3-4i)^n + (\overline{3-4i})^n$

Donc d'après la question 2, pour tout entier naturel n, $(2-i)^2n + (3+4i)^n$ est un nombre réel.

Équations dans $\mathbb{C}$

107. 1. $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$

2. $S = \left\{1 ; \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

3. $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. a) $j^3 - 1 = 0$, donc $j^3 = 1$.

b) $(j-1)(j^2+j+1) = 0$. Or $j \neq 1$, donc $j^2 + j + 1 = 0$.

c) $j^2 = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1 - 2i\sqrt{3} + i^2 \times 3}{4}$

Donc $j^2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$.

d) $\dfrac{1}{j} = \dfrac{2}{-1+i\sqrt{3}} = \dfrac{2 \times (-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}$

Donc $\dfrac{1}{j} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$.

108. a) $(1+i)z = 1 - i \Leftrightarrow z = \dfrac{1-i}{1+i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1-2i+i^2}{1^2 - i^2} \Leftrightarrow z = -i$

Donc $S = \{-i\}$.

b) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i \Leftrightarrow z + 1 = 2i(z-1) \Leftrightarrow z(1-2i) = -1-2i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-1-2i}{1-2i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(-1-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-1-2i-2i-4i^2}{1-(2i)^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{3-4i}{5}$

Donc $S = \left\{\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i\right\}$.

c) $(2z + 1 - i) \times (iz + 3) = 0 \Leftrightarrow 2z + 1 - i = 0$ ou $iz + 3 = 0$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-1+i}{2}$ ou $z = -\dfrac{3}{i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-1+i}{2}$ ou $z = -\dfrac{3i}{i^2}$

$\Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ou $z = 3i$

Donc $S = \left\{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i ; 3i\right\}$.

d) $\dfrac{iz+1}{z-3i} = 2 + i \Leftrightarrow iz + 1 = (2+i)(z-3i)$

$\Leftrightarrow iz + 1 = 2z - 6i + iz - 3i^2$

$\Leftrightarrow 2z = 1 + 6i + 3i^2$

$\Leftrightarrow 2z = -2 + 6i \Leftrightarrow z = -1 + 3i$

Donc $S = \{-1 + 3i\}$.

109. a) $-2iz = 3z + 1 \Leftrightarrow z(-2i - 3) = 1$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{-3-2i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3+2i}{(-3-2i)(-3+2i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3+2i}{(-3)^2 - (2i)^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3+2i}{13}$

Donc $S = \left\{-\dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i\right\}$.

b) $\dfrac{2i\overline{z} + i}{z - 1 - i} = 3 \Leftrightarrow 2i\overline{z} + i = 3(z - 1 - i)$

$\Leftrightarrow 2i\overline{z} + i = 3z - 3 - 3i$

$\Leftrightarrow 2i\overline{z} - 3z = -3 - 4i$

Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$$\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}} = 3 \Leftrightarrow 2\mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) - 3(a + \mathrm{i}b) = -3 - 4\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{i}a - 2\mathrm{i}^2b - 3a - 3\mathrm{i}b = -3 - 4\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow -3a + 2b + \mathrm{i}(2a - 3b) = -3 - 4\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2b = -3 \\ 2a - 3b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a + 4b = -6 \\ 6a - 9b = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5b = -18 \\ 6a = -12 + 9b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{18}{5} \\ a = \dfrac{17}{5} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{\frac{17}{5} + \frac{18}{5}\mathrm{i}\right\}$.

c) $(z - \mathrm{i})^2 = (z + 1 + \mathrm{i})^2$

$\Leftrightarrow z - \mathrm{i} = z + 1 + \mathrm{i}$ ou $z - \mathrm{i} = -(z + 1 + \mathrm{i})$

$\Leftrightarrow -\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}$ ou $2z = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$

Donc $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

d) $\frac{2}{z} + 3\mathrm{i} = -2 - 5\mathrm{i} \Leftrightarrow \frac{2}{z} = -2 - 8\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{-2 - 8\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2(-2 + 8\mathrm{i})}{(-2 - 8\mathrm{i})(-2 + 8\mathrm{i})}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-4 + 16\mathrm{i}}{(-2)^2 - (8\mathrm{i})^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-4 + 16\mathrm{i}}{68} \Leftrightarrow z = \frac{-1 + 4\mathrm{i}}{17}$$

Donc $S = \left\{-\frac{1}{17} + \frac{4}{17}\mathrm{i}\right\}$.

110. a) $\frac{z - \mathrm{i}}{z - (2 - \mathrm{i})} = 3 \Leftrightarrow \frac{z - \mathrm{i}}{z - 2 + i} = 3$

$$\Leftrightarrow z - \mathrm{i} = 3(z - 2 + \mathrm{i})$$

$$\Leftrightarrow z - \mathrm{i} = 3z - 6 + 3\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow 2z = 6 - 4\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z = 3 - 2\mathrm{i}$$

Donc $S = \{3 - 2\mathrm{i}\}$.

111. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 \times z_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 - z_1 \\ z_1 \times (2 - z_1) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 - z_1 \\ -z_1^2 + 2z_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

Résolvons $-z^2 + 2z - 2 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = -4 < 0$

$z_1 = \frac{-2 - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 1 + \mathrm{i}$ et $z_1' = \frac{-2 + \mathrm{i}\sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 1 - \mathrm{i}$

Donc $z_2 = 2 - (1 + \mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}$.

Et $z_2' = 2 - (1 - \mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$.

Donc les deux nombres complexes dont la somme et le produit valent 2 sont $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.

112. a) $\frac{3 + z}{3 - z} = z \Leftrightarrow 3 + z = z(3 - z)$

$$\Leftrightarrow 3 + z = 3z - z^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 3 = 0$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$

$z_1 = \frac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$ et

$z_2 = \frac{-(-2) + \mathrm{i}\sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

Donc $S = \left\{1 - \mathrm{i}\sqrt{2}\,;1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

b) $(z - 2)^2 = -4 \Leftrightarrow z - 2 = 2\mathrm{i}$ ou $z - 2 = -2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = 2 + 2\mathrm{i}$ ou $z = 2 - 2\mathrm{i}$

Donc $S = \{2 - 2\mathrm{i}\ ;\ 2 + 2\mathrm{i}\}$.

c) $(z - 2)^2 = (3 + \mathrm{i}z)^2 \Leftrightarrow z - 2 = 3 + \mathrm{i}z$ ou $z - 2 = -(3 + \mathrm{i}z)$

$\Leftrightarrow z(1 - \mathrm{i}) = 5$ ou $z(1 + \mathrm{i}) = -1$

$\Leftrightarrow z = \frac{5}{1 - \mathrm{i}}$ ou $z = \frac{-1}{1 + \mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{5(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}$ ou $z = \frac{(-1)(1 - \mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z = \frac{5 + 5\mathrm{i}}{1^2 - \mathrm{i}^2}$ ou $z = \frac{-1 + \mathrm{i}}{1^2 - \mathrm{i}^2}$

$\Leftrightarrow z = \frac{5 + 5\mathrm{i}}{2}$ ou $z = \frac{-1 + \mathrm{i}}{2}$

Donc $S = \left\{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i\,;\,-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$.

d) $z^2 = 3iz \Leftrightarrow z^2 - 3iz = 0 \Leftrightarrow z(z-3i) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z - 3i = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 3i$

Donc $S = \{0\,;\,3i\}$.

113. 1. $\frac{\Delta}{4a^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4a^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$

2. $az^2 + bz + c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$

3. $az^2 + bz + c = 0$

$\Leftrightarrow a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$

$\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0$ ou $z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0$ car $a \neq 0$

$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z = -\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Donc $S = \left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,;\,\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$.

114. $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0$

$\Leftrightarrow (z^2 - 4z + 13)(z^2 - 2z + 2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 13 = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$

Résolvons $z^2 - 4z + 13 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36 < 0$

$z_1 = \frac{-(-4) - i\sqrt{36}}{2 \times 1} = 2 - 3i$ et

$z_2 = \frac{-(-4) + i\sqrt{36}}{2 \times 1} = 2 + 3i$

Résolvons $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$

$z_1 = \frac{-(-2) - i\sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 - i$ et

$z_2 = \frac{-(-2) + i\sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 + i$.

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0$ est $S = \{2 - 3i\,;\,2 + 3i\,;\,1 - i\,;\,1 + i\}$.

115. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes.

$\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 3 - z_1 \\ z_1 \times (3 - z_1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 3 - z_1 \\ -z_1^2 + 3z_1 - 5 = 0 \end{cases}$

Résolvons $-z^2 + 3z - 5 = 0$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = -11 < 0$

$z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2 \times (-1)} = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2}$ et

$z_1' = \frac{-3 + i\sqrt{11}}{2 \times (-1)} = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2}$.

Donc $z_2 = 3 - \left(\frac{3 + i\sqrt{11}}{2}\right) = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2}$.

Et $z_2' = 3 - \left(\frac{3 - i\sqrt{11}}{2}\right) = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2}$.

Donc

$S = \left\{\left(\frac{3 + i\sqrt{11}}{2}\,;\,\frac{3 - i\sqrt{11}}{2}\right);\left(\frac{3 - i\sqrt{11}}{2}\,;\,\frac{3 + i\sqrt{11}}{2}\right)\right\}$.

116. 1. $(z + i)^2 = z^2 + 2iz + i^2 = z^2 + 2iz - 1$

2. $z^2 + 2iz - 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2iz - 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z + i)^2 - 1 = 0$

3. $z^2 + 2iz - 2 = 0 \Leftrightarrow (z + i)^2 = 1$

$\Leftrightarrow z + i = 1$ ou $z + i = -1$

$\Leftrightarrow z = 1 - i$ ou $z = -1 - i$

Donc $S = \{1 - i\,;\,-1 - i\}$.

117. 1. $\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = z^2 + 2z\frac{i}{2} + \left(\frac{i}{2}\right)^2 = z^2 + iz - \frac{1}{4}$

2. $z^2 + iz + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + iz - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + c = 0$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + c = 0$

3. $z^2 + 2iz - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - c$

Donc pour que les solutions de (E′) soient imaginaires purs, il faut et il suffit que $-\frac{1}{4} - c \leqslant 0$, soit $c \geqslant -\frac{1}{4}$.

4. Si $c = -\frac{1}{4}$, (E′) $\Leftrightarrow \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z + \frac{i}{2} = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{i}{2}$

Donc $S = \left\{-\frac{1}{2}i\right\}$.

Si $c > -\frac{1}{4}$,

(E′) $\Leftrightarrow z + \frac{i}{2} = i\sqrt{\frac{1}{4} + c}$ ou $z + \frac{i}{2} = -i\sqrt{\frac{1}{4} + c}$

$\Leftrightarrow z = i\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}\right)$ ou $z = i\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c}\right)$

Donc $S = \left\{i\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}\right) ; i\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c}\right)\right\}$.

118. a) $\begin{cases} z + z' = 2 - 5i \\ z + 3z' = i - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' - 3z' = 2 - 5i - (i - 1) \\ z = i - 1 - 3z' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2z' = 3 - 6i \\ z = i - 1 - 3z' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = -\frac{3}{2} + 3i \\ z = i - 1 - 3\left(-\frac{3}{2} + 3i\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = -\frac{3}{2} + 3i \\ z = \frac{7}{2} - 8i \end{cases}$

Donc $S = \left\{\left(\frac{7}{2} - 8i ; -\frac{3}{2} + 3i\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} 2z + 3z' = 1 \\ z - z' = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(i + z') + 3z' = 1 \\ z = i + z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z' = 1 - 2i \\ z = i + z' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ z = i + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ z = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \end{cases}$

Donc $S = \left\{\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i ; \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right)\right\}$.

c) $\begin{cases} -2z + 2z' = 1 + i \\ z + 3z' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(5 - 3z') + 2z' = 1 + i \\ z = 5 - 3z' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8z' = 11 + i \\ z = 5 - 3z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = \frac{11}{8} + \frac{1}{8}i \\ z = 5 - 3\left(\frac{11}{8} + \frac{1}{8}i\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = \frac{11}{8} + \frac{1}{8}i \\ z = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}i \end{cases}$

Donc $S = \left\{\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{8}i ; \frac{11}{8} + \frac{1}{8}i\right)\right\}$.

d) $\begin{cases} z + iz' = 2 \\ 2z + 2z' = 2 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - iz' \\ 2(2 - iz') + 2z' = 2 + 3i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - iz' \\ z'(2 - 2i) = -2 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - iz' \\ z' = \frac{-2 + 3i}{2 - 2i} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - iz' \\ z' = \frac{(-2 + 3i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - iz' \\ z' = \frac{-4 - 4i + 6i + 6i^2}{4 - (2i)^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - iz' \\ z' = \frac{-10 + 2i}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - i\left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{4}i\right) \\ z' = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{9}{4} + \frac{5}{4}i \\ z' = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}i \end{cases}$

Donc $S = \left\{\left(\frac{9}{4} + \frac{5}{4}i ; -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}i\right)\right\}$.

119. 1. $f(-1+i\sqrt{3}) = (-1+i\sqrt{3})^2 + 2(-1+i\sqrt{3}) + 9$
$= 1 - 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 1 - 3 - 2 + 9 = 5$

Donc l'image de $-1+i\sqrt{3}$ par f est 5.

2. $f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$

$z_1 = \dfrac{-2 - i\sqrt{12}}{2 \times 1} = -1 - i\sqrt{3}$ et

$z_2 = \dfrac{-2 + i\sqrt{12}}{2 \times 1} = -1 + i\sqrt{3}$

Donc $S = \left\{-1 - i\sqrt{3}\,;\, -1 + i\sqrt{3}\right\}$.

3. $f(z) = \lambda \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = \lambda$
$\Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = -32 + 4\lambda$

$f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si, et seulement si, $\Delta < 0$, soit $-32 + 4\lambda < 0$, donc $\lambda < 8$.

120. 1. $1 + 2 - 1 - 2 = 0$.

Donc 1 est une solution de (E).

2. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée sur les éditions suivante : « Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$. »

$(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$
$= z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2$

3. $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0$
$\Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

Résolvons $z^2 + z - 2 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$

$z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2$ et $z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1$.

Résolvons $z^2 + z + 1 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.

$z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2 \times 1}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2 \times 1}$.

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ est

$S = \left\{-2\,;\, 1\,;\, -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\, -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

121. 1. Si z est une solution de (E), alors $z^4 = -4$.

Or $(-z)^4 = z^4$, donc $(-z)^4 = -4$. Et $(\overline{z})^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$.

Donc $-z$ et $\overline{z}$ sont des solutions de (E).

2. $z_0^4 = (1+i)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^k i^{4-k} = -4$

Donc z_0 est solution de (E).

3. D'après la question 1., $-z_0 = -1 - i$ et $\overline{z_0} = 1 - i$ sont aussi des solution de (E).

De même $\overline{-z_0} = -1 + i$ est aussi solution de (E).

4. $z^4 = -4$ est une équation polynomiale de degré 4, donc elle admet au plus 4 solutions. Donc elle n'admet pas d'autres solutions.

$S = \{1 + i\,;\, 1 - i\,;\, -1 - i\,;\, -1 + i\}$.

122. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'équation admette une solution réelle x.

Alors $x^{10} + x^2 + 1 - i = 0$. Donc $x^{10} + x^2 + 1 = i$. Or $x^{10} + x^2 + 1 \in \mathbb{R}$. Donc $i \in \mathbb{R}$. : absurde. Donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

123. 1.

$P(z_0) = (i\sqrt{2})^3 - (2 + i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + 2(1 + i\sqrt{2})i\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
$= -i2\sqrt{2} + (2 + i\sqrt{2})2 + i2\sqrt{2} + 2(i\sqrt{2})^2 - 2i\sqrt{2}$
$= 4 + i2\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} = 0$

Donc $z_0 = i\sqrt{2}$ est une racine de P.

2. a) Or

$(z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = z^3 + (a - i\sqrt{2})z^2 + (b - ia\sqrt{2})z - ib\sqrt{2}$

Par identification $\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -(2 + i\sqrt{2}) \\ b - ia\sqrt{2} = 2(1 + i\sqrt{2}) \\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

Donc $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2)$.

b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - i\sqrt{2} = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Résolvons $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$

$z_1 = \dfrac{-(-2) - i\sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 - i$ et $z_2 = \dfrac{-(-2) + i\sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 + i$.

Donc l'ensemble de solutions de $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ est $S = \left\{i\sqrt{2}\,;\, 1 - i\,;\, 1 + i\right\}$.

124. 1. $f(\sqrt{2}+5i) = \sqrt{2}+5i+i = \sqrt{2}+6i$

Donc l'image de $\sqrt{2}+5i$ par f est $\sqrt{2}+6i$.

2. $f(z) = \sqrt{2}+5i \Leftrightarrow z+i = \sqrt{2}+5i$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}+4i$

Donc l'antécédent de $\sqrt{2}+5i$ par f est $\sqrt{2}+4i$.

125. 1. $z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow (a+ib)^2 = a-ib$

$\Leftrightarrow a^2+2iab+(ib)^2 = a-ib$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=a \\ 2ab=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=a \\ b(1+2a)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=a \\ b=0 \text{ ou } 1+2a=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=a \\ b=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \dfrac{1}{4}-b^2=-\dfrac{1}{2} \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1)=0 \\ b=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b^2=\dfrac{3}{4} \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \text{ ou } a=1 \\ b=0 \end{cases}$

$\text{ou } \begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc $S = \left\{0\,;1\,;-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

On a donc $z_0 = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $z_0 \times \overline{z_0} = \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}$

Donc $z_0 \times \overline{z_0} = 1$.

3. $z_0 = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_0^2 = \overline{z_0} = -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_0^3 = z_0^2 \times z_0 = \overline{z_0} \times z_0 = 1$

4. Nous allons utiliser un raisonnement par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $z_0^{3n} = 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $z_0^0 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$z_0^{3(n+1)} = z_0^{3n+3} = z_0^{3n} \times z_0^3$. Or $z_0^3 = 1$. Donc $z_0^{3(n+1)} = z_0^{3n} = 1$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc $z_0^{3n} = 1$.

5. $z_0^{3n+1} = z_0^{3n} \times z_0 = z_0 = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_0^{3n+2} = z_0^{3n} \times z_0^2 = z_0^2 = -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. $z_0^{999} = z_0^{3\times 333} = 1$

$z_0^{1000} = z_0^{3\times 333+1} = z_0 = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Suites de nombres complexes

126. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = z_{n+1} - i = \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}i - i = \dfrac{1}{3}(z_n - i) = \dfrac{1}{3}u_n$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:

« $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1-i)$ »

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = z_0 - i = 1 - i$

et $\left(\dfrac{1}{3}\right)^0 (1-i) = 1-i$

Donc $u_0 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 (1-i)$ et donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$u_{n+1} = \frac{1}{3} \times u_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i})$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (1-\mathrm{i})$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i})$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_n - i$. Donc $z_n = u_n + \mathrm{i}$.

$z_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i}) + \mathrm{i}$

127. 1. $z_1 = 2\mathrm{i}z_0 + 5 = 2\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i}) + 5$
$= 2\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 + 5 = 1 + 2\mathrm{i}$

$z_2 = 2\mathrm{i}z_1 + 5 = 2\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i}) + 5 = 1 + 2\mathrm{i}$

2. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = 1 + 2\mathrm{i}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $z_n = 1 + 2\mathrm{i}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $z_0 = 1 + 2\mathrm{i}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$z_{n+1} = 2\mathrm{i}z_n + 5 = 2\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i}) + 5$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= 2\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 + 5 = 1 + 2\mathrm{i}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc $z_n = 1 + 2\mathrm{i}$.

4 . $z_{2020} = 1 + 2\mathrm{i}$

128. 1. $z_1 = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}}{1^2-\mathrm{i}^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{2}{1+\mathrm{i}} = \frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{2-2\mathrm{i}}{1^2-\mathrm{i}^2} = 1 - \mathrm{i}$

2. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$z_n = \begin{cases} 1-\mathrm{i} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $z_n = \begin{cases} 1-\mathrm{i} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ »

Initialisation : pour $n = 0$, n est pair, et $z_0 = 1 - \mathrm{i}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$z_{n+1} = \frac{1}{z_n}$. Si $n+1$ est pair, alors n est impair. Donc $z_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i}$. Si $n+1$ est impair, alors n est pair. Donc $z_{n+1} = \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc

$z_n = \begin{cases} 1-\mathrm{i} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

129. 1. a) $z_1 = \lambda z_0 + \mathrm{i} = \lambda \times 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$

$z_2 = \lambda z_1 + \mathrm{i} = \lambda\mathrm{i} + \mathrm{i} = (\lambda + 1)\mathrm{i}$

$= \lambda z_2 + \mathrm{i} = \lambda(\lambda + 1)\mathrm{i} + \mathrm{i} = (\lambda^2 + \lambda + 1)\mathrm{i}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété :

« $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $z_0 = 0$.

Et $\frac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i} = 0$. Donc $z_0 = \frac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} = \lambda\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i} + \mathrm{i} = \left(\frac{\lambda(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1} + 1\right) \times \mathrm{i}$

$= \left(\frac{\lambda^{n+1} - \lambda + \lambda - 1}{\lambda - 1}\right) \times \mathrm{i} = \left(\frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}\right) \times \mathrm{i}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}$

2. a) $z_4 = \dfrac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}$. Donc $z_4 = \dfrac{\mathrm{i}^4 - 1}{\mathrm{i} - 1} \times \mathrm{i} = 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+4} = \dfrac{\mathrm{i}^{n+4} - 1}{\mathrm{i} - 1} \times \mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}^n \times \mathrm{i}^4 - 1}{\mathrm{i} - 1} \times \mathrm{i}$

$$= \frac{\mathrm{i}^n - 1}{\mathrm{i} - 1} \times \mathrm{i}$$

Donc $z_{n+4} = z_n$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+k} = \dfrac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}$

$$= \frac{\lambda^n \times \lambda^k - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}$$

$$= \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}$$

Donc $z_{n+k} = z_n$.

b) S'il existe un entier naturel k tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+k} = z_n$.

Alors $\dfrac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i} = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}$. Donc $\lambda^{n+k} - 1 = \lambda^n - 1$.

Donc $\lambda^{n+k} - \lambda^n = 0$. Donc $\lambda^n \times (\lambda^k - 1) = 0$. Donc $\lambda^n = 0$ ou $\lambda^k - 1 = 0$. Or λ est un nombre complexe non nul, donc il est impossible que $\lambda^n = 0$ pour tout entier naturel n. Donc $\lambda^k = 1$.

130. Travail de l'élève.

131. Travail de l'élève.

132. Travail de l'élève.

Exercices bilan p. 34

133. Calcul algébrique dans C

1. a) $z + z' = 4 + 3\mathrm{i}$ **b)** $z - z' = 10 + \mathrm{i}$

c) $z \times z' = (7 + 2\mathrm{i})(\mathrm{i} - 3) = 7\mathrm{i} - 21 + 2\mathrm{i}^2 - 6\mathrm{i} = -23 + \mathrm{i}$

d) $z^2 = (7 + 2\mathrm{i})^2 = 7^2 + 28\mathrm{i} + (2\mathrm{i})^2 = 45 + 28\mathrm{i}$

e) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{7 + 2\mathrm{i}} = \dfrac{7 - 2\mathrm{i}}{(7 + 2\mathrm{i})(7 - 2\mathrm{i})}$

$$= \frac{7 - 2\mathrm{i}}{7^2 - (2\mathrm{i})^2} = \frac{7}{53} - \frac{2}{53}\mathrm{i}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$\overline{Z} = \overline{(z^2 + 3 + \overline{z}^2 + z \times \overline{z})} = \overline{z}^2 + \overline{3} + \overline{\overline{z}}^2 + \overline{z \times \overline{z}}$

$= \overline{z} + 3 + \overline{\overline{z}}^2 + \overline{z} \times \overline{\overline{z}} = \overline{z}^2 + 3 + z^2 + \overline{z} \times z = Z$

Donc Z est un nombre réel.

3. a) $z'' = \dfrac{(8 + \mathrm{i})(9 + 2\mathrm{i})}{(9 - 2\mathrm{i})(9 + 2\mathrm{i})} = \dfrac{72 + 16\mathrm{i} + 9\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2}{9^2 - (-2\mathrm{i})^2}$

$$= \frac{70 + 25\mathrm{i}}{85} = \frac{14}{17} + \frac{5}{17}\mathrm{i}$$

b) $\dfrac{8 + \mathrm{i}}{9 - 2\mathrm{i}} + \dfrac{8 - \mathrm{i}}{9 + 2\mathrm{i}} = z'' + \overline{z''} = 2\mathrm{Re}(z'') = \dfrac{28}{17}$

$\dfrac{8 + \mathrm{i}}{9 - 2\mathrm{i}} - \dfrac{8 - \mathrm{i}}{9 + 2\mathrm{i}} = z'' - \overline{z''} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z'') = \dfrac{10}{17}\mathrm{i}$

134. Équations dans C

1. a) $(2\mathrm{i} - 5)z + 2 = \mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{\mathrm{i} - 2}{-5 + 2\mathrm{i}}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(\mathrm{i} - 2)(-5 - 2\mathrm{i})}{(-5 + 2\mathrm{i})(-5 - 2\mathrm{i})}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-5\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 + 10 + 4\mathrm{i}}{(-5)^2 - (2\mathrm{i})^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{12 - \mathrm{i}}{29}$$

Donc $S = \left\{\dfrac{12}{59} - \dfrac{1}{29}\mathrm{i}\right\}$.

b) Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$2z + 3\overline{z} + \mathrm{i} - 2 \Leftrightarrow 2(a + \mathrm{i}b) + 3(a - \mathrm{i}b) + \mathrm{i} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 5a - 2 + \mathrm{i}(-b + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 2 = 0 \\ -b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = 1 \end{cases}$

Donc $S = \left\{\dfrac{2}{5} + \mathrm{i}\right\}$.

c) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

$x_1 = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Donc $S = \left\{\dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

d) $x^4 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5)(x^2 + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5 = 0$ ou $x^2+5= 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 5$ ou $x^2 = -5$

Donc $S = \left\{-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\,;-i\sqrt{5}\,;i\sqrt{5}\right\}$.

2. a) Si z est solution de (E), alors

$z^3 - 3z^2 + z - 3 = 0$

Or $\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + \bar{z} - 3 = \overline{z^3} - 3\overline{z^2} + \bar{z} - 3$

$= \overline{z^3 - 3z^2 + z - 3} = 0$

Donc $\bar{z}$ est une solution de (E).

b) $3^3 - 3 \times 3^2 + 3 - 3 = 0$

$i^3 - 3i^2 + i - 3 = -i + 3 + i - 3 = 0$

Donc 3 et i sont des solutions de (E).

c) (E) est une équation polynomiale de degré 3, donc elle admet au plus trois solutions.

d) $S = \{3\,;i\,;-i\}$.

3. a) $2 \times 2^3 - 8 \times 2^2 + 28 \times 2 - 40 = 0$

Donc 2 est une solution de (E′).

b) $2x^3 - 8x^2 + 28x - 40 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

Or $(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

Par identification,

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -8 \\ c - 2b = 28 \\ -2c = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 20 \\ c = 20 \end{cases}$$

Donc $2x^3 - 8x^2 + 28x - 40 = (x - 2)(2x^2 - 4x + 20)$.

c) (E′) :$(x - 2)(2x^2 - 4x + 20) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $2x^2 - 4x + 20 = 0$

Résolvons $2x^2 - 4x + 20 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 20 = -144 < 0$

$x_1 = \dfrac{-(-4) - i\sqrt{144}}{2 \times 2} = 1 - 3i$ et

$x_2 = \dfrac{-(-4) + i\sqrt{144}}{2 \times 2} = 1 + 3i$

Donc l'ensemble de solutions de (E′) dans $\mathbb{R}$ est $S = \{2\}$.

Et l'ensemble de solutions de (E′) dans $\mathbb{C}$ est $S =\{ 2\,;1 - 3i\,;1 + 3i\}$.

135. Binôme de Newton

1. et **2.** Voir cours page 20.

3. $(x - 2i)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^k (-2i)^{4-k}$

$= (-2i)^4 + 4x(-2i)^3 + 6x^2(-2i)^2 + 4x^3(-2i) + x^4$

$= x^4 - 8ix^3 - 24x^2 + 32ix + 16$

$= x^4 +16 + i(-8x^3 +32x)$

4. $(x - 2i)^4 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -8x^3 + 32x = 0$

$\Leftrightarrow 8x \times (-x^2 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 8x = 0$ ou $-x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = 4$

Donc $(x - 2i)^4$ est réel lorsque $x = 0$, ou $x = 2$ ou $x = -2$.

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1 + 1)^n = 0$

136. Suites de nombres complexes

A. 1. $z_1 = iz_0 - 4 = i \times 0 - 4$

Donc $z_1 = -4$.

$z_2 = iz_1 - 4 = i \times (-4) - 4$

Donc $z_2 = -4 - 4i$

$z_3 = iz_2 - 4 = i \times (-4 - 4i) - 4$

Donc $z_3 = -4i$.

2. a) $a_0 = 0$ et $b_0 = 0$

b) $z_{n+1} = iz_n - 4$

Donc $a_{n+1} + ib_{n+1} = i(a_n + ib_n) - 4$

$a_{n+1} + ib_{n+1} = ia_n - b_n - 4$

Donc $a_{n+1} = -b_n - 4$. Et $b_{n+1} = a_n$.

c)

```
def f(n):
    a=0
    b=0
    for i in range(1,n+1):
        c=a
        a=-b-4
        b=c
return([a,b])
```

B. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = z_{n+1} - w = iz_n - 4 - (-2 - 2i) = iz_n - 2 + 2i$
Or $u_n = z_n - w$. Donc $z_n = u_n + w$, soit $z_n = u_n - 2 - 2i$.
Donc $u_{n+1} = i(u_n - 2 - 2i) - 2 + 2i = iu_n - 2i - 2i^2 - 2 + 2i$
$= iu_n$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = (2 + 2i) \times i^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = z_0 - w = 2 + 2i$ et $(2 + 2i) \times i^0 = 2 + 2i$.
Donc $u_0 = (2 + 2i) \times i^0$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
$u_{n+1} = i \times u_n = i \times (2 + 2i) \times i^n$ d'après l'hypothèse de récurrence
$= (2 + 2i) \times i^{n+1}$
Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2 + 2i) \times i^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_n - w$,
donc $z_n = u_n + w = u_n - 2 - 2i$.
Donc $z_n = (2 + 2i) \times i^n - 2 - 2i$.

4. a) $i^2 = -1$
$i^{50} = (i^2)^{25} = (-1)^{25} = -1$
$i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$

b) $z_{50} = (2 + 2i) \times i^{50} - 2 - 2i$
$= (2 + 2i) \times (-1) - 2 - 2i$
$= -4 - 4i$
$z_{100} = (2 + 2i) \times i^{100} - 2 - 2i$
$= (2 + 2i) \times 1 - 2 - 2i$
$= 0$

137. Fonctions dans C

1. a) $f(1) = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$
Donc l'image de 1 par f est 0.

b) $f(2i) = \dfrac{2i-1}{2i+1} = \dfrac{(2i-1)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$
$= \dfrac{2i - 4i^2 - 1 + 2i}{1^2 - (2i)^2} = \dfrac{3+4i}{5}.$
Donc l'image de 2i par f est $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

2. $f(z) = 1 + i \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z+1} = 1 + i$
$\Leftrightarrow z - 1 = (1 + i)(z + 1)$
$\Leftrightarrow z - 1 = z + 1 + iz + i$
$\Leftrightarrow iz = -2 - i \Leftrightarrow z = \dfrac{-2-i}{i}$
$\Leftrightarrow z = \dfrac{(-2-i)(-i)}{i(-i)}$
$\Leftrightarrow z = -1 + 2i$
Donc l'antécédent de $1 + i$ par f est $-1 + 2i$.

3. $f(z) = z \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow z - 1 = z(z + 1)$
$\Leftrightarrow z - 1 = z^2 + z \Leftrightarrow z^2 = -1$
Donc $S = \{-i\ ;\ i\}$

138. Conjugués

Voir cours page 18.

Préparer le BAC Je me teste p. 37

139. C	**140.** C	**141.** B
142. D	**143.** A et C	**144.** C
145. D	**146.** B	**147.** A

Préparer le BAC Je révise p. 38

148. Utiliser la forme algébrique

1. $\mathrm{Re}(z) = -5$ et $\mathrm{Im}(z) = 2$
2. $x = 0$ et $y = 1$

149. Calculer dans C

a) $z + z' = 2 + 12i$ **b)** $z - z' = 6 + 2i$ **c)** $z \times z' = -43 + 6i$
d) $z^2 = -33 + 56i$ **e)** $\dfrac{1}{z'} = -\dfrac{2}{29} - \dfrac{5}{29}i$
f) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{27}{29} - \dfrac{34}{29}i$

150. Utiliser le conjugué d'un nombre complexe

1. $\overline{z_1} = -2 - \text{i}$

2. $\overline{Z} = \overline{(z - \overline{z} + \text{i})}$

$= \overline{z} - z - \text{i}$

$= -Z$

Donc Z est un nombre imaginaire pur.

3. a) $z' = \dfrac{9}{5} + \dfrac{23}{5}\text{i}$

b) $z' + \overline{z'} = 2\text{Re}(z) = \dfrac{18}{5}$

$z' + \overline{z'} = 2\text{iIm}(z) = \dfrac{46}{5}\text{i}$

151. Résoudre des équations dans C

a) $S = \left\{\dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}\text{i}\right\}$ **b)** $S = \left\{-\dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{5}\text{i}\right\}$

c) $S = \left\{\dfrac{4}{3} - \text{i}\right\}$ **d)** $S = \left\{\dfrac{3 - \text{i}\sqrt{71}}{4} ; \dfrac{3 + \text{i}\sqrt{71}}{4}\right\}$

e) $S = \left\{-\text{i}\sqrt{11} ; \text{i}\sqrt{11} ; -\sqrt{11} ; \sqrt{11}\right\}$

152. Utiliser le binôme de Newton

1. $(2 + 3\text{i})^4 = -119 - 120\text{i}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (2 + 1)^n = 3^n$

3. $\displaystyle(x + 2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} x^k 2^{10-k} \binom{10}{k}$

Donc le coefficient de x^7 est $2^{10-7}\dbinom{10}{7}$, soit 960.

153. Factorisation de polynômes

a) $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

b) $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

154. Équation de degré 3

1. a) 0 est une solution évidente.

b) $2x^3 - 2x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 24) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2x^2 - 2x - 24 = 0$

$\Delta = 196 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{196}}{4} = -3$ et

$x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{196}}{4} = 4.$

Donc $S = \{-3 ; 0 ; 4\}$.

2. a) $(-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = 0$.

Donc -1 est solution de l'équation.

b) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x + 1)(x^2 - 4x + 29)$

c) $S = \{-1 ; 2 - 5\text{i} ; 2 + 5\text{i}\}$

155. Suites de nombres complexes

1. $z_1 = 2$ et $z_2 = 2 + 2\text{i}$.

2. Posons $z = a + \text{i}b$ avec a et b deux réels.

$z \times \overline{z} = (a + \text{i}b)(a - \text{i}b) = a^2 - (\text{i}b)^2 = a^2 + b^2$

Donc $z \times \overline{z}$ est un nombre réel.

3. a) $u_0 = 2$; $u_1 = 4$ et $u_2 = 8$.

b) Pour tout nombre complexe z, $z \times \overline{z}$ est un nombre réel.

Donc $z_n \times \overline{z_n}$ est un nombre réel.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = z_{n+1} \times \overline{z_{n+1}} = (1 + \text{i})z_n \times \overline{(1 + \text{i})z_n}$

$= (1 + \text{i})z_n \times (1 - \text{i})\overline{z_n} = 2u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

e) $2 > 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. a)

```
u=2
n=0
while u<=1000 :
    n=n+1
    u=2*u
print(n)
```

b) L'entier est 9.

156. Fonction et nombre complexe

1. a) $f(3) = -\dfrac{1}{5}$. L'image de 3 est $-\dfrac{1}{5}$.

b) $f(\text{i}) = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}$. L'image de i est $-\dfrac{7}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}$.

2. a) $f(z) = 3 \Leftrightarrow z = -5$

L'antécédent de 3 est -5.

b) $f(z) = \mathrm{i} \Leftrightarrow z = 1 + 3\mathrm{i}$

L'antécédent de i est $1 + 3\mathrm{i}$.

3. $f(z) = -z \Leftrightarrow z = -4$ ou $z = 1$

Donc $S = \{-4 ; 1\}$.

Exercices vers le supérieur p. 38-39

157. Résolution d'équation

Réponse b.

$$\frac{z-8}{z-3} = z \Leftrightarrow z - 8 = z(z-3)$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 8 = 0$$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 < 0$

Donc $z_1 = \dfrac{-(-4) - \mathrm{i}\sqrt{16}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-(-4) + \mathrm{i}\sqrt{16}}{2}$.

Donc S ={ $2 - 2\mathrm{i}$;$2 + 2\mathrm{i}$}.

158. Résolution d'équation de degré 3

1. $P(2\mathrm{i}) = (2\mathrm{i})^3 + (2 - 2\mathrm{i})(2\mathrm{i})^2 + (4 - 4\mathrm{i})(2\mathrm{i}) - 8\mathrm{i}$

$= -8\mathrm{i} + (2 - 2\mathrm{i})(-4) + 8\mathrm{i} - 8\mathrm{i}^2 - 8\mathrm{i}$

$= -8\mathrm{i} - 8 + 8\mathrm{i} + 8\mathrm{i} + 8 - 8\mathrm{i} = 0$

Donc 2i est une solution de $P(z) = 0$.

2. $(z - 2\mathrm{i})(z^2 + 2z + 4) = z^3 + 2z^2 + 4z - 2\mathrm{i}z^2 - 4\mathrm{i}z - 8\mathrm{i}$

$= z^3 + (2 - 2\mathrm{i})z^2 + (4 - 4\mathrm{i})z - 8\mathrm{i}$

Donc $P(z) = (z - 2\mathrm{i})(z^2 + 2z + 4)$.

3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2\mathrm{i})(z^2 + 2z + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2\mathrm{i} = 0$ ou $z^2+2z+4 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$

$z_1 = \dfrac{-2 - \mathrm{i}\sqrt{12}}{2} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et

$z_2 = \dfrac{-2 + \mathrm{i}\sqrt{12}}{2} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

Donc $S = \left\{2\mathrm{i} ; -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} ; -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

159. Les entiers de Gauss

1. 2+3i est un entier de Gauss.

2. Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

Et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ avec $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$.

Alors $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$.

Et $a + a' \in \mathbb{Z}$ et $b + b' \in \mathbb{Z}$.

Donc $z + z'$ est un entier de Gauss.

3. $z \times z' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b')$

$= aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + a'b)$

Or $aa' - bb' \in \mathbb{Z}$ et $ab' + a'b \in \mathbb{Z}$.

Donc $z \times z'$ est un entier de Gauss.

4. $\dfrac{1}{2+3\mathrm{i}} = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})} = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{2^2-(3\mathrm{i})^2} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}\mathrm{i}$

Or 1 et $2 + 3\mathrm{i}$ sont des entiers de Gauss.

Mais $\dfrac{1}{2+3\mathrm{i}}$ n'est pas un entier de Gauss.

Donc le quotient de deux entiers de Gauss n'est pas un entier de Gauss.

160. Forme algébrique d'un nombre complexe

1. $z_1 = -4a^2 + 4a\mathrm{i} + a\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 - (1 + 4a\mathrm{i} + (2a\mathrm{i})^2)$

$= -4a^2 + 5a\mathrm{i} + 1 - 1 - 4a\mathrm{i} + 4a^2$

Donc $z_1 = a\mathrm{i}$.

2. $z_2 = \dfrac{(2+2a\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{2+2\mathrm{i}+2a\mathrm{i}+2a\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2}$

$= \dfrac{2+2\mathrm{i}+2a\mathrm{i}-2a}{2} = 1 - a + \mathrm{i}(1 + a)$

161. Équation bi-carrée

1. Posons $Z = z^2$.

L'équation (E) devient $Z^2 - Z - 2 = 0$.

2. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$

$Z_1 = \dfrac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $Z_2 = \dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$.

Donc les solutions de $Z^2 - Z - 2 = 0$ sont -1 et 2.

3. Or $Z = z^2$. Donc $z^2 = 2$ ou $z^2 = -1$. Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) est $S = \left\{-\sqrt{2} ; \sqrt{2} ; -\mathrm{i} ; \mathrm{i}\right\}$.

162. Calculer avec les nombres complexes (1)

1. d) $z^4 = 81$ **2.** c)

163. Calculer avec ls nombres complexes (2)

1. Réponse a.

$1 + j + j^2 = 0$. Donc $j \times (1 + j + j^2) = 0$. Soit $j + j^2 + j^3 = 0$. Donc $(j + j^2 + j^3)^3 = 0$.

2. Réponse a.

$(z_1 + iz_2)(1 + i) = z_1 + iz_1 + iz_2 + i^2 z_2$
$= z_1 - z_2 + iz_1 + iz_2$

Posons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

$(z_1 + iz_2)(1 + i)$
$= a_1 + ib_1 - (a_2 + ib_2) + i(a_1 + ib_1) + i(a_2 + ib_2)$
$\text{Re}((z_1 + iz_2)(1 + i)) = a_1 - a_2 - b_1 - b_2$
$\text{Re}((z_1 + iz_2)(1 + i)) = \text{Re}(z_1 - z_2) - \text{Im}(z_1 + z_2)$

3. Réponse d.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow (1 - p)^2 - 4 \times 2p \times 2p < 0$
$\Leftrightarrow 1 - 2p + p^2 - 16p^2 < 0$
$\Leftrightarrow -15p^2 - 2p + 1 < 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-15) \times 1 = 64$

$$p_1 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2 \times (-15)} = \frac{1}{5} \text{ et } p_2 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2 \times (-15)} = -\frac{1}{3}.$$

Donc $S = \left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{5} ; +\infty\right[$.

164. Sommes et produits de complexes

1. $i^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 4k, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ i \text{ si } n = 4k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -1 \text{ si } n = 4k+2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ -i \text{ si } n = 4k+3, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

(Voir exercice 93)

2. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = 1 + i - 1 - i = 0.$

Donc :

- si $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 + i + \ldots + i^n = 1$;
- si $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 + i + \ldots + i^n = 1 + i$;
- si $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 + i + \ldots + i^n = 1 + i - 1 = i$;
- si $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 + i + \ldots + i^n = 1 + i - 1 - i = 0$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$i^{8k} \times i^{8k+1} \times i^{8k+2} \times \ldots \times i^{8k+7}$
$= 1 \times i \times (-1) \times (-i) \times 1 \times i \times (-1) \times (-i)$
$= 1$

Donc :

- si $n = 8k$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 \times i \times \ldots \times i^n = 1$;
- si $n = 8k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 \times i \times \ldots \times i^n = 1 \times i = i$;
- si $n = 8k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 \times i \times \ldots \times i^n = 1 \times i \times i^2 = -i$;
- si $n = 8k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 \times i \times \ldots \times i^n = 1 \times i \times i^2 \times i^3 = -1$;
- si $n = 8k + 4$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 \times i \times \ldots \times i^n = 1 \times i \times \ldots \times i^4 = -1$;
- si $n = 8k + 5$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 \times i \times \ldots \times i^n = 1 \times \ldots \times i^5 = -i$;
- si $n = 8k + 6$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 \times i \times \ldots \times i^n = 1 \times \ldots \times i^6 = i$;
- si $n = 8k + 7$, $k \in \mathbb{N}$, alors
  $1 \times i \times \ldots \times i^n = 1 \times \ldots \times i^7 = 1$.

165. Équation avec des complexes

1. Posons $z = a + ib$, avec a et b deux réels.

$z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (a + ib)^2 + 2(a - ib) + 1 = 0$
$\Leftrightarrow a^2 + 2iab - b^2 + 2a - 2ib + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a + 1 = 0 \\ 2ab - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a + 1 = 0 \\ b(2a - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 1 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4 - b^2 = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b^2 = 4 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -2 \text{ ou } b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc dans $\mathbb{C}$, $S = \{-1 ; 1 - 2i ; 1 + 2i\}$.

166. Nombre imaginaire pur et nombre réel

Réponse a.

Il faut que $\overline{z} + \mathrm{i} \neq 0$. Donc $\overline{z} \neq -\mathrm{i}$, soit $z \neq \mathrm{i}$

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z' = \overline{z'} \Leftrightarrow \frac{2\overline{z}}{\overline{z}+\mathrm{i}} = \frac{2z}{z-\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{z}(z-\mathrm{i}) = 2z(\overline{z}+\mathrm{i}) \Leftrightarrow -2\mathrm{i}\overline{z} = 2\mathrm{i}z$$

$$\Leftrightarrow -\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$$

167. Résolution d'équation de degré 3

1. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4a^2 = 16(1-a^2)$

Or $a > 1$, donc $1 - a^2 < 0$, donc $\Delta < 0$.

Donc (E) admet deux racines complexes conjuguées.

2. $z_1 = \dfrac{4 - \mathrm{i}\sqrt{16(a^2-1)}}{2} = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$

$z_2 = \dfrac{4 + \mathrm{i}\sqrt{16(a^2-1)}}{2} = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$

3. $z^3 - 4z^2 + 4a^2z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - 4z + 4a^2) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 - 4z + 4a^2 = 0$

Donc $S = \left\{0\,;2-2\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}\,;2+2\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}\right\}$.

168. Équation et trigonométrie

1. $\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow (2\cos(\theta))^2 - 4 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 4(\cos(\theta))^2 - 4 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (\cos(\theta))^2 \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \cos(\theta) = -1$ ou $\cos(\theta) = 1$

car $\cos(\theta) \in [-1\,;\,1]$

$\Leftrightarrow \theta = \pi$ ou $\theta = 0$.

Donc l'équation admet une solution réelle si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

2. Si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$,

On a $\Delta = 4(\cos(\theta))^2 - 4 = 4((\cos(\theta))^2 - 1)$.

Donc $\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{1-(\cos(\theta))^2} = 2\sin(\theta)$.

$z_1 = \dfrac{2\cos(\theta) - \mathrm{i}2\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)$

$z_2 = \dfrac{2\cos(\theta) + \mathrm{i}2\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$

$S = \{\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)\,;\,\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\}$.

169. Racines carrées d'un nombre complexe

1. a) 5 **b)** i **c)** 2i

2. $(a + \mathrm{i}b)^2 = 5 + 12\mathrm{i} \Leftrightarrow a^2 + 2\mathrm{i}ab - b^2 = 5 + 12\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\dfrac{6}{a}\right)^2 = 5 \\ b = \dfrac{6}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 5a^2 - 36 = 0 \\ b = \dfrac{6}{a} \end{cases}$$

Posons $A = a^2$. La première équation devient $A^2 - 5A - 36 = 0$.

$\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times(-36) = 169$

$A_1 = \dfrac{5-\sqrt{169}}{2} = -4$ et $A_2 = \dfrac{5+\sqrt{169}}{2} = 9$.

Or $a \in \mathbb{R}$, et $A = a^2$. Donc $a = -3$ ou $a = 3$. Donc $z = -3 - 2\mathrm{i}$ ou $z = 3 + 2\mathrm{i}$.

170. Équation du second degré à coefficients complexes

1. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée sur les éditions suivantes : « $az^2 + bz + c = a(z + d)^2 + \boldsymbol{e}$ ».

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$$

$$= a(z+d)^2 + e$$

Avec $d = \dfrac{b}{2a}$ et $e = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$.

2. a) $2z^2 + (2 + 6\text{i})z - 2 + 3\text{i}$

$$= 2\left[z^2 + (1+3\text{i})z - 1 + \frac{3}{2}\text{i}\right]$$

$$= 2\left[\left(z + \frac{1+3\text{i}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+3\text{i}}{2}\right)^2 - 1 + \frac{3}{2}\text{i}\right]$$

$$= 2\left[\left(z + \frac{1+3\text{i}}{2}\right)^2 - \frac{1+6\text{i}-9}{4} - 1 + \frac{3}{2}\text{i}\right]$$

$$= 2\left[\left(z + \frac{1+3\text{i}}{2}\right)^2 + \frac{8-6\text{i}-4+6\text{i}}{4}\right]$$

$$= 2\left[\left(z + \frac{1+3\text{i}}{2}\right)^2 + 1\right] = 2\left(z + \frac{1+3\text{i}}{2}\right)^2 + 2$$

b) $2z^2 + (2 + 6\text{i})z - 2 + 3\text{i} = 0 \Leftrightarrow 2\left(z + \dfrac{1+3\text{i}}{2}\right)^2 + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1+3\text{i}}{2}\right)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{1+3\text{i}}{2} = -\text{i} \text{ ou } z + \frac{1+3\text{i}}{2} = \text{i}$$

Donc $S = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\text{i} ; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{i}\right\}$.

171. Formules de Viète pour un polynôme de degré 3

1. et **2.**

$P(z) = a_3 (z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient que $-a_3r_1r_2r_3 = a_0$. Donc $r_1r_2r_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}$.

Et $-a_3(r_1 + r_2 + r_3) = a_2$. Donc $r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}$.

172. Calcul de sommes

Posons $f(x) = (x + 1)^n$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'une part, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

Donc $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$. Donc $f'(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

D'autre part, $f'(x) = n(x + 1)^{n-1}$. Donc $f'(1) = n \times 2^{n-1}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.

173. Équation de degré 3

On considère l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ avec a, b, c, d des réels tels que $a \neq 0$.

Si z_0 est solution de l'équation, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de l'équation.

Donc une équation de degré 3 admet un nombre pair de solutions complexes distinctes non réelles. Donc elle ne peut pas admettre exactement trois solutions complexes distinctes non réelles.

174. Résolution par radicaux de l'équation de degré 3

1. On pose $X = x + \dfrac{a}{3}$. Donc $x = X - \dfrac{a}{3}$.

L'équation (E) devient donc

$$\left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 - 3X^2\frac{a}{3} + 3X\frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + aX^2 - 2aX\frac{a}{3} + \frac{a^3}{9} + bX - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 + X\left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right) + \frac{a}{27}(-a^2 + 3a^2 - 9b) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 + X\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{a}{27}(2a^2 - 9b) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 + pX + q = 0$$

Avec $p = b - \dfrac{a^2}{3}$ et $q = \dfrac{a}{27}(2a^2 - 9b) + c$.

2. On pose $X = u + v$.

Si $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \times v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$

$$\begin{aligned} X^3 + pX + Vq &= (u+v)^3 + p(u+v) + q \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q \\ &= 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) \\ &= 3uv(u+v) + p(u+v) \\ &= 3\left(-\frac{p}{3}\right)(u+v) + p(u+v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc X est solution de (E′).

b) $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \times v = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ (u \times v)^3 = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \times v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$

On pose $U = u^3$ et $V = v^3$.

On obtient donc le système suivant :

$\begin{cases} U + V = -q \\ U \times V = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$

c) $\begin{cases} U + V = -q \\ U \times V = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = -q - U \\ U \times (-q - U) = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} V = -q - U \\ U^2 + qU - \dfrac{p^3}{27} = 0 \end{cases}$

Résolvons $U^2 + qU - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

$\Delta = q^2 + 4 \times \dfrac{p^3}{27} = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$

On suppose $\Delta > 0$.

Donc $U_1 = \dfrac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $U_2 = \dfrac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}$

Or $V = -q - U$.

On obtient donc deux couples solutions :

$$\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2} ; \frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2} ; \frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

d) Or $X = u + v = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$.

Donc une solution de (E′) est :

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}.$$

175. Électronique

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{\mathrm{i}L\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R + \mathrm{i}L\omega}{\mathrm{i}RL\omega}$$

Donc $Z_e = \dfrac{\mathrm{i}RL\omega}{R + \mathrm{i}L\omega} = \dfrac{\mathrm{i}R}{\dfrac{R}{L\omega} + \mathrm{i}}$.

Donc $Z_e = \dfrac{(\mathrm{i}R)\left(\dfrac{R}{L\omega} - \mathrm{i}\right)}{\left(\dfrac{R}{L\omega} + \mathrm{i}\right)\left(\dfrac{R}{L\omega} - \mathrm{i}\right)} = \dfrac{\mathrm{R}\left(\mathrm{i}\dfrac{R}{L\omega} - \mathrm{i}^2\right)}{\left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2 - \mathrm{i}^2}$

$= \dfrac{\mathrm{R}\left(1 + \dfrac{R}{L\omega}\mathrm{i}\right)}{1 + \left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2}$.

Travaux pratiques

p. 40-41

TP1. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Utiliser un logiciel de calcul formel pour faire des calculs algébriques, résoudre des équations et factoriser avec les nombres complexes

A. Calculs algébriques dans C

1. Sur ordinateur.

2. a) $\mathrm{Re}(z) = 5$ et $\mathrm{Im}(z) = 3$

b) Sur ordinateur.

3. a) $(5 + 3i)(2 + i) = 7 + 11i$

$\frac{5+3i}{2+i} = \frac{13}{5} + \frac{1}{5}i$

b) Sur ordinateur.

4. a) $(5 + 3i)^2 = 16 + 30i$

b) Sur ordinateur.

5. a) $\overline{5 + 3i} = 5 - 3i$

b) Sur ordinateur.

B. Résolution d'équations

1.a) $S = \{3 - 3i\}$ **b)** $S = \{1 + i\}$

2. Sur ordinateur.

3. a) Dans $\mathbb{R}$, $S = \varnothing$.

Dans $\mathbb{C}$, $S = \left\{-1 - i\sqrt{3} ; -1 + i\sqrt{3}\right\}$.

b) Dans $\mathbb{R}$, $S = \left\{-2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}\right\}$.

Dans $\mathbb{C}$, $S = \left\{-2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}\right\}$.

C. Factorisations et équations

1.a) $P(z) = \frac{1}{2}(z + 8)(2z - 1)(z^2 + z + 1)$

b) Résolvons $z^2 + z + 1 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

Donc $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Donc les solutions de $P(z) = 0$ dans $\mathbb{R}$ sont $S = \left\{-8 ; \frac{1}{2}\right\}$.

c) Dans $\mathbb{C}$, $S = \left\{-8 ; \frac{1}{2} ; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2. a) $z^6 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)$

Résolvons $z^2 - z + 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

Donc $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Donc les solutions de $z^6 - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ sont $S = \{1 ; -1\}$.

c) Dans $\mathbb{C}$,

$S = \left\{-1 ; 1 ; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

TP2. Algorithmes et équation du second degré

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Comprendre et modifier un algorithme, afin de déterminer les racines d'un polynôme de degré 2.

1.

```
From math import*
def f(a,b,c):
    d=b**2-4*a*c
    if d<0:
        print("pas de racine réelle")
    else :
        if d==0:
            x=-b/(2*a)
            print("La racine est",x)
        else :
            x1=(-b-sqrt(d))/(2*a)
            x2=(-b+sqrt(d))/(2*a)
            print("Les deux racines sont",x1,x2)
```

2. a) Pas de racine réelle.

b) La racine est -1.

c) Les racines sont -2 et 1.

3. On retrouve les mêmes résultats par le calcul.

4.

```
From math import*
def f(a,b,c):
    d=b**2-4*a*c
    if d<0:
        x1=(-b-1j*sqrt(-d))/(2*a)
        x2=(-b+1j*sqrt(-f(d))/(2*a)
        print("Les deux racines complexes sont",x1,x2)
    else :
        if d==0:
            x=-b/(2*a)
            print("La racine est",x)
        else :
            x1=(-b-sqrt(d))/(2*a)
            x2=(-b+sqrt(d))/(2*a)
            print("Les deux racines sont",x1,x2)
```

5. a) Les deux racines complexes sont $1 - 3j$ et $1 + 3j$ (soit $1 - 3i$ et $1 + 3i$).

b) La racine est -1.

c) Les racines sont -2 et 1.

On retrouve les mêmes résultats par le calcul.

TP3. Suites croisées de nombres complexes

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Étudier une suite croisée de nombres complexes à l'aide d'un tableur.

1. $u_1 = u_0 + iv_0 = 1 + 2i + i(2 + i) = 4i$

$v_1 = v_0 + iu_0 = 2 + i + i(1 + 2i) = 2i$

2. a) $a_0 = 1$; $b_0 = 2$; $c_0 = 2$; $d_0 = 1$.

b) $u_{n+1} = u_n + iv_n = a_n + ib_n + i(c_n + id_n) = a_n - d_n + i(b_n + c_n)$

Donc $a_{n+1} = a_n - d_n$

$b_{n+1} = b_n + c_n$

$v_{n+1} = v_n + iu_n = c_n + id_n + i(a_n + ib_n) = c_n - b_n + i(d_n + a_n)$

Donc $c_{n+1} = c_n - b_n$

$d_{n+1} = d_n + a_n$

3. a) et **b)** Sur tableur.

c) Dans B2, on rentre 1 ; dans C2, on rentre 2.

Dans D2, on rentre 2 ; dans E2, on rentre 1.

d) Dans B3, on rentre =B2-E2.

Dans C3, on rentre =C2+D2.

Dans D3, on rentre =D2-C2.

Dans E3, on rentre =E2+B2.

e) Sur tableur.

f) $u_{10} = -32 + 64i$

$v_{10} = -64 + 32i$

CHAPITRE 2 Nombres complexes : point de vue géométrique et applications

Manuel p. 42-75

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre est le second chapitre sur les nombres complexes. Après avoir abordé le point de vue algébrique dans le chapitre 1, nous allons voir le point de vue géométrique dans le chapitre 2.

Nous étudierons dans un premier temps la représentation graphique d'un nombre complexe et la notion d'affixe.

Dans un deuxième temps, nous étudierons le module et l'argument d'un nombre complexe. Puis nous verrons différentes formes d'un nombre complexe, qui complèteront la forme algébrique vue dans le chapitre 1 : forme trigonométrique et forme exponentielle. Les formules d'addition et de duplication sont ensuite abordées.

Enfin, nous verrons quelques applications : formules d'Euler et de Moivre, racines de l'unité et études de configurations géométriques.

Objectifs

- → **Déterminer une affixe et représenter un nombre complexe par un point.**
- → **Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe et passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle et inversement.**
- → **Utiliser les formules d'addition et de duplication.**
- → **Effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée.**
- → **Utiliser les formules d'Euler et de Moivre.**
- → **Utiliser les racines de l'unité.**
- → **Utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan.**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 43

1. Lire des coordonnées

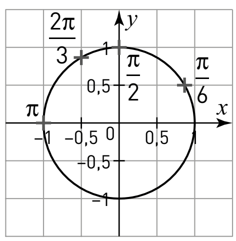
1. A(− 2 ; 3) et B(1 ; − 1).

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. Le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses a pour coordonnées (− 2 ; − 3).

4. Le symétrique de A par rapport à l'origine a pour coordonnées (2 ; − 3).

2. Utiliser le cercle trignonométrique



3. Calculer des coordonnées et des normes

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-5 \\ 2-3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$

3. Soit I le milieu de [AB].

$\text{I}\left(\dfrac{5+(-1)}{2} ; \dfrac{3+2}{2}\right)$, donc $\text{I}\left(2 ; \dfrac{5}{2}\right)$.

4. Résoudre des équations trigonométriques

a) Dans $[0 ; 2\pi[$, $\text{S} = \left\{\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

b) Dans $[0 ; 2\pi[$, $\text{S} = \left\{\dfrac{4\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

5. Calculer avec des complexes

a) $z_1 + z_2 = 8 - \text{i}$

b) $z_1 \times z_2 = (5 - 2\text{i})(3 + \text{i}) = 15 + 5\text{i} - 6\text{i} - 2\text{i}^2$
$= 17 - \text{i}$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5-2\text{i}}{3+\text{i}} = \dfrac{(5-2\text{i})(3-\text{i})}{(3+\text{i})(3-\text{i})}$
$= \dfrac{15 - 5\text{i} - 6\text{i} + 2\text{i}^2}{3^2 - \text{i}^2} = \dfrac{13}{10} - \dfrac{11}{10}\text{i}$

d) $\overline{z_1} = 5 + 2\text{i}$

6. Calculer avec la fonction exponentielle

a) $\dfrac{\text{e}^7 \times \text{e}^{-6}}{\text{e}} = \dfrac{\text{e}^1}{\text{e}} = \dfrac{\text{e}}{\text{e}} = 1$

b) $\dfrac{(\text{e}^{2x})^2 \times \text{e}^{-x}}{\text{e}^x} = \dfrac{\text{e}^{4x} \times \text{e}^{-x}}{\text{e}^x} = \dfrac{\text{e}^{3x}}{\text{e}^x} = \text{e}^{3x-x} = \text{e}^{2x}$

Activités

p. 44-45

1 Représenter graphiquement un nombre complexe

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la représentation graphique d'un nombre complexe et la notion d'affixe d'un point.

1.

Point	Affixe
O	0
U	1 + 0i = 1
V	0 + 1i = i

Point	Affixe
A	1 – 2i
B	2 + 3i
C	–3 + 0i = –3

2. a) M appartient à l'axe des abscisses si et seulement si son ordonnée est égale à 0, c'est-à-dire si et seulement si son affixe est un nombre réel.

b) M appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son abscisse est égale à 0, c'est-à-dire si et seulement si son affixe est un nombre imaginaire pur.

3. a) Les coordonnées sont (–2 , –4).

4. Soit F le milieu de [DE].

$\text{F}\left(\dfrac{3+5}{2} ; \dfrac{-2+8}{2}\right)$, donc F(4 ; 3).

Donc F a pour affixe $z_\text{F} = 4 + 3\text{i}$.

5. Soit I le milieu de [AB].

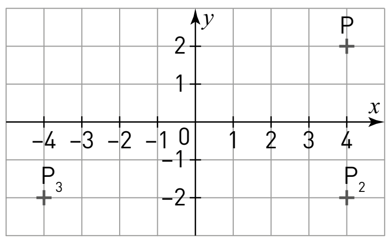
$\text{I}\left(\dfrac{x_\text{A} + x_\text{B}}{2} ; \dfrac{y_\text{A} + y_\text{B}}{2}\right)$.

Donc I a pour affixe $z_\text{I} = \dfrac{x_\text{A} + x_\text{B}}{2} + \text{i} \times \dfrac{y_\text{A} + y_\text{B}}{2}$

6. a) P a pour affixe $z = 4 + 2\text{i}$.

b) $\overline{z} = 4 - 2\text{i}$ et $-z = -4 - 2\text{i}$.

c) et **d)** $\text{P}_2(4 ; -2)$ et $\text{P}_3(-4 ; -2)$, donc



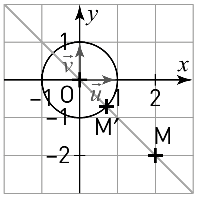
P et P_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

P et P_3 sont symétriques par rapport à l'origine.

2 Repérer un point par un angle et une distance

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la notion de module et d'argument.

1. a)



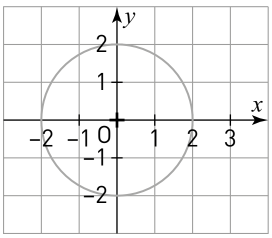
b) Réel appartenant à [0 ; 2π[associé à M′ : $\frac{7\pi}{4}$.

Réel appartenant à]−π ; π] associé à M′ : $-\frac{\pi}{4}$.

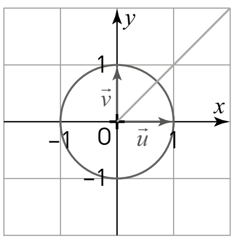
c) $\frac{15\pi}{4}$

d) $-\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

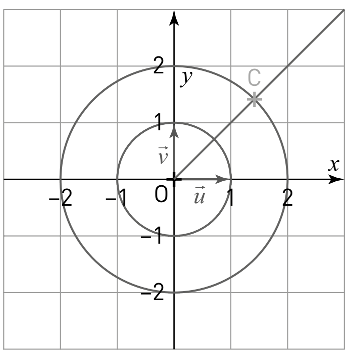
2. a) Cercle de centre O et de rayon 2 :



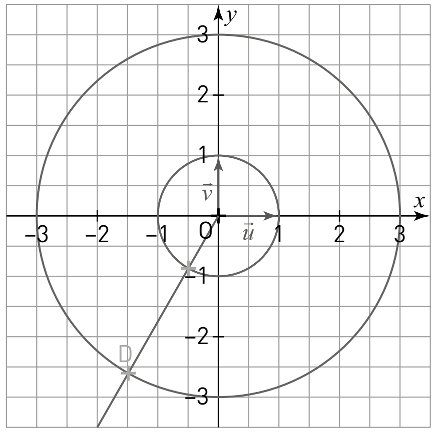
b) Demi-droite représentée ci-dessous, privée du point O :



c)



d)



3.a) $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Soit M′ l'intersection de la demi-droite [OM] et de l'axe des abscisses.

D'après le théorème de Thalès, $\frac{OM'}{OM} = \frac{\cos(\theta)}{x}$. Donc $\frac{1}{r} = \frac{\cos(\theta)}{x}$. Donc $x = r \times \cos(\theta)$.

De même, $\frac{OM'}{OM} = \frac{\sin(\theta)}{y}$. Donc $\frac{1}{r} = \frac{\sin(\theta)}{y}$.

Donc $y = r \times \sin(\theta)$.

L'affixe du point M est $z_M = x + iy$.

Donc $z_M = r \times \cos(\theta) + i \times r \times \sin(\theta)$

3 Découvrir la forme exponentielle d'un nombre complexe

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la forme exponentielle d'un nombre complexe et ses propriétés.

1. $f(0) = e^0 = 1$.

$f(x + y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y)$

2. $g(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1 + i \times 0 = 1$.

$g(x + y) = \cos(x + y) + i\sin(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))$

Et $g(x) \times g(y) = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y))$

$= \cos(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) + i^2\sin(x)\sin(y)$

$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))$

Donc $g(x + y) = g(x) \times g(y)$.

3. $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \times 0 = -1$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \times 1 = i$

4. Pour tout réel x,

$|e^{ix}| = \sqrt{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2} = 1$

$\arg(e^{ix}) = x[2\pi]$

5. Pour tout réel x,

$g(-x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x) = \overline{g(x)}$

6. $g(x) \times g(-x) = g(x + (-x)) = g(0)$

Donc $g(x) \times g(-x) = 1$.

Donc $g(-x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $(g(x))^n = g(nx)$ »

Initialisation : pour $n = 0$, $(g(x))^0 = 1$

Et $g(0 \times x) = g(0) = 1$.

Donc $(g(x))^0 = g(0x)$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $(g(x))^{n+1} = (g(x))^n \times g(x) = g(nx) \times g(x)$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= g(nx + x) = g((n + 1)x)$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $(g(x))^n = g(nx)$.

8. $e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$

$e^{-ix} = \dfrac{1}{e^{ix}}$

$(e^{ix})^n = e^{inx}$

4 Utiliser les nombres complexes en géométrie

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Faire le lien entre argument et angle et découvrir comment utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations géométriques.

A. Arguments et angles

1. $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OP})[2\pi]$

Or $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Donc P a pour affixe $z_B - z_A$.

Donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OP}) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.

Donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.

2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD})[2\pi]$

$= -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD})[2\pi]$

$= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C)[2\pi]$

$= \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

3. Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

4. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi] = \arg\left(\dfrac{3 - (3 + 2i)}{i - (1 + i)}\right)[2\pi]$

$= \arg(2i)[2\pi] = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

B. Configurations du plan

1. a) A,B,C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

b) ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

c) (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

d) (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

2. a) A,B,C sont alignés si et seulement si

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi[2\pi]$ soit

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi]$. Donc $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$.

b) ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ soit

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Donc $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

c) (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0[\pi]$, soit $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$.

d) (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, soit $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

3. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Or $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{3+3i-(-1+i)}{3+2i-(1+i)} = \dfrac{4+2i}{2+i} = \dfrac{2(2+i)}{2+i} = 2$

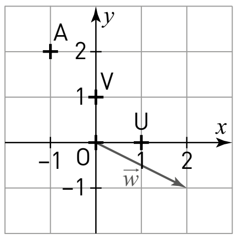
Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(2)[2\pi] = 0[2\pi]$

Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

À vous de jouer p. 47-59

1. 1. $z_O = 0$; $z_U = 1$ et $z_V = i$.

2.



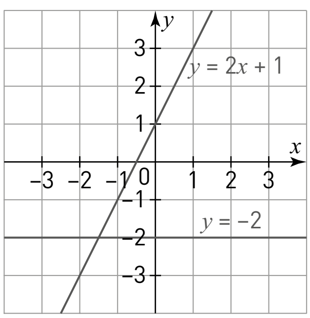
2. Soit M un point d'affixe $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

a) $\text{Im}(z) = -2 \Leftrightarrow b = -2$.

Il faut tracer la droite d'équation $y = -2$.

b) $\text{Im}(z) = 2 \times \text{Re}(z) + 1 \Leftrightarrow b = 2a + 1$.

Il faut tracer la droite d'équation $y = 2x + 1$.



3. Notons z_C l'affixe de C.

B est le milieu de [AC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_B$

$\Leftrightarrow z_C = 2z_B - z_A$

$\Leftrightarrow z_C = 2(2-4i) - (1+i)$

$\Leftrightarrow z_C = 3 - 9i$

Donc pour que B soit le milieu de [AC] il faut que l'affixe de C soit $3 - 9i$.

4. $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_C - z_A = 3 \times (z_B - z_A)$

$\Leftrightarrow z_C = 3z_B - 2z_A$

$\Leftrightarrow z_C = 3(3+7i) - 2(-2+5i)$

$\Leftrightarrow z_C = 13 + 11i$

Donc pour $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ il faut que l'affixe de C soit $13 + 11i$.

5. a) $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2} = \sqrt{90}$

b) $|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

6. a) $|z_1| = |3+2i| \times |5-4i| = \sqrt{3^2+2^2} \times \sqrt{5^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{533}$

b) $|z_2| = \dfrac{|3+2i|}{|5-4i|} = \dfrac{\sqrt{3^2+2^2}}{\sqrt{5^2+(-4)^2}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{41}}$

7. a) $OA = |z_A| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$

b) $OB = |z_B| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

8. a) $|z| = 18 \Leftrightarrow OM = 18$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon 18.

b) $|z + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow |z - (-2+i)| = 4$

Soit A le point d'affixe $-2 + i$.

$|z + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow AM = 4$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 4.

b) $|z - 3 - i| = |z + 5 - 2i| \Leftrightarrow |z - (3+i)| = |z - (-5+2i)|$

Soit B le point d'affixe $3 + i$ et C le point d'affixe $-5 + 2i$.

$|z - 3 - i| = |z + 5 - 2i| \Leftrightarrow BM = CM$

L'ensemble cherché est la médiatrice de [BC].

9. a) $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\arg(z_1) = -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) $|z_2| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$

On cherche un réel θ tel que :

$$\begin{cases}\cos(\theta) = \dfrac{3}{\sqrt{18}}\\ \sin(\theta) = \dfrac{3}{\sqrt{18}}\end{cases} \text{ soit } \begin{cases}\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

c) z_3 est un réel strictement négatif.
Donc $\arg(z_3) = -\pi[2\pi]$.

10. a) $z_1 = 5\times\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$z_1 = 5\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc $z_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

b) $z_2 = 4\times\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$

$z_2 = 4\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

Donc $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$.

11. $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc l'ensemble des points M tels que $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ est une demi-droite d'origine O, privée de O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}\,,\vec{w}) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

12. $\arg(z) = 0[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}) = 0[\pi]$

Donc l'ensemble des points M tels que $\arg(z) = 0[\pi]$ est l'axe des abscisses privé du point O.

13. $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$

$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

14. $\dfrac{\pi}{4} = 2\times\dfrac{\pi}{8}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1$.

Donc $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$.

Donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

De plus $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1$.

Donc $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1-\dfrac{2+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Or $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$.

Donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

15. $|z_1| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases}\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Donc $\arg(z_1) = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$.

16. $|z| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

On cherche un réel θ tel que :

$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} \end{cases}$ soit $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Donc $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Or $\arg(z^{500}) = 500 \times \arg(z)[2\pi]$

Donc $\arg(z^{500}) = 500 \times \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

$\arg(z^{500}) = -125\pi[2\pi] = -124\pi - \pi[2\pi]$

$= -62 \times 2\pi - \pi[2\pi]$

Donc $\arg(z^{500}) = -\pi[2\pi]$

17. a) $z_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$

b) $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(3e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 9 \times e^{-\frac{2i\pi}{3}} = 9e^{-i\frac{\pi}{3}}$

18. D'après la formule d'Euler,

$\sin(\theta) = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

Donc $\sin^3(\theta) = \left(\dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right)^3$

$= \dfrac{1}{8i^3}((e^{i\theta})^0(-e^{-i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^1(-e^{-i\theta})^2 + 3(e^{i\theta})^2(-e^{-i\theta})^1$
$+ (e^{i\theta})^3(-e^{-i\theta})^0)$

$= -\dfrac{1}{8i}(-e^{-i3\theta} + 3e^{i\theta} \times e^{-i2\theta} - 3e^{i2\theta} \times e^{-i\theta} + e^{i3\theta})$

$= -\dfrac{1}{8i}(-e^{-i3\theta} + 3e^{-i\theta} - 3e^{i\theta} + e^{i3\theta})$

$= -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2i}(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta} - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}))$

$= -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} - 3\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)$

$= -\dfrac{1}{4}(\sin(3\theta) - 3\sin(\theta)) = \dfrac{-\sin(3\theta) + 3\sin(\theta)}{4}$

19. a) $z_1 = \sqrt{2} \times 2 \times e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$. Donc $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

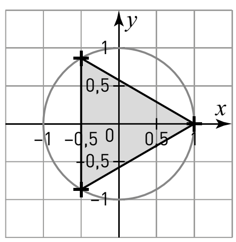
b) $z_2 = \dfrac{8}{4} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$. Donc $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

20. $z^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = (\sqrt{2})^{20} \times \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = 1024 \times e^{i20 \times \frac{\pi}{4}}$

$= 1\,024 \times e^{i5\pi} = 1\,024 \times (\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)) =$
$1\,024 \times (-1 + i \times 0)$

Donc $z^{20} = -1\,024$.

21. $\mathbb{U}_3 = \left\{1 ; e^{\frac{2i\pi}{3}} ; e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$.



$P = 3 \times \left|e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1\right| = 3 \times \left|\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 1 + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right|$

$= 3 \times \sqrt{\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)^2} = 3 \times \sqrt{3}$

22. $\mathbb{U}_5 = \left\{1 ; e^{\frac{2i\pi}{5}} ; e^{\frac{4i\pi}{5}} ; e^{\frac{6i\pi}{5}} ; e^{\frac{8i\pi}{5}}\right\}$.

Tous les côtés du pentagone régulier ont la même longueur. Soit ℓ la longueur d'un de ses côtés.

$$\ell = \left|e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1\right| = \left|\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2}$$

Donc $\ell \approx 1{,}176$.

23. $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

$$= \arg\left(\frac{4 + 4i - (1 - 2i)}{2 - (1 - 2i)}\right)[2\pi]$$

$$= \arg\left(\frac{3 + 6i}{1 + 2i}\right)[2\pi]$$

$$= \arg\left(\frac{(3 + 6i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}\right)[2\pi]$$

$$= \arg\left(\frac{3 - 6i + 6i - 12i^2}{1^2 - (2i)^2}\right)[2\pi]$$

$$= \arg(3)[2\pi] = 0[2\pi]$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Donc A,B et C sont alignés.

24. $$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)[2\pi] = \arg\left(\frac{-2 + 2i - 2}{1 - 2i - 2}\right)[2\pi]$$

$$= \arg\left(\frac{-4 + 2i}{-1 - 2i}\right)[2\pi]$$

$$= \arg\left(\frac{(-4 + 2i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)}\right)[2\pi]$$

$$= \arg\left(\frac{4 - 8i - 2i + 4i^2}{(-1)^2 - (2i)^2}\right)[2\pi]$$

$$= \arg(-2i)[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

Donc (AB) et (BC) sont perpendicuaires.

25. Déterminons la forme algébrique de $z_1 z_2$.

$$z_1 \times z_2 = (3 + 3i)(2\sqrt{3} + 2i) = 6\sqrt{3} - 6 + i(6\sqrt{3} + 6)$$

Déterminons la forme exponentielle de $z_1 z_2$.

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

On cherche θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} \end{cases}$

Donc $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Donc $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

De même, on montre que $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Donc $z_1 z_2 = 3\sqrt{2} \times 4 \times e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = 12\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Donc $12\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 6\sqrt{3} - 6$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{6\sqrt{3} - 6}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

26. $$z = \frac{(6 + 2i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{24 + 12i + 8i + 4i^2}{4^2 - (2i)^2} = 1 + i$$

Donc $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Donc $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Donc $$z^{2\,021} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2\,021} = (\sqrt{2})^{2\,021} \times e^{i\frac{2\,021\pi}{4}}$$

$$= (\sqrt{2})^{2\,021} \times e^{i\frac{(252\times 8 + 5)\pi}{4}}$$

$$= (\sqrt{2})^{2\,021} \times e^{i\left(252\times 2\pi + \frac{5\pi}{4}\right)} = (\sqrt{2})^{2\,021} \times e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$= (\sqrt{2})^{2\,021} \times \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$= (\sqrt{2})^{2\,021} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -(\sqrt{2})^{2\,020} - i\,(\sqrt{2})^{2\,020} = -2^{1\,010} - i \times 2^{1\,010}$$

27. 1. ABC semble rectangle et isocèle en B.

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{4+2i-(2-i)}{-1+i-(2-i)} = \frac{2+3i}{-3+2i}$$

$$= \frac{(2+3i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = -i$$

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Et $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$, donc $|z_C - z_B| = |z_A - z_B|$, soit BC = BA.

Donc ABC est rectangle et isocèle en B.

2. ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A \Leftrightarrow z_D = 1 + 4i$

Donc l'affixe de D est $z_D = -1 + 4i$.

3. ABCD est un parallélogramme. Et ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

Donc ABCD est un carré.

28. 1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

Or $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{6+3i-(3+4i)}{2+i-5} = \frac{3-i}{-3+i} = -1$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(-1)[2\pi] = \pi[2\pi]$

Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

2. Soit I le milieu de [AC], et z_I son affixe.

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{5+3+4i}{2} = 4+2i$$

3. $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_I - z_B}\right)[2\pi]$.

Or $\frac{z_D - z_B}{z_I - z_B} = \frac{6+3i-(2+i)}{4+2i-(2+i)} = \frac{4+2i}{2+i} = 2$

$(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) = \arg(2)[2\pi] = 0[2\pi]$

Donc B, I et D sont alignés.

Exercices apprendre à démontrer p. 60

Pour s'entraîner

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:

« $z_n = 4 \times (\sqrt{2})^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $z_0 = 4$ et $4 \times (\sqrt{2})^0 = 4$, donc $z_0 = 4 \times (\sqrt{2})^0$.

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $z_{n+1} = \left|(1+i) \times z_n\right|$.

Donc $z_{n+1} = |1+i| \times |z_n| = \sqrt{1^2 + 1^2} \times |4 \times (\sqrt{2})^n|$

$= \sqrt{2} \times 4 \times (\sqrt{2})^n = 4 \times (\sqrt{2})^{n+1}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc $z_n = 4 \times (\sqrt{2})^n$.

Exercices calculs et automatismes p. 61

29. Calcul avec les complexes

1. d) **2.** c)

30. Lecture graphique d'affixe

$z_A = 1 + 2i$; $z_B = -2 + i$; $z_C = 2 - i$; $z_D = -2i$; $z_E = 3$.

31. Lecture graphique d'un module et d'un argument

Point	Module	Un argument
A	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
B	2	0
C	$\sqrt{8}$	$-\frac{3\pi}{4}$
D	2	$\frac{2\pi}{3}$
E	3	$-\frac{\pi}{2}$
F	1	π
G	2	$-\frac{\pi}{6}$

32. Module et argument

1. c) **2.** b)

33. Propriété des arguments

1. c) **2.** a)

3. d) **4.** b)

34. Argument

a) Fausse. $\arg(z) = \pi[2\pi]$

b) Vraie.

c) Fausse. $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

35. Forme trigonométrique

a) Forme trigonométrique.

$|z_1| = 5$ et $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

b) Pas forme trigonométrique.

c) Forme trigonométrique.

$|z_3| = 1$ et $\arg(z_3) = \dfrac{\pi}{5}[2\pi]$.

d) Pas forme trigonométrique.

e) Pas forme trigonométrique.

f) Pas forme trigonométrique.

36. Passer d'une forme à une autre

1. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ vérifie les deux équations.

Donc $z_1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

2. $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ vérifie les deux équations.

Donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3. $2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

37. Forme exponentielle

a) Fausse. **b) Vraie.**

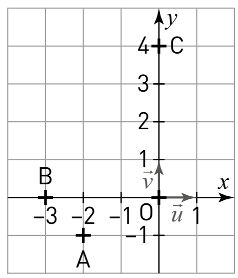
Exercices d'application p. 62-64

Déterminer et utiliser une affixe

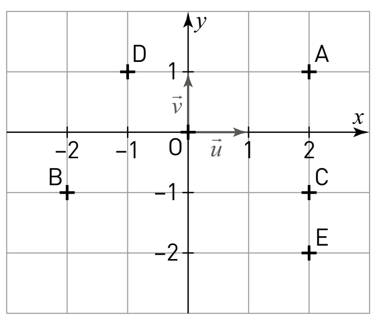
38. 1. $z_A = 1 + 3i$; $z_B = 3 + 2i$; $z_C = -2$; $z_D = -3i$

2. $z_{\overrightarrow{AB}} = 2 - i$; $z_{\overrightarrow{CD}} = 2 - 3i$

39.



40.



41. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (2 - i) - (1 - 3i)$

Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = 1 + 2i$.

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 3 - (1 - 3i) = 2 + 3i$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 3 - (2 - i) = 1 + i$

42. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (1+i) - (3 - i\sqrt{2})$

Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = -2 + i(1+\sqrt{2})$.

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = \dfrac{i}{2} - (3 - i\sqrt{2})$

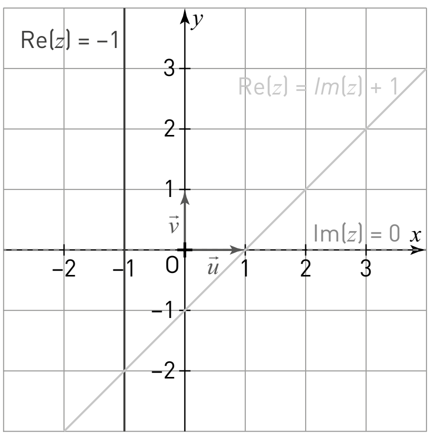
Donc $z_{\overrightarrow{AC}} = -3 + i\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$.

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = \dfrac{i}{2} - (1+i) = -1 - \dfrac{1}{2}i$

43. a) On trace la droite d'équation $x = -1$.

b) On trace la droite d'équation $y = 0$.

c) On trace la droite d'équation $x = y + 1$, soit $y = x - 1$.



44. $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A - z_O = -3 - 2i$

$z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = 5 + 2i - (1 - 3i)$

Donc $z_{\overrightarrow{CB}} = 4 + 5i$.

$z_{\overrightarrow{OA}} \neq z_{\overrightarrow{CB}}$

Donc OABC n'est pas un parallélogramme.

45. 1. Notons z_D l'affixe de D.

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$\Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A \Leftrightarrow z_D = (-2 - i) - (2 - 3i) + (1 + i)$

$\Leftrightarrow z_D = -3 + 3i$

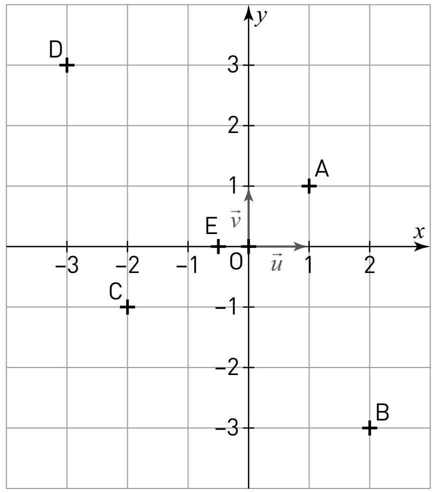
Donc pour que ABCD soit un parallélogramme, il faut que l'affixe de D soit égale à $-3 + 3i$.

2. Soit E le centre du parallélogramme. E est le milieu de [AC].

Donc $z_E = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{1 + i + (-2 - i)}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Donc l'affixe de E est $-\dfrac{1}{2}$.

3.



46. 1. Soit I le milieu de [AB].

$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{4 + i + 6 - 2i}{2} = 5 - \dfrac{1}{2}i$.

2. Soit D le symétrique de A par rapport à C.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_C - z_A = z_D - z_C \Leftrightarrow z_D = 2z_C - z_A$

$\Leftrightarrow z_D = 2(-3 - i) - (4 + i) \Leftrightarrow z_D = -10 - 3i$

Donc D a pour affixe $-10 - 3i$.

3. Soit E l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_E - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_E = z_C - z_B + z_A$

$\Leftrightarrow z_E = -3 - i - (6 - 2i) + 4 + i \Leftrightarrow z_E = -5 + 2i$

Donc E a pour affixe $-5 + 2i$.

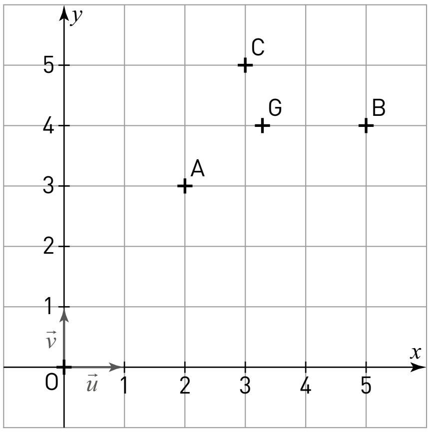
47. 1. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc $z_{\overrightarrow{GA}} + z_{\overrightarrow{GB}} + z_{\overrightarrow{GC}} = 0$.

Donc $a - g + b - g + c - g = 0$.

Donc $g = \dfrac{1}{3}(a + b + c)$.

2. $g = \dfrac{1}{3}(2 + 3i + 5 + 4i + 3 + 5i) = \dfrac{10}{3} + 4i$



48. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (1 - i) - (3 + 2i)$

Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = -2 - 3i$.

$z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = -i - (2 + 2i)$

Donc $z_{\overrightarrow{CD}} = -2 - 3i$.

2. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}}$. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Donc ABDC est un parallélogramme.

3. $z_I = \dfrac{z_A + z_D}{2} = \dfrac{3 + 2i - i}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$z_J = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{1 - i + 2 + 2i}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$

4. $z_I = z_J$. Donc I = J.

ABDC a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Donc ABDC est un parallélogramme.

49. 1. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_D - z_A = 2(z_B - z_A)$

$\Leftrightarrow z_D = 2z_B - z_A$

$\Leftrightarrow z_D = 2(-1 + i) - (-2 + 3i)$

$\Leftrightarrow z_D = -i$

Donc D a pour affixe $-i$.

2. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} \Leftrightarrow z_E - z_A + z_E - z_B = z_E - z_C$

$\Leftrightarrow z_E = z_B + z_A - z_C$

$\Leftrightarrow z_E = -1 + i + (-2 + 3i) - (5 - 9i)$

$\Leftrightarrow z_E = -8 + 13i$

Donc E a pour affixe $-8 + 13i$.

Déterminer et utiliser le module d'un nombre complexe

50. a) $|z_1| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

b) $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

c) $|z_3| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{\dfrac{13}{4}} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

d) $|z_4| = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{5}{7}\right)^2} = \dfrac{5}{7}$

51. a) $|z_1| = |3 + i| \times |7 - 2i|$

$= \sqrt{3^2 + 1^2} \times \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{530}$

b) $|z_2| = \dfrac{|6|}{|1 + i|} = \dfrac{6}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}$

52. 1. $AB = |z_B - z_A| = |2 + 3i - (5 + 4i)|$

$= |-3 - i| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

53. 1. $AB = |z_B - z_A| = |-2i - (3 - i)| = |-3 - i|$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$AC = |z_C - z_A| = |2 + 2i - (3 - i)| = |-1 + 3i|$

$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$BC = |z_C - z_B| = |2 + 2i - (-2i)| = |2 + 4i|$

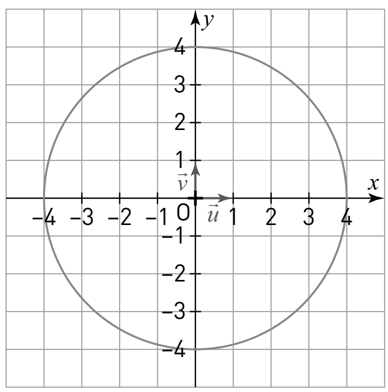
$= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

2. $AB = AC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

54. 1. $|z| = 4 \Leftrightarrow OM = 4$

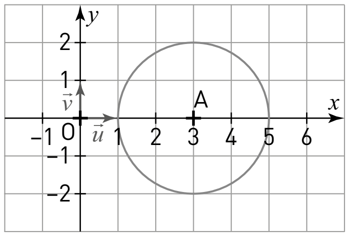
Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon 4.



2. Soit A le point d'affixe 3.

$|z - 3| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 2.



55. 1. $|z - 2 + i| = 3 \Leftrightarrow |z - (2 - i)| = 3$. Soit A le point d'affixe 2 – i.

$|z - 2 + i| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$

Donc l'ensemble recherché est le cercle de centre A et de rayon 3.

2. $|z + 1 - i| = -2$

Un module est toujours positif ou nul.

Donc l'ensemble recherché est l'ensemble vide.

3. Soit B le point d'affixe 2 et C le point d'affixe 8.

$|z - 2| = |z - 8| \Leftrightarrow BM = CM$

Donc l'ensemble recherché est la médiatrice du segment [BC].

4. $|z - 2 + 3i| = |z + 4 - 2i| \Leftrightarrow |z - (2 - 3i)| = |z - (-4 + 2i)|$

Soit D le point d'affixe 2 – 3i et E le point d'affixe –4 + 2i.

$|z - 2 + 3i| = |z + 4 - 2i| \Leftrightarrow DM = EM$

Donc l'ensemble recherché est la médiatrice du segment [DE].

Déterminer et utiliser un argument et une forme trigonométrique

56. a) $\arg(z_1) = 0[2\pi]$ **b)** $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

c) $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z_3) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

d) $|z_4| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

On cherche un réel tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z_4) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

57. a) $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Donc on cherche un réel θ tel que :

$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ soit $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

b) $|z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

Donc on cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

58. 1. $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi] = \frac{7\pi}{4}[2\pi]$

$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi] = -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

59. a) $|z_1| = 7$ et $\arg(z_1) = 0[2\pi]$.
Donc $z_1 = 7 \times (\cos(0) + i\sin(0))$.

b) $|z_2| = 4$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc $z_2 = 4 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

c) $|z_3| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z_3) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Donc $z_3 = 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

d) $|z_4| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
On cherche un réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \sin(\theta) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z_4) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc $z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

60. a) $z_1 = 2(0 + i \times 1) = 2i$

b) $z_2 = 3\left(-\frac{1}{2} + i \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $z_3 = 4\left(\frac{1}{2} - i \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - i \times 2\sqrt{3}$

d) $z_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - i \times \frac{1}{4}$

61. $z_A = 1 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Donc $z_B = 2 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Donc $z_C = 2 \times \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

62. $z_A = \sqrt{8} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z_B = \sqrt{8} \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z_C = \sqrt{8} \times \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

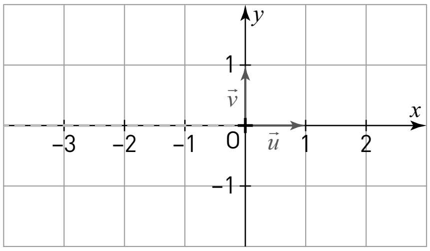
$z_D = \sqrt{8} \times \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

63. a) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

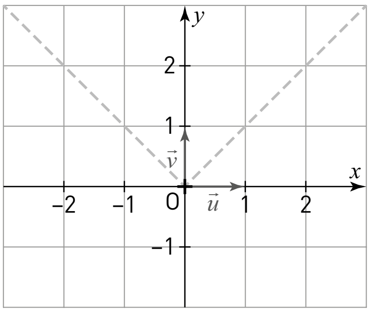
Donc l'ensemble cherché est une demi-droite d'origine O, privée de O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

b) $\arg(z) = -\pi[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -\pi[2\pi]$
Soit A(– 1 ; 0). L'ensemble cherché est la demi-droite [OA), privée du point O.

64. a) Demi-droite représentée ci-dessous, privée du point O.



b) Réunion des deux demi-droites représentées ci-dessous, privées du point O.



Déterminer les formules d'addition et de duplication

65. 1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

2. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

66. a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)$

b) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$

67. 1. $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

Donc $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.

Or $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x)\geqslant 0$.

Donc $\cos(x)=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)=\frac{7}{9}$

$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

Utiliser les propriétés des arguments

68. 1. $\arg(z_1)=-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\arg(z_2)=-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

2. $\arg(z_1\times z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)[2\pi]=-\frac{11\pi}{12}[2\pi]$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)[2\pi]=\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

$\arg(z_1^5)=5\arg(z_1)[2\pi]=-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

69. 1. $|z|=\sqrt{4^2+(-4\sqrt{3})^2}=8$

On cherche un réel θ tel que :

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{4}{8}\\ \sin(\theta)=-\frac{4\sqrt{3}}{8}\end{cases}$ soit $\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Donc $\arg(z)=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)[2\pi]=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\arg(z^{1\,000}) = 1\,000 \times \arg(z)[2\pi] = \frac{-1000\pi}{3}[2\pi]$$

$$= \frac{-166\times 6\pi - 4\pi}{3}[2\pi] = -166\times 2\pi - \frac{4\pi}{3}[2\pi]$$

Donc $\arg(z^{1\,000}) = -\frac{4\pi}{3}[2\pi]$.

70. 1. Posons $z = -2\sqrt{3} - 2i$.

$|z| = 4$.

On cherche un réel θ tel que :

$$\begin{cases}\cos(\theta) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4}\\ \sin(\theta) = -\dfrac{2}{4}\end{cases} \text{ soit } \begin{cases}\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta) = -\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Donc $\arg(z) = -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

2. $\arg(z^3) = 3\times\arg(z)[2\pi] = 3\times\left(-\frac{5\pi}{6}\right)[2\pi]$

$$= -\frac{5\pi}{2}[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc z^3 est un nombre imaginaire pur.

Donc $(-2\sqrt{3} - 2i)^3$ est imaginaire pur.

Déterminer et utiliser la forme exponentielle

71. a) $z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $z_2 = 5\times 4\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 20e^{i\frac{\pi}{2}}$

c) $z_3 = \frac{2}{4}\times e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

72. a) $z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= 2 + i\times 2\sqrt{3}$$

b) $z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

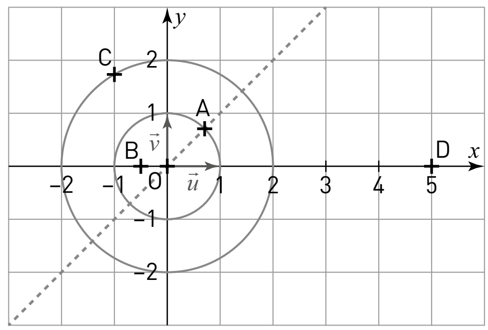
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\times\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

c) $z_3 = 2(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 2$

d) $z_4 = \sqrt{2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -\sqrt{2}$

73. $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_C = \sqrt{8}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

74.



75. $z^6 = \left(4e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = 4^6\times e^{i\frac{6\pi}{4}} = 4\,096e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Donc $z^6 = 4\,096\times\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

$z^6 = -4\,096i$

76. $z^{2\,019} = \left(5e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2\,019} = 5^{2\,019}\times e^{i\frac{2\,019\pi}{3}}$

Donc $z^{2\,019} = 5^{2\,019}\times e^{i673\pi} = 5^{2\,019}\times e^{i(336\times 2\pi+\pi)}$

$= 5^{2\,019}\times e^{i\pi} = -5^{2\,019}$

Donc $z^{2\,019}$ est réel.

77. $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \left(\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right)^2\left(\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right)^2$

$$= -\frac{1}{16}(e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta})(e^{2i\theta}-2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta})$$

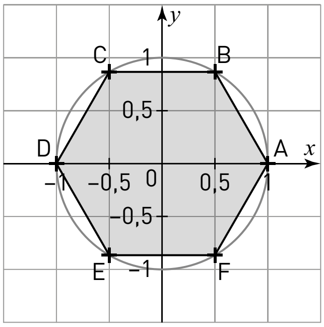
$$= -\frac{1}{16}(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta})(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta})$$

$$= -\frac{1}{16}(e^{4i\theta}-2e^{2i\theta}+1+2e^{2i\theta}-4+2e^{-2i\theta}+1-2e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta})$$

$$= -\frac{1}{16}(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}-2) = -\frac{1}{16}(2\cos(4\theta)-2) = \frac{1-\cos(4\theta)}{8}$$

Utiliser les racines de l'unité

78. 1. $\mathbb{U}_6 = \left\{1 ; e^{i\frac{\pi}{3}} ; e^{i\frac{2\pi}{3}} ; -1 ; e^{i\frac{4\pi}{3}} ; e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$



2. $P = 6 \times \left| e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right|$

$P = 6 \times \left| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 \right|$

$P = 6 \times \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right|$

$P = 6 \times \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$P = 6$

79. 1. $\mathbb{U}_{10} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0 ; 1 ; \ldots ; 9\}\right\}$

2. $P = 10 \times \left| e^{i\frac{2\pi}{10}} - 1 \right|$

$P = 10 \times \left| \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 \right|$

$P = 10 \times \sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2}$

$P \approx 6{,}18$

Utiliser les arguments en géométrie

80. 1. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 - 3i - (9 + 2i)}{3 - i - (9 + 2i)} = \frac{-10 - 5i}{-6 - 3i}$

$= \frac{(-10 - 5i)(-6 + 3i)}{(-6 - 3i)(-6 + 3i)} = \frac{75}{45}$

Donc $k = \frac{5}{3}$.

2. $\arg(k) = 0[2\pi]$

3. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[2\pi]$.

Donc A, B et C sont alignés.

81. 1. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-5 - i - (-3 + 2i)}{0 - (-3 + 2i)} = \frac{-2 - 3i}{3 - 2i}$

$= \frac{(-2 - 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-13i}{13}$

Donc $k = -i$.

2. $\arg(k) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

82. $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)[2\pi]$.

Or $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1 + 7i - (1 - i)}{-3 - 2i - (1 - i)} = \frac{-2 + 8i}{-4 - i}$

Donc $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{(-2 + 8i)(-4 + i)}{(-4 - i)(-4 + i)} = \frac{-34i}{17} = -2i$.

Donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg(-2i)[2\pi]. = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc ABC est rectangle en B.

83. $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)[2\pi]$.

Or $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1 + 4i - (2 + i)}{1 - 2i - (2 + i)} = \frac{-3 + 3i}{-1 - 3i}$.

Donc $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{(-3 + 3i)(-1 + 3i)}{(-1 - 3i)(-1 + 3i)} = \frac{-6 - 12i}{10} = \frac{-3 - 6i}{5}$.

$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ n'est pas un nombre imaginaire pur.

Donc $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Donc ABC n'est pas rectangle en B.

84. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

Or $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{-1+\frac{5}{2}i - (-2+i)}{1 - i - (3+2i)} = \dfrac{1+\frac{3}{2}i}{-2-3i}$.

Donc $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{\left(1+\frac{3}{2}i\right)(-2+3i)}{(-2-3i)(-2+3i)} = \dfrac{-\frac{13}{2}}{13} = -\dfrac{1}{2}$.

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(-\dfrac{1}{2}\right)[2\pi]$.

$= \pi[2\pi]$

Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

85. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

Or $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{3-(2+2i)}{2+i-(4+2i)} = \dfrac{1-2i}{-2-i}$

Donc $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{(1-2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{5i}{5} = i$.

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(i)[2\pi]$

$= \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

86. 1. $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \dfrac{2+i-1}{3-i-2i} = \dfrac{1+i}{3-3i}$

Donc $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \dfrac{(1+i)(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)} = \dfrac{6i}{18} = \dfrac{1}{3}i$.

Donc $\arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

2. Or $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right)[2\pi]$

$= \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

ABCD est un parallélogramme, qui a ses diagonales perpendiculaires.

Donc ABCD est un losange.

87. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

Or $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{3-i-(1+5i)}{-2+4i-(1+5i)} = \dfrac{2-6i}{-3-i}$

Donc $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{(2-6i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)} = \dfrac{20i}{10} = 2i$.

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \arg(2i)[2\pi]$

$= \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

Or ABCD est un parallélogramme.

Donc ABCD est un rectangle.

Exercices d'entraînement p. 65-67

Différentes formes d'un nombre complexe

88. a) $|1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

On cherche un réel $\theta \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Donc un argument de 1 + 2i est environ 1,11.

b) $|-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$

On cherche un réel $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Donc un argument de − 2 + i est environ 2,68.

c) $|4-3i| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$

On cherche un réel $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{4}{5} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$

Donc un argument de 4 – 3i est environ − 0,64.

d) $|-3-i| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

On cherche un réel $\theta \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-3}{\sqrt{10}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Donc un argument de $-3 - i$ est environ $-2,82$.

89. Posons $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$-z = -a - ib$

Donc $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\overline{z} = a - ib$.

Donc $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Donc $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.

90. Posons $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

$|\mathrm{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2}$.

Or $a^2 \leqslant a^2 + b^2$ donc $\sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, soit $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$

$|\mathrm{Im}(z)| = |b| = \sqrt{b^2}$.

Or $b^2 \leqslant a^2 + b^2$ donc $\sqrt{b^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, soit $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

91. $|3 - 3i| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$.

On cherche un réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{3}{\sqrt{18}} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{3}{\sqrt{18}} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc $\arg(z^n) = -n\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$(3 - 3i)^n$ est réel $\Leftrightarrow \arg((3 - 3i)^n) = 0[\pi]$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -n\frac{\pi}{4} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n = -4k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n \text{ est un multiple de } 4 \end{aligned}$$

92. 1. $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$.

On cherche un réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

$|z'| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Donc $\arg(z') = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

Donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi] = \frac{\pi}{12}[2\pi]$.

2. $$\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1 - i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1 + i)}{2(1 - i)(1 + i)} = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} - i^2\sqrt{2}}{2(1^2 - i^2)}$$

Donc $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

3. On a $\frac{z}{z'} = 1 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

Donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

93. 1. $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

$\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc $z = \sqrt{2} \times e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2. $z^n = (\sqrt{2})^n \times e^{-in\frac{\pi}{4}}$

Si n est entier naturel non nul multiple de 4, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 4k$.

Donc $z^n = (\sqrt{2})^{4k} \times e^{-i4k\frac{\pi}{4}} = 2^{2k} \times e^{-i4k\frac{\pi}{4}} = 2^{2k} \times e^{-ik\pi}$.

Or $e^{-ik\pi}$ est égal soit à 1 soit à -1 selon la valeur de k.

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 2^{2k} est un entier pair.

Donc z^n est un entier pair.

94. 1. $|z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

$\arg(z_A) = -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

Donc $z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$z'_A = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \times \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. $|z'_A| = 2$ et $\arg(z'_A) = \dfrac{\pi}{6}$.

3. a) $|z'| = |r| \times |z| = 1 \times |z| = |z|$.

$\arg(z') = \arg(r) + \arg(z)[2\pi]$

$= \dfrac{\pi}{3} + \arg(z)[2\pi]$

b) Soit M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe z'. M′ est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Pour construire le point M′ :

on trace le cercle de centre O et de rayon OM ;

on trace la médiatrice du segment [OM].

Le point M′ est à l'intersection du cercle et de la médiatrice.

95. Proposition 1 : fausse

$z - i = i(z + 1) \Leftrightarrow z - i = iz + i \Leftrightarrow z \times (1 - i) = 2i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2i}{1-i} \Leftrightarrow z = \dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-2+2i}{1-i^2} \Leftrightarrow z = -1 + i$

$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$

Donc l'équation a pour solution $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Proposition 2 : fausse

$1 + e^{2ix} = 1 + (\cos(2x) + i\sin(2x))$

$= 1 + (2\cos^2(x) - 1 + i2\sin(x)\cos(x))$

$= 2\cos(x)(\cos(x) + i\sin(x))$

$= 2\cos(x)e^{ix}$

Donc $1 + e^{2ix} \neq 2\cos(x)e^{-ix}$.

Nombres complexes et trigonométrie

96. D'après la formule de Moivre,

$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x) + i\sin(x))^3$

$= \cos^3(x) + 3\cos(x)(i\sin(x))^2 + 3\cos^2(x)(i\sin(x)) + (i\sin(x))^3$

Donc :

$$\begin{cases} \cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ \sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) \end{cases}$$

97. 1. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

2. $\cos^4(x) = \left(\dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right)^4$

$= \dfrac{1}{16}(e^{i4\theta} + 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} + 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta})$

$= \dfrac{1}{16}(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6)$

$= \dfrac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$

98.1. $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2. $S_n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$

$= (\sqrt{2})^n \times \left(e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}}\right)$

$= (\sqrt{2})^n \times 2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2(\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

Il faut étudier le signe de $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

- Si $n = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos(2k\pi) = 1.$

Donc $S_n = 2(\sqrt{2})^n(\cos(0) + i\sin(0))$.

- Si $n = 8k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Donc $S_n = (\sqrt{2})^{n+1}(\cos(0) + i\sin(0))$.

- Si $n = 8k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Donc $S_n = 0$ et il n'y a pas de forme trigonométrique.

- Si $n = 8k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Donc $S_n = (\sqrt{2})^{n+1}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

- Si $n = 8k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{4\pi}{4}\right) = \cos(\pi) = -1.$

Donc $S_n = 2(\sqrt{2})^n(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

– Si $n = 8k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Donc $S_n = (\sqrt{2})^{n+1}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

– Si $n = 8k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{6\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

Donc $S_n = 0$ et il n'y a pas de forme trigonométrique.

– Si $n = 8k + 7$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Donc $S_n = (\sqrt{2})^{n+1}(\cos(0) + i\sin(0))$.

3. Proposition 1 : vraie. Voir question 2.

$S_n = 2(\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

Proposition 2 : vraie. Pour tout entier n tel que $n = 8k + 2$ ou $n = 8k + 6$, avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $S_n = 0$.

99. 1. a) $\omega^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i2\pi}$

Donc $\omega^5 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.

b) $\omega^5 - 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1)$

c) $\omega^5 - 1 = 0$

Donc $(\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) = 0$.

Or $\omega \neq 1$, donc$\omega - 1 \neq 0$.

Donc $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Soit $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

2. $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$

$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$

$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}$

$= 1 + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right) + \left(e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)$

$= 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

3. $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right)$

Donc $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1.$

4. a) On a $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, donc

$$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1\right)=0$$

$$4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0.$$

Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation

$4x^2 + 2x - 1 = 0$.

b) $\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20$

Donc $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{20}}{8} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et

$x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{20}}{8} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Or $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$. Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Nombres complexes et géométrie

100. 1. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \arg\left(\dfrac{z_N - z_O}{z_M - z_O}\right)[2\pi]$

Or $\dfrac{z_N - z_O}{z_M - z_O} = \dfrac{\left(\frac{3+i}{3}\right)}{-3-i} = \dfrac{3+i}{-9-3i}$.

Donc $\dfrac{z_N - z_O}{z_M - z_O} = \dfrac{(3+i)(-9+3i)}{(-9-3i)(-9+3i)} = \dfrac{-30}{90} = -\dfrac{1}{3}$.

Donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \arg\left(-\dfrac{1}{3}\right)[2\pi] = \pi[2\pi]$.

Donc les points O,M et N sont alignés.

2. MNQP est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

$\Leftrightarrow z_N - z_M = z_Q - z_P \Leftrightarrow z_Q = z_N - z_M + z_P$

$\Leftrightarrow z_Q = \dfrac{3+i}{3} - (-3-i) + 3i \Leftrightarrow z_Q = 4 + \dfrac{13}{3}i$

Donc pour que MNQP soit un parallélogramme, l'affixe du point Q doit être égale à $4 + \dfrac{13}{3}$i.

101. 1. $AB = |z_B - z_A| = \left|\dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{2}i - 3\right|$

Donc $AB = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{7}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

De même, $AC = |z_C - z_A| = \left|-\dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}i\right| = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Et $BC = |z_C - z_B| = |-3 - 4i| = 5$.

On a $AB = AC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Donc ABC est rectangle et isocèle en A.

2. $z_I = \dfrac{z_B + z_C}{2} = 1 + \dfrac{3}{2}i$

3. ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C \Leftrightarrow z_D = z_B - z_A + z_C$

$\Leftrightarrow z_D = \dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{2}i - 3 + \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) \Leftrightarrow z_D = -1 + 3i$

Donc pour que ABDC soit un parallélogramme, l'affixe du point D doit être égale à $-1 + 3i$.

102. $z_B - z_A = 1 + 2i - (3 + i) = -2 + i$

$z_C - z_D = 2 + 4i - (4 + 3i) = -2 + i$

$z_B - z_A = z_C - z_D$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Donc ABCD est un parallélogramme.

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$BC = |z_C - z_B| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

AB = BC, donc ABCD est un losange.

$AC = |z_C - z_A| = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$

$BD = |z_D - z_B| = |3 + i| = \sqrt{10}$

AC = BD, donc ABCD est un rectangle

Donc ABCD est un carré.

103. 1. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times c = 36 - 4c$

Donc $\Delta = 4(9 - c)$.

Or $c > 9$, donc $\Delta < 0$.

Les deux solutions complexes sont :

$z_A = \dfrac{-(-6) - i \times \sqrt{-4(9-c)}}{2} = 3 - i\sqrt{c-9}$ et

$z_B = \dfrac{-(-6) + i \times \sqrt{-4(9-c)}}{2} = 3 + i\sqrt{c-9}$.

2. a) $z_B = \overline{z_A}$. D'où $|z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A|$.

Donc OB = OA. Donc OAB est isocèle en O.

b) OAB est rectangle $\Leftrightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\Leftrightarrow AB^2 = 2OB^2 \Leftrightarrow |z_B - z_A|^2 = 2 \times |z_B|^2$

$\Leftrightarrow |2i\sqrt{c-9}|^2 = 2 \times \left|3 + i\sqrt{c-9}\right|^2$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{c-9})^2 = 2 \times (3^2 + (\sqrt{c-9})^2)$

$\Leftrightarrow 4(c-9) = 2 \times (9 + c - 9) \Leftrightarrow 4c - 36 = 2c \Leftrightarrow c = 18$

Donc OAB est rectangle si et seulement si $c = 18$.

104. 1. $\dfrac{z - i}{z - (2 - i)} = 3 \Leftrightarrow z - i = 3(z - (2 - i))$

$\Leftrightarrow z - i = 3z - 6 + 3i$

$\Leftrightarrow 2z = 6 - 4i$

$\Leftrightarrow z = 3 - 2i$

Donc S = {3 – 2i}.

2. On a $z_M = 3 - 2i$.

$\dfrac{z_M - i}{z_M - (2 - i)} = 3$, donc $\arg\left(\dfrac{z_M - i}{z_M - (2 - i)}\right) = 0[2\pi]$.

Donc $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0[2\pi]$.

Donc A,B et M sont alignés.

3. Soit M le point d'affixe z_M,

solution de $\dfrac{z - i}{z - (2 - i)} = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\arg\left(\dfrac{z_M - i}{z_M - (2 - i)}\right) = 0[\pi]$.

Donc $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0[\pi]$. Donc A,B et M sont alignés.

105. 1. $\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} = x_1x_2 + y_1y_2$

2. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Or $z_1\overline{z_2} = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)$

$= x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)$.

$z_1\overline{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Donc $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $z_1\overline{z_2}$ est un nombre imaginaire pur.

106. Démontrons ce résultat par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $|z_n| = 4$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $|z_0| = |4i| = 4$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$est vraie.

$|z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} z_n\right| = \left|\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right| \times |z_n| = \dfrac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} \times 4$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$= 4$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = 4$.

Donc $OM_n = 4$ et tous les points M_n appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

107. a) [i ; –1 ; –i ; 1]

b) $\left[-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; 1\right]$

c) [i ; 0 ; 1]

d) $\left[\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -1 ; -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; 1\right]$

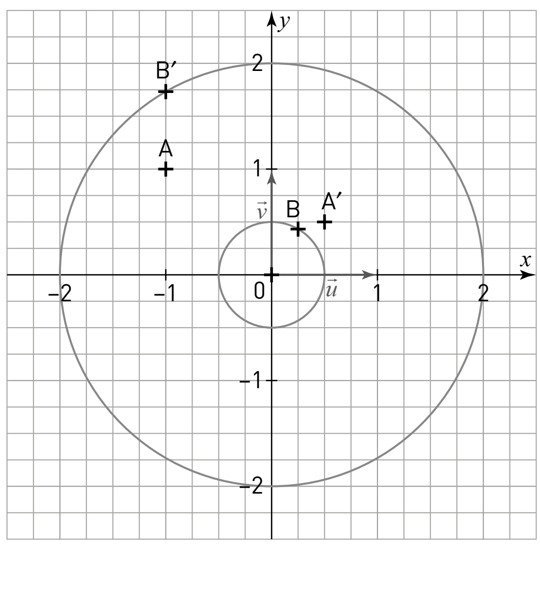
108. 1. a) $z'_A = -\dfrac{1}{z_A} = -\dfrac{1}{-1+i}$

$z'_A = -\dfrac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} = -\dfrac{-1-i}{(-1)^2 - i^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

b) $z'_B = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = -1 \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z'_B = 2e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

c)



2. a) $z' = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{re^{i\theta}} = -1 \times \frac{1}{r} \times e^{-i\theta}$

Donc $z = e^{i\pi} \times \frac{1}{r} \times e^{-i\theta} = \frac{1}{r}e^{i(\pi-\theta)}$.

b) Vrai : soit M un point, distinct de O, appartenant au disque de centre O et de rayon 1, sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1.

Alors $0 < OM < 1$.

$|z'| = \left|-\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Or $0 < |z| < 1$.

Donc $\frac{1}{|z|} > 1$ car la fonction inverse est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Donc $|z'| > 1$, soit $OM' > 1$.

Donc M′ est à l'extérieur de ce disque.

3. a) Une équation cartésienne du cercle Γ est :

$(x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = r^2$.

Soit $\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Donc $x^2 + x + y^2 = 0$.

b) $z' = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x+iy} = -\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$

Donc $z' = -\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$.

c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ.

Notons z son affixe et posons $z = x + iy$ avec x et y deux réels. Alors $x^2 + x + y^2 = 0$.

Donc $x^2 + y^2 = -x \neq 0$.

On a donc $\mathrm{Re}(z') = -\frac{x}{x^2+y^2} = 1$

Donc l'image M′ du point M par la fonction *f* appartient à la droite d'équation $x = 1$.

109. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = z_{n+1} - i = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i - i = \frac{1}{3}z_n - \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(z_n - i) = \frac{1}{3}u_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i)$ ».

Initialisation : pour $n = 0$,

$u_0 = z_0 - i = 1 - i$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^0(1-i) = 1 - i$.

Donc $u_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0(1-i)$.

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(1-i)$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie,

donc $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i)$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|u_n| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i)\right| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n\right| \times |1-i| = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sqrt{2}$.

b) [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée sur les éditions suivantes : « Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \mathbf{i}| = 0$ ».

$|z_n - i| = |u_n| = \left(\frac{1}{3}\right)^n\sqrt{2}$.

Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - i| = 0$.

c) $|z_n - i| = CA_n$.

Donc lorsque n tend vers $+\infty$, le point A_n tend vers le point C.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i)$

Donc $\arg(u_n) = \arg(1-i)[2\pi] = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) B_n a pour affixe u_n.

Or $\arg(u_n) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc tous les points B_n sont alignés sur la droite d'équation $y = -x$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_n - \text{i}$.

Donc $z_n = u_n + \text{i} = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-\text{i}) + \text{i} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \text{i}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

Posons $x = \text{Re}(z_n)$ et $y = \text{Im}(z_n)$.

On a alors $x = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $y = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Donc $y = 1 - x$.

Donc tous les points A_n appartiennent à la droite d'équation $y = -x + 1$.

110. 1. $|OA| = |2e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}| = |2| \times |e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}| = 2$

$|OB| = |2e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}| = |2| \times |e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}| = 2$

OA = OB donc OAB est isocèle en O.

De plus $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)[2\pi]$

Or $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}}{2e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}} = e^{\text{i}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

Donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc OAB est rectangle en O.

2. $\Delta = (-\sqrt{6})^2 - 4 \times 1 \times 2 = -2 < 0$

Donc $z_1 = \frac{\sqrt{6} - \text{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6} + \text{i}\sqrt{2}}{2}$.

Soit M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2.

Soit C le milieu de [AB]. Le cercle circonscrit au triangle OAB est le cercle de centre C et de rayon CO.

$$z_C = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2e^{\text{i}\frac{\pi}{4}} + 2e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}}{2} = e^{\text{i}\frac{\pi}{4}} + e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_C = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Donc $z_C = \text{i}\sqrt{2}$ et $OC = |z_C| = \sqrt{2}$.

$$\text{Or } |z_1 - z_C| = \left|\frac{\sqrt{6} - \text{i}\sqrt{2}}{2} - \text{i}\sqrt{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2} - \text{i}\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{6}$$

Donc $CM_1 = \sqrt{6} \neq \sqrt{2}$.

M_1 n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle OAB.

$$\text{Et } |z_2 - z_C| = \left|\frac{\sqrt{6} + \text{i}\sqrt{2}}{2} - \text{i}\sqrt{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Donc $CM_2 = \sqrt{2}$.

M_2 appartient au cercle circonscrit au triangle OAB.

Ensembles de points

111. a) $|2z - \text{i}| = 1 \Leftrightarrow \left|z - \frac{1}{2}\text{i}\right| = \frac{1}{2}$

Soit A le point d'affixe $\frac{1}{2}\text{i}$.

$|2z - \text{i}| = 1 \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.

b) $|\text{i} - 2z| = -1$

Un module est toujours positif ou nul.

Donc l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

c) $\frac{|z+1|}{|z+2|} = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z+2|$ et $z \neq -2$

Soit B le point d'affixe -1 et C le point d'affixe -2.

$\frac{|z+1|}{|z+2|} = 1 \Leftrightarrow BM = CM$

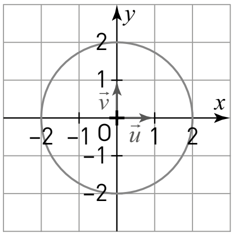
Donc l'ensemble cherché est la médiatrice de [BC].

d) Soit D le point d'affixe 2i et E le point d'affixe1 – 2i.

$$\arg\left(\frac{z - 2\text{i}}{z - 1 + 2\text{i}}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de diamètre [DE], privé des points D et E.

112. $z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$ car $|z| \geqslant 0$



113. Proposition 1 : vraie. Soit A(i) et B(–1).

$|z - \mathrm{i}| = |z + 1| \Leftrightarrow$ AM = BM. Donc M appartient à la médiatrice de [AB], et cette droite a pour équation $y = -x$.

Proposition 2 : fausse. Soit A(6) et B(–5i).

$|z - 6| = |z + 5\mathrm{i}| \Leftrightarrow$ AM = BM. Donc M appartient à la médiatrice de [AB]. Cet ensemble est une droite et non un cercle.

Proposition 3 : vraie. Soit z un nombre complexe différent de 2.

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\mathrm{i}z}{z-2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|\mathrm{i}z|}{|z-2|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|\mathrm{i}| \times |z|}{|z-2|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = |z - 2|$$

Soit C(2) et M(z). $|Z| = 1 \Leftrightarrow$ OM = CM.

L'ensemble des points M est donc la médiatrice de [OC] et cette droite passe par le point A(1 ; 0), qui est le milieu de [OC].

114. 1. $(z - \mathrm{i})(\overline{z - \mathrm{i}}) = 9 \Leftrightarrow |z - \mathrm{i}|^2 = 9$

$\Leftrightarrow |z - \mathrm{i}| = 3$ car $|z - \mathrm{i}| \geqslant 0$

Donc l'ensemble des points M d'affixe z est le cercle de centre C(i) et de rayon 3.

2. $(z - \mathrm{i})(\overline{z - \mathrm{i}}) = (z - \mathrm{i})(\overline{z} + \mathrm{i}) = z\overline{z} + \mathrm{i}z - \mathrm{i}\overline{z} - \mathrm{i}^2$

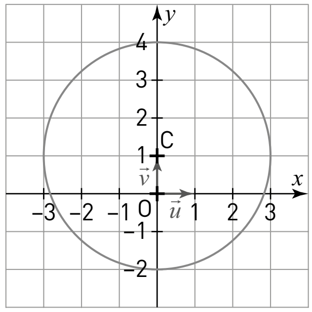
$= |z|^2 + \mathrm{i}(z - \overline{z}) + 1 = |z|^2 + \mathrm{i}(2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)) + 1$

$= |z|^2 - 2\mathrm{Im}(z) + 1$

3. $|z|^2 - 2\mathrm{Im}(z) = 8 \Leftrightarrow |z|^2 - 2\mathrm{Im}(z) + 1 = 9$

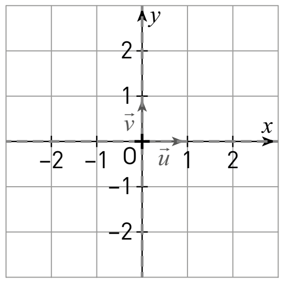
$\Leftrightarrow (z - \mathrm{i})(\overline{z - \mathrm{i}}) = 9$

Donc d'après la question 1 :



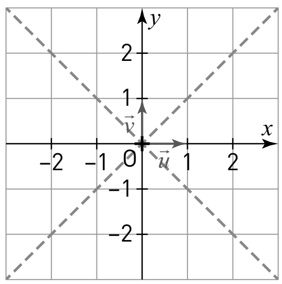
115. a) $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z^2) = 0[\pi]$ ou $z^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\arg(z) = 0[\pi]$ ou $z = 0 \Leftrightarrow \arg(z) = 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$ ou $z = 0$



b) $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z^2) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $z^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $z = 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ ou $z = 0$



c) Posons $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels.

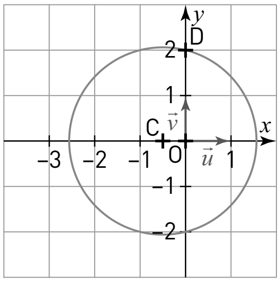
$g(z) = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y + 1)$

$= x^2 - \mathrm{i}xy + x + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2y^2 + \mathrm{i}y$

$= x^2 + y^2 + x + \mathrm{i}y$

$$\mathrm{Re}(g(z)) = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = 4 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{17}{4}$$

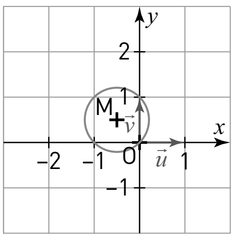
Il faut tracer le cercle de centre $C\left(-\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{2}$. Ce cercle passe par D(0 ; 2).



d) $\text{Re}(g(z)) = \text{Im}(g(z)) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = y$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Il faut tracer le cercle de centre $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ce cercle passe par O(0 ; 0).



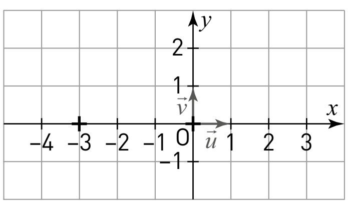
116. 1. $f(z) = \dfrac{x+\text{i}y-1}{x+\text{i}y+1} = \dfrac{(x-1+\text{i}y)(x+1-\text{i}y)}{(x+1+\text{i}y)(x+1-\text{i}y)}$

Donc $f(z) = \dfrac{x^2 + x - \text{i}xy - x - 1 + \text{i}y + \text{i}xy + \text{i}y - \text{i}^2y^2}{(x+1)^2 - (\text{i}y)^2}$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1 + \text{i}2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

2. a) $f(z) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z+1} = 2 \Leftrightarrow z - 1 = 2(z+1) \Leftrightarrow z = -3$

L'ensemble cherché est le point d'affixe –3.

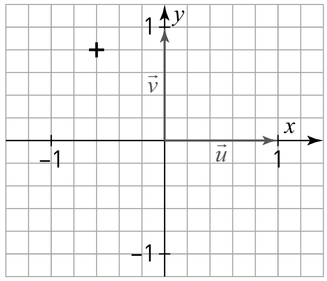


b) $f(z) = 2\text{i} \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z+1} = 2\text{i} \Leftrightarrow z - 1 = 2\text{i}(z+1)$

$$\Leftrightarrow z(1-2\text{i}) = 1 + 2\text{i} \Leftrightarrow z = \frac{1+2\text{i}}{1-2\text{i}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+2\text{i})(1+2\text{i})}{(1-2\text{i})(1+2\text{i})} \Leftrightarrow z = \frac{-3+4\text{i}}{5}$$

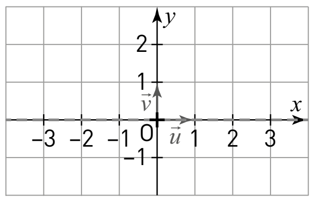
L'ensemble cherché est le point d'affixe –0,6 + 0,8i.



c) $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2y}{(x+1)^2 + y^2} = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ et $z \neq -1$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = 0$ privée du point d'affixe –1.



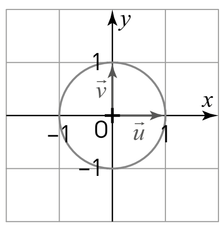
d) $f(z) \in \text{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(f(z)) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $z \neq -1$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ et $z \neq -1$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe –1.



117. Travail de l'élève.

118. Travail de l'élève.

Exercices bilan p. 68

119. Différentes formes d'un nombre complexe

1. $|z_1| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$. Donc :

$$z_1 = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{i}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 5\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$$

2. $z_2 = 3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2} - \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3. D'une part, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5-5\text{i}}{\frac{3}{2} - \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{(5-5\text{i})\left(\frac{3}{2} + \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} - \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Donc $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{15+15\sqrt{3}}{18} + \text{i} \times \dfrac{-15+15\sqrt{3}}{18}$.

D'autre part, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}}{3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$.

4. $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{15+15\sqrt{3}}{18}$.

Donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{-15+15\sqrt{3}}{18}$.

Donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

5. $z_1^{400} = \left(5\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{400} = 5^{400}(\sqrt{2})^{400}\text{e}^{-\text{i}\times 400\frac{\pi}{4}}$

$$= 5^{400}\ 2^{200}\ \text{e}^{-\text{i}\times 50\times 2\pi} = 5^{400}\ 2^{200}$$

120. Nombres complexes et géométrie

1. a) $|z_A - z_M| = |-2| = 2$

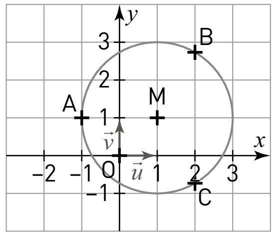
$|z_B - z_M| = |1 + \text{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$|z_C - z_M| = |1 - \text{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

Donc MA = MB = MC = 2.

Donc A, B et C appartiennent au cercle de centre M et de rayon 2.

b)



2. $AB = |z_B - z_A| = |3 + \text{i}\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |3 - \text{i}\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |-\text{i}2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

Donc AB = BC = AC, donc ABC est équilatéral.

3. $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \text{i}$

4. ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$

$\Leftrightarrow z_D = -1 + \text{i}(1 - 2\sqrt{3})$

Donc l'affixe de D est $-1 + \text{i}(1 - 2\sqrt{3})$.

b) ABC est un triangle équilatéral. Donc ABCD est un losange.

5. $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}) = \arg\left(\dfrac{z_M - z_B}{z_D - z_B}\right)[2\pi]$

Or $\dfrac{z_M - z_B}{z_D - z_B} = \dfrac{-1-\text{i}\sqrt{3}}{-3-\text{i}3\sqrt{3}} = \dfrac{(-1-\text{i}\sqrt{3})(-3+\text{i}3\sqrt{3})}{(-3-\text{i}3\sqrt{3})(-3+\text{i}3\sqrt{3})}$.

Donc $\dfrac{z_M - z_B}{z_D - z_B} = \dfrac{3 - \text{i}3\sqrt{3} + \text{i}3\sqrt{3} - \text{i}^2 3\sqrt{3}\sqrt{3}}{9 - (\text{i}3\sqrt{3})^2} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

Donc $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}) = \arg\left(\dfrac{1}{3}\right)[2\pi] = 0[2\pi]$.

Donc B, D et M sont alignés.

121. Ensemble de points

1. a) Soit A le point d'affixe 4.

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 3.

b) Soit B(2 – 3i) et C(–1 + 7i)

$|z - 2 + 3\text{i}| = |z + 1 - 7\text{i}| \Leftrightarrow BM = CM$.

L'ensemble cherché est la médiatrice de [BC].

c) L'ensemble cherché est l'ensemble des points appartenant à l'axe des abscisses et ayant une abscisse strictement négative.

d) Soit D(2 − i) et E(5i)

$$\arg\left(\frac{z-2+\mathrm{i}}{z-5\mathrm{i}}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{DM})=\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [DE], privé des points D et E.

2. $\mathbb{U}_{12}=\left\{e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{12}}, k\in\{0;1;2;\ldots;11\}\right\}$

$\mathbb{U}_{12}$ est l'ensemble des affixes du polygone.

Soit P le périmètre du polygone.

$$P=12\times\left|e^{\frac{2\pi}{12}}-1\right|=12\times\left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-1\right|$$

$$=12\times\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|=12\times\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=12\times\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

122. Trigonométrie

1. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$

Donc $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x).$

2. D'après la formule d'Euler,

$$\sin^3(x)=\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x})\right)^3$$

$$=\frac{1}{8\mathrm{i}^3}[(e^{\mathrm{i}x})^0(-e^{-\mathrm{i}x})^3+3(e^{\mathrm{i}x})^1(-e^{-\mathrm{i}x})^2+3(e^{\mathrm{i}x})^2(-e^{-\mathrm{i}x})^1$$
$$+(e^{\mathrm{i}x})^3(-e^{-\mathrm{i}x})^0)$$

$$=-\frac{1}{8\mathrm{i}}(-e^{-\mathrm{i}3x}+3e^{\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}2x}-3e^{\mathrm{i}2x}e^{-\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}3x})$$

$$=-\frac{1}{8\mathrm{i}}(-e^{-\mathrm{i}3x}+3e^{-\mathrm{i}x}-3e^{\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}3x})$$

$$=-\frac{1}{8\mathrm{i}}\times(e^{\mathrm{i}3x}-e^{-\mathrm{i}3x}-3(e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}))$$

$$=-\frac{1}{8\mathrm{i}}(2\mathrm{i}\sin(3x)-3\times 2\mathrm{i}\sin(x))$$

$$=\frac{-\sin(3x)+3\sin(x)}{4}$$

3. $\cos(4x)+\mathrm{i}\sin(4x)=(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4$

$=\cos^4(x)+4\cos^3(x)(\mathrm{i}\sin(x))$

$+6\cos^2(x)(\mathrm{i}\sin(x))^2+4\cos(x)(\mathrm{i}\sin(x))^3+(\mathrm{i}\sin(x))^4$

Or $\cos(4x)=\mathrm{Re}((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4)$

Donc $\cos(4x)=\cos^4(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x).$

123. Suites de nombres complexes

1. a) $\left|1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Donc $1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$

b) $z_0=1$

$$z_1=\left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_0=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times 1=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2=\left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_1=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

c) Démontrons ce résultat par récurrence.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère

la propriété $P(n)$: « $z_n=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$ ».

Initialisation : pour $n=0$, $z_0=1$ et $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{\mathrm{i}0\frac{\pi}{6}}=1,$

donc $z_0=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{\mathrm{i}0\frac{\pi}{6}}.$

Donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $z_{n+1}=\left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$

Donc $z_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} \times \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}\right)$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{6}\right)} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \times e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, donc $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

b) O, A_0 et A_n sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n}) = 0[\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_n}{z_0}\right) = 0[\pi] \Leftrightarrow \arg(z_n) = 0[\pi] \Leftrightarrow n\frac{\pi}{6} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = k \times 6$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si n est un multiple de 6.

3. a) d_n représente la distance entre les points A_n et A_{n+1}.

b) $d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

Donc $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$z_{n+2} - z_{n+1}$

$$= \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right|$$

$$= \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n$$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Donc $d_n = d_0 \times q^n = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

Donc $|z_n| = \left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}\right| = \left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right| \times \left|e^{in\frac{\pi}{6}}\right|$.

Donc $|z_n| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

$$|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \frac{3}{9}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} \times \frac{4}{3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2(n+1)}$$

Donc $|z_n|^2 + d_n{}^2 = |z_{n+1}|^2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $OA_n^2 + A_n A_{n+1}^2 = OA_{n+1}^2$.

Donc $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n.

5. $OA_4 A_5$ est rectangle en A_4.

$OA_5 A_6$ est rectangle en A_5.

Il faut donc tracer la perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4.

Puis tracer le cercle de diamètre $[OA_6]$.

Le point A_5 est l'intersection de la droite et du cercle.

6. a)

```
n=0
u=1
while u<=10 :
    n=n+1
    u=2/sqrt(3)*u
print(n)
```

b) Le plus petit entier n tel que $|z_n| > 10$ est 17.

Préparer le BAC Je me teste p. 70

124. B **125.** C **126.** C

127. D **128.** C **129.** C

130. C

Préparer le BAC Je révise p. 71

131. Lecture graphique

a) $z_A = 3 + i$

b) $|z_B| = \sqrt{8}$ et $\arg(z_B) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$|z_C| = 2$ et $\arg(z_C) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

c) $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

132. Forme trigonométrique, forme exponentielle

1. $|z_1| = 4$ et $\arg(z_1) = -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

$|z_2| = \sqrt{5}$ et $\arg(z_2) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

2. $z_1 = 4 \times \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

$z_1 = 4 \times e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

3. $z_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2}$

133. Utiliser les formules d'addition et de duplication

1. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$

$\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)$

2. $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 2 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1$

$= 2 \times \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

134. Effectuer des calculs en utilisant une forme adaptée

1. a) $z_1 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_1^6 = (8\sqrt{2})^6\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^6 = 8^6 \times \sqrt{2}^6 \times e^{i\frac{30\pi}{4}}$

$= 2\,097\,152 \times e^{i\frac{15\pi}{2}} = 2\,097\,152 \times e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2\,097\,152i$

b) $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{4}[2\pi]$

$\arg(z_1^{1500}) = 1500 \times \arg(z_1)[2\pi]$

$\arg(z_1^{1500}) = 1500 \times \frac{5\pi}{4}[2\pi]$

$\arg(z_1^{1500}) = 1\,875\pi[2\pi]$

$\arg(z_1^{1500}) = \pi[2\pi]$

Donc z_1^{500} est un nombre reel.

2. $\text{Im}(z_1) = -8$

$z_2 = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{8\sqrt{2}}{2} - i\frac{8\sqrt{2}}{2}$

Donc $\text{Im}(z_2) = -4\sqrt{2}$.

$\text{Im}(z_1) \neq \text{Im}(z_2)$. Donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des abscisses.

135. Formules d'Euler et de Moivre

1. $\sin^4(x) = \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^4$

$= \frac{1}{16i^4} \times \left(\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(e^{ix})^k(-e^{-ix})^{4-k}\right)$

$= \frac{1}{16} \times (e^{4ix} - 4e^{-i2x} + 6 - 4e^{i2x} + e^{-4ix})$

$= \frac{1}{16}(2\cos(4x) - 4 \times 2\cos(2x) + 6)$

$= \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}$

2. $\cos(4x) + i\sin(4x) = (\cos(x) + i\sin(x))^4$

Après calcul, on a :

$\sin(4x) = -4\cos(x)\sin^3(x) + 4\cos^3(x)\sin(x)$

136. Nombres complexes et géométrie

1. $OA = |z_A - z_0| = 2$

$OB = |z_B - z_0| = 2$

$OC = |z_C - z_0| = 2$

Donc A,B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon2.

2. ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A \Leftrightarrow z_D = -4i$

Donc les coordonnées de D sont (0 ; –4).

3. Soit I le centre du parallélogramme. I est le milieu de [AC].

Donc $z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{2}$.

4. a) $\dfrac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-2\sqrt{3} + 2i}{\sqrt{3} + i + 2i} = i \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc $\arg\left(\dfrac{z_E - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires.

137. Ensemble de points

a) L'ensemble des points M est le cercle de centre A d'affixe 3i et de rayon $\sqrt{5}$.

b) L'ensemble des points M est la médiatrice de [BC] avec B d'affixe 3 + 2i et C d'affixe –4i.

c) L'ensemble des points M est la demi-droite [OD), privée de O, avec D d'affixe –i.

d) L'ensemble des points M est le cercle de diamètre [EF] privé des points E et F, avec E d'affixe 3 + 2i et F d'affixe –3 – 8i.

138. Racines de l'unité

1. $\mathbb{U}_7 = \left\{ e^{\frac{2ki\pi}{7}} ; k \in \{0;1;\ldots;6\} \right\}$

2. $L = \left| e^{\frac{2i\pi}{7}} - 1 \right| \approx 0{,}87$. La longueur des côtés est environ 0,87.

$P = 7 \times L \approx 6{,}07$. Le périmètre est environ 6,07.

139. Suites de nombres complexes

1. $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+2}}) = \arg\left(\dfrac{z_{n+2}}{z_n}\right)[2\pi]$.

Or $z_{n+2} = \dfrac{i}{2} z_{n+1} = \dfrac{i}{2} \times \dfrac{i}{2} z_n = -\dfrac{1}{2} z_n$.

Donc $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+2}}) = \arg\left(-\dfrac{1}{2}\right)[2\pi]$.

$(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+2}}) = -\pi[2\pi]$.

Donc O,M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. $|z_0| = 50$; $|z_1| = \left| \dfrac{i}{2} \times 50 \right| = 25$

et $|z_3| = \left| \dfrac{i}{2} \times \dfrac{i}{2} \times 50 \right| = \dfrac{25}{2}$.

3. On conjecture que $|z_n| = 50 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $|z_n| = 50 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $|z_0| = 50$ et $50 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 50$.

Donc $|z_0| = 50 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

$|z_{n+1}| = \left| \dfrac{i}{2} z_n \right| = \left| \dfrac{i}{2} \right| \times |z_n| = \dfrac{1}{2} \times 50 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

d'après l'hypothèse de récurrence

$= 50 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Donc $P(n + 1)$est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = 50 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

5. a) M_n appartient au disque de centre 0 et de rayon 0,5 si et seulement si $|z_n| \leqslant 0{,}5$.

```
n=0
u=0
while u>0.5
    n=n+1
    u=1/2*u
print(n)
```

b) Cet entier est 7.

Exercices vers le supérieur p. 72-73

140. Module et argument

Proposition 1 : vraie.

$$|z| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{2}+i\sqrt{6}|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z) = \arg(1+i) - \arg(\sqrt{2}-i\sqrt{6})[2\pi] = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$$

$$= \frac{7\pi}{12}[2\pi]$$

Proposition 2 : fausse.

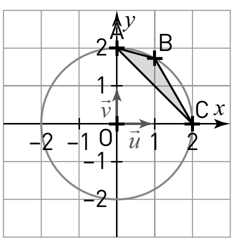
$$z = -2\times e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\times e^{i\pi}\times e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\times e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Donc $|z| = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{7\pi}{4}[2\pi]$.

Proposition 3 : fausse. Contre-exemple :

A(1 + i) et B(−1 − i). $z_A \neq \overline{z_B}$.

Proposition 4 : fausse. Contre-exemple :



Proposition 5 : vraie.

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)[2\pi] = \arg(z_B) - \arg(z_A)[2\pi]$$

$$= -\pi[2\pi]$$

Donc O, A et B sont alignés.

141. Nombres complexes et géométrie (1)

Proposition 1 : fausse.

$$|z_A| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$z_A = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\times e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Proposition 2 : fausse.

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour rayon $|z_A| = \sqrt{2}$.

Donc $z_B = \sqrt{2}$.

Proposition 3 : vraie.

OBEA est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AE}$

$\Leftrightarrow z_B - z_O = z_E - z_A \Leftrightarrow z_E = z_B + z_A - z_O \Leftrightarrow z_E = \sqrt{2} + 1 + i - 0$

Or OA = OB. Donc OBEA est un losange.

Donc on a bien $z_E = (1+\sqrt{2}) + i$.

Proposition 4 : fausse.

$$OE = |z_E| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

142. Nombres complexes et géométrie (2)

1. $AB = |z_B - z_A| = |2i - (1 - xi)| = |-1 + i(2 + x)|$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (2+x)^2} = \sqrt{1+4+4x+x^2}$$

$$= \sqrt{x^2+4x+5}$$

$AC = |z_C - z_A| = |-2 - (1 - xi)| = |-3 + xi| = \sqrt{(-3)^2 + x^2}$

$$= \sqrt{x^2+9}$$

2. ABC est iscoèle en A $\Leftrightarrow$ AB = AC

$\Leftrightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = x^2 + 9 \Leftrightarrow x = 1$

Donc ABC est isoscèle en A si et seulement si $x = 1$.

3. $BC = |z_C - z_B| = |-2 - 2i|$

Donc $BC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

Or si $x = 1$, alors $AB = \sqrt{10}$. Donc AB ≠ BC.

Donc ABC ne peut pas être équilatéral.

4. ABCD est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$

$\Leftrightarrow z_D = -2 - 2i + 1 - xi \Leftrightarrow z_D = -1 + i(-2 - x)$

Donc l'affixe de D est $z_D = -1 + i(-2 - x)$.

143. Résolution d'équation

Si $n = 0$, l'équation devient $\overline{z} = 1$. Donc S = {1}.

Si $n = 1$, l'équation devient $\overline{z} = z$. Donc S = $\mathbb{R}$.

Si $n \geqslant 2$, 0 et 1 sont deux solutions particulières de cette équation.

Si $z \neq 0$ et $z \neq 1$

$$z^n = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |\overline{z}| \\ \arg(z^n) = \arg(\overline{z})[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |z| \\ n \times \arg(z) = -\arg(z)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \;\; ou \;\; |z| = 1 \\ (n+1) \times \arg(z) = 0[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = 0 + \dfrac{2k\pi}{n+1} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{0\right\} \cup \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n+1}},\ k \in \left\{0\,;1\,;2\,;\ldots;n\right\}\right\}$.

144. Suite de nombres complexes

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $z_{20} = e^{i\frac{40\pi}{3}}$

a) Faux.

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_{20}}) = \arg\left(\frac{z_{20} - 0}{z_1 - 0}\right)[2\pi] = \arg\left(\frac{e^{i\frac{40\pi}{3}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right)[2\pi]$$

$$= \arg\left(e^{i\frac{38\pi}{3}}\right)[2\pi] = \frac{38\pi}{3}[2\pi] = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

Donc O, M_1 et M_{20} ne sont pas alignés.

b) Vrai. $z_6 = e^{i\frac{12\pi}{3}} = e^{i\times 4\pi} = 1$; $z_9 = e^{i\frac{18\pi}{3}} = e^{i\times 6\pi} = 1$.

Donc M_6 et M_9 sont confondus.

Donc O,M_6 et M_9 sont alignés.

c) Faux. Voir question a).

d) Faux. Voir question c).

145. Somme des racines *n*-ièmes de l'unité

1. Si $n = 1$, $S_1 = \omega^0 = 1$.

2. Si $n \geqslant 2$,

$S_n - S_n\,\omega = \omega^0 + \omega^1 + \ldots + \omega^{n-1} - (\omega^1 + \omega^2 + \ldots + \omega^n)$

Donc $S_n - S_n\,\omega = \omega^0 - \omega^n$

$S_n(1 - \omega) = 1 - \omega^n$.

Donc $S_n = \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega}$ car $\omega \neq 1$.

146. Produit des racines *n*-ièmes de l'unité

$P_n = \omega^0 \times \omega^1 \times \omega^2 \times \ldots \times \omega^{n-1} = \omega^{0+1+2+\ldots+(n-1)}$

$$= \omega^{\frac{(n-1)n}{2}} = e^{\frac{2i\pi}{n}\times\frac{(n-1)n}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

Si n est pair, alors $n - 1$ est impair.

Donc $P_n = -1$.

Si n est impair, alors $n - 1$ est pair.

Donc $P_n = 1$.

147. Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

1. $z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

La racine n-ième de 0 est 0.

2. $z^n = a \Leftrightarrow z^n = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = r \\ \arg(z^n) = \theta[2\pi] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = r \\ n \times \arg(z) = \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = r^{\frac{1}{n}} \\ \arg(z) = \dfrac{\theta}{n}\left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

Donc les racines n-ièmes de a sont les nombres complexes de la forme $r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ (n-1)\}$.

3. a) $|a| = \sqrt{5^2 + (-5\sqrt{3})^2} = 10$

$$a = 10\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Les racines 4-ièmes de a sont donc :

$$10^{\frac{1}{4}}e^{-i\frac{\pi}{12}}\,;\,10^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{5\pi}{12}}\,;\,10^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{11\pi}{12}}\,;\,10^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

b) $\sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Donc $S = \left\{2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{18}}\,;\,2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{13\pi}{18}}\,;\,2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{25\pi}{18}}\right\}$.

148. Une fonction complexe

1. $f(z) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z-i} = 1 \Leftrightarrow z - 1 = z - i \Leftrightarrow -1 = -i$

Donc 1 n'a pas d'antécédent par f.

2. $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(f(z)) = 0[\pi]$ ou $f(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0[\pi] \text{ ou } \frac{z-1}{z-i} = 0$$

Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe i.

$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0[\pi]$ ou $z = 1$

L'ensemble cherché est donc la droite (AB), privée du point B.

3. $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $f(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } \frac{z-1}{z-i} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } z = 1$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre [AB], privé du point B.

4. $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow AM = BM$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AB].

149. Triangle équilatéral

1. a) $1 + j + j^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $1 + j + j^2 = 0$.

b) $-j^2 = -\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc $-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. ABC est un triangle équilatéral direct $\Leftrightarrow$ AB = AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow |b-a| = |c-a|$ et $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = -j^2$

3. ABC est un triangle équilatéral direct

$\Leftrightarrow c - a = -j^2(b-a)$

$\Leftrightarrow (-1-j^2)a + j^2b + c = 0$

$\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0$

$\Leftrightarrow j^2(ja + j^2b + c) = 0$

$\Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0$ car $j^3 = 1$.

4. ABC est un triangle équilatéral indirect

$\Leftrightarrow$ BAC est un triangle équilatéral direct

$\Leftrightarrow b + ja + j^2c = 0$ d'après la question 3.

Donc ABC est un triangle équilatéral.

$\Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0$ ou $b + ja + j^2c = 0$

$\Leftrightarrow (a + jb + j^2c)(b + ja + j^2c) = 0$

$\Leftrightarrow ab + j(a^2 + b^2) + j^2(ac + ab + bc) + j^3(bc + ac) + j^4c^2 = 0$

$\Leftrightarrow (ab + bc + ac)(1 + j^2) + j(a^2 + b^2 + c^2) = 0$

$\Leftrightarrow (ab + bc + ac)(-j) + j(a^2 + b^2 + c^2) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ car $j \neq 0$

150. Inégalité triangulaire (1)

1. $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'})$

$= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}$

$= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2$

$= |z|^2 + 2\text{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$

2. Posons $z'' = x'' + iy''$ avec x'' et y'' deux réels.

$|z''| = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}$

Or $(y'')^2 \geqslant 0$. Donc $|z''| \geqslant \sqrt{(x'')^2}$.

Soit $|z''| \geqslant x''$. Donc $\text{Re}(z'') \leqslant |z''|$.

Il y a égalité lorsque $y'' = 0$ et $x'' \geqslant 0$, donc lorsque z est un nombre réel positif.

3. $\text{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z\overline{z'}|$

Donc $\text{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z| \times |\overline{z'}|$.

Soit $\text{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z| \times |z'|$, $|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2 \times |z| \times |z'| + |z'|^2$

Donc $|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$.

4. Comme $|z + z'| \geqslant 0$, et $|z| + |z'| \geqslant 0$,

alors $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

5. a) $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \text{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}| \Leftrightarrow z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$

D'après la question 2.

b) [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée sur les éditions suivantes : « ... Tel que $z' = \lambda z$ **ou $z = 0$**. »

$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z\overline{z'} = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $|z + z'| = |z| + |z'|$.

Sinon, $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z\overline{z'} = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$

$\Leftrightarrow z\overline{z'} \times z' = z'$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow z|z'| = \lambda z'$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$

$\Leftrightarrow z' = \dfrac{|z'|}{\lambda}z$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow z' = \lambda' z$, avec $\lambda' \in \mathbb{R}^{+*}$

Donc $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ tel que $z' = \lambda z$, ou $z = 0$.

6. a) $OM' \leqslant OM + MM'$

b) Il y a égalité lorsque O,M et M'sont alignés dans cet ordre ou que deux points sont confondus.

151. inégalité triangulaire (2)

1. a) $z = (z - z') + z'$.

En utilisant le résultat de l'exercice 150, on a

$|z| \leqslant |z - z'| + |z'|$.

Donc $|z| - |z'| \leqslant |z - z'|$.

b) $z' = (z' - z) + z$.

En utilisant le résultat de l'exercice 150, on a

$|z'| \leqslant |z' - z| + |z|$.

Donc $|z'| - |z| \leqslant |z' - z|$.

2. D'après la 1.b) $|z| - |z'| \geqslant -|z' - z|$.

Donc $-|z' - z| \leqslant |z| - |z'| \leqslant |z - z'|$.

Donc $|(|z| - |z'|)| \leqslant |z - z'|$.

152. Transformation du plan

a) M'est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b, si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$, soit $z' - z = b$, donc $z' = z + b$.

b) M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre A, si et seulement si $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM'}$, soit $a - z = z' - a$, donc $z' = -z + 2a$.

153. Exponentielle d'un nombre complexe

1. $e^{4+i\frac{\pi}{2}} = e^4 \times e^{i\frac{\pi}{2}} = e^4 \times \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = i \times e^4$

2. $|e^z| = |e^a \times e^{ib}| = |e^a| \times |e^{ib}| = e^a$

$\arg(e^z) = \arg(e^a) + \arg(e^{ib})[2\pi] = 0 + b[2\pi] = b[2\pi]$

3. Pour tout nombre complexe z et z',

Posons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a', b' des réels.

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Donc $e^{z+z'} = e^{a+a'} e^{i(b+b')} = e^a e^{a'} e^{ib} e^{ib'} = e^z \times e^{z'}$

4. $e^z = -e \Leftrightarrow \begin{cases} |e^z| = |-e| \\ \arg(e^z) = \arg(-e)[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = e \\ b = \pi[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \pi[2\pi] \end{cases}$

Donc $S = \{1 + i(\pi + k2\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

154. Formule d'addition

1. $$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{p+q}{2}} e^{i\frac{-p+q}{2}}$$

$$= e^{i\frac{p+q}{2}} \times \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)$$

$$= e^{i\frac{p+q}{2}} \times \left(2 \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)$$

$$= 2e^{i\frac{p+q}{2}} \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2. En considérant la partie réelle des deux termes de l'égalité, on obtient :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

3. En considérant la partie imaginaire des deux termes de l'égalité, on obtient :

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

155. Construction d'un pentagone régulier

On trace le cercle de centre O et de rayon 1. Soit U le point d'affixe 1 et V le point d'affixe i.

On place le point A d'affixe $-\dfrac{1}{2}$.

À l'aide du compas, on place le point B sur l'axe des abscisses, tel que AB = AV.

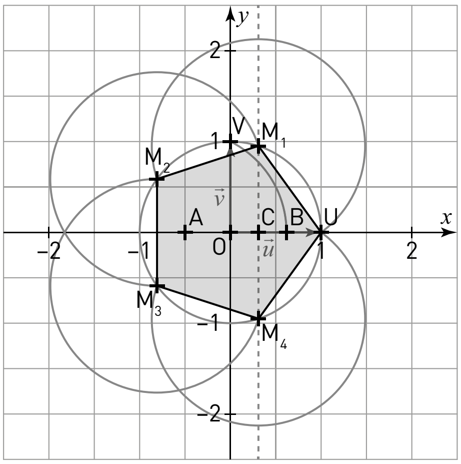
On a donc $AV = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Donc B a pour affixe $\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

On place le point C, milieu de [OB].

Donc C a pour affixe $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

On trace la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par C. Soit M_1 l'intersection de cette droite et du cercle. Pour tracer le pentagone, on reporte ensuite la distance UM_1 comme ci-dessous.



156. Transformation de Fourier discrète

1. Pour $n = 2$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$

et $X_l = \sum_{k=0}^{1} x_k \omega^{-k\times l}$

$X_0 = x_0 \times \omega^{-0\times0} + x_1 \times \omega^{-1\times0} = x_0 + x_1$

et $X_1 = x_0 \times \omega^{-0\times1} + x_1 \times \omega^{-1\times1} = x_0 + x_1 \times (-1)^{-1} = x_0 - x_1$

La transformée de Fourier de $(x_0 ; x_1)$ est donc $(x_0 + x_1 ; x_0 - x_1)$.

2.a) Pour $n = 3$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $X_l = \sum_{k=0}^{2} x_k \omega^{-k\times l}$.

La transformée de Fourier de $(x_0 ; x_1 ; x_2)$ est $(X_0 ; X_1 ; X_2)$ avec :

$X_0 = x_0\omega^{-0\times0} + x_1\omega^{-1\times0} + x_2\omega^{-2\times0} = x_0 + x_1 + x_2$

$X_1 = x_0\omega^{-0\times1} + x_1\omega^{-1\times1} + x_2\omega^{-2\times1} = x_0 + x_1\omega^{-1} + x_2\omega^{-2}$

$= x_0 + x_1 e^{-i\frac{2\pi}{3}} + x_2 e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

$X_2 = x_0\omega^{-0\times2} + x_1\omega^{-1\times2} + x_2\omega^{-2\times2} = x_0 + x_1\omega^{-2} + x_2\omega^{-4}$

$= x_0 + x_1 e^{-i\frac{4\pi}{3}} + x_2 e^{-i\frac{8\pi}{3}} = x_0 + x_1 e^{-i\frac{4\pi}{3}} + x_2 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

b) Donc la transformée de Fourier de (1 ; 0 ; 1) est $\left(2 ; 1+e^{-i\frac{4\pi}{3}} ; 1+e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

Travaux pratiques p. 74-75

TP1. Lieu de points

• **Durée estimée :** 45 min

• **Objectif :** Étudier des ensembles de points en utilisant un logiciel de géométrie dynamique pour faire des conjectures.

A. Conjecture avec un logiciel de géométrie dynamique

1. a) b) c) d) Sur ordinateur.

e) On conjecture que le lieu décrit par l'ensemble des points M′ est le cercle de centre O et de rayon 1.

2. On conjecture que le lieu décrit par l'ensemble des points M′ est :

a) le cercle de centre O et de rayon 0,5 ;

b) le cercle de centre O et de rayon 2 ;

c) la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$;

d) la cercle de centre $C\left(0 ; -\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

B. Étude théorique

1 $f(z) = z \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} = z \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z = 1$

Donc les points invariants sont les points $M_1(-1)$ et $M_2(1)$.

2. Si M décrit le cercle de centre O et de rayon r avec $r \neq 0$, alors OM = r.

$OM = r \Leftrightarrow |z| = r \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{r} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{r} \Leftrightarrow |f(z)| = \dfrac{1}{r}$

$\Leftrightarrow OM' = \dfrac{1}{r}$

Donc M′ décrit le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{r}$.

3. a) $|z-1|=1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-1|}{|z|}=\dfrac{1}{|z|}$ car $z \neq 0$

$\Leftrightarrow \left|1-\dfrac{1}{z}\right|=\left|\dfrac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |1-z'|=|z'| \Leftrightarrow |z'-1|=|z'|$

b) M appartient au cercle de centre A et de rayon 1 $\Leftrightarrow$ AM = 1 $\Leftrightarrow |z-1|=1$. $\Leftrightarrow |z'-1|=|z'| \Leftrightarrow$ M′ appartient à la médiatrice de [OA]

$\Leftrightarrow$ M′ appartient à la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$.

4. a) $|z-2\mathrm{i}|=|z| \Leftrightarrow \dfrac{|z-2\mathrm{i}|}{|z|}=\dfrac{|z|}{|z|}$ car $z \neq 0$

$\Leftrightarrow \left|1-\dfrac{2\mathrm{i}}{z}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2\mathrm{i}}-\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|2\mathrm{i}|} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\right|=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|z'+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right|=\dfrac{1}{2}$

b) M appartient à la droite d'équation $y=1$
$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [OB] avec B(2i)

$\Leftrightarrow |z-2\mathrm{i}|=|z| \Leftrightarrow \left|z'+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right|=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ M′ appartient au cercle de centre $\mathrm{C}\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

5. a) M appartient à la droite d'équation $y=k$
$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [OD] avec D(2ki)

$\Leftrightarrow |z-2k\mathrm{i}|=|z|$. $\Leftrightarrow \left|1-\dfrac{2k\mathrm{i}}{z}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2k\mathrm{i}}-\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|2k\mathrm{i}|}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2k\mathrm{i}}\right|=\dfrac{1}{2k} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2k}\mathrm{i}\right|=\dfrac{1}{2k} \Leftrightarrow \left|z'+\dfrac{1}{2k}\mathrm{i}\right|=\dfrac{1}{2k}$

$\Leftrightarrow$ M′ appartient au cercle de centre $\mathrm{E}\left(-\dfrac{1}{2k}\mathrm{i}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2k}$.

b) M appartient à la droite d'équation $x=k$
$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [OF] avec F(2k)

$\Leftrightarrow |z-2k|=|z| \Leftrightarrow \left|1-\dfrac{2k}{z}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|2k|}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2k}\right|=\dfrac{1}{2k} \Leftrightarrow \left|z'-\dfrac{1}{2k}\right|=\dfrac{1}{2k}$

$\Leftrightarrow$ M′ appartient au cercle de centre $\mathrm{G}\left(\dfrac{1}{2k}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2k}$.

c) M appartient au cercle de centre B(k ; 0) et de rayon k avec $k \neq 0 \Leftrightarrow |z-k|=k \Leftrightarrow \left|1-\dfrac{k}{z}\right|=\dfrac{k}{|z|}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{k}\right|=\left|\dfrac{1}{z}\right| \Leftrightarrow \left|z'-\dfrac{1}{k}\right|=z'$

$\Leftrightarrow$ M′ appartient à la médiatrice [OH] avec $\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{k}\right)$

$\Leftrightarrow$ M′ appartient à la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2k}$.

d) M appartient au cercle de centre C(0 ; k)et de rayon k avec $k \neq 0$. $\Leftrightarrow |z-k\mathrm{i}|=k \Leftrightarrow \left|1-\dfrac{k\mathrm{i}}{z}\right|=\dfrac{k}{|z|}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{k\mathrm{i}}-\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{k\mathrm{i}}\right|=\left|\dfrac{1}{z}\right|$ car $|\mathrm{i}|=1$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{k}\mathrm{i}\right|=\left|\dfrac{1}{z}\right| \Leftrightarrow \left|z'+\dfrac{1}{k}\mathrm{i}\right|=|z'|$

$\Leftrightarrow$ M′ appartient à la médiatrice de [OK] avec $\mathrm{K}\left(\dfrac{1}{k}\mathrm{i}\right)$

$\Leftrightarrow$ M′ appartient à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2k}$.

TP2. Ensembles de Julia, ensemble de Mandelbrot

• **Durée estimée :** 45 min

• **Objectif :** Découvrir les ensembles de Julia et de Mandelbrot.

A. Étude sur un tableur

1. $z_{n+1} = z_n^{\,2} + c = (x_n + \mathrm{i}y_n)^2 + c$

$= x_n^{\,2} + 2\mathrm{i}x_ny_n + (\mathrm{i}y_n)^2 + \mathrm{Re}(c) + \mathrm{iIm}(c)$

Donc $x_{n+1} = x_n^{\,2} - y_n^{\,2} + \mathrm{Re}(c)$

$y_{n+1} = 2x_ny_n + \mathrm{Im}(c)$.

2. a) Dans la cellule E2,il faut rentrer =B1.

Dans la cellule F2,il faut rentrer =B2.

b) Dans la cellule E3,il faut rentrer =E2^2-F2^2+$B$3.

Dans la cellule F3,il faut rentrer =2*E2*F2+$B$4.

Dans la cellule G2, il faut rentrer =RACINE(E2^2+F2^2).

3. La suite (u_n) semble bornée pour $z_0 = 0{,}1 + 0{,}1\mathrm{i}$ et $z_0 = 0{,}1 - 0{,}1\mathrm{i}$.

Elle ne semble pas bornée pour $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_0 = 1 - \mathrm{i}$.

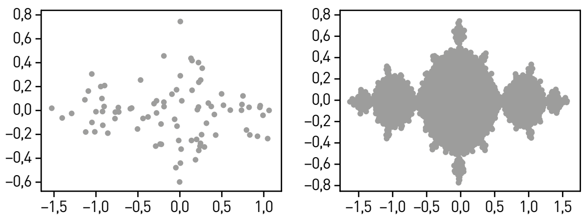
B. Représentation graphique d'un ensemble de Julia

1. **`random()`** renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.

`random()*4` renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 4.

`random()*4-2` renvoie un nombre aléatoire entre – 2 et 2.

2.



3. a) Il faut remplacer la ligne **`z=z**2-1`**

par **`z=z**2+0.25`**

b) Il faut remplacer la ligne **`z=z**2-1`**

par **`z=z**2-0.12+0.74*1j`**

CHAPITRE 3 Divisibilité, division euclidienne, congruence

Manuel p. 78-103

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Le but des trois chapitres d'arithmétique est de réinvestir les connaissances d'arithmétiques vues à l'école élémentaire et au collège afin de leur donner un cadre plus rigoureux.

Ce premier chapitre revisite les notions élémentaires de diviseur, multiple et de division dans les entiers, qu'ils soient naturels ou relatifs. Dans la dernière partie, on abordera l'arithmétique modulaire, notion nouvelle et très efficace dans la résolution de problèmes liés à la notion de divisibilité et de reste et qui permet d'exhiber simplement des solutions.

Même si la plupart des définitions et théorèmes sont déjà connus, il convient d'en donner une définition précise afin de s'appuyer sur un socle de base solide. Peu de chose à savoir mais les savoir entièrement. L'intuition a une part importante dans la résolution de problème d'arithmétique, il convient de la développer et d'aller au-delà afin d'obtenir une rédaction précise et sans lacune de raisonnement.

Objectifs

- → **Résoudre une équation et utiliser la divisibilité.**
- → **Manipuler la division euclidienne.**
- → **Utiliser la congruence.**
- → **Déterminer une série de restes.**
- → **Conjecturer un critère de divisibilité.**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 79

1. Diviser par 3 et par 9

1. a) 129 est divisible par 3 mais pas par 9.

b) 567 est divisible par 3 et 9.

c) 5 634 est divisible par 3 et 9.

d) 21 573 est divisible par 3 et 9.

2. Un nombre est divisible par 3 (resp. par 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp. par 9).

2. Diviser par 6 et 18

1. a) 456 est divisible par 6 mais pas par 18.

b) 651 est non divisible par 6 et 18.

c) 558 est divisible par 6 et 18.

d) 642 est divisible par 6 mais pas par 18.

e) 1 516 est non divisible par 6 et 18.

f) 50 166 est divisible par 6 et 18.

2. Un nombre est divisible par 6 (resp. par 18) s'il est pair et divisible par 3 (resp. par 9).

3. Calculer un reste

1. a) 1 951 par 3 : reste 1. **b)** 1 945 par 9 : reste 1.

c) 1 547 par 5 : reste 2. **d)** 2 132 par 4 : reste 0.

2. Pour 3 (resp. 9), on fait la division de la somme des chiffres par 3 (resp. par 9).

Pour 5, on fait la division du chiffre des unités par 5.

Pour 4, on fait la division du nombre formé par les chiffres des dizaines et des unités par 4.

3. $r \in \{0 , 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$

4. 27 n'est pas un reste possible car un reste est inférieur à son diviseur.

5. a) Le dividende est 117, le quotient 6 et le reste 15.

b) Le reste est 3.

4. Déterminer la parité d'une somme et d'un produit

1. a) n est pair si a et b sont de même parité et impair dans le cas contraire.

b) La somme de deux entiers est paire si ces deux entiers sont de même parité et impaire si ces entiers sont de parités différentes.

2. a) n est pair si a ou b sont pair et impair dans le cas contraire.

b) Le produit de deux entiers est pair si l'un au moins des ces entiers est pair et impair si les deux entiers sont impairs.

5. Déterminer la parité d'un carré

1. a est pair si n est pair et impair si a est impair.

2. Un nombre et son carré sont de même parité.

6. Comprendre un algorithme en langage Python

`f(1964)=20`. Le programme calcule la somme des chiffres d'un entier.

Activités p. 80-81

1 Trouver et utiliser la liste des diviseurs d'un nombre

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Établir une méthode pour déterminer tous les diviseurs d'un nombre.

A. Déterminer la liste des diviseurs

1. $D_{54} = \{1 ; 2 ; 4 ; 13 ; 26 ; 52\}$

$D_{36} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 32\}$

$D_{29} = \{1 ; 29\}$

2. Un nombre supérieur à 2 possède au moins 2 diviseurs : 1 et lui-même.

3. a) Lorsqu'on connaît un diviseur, le quotient du nombre par ce diviseur est aussi un diviseur.

b) Si le nombre n'est pas un carré, un diviseur et son quotient sont distincts d'où un nombre pair de diviseurs.

4. On obtient les diviseurs de 120 suivants :

1	2	3	4	5	6	8	10
120	60	40	30	24	20	15	12

B. Utiliser la liste des diviseurs

1. $D_{24} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$

2. Les couples solutions sont : (1 ; 24) ; (2 ; 12) ; (3 ; 8) ; (8 ; 3) ; (12 ; 2) ; (24 ; 1).

3. $D_{27} = \{1 ; 3 ; 9 ; 27\}$

Les couples solutions sont :

(22 ; 26) ; (4 ; 8) ; (10 ; 2) ; (28 ; 0).

2 Définir la division euclidienne

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Établir l'égalité associer à une division.

A. Égalité associée à une division de deux entiers positifs

1.

$$\begin{array}{l|l} 528 & 14 \\ \cline{2-2} 108 & 37 \\ 37 & \\ 10 & \end{array}$$

Le quotient est 37 et le reste 10.

2. $528 = 14 \times 37 + 10$

3. a) Non car $8 \geqslant 5$. **b)** Oui.

c) Oui. **d)** Non car $-2 < 0$.

4. Le reste doit être positif ou nul et strictement inférieur au diviseur.

B. Division d'un entier négatif par un entier naturel

1. $q = -72$ et $r = 4$.

2. $735 = 11 \times 66 + 9$, on obtient alors :

$-735 = 11(-67) + 2$

$q = -67$ et $r = 2$.

3 Travailler avec l'arithmétique modulaire

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Entrevoir et utiliser les nombres à travers leur reste.

A. Nombre modulo 7

1. Leur différence est un multiple de 7 :

a) $93 - 2 = 91 = 7 \times 13$

b) $221 - 158 = 63 = 7 \times 9$

c) $68 - (-2) = 70 = 7 \times 10$

d) $289 - (-61) = 350 = 7 \times 50$

2. a) $a = 3$ et $b = -4$

b) $a = 2$ et $b = -5$

c) $a = 5$ et $b = -2$

d) $a = 0$ et $b = -7$

e) $a = 4$ et $b = -3$

B. Problème de calendrier

1. 21 années dont 5 bissextiles : 7 670.

2. a) $7\,670 = 7 \times 1\,095 + 5$: le reste est 5.

b) Le jour est un dimanche.

C. Signe astral chez les Aztèques (modulo 20)

1. $5a + b + c + 6 = 198$: le reste est 18.

2. Exemple avec 15 juin 2002 :

$a = 5$; $b = 1$; $c = 166$. Il s'agit du silex.

D. Relations sur les restes

1. a) $b = 2$ **b)** $b = -3$ **c)** $b = -1$

d) $b = 4$ **e)** $b = -3$ **f)** $b = -4$

2. a) Le reste de a par 4 est le reste de c par 4.

Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par les chiffres des dizaines et des unités est divisible par 4.

b) 52 est divisible par 4 donc 17 052 aussi.

34 n'est pas divisible par 4 donc –5 434 non plus.

3. a) Le reste de 23 par 11 est 1 et le reste de 35 par 11 est 2.

b) Le reste de 58 par 11 est 3.

$58 = 23 + 35$: le reste de 58 est donc le reste de 23 et de 35 par 11.

c) $23 \times 35 = 805$ dont le reste par 11 est 2.

Ce reste est donc le produit des restes de 23 et 35 par 11.

d) Dans la division par 11, le reste de la somme est la somme des restes (éventuellement soustrait à 11).

Dans la division par 11, le reste du produit est le produit des restes (éventuellement divisé par 11).

À vous de jouer p. 83-89

1. 1. a) $(x - y)(x + y) = 21$

Solutions : (11 ; 10) et (5 ; 2).

b) $x(x - 7y) = 17$. Pas de solution.

2. 1. a) $n(n + 1) = 20$ donc $n \in \{-5 ; 4\}$.

b) $n(n + 2) = 35$ donc $n \in \{-7 ; 5\}$.

3. 1. a) $n \in \{-10 ; -4 ; -2 ; 4\}$.

b) $n \in \{-8 ; -2 ; 0 ; 6\}$.

4. 1. $n + 17 = k(n - 4) \Leftrightarrow (n - 4)(k - 1) = 21$

2. $n \in \{5 ; 7 ; 11 ; 25\}$.

5. $n \in \{0 ; 5 ; 10 ; 15\}$.

6. a) Oui.

b) [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « Si oui, donner le plus petit nombre b possible. »

7. Le reste est 3.

8. $\begin{cases} x = 32q + 1 \\ x = 17q + 13 \end{cases}$

Par soustraction on trouve $q = 2$ d'où $x = 27$.

9. $\begin{cases} 857 \geqslant 32b \Rightarrow b \leqslant 26 \\ 857 < 33b \Rightarrow b > 25 \end{cases} \Rightarrow b = 26$

On en déduit $r = 857 - 26 \times 32 = 25$.

10. $5^{4n} \equiv (5^2)^{2n} \equiv (-1)^{2n} \equiv 1\ (13)$

$5^{4n} - 1$ divisible par 13.

11. $3^{2021} \equiv (3^2)^{1010} \times 3 \equiv (-1)^{1010} \times 3 \equiv 3\ (10)$

Le chiffre des unités est 3.

12. Tableau des restes :

$n \equiv \ldots(8)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv \ldots(8)$	0	1	4	1	0	1	4	1

$(n + 3)^2 \equiv 1\ (8) \Leftrightarrow n + 3 \equiv 1\ (2) \Leftrightarrow n \equiv 0\ (2)$

n doit être pair.

13. 1.

$x \equiv \ldots(9)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4x \equiv \ldots(9)$	0	4	8	3	7	2	6	1	5

2. $4x \equiv 5\ (9) \Leftrightarrow x \equiv 8\ (9)$

14. 1.

$n \equiv \ldots(6)$	0	1	2	3	4	5
$2^n \equiv \ldots(9)$	1	2	4	8	7	5

2. $2^n - 1$ divisible par 9 si n multiple de 6

15. 1.

$n \equiv ...(4)$	0	1	2	3
$7^n \equiv ...(10)$	1	7	9	3

2. $7^n - 1$ divisible par 10 si n multiple de 4. Donc $7^{98} \equiv (7^4)^{24} \times 7^2 \equiv 7^2 \equiv 9\ (10)$

3. Le chiffre des unités de 7^{98} est 9.

16. 1.

$n \equiv ...(6)$	0	1	2	3	4	5
$5^n \equiv ...(9)$	1	5	7	8	4	2

2. $5^n - 1$ divisible par 9 si n multiple de 6.

3. $212^{2020} \equiv 5^{2\,020} \equiv (5^6)^{336} \times 5^4 \equiv 5^4 \equiv 4\ (9)$

17. 1.

$n \equiv ...(6)$	0	1	2	3	4	5
$3^n \equiv ...(7)$	1	3	2	6	4	5

2. $3^n - 6$ divisible par 7 si $n \equiv 3\ (6)$

3. $164^{2\,021} \equiv 3^{2\,021} \equiv (3^6)^{336} \times 3^5 \equiv 3^5 \equiv 5\ (7)$

18. 1. $100a \equiv 0\ (25)$, on a $n \equiv b\ (25)$.

N divisible par 25 $\Leftrightarrow$ b divisible par 25.

2. Un entier est divisible par 25 si et seulement si, ce nombre se termine par : 00, 25, 50, 75.

19. 1. $M_{13} = \{0 ; 13 ; 26 ; 39 ; 52 ; 65 ; 78 ; 91\}$

2. Par double implication, on a modulo 13 :

$n \equiv 0 \Rightarrow 10a + b \equiv 0 \overset{\times 4}{\Rightarrow} 40a + 4b \equiv 0 \overset{40 \equiv 1}{\Rightarrow} a + 4b \equiv 0$

$a + 4b \equiv 0 \overset{\times 10}{\Rightarrow} 10a + 40b \overset{40 \equiv 1}{\Rightarrow} 10a + b \equiv 0 \Rightarrow n \equiv 0$

3. Un entier est divisible par 13 si la somme du nombre de ses dizaines et de 4 fois le chiffre de ses unité est divible par 13.

4. 676 : 67 + 24 = 91 divisible par 13.

943 : 94 + 12 = 106 et 106 : 10 + 24 = 34 non divisible par 13.

4 652 : 465 + 8 = 473 et 473 : 47 + 12 = 59 non divisible par 13.

156 556 : 15 655 + 24 = 15 679

15 679 : 1 567 + 36 = 1 603

1 603 : 160 + 12 = 172 et 172 : 17 + 8 = 25

Non divisible par 13.

Exercices apprendre démontrer p. 90

Pour s'entraîner

On démontre par récurrence.

Initialisation : $k = 0$, on a $a^0 \equiv b^0 \equiv 1\ (n)$

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $a^k \equiv b^k\ (n)$, montrons que $a^{k+1} \equiv b^{k+1}\ (n)$:

$a^k \equiv b^k\ (n)$ comme la congruence est compatible avec la multiplcation, on a :

$a \times a^k \equiv b \times b^k \Rightarrow a^{k+1} \equiv b^{k+1}\ (n)$.

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a^k \equiv b^k\ (n)$.

Exercices calculs et automatismes p. 91

20. Liste de diviseurs

a) Utiliser la méthode de l'activité 1, c'est-à-dire un tableau sur deux lignes, l'une avec le diviseur l'autre avec le quotient.

$D_{150} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 25 ; 30 ; 50 ; 75 ; 150\}$

b) $D_{230} = \{1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 23 ; 46 ; 115 ; 230\}$

21. Nombre de diviseurs

1. c) **2.** b)

22. Diviseur d'un carré

Vraie car les diviseurs vont par 2 : diviseur et quotient sauf si le quotient et le diviseur sont identiques.

23. Critère de divisibilité

Un nombre est divisible par 6 s'il est pair et divisible par 3.

Un nombre est divisible par 18 s'il est pair et divisible par 9.

24. Divisibilité par le produit

a) Fausse. 18 est divisible par 6 et 9 mais pas par 54.

b) Vraie. 9 et 14 n'ont pas de diviseurs communs à part 1 donc si un nombre est divisible par 9 et 14, ce nombre est divisible par $9 \times 14 = 126$.

25. Recherche de diviseurs communs

On cherche une combinaison linéaire qui élimine k, par exemple : $3a - 5b = 7$. Les diviseurs communs ne peuvent être que 1 et 7.

26. Division euclidienne

a) $196 = 16 \times 12 + 4$ **b)** $18 = 50 \times 0 + 18$

c) $-20 = 7(-3) + 1$ **d)** $-354 = 17(-21) + 3$

27. Égalité et division euclidienne

Fausse car le reste doit être positif ou nul.

28. Diviseur et division euclidienne

$63 - 17 = bq \Leftrightarrow bq = 46$ avec $b > 17$.

Donc il y a 2 couples $(b\ ;\ q)$ solutions : $(23\ ;\ 2)$ ou $(46\ ;\ 1)$.

29. Restes possibles

d)

30. D'une division euclidienne à une autre

c)

31. Recherche de deux entiers

Soit a et b ces deux entiers : $a = 580$ et $b = 42$.

32. Congruence

a) $a \equiv -3\ (7)$ **b)** $a \equiv 3\ (7)$

c) $a \equiv -1\ (7)$ **d)** $a \equiv 1\ (7)$

e) $a \equiv 2\ (7)$ **f)** $a \equiv -3\ (7)$

g) $a \equiv 0\ (7)$ **h)** $a \equiv 2\ (7)$

33. Déterminer un reste

En utilisant les règles de compatibilité, on cherche à réduire le nombre pour obtenir le résultat demandé.

$2^5 = 32 = 3 \times 11 - 1 \equiv -1\ (11)$

$13^{12} \equiv 2^{12} \equiv (2^5)^2 \times 2^3 \equiv (-1)^2 \times 8 \equiv 8\ (11)$

$(-2)^{19} \equiv -(2^5)^4 \times 2^4 \equiv -(-1)^4 \times 16 \equiv 6\ (11)$

34. Reste ou pas

a) Vraie car $12 \equiv 1\ (11)$.

b) Fausse car $77 \equiv -1\ (13)$ donc $77^{15} \equiv -1\ (13)$.

c) Fausse car $10 \equiv 1\ (9)$.

d) Vraie car $99 \equiv -1\ (10)$ donc $99^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1\ (10)$.

35. Divisibilité et congruence

Vraie car $6^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0\ (5)$.

Exercices d'application p. 92-93

Résoudre une équation et utiliser la divisibilité

36. 1. Diviseurs de 220 :

1	2	4	5	10	11
220	110	55	44	22	20

2. $S_{220} = 1 + 2 + 4 + ... + 55 + 110 = 284$

3. Diviseurs de 284 :

1	2	4
284	142	71

$S_{284} = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

4. $S_{220} = 284$ et $S_{284} = 220$.

37. Soit n le nombre de bouteilles : $(n - 2)$ est divisible par 3, 5 et 7 donc divisible par : $3 \times 5 \times 7 = 105$.

On chercher un multiple de 105 compris entre 1 500 et 1 600, on trouve $n = 15 \times 105 = 1\,575$.

38. 1. $D_{20} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 10\ ;\ 20\}$

2. $(2x - y)(2x + y) = 20$ où $2x + y \geqslant 2x - y$

Il y a trois choix possibles :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 20 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Le 1er et le 3^{e} système n'ont pas de solution.

Le deuxième a comme solution $(3\ ;\ 4)$.

39. $5x(x - 7y) = 17$ et $D_{17} = \{1\ ;\ 17\}$.

Aucune solution car $5x$ n'est ni un diviseur de 1 ni un diviseur de 17.

40. $3n - 17 = k(n - 4) \Leftrightarrow (n - 4)(3 - k) = 5$

$(n - 4)$ est un diviseur de 5 donc $n \in \{-1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 9\}$.

41. $n \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 8\}$

42. $6n + 12 = k(2n + 1) \Leftrightarrow (2n + 1)(k - 3) = 9$

$(2n + 1)$ est un diviseur de 9. Les valeurs possibles sont : $n \in \{-5\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 7\}$.

43. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « ... la fonction $\frac{\mathbf{9}n-4}{3n+1}$ ... »

$9n - 4 = k(3n + 1) \Leftrightarrow (3x + 1)(3 - k) = 7$

$(3n + 1)$ est un diviseur de 7. Seul $n = 0$ est solution.

44. $n^2 - n - 27 = (n - 7)(n + 6) + 15$

On doit avoir :

$(b - 7)(n + 6) + 15 = k(n - 7) \Leftrightarrow (n - 7)(k - n - 6) = 15$

$(n - 7)$ est un diviseur de 15 : $N \in \{8 ; 10 ; 12 ; 22\}$.

45. 1. d divise la combinaison :

$3(12n + 7) - 12(3n + 1) =9$

Si d divise 9 alors d divise 3.

2. Comme 3 ne divise pas $3n + 1$, la fraction est irréductible.

46. 1. On développe l'égalité de gauche et l'on trouve celle de droite.

2. $(x - 5)(y - 5)$ est une décomposition de 32.

On trouve les couples (6 ; 37) ; (7 ; 21) ; (9 ; 13) et leurs symétriques.

47. $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$

Si n est impair alors $(n - 1)$ et $(n + 1)$ sont deux nombres pairs consécutifs dont l'un est un multiple de 4. $(n^2 - 1)$ est alors divisible par 8.

48. On démontre par disjonction des cas, en utilisant les règles sur la parité.

Si n pair alors $3n^4$ est pair et $(5n + 1)$ impair donc $(3n^4 + 5n + 1)$ est impair

Si n est impair alors $3n^4$ est impair et $(5n + 1)$ est pair donc $(3n^4 + 5n + 1)$ est impair.

n et $(n + 1)$ sont deux entiers consécutifs donc l'un est pair le produit $n(n + 1)$est alors pair.

49. 1. a_n est la différence de deux entiers de même parité donc a_n est pair.

2. $n^5 - n = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

$(n - 1)$, n et $(n + 1)$ sont trois entiers consécutifs donc l'un est multiple de trois. Leur produit est donc un multiple de 3.

3. Par un tableau de congruence on montre que $n^5 \equiv n$ (5).

4. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « Pourquoi a_n est-il divisible par **30** ? »

a est divisible par 2, 3, 5 donc divisible par $2 \times 3 \times 5 = 30$.

50. 1. On fait un tableau de congruence :

$n \equiv ...(3)$	0	1	2
$n^2 \equiv ...(3)$	0	1	1
$n^2 + 5 \equiv ...(3)$	2	0	0
$n(n^2 + 5) \equiv ...(3)$	0	0	0

51. Soit a et b les chiffres des dizaines et des unités d'un entier $n < 100$:

$n - a - b = 10a + b - a - b = 9a.$

n est donc un divisible par 9.

52. 1. $n^2 + 5n + 4 = (n + 1)(n + 4)$ et

$n^2 + 3n + 2 =(n + 1)(n + 2)$.

2. $3n^2 + 15n + 17 = (n + 1)(3n + 12) + 7$

$(3n^2 + 15n + 19)$ est divisible par $(n + 1)$ si $(n + 1)$ divise 7 soit $n \in \{0 ; 6\}$.

3. On pose $a = 3n^2 + 15n + 19$ et $b = n^2 + 3n + 2$.

Si $n = 0$ alors $a = 19$ et $b = 2$. b ne divise pas a

Si $n = 6$ alors $a = 217$ et $b = 56$. b ne divise pas a.

Manipuler la division euclidienne

53. 1. $-1\,208 = -24 \times 51 + 16$

Donc $q = -24$ et $r = 16$.

2. $1\,208 = 52 \times 23 + 12$

Donc $q = 52$ et $r = 12$.

54. 1. $261 = 259 \times 1+ 2$

Donc $q = 3\,252$ et $r = 2$.

2. $-261 = 3\,251(-1) + 2\,990$

Donc $q = -260$ et $r = 2\,990$.

55. On a : $n = 11q + 8$ et $p = 11q' + 7$ on a donc :

$n + p = 11(q + q' + 1) + 4$. Le reste est 4.

56. On a : $n = 5q + 3 = 6(q - 1) + 6$ on obtient alors : $q = 5$ d'où $n = 28$.

57. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « La différence de deux entiers naturel est **885**. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est **29** et le reste **17**. »
Soit a et b ces deux entiers : $a = 916$ et $b = 31$.

58. $152q + 13 = 147q + 98$ d'où $q = 17$.
Donc $n = 2\,597$.

59. $\dfrac{1620}{24} < b \leqslant \dfrac{1620}{23} \Leftrightarrow 68 \leqslant b \leqslant 70$ donc
$b \in \{68 ; 69 ; 70\}$ on déduit les restes correspondant : $r \in \{56 ; 33 ; 10\}$.

60. $A = 6q + 4$
Si $q \equiv 0$ (3) alors le reste de A par 18 est 4.
Si $q \equiv 1$ (3) alors le reste de A par 18 est 10.
Si $q \equiv 2$ (3) alors le reste de A par 18 est 16.

61. $n = 4q + 1 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3n = 12q + 3$ (1)
$n = 3q' + 2 \overset{\times 4}{\Rightarrow} 4n = 12q' + 8$ (2)
(2) – (1) : $n = 12(q' - q) + 5$
$n - 5$ est un multiple de 12.
Le seul multiple de 12 qui convient est 252.
Donc $n = 257$.

Utiliser la congruence

62. $5^3 \equiv 125 \equiv 6$ (17) donc $5^3n - 6^n \equiv 0$ (17) donc le reste est nul.

63. $39^{60} \equiv 4^{60} \equiv (4^3)^{20} \equiv 1^{20} \equiv 1$ (7)
La reste est 1.

64. $2012^{2012} \equiv (-1)^{2012} \equiv 1$ (11)
Le reste est 1.

65. $451 \times 6^{43} - 912 \equiv 3 \times (-1)^43 - 2 \equiv -5 \equiv 2$ (7).
Le reste est 2.

66. $31^{26} - 5^{126} \equiv 5^{26} - 5^{126} = (5^2)^{13} - (5^2)^{63}$
$\equiv (-1)^{13} - (-1)^{63} \equiv 0$ (13)
Donc divisible par 13.

67. $16^{2n+1} + 18^n \equiv (-1)^{2n+1} + 1^n \equiv -1 + 1 \equiv 0$ (17).
Donc divisible par 17.

68. $2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv (2^4)^n \times 2 + (3^4)^n \times 3$
$\equiv 1^n \times 2 + 1^n \times 3 \equiv 5 \equiv 0$ (5).
Donc divisible par 5.

69. 1. On a le tableau suivant :

$x \equiv$ (4)	0	1	2	3
$x^2 \equiv$ (4)	0	1	0	1

2. On raisonne modulo 4
$$7x^2 - 4y^2 \equiv 1 \ (4) \Rightarrow 3x^2 \equiv 1 \ (4)$$
D'après le tableau cela est impossible.
3. $(x + 3)^2 \equiv 1$ (4) $\Leftrightarrow x + 3 \equiv 1$ (2)
$\Leftrightarrow x \equiv 0$ (2)
x doit être pair.

70. 1. $A(n)$ et n ont des parités contraires.
2. Si $n \equiv 0$ (3) alors $A(n) \equiv 1$ (3).
Si $n \equiv 1$ (3) alors $A(n) \equiv 2$ (3).
Si $n \equiv 2$ (3) alors $A(n) \equiv 2$ (3).
$A(n)$ n'est jamais un multiple de 3.
3. Si d divise $A(n)$ alors $n^4 + 1 \equiv 0$ (d)
$\Rightarrow n^4 \equiv -1$ (d) $\overset{\uparrow 2}{\Rightarrow} n^8 \equiv 1$ (d)

71. Fausse. Contre-exemple :
$a \equiv 2$ (6) et $b \equiv 3$ (6) $\Rightarrow ab \equiv 0$ (6)

72. Fausse. Contre-exemple :
Si $x \equiv 8$ (12) alors $2x \equiv 16 \equiv 4$ (12)

73. 1. $11x^2 - 7y^2 \equiv 5$ (5) $\Rightarrow x^2 - 2y^2 \equiv 0$ (5).
On a donc $x^2 \equiv 2y^2$ (5).
2. On a le tableau suivant :

$x \equiv$ ... (5)	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv$ ... (5)	0	1	4	4	1
$y \equiv$ ... (5)	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv$ ... (5)	0	2	3	3	2

3. La seule solution est $x \equiv y \equiv 0$ (5).
x et y sont donc multiple de 5.

4. Si 5 divise x et y alors 25 divise x^2 et y^2 donc 25 divise $11x^2 - 7y^2$ donc l'équation (E) n'est jamais vérifiée.

74. 1. a) $100 = 7 \times 14 + 2$ donc $100 \equiv 2\ (7)$.

b) $3x^2 + 7y^2 \equiv (10^2)^n\ (7) \Rightarrow 3x^2 \equiv 2^n\ (7)$

2. On a le tableau suivant :

$x \equiv \ldots\ (7)$	0	1	2	3	4	5	6
$3x^2 \equiv \ldots\ (7)$	0	3	5	6	6	5	3

3. Si $n \equiv 0\ (3)$ alors $2^n \equiv 1\ (7)$.

Si $n \equiv 1\ (3)$ alors $2^n \equiv 2\ (7)$.

Si $n \equiv 2\ (3)$ alors $2^n \equiv 4\ (7)$.

4. Comme $3x^2$ ne peut être congru à 1, 2 ou 4 modulo 7, l'équation (E) n'a pas de solution.

Exercices d'entraînement p. 94

Déterminer une série de restes

75. 1. On a le tableau suivant :

$n \equiv \ldots\ (4)$	0	1	2	3
$2^n \equiv \ldots\ (5)$	1	2	4	3

2. $1\,357^{2\,017} \equiv 2^{2\,017} \equiv (2^4)^{504} \times 2 \equiv 2\ (5)$

76. On établit la série des restes :

$n \equiv \ldots\ (5)$	0	1	2	3	4
$4^n \equiv \ldots\ (11)$	1	4	5	9	3
$3 \times 4^n \equiv \ldots\ (11)$	3	1	4	5	9

$3 \times 4^n + 2 \equiv 0\ (11) \Leftrightarrow 3 \times 4^n \equiv 9\ (11)$

On en déduit que $n \equiv 4\ (5)$.

77. 1. On établit la série des restes :

$n \equiv \ldots\ (5)$	0	1	2	3	4
$5^n \equiv \ldots\ (11)$	1	5	3	4	9

2. $2\,018^{2\,019} \equiv 5^{2\,019} \equiv (5^4)^{504} \times 5^4 \equiv 5^4 \equiv 9\ (11)$

Le reste est 9.

78. 1. On établit la série des restes :

$n \equiv \ldots\ (3)$	0	1	2
$7^n \equiv \ldots\ (9)$	1	7	4

2. $2\,014^{2\,014} \equiv 7^{2\,014} \equiv (7^3)^{671} \times 7^1 \equiv 7\ (9)$

79. Proposition 1 : vraie.

$2018 \equiv 2\ (7)$ et $2^3 \equiv 1\ (7)$

$2018^{2\,020} \equiv 2^{2\,020} \equiv (2^3)^{673} \times 2 \equiv 2\ (7)$

Proposition 2 : vraie.

$11 \equiv 4\ (7)$ et $4^3 \equiv 1\ (7)$

$11^{2014} \equiv 4^{2014} \equiv (4^3)^{671} \times 4 \equiv 4\ (7)$

Conjecturer un critère de divisibilité

80. 1. Par double implication, on a modulo 17 :

$$n \equiv 0 \Rightarrow 10a + b \equiv 0 \overset{\times 12}{\Rightarrow} 120a + 12b \equiv 0$$

$$\overset{120\equiv 1}{\Rightarrow}\ a + 12b \equiv 0\ \overset{12\equiv -5}{\Rightarrow}\ a - 5b \equiv 0$$

$$a - 5b \equiv 0 \overset{\times 10}{\Rightarrow} 10a - 50b\ \overset{-50\equiv 1}{\Rightarrow}\ 10a + b \equiv 0$$

$$\Rightarrow n \equiv 0$$

2. 816 : $81 - 30 = 51 = 17 \times 3$ divisible par 17.

16 983 : $1698 - 15 = 1683$

1683 : $168 - 15 = 153$

153 : $15 - 15 = 0$ divisible par 17.

81. 1. Si k pair $10^k \equiv 1\ (11)$ et si k impair $10^k \equiv -1\ (11)$.

D'après l'écriture de position, on a :

$x \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) - (11)$.

2. Un nombre est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

3. Soit D la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair.

a) $D = (9 + 7 + 5 + 3 + 1) - (8 + 6 + 4 + 2)$

$D = 5$ donc le reste de 123 456 789 par 11 est 5.

b) $D = (9 + 0 + 9 + 0) - (8 + 1 + 8 + 1)$

donc 10 891 089 est divisible par 11.

c) $D = 50 \times 5 - 50 \times 5 = 0$

donc $\underbrace{5555\ldots5}_{100 \text{ fois}}$ est divisible par 11.

d) $D = (3 + 1 + 5 + 7 + 1) - (0 + 6 + 8 + 4)$

$D = -1$ donc le reste de 147 856 103 est 10.

82. 1. a) $10 \equiv 1\ (9) \overset{\uparrow n}{\Rightarrow} 10^n \equiv\ \ (9)$

b) $N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$

Avec a_n , a_{n-1} , … , a_1 , a_0 les chiffres de N.

On a alors :

$N \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ (9)

$N \equiv S$ (9)

c) $N \equiv 0 \Leftrightarrow S \equiv 0$ (9)

2. a) Par transitivité de la congruence on déduit : $A \equiv B \equiv C \equiv D$ (9).

b) [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « ... avec au plus **8 056** chiffres. ... »

$2\,014^{2\,014} < (10^4)^{2\,014} = 10^{8\,056}$ (8 057 chiffres)

Donc B a au plus 8 056 chiffres.

On a $B < 9 \times 8\,056 \Leftrightarrow B < 72\,504$.

c) $C \leqslant 9 \times 5 \Leftrightarrow C \leqslant 45$

d) La somme des chiffres des entiers inférieurs à 45 est maximale pour 39 soit 12 donc $D \leqslant 12 < 15$.

e) $2\,014 \equiv 7$ (9) et $7^3 \equiv 1$ (9) donc

$2\,014^{2014} \equiv 7^{2\,014} \equiv (7^3)^{671} \times 7 \equiv 7$ (9)

D est un nombre inférieur à 15 dont la somme des chiffres vaut 7, le seul choix est $D = 7$.

83. 1. Si $x = 2$ un inverse est $x^{-1} = 3$ car $2 \times 3 \equiv 6 \equiv 1$ (5).

2.Si $x = 3$ un inverse est $x^{-1} = 2$ et si $x = 4$ un inverse est $x^{-1} = 4$.

3. $x = 5$ n'admet pas d'inverse car $5 \equiv 0$ (5) et pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $5a \equiv 0$ (5).

4. On peut remplir le tableau:

$x \equiv ...$ (5)	0	1	2	3	4
$x^{-1} \equiv ...$ (5)		1	3	2	4

5. a) $2x \equiv 3$ (5) $\Leftrightarrow x \equiv 2^{-1} \times 3 \equiv 9 \equiv 4$ (5)

$9x \equiv 1$ (5) $\Leftrightarrow 4x \equiv 1$ (5) $\Leftrightarrow x \equiv 4^{-1} \times 1 \equiv 4$ (5))

Écriture décimale

84. Soit a le chiffre des milliers de départ. Comme les chiffres d'après sont consécutifs $a \leqslant 6$.

Après permutation on obtient le nombre n :

$n = (a + 1) \times 10^3 + a \times 10^2 + (a + 2) \times 10 + (a + 3)$

Comme $10^n \equiv (-1)^n$ (11), on a :

$n \equiv -(a + 1) + a - (a + 2) + a + 3 \equiv 0$ (11)

n est donc multiple de 11.

85. Soit $n = \overline{abc}$ et son renversé $r = \overline{cba}$.

On a alors :

$n - r = (a - c) \times 10^2 + (c - a) \overset{10\equiv1(9)}{\Leftrightarrow} n \equiv 0$

$n - r$ est donc divisible par 9.

Travailler l'oral

86. 1. a) Une année non bissextile a 365 jours et $365 \equiv 1$ (7). Donc chaque année non bissextile décale d'un jour. Une année bissextile décalera d'un jour supplémentaire.

Entre 2012 et 2062, il y a : 50 années dont 13 bissextiles, cela décalera de : $50 + 13 \equiv 63 \equiv 0$ (7).

Le 01/01/2062 sera donc un dimanche.

b) Entre 2012 et 2041 il y a 29 années dont 8 bissextiles (2012 bissextile).

Janvier de 31 jours décale de 3 jours, février 2041, de 28 jours, ne décale pas :

Du 01/01/2012 au 10/03/2041 :

$29 + 8 + 3 + (10 - 1) \equiv 49 \equiv 0$ (7)

Le 10/03/2041 sera encore un dimanche.

c) Il faut revenir en arrière donc on soustrait :

du 10/04 au 01/05 : $20 \equiv 6$ (7) jours

du 01/05 au 01/06 : $31 \equiv 3$ (7) jours

du 01/06 au 01/07 : $30 \equiv 2$ (7) jours

du 01/07 au 01/08 : $31 \equiv 3$ (7) jours

du 01/08 au 01/09 : $31 \equiv 3$ (7) jours

du 01/09 au 01/10 : $30 \equiv 2$ (7) jours

du 01/10 au 01/11 : $31 \equiv 3$ (7) jours

du 01/11 au 01/12 : $30 \equiv 2$ (7) jours

du 01/12 au 01/01 : $31 \equiv 3$ (7) jours

Total du 10/04 au 01/01 : $27 \equiv 6$ (7) jours.

Du 01/01/54 au 01/01/2012, on a $58 \equiv 2$ (7) années dont $14 \equiv 0$ (7) bissextiles, donc on a :

$-6 - 2 - 0 \equiv -8 \equiv -1$ (7)

Andrew Wiles est né un samedi.

Exercices bilan p. 95-96

87. Suite et terminaison décimale

1. $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1564$, $u_4 = 7\,814$

On peut conjecturer que les termes de la suite se terminent alternativement par 14 et 64.

2. $u_{n+2} = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36 \equiv u_n$ (4)

On a alors $u_{2k} \equiv u_0 \equiv 14 \equiv 2$ (4) et

$u_{2k+1} = u_1 \equiv 64 \equiv 0$ (4).

3. a) Initialisation : $n = 0$, on a $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$.

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2u_n = 5^{n+2} + 3$, montrons que $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$:

$2u_{n+1} = 10u_n - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 2$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) Pour $k \geqslant 2$, $5^k \equiv 25\ (100)$, on a alors :

$2u_n \equiv 5^{n+2} + 3 \equiv 25 + 3 \equiv 28\ (100)$.

c) D'après **b)** , il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que :

$2u_n = 28 + 100k \Leftrightarrow u_n = 14 + 50k$.

Donc $u_n \equiv 2 + 2k \equiv 2(1 + k)\ (4)$.

Si n est pair d'après **2.** $u_n \equiv 2\ (4)$ donc k est pair et donc $u_n = 14 + 50k \equiv 14\ (100)$.

Si n est impair d'après **2.** $u_n \equiv 0\ (4)$ donc k est impair et donc $u_n = 14 + 50k \equiv 14 + 50 \equiv 64\ (100)$.

88. Suite et congruence

1. a) Initialisation : $n = 0$, on a $2u_0 = 0 = 3^0 - 1$.

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2u_n = 3^n - 1$, montrons que $2u_{n+1} = 3^{n+1} - 1$:

$2u_{n+1} = 6u_n + 2 = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 1$.

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2u_n = 3^n - 1$.

b) On trouve $3^6 \equiv 1\ (7)$ donc $n = 6$.

c) $u_{2022} \equiv (3^6)^{337} - 1 \equiv 1^{337} - 1 \equiv 0\ (7)$

u_{2022} est divisible par 7.

2. a) $u_0 \equiv 0\ (5)$; $u_1 \equiv 1\ (5)$; $u_2 \equiv 4\ (5)$; $u_3 \equiv 13 \equiv 3\ (5)$; $u_4 \equiv 40 \equiv 0\ (5)$.

b) On a le tableau suivant :

$m \equiv \ldots\ (5)$	0	1	2	3	4
$3m + 1 \equiv \ldots\ (5)$	1	4	2	0	3

c) D'après le tableau :

$u_n \equiv 4\ (5) \Rightarrow u_{n+1} \equiv 3\ (5) \Rightarrow u_{n+2} \equiv 0\ (5)$

$\Rightarrow u_{n+3} \equiv 1\ (5) \Rightarrow u_{n+4} \equiv 4\ (5)$

d) Pour avoir $u_n \equiv 2\ (5)$, d'après le tableau, on doit avoir $u_{n+1} = 2$ soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \equiv 2\ (5)$ ce qui n'est pas le cas car $u_0 \equiv 0\ (5)$. Il n'existe pas de solution.

89. Diviseur commun

1. $a_2 = 205$ et $a_3 = 3\,277$

2. $16a_n - 3 = \dfrac{16(4^{2n+1} + 1)}{5} - 3 = \dfrac{4^{2n+3} + 1}{5} = a_{n+1}$

3. $4 \equiv -1\ (5) \overset{\uparrow(2n+1)}{\Rightarrow} 4^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} \equiv -1\ (5)$

Donc $4^{2n+1} + 1 \equiv 0\ (5)$.

$4^{2n+1} + 1$ est divisible par 5 donc $a_n \in \mathbb{N}$.

4. a) d_n divise a_n et a_{n+1}, donc d_n divise toute combinaison linéaire de a_n et a_{n+1} donc d_n divise :

$16a_n + (-1)a_{n+1} = 16a_n - 16a_n + 3 = 3$.

d_n est un diviseur de 3 donc $d_n = 1$ ou $d_n = 3$.

b) $a_{n+1} \equiv 16a_n + 3 \equiv a_n\ (3)$.

c) $a_0 = 1$ donc $a_n \equiv a_{n-1} \equiv \ldots \equiv a_0 \equiv 1\ (3)$

a_n n'est donc pas divisible par 3.

d) de **c)** comme $d_n \neq 3$ on en déduit que $d_n = 1$.

90. Divisibilité

Proposition 1 : vraie.

$M \equiv 0\ (27) \Rightarrow 100a + 10b + c \equiv 0\ (27)$

$\Rightarrow 100a \equiv -10b - c\ (27)\ E_1$

$M - N \equiv 99a - 90b - 9c \equiv 99a + 9(-10b - c)\ (27)$

D'après E_1 : $M - N \equiv 99a + 9(100a) \equiv 999a\ 0\ (27)$.

Proposition 2 : vraie.

$2^2 \equiv 1\ (3) \overset{\uparrow n}{\Rightarrow} 2^2n \equiv 1\ (3) \Rightarrow 2^2n - 1 \equiv 0\ (3)$

Proposition 3 : fausse.

Contre-exemple : $x = 2 \neq 0\ (3)$ et $2^2 + 2 = 6 \equiv 0\ (6)$.

91. Cube et terminaison décimale

A. 1. $2\,009 = 16 \times 25 + 9$ donc $2\,009 \equiv 9\ (16)$.

$2\,009^2 \equiv 9^2 \equiv 1\ (16)$. Le reste de $2\,009^2$ par 16 est 1.

2. $2\,009^{8\,001} \equiv (2\,009^2)^{4\,000} \times 2\,009 \equiv 2\,009\ (16)$.

B. 1. a) $2\,009 = 5 \times 401 + 4$ donc $2\,009^2 \equiv 4^2 \equiv 1\ (5)$

$u_0 \equiv 2\,009^2 - 1 \equiv 0\ (5)$, u_0 est divisible par 5.

b) $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$

$= u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1 - 1$

$= u_n(u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5)$

$= u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$

c) Initialisation : $n = 0$: u_0 est divisible par 5.

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n est divisible par 5^{n+1}. Dans la factorisation de u_{n+1} le premier facteur est u_n et dans le second tous les termes sont divisibles par 5, donc par produit u_{n+1} est divisible par $5^{n+1} \times 5 = 5^{n+2}$. La proposition est héréditaire.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n divisible par 5^{n+1}.

2. a) $u_1 = (u_0 + 1)^5 - 1 = 2\,009^{10} - 1$.

$u_2 = (u_1 + 1)^5 - 1 = 2\,009^{50} - 1$.

$u_3 =(u_2 - 1)^5 - 1 = 2\,009^{250} - 1$

D'après le **2. c)**, u_3 est divisible par $5^4 = 625$, donc $2009^{250} \equiv 1\ (625)$.

b) $2\,009^{8001} \equiv (2\,009^{250})^{32} \times 2\,009 \equiv 2\,009\ (625)$

C. $A = 2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par 16 et 625 donc A est divisible par $16 \times 625 = 10\,000$.

$2\,009^{8\,001} \equiv (2\,009^{2\,667})^3 \equiv 2\,009\ (10\,000)$.

L'entier cherché est donc $2\,009^{2\,667}$.

92. Puissances de 2, 3 ou 5

1. a) Un nombre et son carré ont même parité, donc si $a^2 + 9 = 2n$, $a^2 + 9$ est pair et donc a^2 est impair et donc a est impair.

b) Si a est impair, alors $a \equiv 1\ (4)$ ou $a \equiv 3\ (4)$. En élevant au carré $a^2 \equiv 1\ (4)$ dans les deux cas et par suite $a^2 + 9 \equiv 2\ (4)$

$n > 4$, donc 2^n est divisible par $2^4 = 16$ d'où $2^n \equiv 0\ (4)$. Le problème n'a donc pas de solution.

2. a) Déterminons le cycle des restes de la division de 3^n par 4.

$3^0 \equiv 1\ (4), 3^1 \equiv 3\ (4), 3^2 \equiv 1\ (4)$.

Le cycle est donc de 2.

- Si n est pair, $3^n \equiv 1\ (4)$.
- Si n est impair $3^n \equiv 3\ (4)$.

b) D'après la question précédente 3^n est impair, donc $a^2 + 9$ est impair, donc a^2 est pair et par suite a est pair.

c) $3^n - a^2 = (3^p)^2 - a^2 = (3^p - a)(3^p + a)$

Comme $n > 3$, on a $a \neq 0$ et comme $3^n - a^2 = 9$, de la factorisation, on déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 3^p - a = 1 \\ 3^p + a = 9 \end{cases}$$

Par somme des équations :

$2 \times 3^p = 10 \Leftrightarrow 3^p = 5$ impossible

3. a) $a^2 + 9 = 5^n \Leftrightarrow a^2 \equiv 2^n \equiv (-1)^n\ (3)$

Si n est impair, $a^2 \equiv -1 \equiv 2\ (3)$. D'après le tableau de congruence suivant :

$a \equiv \ldots\ (3)$	0	1	2
$a^2 \equiv \ldots\ (3)$	0	1	1

l'équation est impossible.

b) $5^n - a^2 = (5^p)^2 - a^2 = (5^p - a)(5^p + a)$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} 5^p - a = 1 \\ 5^p + a = 9 \end{cases}$$

Par somme des équations : $2 \times 5^p = 10 \Leftrightarrow 5^p = 5$.

On obtient alors $p = 1$, on déduit alors $a = 4$.

L'unique solution est alors : $42 + 9 = 52$

93. Rep-units

A. Divisibilité par 3 et 7

1. a) $10 \equiv 1\ (3)$ donc pour tout $j \in \mathbb{N}$, $10^j \equiv 1\ (3)$.

b) $N_p \equiv 10^{p-1} + \ldots 10 + 1 \equiv p \times 1 \equiv p\ (3)$

c) N_p est divisible par 3 si, et seulement si, $p \equiv 0\ (3)$.

2. a) On obtient le tableau :

m	0	1	2	3	4	5	6
a	1	3	2	–1	–3	–2	1

b) On divise p par 6 : $p = 6q + r$ avec $0 \leqslant r < 6$

$10^p = 10^{6q+r} = (10^6)^q \times 10^r$ donc :

$$10^p \equiv 1\ (7) \Leftrightarrow (10^6)^q \times 10^r \equiv 1\ (7) \underset{10^6 \equiv 1 (7)}{\Leftrightarrow} 10^r \equiv 1\ (7)$$

or comme $r < 6$, d'après le tableau de la question **a)**, la seule valeur possible est $r = 0$.

p est un multiple de 6.

c) $N_p = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^p - 1$.

N_p est la somme des p premiers termes d'une suite géométrique de raison 10 et de premier terme 1, on a donc : $N_p = \dfrac{1 - 10^p}{1 - 10} = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

d) Si 7 divise N_p alors 7 divise $9N_p$ immédiat.

Réciproquement, si 7 divise $9N_p$, comme 7 et 9 sont premiers entre eux, 7 divise N_p.

$N_p \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow 9N_p \equiv 0\ (7)$.

e) D'après l'égalité de la question **c)**, $9N_p = 10^p - 1$

$$N_p \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow 9N_p \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow 10^p - 1 \equiv 0\ (7)$$
$$\Leftrightarrow 10^p \equiv 1\ (7) \Leftrightarrow p \equiv 0\ (6)$$

B. Un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait :

1. a) On obtient le tableau suivant :

$n \equiv (10)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv (10)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b) D'après le tableau, la terminaison 1 pour un carré se produit uniquement si le nombre n se termine par 1 ou par $9 \equiv -1\ (10)$ donc $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

c) On élève au carré ces deux possibilités :

• $n = 10m + 1 \Leftrightarrow n^2 = 100m^2 + 20m + 1$

$n^2 = 20(5m^2 + m) + 1 \Leftrightarrow n \equiv 1\ (20)$

• $n = 10m - 1 \Leftrightarrow n^2 = 100m^2 - 20m + 1$

$n^2 = 20(5m^2 - m) + 1 \Leftrightarrow n \equiv 1\ (20)$

2. • Si $p = 2$ alors $N_2 \equiv 11\ (20)$

• Si $p \geqslant 3$, on peut décomposer N_p comme :

$$N_p = 10^2\ (1 + 10 + ... + 10^{p-3}) + 11.$$

Comme $10^2 \equiv 0\ (20)$ alors $N_p \equiv 11\ (20)$.

3. Comme pour tout $p \geqslant 2$, $N_p \equiv 11\ (20)$, d'après la question **1. c)** N_p n'est pas le carré d'un entier.

94. Date anniversaire

A. 1. Pour le 1er août, on a $j = 1$ et $m = 8$:

$12j + 37m = 12 + 37 \times 8 = 12 + 296 = 308$

2. a) $z = 12j + 37m$.

$12j \equiv 0\ (12)$ et $37 \equiv 1\ (12)$ donc $z \equiv m\ (12)$.

b) $z \equiv m\ (12)$ avec $1 \leqslant m \leqslant 12$, donc m est le reste de la division par 12 de z si le reste est non nul. or $455 = 12 \times 37 + 11$ donc $m = 11$. On déduit que $j = \dfrac{455 - 11 \times 37}{12} 4.$

La date anniversaire du spectateur est donc le 4 novembre.

B. 1. On obtient l'algorithme suivant :

Variables : j, m entiers
Traitement
    pour m de 1 à 12 **faire**
        pour j de 1 à 31 **faire**
            $z \leftarrow 12\,j + 31\,m$
            si $z = 503$ **alors**
                Afficher j, m
            Fin si
        Fin pour
    Fin pour

2. On trouve qu'une seule solution le 29 mai.

Préparer le BAC Je me teste p. 98

95. B **96.** A **97.** A

98. A **99.** A **100.** B

101. D **102.** D **103.** C

104. A **105.** A **106.** B

Préparer le BAC Je révise p. 99

107. Diviseurs

1. 700 a 18 diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 20 ; 25 ; 28 ; 35 ; 50 ; 70 ; 100 ; 140 ; 175 ; 350 ; 700.

2. $n \in \{-2\ ,\ -1{,}0\ ,\ 1\}$

108. Équations

a) Les couples de la forme $(0\ ;\ y)$ et $(x\ ;\ 13)$ avec x, $y \in \mathbb{N}$

b) (6 ; 4) **c)** (3 ; 1)

d) Pas de solution.

109. Divisibilité

$n \in \{3\ ,\ 9\}$

110. Diviseurs communs (1)

1. Opération sur les multiples :

d divise $5(3k + 2) - 3(5k - 7) = 31$.

2. $d \in \{-31\ ;\ -1\ ;\ 1\ ,\ 31\}$.

111. Diviseurs communs (2)

d divise $5a - 9b = 7$ donc $d \in \{-7\ ,\ -1\ ,\ 1{,}7\}$.

112. Divisibilité

1. $A = 4k(k + 1)$

2. k et $(k + 1)$ sont des entiers consécutifs donc l'un d'eux est pair. 8 divise alors A.

113. Division euclidienne : vrai ou faux ?

1. Vraie. $n = 66q + 5 = 11(6q) + 5$

2. Fausse. Contre-exemple : $n = 16$

le reste de n par 11 est 5 et par 66 est 16.

114. Division euclidienne

1. $\begin{cases} a+b=1400 \\ a=bq+16 \end{cases}$ avec $b > 16$

2. $bq = 1\,384$

3. $1\,384 = 2^3 \times 173$

$(a\,;\,b) \in \{(12\,270\,;\,173)\,;\,(1\,054\,;\,346)\,;\,(708\,;\,692)\,;\,(16\,;\,1384)\}$

115. Restes

$\dfrac{524}{16} < b \leqslant \dfrac{524}{15} \Leftrightarrow 33 \leqslant b \leqslant 34$

$b \in \{33\,,\,34\}$ les restes possibles sont 29 et 14.

116. Quotient

Les entiers cherchés sont 0, 65, 136 et 219.

117. Congruence

Voir Apprendre à démontrer p. 90.

118. Restes et congruence

1. $27 = 28 - 1 \Leftrightarrow 3^3 \equiv -1\ (7)$

2. $1\,515^{2\,004} \equiv (3^3)^{668} \equiv (-1)^{668} \equiv 1\ (7)$

Donc $1\,515^{2\,004} - 1$ est divisible par 7.

$3^{2018} \equiv 3^{3\times 672+2} \equiv (3^3)^{672} \times 9 \equiv (-1)^{672} \times 2 \equiv 2\ (7)$

Donc le reste de $3^{2\,018}$ par 7 est 2.

119. Pièces d'un puzzle

1. Elle a raison :

$\begin{cases} n \equiv 3\,(5) \Rightarrow 2n - 11 \equiv 6 - 11 \equiv -5 \equiv 0\,(5) \\ n \equiv 2\,(7) \Rightarrow 2n - 11 \equiv 4 - 11 \equiv -7 \equiv 0\,(7) \\ n \equiv 1\,(9) \Rightarrow 2n - 11 \equiv 2 - 11 \equiv -9 \equiv 0\,(9) \\ n \equiv 0\,(11) \Rightarrow 2n - 11 \equiv -11 \equiv 0\,(11) \end{cases}$

2. Le puzzle contient 1 738 pièces.

120. Résolution d'équations

a) $x \equiv 2\ (3)$

b) Avec un tableau de congruence, on trouve :
$x \equiv 1\ (5)$ ou $x \equiv 3\ (5)$.

121. Tableau de congruence

1.

$x \equiv \ldots\ (6)$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \ldots\ (6)$	0	1	4	3	4	1
$-x+4 \equiv \ldots\ (6)$	4	3	2	1	0	5
$x^2 - x + 4 \equiv \ldots\ (6)$	4	4	0	4	4	0

2. Les solutions sont $x \equiv 2\ (6)$ ou $x \equiv 5\ (6)$.

122. Cycle de restes

1. Le cycle des restes de 4^n par 7 est 3.

$n \equiv \ldots\ (3)$	0	1	2
$4^n \equiv \ldots\ (7)$	1	4	2

2. $2\,020 \equiv 4\ (7)$ et $2\,019 \equiv 0\ (3)$ donc $2\,020^{2\,019} \equiv 4^0 \equiv 1\ (7)$ le reste est donc 1.

Exercices vers le supérieur p. 100-101

123. Le numéro INSEE ou de sécurité sociale

1. $A = 10^6 \times B$, or $10^2 \equiv 3\ (97)$ donc $10^6 \equiv 3^3 \equiv 27\ (97)$.

On a alors : $A \equiv 27B + C\ (97)$.

2. $B = 2\,840\,717 = 97 \times 29\,285 + 72$

$C = 300\,941 = 97 \times 3\,102 + 47$

Donc $B \equiv 72\ (97)$ et $C \equiv 47\ (97)$.

On a alors : $A \equiv 27 \times 72 + 47 \equiv 1\,991\ (97)$.

Or $1\,991 = 97 \times 20 + 51$ donc $A \equiv 51\ (97)$.

On a alors : $K = 97 - 51 = 46$.

3. On peut écrire le programme suivant :

```
cle(B,C):
    A=27*B+C
    K=97-A%97
    return K
```

`cle(1 620 674,86 017)=76`

4. Si un des 15 chiffres de la clé est erroné :

• Un des chiffres de A est erroné.

Soit $A = \overline{a_{12}a_{11}\ldots a_0}$

Supposons que c'est le i-ieme chiffre. C'est-à-dire qu'au lieu de a_i, on a a_i'. Il faut alors comparer le vrai nombre A avec le nombre erroné A'. Si l'erreur n'est pas détectée, on a

$$A - A' = (a_i - a_i') \times 10^i \equiv 0\ (97)$$

97 doit diviser $(a_i - a_1') \times 10^i$, comme 97 et 10^i sont premiers entre eux, alors 97 divise $(a_i - a_i')$. Or $-9 \leqslant a_i - a_i' \leqslant 9$ donc $a_i - a_i' = 0 \Leftrightarrow a_i = a_i'$.

Donc si $a_i \neq a_i'$ l'erreur est détectée.

• Un des deux chiffres de K est erroné, l'erreur est automatiquement détectée car K est un reste.

Si on inverse deux chiffres consécutifs de A soit a_i et a_{i+1}.

$$A - A' = (9a_{i+1} - 9a_i) \times 10^i$$

Si l'erreur n'est pas détectée, 97 doit diviser $(9a_i - 9a_1') \times 10^i$, comme 97 et 10^i sont premiers entre eux, alors 97 divise $(9a_i - 9a_i')$. Or $-81 \leqslant 9a_i - 9a_i' \leqslant 81$ donc $a_i - a_i' = 0 \Leftrightarrow a_i = a_i'$.

L'erreur est donc détectée.

124. Écriture décimale et divisibilité

1. $u_1 = 31$, $u_2 = 331$, $u_3 = 3331$

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $3u_0 = 3 = 10^1 - 7$

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $3u_n = 10^{n+1} - 7$, montrons que $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$:

$3u_{n+1} = 30u_n + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{n+2} - 7$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) $3u_n = \underbrace{99...93}_{n\text{ fois}}$ donc $u_n = \underbrace{33...31}_{n\text{ fois}}$

3. D'après la terminaison de u_n, 2 et 5 ne divise pas u_n et la somme S de ses chiffres $S \equiv 1\ (3)$ donc 3 ne divise pas u_n.

4. a) De $10 \equiv -1\ (11)$ et $-7 \equiv 4\ (11)$, on en déduit : $3u_n \equiv (-1)^{n+1} + 4 \equiv 4 - (-1)^n$.

b) On a $u_n \equiv 3\ (11)$ ou $u_n \equiv 5\ (11)$.

11 ne divise pas $3u_n$ comme 11 et 3 sont premiers entre eux, 11 ne divise pas u_n.

5. a) $10^2 \equiv -2\ (17) \overset{\uparrow 8}{\Rightarrow} 10^{16} \equiv 2^8 \equiv 1\ (17)$

b) On a aussi $10^2 \equiv -2\ (17) \overset{\uparrow 4}{\Rightarrow} 10^8 \equiv 2^4 \equiv -1\ (17)$

$3u_{16k+8} = 3 \times 10^{16k+8+1} - 7$

$3u_{16k+8} = 3(10^{16})^k(10^8)(10) - 7$.

Donc $3u_{16k+8} \equiv 3(1)^k(-10) - 7 \equiv -37 \equiv -3\ (17)$.

17 ne divise pas $3u_{16k+8}$ comme 17 et 3 sont premiers entre eux, 17 ne divise pas u_{16k+8}.

125. Carré parfait

On montre à l'aide d'un tableau de congruence que les terminaisons d'un carré sont : 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

1 295 377 se termine par 7 donc ce n'est pas un carré.

126. Système de congruences

1. $11 \equiv 2\ (3)$ et $11 \equiv 1\ (5)$ donc 11 est solution de (S).

2. Si n est solution de (S) alors :

$n \equiv 2\ (3) \overset{-11}{\Rightarrow} n - 11 \equiv -9 \equiv 0\ (3)$

$n - 11$ est divisible par 3.

3. De même si Si n est solution de (S) alors :

$n \equiv 1\ (5) \overset{-11}{\Rightarrow} n - 11 \equiv -10 \equiv 0\ (5)$

$n - 11$ est divisible par 5.

5 et 3 sont premiers entre eux donc 15 divise $n - 11$. On alors $n - 11 = 15k \Rightarrow n = 11 + 15k$.

Réciproquement, on vérifie rapidement que si $n = 11 + 15k$ alors : $n \equiv 2\ (3)$ et $n \equiv 1\ (5)$.

Les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, $k \in \mathbb{Z}$.

127. Base 12 et divisibilité

1. a) $N_1 = 11 \times 12^2 + 12 + 10 = 1606$

b) Par divisions successives par 12, on trouve :

$N_2 = \overline{7\alpha3}^{12}$.

2. a) Comme $12 \equiv 0\ (3) \overset{i\neq0}{\Rightarrow} 12^i \equiv 0\ (3)$

$N \equiv a_0\ (3)$

Un nombre, en base 12, est divisible par 3 si, et seulement si, son dernier chiffre est divisible par 3.

b) N_2 dans son écriture en base 12 se termine par 3 donc N_2 est divisible par 3.

3. a) $12 \equiv 1\ (11) \overset{\forall i\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} (12^i \equiv 1)(12)$

$$N = \sum_{i=0}^{n} a \times 12^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ (3)$$

Un nombre, en base 12, est divisible par 11 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 11.

b) La somme S_1 des chiffres de $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$:

$S_1 = 11 + 1 + 10 = 22 \equiv 0\ (11)$

Donc N_1 est divisible par 11.

4. $N = \overline{x4y}^{12}$ est divisible par 33 si, et seulement si, N est divisible par 3 et par 11 (car 3 et 11 sont premiers entre eux).

En appliquant les critères de divisibilité, on a :

$$\begin{cases} y \equiv 0\ (3) \\ x + 4 + y \equiv 0\ (11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv 0\ (3) \\ x \equiv -4 - y\ (11) \end{cases}$$

x et y étant des chiffres compris entre 0 et 11, 4 choix sont possibles pour y : 0, 3, 6, 9. x est alors le reste de la division par 11 de $(-4 - y)$. On peut alors remplir un tableau :

y	0	3	6	9
$-4 - y$	-4	-7	-10	-13
x	7	4	1	9

Les solutions sont : $\overline{740}^{12}$; $\overline{443}^{12}$; $\overline{146}^{12}$; $\overline{949}^{12}$.

Soit en base 10 : 1 056 ; 627 ; 198 ; 1 353.

Ces 4 nombres sont multiples de 33.

128. Division euclidienne

a) $3^3 \equiv 2\ (25)$ et $2^{10} \equiv 1024 \equiv -1\ (25)$

$3^{2089} \equiv (3^3)^{696} \times 3 \equiv (2^{10})^{69} \times 2^6 \times 3 \equiv (-1)^{69} \times 64 \times 3$
$\equiv -192 \equiv 8\ (25)$

Le reste est 8.

b) $55 \equiv 6 (7)$ et $6 \equiv -1\ (7)$

$55^{234567} \equiv 6^{234567} \equiv (-1)^{234567} \equiv -1 \equiv 6\ (7)$

Le reste est 6.

c) $4321 \equiv 2\ (7)$; $1232 \equiv 2\ (7)$; $2^3 \equiv 1\ (7)$

$4321^{1237} + 1234^{4321} \equiv (2^3)^{412} \times 2 + (2^3)^{1320} \times 2$
$\equiv 2 + 2 \equiv 4\ (7)$

Le reste est 7.

129. Divisibilité

Initialisation : $n = 0$, on a :

$(a + 1)^{0+1} - a(0 + 1) - 1 = 0$.

Donc divisible par a^2. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$(a + 1)^{n+1} - a(n + 1) - 1 \equiv 0\ (a^2)$.

En multipliant par $(a + 1)$ on a :

$(a + 1)^{n+2} - a(a + 1)(n + 1) - (a + 1) \equiv 0\ (a^2)$

$(a + 1)^{n+2} - a(n + 2) - 1 \equiv a^2(n + 1)\ (a^2)$

$(a + 1)^{n+2} - a(n + 2) - 1 \equiv 0\ (a^2)$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(a + 1)^{n+1} - a(n + 1) - 1$ est multiple de a^2.

130. Résolution d'équation (1)

$17 \equiv 1\ (8)$; $31 \equiv -1\ (8)$; $22 \equiv 6\ (8)$

$17x^2 - 31y^2 = 22 \overset{\text{mod } 8}{\Rightarrow} (x^2 + y^2 \equiv 6\ (8))$

On remplit un tableau pour connaître les restes d'un carré modulo 8 :

$a \equiv \dots\ (8)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 \equiv \dots\ (8)$	0	1	4	1	0	1	4	1

Les restes possibles avec la somme de 2 carrées modulo 8 sont : 1 ; 4 ; 2 ; 5 ; 0.

L'équation n'a donc pas de solution.

131. Résolution d'équation (2)

1. $x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$

2. On obtient le tableau

$t \equiv \dots\ (12)$	0	1	2	3	4	5	6
$t^2 \equiv \dots\ (12)$	0	1	4	9	4	1	0

3. En remarquant que :

$(t + 6)^2 \equiv t^2 + 12t + 36 \equiv t^2\ (12)$

On a à l'aide du tableau :

$t^2 \equiv 1\ (12) \Leftrightarrow t \equiv 1\ (6)$ ou $t \equiv 5\ (6)$

4. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0\ (12) \Leftrightarrow (x - 2)^2 \equiv 1\ (12)$

On trouve alors : $x \equiv 3\ (6)$ ou $x \equiv 1\ (6)$.

132. Équations

a) Pas de solution. **b)** $x \equiv 6\ (7)$

c) $x \equiv 9\ (26)$ ou $x \equiv 22\ (26)$ **d)** $x \equiv 8\ (11)$

133. Systèmes

En s'inspirant de l'exercice 126 :

a) $x \equiv 13\ (30)$ **b)** Pas de solution.

134. Équation du second degré

En remarquant que :

$x^2 - 2x + 2 \equiv x^2 - 2x + 2 - 17 \equiv x^2 - 2x - 15\ (17)$

On peut factoriser avec la forme canonique :

$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

Donc 17 divise $x^2 - 2x + 2$ si et seulement si 17 divise $(x - 5)(x + 3)$ donc comme 17 est premier 17 divise $(x - 5)$ ou $(x + 3)$. On en déduit que :

$x \equiv 5\ (17)$ ou $x \equiv -3 \equiv 14\ (17)$.

135. Divisibilité

a) $5^2n + 5^n + 1 \equiv 2^n + 2 \equiv 2(2^n - 1)\ (3)$

3 divise $2^n - 1$ donc n est pair.

b) Le cycle des restes de 2^n par 7 est de 3.

Par disjonction des cas :

si $n \equiv 0\ (3)$ alors $2^2n + 2^n + 1 \equiv 3\ (7)$;

si $n \equiv 1$ (3) alors $2^2n + 2^n + 1 \equiv 7 \equiv 0$ (7) ;

si $n \equiv 2$ (3) alors $2^2n + 2^n + 1 \equiv 21 \equiv 0$ (7).

Les solutions sont les entiers n non multiples de 3.

136. Forme d'un carré et d'un cube

1. On peut faire une tableau :

a … (5)	0	1	2	3	4
$a^2 \equiv$ … (5)	0	1	–1	–1	1

Donc si a est non multiple de 5 alors :

$a^2 = 5n - 1$ ou $a^2 = 5n + 1$.

2. On peut faire une tableau :

a … (7)	0	1	2	3	4	5	6
$a^3 \equiv$ … (7)	0	1	1	–1	1	–1	–1

Donc si a est non multiple de 7 alors :

$a^2 = 7n - 1$ ou $a^2 = 7n + 1$.

137. Carré parfait

Si la proposition est vraie alors, on doit avoir :

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (an^2 + bn + c)^2$

En considérant les termes extrêmes, on doit avoir $a = c = 1$. Ensuite, on développe et on identifie :

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = n^2 + 3n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

$(n^2 + bn + 1)^2 = n^4 + 2abn^3 + (b^2 + 2)\, n^2 + 2an + 1$

On déduit que l'égalité est vraie pour $b = 3$

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

138. Divisibilité

1. $5n^3 + n \equiv -n^3 + n \equiv -n(n - 1)(n + 1)$ (6)

Comme n et $(n + 1)$ sont deux entiers consécutifs, l'un des deux est pair.

Comme $(n - 1)$, n et $(n + 1)$ sont trois entiers consécutifs, l'un des trois est multiple de 3.

2 et 3 divise $n(n - 1)(n + 1)$ donc 6 divise ce produit et donc $5n^3 + n \equiv 0$ (6).

2. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « … 7 divise $(\mathbf{4^{2^n}} + \mathbf{2^{2^n}} + 1)$. »

On a : $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 = 2^{2^n}(2^{2^n} + 1) + 1$

$2^{2^0} \equiv 2$, $2^{2^1} \equiv 4$ (7) et $2^{2^2} \equiv 2$ (7) donc le cycle des restes de 2^{2^n} par 7 est de 2.

Par disjonction des cas :

si n pair alors $2^{2^n}(2^{2^n} + 1) + 1 \equiv 7 \equiv 0$ (7) ;

si n impair alors $2^{2^n}(2^{2^n} + 1) + 1 \equiv 21 \equiv 0$ (7).

Donc $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ est divisible par 7.

139. Décomposition de (8*n* + 7)

1. $8n + 7$ est impair.

2. On remplit un tableau des restes des carrés modulo 8 :

$a \equiv$ … (8)	0	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 \equiv$ … (8)	0	1	4	1	0	1	4	1

Les restes possibles pour un carré sont 0, 1, 4.

Les restes impairs possibles avec la somme de 3 carrés modulo 8 sont possible avec 1 ou 3 restes impairs :

- 1 reste impair : 1 ou 5 ;
- 3 restes impairs : 3.

On ne peut donc pas obtenir un reste de 7.

3. $8n + 7$ ne peut pas être obtenu avec la somme de trois carrés.

140. Somme de trois cubes

On développe :

$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$

On en déduit alors que :

$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \equiv 3n^3 + 15n$ (9)

Comme $15 \equiv -3$ (9), on a :

$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \equiv 3n(n - 1)(n + 1)(9)$

$(n - 1)$, n et $(n + 1)$ trois entiers consécutifs donc le produit est multiple de 3 et donc :

$3n(n - 1)(n + 1) \equiv 0$ (9)

141. Congruence puissance *n*

$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a = b + kn,\ k \in \mathbb{Z}$

$$a^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i}(kn)^i = b^n + \binom{n}{1} bkn + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i}(kn)^i$$

Comme $i \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i}(kn)^i \equiv 0\ (n^2)$

$\displaystyle\binom{n}{1} bkn = bkn^2 \equiv 0\ (n^2)$

On a donc $a^n \equiv b^n\ (n^2)$.

142. Solutions rationnelles

1. On remplace x par $\dfrac{p}{q}$ dans l'équation et en multipliant par q^3, on obtient : $p^3 - p^2q - 2pq^2 + q^3 = 0$

2. En raisonnant modulo 2, on obtient alors :
$p^3 - p^2q + q^3 \equiv 0\ (2) \Leftrightarrow p^2(p-q) + q^3 \equiv 0\ (2)$

3. On sait que q et q^3 ont même parité donc
$q^3 \equiv q \Leftrightarrow -q + q^3 \equiv 0\ (2)$.

Si $p \equiv 1\ (2)$, l'équation (E) devient :

$1 - q + q^2 \equiv 0\ (2) \overset{-q+q^3\equiv 0\ (2)}{\Leftrightarrow} 1 \equiv 0\ (2)$

Si p est impair l'équation (E) n'a pas de solution.

4. Si p est pair alors l'équation (E) devient :
$q^3 \equiv 0\ (2) \Leftrightarrow q \equiv 0\ (2)$

p et q sont pair ce qui est contradictoire avec $\frac{p}{q}$ irréductible.

L'équation (E) n'admet pas de solution rationnelle.

143. Duel Fort Boyard

Il faut avoir une stratégie simple pour que le joueur A qui commence gagne à tous les coups. Comme les joueurs peuvent prendre 1, 2, ou 3 bâtonnets à chaque tour, il faut raisonner modulo 4. Le joueur A fait en sorte que le nombre de bâtonnets enlevés, après que le deuxième joueur B ait joué, soit de 4. Par exemple si le joueur B prend 1 bâtonnet, le joueur A prend 3 bâtonnets. Le joueur A prend n bâtonnets au premier tour. Après k tours et après que le joueur A ait joué, il ne doit rester qu'un bâtonnet. On doit donc avoir :

$$n \equiv 19 \equiv 3\ (4)$$

Pour que le joueur A gagne à tous les coups, il faut donc qu'il prenne 3 bâtonnets au premier tour et qu'il prenne ensuite le complément à 4 de ce que le joueur B prendra.

Travaux pratiques p. 102-103

TP1. Diviseurs d'un entier

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Déterminer un programme qui permette de donner tous les diviseurs d'un entier.

A. Propriété

1. On obtient les tableaux suivants :

Diviseurs	1	2	3	5	6	10
Diviseurs	150	75	50	30	25	15

Diviseurs	1	2	3	4	6	8	9	12
Diviseurs	144	72	48	36	24	18	16	12

2. Les diviseurs de la 2e ligne sont les quotients du nombre par le diviseur de la 1re ligne.

Le dernier diviseur d de la 1re ligne doit être le plus grand diviseur de n tel que $d \leqslant \sqrt{n}$.

B. Programmation

1. Ligne 5 : **`while i<=sqrt(n)`**

2. Il ne faut par ajouter le quotient lorsque celui-ci est égal au diviseur. On ajoute alors un test avant d'ajouter le quotient à la liste. Soit :

```
from math import*
def div(n):
    D=[]
    i=1
    while i<=sqrt(n):
        if n%i==0:
            D.append(i)
            if n//i!=i:
D.append(n//i)
            i=i+1
    D.sort()
    return D
```

On obtient avec une boucle itérative :

```
from math import*
def div(n):
    D=[]
    for i in range(1,int(sqrt(n)+1):
        if n%i==0:
            D.append(i)
            if n//i!=i:
D.append(n//i)
    D.sort ()
    return D
```

TP2. Division à l'école élémentaire

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Déterminer un programme permettant de trouver le quotient et le reste dans une division par soustraction successives.

On peut proposer l'algorithme suivant :

```
def division(a,b):
    q=0
    while a>=b:
        a=a-b
        q=q+1
    return q,a
```

division(32,5) → (6,2)

division(12,13) → (0,12)

division(1 412,13) → (108,8)

2. On fait un test pour savoir si a est positif ou non, s'il est négatif, on fera des additions successives jusqu'à que le résultat soit positif ou nul.

```
def division (a,b):
    q = 0
    if a >= 0 :
        while a >= b :
            a = a-b
            q = q+1
    else :
        while a < 0 :
            a = a+b
            q = q-1
    return q,a
```

division(–114,8) → (–15,6)

TP3. Algorithme de Luhn

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Étudier un algorithme à la base de la reconnaissance d'une carte bancaire.

1. a) On obtient le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

b) Cet algorithme prend la somme des restes dans la division par 9 de deux fois les chiffres de rang pair puis ajoute au résultat la somme des chiffres de rang pair ainsi que la clé.

Si le résultat obtenu est un multiple de 10 le numéro de la carte est correct et incorrect dans le cas contraire.

c) $I + P + c = 26 + 23 + 1 = 50$

Le numéro de la carte est correct.

d) On obtient alors $I = 28$ et $P = 17 + a$

on a : $I + P + c = 28 + 17 + a + 1 = 46 + a$

Comme $0 \leqslant a \leqslant 9$, pour que le résultat soit multiple de 10, on doit avoir $a = 4$.

2. On connaît alors $I + P$.

$I + P + c \equiv 0\ (10) \Leftrightarrow c \equiv -I - P\ (10)$

Comme c est un chiffre c est le reste de la division de $-I - P$ dans la division par 10. Il est donc unique.

3. On a 8 chiffres de rang impair et 7 de rang pair plus la clé. Si tous les chiffres valent a, on a :

Deux cas de figure selon que $a \leqslant 4$ ou $a \geqslant 5$:

• si $a \leqslant 4$ le reste de $2a$ par 9 est $2a$

alors $I + P + c = 8\ (2a) + 8a = 24a$

On doit avoir $24a \equiv 0\ (10) \Leftrightarrow 4a \equiv 0\ (10)$.

Donc $4a = 10k \Leftrightarrow 2a = 5k$.

5 divise $2a$ et comme 2 et 5 sont premiers entre eux 5 divise $a \leqslant 4$ donc $a = 0$

• si $a \geqslant 5$ le reste de $2a$ par 9 est $(2a - 9)$

alors $I + P + c = 8(2a - 9) + 8a = 24a - 72$.

On doit avoir $24a - 72 \equiv 0\ (10) \Leftrightarrow 4a \equiv 2\ (10)$.

Donc $4a = 2 + 10k \Leftrightarrow 2a = 1 + 5k$.

5 divise $(2a - 1)$ et comme $5 \leqslant a \leqslant 9$ donc $9 \leqslant 2a - 1 \leqslant 17$ et $2a - 1$ impair.

Le seul multiple de 5 est 15 d'où $2a - 1 = 15$ soit $a = 8$.

Conclusion : il existe deux numéros de carte valides composés d'un seul chiffre soit le nombre composé de 16 "0" ou de 16 "8".

4. On a un numéro incorrect après inversion et l'un des chiffres permutés est 1 l'autre a. Deux situations peuvent se produire : soit 1 est un chiffre de rang impair soit de rang pair.

Prenons deux exemples avec $S = 10$ avec 1 de rang pair et 1 de rang impair :

1300 0000 0000 0005 et 8100 0000 0000 0002.

Après inversion du 1 les numéros deviennent

3100 0000 0000 0005 et 1800 0000 0000 0002.

On obtient pour chacun de numéro $S' = 12$.

On a la même évolution de S avec deux chiffres a différents, on voit donc que l'on ne peut pas déterminer le chiffre inconnu.

CHAPITRE 4 PGCD, théorèmes de Bézout et de Gauss

Manuel p. 104-131

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce deuxième chapitre d'arithmétique a pour but d'approfondir la notion de PGCD et de montrer l'importance des théorèmes de Bézout et de Gauss dans la résolution d'équations diophantiennes.

Ainsi, dans ce chapitre on démontrera et appliquera l'algorithme d'Euclide permettant de déterminer un PGCD. Après avoir démontré les théorèmes de Bézout et Gauss et leurs corollaires, on apprendra à résoudre une équation diophantienne du premier degré et à travers quelques exemples les équations de Pell-Fermat. Cela sera aussi l'occasion de résoudre des problèmes de chiffrement.

Objectifs

→ **Utiliser la définition et les propriétés du PGCD.**

→ **Utiliser l'algorithme d'Euclide.**

→ **Déterminer un couple d'entiers de Bézout.**

→ **Appliquer le théorème de Gauss.**

→ **Résoudre une équation diophantienne.**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 105

1. Trouver le plus grand diviseur commun

a) 7 **b)** 12 **c)** 44 **d)** 5 **e)** 6

2. Simplifier une fraction

a) 13 **b)** 12 **c)** 7 **d)** 11

3. Déterminer si des nombres sont premiers entre eux

a) Oui **b)** Non : PGCD = 7 **c)** Oui

d) Non : PGCD = 13

4. Diviser par un produit

a) Fausse. Contre-exemple :18.

b) Vraie car 8 et 9 ont aucun diviseur commun.

c) Vraie car 36 est multiple de 18 et de 4.

d) Vraie car 150 est multiple de 10 et de 15.

5. Résoudre une équation

a) (3 ; 2) **b)** (−1 ; 1) **c)** (1 ; 0) **d)** (−3 ; −2)

6. Traduire un problème en équation

1. $3x = 34 + 7y$

Pierre donne 16 jetons de 3 € et Lilya lui donne 2 jetons de 7 €.

2. a) $3x + 7y = 34$

Céline possède 9 jetons de 3 € et 1 jeton de 7 € ou 2 jetons de 3 € et 4 jetons de 7 €.

b) Le nombre maximum est 34 décomposé de 2 façons : $1 \times 7 + 9 \times 3 = 4 \times 7 + 2 \times 3 = 34$

On peut mettre dans la longueur de la plaque :

• 1 rectangle dans le sens de la longueur et 9 dans le sens de la largeur ;

• 4 rectangles dans le sens de la longueur et 2 dans le sens de la largeur.

7. Comprendre un algorithme en langage Python

Pour f("L") l'algorithme renvoie "Z".

En effet $11 \times 11 + 8 \equiv 25\ (26)$.

Activités p. 106-107

1 Trouver le plus grand commun diviseur

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Approcher intuitivement le PGCD.

A. Méthode archaïque

1. $D_{84} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ;21 ; 28 ; 42 ; 84\}$

2. $D_{147} = \{1 ; 3 ; 7 ; 21 ; 49 ; 147\}$

3. $D_{84} \cap D_{147} = \{1 ; 3 ; 7 ; 21\}$

4. PGCD(84 , 147) = 21

5. $D_{255} = \{1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 17 ; 51 ; 85 ; 255\}$

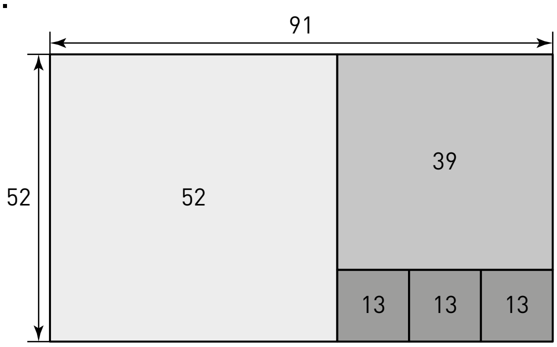
$D_{77} = \{1 ; 7 ; 11 ; 77\}$

$D_{255} \cap D_{77} = \{1\}$ donc PGCD(255 , 77) = 1

B. Méthode géométrique

1. On cherche à découper la plaque en carrés de même dimension. On commence par le plus grand carré que l'on peut faire dans la plaque. On prend le reste de la plaque et on réitère le procédé jusqu'à qu'il n'y ait que des carrés. Le plus petit carré obtenu est alors le carré cherché.

2.



2 Déterminer le PGCD par divisions successives

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Élaborer un algorithme.

[ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : remplacer 347 par 147.

1. a) $147 = 105 \times 1 + 42$

b) Si d divise 147 et 105, il divise sa différence 42.

2. a) $105 = 42 \times 2 + 21$

b) Si d divise 105 et 42, il divise toute combinaison linéaire de 105 et 42 soit $105 + (-2)(42) = 21$.

3. $D_{147} \cap D_{105} = \{1 ; 3 ; 7 ; 21\}$ et PGCD(147 , 21) = 21

4. $5\,726 = 2\,045 \times 2 + 1\,636$

$2\,045 = 1\,636 \times 1 + 409$

$1\,636 = 409 \times 4$

PGCD(5 726 , 2 045) = 409

3 Découvrir le chiffrement affine

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Approcher la scriptographie.

A. Procédé de chiffrement

1. $W \to 22 \to f(22) = 250 \equiv 16\ (26) \to Q$

2. a) Par double implication

On a la suite d'implications modulo 26 :

$$11x \equiv z \xRightarrow{\times 19} 209x \equiv 19z \xRightarrow{209\equiv 1} x \equiv 19z$$

$$x \equiv 19z \xRightarrow{\times 11} 11x \equiv 209z \xRightarrow{209\equiv 1} 11x \equiv z$$

b) [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « En déduire que la fonction f^{-1} de décodage est : $f^{-1}(y) = \mathbf{19}y + \mathbf{4}$. »

On a la suite d'équivalence modulo 26

$$11x + 8 \equiv y \Leftrightarrow 11x \equiv y - 8 \overset{2.a}{\Leftrightarrow} x \equiv 19y - 152$$

$$\overset{-152\equiv 4}{\Leftrightarrow} \quad x = 19y + 4$$

B. Casser un chiffrement affine

1. $\begin{cases} E(4) \to E(4) \\ J(9) \to N(13) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b \equiv 4\ (26) \\ 9a + b \equiv 13\ (26) \end{cases}$

2. a) Par différence entre la 2e congruence et la 1re, on obtient modulo 26 :

$$5a \equiv 9 \xRightarrow{\times 5} 25a \equiv 45 \overset{25\equiv -1}{\Leftrightarrow} -a \equiv 19 \Leftrightarrow a \equiv -19 \equiv 7$$

b) $b \equiv 4 - 4a \equiv 4 - 28 \equiv -24 \equiv 2\ (28)$ donc $f(x) = 7x + 2$.

c) Par double implication, on a la suite d'implications modulo 26 :

$$7x \equiv z \xRightarrow{\times 15} 105x \equiv 15z \xRightarrow{105\equiv 1} x \equiv 15z$$

$$x \equiv 15z \xRightarrow{\times 7} 7x \equiv 105z \xRightarrow{105\equiv 1} 7x \equiv z$$

d) On a la suite d'équivalence modulo 26 :

$$7x + 2 \equiv y \Leftrightarrow 7x \equiv y - 2 \overset{2.c}{\Leftrightarrow} x \equiv 15y - 30 \overset{-30\equiv 22}{\Leftrightarrow} x = 15y + 22$$

e) TU ES GENIAL

À vous de jouer p. 109-117

1. 1. $n = 54k$ avec $k \not\equiv 0$ (7)

2. $n \in \{54 ; 108 ; 162 ; 216 ; 270 ; 324 ; 432 ; 486\}$

2. 1. $n = 6k$ avec $k \not\equiv 0$ (5)

2. Multiples de 6 non multiples de 30 de 6 à 498.

3. $a = 18a'$ et $b = 18b'$ avec PGCD(a' , b') = 1

$ab = 7\,776 \Leftrightarrow a'b' = 24$

Les seules décompositions acceptables sont :

1×24 ou 3×8 ce qui donnent les couples solutions (18 ; 432) et (54 ; 144).

4. $a = 4a'$ et $b = 4b'$ avec PGCD(a' , b') = 1

$a + b = 24 \Leftrightarrow a' + b' = 6$

La seule décomposition acceptable est 1 + 5.

Le couple solution est (4 ; 20).

5. a) PGCD(840 , 144) = 24

b) PGCD(202 , 138) = 2

6. a) PGCD(441 , 777) = 21

b) PGCD(2 004 , 9 185) = 167

7. a) PGCD(4 847 , 5 633) = 131 donc pas premiers entre eux.

b) PGCD(5 617 , 813) = 1 donc premiers entre eux.

8. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « ... a = 18 480... »

1. PGCD(18 480 , 9 828) = 4

2. $\dfrac{a}{84}$ et $\dfrac{b}{84}$ sont des entiers premiers entre eux.

9. On peut proposer :

Entrée :
Lire *a*, *b*
Initialisation :
Donner à *r* la valeur du reste dans la division de *a* par *b*
Traitement
Tant que *r* ≠ 0 faire
Donner à *a* la valeur *b*
Donner à *b* la valeur *r*
Donner à *r* la valeur du reste dans la division de *a* par *b*
Fin Tant que
Sortie :
Afficher la valeur *b*

On trouve :

PGCD(1 958 , 4 539) = 89

PGCD(123 456 789 , 987 654 321) = 9

10. On a :

```
def euclide(a,b):
    if b==0:
        return a
    return
euclide(b, a%b)
```

PGCD(1 958 , 4 539) = 89

PGCD(123 456 789 , 987 654 321) = 9

11. 1. $87 = 31 \times 2 + 25$

$31 = 25 \times 1 + 6$

$25 = 6 \times 4 + 1$

Donc PGCD(87 , 31) = 1.

2. On trouve le couple (5 ; −14).

12. 1. $45 = 38 \times 1 + 7$

$38 = 7 \times 5 + 3$

$7 = 3 \times 2 + 1$

Donc PGCD(38 , 45) = 1.

2. On trouve le couple (−13 ; 11).

13. 1. $(-1)n + 1(n + 1) = 1$

2. En remontant l'algorithme d'Euclide, on trouve : $(k + 1)(2k + 1) + (-k)(2k + 3) = 1$.

14. 1. $41 = 25 \times 1 + 16$

$25 = 16 \times 1 + 9$

$16 = 9 \times 1 + 7$

$9 = 7 \times 1 + 2$

$7 = 2 \times 3 + 1$

Donc PGCD(41 , 25) = 1.

2. On trouve le couple (11 ; 18).

15. $(-2)(9n + 1) + 3(6n + 1) = 1$

$(9n + 1)$ et $(6n + 1)$ sont premiers entre eux donc la fraction est irréductible.

16. $(5)(14n + 3) + (-14)(5n + 1) = 1$

$(14n + 3)$ et $(5n + 1)$ sont premiers entre eux donc la fraction est irréductible.

17. 1. On trouve les solutions

$$\begin{cases} x = 45k \\ y = 33k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. L'équation est équivalente à :

$$33(x + 1) = 45(-y + 1)$$

On trouve alors les solutions :

$$\begin{cases} x = -1 + 45k \\ y = 1 - 33k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

18. 1. On trouve les solutions

$$\begin{cases} x - 3 = 5k \\ y - 2 = 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 2 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. On doit avoir :

$7x = 1 + 5k \overset{-21}{\Leftrightarrow} 7(x - 3) = 5(k - 4),, k \in \mathbb{Z}$.

On obtient $x = 3 + 5k \Leftrightarrow x \equiv 3\ (5)$.

19. x est divisible par 3, 5 et 7 qui sont premiers entre eux deux à deux donc d'après le corollaire du théorème de Gauss : x est divisible par $3 \times 5 \times 7 = 105$.

20. n, $(n + 1)$ et $(n + 2)$ sont trois entiers consécutifs donc l'un des trois est multiple de 3 et au moins l'un des trois est pair.

Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $3 \times 2 = 6$ divise le produit.

21. 1. PGCD(4 , 3) = 1, comme 2 est un multiple du PGCD(4 , 3), l'équation admet des solutions entières.

2. (2 , –2)

3. L'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -2 - 4k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

22. 1. Une solution particulière est : (–1 , 2).

2. Une solution particulière de (E) est :(–5 , 10).

3. L'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} x = -5 + 8k \\ y = 10 - 15k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

23. 1. PGCD(51 , 26) = 1 d'après le théorème de Bézout, l'équation admet des solutions entières.

2. (–1 ; –2)

3. L'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} x = -1 + 26k \\ y = -2 + 51k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

24. 1. PGCD(29 , 13) = 1, comme 6 est un multiple du PGCD(4 , 3), l'équation admet des solutions entières.

2. (2 , 4)

3. L'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} x = 2 + 13k \\ y = 4 + 29k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

25. 1. On pose $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec PGCD(p , q) = 1.

On a : $p^3 = q(-ap^2 - bpq - cq^2)$

q divise p donc $q = 1$ et donc α entier.

2. On prend $a = 0$, $b = 0$ et $c = n$.

D'après 1. $\sqrt[3]{n}$ est soit entier soit non rationnel.

26. 1. La fonction ln est croissante et positive sur $]1 ; +\infty[$, donc $0 < \ln 2 < \ln 3$.

2. $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow q\ln 2 = p\ln 3 \Leftrightarrow \ln 2^q = \ln 3^p \Leftrightarrow 2^q = 3^p$

3. $p \geqslant 1$ donc 3 divise 2^q or PGCD(2 , 3) = 1 d'après le théorème de Gauss, 3 divise 2 ; contradiction donc $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ n'est pas rationnel.

27. 1. $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ et $(\alpha^2 - 5)^2 = 24$

2. $\alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = 24$, le polynôme est

$$P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$$

3. α rationnel alors $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec PGCD(p , q) = 1

On a alors : $p^4 = q^2(10p^2 - q^2)$.

q^2 divise p^4 donc q divise p donc $q = 1$

On a alors : $p^4 = 10p^2$ comme $\alpha \neq 0$ on a :

$p^2 = 10$ impossible. α est irrationnel.

28. 1. $p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3 = 0 \Leftrightarrow p(p^2 + pq - 2) = q^3$ donc p divise q^3 et comme PGCD$(p, q) = 1$, et $p \in \mathbb{Z}$ alors $p = \pm 1$.

2. On a : $p^3 = q(-p^2 + pq + q^2)$

q divise p^3 et comme PGCD$(p, q) = 1$, et $q \in \mathbb{N}$ alors $q = 1$.

3. 1 et -1 ne sont pas solution de $P(x) = 0$ donc P n'admet pas de racine rationnelle.

Exercices apprendre à démontrer p.118

Pour s'entraîner

On démontre par double inégalité.

On pose $d = $ PGCD(a, b) et $D = $ PGCD(A, B).

• d divise a et b donc divise toute combinaison linéaire de a et de b donc d divise $(4a + 3b) = A$ et $(5a + 4b) = B$ donc $d \leqslant D$.

• D divise A et B donc divise toute combinaison linéaire de A et de B donc D divise $(4A - 3b) = a$ et $(5A - 4B) = b$ donc $D \leqslant d$.

• De $d \leqslant D$ et $D \leqslant d$ on a bien $d = D$

Exercices calculs et automatisme p. 119

29. PGCD

a) 6 **b)** 15 **c)** 23 **d)** 36

30. Résoudre un problème

1. c)

2. b)

31. Propriété du PGCD

a) 12 **b)** 2 **c)** 6 **d)** 6

32. Algorithme d'Euclide

a) On détermine le PGCD par divisions successives.

PGCD(108 , 78) = 6

$$108 = 78 \times 1 + 30$$
$$78 = 30 \times 2 + 18$$
$$30 = 18 \times 1 + 12$$
$$18 = 12 \times 1 + 6$$
$$12 = 6 \times 2$$

b) PGCD(202 , 138) = 2

33. Quotients et algorithme d'Euclide

Fausse : les quotients successifs sont 1, 1, 6, 1.

34.Nombres premiers entre eux (1)

a) Fausse : PGCD(144 , 840) = 24

b) Vraie.

35. Nombres premiers entre eux (2)

1. Trouver une combinaison linéaire des deux entiers égale à 1 pour tout n.

$$1(4n + 1) + (-4)n = 1$$

2. Non, par exemple pour $n = 1$: PGCD(4 , 2) = 2.

36. Identité et théorème de Bézout

a) Vraie. S'ils sont premiers entre eux, il existe $(u\,;v)$ tel que $au + bv = 1 \overset{\times 2}{\Rightarrow} 2au + 2bv = 2$.

b) Fausse. Les nombres peuvent être premier entre eux (cf a).

37. Divisibilité

1. c

2. a

38. Théorème de Gauss

a) $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 5k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\begin{cases} x = 9k \\ y = 41k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

39. Équation à solution entière

1. $(-2\,;3)$

2. On peut ajouter 5 pour x et retrancher 7 pour y : $(3\,;-4)$.

40. Existence de solution

a) Vraie : 37 et 25 sont premiers entre eux.

b) Vraie car PGCD(51 , 39) = 3.

c) Fausse car 2 016 est divisible par 3 donc l'équation admet des solutions.

41. Théorème de Bézout et de Gauss

Seule bonne réponse : c

Exercices d'application p. 120-121

Utiliser le PGCD

42. On obtient les couples suivants et leurs symétriques : {(18 ; 342), (54 ; 306), (126 ; 234), (162 ; 198)}

43. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « *ab* = **6 300** et PGCD(*a* , *b*) = **15** »

On obtient les couples suivants : {(15 ; 420), (60 ; 105)}

44. La période est 308 jours.

45. Les cubes ont une arête de 2,6 cm et l'on peut en mettre 180.

46. 1. On démontre par double inégalité.

Soit d = PGCD(a , b) et D = PGCD($a - b$, b), d divise a et b donc divise $a - b$ donc $d \leqslant D$.

D divise $a - b$ et b donc divise $(a - b) + b = a$ donc $D \leqslant d$.

2. a) On a les soustractions suivantes :

308 – 165 = 143

165 – 143 = 22

143 – 22 = 121

121 – 22 = 99

…

22 – 11 = 11 donc PGCD(308 , 165) = 11.

b) De la même façon : PGCD(735 , 210) = 105.

3.

```
def pgcd(a,b):
    while a!=b:
        c=abs(b-a)
        a=b
        b=c
    return a
```

47. 1. D divise a et b donc D divise : $2a - 5b = 7$

D'où $D = 1$ ou $D = 7$.

2. $5n+1 \equiv 0\ (7) \Rightarrow 5n \equiv -1\ (7) \overset{\times 4}{\Rightarrow} -20n \equiv -4\ (7)$

$\Rightarrow n \equiv 4\ (7) \Rightarrow 2n + 1 \equiv 7 \equiv 0\ (7)$

Les entiers n sont $n \equiv 4\ (7)$.

3. $D = 7$ si $n \equiv 4\ (7)$ dans les autres cas $D = 1$.

48. 1. $5a - 3b = 8$

donc D = PGCD(a , b) divise 8.

2. $3n+1 \equiv 0\ (8) \Rightarrow 3n \equiv -1\ (8) \overset{\times 5}{\Rightarrow} 15n \equiv -5\ (8)$

$\Rightarrow n \equiv 5\ (8) \Rightarrow 5n - 1 \equiv 24 \equiv 0\ (8)$

$D = 8$ si $n \equiv 5\ (8)$.

Appliquer l'algorithme d'Euclide

49. À l'aide de l'algorithme d'Euclide :

a) PGCD(4 935 , 517) = 47 ;

b) PGCD(2 012 , 7 545) = 503;

c) PGCD(18 480 , 8 745) = 165.

50. a) PGCD(4 847 , 5 633) = 131

b) PGCD(5 617 , 813) = 1

51. $(a\ ;\ b) = (175\ ;\ 49)$

52. $(a\ ;\ b) = (1\,425\ ;\ 645)$

53. On doit avoir : $\begin{cases} 4284 = bq \\ 3510 = bq' \end{cases}$ avec $b > 11$

b divise 4284 et 3510 donc

b divise PGCD(4 284 , 3 510) = 18

Comme $b > 11$, on en déduit que $b = 18$.

Déterminer un couple d'entiers de Bézout

54. On trouve (–7 , –3).

55. On trouve (9 , 8).

56. On trouve (3 , 2).

57. 1. PGCD(58 , 24) = 2

2. On trouve (5 , 12).

58. Fausse. $5 \times 3 + (-5) \times 2 = 5$ et PGCD(3 , 2) = 1.

59. $(-2)(7k + 3) + 7(2k + 1) = 1$

D'après le théorème de Bézout $(7k + 3)$ et $(2k + 1)$ sont premiers entre eux.

60. Par soustraction :

PGCD($7n + 4, 5n + 3$) = PGCD($5n + 3, 2n + 1$)

= PGCD($3n + 2, 2n + 1$)

$2(3n + 2) + (-3)(2n + 1) = 1$

D'après le théorème de Bézout $(7k + 4)$ et $(5k + 3)$ sont premiers entre eux.

61. $15(14n + 3) + (-14)(5n + 1) = 1$

D'après le théorème de Bézout $(14n + 3)$ et $(5n + 1)$ sont premiers entre eux.

Si $n = 6$, $14n + 3 = 87$ et $5n + 1 = 31$.

Donc PGCD(87 , 31) = 1.

62. $1(2n + 1) + (-2)n = 1$ donc $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible.

63. $(2n + 1)(2n + 1) + (-4)n(n + 1) = 1$ donc $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ est irréductible.

64. $n^2 - 3 + (-n - 2)(n - 2) = 1$ donc $\dfrac{n^2-3}{n-2}$ est irréductible.

65. $(2n + 1)(2n + 1) + (-4)n(n + 1) = 1$ donc $\dfrac{n(n+1)}{2n+1}$ est irréductible.

66. On démontre par double implication.

• Soit (x_0 , y_0) une solution de $ax + by = c$.

Soit d = PGCD(a , b), d divise a et b donc d divise $ax_0 + by_0$ donc d divise c.

• Soit $c = k \times \text{PGCD}(a , b)$.

D'après l'identité de Bézout, il existe $(u ; v)$ tel que

$au + bv = d \overset{\times k}{\Rightarrow} a(ku) + b(kv) = c$.

Donc $(ku ; kv)$ solution de $ax + by = c$.

67. $6x + 3y = 1$ n'admet pas de solution car PGCD(6 , 3) = 3.

$7x + 5y = 1$ admet des solutions car PGCD(7 , 5) = 1.

Appliquer le théorème de Gauss

68. 1. $\begin{cases} a = 13k \\ b = 29k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

2. $\begin{cases} x = 11 + 13k \\ y = 24 + 29k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

69. 1. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc :

$$3(x - 7) = 5(y - 2)$$

2. Les coordonnées de M vérifient :

$$\begin{cases} x = 7 + 5k \\ y = 2 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

70. Soit x, y et z les nombres respectifs de flèches dans les zones à 0, 5 et 12 points.

On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 25 & (E1) \\ 5y + 12z = 200 & (E2) \end{cases}$$

1. En considérant (E2), on a :

$12z = 200 - 5y \Leftrightarrow 12z = 5(40 - y)$.

5 divise 12z, comme PGCD(5 , 12) = 1, d'après le théorème de Gauss, 5 divise z.

2. D'après (E1), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $z = 5k$ et en remplaçant dans (E2) on a : $y = 40 - 12k$.

On remplace les valeurs de z et de y dans (E1) :

$$x + (40 - 12k) + 5k = 25 \Leftrightarrow x = 7k - 15$$

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow k > 3 \\ y > 0 \ \Rightarrow 12k \leqslant 40 \Rightarrow k \leqslant 3 \end{cases}$$

donc $k = 3$ soit $x = 6$, $y = 4$ et $z = 15$.

Résoudre une équation diophantienne

71. 1. (2 ; 0)

2. On obtient : $\begin{cases} x = 2 + 4k \\ y = 3k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

72. 1. (−7 ; −4)

2. On obtient : $\begin{cases} x = -7 + 23k \\ y = -4 + 13k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

73. 1. $\begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = 1 + 8k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

2. $8p + 1 = 5q + 4 \Leftrightarrow 8p - 5q = 3$

3. On trouve m = 2 009.

74. 1. a) $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$

b) $\begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = 4 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

2. Soit z le nombre de jetons blancs.

$(2 + 5k) + (4 + 7k) + z = 25 \Leftrightarrow 12k + z = 19$ la seule solution est $k = 1$ et $z = 7$.

Il y a 7 jetons rouges, 11 verts et 7 blancs.

75. 1. Soit S_1 le sablier de 11 mn et S_2 celui de 5 mn.

Lise lance S_1 et S_2 en même temps. Lorsqu'un sablier est fini on le retourne. Lorsqu'on a retourné 1 fois S_1 et 3 fois S_2 et que S_2 vient de finir, Lisa donne le top. Il reste alors 2 mn pour que S_1 soit fini.

2. Lisa peut mesurer toute durée entière en minute car 11 et 5 sont premiers entre eux.

$11x - 5y = n$ admet des solutions entières.

76. 1. $\begin{cases} x = 1 + 11u \\ x = 3 + 4v \end{cases}$, $(u\ ;\ v) \in \mathbb{Z}^2$

On a : $1 + 11u = 3 + 4v \Leftrightarrow 11u - 4v = 2$

2. $\begin{cases} u = 2 + 4k \\ v = 5 + 11k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $x = 1 + 11u = 23 + 44k \Leftrightarrow x \equiv 23\ (44)$

Exercices d'entraînement p. 122

Système : équation – PGCD

77. Soit $d = \text{PGCD}(a\ ,\ b)$.

Soit $a = da'$ et $b = db'$ avec $\text{PGCD}(a'\ ,\ b') = 1$.

On notera que $\text{PGCD}(a' - b'\ ,\ b') = 1$ aussi.

On a : $b'(a' - b') = 12$, on a quatre couples $(a'\ ;\ b')$ solutions : $(1\ ;\ 13)$; $(3\ ;\ 7)$; $(4\ ;\ 7)$; $(12\ ;\ 3)$ qui donnent les couples $(a\ ;\ b)$ solutions :

$(13\ ;\ 169)$; $(39\ ;\ 91)$; $(52\ ;\ 91)$; $(156\ ;\ 169)$.

78. 1. Soit $d = \text{PGCD}(2n + 3\ ,\ n)$

d divise $2n + 3$ et n donc d divise $1(2n + 1) + (-2)n = 3$.

Donc $d = 1$ ou $d = 3$

$d = 3 \Rightarrow n \equiv 0\ (3) \Rightarrow 2n + 3 \equiv 0\ (3)$

Conclusion : $d = 3 \Leftrightarrow n \equiv 0\ (3)$

2. $d = 1 \Leftrightarrow n \neq 0\ (3)$

79. a) $x'y' = 42$

x'	1	2	3	6	7	14	21	42
y'	42	21	14	7	6	3	2	1
x	6	12	18	36	42	84	126	252
y	252	126	84	42	36	18	12	6

b) $x'y' = 12$

x'	1	3	4	12
y'	12	4	3	1
x	5	15	20	60
y	60	20	15	5

Recherche de PGCD

80. $-2(9n + 4) + 9(2n + 1) = 1$

81. Soit $d = \text{PGCD}(a\ ,\ b)$.

d divise $3a - b = 5$ donc $d = 1$ ou $d = 5$

$d = 5 \Leftrightarrow n \equiv 1\ (5)$

$d = 1 \Leftrightarrow n \not\equiv 1\ (5)$

82. 1 .a) On divise au par b tant que le reste est différent de 1, on incrémente u.

b) Si b est négatif, le programme donne un reste négatif.

2. `int()` transforme un flottant en entier.

3. On teste le signe de b ce qui donne :

```
def bezout(a,b):
    r=0
    u=0
    while r!=1:
        u=u+1
        if b>=0:
            r=a*u%b
        else:
            r=a*u%b-b
    v=int((1-a*u)/b)
    return u,v
```

4. `bezout(37,15) = (13,–32)`

`bezout(11,-24) = (11,5)`

83. 1. Soit $D = \text{PGCD}(A\ ,\ B)$

D divise A et B donc $(2 - n)A + B = 4$

donc $D = \text{PGCD}(A\ ,\ 4)$.

2. $D = 4 \Leftrightarrow n \equiv 1\ (4)$

$D = 2 \Leftrightarrow n \equiv 3\ (4)$

$D = 1 \Leftrightarrow n \equiv 0\ (2)$

3. $(n - 1)$ divise 4 soit $n \in \{-3\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\}$.

Théorème de Gauss

84. 1. On a :

$$a + b = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} \in \mathbb{Z}$$

q_1 divise $p_1q_2 + p_2q_1$ donc q_1 divise $p_1\, q_2$ comme p_1 est premier avec q_1 alors q_1 divise q_2.

2. Par un raisonnement symétrique, on montre que q_2 divise q_1

$$\left.\begin{matrix} q_1 \text{ divise } q_2 \\ q_2 \text{ divise } q_1 \end{matrix}\right\} \overset{q_1>0\,;\,q_2>0}{\Rightarrow} q_1 = q_2 = q$$

3. $ab = \dfrac{p_1p_2}{q^2} \in \mathbb{Z}$ donc q^2 divise p_1p_2 comme q est premier avec p_1 et p_2 alors $q = 1$.

Les nombres a et b sont des entiers.

85. 1. $6a^2 = e - b \Leftrightarrow 6a^2 = q^4a - qa \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} 6a = q(q^3 - 1)$

2. q divise $6a$ comme PGCD$(a\ ,\ q) = 1$ d'après le théorème de Gauss q divise 6.

$q \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$

3. En fonction de a

q	a	b	c	d	e
1	a	a	a	a	a
2	a	$2a$	$4a$	$8a$	$16a$
3	a	$3a$	$9a$	$27a$	$81a$
6	a	$6a$	$36a$	$216a$	$1\,296a$

Montrer la rationalité d'un nombre

86. 1. $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0 \Leftrightarrow p(2p^2 + 5pq + 5q^2) = -3q^3$

p divise $3q^3$ comme PGCD$(p\ ,\ q) = 1$, d'après le théorème de Gauss, p divise 3.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \Leftrightarrow 2p^3 = q(-5p^2 - 5pq - 3q^2) = -3q^3$$

q divise $2p^3$ comme PGCD$(p\ ,\ q) = 1$, d'après le théorème de Gauss, q divise 2

2. $p \in \{-3 ; -1 ; 1 ; 3\}$ et $q \in \{1 ; 2\}$

On teste les 8 racines possibles. Seulement une est une racine : $-\dfrac{3}{2}$.

87. 1. On pose $\alpha = \dfrac{p}{q}$ irréductible.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow p^4 = q(4p^3 + 8p^2q - 13pq^2 - 10q^3)$$

q divise p^4 comme PGCD$(p\ ,\ q) = 1$, on en déduit que $q = 1$ donc $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^3 - 4\alpha^2 - 8\alpha + 13) = -10$

Donc α divise 10.

3. $\alpha \in \{-10 ; -5 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10\}$

Deux racines entières : -2 et 5.

Travailler l'oral

88. On pose x le nombre de nuités A et y nombre de nuités B. Il faut résoudre :

$$24x + 45y = 438 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} 8x + 15y = 146.$$

• Solution algorithmique : on majore les valeurs de x et y

$$x \leqslant \frac{146}{8} \Rightarrow x \leqslant 18$$

$$y \leqslant \frac{146}{15} \Rightarrow y \leqslant 9$$

On teste alors tout les couples $(x\ ;\ y)$ pour les valeurs possible pour x et y.

```
for i in range(1,19):
    for j in range(1,10):
        if 8*i+15*j==146:
            print(i,j)
```

On ne trouve qu'une seule solution (7 ; 6).

• Solution arithmétique :

8 et 15 sont premier entre eux donc l'équation admet des solutions entières.

$(2 ; -1)$ est une solution particulière à :

$$8x + 15y = 1$$

donc $(292 ; -146)$ est une solution de :

$$8x + 15y = 146$$

On trouve alors les solutions suivantes :

$$\begin{cases} x = 292 + 15k \\ y = -146 - 8k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

On cherche ensuite les solutions positives

$$x \geqslant 0 \Rightarrow k \geqslant -19$$

$$y \geqslant 0 \Rightarrow k \leqslant -19$$

Il n'y a donc qu'une solution pour $k = -19$.

On retrouve alors $x = 7$ et $y = 6$.

Exercices bilan p. 123-124

89. Bézout et Gauss. Vrai ou faux ?

a) Fausse. Contre-exemple avec $n = 1$.

b) Vraie. On pose (*E*) : $3x - 5y = 2$

$(-1\ ;\ -1)$ est une solution de l'équation (E)

À l'aide du théorème de Gauss, on trouve le couples solutions suivants :

$$\begin{cases} x = -1 + 5k \\ y = -1 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Fausse. Contre-exemple : $(-2)3 + (4)2 = 2$ et PGCD$(3\ ,\ 2) = 1$.

90. Comètes

A. Ensemble S

1. a) 19 et 12 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe $(u\ ;\ v)$ tels que : $19u + 12v = 1$.

b) De $12v = 1 - 19u$, on a :

$6 \times 19u + 13 \times 12v = 6 \times 19u + 13(1 - 19u) = 19 \times (-7u) + 13 \Rightarrow n_0 \equiv 13\ (19)$

De $19u = 1 - 12v$, on a :

$6 \times 19u + 13 \times 12v = 6 \times (1 - 12v) + 13 \times 12v = 13 \times (7v) + 6 \Rightarrow n_0 \equiv 6\ (12)$

n_0 est donc une solution de (*S*).

c) En remontant d'algorithme d'Euclide, on trouve que $(-5\ ;\ 8)$ vérifie $19u + 12v = 1$.

On a : $n_0 = 6 \times 19(-5) + 13 \times 12(8) = 678$.

2. a) n et n_0 vérifient le système,

par différence : $\begin{cases} n - n_0 \equiv 0\ \ (19) \\ n - n_0 \equiv 0\ \ (12) \end{cases}$

19 et 12 divise $(n - n_0)$ d'après le corollaire du théorème de Gauss $19 \times 12 = 228$ divise $(n - n_0)$.

b) $n \equiv n_0 \equiv 678 \equiv -6(228)$

donc $n = -6 + 228k$, $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement si $-6 + 228k$ vérifie le système.

B. Application

Soit t le temps nécessaire à l'apparition des deux astres la même année. Soit p et p' le nombre de période des astres A et B.

On doit avoir

$$\begin{cases} t = 13 + 19p \\ t = 6 + 12p' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \equiv 13\ \ (19) \\ t \equiv 6\ \ \ (12) \end{cases}$$

Donc $t = -6 + 228k$.

Le temps minimum est donné pour $k = 1$ soit $t = 222$ années.

91. Pompon et manège

1. $17 \times 9 - 24 \times 6 = 9$

b) On trouve :

$$\begin{cases} x = 9 + 24k \\ y = 6 + 17k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. a) Pablo a effectué y tours avant d'attraper le pompon à l'instant t et le pompon x tours.

Pour le pompon $t = 17x$, comme Pablo met $\frac{3}{8} \times 24 = 9$ secondes pour aller de H à A, alors pour lui $t = 9 + 24y$, soit en égalisant :

$17x = 9 + 24y \Leftrightarrow 17x + 24y = 9$, $x, y \in \mathbb{N}$.

b) D'après l'ensemble des solutions, le plus petit couple de nombres positifs vérifiant cette équation est le couple $(9\ ;\ 6)$. Donc le temps nécessaire à Jean pour attraper le pompon est $t = 17 \times 9 = 153$ secondes soit 2 minutes et 33 secondes.

En deux minutes Pablo n'a pas le temps d'attraper le pompon.

c) On raisonne comme en a).

• Si Pablo attrape le pompon au point B, on doit avoir en égalisant les deux temps :

$$\frac{17}{4} + 17x = \frac{5}{8} \times 24 + 24y \overset{\times 4}{\Leftrightarrow} 17 + 68x = 60 + 96y$$

$\Leftrightarrow 68x - 96y = 43$

PGCD$(68\ ,\ 96) = 4$ qui ne divise pas 43, donc cette équation n'a pas de solutions.

• Si Pablo attrape le pompon au point C, on doit avoir en égalisant les deux temps :

$$\frac{17}{2} + 17x = \frac{7}{8} \times 24 + 24y \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 17 + 34x = 42 + 48y$$

$\Leftrightarrow 34x - 48y = 25$

PGCD$(34\ ,\ 48) = 2$ qui ne divise pas 25, donc cette équation n'a pas de solutions.

• Si Pablo attrape le pompon au point D, on doit avoir en égalisant les deux temps :

$$\frac{17 \times 3}{4} + 17x = \frac{1}{8} \times 24 + 24y \overset{\times 4}{\Leftrightarrow} 51 + 68x = 12 + 96y$$

$\Leftrightarrow 68x - 96y = -39$

PGCD(68 , 96) = 4 qui ne divise pas 39, donc cette équation n'a pas de solutions.

Pablo ne peut attraper le pompon qu'en A.

d) Si Pablo part de E, on a $t = 17x$ et pour lui $t = \frac{1}{8} \times 24 + 24y = 3 + 24y$ d'où

$17x = 3 + 24y \Leftrightarrow 17x - 24y = 3$

Le couple (3 ; 2) est solution de cette équation.

Le temps nécessaire à Jean pour attraper le pompon est $t = 17 \times 3 = 51$ secondes qui sont inférieures aux deux minutes payées.

92. Suite

1. a) $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 21$.

b) $1 \times u_{n+1} + (-4)\, u_n = 1$, d'après le théorème de Bézout u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

2.a) $v_{n+1} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 4v_n$

(v_n) est géométrique de raison 4 et $v_0 = \frac{1}{3}$

b) $v_n = \frac{1}{3} \times 4^n$ donc $u_n = \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3}$

$\text{PGDC}(u_n , u_{n+1}) = 3 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3\text{PGDC}(u_n , u_{n+1}) = 3 \Leftrightarrow$ $\text{PGDC}(3u_n 3u_{n+1}) = 3 \Leftrightarrow \text{PGCD}(4^n - 1, 4^{n+1}) = 3$.

93. Codage

1. a) $V \rightarrow 21 \overset{9x+2}{\rightarrow} 191 \equiv 9\ (26) \rightarrow J$

b) PGCD(9 , 26) = 1 d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ tel que $9u + 26v = 1$. Le couple (3 , –1) est solution.

c) Par double implication modulo 26 :

- $y \equiv 9x + 2 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3y = 27x + 6 \overset{27 \equiv 1}{\Rightarrow} 3y = x + 6$

$\Rightarrow x \equiv 3y - 6 \overset{-6 \equiv 20}{\Rightarrow} x \equiv 3y + 20$

- $x \equiv 3y + 20 \overset{\times 9}{\Rightarrow} 9x = 27y + 180 \overset{27 \equiv 1}{\Rightarrow} 9x = y + 180$

$\Rightarrow y \equiv 9x - 180 \overset{-180 \equiv 2}{\Rightarrow} y \equiv 9x + 2$

d) On utilise la fonction de décodage :

$$R \rightarrow 17 \overset{3y+20}{\rightarrow} 71 \equiv 19\ (26) \rightarrow T$$

2. On a modulo 26 :

$$9p + 2 \equiv 3 \Rightarrow 9p \equiv 1 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 27p \equiv 3 \overset{27 \equiv 1}{\Rightarrow} p \equiv 3$$

Comme $p \in [\![0 , 25]\!]$ on a $p = 3$.

3. $B \rightarrow 1 \overset{13x+2}{\rightarrow} 15 \rightarrow P$ et

$D \rightarrow 3 \overset{13x+2}{\rightarrow} 41 \equiv 15\ (26) \rightarrow P$

B et D sont codés par la même lettre, le codage est ambigu.

94. Casser un code

A. 1. O et E étant les deux premières lettres apparaissant le plus dans le message codé, on en déduit que E se code en O et A se code en E.

2. $\begin{cases} E(4) \rightarrow O(4) \\ A(0) \rightarrow E(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b \equiv 14 & (26) \\ b \equiv 4 & (26) \end{cases}$

3. Comme $b \in [\![0 , 25]\!]$, on $b = 4$

$4a \equiv 10\ (26) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$, $4a = 10 + 26k \Leftrightarrow 2a = 5 + 13k$

Comme $2a$ est pair, $(5 + 13k)$ est pair donc k doit être impair. Or $2a \in [\![0 , 50]\!] \Rightarrow k \in [\![0 , 3]\!]$

D'où $k = 1$ ou $k = 3$ qui donne $a = 9$ ou $a = 22$.

B. 1. $K \rightarrow 10 \overset{22x+4}{\rightarrow} 224 \equiv 16\ (26) \rightarrow Q$

$X \rightarrow 23 \overset{22x+4}{\rightarrow} 510 \equiv 16\ (26) \rightarrow Q$

K et X se codent par la même lettre, le codage n'est pas envisageable.

2. a) Par double implication modulo 26 :

- $m \equiv 9n + 4 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3m = 27n + 122 \overset{27 \equiv 1}{\Rightarrow} 3m = n + 12$

$\Rightarrow n \equiv 3m - 12 \overset{-12 \equiv 14}{\Rightarrow} n \equiv 3m + 14$

- $n \equiv 3m + 14 \overset{\times 9}{\Rightarrow} 9n = 27m + 126 \overset{27 \equiv 1}{\Rightarrow} 9n = m + 126$

$\Rightarrow m \equiv 9n - 126 \overset{-126 \equiv 4}{\Rightarrow} m \equiv 9n + 4$

b) NBELA se décode en BRAVO

95. Théorème des restes chinois

1. a) 17 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe $(u\ ;\ v)$ tels que : $17u + 5v = 1$.

b) De $5v = 1 - 17u$, on a :

$3 \times 17u + 9 \times 5v = 3 \times 17u + 9(1 - 17u) = 17 \times (-6u) + 9$ $\Rightarrow n_0 \equiv 9\ (17)$

De $17u = 1 - 5v$, on a :

$3 \times 17u + 9 \times 5v = 3 \times (1 - 5v) + 9 \times 5v = 5 \times (6v) + 3$ $\Rightarrow n_0 \equiv 3\ (5)$

n_0 est donc une solution de S.

c) $(-2\ ,\ 7)$ vérifie $17u + 5v = 1$

On a : $n_0 = 3 \times 17(-2) + 9 \times 5(7) = 213$

2.a) n et n_0 vérifient le système,

par différence : $\begin{cases} n - n_0 \equiv 0 & (17) \\ n - n_0 \equiv 0 & (5) \end{cases}$

17 et 5 divise $(n - n_0)$ d'après le corollaire du théorème de Gauss $17 \times 5 = 85$ divise $(n - n_0)$.

b) $n \equiv n_0 \equiv 213 \equiv 43\ (228)$ donc $n = 43 + 85k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement si $43 + 85k$ vérifie le système.

3. Soit n le nombre de jetons. n vérifie le système donc $n = 43 + 85k$.

Comme $n \in [\![300\ ,\ 400]\!]$, on déduit $n = 468$

Préparer le BAC Je me teste p.126

96. C.	**97.** B.	**98.** A.
99. A.	**100.** D.	**101.** A.
102. B.	**103.** C.	**104.** B.
105. B.		

Préparer le BAC Je révise p.127

106. Des diviseurs

b divise 1800 et 2720 avec $b > 9$.

b divise PGCD(1800 , 2720) = 360

$b \in \{10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20 ; 24 , 30 ; 36 ; 40 ; 45 ; 60 ; 72 ; 90 ; 120 ; 180 ; 360\}$

107. Un diviseur

b divise 1 545 et 3 375 avec $b > 10$.

b divise PGCD(1 545 , 3 375) = 15 donc $b = 15$.

108. Algorithme d'Euclide

a) PGCD(901 , 1505) = 1

b) PGCD(2 012 , 7 545) = 503

109. Algorithme

1.

A	12	2	10	8	2	6	4	2	2
B	14	12	2	10	8	2	6	4	2
D	2	10	8	2	6	4	2	2	0

2. Cet algorithme calcule le PGCD(A , B).

Il est basé sur PGCD(A , B) = PGCD(B – A , A) que l'on démontre par double inégalité.

110. Théorème de Bézout (1)

1. $-2a + 7b = 1$ donc PGCD(a , b) = 1.

2. $-7a + 4b = 1$ donc PGCD(a , b) = 1.

111. Théorème de Bézout (2)

a) Fausse. Contre-exemple : $a = 2$ et $b = 3$ on a PGCD(2 , 3) = 1 mais $6 \times 2 + (-3) \times 3 = 3$.

b) Fausse car PGCD(51 , 9) = 3 et 2 n'est pas multiple de 3.

c) Vraie car $5a - 14b = 1$.

112. Nombres de Bézout

1. Oui car PGCD(221 , 338) = 13 et 26 est un multiple de 13.

2. On divise par 13 : $17x + 26y = 2$. Une solution est $(-3 ; 2)$.

113. Théorème de Gauss

1. On a les solutions : $\begin{cases} a = 5k \\ b = 21k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

2. PGCD(5 , 11) = 1, d'après le corollaire du théorème de Gauss $5 \times 11 = 55$ divise $(n - 9)$.

114. Système d'équations

1. $n \equiv 1\ (5) \Rightarrow n - 11 \equiv -10 \equiv 0\ (5)$

$n \equiv 3\ (4) \Rightarrow n - 11 \equiv -8 \equiv 0\ (4)$

donc $(n - 11)$ est divisible par 5 et 4.

2. 5 et 4 divise $(n - 11)$ et PGCD(5 , 4) = 1 donc 20 divise $(n - 11)$, on a alors $n \equiv 11\ (20)$.

Réciproquement, on vérifie que $n \equiv 11\ (20)$ est bien solution de (S).

115. Égalité de deux PGCD

1. Soit D = PGCD(a , b) et d = PGCD(a , 9),

D divise a et $b$donc d divise $-(n + 3)a + b = 9$

donc $D \leqslant d$.

d divise a et 9 donc d divise $(n + 3)a + 9 = b$ donc $d \leqslant D$.

2. $(n - 2)$ est un diviseur de 9.

$n \in \{-7 , -1 , 1 , 3 , 5 , 11\}$

116. Équation diophantienne (1)

1. (E) admet des solutions entières car PGCD(25 , 7) = 1.

2. (2 ; −7)

3. Les solutions sont : $\begin{cases} x = 2 + 7k \\ y = -7 - 25k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

117. Équation diophantienne (2)

a) (4 ; 1)

b) Les solutions sont :

$\begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

118. Rationalité

1. On a les relations :

$$p(3p^2 + 4pq + 2q^2) = 4q^3$$
$$3p^3 = q(-4p^2 - 2pq + 4q^2)$$

p divise $4q^3$ comme PGCD(p , q) = 1, p divise 4.

q divise $3p^3$ comme PGCD(p , q) = 1, q divise 3.

2. On teste les solutions avec $p \in \{-4 , -2 , -1 , 1 , 2 , 4\}$ et $q \in \{1 , 3\}$

La seule solution est $x = \dfrac{2}{3}$.

Exercices vers le supérieur p.128-129

119. PPCM

1. PPCM(18 , 12) = 36 et PPCM(24 , 40) = 120.

2. $\dfrac{7}{6} + \dfrac{11}{15} = \dfrac{19}{10}$ PPCM(6 , 15) représente le dénominateur commun des frations $\dfrac{7}{6}$ et $\dfrac{11}{15}$.

120. PGCD et PPCM

1. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : «… et PGCD(a' , b') = 1.»

$a = Da'$ et $b = Db'$.

• Si PGCD(a' , b') = $d \neq 1$, on a alors $a' = da''$ et $b' = db''$ donc $a = Dda'$ et $b = Ddb''$.

Donc Dd est un diviseur commun et D n'est pas alors le plus grand. Contradiction : $d = 1$.

• Soit m un multiple strictement positif de a et b.

Soit E l'ensemble des entiers m.

a et b divise m : $m = kDa' = k'Db' \Rightarrow ka' = k'b$

b' divise ka' comme PGCD(a' , b') = 1, d'après le théorème de Gauss, b' divise k. On a alors $k = k''b'$ d'où $m = k''Da'b'$.

Réciproquement :

si $m = k''Da'b' = (k''b')a = (k''a')b$ alors m est un multiple de a et b

$$E = \{k''Da'b' , k'' \in \mathbb{N}^*\}$$

Le plus petit élément de E est obtenu pour $k'' = 1$.

Conclusion : $M = Da'b'$.

2. $DM = D \times Da'b' = (Da') \times (Db') = ab$

121. Encore un PPCM

Soit m = PPCM(a , b) et d = PGCD(a , b). $a = da'$ et $b = db'$ avec PGCD(a' , b') = 1

$$m = da'b' \overset{d=6 \text{ et } m=102}{\Leftrightarrow} a'b' = 17$$

On en déduit $a' = 1$ et $b' = 17$ d'où (a ; b) = (6 ; 102).

122. Vrai-Faux

Fausse. 12 et 40 sont solutions de $x^2 - 52x + 480 = 0$.

On doit avoir PPCM(a , b) = 40 et PGCD(a , b) = 12

Or 40 n'est pas multiple de 12 donc impossible.

123. Propriété du PGCD

1. Soit d = PGCD(a , b).

d divise a et b donc divise $-a + 5b = 3$.

d vaut donc 1 ou 3.

2. On montre facilement avec un tableau de congruence que : $b \equiv 0\ (3) \Leftrightarrow n^2 + 1 \equiv 0\ (3)$

$\Leftrightarrow n^2 \equiv 1\ (3) \Leftrightarrow n \equiv 1\ (3)$ ou $n \equiv 2\ (3)$.

En remplaçant ces valeurs dans a on a $a \equiv 0\ (3)$.

124. Recherche du PGCD

1. $a = n(n - 4)(n + 3)$ et $b = (n - 4)(2n + 1)$

2. a) $-\alpha + 2\beta = 5$

b) d divise α et β donc divise $-\alpha + \beta = 5$.

c) $d = 5 \Rightarrow n + 3 \equiv 0\ (5) \Rightarrow n \equiv 2\ (5)$

En remplaçant dans $2n + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 0\ (5)$.

Donc $d = 5 \Leftrightarrow n \equiv 2\ (5) \Leftrightarrow n - 2 \equiv 0\ (5)$.

3. $1(2n + 1) + (-2)n = 1 \Rightarrow$ PGCD($2n + 1$,n) = 1

4. a) Comme PGCD($2n + 1$,n) = 1

PGCD(a , b) = $(n - 4)$PGCD(n , $2n + 1$).

Si $n \equiv 2\ (5) \Rightarrow$ PGCD(a , b) = $5(n - 4)$.

Si $n \neq 2$ (5) $\Rightarrow$ PGCD(a , b) = $n - 4$.

b) Si $n = 11 \equiv 1$ (5) on a alors PGCD(a , b) = 7 en effet : $a = 1\,078$ et $b = 161$ PGCD(1 078 , 161) = 7.

Si $n = 12 \equiv 2$ (5) on a alors PGCD(a , b) = 40 en effet : $a = 1\,440$ et $b = 200$ PGCD(1 440 , 200) = 40.

125. Algorithme d'Euclide

a) PGCD(99 099 , 43 928) = 1

b) PGCD(153 527 , 245 479) = 821

126. Calcul de PGCD

$n^3 + 3n^2 - 5 = (n - 2)(n^2 + n - 2) + 1$

PGCD(a , b) = 1

127. Suite et PGCD

1. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ ».

On a : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n - u_{n+1}$

$v_{n+1} = 2v_n$ géométrique raison 2 et $v_0 = 1$

2. a) La somme des termes v_n est télescopique

$$\sum_{i=0}^{n} v_n = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

$2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1 = u_{n+1}$

b) $u_{n+1} - 2u_n = 1$ d'après le théorème de Bézout, PGCD(u_{n+1} , u_n) = 1.

128. PGCD

1. Soit d = PGCD($a + b$, $a - b$)

d divise ($a + b$) et ($a - b$) donc d divise leur somme et leur différence soit $2a$ et $2b$.

d divise PGCD($2a$, $2b$) = 2 donc $d = 1$ ou $d = 2$.

2. On démontre par une manipulation de l'égalité de Bézout.

$$\text{PGCD}(a, b) = 1 \Rightarrow au + bv = 1$$

On élève au carré :

$$(au)^2 + 2abuv + (bv)^2 = 1$$

On ajoute et on retranche abu^2 et abv^2

$$\underbrace{(au)^2 + abv^2 + abu^2 + (bv)^2}_{(a+b)\text{ en facteur}} - \underbrace{(abu^2 - 2abuv + abv^2)}_{ab\text{ en facteur}} = 1$$

$$(a + b)(au^2 + bv^2) - ab(u + v)^2 = 1$$

D'après le théorème de Bézout :

$$\text{PGCD}(a + b, ab) = 1$$

Un autre méthode consiste à montrer que :

- si a est premier avec b alors ($a + b$) est premier avec a et b ;
- puis que si a est premier avec b et c alors a est premier avec bc.
- On conclut alors que ($a + b$) est premier avec ab.

3. Soit d = PGCD($a + b$, $a^2 + b^2$)

d divise ($a + b$) et ($a^2 + b^2$) donc d divise

$(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$.

d divise ($a + b$) et $2ab$ donc divise $2(a + b)$ et $2ab$ donc d'après la question 2. d divise 2PGCD($a + b$, ab) = 2 donc $d = 1$ ou $d = 2$.

129. PGCD et congruence

1.a) On a les implications suivantes :

$$n \equiv 1 \ (5) \overset{\times 4}{\Rightarrow} 4n \equiv 4 \equiv -1 \ (5) \Rightarrow 4n + 1 \equiv 0 \ (5)$$

$$n \equiv 5 \ (7) \overset{\times 4}{\Rightarrow} 4n \equiv 20 \equiv -1 \ (7) \Rightarrow 4n + 1 \equiv 0 \ (7)$$

b) 5 et 7 divise $4n + 1$ donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, $5 \times 7 = 35$ divise $4n + 1$.

2. Par implication modulo 35 :

$$4n \equiv -1 \overset{\times 9}{\Rightarrow} 36n \equiv -9 \overset{36\equiv 1}{\Rightarrow} n \equiv -9 \equiv 26$$

On vérifie ensuite de $n \equiv 26$ (35) est bien solution de (S).

130. Racines rationnelles

1. On pose $\alpha = \dfrac{p}{q}$ irréductible.

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow p^4 = q(4p^3 + 8p^2q - 13pq^2 - 10q^3)$

q divise p^4 comme PGCD(p , q) = 1, on en déduit que $q = 1$ donc $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2. a) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^3 - 4\alpha^2 - 8\alpha + 13) = -10$

Donc α divise 10.

b) $\alpha \in \{-10 ; -5 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10\}$

On teste et on trouve 2 racines entières : -2 et 5.

3. a) On teste et on trouve les racines entières solution : -2 et 5. Par une division euclidienne :

$$f(x) = (x + 2)(x - 5)(x^2 - x - 1)$$

b) Les autres racines sont : $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

131. Solutions entières

1. Si $x, y \in \mathbb{N}$, alors $x \leqslant \dfrac{s}{2}$ et $y \leqslant \dfrac{s}{5}$ donc si

$0 \leqslant s \leqslant 4$ on a $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $y = 0$

Il y a donc des solutions que pour $s = 0$, $s = 2$ et $s = 4$.

2. Initialisation : $s = 4(2\ ;\ 0)$ solution donc la proposition est initialisée.

Hérédité : soit $s \geqslant 4$, supposons que (E) admet une solution $(x\ ,\ y)$ pour s, montrons que (E) admet une solution pour $s + 1$.

- Si $y = 0$ alors $2x = s$ avec $x \geqslant 2$ donc :

$$2(x - 2) + 5(y + 1) = s + 1$$

Donc $(x - 2\ ,\ y + 1)$ solution pour $s + 1$.

- Si $y \geqslant 1$ alors :

$$2x + 5y = s \Rightarrow 2(x + 3) + 5(y - 1) = s + 1$$

Donc $(x + 3, y - 1)$ est solution pour $s + 1$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $s \geqslant 4$, (E) admet des solutions dans $\mathbb{N}^2$

132. Égalité de deux PGCD (1)

a est premier avec n donc il existe $(u\ ,\ v)$ tel que

$$au + nv = 1 \Rightarrow au = 1 - nv \overset{\times b}{\Rightarrow} abu = b - bnv$$

On pose $D = \text{PGCD}(ab\ ,\ n)$ et $d = \text{PGCD}(b\ ,\ n)$.

- D divise ab et n donc divise abu et n donc divise $b - bnv$ et b et donc divise

$1(b - bnv) - (bv)n = b$.

D divise b et n donc $D \leqslant d$

- d divise b et n donc divise ab et n donc $d \leqslant D$.

133. Égalité de deux PGCD (2)

1. Par une combinaison linéaire.

$$a - (n^2 - n + 3)b = -3n - 1$$

Donc $\text{PGCD}(a\ ,\ b) = \text{PGCD}(3n + 1, b)$

On réitère le procédé :

$$3b - n(3n + 1) = 2n + 3$$

Donc $\text{PGCD}(a\ ,\ b) = \text{PGCD}(2n + 3, 3n + 1)$

$$3(2n + 3) - 2(3n + 1) = 7$$

Donc $\text{PGCD}(a\ ,\ b) = \text{PGCD}(2n + 3, 7)$

$$2n + 3 - 1(7) = 2n - 4 = 2(n - 2)$$

Donc $\text{PGCD}(a\ ,\ b) = \text{PGCD}(2(n - 2)\ ,\ 7)$

2 est premier avec 7 donc

$$\text{PGCD}(a\ ,\ b) = \text{PGCD}(n - 2\ ,\ 7).$$

134. Équation diophantienne

On trouve en remontant l'algorithme d'Eucide que $(-32\ ;\ 167)$ est solution de :

$$955x + 183y = 1$$

L'ensemble des solutions est alors :

$$\begin{cases} x = -32 + 183k \\ y = 167 - 955k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

135. Somme et PPCM

1. a) On a le système $\begin{cases} d(a' + b') = 56 \\ da'b' = 180 \end{cases}$

d divise 56 et 180 donc divise PGCD(56 , 180) = 4.

b) • $d = 4$ alors $\begin{cases} a' + b' = 14 \\ a'b' = 49 \end{cases} \Leftrightarrow a' = b' = 7$

impossible car $\text{PGCD}(a'\ ,\ b') = 1$.

- $d = 2$ alors $\begin{cases} a' + b' = 28 \\ a'b' = 90 \end{cases}$

a' et b' doivent être solution de :

$$X^2 - 28X + 90 = 0$$

qui n'admet pas de solution entière. Impossible.

- $d = 2$ alors $\begin{cases} a' + b' = 56 \\ a'b' = 180 \end{cases}$

a' et b' doivent être solution de :

$$X^2 - 56X + 180 = 0$$

qui n'admet pas de solution entière. Impossible.

Conclusion : le système n'admet pas de solution.

2. a) On a le système $\begin{cases} d(a' + b') = 276 \\ da'b' = 1\,440 \end{cases}$

d divise 276 et 1 440 donc divise

PGCD (276 , 1 440) = 12.

d peut prendre les valeurs : 1, 2, 3, 4, 6, 12

b) • $d = 12$ alors $\begin{cases} a' + b' = 23 \\ a'b' = 120 \end{cases}$

a' et b' doivent être solution de :

$$X^2 - 23X + 120 = 0$$

qui admet 8 et 15 comme solution.

8 est premier avec 15 donc :

$$(a'\ ,\ b') \in \{(8\ ,\ 15)\ ;\ (15\ ,\ 8)\}$$

$$(a\ ,\ b) \in \{96\ ,\ 180)\ ;\ (180\ ,\ 96)\}$$

• $d = 6$ alors $\begin{cases} a' + b' = 46 \\ a'b' = 240 \end{cases}$

a' et b' doivent être solution de :

$$X^2 - 46X + 240 = 0$$

qui admet 6 et 40 comme solution.

40 n'est pas premier avec 6. Impossible

• On vérifie que pour $d = 4$, $d = 3$, $d = 2$ et $d = 1$ aboutissent à des équations du second degré qui n'ont pas de solution entière.

Conclusion : le système admet deux solutions symétriques (96 ; 180) et (180 ; 96).

136. Système PGCD-PPCM

On suppose que $a \leqslant b$

$d = \text{PGCD}(a , b) = 42$ et $m = \text{PPCM}(a , b)$

$$\begin{cases} d = 42 \\ m = 1680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 42 \\ a'b' = 40 \end{cases}$$

Les seules solutions acceptables sont pour $(a ; b')$: (1 ; 40) et (5 ; 8) ce qui donne pour $(a ; b)$: (42 ; 1680) et (210 ; 336).

137. PGCD et suite de Fibonacci

1. $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$.

2. Initialisation : $n = 1$ $u_2 \times u_0 - u_1^2 = (-1)^1$

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que

$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$, montrons que

$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_{n+1} + u_n)u_n - u_{n+1}(u_n + u_{n-1})$

$= u_{n+1}u_n + u_n^2 - u_{n+1}u_n - u_{n+1}u_{n-1}$

$= -(u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$

La proposition est hériditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.

L'égalité de Bézout est donc vérifiée pour u_n et u_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}^*$ donc PGCD $(u_n , u_{n+1}) = 1$

3. L'égalité est vérifiée pour $n = 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$

On prend $n \geqslant 1$. Récurrence sur p.

Initialisation : $p = 1$ $u_nu_0 + u_{n+1}u_1 = u_{n+1}$

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_{n+p} = u_nu_{p-1} + u_{n+1}u_p$, montrons que $u_{n+p+1} = u_n\, u_p + u_{n+1}u_{p+1}$.

$$u_{n+p+1} = u_{n+p} + u_{n-1+p}$$

On utilise l'hypothèse de récurrence pour n et $(n - 1)$:

$u_{n+p+1} = u_nu_{p-1} + u_{n+1}u_p + u_{n-1}u_{p-1} + u_nu_p$

$= u_nu_{p-1} + u_{n+1}u_p + (u_{n+1} - u_n)u_{p-1} + u_nu_p$

$= u_nu_p + u_{n+1}(u_p + u_{p-1})$

$= u_nu_p + u_{n+1}u_{p+1}$

La proposition est hériditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+p} = u_nu_{p-1} + u_{n+1}u_p$.

4. a) $D = \text{PGCD}(u_{n+p} , u_n)$ et $d = \text{PGCD}(u_p , u_n)$

Par double inégalité :

D divise u_{n+p} et u_n donc divise

$$u_{n+p} - u_nu_{p-1} = u_{n+1}u_p$$

Comme $\text{PGCD}(u_n , u_{n+1}) = 1$, D divise u_n et u_p

Donc $D \leqslant d$

d divise u_p et u_n donc divise

$$u_nu_{p-1} + u_{n+1}u_p = u_{n+p}$$

d divise u_n et u_{n+p} donc $d \leqslant D$

Conclusion : $D = d$.

b) $m = nq + r$

En remarquant que l'égalité de la question 4. a) est obenue par soustraction de n à l'indice du premier terme, on en déduit que :

$\text{PGCD}(u_{nq+r} , u_n) = \text{PGCD}(u_{n(q-1)+r} , u_n) = \ldots = \text{PGCD}(u_r , u_n)$

$\text{PGCD}(u_m , u_n) = \text{PGCD}(u_n , u_r)$

On divise alors n par r : $n = rq_1 + r_1$

$\text{PGCD}\ (u_r , u_n) = \text{PGCD}(u_{r1} , u_r)$

Comme avec l'algorithme d'Euclide cette suite de division fini par s'arrêter et le dernier reste non nul est le $\text{PGCD}(m , n) = d$

$$\text{PGCD}(u_m , u_n) = \text{PGCD}(u_d , u_0) = u_d$$

5. PGCD(12 , 18) = 6 donc $\text{PGCD}(u_{12} , u_{18}) = u_6 = 8$

On peut vérifier $u_{12} = 144$ et $u_{18} = 2584$. Leur PGCD est bien 8.

138. Repas gastronomique

On pose x et y les nombres respectifs des étudiants et des enfants. Le nombre d'adultes se déduit du nombre de personnes dans le groupe : $28 - x - y$.

L'équation lié à ce problème est :

$26(28 - x - y) + 17x + 13y = 613 \Leftrightarrow 9x + 13y = 115$ (E)

Algorithme. Comme les nombres des étudiants et des enfants sont inférieurs à 28, on peut proposer l'algorithme suivant :

```
for i in range(29):
    for j in range(29):
        if 9*i+13*j==115:
            print(i,j)
```

On trouve le couple (7 ; 4).

Il y a 7 étudiants, 4 enfants et 17 adultes.

Équation diophantienne

• (3 , –2) solution évidente de $9x + 13y = 1$

en multipliant par 115. (345 ; –0230) solution de (E).

• On obtient alors l'ensemble des solutions

$$\begin{cases} x = 345 + 13k \\ y = -230 - 9k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

• Comme x et y sont positifs ou nuls, on a :

$$-\frac{345}{13} \leqslant k \leqslant -\frac{230}{9} \Rightarrow k = -26$$

On retrouve alors $x = 7$ et $y = 4$.

Congruence

x est positif et $0 \leqslant y \leqslant \frac{115}{13} \Rightarrow 0 \leqslant y \leqslant 8$

Si on raisonne modulo 9, on a :

$115 \equiv 7\ (9)$ et $13 \equiv 4\ (9)$

L'équation (E) devient :

$$4y \equiv 7\ (9) \overset{\times 7}{\Rightarrow} 28y \equiv 49\ (9) \overset{28\equiv 1(9)}{\Rightarrow} y \equiv 49 \equiv 4\ (9)$$

Comme $0 \leqslant y \leqslant 8$ alors $y = 4$ puis on déduit

$$x = \frac{115 - 13 \times 4}{9} = 7.$$

139. Cryptage

1. On peut faire le programme suivant pour obtenir les 25 premiers termes

```
x=1
for i in range(25):
    x=(5*x+2)%33
    print(x)
```

On trouve alors le cycle des reste modulo 5

$n \equiv \ldots\ (5)$	1	2	3	4	5
x_n	1	7	4	22	13

2. On obtient en ajoutant à la suite des lettres les termes x_n :

D	E	B	A	R	Q	U	E	M	E	N	T
4	5	2	1	18	17	21	5	13	5	14	20
1	7	4	22	13	1	7	4	22	13	1	7
5	12	6	23	31	18	28	9	35	28	25	27

L	E	H	U	I	T	J	U	I	N
12	5	8	21	9	20	10	21	9	14
4	22	13	1	7	4	22	13	1	7
16	27	21	22	16	24	32	34	10	21

3. Pour décoder, on procède par soustractions :

5	12	24	37	34	21	10	19	27	34	19
1	7	4	22	13	1	7	4	22	13	1
4	5	20	15	21	20	3	15	5	21	18
D	E	T	O	U	T	C	O	E	U	R

8	26	27	16	23	22	25	41
7	4	22	13	1	7	4	22
1	22	5	3	22	15	21	19
A	V	E	C	V	O	U	S

140. Théorème des restes chinois

On doit résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 3\ (17) \\ n \equiv 4\ (11) \\ n \equiv 5\ (6) \end{cases}$$

Avec n le nombre de pièces.

On résout le système formé par les deux premières équations suivant la méthode indiquée à l'exercice 95.

$$(S_1) \begin{cases} n \equiv 3\ (17) \\ n \equiv 4\ (11) \end{cases}$$

On pose l'équation (E1) : $17u + 11v = 1$

Le couple (2 ; –3) est solution évidente de l'équation (E1)

On a alors comme solution à (S_1)

$$n_0 = 4 \times 17 \times 2 + 3 \times 11 \times (-3) = 37$$

La solution générale n est telle que $n - n_0$ est divisible par $17 \times 11 = 187$.

On résout un deuxième système :

$$(S_2)\begin{cases} n \equiv 37\,(187) \\ n \equiv 5\,(6) \end{cases}$$

On pose (E2) : $187u + 6v = 1$

En remontant l'algorithme d'Euclide, on trouve : $(1\ ,\ -31)$ comme solution.

On a comme solution du système (S_2) :

$n_1 = 5 \times 187 \times 1 + 37 \times 6 \times (-31)$

$n_1 = -5947$

On cherche la plus petite solution positive. La solution n est telle que $n - n_1$ est divisible par $187 \times 6 = 1\,122$.

$$-5947 \equiv 785\ (1\,122)$$

La plus petite solution est donc 785.

La fortune minimale que peut espérer le cuisinier est donc de 785 pièces d'or !

Travaux pratiques p. 130-131

1. Équation de Pell Fermat

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier une équation diophantienne du second degré.

A. Une première équation (E_1) : $x^2 - 2y^2 = 1$

1. a) $a - 1 = 2b^2$

$a^2 - 1$ est pair donc a^2 est impair et donc a est impair.

$$2b^2 = a^2 - 1 \Leftrightarrow 2b^2 = (a-1)(a+1)$$

Comme a est impair, $(a - 1)$ et $(a+1)$ sont deux nombres pairs consécutifs donc l'un est un multiple de 4, leur produit est un multiple de 8. On en déduit que b^2 est pair et donc que b est pair.

b) $(x)x + (-2y)y = 1$ d'après le théorème de Bézout, PGCD$(a\ ,\ b) = 1$.

c) On remplace dans l'équation :

$$\begin{aligned} A^2 - 2B^2 &= (3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 \\ &= 9a^2 + 24ab + 16b^2 - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) \\ &= a^2 - 2b^2 = 1 \end{aligned}$$

(A ; B) est donc une autre solution de (E_1).

2. a) (1 ; 0) est une solution de (E_1).

b) On transforme $(a\ ;\ b) \to (A\ ;\ B)$ autant de fois que nécessaire.

$(1\ ;\ 0) \to (3\ ;\ 2) \to (17\ ;\ 12) \to (99\ ;\ 70) \to (577\ ;\ 408)$

3. Il est nécessaire d'introduire une variable z supplémentaire pour ne pas écraser la variable x

```
Variables : x, y, z entiers
Initialisation
    x = 1
    y = 0
Traitement
    Tant que x ⩽ 1000 ou y ⩽ 1000 faire
        z ← 3x + 4y
        y ← 2x + 3y
        x ← z
    Fin Tant que
```

Ce qui donne donne en Python :

```
x = 1
y = 1
While x <= 1000 or y <= 1000 :
    z = 3*x + 4*y
    y = 2*x + 3*y
    x = z
print (x,y)
```

On trouve alors (3 363 , 2 378)

B. Une deuxième équation (E_2) : $x^2 - 3y^2 = 1$

1. $(x_0\ ;\ y_0) = (2\ ;\ 1)$.

2. a) On développe chaque terme de l'égalité et on identifie chaque terme.

b) L'idée est qu'en prenant deux fois la même solution, on en obtient une deuxième.

On prend : $a_1 = a_2 = x_0$ et $b_1 = b_2 = y_0$.

On a alors une autre solution :

$x_1 = a_1a_2 + 3b_1b_2 = 2^2 + 3 \times 1^2 = 7$

$y_1 = a_1b_2 + b_1a_2 = 2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$

(7 ; 4) est une autre solution.

c) Pour établir la récurrence, on prend les solutions $(x_0\ ,\ y_0)$ et $(x_n\ ,\ y_n)$, on a alors :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0x_n + 3y_0y_n = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_0y_n + y_0x_n = x_n + 2y_n \end{cases}$$

d) Introduire toujours une variable supplémentaire pour ne pas écraser la première. Pour calculer les 9 suivantes à partir de $(x_0\ ;\ y_0)$:

```
x = 2
y = 1
For I in range (10):
    z = 2*x + 3*y
    y = x + 2*y
    x = z
    print (x,y)
```

On trouve alors :

$n = 1$: $(7 ; 4)$

$n = 2$: $(26 ; 15)$

$n = 3$: $(97 ; 56)$

$n = 4$: $(362 ; 209)$

$n = 5$: $(1\,351 ; 780)$

$n = 6$: $(5\,042 ; 2\,911)$

$n = 7$: $(18\,817 ; 10\,864)$

$n = 8$: $(70\,226 ; 40\,545)$

$n = 9$: $(262\,087 ; 151\,316)$

$n = 10$: $(978\,122 ; 564\,719)$

C. Équation de Brahmagupta (E_3) : $x^2 - 92y^2 = 1$

1. a) On incrémente y à partir de 1 tant que $1 + 92y^2$ n'est pas un carré, soit tant que sa racine n'est pas entière.

```
from math import*
y=1
x=sqrt(1+92*y**2)
while floor(x)!=x:
    y=y+1
    x=sqrt(1+92*y**2)
    x=z
print(x,y)
```

b) On trouve alors $(1\,151 ; 120)$.

c) On applique l'identité de Brahmagupta avec $n = 92$ en utilisant deux fois $(1\,151 , 120)$

$$\begin{cases} x_1 = 1151^2 + 92 \times 120^2 = 2\,649\,601 \\ y_2 = 2 \times 1151 \times 120 = 276\,240 \end{cases}$$

2. Chiffrement de Hill

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Étudier un autre chiffrement que le chiffrement affine moins facilement « craquable ».

Les congruence dans ce TP s'entendent modulo 26.

1. a) $(S ; T) \to (18 ; 19) \to 255 \equiv 21,\ 202 \equiv 20$

$\to VU$

2. a) On a :

```
def hill(lettre1, lettre2):
alphabet=["A","B","C","D","E","F","G","H
","I","J","K","L","M","N","O","P","Q","R
","S","T","U","V","W","X","Y","Z"]
    x1=alphabet.index(lettre1)
    x2=alphabet.index(lettre2)
    y1=(11*x1+3*x2)%26
    y2=(7*x1+4*x2)%26
    return alphabet[y1],alphabet[y2]
```

b) On trouve en faisant des paquet de 2 :

PA LA CE → JB RZ IE

RA PA CE → FP JB IE

c) Une même lettre n'est pas nécessairement codée de la même façon. En effet le A de PA est codé par B tandis que le A de RA est codé par P. Pour qu'une même lettre soit codée de la même façon, il faut que le couple qu'elle compose avec une autre lettre soit identique.

3. a) On isole x_1 et x_2 par combinaisons

$$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 \equiv y_1 \ (E_1) \\ 7x_1 + 4x_2 \equiv y_2 \ (E_2) \end{cases}$$

On fait $4 \times (E_1) - 3 \times (E_2)$, on obtient alors :

$$23x_1 = 4y_1 - 3y_2$$

On fait $-7 \times (E_1) + 11 \times (E_2)$, on obtient alors :

$$23x_2 = -7y_1 + 11y_2$$

b) Par double implication :

$$23a \equiv b \overset{\times 17}{\Rightarrow} 391a \equiv 17b \overset{391 \equiv 1}{\Rightarrow} a \equiv 17b$$

$$a \equiv 17b \overset{\times 23}{\Rightarrow} 23a \equiv 391b \overset{391 \equiv 1}{\Rightarrow} 23a \equiv b$$

c) On multiplie les équations trouvées par 17

$$23x_1 = 4y_1 - 3y_2 \overset{\times 17}{\Leftrightarrow} x \equiv 68y_1 - 51y_2$$

$$\overset{68 \equiv 16 \text{ et } -51 \equiv 1}{\Leftrightarrow} \quad x_1 = 16y_1 + y_2$$

$$23x_2 = 19y_1 + 11y_2 \overset{\times 17}{\Leftrightarrow} x_1 \equiv 323y_1 + 187y_2$$

$$\overset{323 \equiv 11 \text{ et } 187 \equiv 5}{\Leftrightarrow} \quad x_1 = 11y_1 + 5y_2$$

d) On reprend le même programme :

```
def hill(lettre1, lettre2):
alphabet=["A","B","C","D","E","F","G","H
","I","J","K","L","M","N","O","P","Q","R
","S","T","U","V","W","X","Y","Z"]
    y1=alphabet.index(lettre1)
    y2=alphabet.index(lettre2)
    x1=(16*y1+y2)%26
    x2=(11*x1+5*y2)%26
    return alphabet[y1],alphabet[y2]
```

PF XX KN UW → LI BE RT ES

Le mot cherché est LIBERTE.

CHAPITRE 5 Nombres premiers

Manuel p. 132-159

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce dernier chapitre d'arithmétique a pour objectif de réinvestir la notion de nombre premier, essentielle en arithmétique, et de mettre en place le théorème fondamental de l'arithmétique et le dénombrement des diviseurs d'un entier.

Dans un second temps, on verra comment exploiter quelques résultats importants sur la congruence avec le petit théorème de Fermat, dans des problèmes de divisibilité, de factorisation, de recherche de nombres premiers et de cryptographie.

Objectifs

- → Déterminer si un nombre est premier.
- → Utiliser le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers.
- → Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.
- → Trouver tous les diviseurs d'un entier.
- → Appliquer le petit théorème de Fermat.
- → Déterminer un entier conditionné par le nombre de ses diviseurs.
- → Travailler modulo *p* avec *p* premier.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 133

1. Connaître les nombres premiers inférieurs à 100

1. P_{50} = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47}

2. P_{50-100} = {53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 93, 97}

2. Montrer qu'un nombre n'est pas premier

a) 57 est divisible par 3.

b) 91 est divisible par 7.

c) 143 est divisible par 11.

d) 265 est divisible par 5.

e) 341 est divisible par 11.

f) 427 est divisible par 7.

g) 319 est divisible par 11.

h) 1 581 est divisible par 3.

3. Décomposer un nombre

a) $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$

b) $98 = 2 \times 49 = 2 \times 7^2$

c) $90 = 9 \times 10 = 2 \times 5 \times 3^2$

d) $91 = 7 \times 13$

e) 97 premier

f) $121 = 11^2$

g) $128 = 2^7$

h) $225 = 15^2 = 3^2 \times 5^2$

4. Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier

a) D_{24} = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ;6 ; 8 ; 12 ; 24}

b) D_{36} = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36}

c) D_{45} = {1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45}

d) D_{51} = {1 ; 3 ; 17 ; 51}

e) D_{63} = {1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 21 ; 63}

f) D_{91} = {1 ; 7 ; 13 ; 91}

5. Définir la divisibilité à l’aide de la congruence

a) $n \equiv 0\ (6)$ **b)** $n \equiv 0\ (15)$

c) $n \equiv 0\ (12)$ **d)** $n \equiv 0\ (18)$

6. Traduire une proposition mathématique en français usuel

a) n est divisible par 5.

b) Si n est divisible par 4 et par 5 alors n est divisible par 20.

c) Si n est inférieur ou égal à 25 et si n n’est pas divisible par 3, 5 ou 7 alors n est premier.

d) Si le produit ab est divisible par un nombre premier p alors p divise a ou b.

7. Comprendre un algorithme en langage Python

Décomposition en facteurs premier :

`f(154)→(2,7,11)`

Activités p. 134-135

1 Découvrir le crible d’Ératosthène

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir une méthode pour élaborer une liste de nombres premiers.

A. Élaboration manuelle de la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 150

On obtient le tableau suivant :

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

B. Justification

1. Comme on a déjà rayé les multiples de 2, 3 et 5 le premier multiple de 7 non rayé est $7 \times 7 = 49$.

2. Le nombre premier suivant est 13 dont les multiples par 2, 3, 5, 7 et 11 ont déjà été rayés, le suivant est $13^2 = 169$ qui est hors de la table.

2 Généraliser le crible d’Ératosthène par un algorithme

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Programmer en Python.

1. À la ligne 3, on génère une liste des entiers de 0 jusqu’à n.

2. a) On boucle sur les entiers de 2 à $\sqrt{n}+1$ exclus. Au-delà les multiples seront déjà mis à 0.

b) Python implicitement prendra pour la partie entière de $\sqrt{n}+1$ le type flottant. La fonction **`int`** permet de changer le type flottant pour le type entier.

3. Aux lignes 5 et 6, on met à 0 tous les multiples stricts de i non déjà remis à 0.

4. Aux lignes 9, 10 et 11, on supprime tous les termes égaux à 0 ou à 1 de la liste.

5. L’affectation de la ligne 8 permet de revisionner tous les éléments de la liste à partir du rang 0 et celle de la ligne 13 permet d’incrémenter i pour passer au terme suivant.

6. **`crible(150)`** renvoi la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 150 ainsi que le nombre d’éléments de cette liste.

7. **`crible(150)`** →

```
([2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,
37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73,
79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113,
127, 131, 137, 139, 149], 35)
```

Il y a 35 nombres premiers inférieurs ou égaux à 150.

3 Déterminer le nombre de diviseurs

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Dénombrer les diviseurs d’un nombre entier.

1. $567 = 3^4 \times 7$

2. Un diviseur de 567 devra diviser $3^4 \times 7$ donc sa décomposition ne devra contenir que des puissances de 3 inférieures ou égales à 4 ou des puissances de 7 inférieures ou égales à 1.

3. On obtient le tableau suivant :

$\times$	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4
7^0	1	3	9	27	81
7^1	7	21	63	189	567

4. $D_{567} = \{1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 21 ; 27 ; 63 ; 81 ; 189 ; 567\}$

Il y a 10 diviseurs. On aurait pu le prévoir en sachant qu'il y a 5 valeurs possibles pour α et 2 pour β soit $5 \times 2 = 10$.

5. On peut faire un arbre de choix.

6. a) $735 = 3 \times 5 \times 7^2$

b) Un diviseur de 735 est de la forme $3^\alpha \times 5^\beta \times 7^\gamma$ avec $\alpha, \beta \in \{0 , 1\}$ et $\gamma \in \{0 ; 1 ; 2\}$ soit $2 \times 2 \times 3 = 12$ choix possibles.

c) On peut remplir le tableau suivant :

$\times$	$3^0\,5^0$	$3^1\,5^0$	$3^0\,5^1$	$3^1\,5^1$
7^0	1	3	5	15
7^1	7	21	35	105
7^2	49	147	245	735

7. Tous les carrés parfaits ont un nombre impair de diviseurs.

3 diviseurs : $3^2 = 9$; 7 diviseurs : $2^6 = 64$.

À vous de jouer p. 137-143

1. $\sqrt{317} \approx 17{,}8$. On teste tous les nombres premiers jusqu'à 17 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 qui ne divisent pas 317 donc 317 est premier.

2. $\sqrt{317} \approx 20{,}9$. On teste tous les nombres premiers jusqu'à 19 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19. Le dernier 19 divise pas 437 donc 437 n'est pas premier.

3. 1. Restes possibles : 1, 5, 7, 11.

2. $p^2 + 11$ est divisible par 12

$p \equiv \ldots$ (12)	1	5	7	11
$p^2 + 11 \equiv \ldots$ (12)	0	0	0	0

4. 1. $p > 5$ donc p n'est ni divisible par 3 ni par 5.

On a vu que $p^2 \equiv 1\ (3) \overset{\uparrow 2}{\Rightarrow} p^4 \equiv 1\ (3)$

Pour 5 on peut faire un tableau de congruence :

$p \equiv \ldots$ (5)	1	2	3	4
$p^4 \equiv \ldots$ (5)	1	$16 \equiv 1$	$81 \equiv 1$	$256 \equiv 1$

On en déduit que $p^4 - 1 \equiv 0\ (5)$.

2. $p^4 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$

p étant impair, $(p - 1)$ et $(p + 1)$ sont deux nombres pairs consécutifs dont l'un est multiple de 4 et $p^2 + 1$ est pair. En conséquence $p^4 - 1$ est multiple de $2 \times 4 \times 2 = 16$.

3. Les entiers 3, 5 et 16 sont premiers entre eux deux à deux donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $3 \times 5 \times 16 = 240$ divise $p^4 - 1$.

5. 1. $6\,468 = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 11$

$16\,380 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

2. PGCD $(6\,468 , 16\,380) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$

6. 1. a) $8\,316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$

$5\,670 = 2 \times 3^4 \times 5 \times 7$

Donc PGCD$(8\,316 , 5\,370) = 2 \times 3^3 \times 7 = 378$.

b) $8\,316 = 5\,670 \times 1 + 2\,646$

$5\,670 = 2\,646 \times 2 + 378$

$2\,646 = 378 \times 7$

2. L'algorithme d'Euclide est plus économe en terme opératoire.

7. 1. a) $5\,455 = 5 \times 1\,091$

$3\,570 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17$

Donc PGCD$(5\,455 , 3\,570) = 5$

b) $5\,455 = 3\,570 \times 1 + 1\,885$

$3\,570 = 1\,885 \times 1 + 1\,685$

$1\,885 = 1\,685 \times 1 + 200$

$1\,685 = 200 \times 8 + 85$

$200 = 85 \times 2 + 30$

$85 = 30 \times 2 + 25$

$30 = 25 \times 1 + 5$

$25 = 5 \times 5$

2. Malgré le nombre de lignes pour l'algorithme d'Euclide, cette méthode est préférable car par exemple il faut savoir que 1 091 est premier.

8. $\dfrac{5\,292}{5\,544} = \dfrac{2^2 \times 3^3 \times 7^2}{2^3 \times 3^2 \times 4 \times 11} = \dfrac{21}{22} = \dfrac{a}{b}$

$a + b = 903 \overset{\div b}{\Rightarrow} \dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{3 \times 7 \times 43}{b}$

$\dfrac{21}{22} + 1 = \dfrac{21 \times 43}{b} \Leftrightarrow \dfrac{43}{22} = \dfrac{21 \times 43}{b} \Leftrightarrow b = 21 \times 22 = 462$

$\Rightarrow a = 441$

9. 1. On teste tous les diviseurs à partir de 2 et les diviseurs impairs à partir de 3 inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$. Tant que l'on peut diviser par ce diviseur, on ne passe pas au suivant. À chaque diviseur trouvé, on l'ajoute à la liste.

2. Après la boucle conditionnelle, on ajoute le diviseur n : `L.append(n)`.

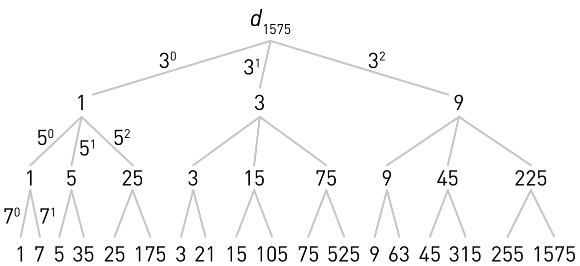
10. 1. $2\,025 = 3^4 \times 5^2$. Nombre de diviseurs :15.

2. Diviseurs de 2 025 :

	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4
5^0	1	3	9	27	81
5^1	5	15	45	135	405
5^2	25	75	225	675	2 025

11. 1. $1\,575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$. Nombre de diviseurs : 18.

2. Diviseurs de 1 575 :



12. Théorème de Fermat : $3^p \equiv 3\ (p)$ donc :

$3^{n+p} \equiv 3^n \times 3^p = 3^n \times 3 \equiv 3^{n+1}\ (p)$

$3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p.

13. 1. D'après le théorème de Fermat, 5 étant premier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n \equiv 0\ (5)$.

2. $a = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$, comme n, $(n-1)$, n et $(n+1)$ sont 3 entiers consécutifs l'un au moins est pair et l'un est multiple de 3.

Comme 2, 3 et 5 sont premiers entre eux deux à deux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, a est divisible par $2 \times 3 \times 5 = 30$.

14. 1. $(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1)$

$\Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 3 \Leftrightarrow \alpha(\beta - 1) - (\beta - 1) = 3$

$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

2. $n = 2^4 \times 3^2 = 144 =$ ou $n = 2^2 \times 3^4 = 324$

15. $48 = 2^4 \times 3$

16. 1. Soit p_1, p_2, p_3 trois nombres premiers.

Les 4 configurations possibles pour un entier de posséder 12 diviseurs sont : p_1^{11} ; p_1^5 ; $p_1^3p_2^2$; $p_1^2p_2p_3$.

2. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « Trouvez les **cinq** entiers inférieurs à 100 ayant 12 diviseurs. » La 1re configuration n'a pas d'entier inférieur à 100.

- $2^5 \times 3 = 96$
- $2^3 \times 3^2 = 72$
- $2^2 \times 3 \times 5 = 60$, $2^2 \times 3 \times 7 = 84$
- $2 \times 3^2 \times 5 = 90$

17. 1. Soit p_1, p_2, p_3 trois nombres premiers.

Les 3 configurations possibles pour un entier de posséder 8 diviseurs sont : p_1^7 ; p_1^3 ; $p_1p_2p_3$.

2. Le plus petit entier est obtenu avec la 2e configuration : $2^3 \times 3 = 24$.

18. $18 = 2 \times 3^2$ et $27 = 3^3$. n possède deux facteurs premiers primaires : 2 et 3 donc $n = 2^{\alpha 3^{\beta}}$.

Les conditions imposent $\begin{cases}(\alpha+1)(\beta+1) = 21 \\ \beta < 3\end{cases}$

On en déduit $\alpha = 6$ et $\beta = 2$ donc $n = 2^6 \times 3^2 = 576$.

19. $18n = 2 \times 3^2 \times 2^\alpha \times 3^\beta = 2^{\alpha+1} \times 3^{\beta+2}$

2. $(\alpha + 2)(\beta + 3) = 2(\alpha + 1)(\beta + 1) \Leftrightarrow \alpha(\beta + 1) = 4$

3. $n = 2^4 \times 3^2 = 144$, $n = 2^2 \times 3^3 = 108$

$n = 2 \times 3^5 = 486$

20. 1. Soit p_1, p_2, p_3 trois nombres premiers.

Les 4 configurations possible pour un entier de posséder 18 diviseurs sont : p_1^{17} ; $p_1^5p_2^2$; $p_1^3p_2^2$; $p_1^2p_2^2p_3$.

2. L'entier cherché est : $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

21. 1. a est pair donc $a^2 + 1$ est impair et donc p est impair donc de la forme $4n + 1$ ou $4n + 3$.

2. On a $a^2 + 1 \equiv 0\ (p)$ donc $a^2 \equiv -1\ (p)$ et donc $a^4 \equiv 1\ (p)$.

a) De plus p ne divise pas a car sinon on aurait $a^2 \equiv 0\ (p)$.

b) Supposons que $p = 4n + 3$. Comme p ne divise pas a d'après le théorème de Fermat :

$a^{p-1} \equiv (a^4)^p a^2 \equiv 1\ (p)$.

Or $(a^4)^p a^2 \equiv 1^p \times (-1) \equiv -1\ (p)$

On a donc $1 \equiv -1\ (p)$ ce qui entraine p pair.

Contradiction.

3. p est de la forme $4n + 1$.

22. 1. Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier donc il existe p premier divisant $(a^2 + 1)$.

2. a) [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « Montrer que $p > \boldsymbol{N}$ »

a est pair d'après l'exercice 21, p ne divise pas a donc $p > N$.

b) D'après l'exercice 21, pour tout N, il existe un nombre premier p de la forme $(4n + 1)$ plus grand que N. Il existe donc une inifinté de nombres premiers de la forme $4n + 1$.

Exercices apprendre à démontrer p. 144

Pour s'entraîner

Supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec PGCD$(p\ ,\ q) = 1$.

On élève au carré : $\dfrac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$.

p^2 est pair donc p est pair et donc p^2 divisible par 4. En conséquence q^2 est pair et donc q aussi. p n'est pas premier avec q : contradiction.

Exercices calculs et automatismes p. 145

23. Nombres premiers

a) Fausse. **b) Fausse :** 2 est premier. **c) Vraie.**

d) Fausse : a n'est pas nécessairement premier.

24. Critère d'arrêt

On utilise les critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 11. Pour 7 on fait la division de tête.

25. Crible et critère d'arrêt

1. On obtient le tableau suivant :

31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

2. Les nombres premiers sont : 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.

26. Théorème de Gauss (1)

Si p divise n^2, d'après le théorème de Gauss, p divise n et donc p divise n^2.

27. Théorème de Gauss (2)

a) Vraie : si 13 divise a^5 d'après le théorème de Gauss, 13 divise a donc 13^5 divise a^5 donc en divisant par 13 : 13^4 divise $\dfrac{a^5}{13}$.

b) Fausse. Contre-exemple : 3 divise $6 \times 5 = 30$ et 3 ne divise par 5.

28. Décomposition (1)

1. a) $30 = 2 \times 3 \times 5$ **b)** $40 = 2^3 \times 5$

c) $64 = 2^6$ **d)** $70 = 2 \times 5 \times 7$

e) $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

2. a) $800 = 2^3(2 \times 5)^2 = 2^5 \times 5^2$

b) $2\,000 = 2(2 \times 5)^3 = 2^4 \times 5^3$

c) $60\,000 = 2 \times 3(2 \times 5)^4 = 2^5 \times 3 \times 5^4$

29. Décomposition (2)

a) $6! = 2^4 \times 3^2 \times 5$

b) $(29^2 - 4) = (29 - 2)(29 + 2) = 3^3 \times 31$

c) $(85^2 - 16) = (85 - 4)(85 + 4) = 3^4 \times 89$

30. Décomposition (3)

b)

31. PGCD

a) $350 = 35 \times 10 = 2 \times 5^2 \times 7$ et

$980 = 98 \times 10 = 2^2 \times 5 \times 7^2$

PGCD$(a\ ,\ b) = 2 \times 5 \times 7 = 70$

b) $792 = 72 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 11$

$924 = 84 \times 11 = 12 \times 7 \times 11 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$

PGCD$(a\ ,\ b) = 2^2 \times 3 \times 11 = 132$

32. Nombre de diviseurs (1)

a) Vraie : $2 \times 7 \times 17$

b) Vraie car 2 n'apparaît pas dans la décomposition de a.

33. Nombre de diviseurs (2)

On décompose les deux nombres en facteurs premiers et on applique la formule du cours.

34. Nombre de diviseurs (3)

a), b) et c). 12 diviseurs.

35. Nombre de diviseurs (4)

$3 \times (\alpha + 1)^2 = 48 \Leftrightarrow \alpha = 3$

36. Théorème de Fermat (1)

a) $4^{20} = 2^{40} \equiv 1$ (41)

b) $25^{20} = 5^{40} \equiv 1$ (41)

c) $49^{20} = 7^{40} \equiv 1$ (41)

d) $50^{41} = 2\times 2^{40} \times 5^2 \times (5^{40})^2 \equiv 2 \times 25 \equiv 9$ (41)

37. Théorème de Fermat (2)

a) Vraie car $(5^6)^n \equiv 1$ (7).

b) Fausse avec $n = 1$: $7^3 - 1 = 342$ non divisible par 4.

38. Théorème de Fermat (3)

3^{37} est impair donc $3^{37} - 5$ est pair et donc a est pair.

$2^{37} \equiv 2$ (37) et $3^{37} \equiv 3$ (37) donc $a \equiv 0$ (37)

2 et 37, premiers entre eux, divise a donc 74 divise a.

Exercices d'application p. 146-147

Déterminer si un nombre est premier

39. $\sqrt{419} \approx 20{,}5$. On teste tous les nombres premiers jusqu'à 19 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 qui ne divisent pas 419 donc 419 est premier.

40. a) 117 est divisible par 9.

b) 271 est premier.

c) 323 est divisible par 17.

d) 401 est premier.

e) 527 est divisible par 17.

f) 719 est premier.

41. 1. $N = (n - 2)(2n + 5)$

2. L'un des facteurs doit être égal à 1, soit $n = 3$, on trouve $N = 11$.

42. Fausse. $N = (n + 2)(2n + 3)$. N est premier si l'un des facteur est égal à 1, soit $n = -1 \notin \mathbb{N}$.

43. 1. Si $p \neq 0$ (3) :

• $p \equiv 1$ (3) donc $p + 2\,000 \equiv 1 + 2 \equiv 0$ (3).

Or $n_2 > 3$ donc n_2 n'est pas premier ;

• $p \equiv 2$ (3) donc $p + 1\,000 \equiv 2 + 1 \equiv 0$ (3).

Or $n_1 > 3$ donc n_1 n'est pas premier.

On doit donc avoir $p \equiv 0$ (3) ce qui entraine $p = 3$.

2. Si $p \equiv 3$ alors, $n_1 = 1\,003 = 17 \times 59$ et $n_2 = 2003$ premier. On ne peut avoir n_1 et n_2 premiers.

44. $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$

Si p divise $a^2 - 1$ alors p divise $(a - 1)$ ou $(a + 1)$.

$$1 \leqslant a - 1 \leqslant p - 3$$
$$3 \leqslant a + 1 \leqslant p - 1$$

Ce qui montre que cela est impossible.

45. 1. On a :

```
from math import *
def f(n):
   i=2
   if n%i==0:
      return "non premier car divisible par", i
   i+=1
   while i<=sqrt(n):
      if n%i==0:
         return "non premier car divisible par", i
      i+=2
   return "premier"
```

2. a) La fonction **f** détermine la primalité d'un nombre.

b) Le fonction teste d'abord si le nombre n est divisible par 2 puis tant que le nombre impair i est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ teste si n est divisible par i en l'incrémentant de 2 à partir de 3.

46. N est premier pour n impair de 1 à 7.

Pour $n = 9$ on a $N = 119 = 7 \times 17$.

Utiliser le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers

47. p divise a et $a^2 + b^2$ donc p divise $(-a)$

$a + 1(a^2 + b^2) = b^2$.

Comme p est premier, d'après le théorème de Gauss p divise b^2, donc b.

48. 1. $17p = (n - 1)(n + 1)$

2. D'après le théorème de Gauss, 17 est premier et divise $(n - 1)$ ou $(n + 1)$.

Donc $n = 17k + 1$ ou $n = 17k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Si $n = 17k + 1$ alors $p = k(17k + 2)$.

Comme p est premier alors $k = 1$ et donc $p = 19$ est premier.

Si $n = 17k - 1$ alors $p = k(17k - 2)$.

Comme p est premier, alors $k = 1$ et donc $p = 15$ est non premier ce qui est impossible. Un seule solution : $n = 18$ et $p = 19$.

49. 1. $29p = (n-1)(n+1)$

2. D'après le théorème de Gauss, 19 est premier et divise $(n-1)$ ou $(n+1)$.

Donc $n = 29k + 1$ ou $n = 29k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Si $n = 29k + 1$ alors $p = k(29k + 2)$

Comme p est premier alors $k = 1$ et donc $p = 31$ est premier.

Si $n = 29k - 1$ alors $p = k(29k - 2)$.

Comme p est premier alors $k = 1$ et donc $p = 27$ est non premier ce qui est impossible.

Une seule solution : $n = 30$ et $p = 31$.

50. Si PGCD$(p\ ,a) = 1$ alors d'après le théorème de Gauss, p divise b.

Si PGCD$(a\ ,\ b) \neq 1$ alors comme p est premier PGCD$(p\ ,a) = p$ donc p divise a.

Décomposer en produit de facteurs premiers

51. $960 = 2^6 \times 3 \times 5$

$221\,222 = 2 \times 53 \times 2\,087$

52. 1. $2\,650 = 2 \times 5^2 \times 53$

$1\,272 = 2^3 \times 3 \times 53$

2. PGCD$(2\,650\ ,1\,272) = 2 \times 53 = 106$

3. $2\,650 = 1\,272 \times 2 + 106$

$1\,272 = 106 \times 12$

On retrouve le PGCD avec un nombre très réduit de calculs.

53. 1. $428\,904 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 23 \times 37$

$306\,360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 23 \times 37$

2. PGCD$(2\,650\ ,\ 1\,272) = 2^3 \times 3^2 \times 23 \times 37 = 61\,272$

3. $428\,904 = 306\,360 \times 1 + 122\,544$

$306\,360 = 122\,544 \times 2 + 61\,272$

$122\,544 = 61\,272 \times 2$

On retrouve le PGCD avec un nombre très réduit de calculs.

54. 1. Tous les facteurs premiers ont une puissance paire dans un carré parfait.

2. $56 = 2^3 \times 7$

Soit n un carré parfait de trois chiffres divisibles par 56. On a alors $n = k \times 2^4 \times 7^2 = 784k$. Donc $k = 1$ et $n = 784$.

55. Le volume en cm^2 est $V = 22\,661$.

Soit a, b et c les dimensions du pavé droit, avec $a \leqslant b \leqslant c$, on a : $abc = 22\,661 = 17 \times 31 \times 43$.

- Si a, b et c sont supérieurs à 1, on a une solution : $a = 17$, $b = 31$ et $c = 43$.
- Si $a = 1$, on a 4 choix possible :
- $b = 1$ et $c = 22\,661$
- $b = 17$ et $c = 1\,333$
- $b = 31$ et $c = 731$
- $b = 43$ et $c = 527$

56. 1. $2\,016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

2. Comme les puissances des facteurs premiers dans n^2 doivent être paires, le plus petit entier n est tel que : $n^2 = 2^6 \times 3^2 \times 7^2$.

Donc $n = 2^3 \times 3 \times 7 = 168$.

57. On a : $D_{84} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 12\ ;\ 14\ ;\ 21\ ;\ 28\ ;\ 42\ ;\ 84\}$

$x(x+1)(2x+1) = 84$

On cherche une décomposition en trois facteurs de 84 dont les deux premiers sont consécutifs. D'après les diviseurs de 84, x ne peut être que 1, 2, 3 ou 6.

En testant ces 4 cas, seul $x = 3$ est solution.

58. 1. 1000! est divisible par 2 et par 5, donc sa décomposition en nombres premiers est de la forme : $2^p \times 5^q \times N$, avec $p > 1$ et $q > 1$. N est alors le produit de nombres premiers différents de 2 et de 5. N est donc premier avec 2 et 5. Il est donc premier avec 10.

2. a) Il y a $\dfrac{1000}{5} = 200$ nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5.

Il y a $\dfrac{200}{5} = 40$ nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 52.

Il y a $\dfrac{40}{5} = 8$ nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 53.

Il y a 1 nombre inférieur ou égal à 1000 divisible par 5^4 : $625 = 5^4$.

b) Comme 1000! contient tous ces facteurs, 1000! contient : $5^{200} \times 5^{40} \times 5^8 \times 5 = 5^{249}$.

On a donc : $q = 249$.

3. 1000! contient au moins : $\dfrac{1000}{2} = 500$ facteurs de 2 donc $p > 500$ et donc $p > q$.

On a alors : $1000! = (2 \times 5)^{249} \times 2^{p-249} \times N = 10^{249} \times M$ où M n'est pas divisible par 5, donc non divisible par 10.

1000! possède donc 249 zéros.

59. 1. Avec le critère d'arrêt, on montre que 997 est premier. $999\,991 = 17 \times 59 \times 997$

2. On cherche un diviseur de 999 991 inférieur à 1000. Il y en a quatre : 1, 17, 59, 997.

Seul 997 est crédible en ce qui concerne la fabrication de l'annuaire. L'annuaire a 997 pages et chaque page contient : $17 \times 59 = 1\,003$ noms.

Trouver le nombre de diviseurs d'un entier

60. 1. $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$. 792 a 24 diviseurs.

2. Diviseurs de 792 :

	2^0	2^1	2^2	2^3
$3^0 \times 11^0$	1	2	4	8
$3^1 \times 11^0$	3	6	12	24
$3^2 \times 11^0$	9	18	36	72
$3^0 \times 11^1$	11	22	44	88
$3^1 \times 11^1$	33	66	132	264
$3^2 \times 11^1$	99	198	396	792

61. 1. $8\,316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$. 8 316 a 48 diviseurs.

2. On peut reprendre l'algorithme du chapitre 3.

```
from math import*
def div(n):
    D=[]
    i=1
    while i<=sqrt(n):
        if n%i==0:
            D.append(i)
            if n//i!=i:
D.append(n//i)
            i=i+1
    D.sort()
    return D
```

div(8 316) → [1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 18, 21, 22, 27, 28, 33, 36, 42, 44, 54, 63, 66, 77, 84, 99, 108, 126, 132, 154, 189, 198, 231, 252, 297, 308, 378, 396, 462, 594, 693, 756, 924, 1188, 1386, 2079, 2772, 4158, 8316]

62. 1. $300^{300} = 2^{600} \times 3^{300} \times 5^{600}$. Il a 108 721 501 diviseurs.

2. Il faut multiplier le nombre de diviseurs par 10. On peut proposer $7^9 \times 300^{300}$.

63. On pose $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}$.

Son nombre de diviseurs est alors :

$$N = (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$$

n est un carré parfait si pour $i \in [\![1\,,\,m]\!]$, α_i est pair donc $\alpha_i + 1$ est impair. On a alors N impair. Réciproquement, si N est impair, pour tout $i \in [\![1\,,\,m]\!]$, $\alpha_i + 1$ est impair donc α_i est pair.

n est alors pair.

64. 1. 5 est premier donc pour avoir 5 diviseurs la seule figuration est p^4.

2. $n - 16 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$

3. Comme $n - 16 = p_1 \times p_2$ alors : $p - 1 = 1 \Leftrightarrow p = 2$.

On a alors $n = 2^5 = 32$.

65. 1. a) Soit $a = da'$ et $b = db'$ avec PGCD$(a'\,,\,b') = 1$, on a alors $d^2a'b' = 11\,340$.

b) $11\,340 = 2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7$. Un diviseur carré parfait de 11 340 ne peut contenir que les facteurs 2 et 3 dont l'égalité proposée.

2. a) d possède 6 diviseurs donc : $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 6$.

$\alpha \leqslant 1$ et $\beta \leqslant 2$, on a alors $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

$d = 2 \times 3^2 = 18$.

b) Des condition $\alpha \equiv 0\ (5)$ et $a < b$, on déduit que $a = 18 \times 5 = 90$ et $b = 18 \times 7 = 126$.

Appliquer le petit théorème de Fermat

66. 1. 29 est premier et ne divise pas 4, donc $4^{28} \equiv 1\ (29)$ et donc $4^{28} - 1$ divisible par 29.

2. $4 \equiv 1\ (3) \Rightarrow 4^n \equiv 1^n \equiv 1\ (3)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ divisible par 3.

3. $4^2 \equiv 1\ (5) \Rightarrow (4^2)^{2k} \equiv 1^{2k} \equiv 1\ (5)$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4^{4k} - 1$ divisible par 5.

$4^2 \equiv -1\ (17) \Rightarrow (4^2)^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1\ (17)$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4^{4k} - 1$ divisible par 5.

4. $28 = 4 \times 7$, donc $4^{28} - 1$ est divisible par 3, 5, 17 et 29.

67. 1. 13 et 7 sont premiers, d'après le théorème de Fermat :

$n^{13} \equiv n\ (13) \Leftrightarrow a \equiv 0\ (13)$

$n^7 \equiv n\ (7) \overset{\times n^6}{\Rightarrow} n^{13} \equiv n^7 \equiv n\ (7) \Rightarrow a \equiv 1\ (7)$

2. n^{13} et n ayant même parité, $n^{13} - n$ est pair.

2, 7 et 13 divisent a et sont premiers entre eux deux à deux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $2 \times 7 \times 13 = 182$ divise a.

68. 1. 31 premier, d'après le théorème de Fermat : $n^{31} \equiv n\ (31) \Leftrightarrow n^{31} - n \equiv 0\ (13)$.

n^{31} et n ayant même parité, $n^{31} - n$ est pair.

2 et 31 divise $n^{31} - n$ et sont premiers entre eux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $n^{31} - n \equiv 0\ (62)$.

2. On multiplie par a^{n-1}, on obtient alors :

$a^{30+n} - a^n \equiv 0\ (62)$.

69. 1. D'après la somme d'une suite géométrique :

$$1 + 2 + ... + 2^{p-2} = 2^{p-1} - 1$$

Comme 2 est non multiple de p, d'après le théorème de Fermat : $2^{p-1} \equiv 1\ (p) \Leftrightarrow 2^{p-1} - 1 \equiv 0\ (p)$.

2. Pour $n \leqslant 96$, n est non multiple de 97 donc d'après le théorème de Fermat $n^{96} \equiv 1\ (97)$.

De plus $97^{96} \equiv 0\ (97)$ et $98^{98} \equiv 1^{98} \equiv 1\ (97)$.

Donc $S \equiv 96 \times 1 + 0 + 1 = 97 \equiv 0\ (97)$.

97 divise donc S.

70. 1. D'après le théorème de Fermat, p divise $3^p - 3$ et comme p divise $3^p + 1$, p divise leur différence soit 4.

2. Le seul nombre premier qui divise 4 est $p = 2$.

On vérifie que $3^p + 1$ est pair. Le seul nombre premier qui divie $3^p + 1$ est 2.

71. 1. On vérifie avec le critère d'arrêt que 761 est premier.

2. a) $n + 1 = 10^{760}$

b) 10 est non multiple de 761, d'après le théorème de Fermat : $10^{760} \equiv 1\ (761)$. $\Leftrightarrow n \equiv 0\ (761)$.

72. 1. a) 7 est premier, d'après le théorème de Fermat : $n^7 \equiv n\ (7) \Leftrightarrow A \equiv 0\ (7)$.

b) n et n^3 ont même parité donc n et $(n^3 - 1)$ ont des parités contraires donc l'un des deux est pair donc A est pair.

3 est premier, d'après le théorème de Fermat $n^3 \equiv n\ (3)$, on en déduit alors que :

$$n(n^3 - 1)(n^3 + 1) \equiv n(n - 1)(n + 1)\ (3)$$

$(n - 1)$, n et $(n + 1)$ sont trois entiers consécutifs donc l'un des trois est multiple de 3, donc A est divisible par 3.

c) A est divisible par 7, 2 et 3 qui sont premiers entre eux deux à deux donc d'après le corollaire du théorème de Gaus A est divisible par 42.

2. a) $B = n^6 - n^2$. 3 est premier, d'après le théorème de Fermat $n^3 \equiv n\ (3) \overset{\uparrow 2}{\Rightarrow} n^6 \equiv n^2\ (3)$

Donc $B \equiv 0\ (3)$.

b) 5 est premier, d'après le théorème de Fermat $n^5 \equiv n\ (5) \overset{\times n}{\Rightarrow} n^6 \equiv n^2\ (5)$. B est divisible par 5.

c) On remplit le tableau de congruence :

$n \equiv ...(4)$	0	1	2	3
$n^2 \equiv ...(4)$	0	1	0	1
$n^2 - 1 \equiv ...(4)$	3	0	3	0
$n^2 + 1 \equiv ...(4)$	1	2	1	2
B	0	0	0	0

B est divisible par 4.

d) B est divisible par 3, 5 et 4 qui sont premiers entre eux deux à deux, d'après le corollaire du théorème de Gaus B est divisible par 60.

Exercices d'entraînement p. 148-150

Déterminer un entier conditionné par le nombre de ses diviseurs

73. n a 6 diviseurs donc n est de la forme $n = p^2q$ avec p et q premiers.

La somme de ses diviseurs est 28 :

$1 + p + p^2 + q + pq + p^2q = 28 \Leftrightarrow (1 + p + p^2)(1 + q) = 28$

Produit de facteurs supérieurs ou égaux à 3 :

$1 + p + p^2 = 7$ et $1+q = 4$

$p = 2$ et $q = 3$ donc $n = 2^2 \times 3 = 12$.

74. 1. $12n = 2^{\alpha+2} \times 3^{\beta+1}$. On doit avoir

$(\alpha + 3)(\beta + 2) = 2(\alpha + 1)(\beta + 1) \Leftrightarrow \beta(\alpha - 1) = 4$

2. On a 3 solutions : $n = 2^5 \times 3^1 = 96$

$n = 2^3 \times 3^2 = 72$ et $n = 2^2 \times 3^4 = 324$

75. 1. $n^3 = 2^{3\alpha} \times 3^{3\beta}$. On doit avoir :

$(3\alpha + 1)(3\beta + 1) = 8(\alpha + 1\ )(\beta + 1)$

$\Leftrightarrow \alpha\beta - 5\alpha - 5\beta = 7 \overset{+25}{\Leftrightarrow} (\alpha - 5)(\beta - 5) = 32$

2. On obtient 6 couples solutions : (6 ; 37) ; (7 ; 21) ; (9 ; 13) ; (13 ; 9) ; (21 ; 7) ; (37 ; 6) qui donnent les valeurs de *n* suivantes :

$2^6 3^{37}$, $2^7 3^{21}$, $2^9 3^{13}$, $2^{13} 3^9$, $2^{21} 3^7$, $2^{37} 3^6$.

76. a) *n* de la forme $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $\alpha > \beta$

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 10 \Rightarrow n = 2^4 \times 3 = 48$

b) *n* de la forme $n=2^\alpha \times 3^\beta$ avec $\alpha > \beta$

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 15 \Rightarrow n = 2^4 \times 3^2 = 144$

77. $18 = 2 \times 3^2$. Comme on ne peut décomposer 10 et 21 en plus de deux facteurs, *a* et *b* n'ont comme facteurs primaires que 2 et 3.

$21 = 7 \times 3$ la seule configuration pour *a* est $a = 2^\alpha \times 3^2 \Rightarrow \alpha + 1 = 7 \Rightarrow \alpha = 6$ donc $a = 2^6 \times 3^2 = 576$.

$10 = 2 \times 5$ la seule configuration pour *b* est $a = 2 \times 3^\beta \Rightarrow \beta + 1 = 5 \Rightarrow \beta = 4$ donc $b = 2 \times 3^4 = 162$.

On vérifie que PGCD$(a , b) = 2 \times 3^2 = 18$.

78. 1. *n* admet 14 diviseurs et 14 ne peut se décomposer au maximum qu'en deux facteurs $(14 = 2 \times 7)$. Le nombre *n* ne peut donc avoir plus de deux diviseurs premiers dont l'un est 2 car *n* est divisible par 4.

2. Si *n* a un seul diviseur premier alors :

$n = 2^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 14 \Leftrightarrow \alpha = 13$.

$2^{13} = 8\,192$ or $n - 1 = 8\,191$ non multiple de 37. Les nombres *n* ont donc deux diviseurs premiers, 2 et $q : n = 2^\alpha \times q^\beta$.

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 14$ avec $\alpha \geqslant 2$ car *n* est divisible par 4. On en déduit que $n = 2^6 q^1$.

$n < 1\,000 \Rightarrow 2^6 q < 1\,000 \Rightarrow q < \dfrac{1000}{2^6} \Rightarrow q \leqslant 15$.
q est à chercher dans l'ensemble :

$$E = \{3, 5, 7, 11, 13\}$$

comme $n = 37p + 1$ alors 37 divise $(n - 1)$.

On teste les valeurs de *E*, on trouve une seule solution $q = 11 \Rightarrow n = 704$.

On a alors $704 = 37 \times 19 + 1$.

79. 1. Les quatre premiers nombres parfaits sont obtenus avec $n \in \{1 ; 2 ; 4 ; 6\}$: 6 ; 28 ; 496 ; 8 128.

2. a) Comme $2^{n+1} - 1$ est premier, la décomposition de *a* en facteurs premiers est : $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$.

b) On obtient les diviseurs de *a* en faisant varier la puissance de 2.

$D_a = \{1 ,2 , 2^2 , ... ,2^n , (2^{n+1} - 1) , 2(2^{n+1} - 1) , 2^2(2^{n+1} - 1), ... ,2^n(2^{n+1} - 1)\}$

c) En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2, on a :

$$S = \sum_{i=0}^{n} 2^i + (2^{n+1} - 1)\sum_{i=0}^{n-1} 2^n$$
$$= 2^{n+1} - 1 + (2^{n+1} - 1)(2^n - 1) = 2^n(2^{n+1} - 1) = a$$

Travailler modulo *p*, *p* premier

80. 1. : $\begin{cases} 3x + 4y \equiv 5\ (13)\ E_1 \\ 2x + 5y \equiv 7\ (13)\ E_2 \end{cases}$

$-2E_1 + 3E_2$ donne $7y \equiv 11\ (13)\ E_3$

2. $k_1 = 2$ et $k_2 = 9$.

3. $2E_3$ donne $y \equiv 9\ (13)$.

On remplace dans E_1 : $3x \equiv 8\ (13)\ E_4$

$9E_4$ donne $x \equiv 7\ (13)$.

81. 1. a) $2^2M \equiv 0\ (2) \overset{+3}{\Rightarrow} N \equiv 3 \equiv 1\ (2)$

Donc *N* est impair.

b) $N \equiv 2^n\, M\ (3)$ or 2 et *M* sont premier avec 3 donc $N \not\equiv 0\ (3)$

2. a) 2 et 3 ne divise pas *N*.

Si $p \in \{5, 7, 11, ... , q\}$, *p* divise *M* donc $N \equiv 3\ (p)$.

p ne divise pas *N*. On en déduit alors que $p > q$.

b) *p* est impair donc $p \equiv 1\ (4)$ ou $p \equiv 3\ (4)$.

3. a) Supposons que pour tout $i \in [\![1 , r]\!]$, $p_i \equiv 1\ (4)$ alors $N \equiv p_1^{\alpha_1} \times ... \times p(\alpha_r) \equiv 1\ (4)$.

Or $N = 4M + 3 \equiv 3\ (4)$: contradiction.

Il existe donc $i \in [\![1 , r]\!]$,tel que $p_i \equiv 3\ (4)$.

b) Tout ceci est valable pour tout $q > 5$ premier. Comme il y a une infinité de nombres premiers, il existe une infinité de nombres premier de la forme $4n + 3$.

Nombres premiers et suites

82. 1. a) $(-1 , 1)$ est solution de (E).

b) $\begin{cases} x = -1 + 47k \\ y = 1 - 23k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

c) Si $k = 1$ on trouve $x = 46 \in A$ et $23x \equiv 1\ (47)$.

2. a) 47 est premier, d'après le théorème de Gauss, si 47 divise *ab*, il divise *a* ou *b*.

b) $a^2 \equiv 1\ (47) \Leftrightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0\ (47)$

D'après la question 2. a), on a $a \equiv \pm 1\ (47)$.

3. a) Si $p \in A$, alors p est premier avec 47 ; d'après le théorème de Bézout, il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tel que : $pq + 47r = 1 \Rightarrow pq \equiv 1\ (47)$.

b) Si $p = p^{-1}$ alors $p^2 \equiv 1\ (47)$ d'après la question **2. b)** $p \equiv \pm 1\ (47)$, d'où $p = 1$ ou $p = 46$.

c) Dans 46! il existe 46 facteurs. On enlève 1 et 46 qui sont leur propre inverse, à chaque facteurs, on lui associe son inverse modulo 47, on obtient alors 22 paires dont le produit est congru à 1 modulo 47. On a alors $46! \equiv 1\ (47)$.

83. 1. On trouve :

n	1	2	3	4	5	6
u_n	10	48	250	1 392	8 050	47 448

2. Avec les règles sur la parité, on montre que u_n est pair.

3. Avec les congruences : $n = 2k$

$u_{2k} = (2^2)^k + (3^2)^k + (2^2 3^2)^k - 1 \equiv 0\ (4)$.

4. On a vu que 2 divise tous les termes u_n, 3 divise u_4, 5 divise u_3 et 7 divise u_5 donc 2, 3, 5 et 7 appartiennent à E.

5. a) p est premier avec 2 et 3, d'après le théorème de Fermat : $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

$$6 \times 2^{p-2} \equiv 2^{p-1} \times 3 \equiv 1\ (p)$$

$$6 \times 3^{p-2} \equiv 3^{p-1} \times 2 \equiv 2\ (p)$$

b) p est premier avec p donc $6^{p-1} \equiv 1\ (p)$

$$6u_{p-2} \equiv \underbrace{6 \times 2^{p-2}}_{\equiv 3} + \underbrace{6 \times 3^{p-2}}_{\equiv 2} + \underbrace{6^{p-1}}_{\equiv 1} - 6 \equiv 0\ (6)$$

6. D'après la question 5., p divise $6u_{p-2}$; comme 6 est premier avec p, d'après le théorème de Gauss, p divise u_{p-2}.

Donc $p \in$ E.

84. 1. $u_1 = 31$, $u_2 = 331$, $u_3 = 3\,331$.

2. a) Initialisation : $n = 0$ $3u_0 = 3 = 10 - 7$.

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

$3u_{n+1} = 10(3u_n) + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{n+2} - 7$

La proposition est héréditaire.

b) $3u_n = \underbrace{99\ldots93}_{n} \Rightarrow u_n = \underbrace{33\ldots31}_{n}$

3. À l'aide du critère d'arrêt, on montre que 331 est premier.

4. D'après l'écriture décimale de u_n, 2, 3 et 5 ne divisent pas u_n.

5. a) De $10 \equiv -1\ (11)$ et $-7 \equiv 4\ (11)$ on en déduit que : $3u_n = 4 - (-1)^n\ (11)$.

b) $3u_n \equiv 3\ (11) \Rightarrow 3(u_n - 1) \equiv 0\ (11)$ ou

$3u_n \equiv 2 \equiv -9 \Rightarrow 3(u_n + 3) \equiv 0\ (11)$

11 divise $3(u_n - 1)$ ou $3(u_n - 3)$ comme 11 est premier avec 3, 11 divise $(u_n - 1)$ ou $(u_n + 3)$.

Donc $u_n \equiv 1\ (11)$ ou $u_n \equiv -3\ (11)$. 11 ne divise pas u_n.

6. a) 17 est premier avec 10, d'après le théorème de Fermat $10^{16} \equiv 1\ (17)$.

b) $10^3 \equiv -3\ (17)$ donc $10^9 \equiv (-3)^3 \equiv -27 \equiv -10\ (17)$

$3u_{16k+8} = (10^{16})^k \times 10^9 - 7 \equiv -17 \equiv 0\ (17)$

85. 1. a) $(1+\sqrt{6})^2 = 7 + 2\sqrt{6}$

b) $(1+\sqrt{6})^4 = 73 + 28\sqrt{6}$

c) $(1+\sqrt{6})^6 = 847 + 342\sqrt{6}$

d) $847 = 7 \times 11^2$ et $342 = 2 \times 3^2 \times 19$

On peut déduire que 847 et 342 sont premiers entre eux.

2. a)

n	1	2	4	6
a_n	1	7	73	847
b_n	1	2	28	342

b) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$

c) $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n = 2(a_n + b_n) + 5b_n$

donc $a_{n+1} + b_{n+1} \equiv 2(a_n + b_n)\ (5)$

Si 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$, 5 divise $2(a_n + b_n)$ comme 5 est premier avec 2, 5 divise $(a_n + b_n)$.

Par la contraposée : si 5 ne divise pas $(a_n + b_n)$ alors 5 ne divise pas $(a_{n+1} + b_{n+1})$.

Or $a_1 + b_1 = 2$ non divisible par 5, donc de proche ne proche non divisible par 5.

d) Du système, on obtient :

$$\begin{cases} 5a_n = a_{n+1} - b_{n+1} \\ 5b_n = -a_{n+1} + 6b_{n+1} \end{cases}$$

Si a_n et b_n sont premiers entre, d'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}$:

$a_n u + b_n v = 1 \xRightarrow{\times 5} 5a_n u + 5b_n v = 5 \Rightarrow u(a_{n+1} - b_{n+1}) + v(-a_{n+1} + 6b_{n+1})$

$a_{n+1}(-u + v) + b_{n+1}(6u + v) = 5$

Donc $d = PGCD(a_{n+1}, b_{n+1}) \in \{1 ; 5\}$

Si $d = 5$, alors 5 divise a_{n+1} et b_{n+1} donc 5 divise leur somme ce qui est impossible d'après 2. c).

Conclusion : $d = 1$.

Comme a_1 et b_1 sont premiers entre eux, de proche en proche, a_n et b_n sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Divisibilité et nombres premiers

86. 1. Si $p \geqslant 7$, p n'est pas divisible par 3, donc $p \equiv \pm 1\ (3) \Rightarrow p^4 \equiv 1\ (3) \Rightarrow n \equiv 0\ (3)$.

2. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$

Comme p impair alors $(p - 1)$ et $(p + 1)$ sont deux entiers pairs consécutifs donc l'un d'eux est multiple de 4, donc $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$ qui est donc multiple de 8.

$$n = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 4k(k + 1)(p^2 + 1)$$

p impair donc p^2 impair et donc $p^2 + 1$ pair.

Conclusion : n est multiple de 16.

3. Comme $p \geqslant 7$, non divisible par 5 :

$p \equiv ...(5)$	1	2	3	4
$p^4 \equiv ...(5)$	1	$8 \equiv 1$	$81 \equiv 1$	$256 \equiv 1$
$n \equiv ...(5)$	0	0	0	0

Conclusion : 5 divise n.

4. a) Corrolaire du théorème de Gauss, cf cours.

b) 3, 16 et 5 sont deux à deux premiers entre eux d'après 4.a), $3 \times 16 \times 5 = 240$ divise n.

87. 1. a) n et n^4 ont même parité, donc n et $A(n)$ ont des parités contraires.

b) Avec un tableau de congruence :

$n \equiv ...(3)$	0	1	2
$n^4 \equiv ...(3)$	0	1	1
$A(n) \equiv ...(3)$	1	2	2

Donc $A(n)$ n'est pas multiple de 3.

c) Si d divise $A(n)$ alors $n^4 + 1 = kd \Leftrightarrow n^3\ (n) - k(d) = 1$ d'après le théorème de Bézout d et sont premier entre eux.

d) $A(n) \equiv 0\ (d) \Rightarrow n^4 \equiv -1\ (d) \overset{\uparrow 2}{\Rightarrow} n^8 \equiv 1\ (d)$

2. a) L'existence de l'entier s est assuré par 1. d)

$k = sq + r$ avec $r < s$

$n^k \equiv 1\ (d) \Rightarrow (n^s)^q \times n^r \equiv 1\ (d) \Rightarrow n^r \equiv 1\ (d)$

Comme s est le petit entier non nul vérifiant cette propriété alors $r = 0$.

b) D'après la question 1. d), $n^8 \equiv 1\ (d)$ donc d'après 2. a), s divise 8.

c) d est premier et d'après 1. c), n est premier avec d ; d'après le théorème de Fermat : $n^{d-1} \equiv 1\ (d)$ comme $d \geqslant 2$, $d - 1 > 0$ et donc d'après **2. a)**, s divise $d - 1$.

3. D'après 2. b) $s \in [1 ; 2 ; 4 ; 8\}$

Si $s \in \{1 ; 2 ; 4\}$, alors $n^s \equiv 1\ (p) \Rightarrow n^4 \equiv 1\ (p)$

$\Rightarrow A(n) \equiv 2\ (p)$.

D'après 1. a) si n est pair alors $A(n)$ est impair et donc $p > 2$; on en déduit que p ne divise par $A(n)$: contradiction.

Conclusion : $s = 8$ et d'après 2. c) 8 est un diviseur de $(p - 1)$ d'où $p \equiv 1\ (8)$.

4. $A(12) = 20\,737$. En effectuant les divisions successives de 20 737 par les nombres de la liste donnée, on constate que : $20\,737 = 89 \times 233$.

Or $\sqrt{233} < 17$. Comme, dans la liste, il n'y a pas d'autres nombres avant 17, cela signifie que 233 fait partie de la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8. Donc les diviseurs premiers de $A(12)$ sont 89 et 233.

88. 1. $A = n^4 - 8n^2 + 16 - 4n^2$

$$= (n^2 - 4)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n - 4)(n^2 + 2n - 4)$$

2. Si n est pair alors les facteurs $n^2 \pm 2n - 4$ sont pair est donc A est divisible par 4 donc non premier.

3. a) $A = [(2k + 1)^2 - 2(2k + 1) - 4][(2k + 1)^2 + 2(2k+1) - 4]$

$= (4k^2 - 5)(4k^2 + 8k - 1)$

b) Si A est premier, l'un des facteurs doit être égal à ± 1,

$4k^2 - 5 = 1 \Leftrightarrow 4k^2 = 6$ impossible.

$4k^2 - 5 = -1 \Leftrightarrow 4k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 1$ ou

$4k^2 + 8k + 1 = 1 \Leftrightarrow k(k + 2) = 0 \Leftrightarrow k \in \{0 ; -2\}$

$4k^2 + 8k + 1 = -1 \Leftrightarrow 2\,k(k + 2) = -1$ impossible

Les valeurs de n possibles sont : $-3 ; -1 ; 1 ; 3$.

89. On trouve la grille :

	a	b	c	d	e
A	9	2	4	1	6
B	1		9	7	1
C	1	1		3	
D	2	3	4	5	6
E	5	5		1	0

Produit de nombres premiers

90. 1. a) On a le tableau suivant :

$n \equiv \ldots$ (9)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2 \equiv \ldots$ (9)	0	1	4	0	7	7	0	4	1

b) Les restes possibles sont donc 0, 1, 4, 7

c) $250\,507 \equiv 2 + 5 + 5 + 7 \equiv 19 \equiv 1$ (9)

(E) modulo 9 devient : $a^2 - 1 \equiv b^2$ (9)

$b^2 \equiv 0$ (9) $\Rightarrow a^2 \equiv 1$ (9).

$b^2 \equiv 1$ (9) $\Rightarrow a^2 \equiv 2$ (9) impossible.

$b^2 \equiv 4$ (9) $\Rightarrow a^2 \equiv 5$ (9) impossible.

$b^2 \equiv 7$ (9) $\Rightarrow a^2 \equiv 8$ (9) impossible.

La seule solution est modulo 9 :

$a^2 \equiv 1 \Rightarrow a \equiv 1$ ou $a \equiv 8$:

2. $a^2 \geqslant 250\,507 \Rightarrow a \geqslant \sqrt{250\,507} \geqslant 501$

Comme $501^2 - 250\,507 = 494$ non carré alors $a > 501$.

3. a) $503 \equiv 8$ (9) et $505 \equiv 1$ (9) comme a est congru à 1 ou 8 modulo 9 alors a est congru à 503 ou 505 modulo 9.

b) Pour $k = 0$, $a = 505$ donc $a^2 - 250\,507 = 4\,518$ non carré.

Pour $k = 1$, $a = 514$ donc $a^2 - 250\,507 = 117^2$ donc (514 ; 117) est solution.

4. a) D'après la question 3. :

$$\begin{aligned}250\,507 &= 514^2 - 117^2\\ &= (514 - 117)(514 + 117)\\ &= 397 \times 631\end{aligned}$$

b) À l'aide du critère d'arrêt, on montre que 397 et 631 sont premiers. Cette écriture est donc unique.

91. 1. Si $p_1 < p_2 < p_3$ alors p_2 et p_3 sont impairs et donc $p_1 = p_3 - p_2$ est pair donc $p_1 = 2$.

2. $p_1 = 2$ et $p_3 = p_2 + 2$

$680 < N < 1920 \Rightarrow 340 < p_2\,(p_2 + 2) < 960$

$p_2{}^2 < p_2(p_2 + 2) < 960 \Rightarrow p_2 \leqslant 30$

$(p_2 + 2)^2 > p_2(p_2 + 2) > 360 \Rightarrow p_2 + 2 \geqslant 19$

On cherche donc deux nombres premiers impairs consécutifs compris entre 17 et 30. Une seule solution 17 et 19.

On a alors : $N = 2 \times 17 \times 19 = 646$.

3. On a : $3 \times 10^4 < p_2\,(p_2 + 2) < 4 \times 10^4$

$p_2{}^2 < p_2\,(p_2 + 2) < 4 \times 10^4 \Rightarrow p_2 < 200$

$(p_2 + 2)^2 > p_2\,(p_2 + 2) > 3 \times 10^4 \Rightarrow p_2 + 2 \geqslant 173$

On cherche donc deux nombres premiers impairs consécutifs compris entre 171 et 200.

Deux choix possibles : (179 ; 181) et (191 ; 193) qui donnent : $N = 64\,798$ et $N = 73\,726$.

Équations et nombres premiers

92. 1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ premier donc $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1$.

b est a sont deux entiers consécutifs.

2. D'après le critère d'arrêt 401 est premier.

On a $x + y = 401 \Leftrightarrow 2y + 1 = 401 \Leftrightarrow y = 200$

La seule solution est (201 ; 200).

93. 1. $\alpha = 1$ est solution de (E).

2. $X = x - 1 \Leftrightarrow x = X + 1$

On remplace dans l'équation :

$$(X + 1)^2 + X + 1 - 2 \equiv 0\ (13) \Leftrightarrow X(X + 3) \equiv 0\ (13)$$

13 premier divise $X(X + 3)$; d'après le théorème de Gauss, 13 divise X ou $X + 3$.

$X \equiv 0$ (13) $\Leftrightarrow x \equiv 1$ (13)

$X + 3 \equiv 0$ (13) $\Leftrightarrow x \equiv -2 \equiv 11$ (13)

Les solutions de (E) sont $x \equiv 1$ (13) et $x \equiv 11$ (13).

94. 1. $5^2 - 10 + 2 \equiv 17 \equiv 0$ (17) donc $\alpha = 5$ est solution de (E).

2. $X = x - 5 \Leftrightarrow x = X + 5$

On remplace dans l'équation :

$$(X + 5)^2 - 2X - 10 + 2 \equiv 0\ (17) \Leftrightarrow X(X + 8) \equiv 0\ (17)$$

17 premier divise $X(X + 8)$; d'après le théorème de Gauss, 13 divise X ou $X + 8$.

$X \equiv 0$ (17) $\Leftrightarrow x \equiv 5$ (17)

$X + 8 \equiv 0$ (13) $\Leftrightarrow x \equiv -3 \equiv 14$ (17)

Les solutions de (E) sont $x \equiv 5$ (17) et $x \equiv 14$ (17).

95. 1. On montre l'égalité en développant le terme de droite.

2. L'équation revient à résoudre :

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 127$$

127 est premier donc on a :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 127 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3y(y + 1) = 126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y(y + 1) = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}$$

96. 1. $8\,633 = 89 \times 97$

2. $x^2 - 4y^2 = 8\,633 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 2y) = 8\,633$

Comme $x - 2y < x + 2y$, on a deux solutions :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 8\,633 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\,317 \\ y = 2\,158 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 89 \\ x + 2y = 97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 93 \\ y = 2 \end{cases}$$

Travailler l'oral

97. Soit un cube de base carrée, de côté a et de hauteur $b \approx a$.

On a : $a^3 \approx 1\,450 \Rightarrow a \approx 11{,}33$.

Deux choix se présentent : $a = 11$ ou $a = 12$.

• $a = 11$, on a alors :

$1\,448 \leqslant 11^2 b \leqslant 1\,452 \Rightarrow 1{,}97 \leqslant b \leqslant 12$

On a alors $b = 12$.

• $a = 12$, on a alors :

$1\,448 \leqslant 12^2 b \leqslant 1\,452 \Rightarrow 10{,}06 \leqslant b \leqslant 10{,}08$

Il n'y a pas de solution.

La cuve a pour dimensions : $11 \times 11 \times 12$.

Exercices bilan p. 151-152

98. Nombres de Mersenne

1. a) 3 et 4 divise $2^{23} - 1$ comme 4 est premier avec 3, d'après le corollaire du Théorème de Gauss, $3 \times 4 = 12$ devrait diviser $2^{23} - 1$.

b) $2^{23} - 1$ est impair donc non divisible par 4.

c) $2 \equiv -1\ (3) \xRightarrow{\uparrow 23} 2^{23} \equiv -1\ (3) \xRightarrow{-1} 2^{23} - 1 \equiv -2\ (3)$

donc 3 ne divise pas $2^{23} - 1$.

2. a) $S = (2^3)^{11} - 1 = 2^{23} - 1$

b) $2^3 \equiv 1\ (7)$ par somme $S \equiv 1 \times 11 \equiv 4\ (7)$ donc 7 ne divise par $2^{23} - 1$.

99. Nombres de Poulet

1. Si n est premier impair, donc premier avec 2, d'après le théorème de Fermat : $2^{n-1} \equiv 1\ (n)$.

Donc n n'est pas premier.

2. $2^{10} = 1\,024 \equiv 1\ (341)$ donc $2^{340} = (2^{10})^{34} \equiv 1\ (341)$.

341 n'est pas premier car $341 = 11 \times 31$.

Cela signifie que la réciproque du théorème de Fermat est fausse, c'est-à-dire que $a^{n-1} \equiv 1\ (n)$ n'implique pas n premier.

3. a) Le seul résultat faux énoncé ne peut se faire qu'avec un nombre de Poulet :

$$p(F) = \frac{21853}{25 \times 10^9} \approx 8{,}74 \times 10^{-7}.$$

b) Si on a annoncé n premier cela donne :

$1\,091\,987\,405 + 21\,853 = 1\,092\,009\,258$

$$p = \frac{1\,091\,987\,405}{1\,092\,009\,258} \approx 0{,}999\,980$$

Soit une quasi-certitude.

100. Triplets pythagoriciens

A. Généralité

1. Immédiat, en mettant p^2 en facteur.

2. Soit x et y impairs, alors x^2 et y^2 sont impairs donc $x^2 + y^2$ est pair en conséquence z^2 est pair donc z pair.

3. a) $192 = 2^6 \times 3$

b) $2x^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$ et $z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$

c) Comme la décomposition en puissances de 2 est unique, l'égalité $2x^2 = z^2$ implique $2\alpha + 1 = 2\beta$. Or $(2\alpha + 1)$ est impair et 2β pair. L'égalité est impossible.

B. Recherche d'un TP contenant 2 015

1. $2\,015 = 5 \times 13 \times 31$

2. On sait que $(3 ; 4 ; 5)$ est un TP, donc d'après **A. 1**. $(px ; py ; pz)$ est un TP.

On prend alors $p = 13 \times 31 = 403$ et donc

$(1\,209 ; 1\,612 ; 2\,015)$ est un TP.

2) On prend $2n + 1 = 2\,015$ d'où $n = 1\,007$.

On déduit alors :

$2n^2 + 2n = 2\,030\,112$ et $2n^2 + 2n + 1 = 2\,050\,113$.

D'après la relation donnée,

$(2015 ; 2\,030\,112 ; 2\,030\,113)$ est un TP.

3) a) $z^2 - x^2 = 4\,032 \Leftrightarrow (z - x)(z + x) = 169 \times 961$

On peut prendre alors :

$$\begin{cases} z - x = 169 \\ z + x = 961 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 565 \\ z = 396 \end{cases}$$

$(396 ; 403 ; 565)$ est alors un TP.

b) $2\,015 = 403 \times 5$, en multipliant $(396 ; 403 ; 565)$ par 5, on obtient : $(1980 ; 2015 ; 2825)$ qui est un TP.

101. Écriture décimale

1. a) $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$

b) $\overline{abba} = 1\,001a + 110b = 11(91a + 10b)$

Tout élément de E est divisible par 11.

2. a) 8 choix pour a et 10 pour b, il y a donc 80 éléments dans E.

b) 3 choix pour a : 3, 7, 9 et 10 choix pour b donc il y a 30 éléments de E non divisibles par 2 et par 5.

3. a) $n \equiv 0\ (3) \Leftrightarrow 2(a+b) \equiv 0\ (3)$

3 divise $2(a+b)$, comme 3 est premier avec 2, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $a+b$.

Réciproquement si 3 divise $a+b$, alors 3 divise $2(a+b)$ donc n.

b) $n \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow 1\,001a + 110b \equiv 0\ (7)$

or $1\,001 \equiv 0\ (7)$ et $110 \equiv 5\ (7)$ donc $n \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow 5b \equiv 0\ (7)$.

7 divise $5b$, comme 7 est premier avec 5, d'après le théorème de Gauss, 7 divise b.

Réciproquement, si 7 divise b, alors 7 divise $5b$ donc n.

4. n ne doit pas être divisible par 2, 3, 5 et 7.

$a \in \{3 ; 7; 9\}$ et $b \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9\}$

Avec la somme $a+b$ non divisible par 3.

Avec $a = 3$, $a = 7$ ou $a = 9$: 5 choix

Il y a 15 éléments de E dont 11 est le plus petit facteur premier.

102. Fonctions modulo 227

1. a) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, on montre que PGCD(109 , 226) = 1.

Comme 109 et 226 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $109u - 226v = 1$.

b) Vérifions que (141 , 68) est une solution de (E) :

$$109 \times 141 - 226 \times 68 = 15\,369 - 15\,368 = 1$$

Les solutions de (E) sont de la forme :

$(141 + 226k\ ,\ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

c) Pour $k = 0$, on obtient ainsi $d = 141$ et $e = 68$

2) On montre par le critère d'arrêt que 227 est premier.

3) a) Immédiat.

b) 227 est premier et comme $a \leqslant 226$, a est premier avec 227, d'après le théorème de Fermat $a^{226} \equiv 1\ (227)$.

c) Pour déterminer $g[f(a)]$, il faut déterminer le reste de division de $(a^{109})^{141} = a^{119\times141}$ par 227.

D'après **1. b)** $109 \times 141 = 226 \times 68 + 1$ on a $a^{109\times141} \equiv a^{226\times68+1} \equiv (a^{226})^{68} \times a \equiv a\ (227)$

On a donc $g[\,f(a)] = a$.

d) Comme $(a^{109})^{141} = (a^{141})^{109}$ alors $f\,[g(a)] = g[f(a)] = a$.

g est donc la fonction réciproque de la fonction f.

103. Conjecture de Goldbach

1. $F(6) = F(2 \times 3) = F(2) \times F(3)$

$F(6) = F(3 + 3) = F(3) + F(3) = 2F(3)$

On en déduit que $F(2) = 2$.

2. a) $F(4) = F(2 + 2) = F(2) + F(2) = 4$

b) $F(5) = F(2 + 3) = F(2) + F(3)=2+F(3)$

$F(12) = F(5 + 7) = F(5) + F(5 + 2)$

$\quad = F(5) + F(5) + F(2) = 2F(3)+6$

c) $F(6) = F(3 \times 4) = F(3) \times F(4) = 4F(3)$

d) Des trois questions précédentes, on déduit que $F(3) = 3$.

3. $F(1) = F(1 \times 1) = F(1)^2 \overset{F(1)\neq 0}{\Rightarrow} F(1) = 1$

$F(5) = F(3) + 2 = 5$

$F(6) = 2F(3) = 6$

$F(7) = F(2 + 5) = F(2) + F(5) = 7$

$F(8) = F(3 + 5) = F(3) + F(5) = 8$

$F(9) = F(2 + 7) = F(2) + F(7) = 9$

$F(10) = F(5 + 5) = F(5) + F(5) = 10$

$F(14) = F(7 + 7) = 2F(7) = 14$

$F(14) = F(11 + 3) = F(11) + 3$

$\Rightarrow F(11) = F(14) - 3 = 11$

$F(12) = 2F(3) + 6 = 12$

$F(13) = F(2 + 11) = F(2) + F(11) = 13$

$F(15) = F(3 \times 5) = F(3) \times F(5) = 15$

$F(16) = F(5 + 11) = F(5) + F(11) = 16$

$F(20) = F(4 \times 5) = F(4) \times F(5) = 20$

$F(20) = F(17 + 3) = F(17) + 3$

$\Rightarrow F(17) = F(20) - 3 = 17$

4. a) $2006 = 2 \times 17 \times 59$

b) $F(66) = F(7 + 59) = F(7) + F(59)$

donc $F(59) = F(66) - F(7) = F(66) - 7$.

Or $F(66) = F(6 \times 11) = F(6) \times F(11) = 66$

Donc $F(59) = 66 - 7 = 59$.

c) $F(2006) = F(2\times17 \times 59)$

$F(2006) = F(2) \times F(17) \times F(59) = 2006$

104. Décomposition de 40

A. 1. $40 = 3 + 37$

2. Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} x = 2 + 19k \\ y = -20k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3. a) $40 = 2^3 \times 5$

b) Règles sur la parité.

c) $(x - y)(x + y) = 40$

$(x - y)$ et $(x + y)$ doivent être pairs.

Seules deux décompositions conviennent, en remarquant que dans $\mathbb{N}$, $x - y \leqslant x + y$

$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$

B. 1. a) $40 = 13 + 3^3 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$

b) $48 = 6 \times 8$ d'après la relation donnée :

$48 = (8 + 1)^3 + (8 - 1)^3 - 8^3 - 8^3$

$48 = 7^3 - 8^3 - 8^3 + 9^3$

$40 = 48 - 2^3 = -2^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 + 9^3$

2. a) On a le tableau suivant :

$n \equiv (9)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 \equiv (9)$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

b) On a : $8 \equiv -1$ (9) donc n^3 est conru modulo 9 à : 0, 1 ou -1.

$40 \equiv 4 \equiv -5$ (9)

Soit S l'ensemble des sommes modulo 9 de trois cubes a^3, b^3 et c^3 que l'on peut obtenir :

$S = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

40 ne peut donc se décomposer en somme de trois cubes.

Préparer le BAC Je me teste

p. 154

105. C. **106.** A. **107.** C.

108. C. **109.** B **110.** A.

111. B. **112.** A

Préparer le BAC Je révise

p. 155

113. Critère d'arrêt

a) 157 est premier.

b) 243 est divisible par 3.

c) 427 est divisible par 7.

d) 509 est premier.

e) 671 est divisible par 11.

114. Décomposition

$5\,940 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$

5 940 a 48 diviseurs.

$27\,720 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$

27 720 a 96 diviseurs.

115. Trouver un entier

1. $2\,016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

2. k^6 contient nécessairement les facteurs de 2 016 et les puissances de ses facteurs sont des multiplies de 6 d'où $k^6 = 2^6 \times 3^6 \times 7^6$.

Donc $k = 2 \times 3 \times 7 = 42$.

116. PGCD

Soit $a \in [\![2 , p - 1]\!]$ et $d = \text{PGCD}(a , p)$. d divise p donc $d = 1$ ou $d = p$.

Si $d = p$ alors p divise a or $2 \leqslant a \leqslant p - 1$. Contradiction. Donc $d = 1$.

117. Nombre de diviseurs (1)

$(\alpha + 3)(\beta + 3) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1) \Leftrightarrow \alpha\beta = 3$ donc $n = 24$ ou $n = 54$.

118. Nombre de diviseurs (2)

1. $2\,268 = 2^2 \times 3^4 \times 7$. 2 268 possède 30 diviseurs.

2. $a = 2 \times 3^2 \times 7 = 126$ et $b = 2 \times 3^2 = 18$ ou le couple symétrique.

119. Logique

1 : Fausse. 4 divise 6^2 mais 4 ne divise par 6. La réciproque est vraie : si n divise a alors n divise a^2.

2 : Fausse. 2 est premier et pair. La réciproque est fausse : si n est impair alors n est premier. (9 n'est pas premier)

3 : Vraie. Comme p et q sont premiers distincts, leur seul diviseur commun est 1. La réciproque est fausse : si p et q premiers entre eux alors p et q sont premiers distincts (15 et 8 premiers entre eux et non premiers).

4 : Vraie. C'est le théorème de Gauss avec les nombres premiers. La réciproque est vraie : si p divise a ou b alors p divise ab (immédiat).

5 : Fausse. a est un multiple de p mais pas nécessairement égal à p. La réciproque est fausse : si a est premier alors $a \equiv p$ (p). Si a est premier et si $a \neq p$ alors $a \not\equiv p$ (p).

120. Autour de Fermat

1. a) p est premier et ne divise pas 2 donc : $2^{p-1} \equiv 1$ (p).

b) $2^n \equiv 2^k d \equiv (2^k)^d \equiv 1^d \equiv 1\ (p)$

c) $n = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$

$2^n \equiv 2^{bq+r} \equiv (2^b)^q \times 2^r \equiv 1^q \times 2^r \equiv 2^r \equiv 1\ (p)$. $r = 0$ car sinon b ne serait pas le plus petit entier vérifiant la propriété. b divise n.

2. a) A multiple de p : $2^q - 1 \equiv 0\ (p) \Leftrightarrow 2^q \equiv 1\ (p)$.

b) Si $p = 2$ alors $2^q \equiv 0\ (p)$ donc p est impair.

c) D'après 1. c) b divise q comme q est premier $b = q$.

d) D'après 1. a) $2^{p-1} \equiv 1\ (p)$ donc $q = b$ divise $(p - 1)$.

Comme p impair, $p - 1$ est pair. 2 et q divise $(p - 1)$, PGCD $(2\ ,\ q) = 1$, d'après le corollaire de Gauss $2q$ divise $(p - 1)$ donc $p \equiv 1\ (2q)$.

3. Soit p un facteur premier de A_1. D'après la question 2. d) p est de la forme $34m + 1$.

$A_1 = 131\ 071$ et $\sqrt{A_1} \approx 362$

131, 137, 239 et 307 ne divise pas A_1, d'après le critère d'arrêt et 2. d) A_1 est premier.

121. Résolution d'équations

1. $(x\ ;\ y) = (\ 6\ ;\ 5)$

2. $(x\ ;\ y) = \left(\dfrac{p+1}{2}\ ;\ \dfrac{p-1}{2}\right)$

122. Coordonnées entières des points d'un plan de l'espace

1. a) $p + 10 \equiv p + 1\ (3)$ et $p + 20 \equiv p + 2\ (3)$. Donc seulement 1 parmi p, $p + 10$, $p + 20$ est divisible par 3.

b) Comme l'un des trois termes est multiple de 3 et qu'ils sont premiers alors $a = 3$, $b = 13$, $c = 23$.

2. a) $13 \equiv 1\ (3)$ et $23 \equiv 2 \equiv -1\ (3)$. L'égalité modulo 3 donne $v - w \equiv 0\ (3) \Leftrightarrow v \equiv w\ (3)$.

b) En remplaçant v et w dans l'égalité :
$3u = -3(13k) - 3(23k') - 3(12r) \Leftrightarrow u = -13k - 23k' - 12r$

Exercices vers le supérieur p. 156-157

123. Nombres premiers

On démontrer par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de nombre premier compris entre p_n et $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$,

Posons : $N = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n - 1$; d'après notre hypothèse, N n'est pas premier et il admet un facteur premier $p_i \in \{p_1\ ,\ p_2,\ ...\ ,\ p_n\}$.

p_i divise $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$ et N, p_i divise donc sa différence 1 donc $p_i = 1$: contradiction.

124. PGCD

$1\ 221 = 3 \times 11 \times 37$

De façon immédiat 3 divise $3^{37} - 3$.

37 est premier donc, d'après le théorème de Fermat :

$$3^{37} \equiv 3\ (37) \Leftrightarrow 3^{37} - 3 \equiv 0\ (37)$$

37 divise donc $3^{37} - 3$.

Montrons que 11 ne divise par $3^{37} - 3$.

On détermine les restes des puissances successives de 3 par 11 :

$3^0 \equiv 1\ (11)$; $3^1 \equiv 3\ (11)$; $3^2 \equiv 9\ (11)$;

$3^3 \equiv 5\ (11)$; $3^4 \equiv 4$; $3^5 \equiv 1\ (11)$

$3^{37} - 3 \equiv (3^5)^7 \times 3^2 - 3 \equiv 9 - 3 \equiv 6\ (11)$

Donc 11 ne divise pas $3^{37} - 3$.

Conclusion PGCD$(3^{37} - 3\ ;\ 1\ 221) = 3 \times 37 = 111$

125. Autre démonstration du petit théorème de Fermat

1. Manipulation de factorielles

$$k \times \binom{p}{k} = \frac{k \times p!}{(k! \times (p-k)!)} = \frac{p!}{(k-1)!\,(n-p)!}$$

$$p\binom{p-1}{k-1} = \frac{p \times (p-1)!}{(k-1)! \times (p-k)!} = \frac{p!}{(k-1)!\,(n-p)!}$$

2. p est premier d'après la relation du 1., p divise $k \times \binom{p}{k}$ et comme $1 \leqslant k \leqslant p - 1$, p est premier avec k ; d'après le théorème de Gauss, p divise $\binom{p}{k}$.

3. D'après 2. et en scindant la formule du binôme :

$$(a+b)^p = a^p + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k b^{p-k}}_{\equiv 0\,(p)} + b^p$$

$(a + b)^p \equiv a^p + b^p\ (p)$

4. Initialisation : $n = 1$, on a : $1^p \equiv 1\ (p)$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n^p \equiv (p)$

D'après 3.

$$(n+1)^p \equiv \underbrace{n^p}_{\text{HR}} + 1^p \equiv n + 1\,(p)$$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^p \equiv n\ (p)$

126. Nombres premiers de Sophie Germain

1. a) Les nombres premiers de Sophie Germain inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89.

b) On montre par le critère d'arrêt que 239 et $2 \times 239 + 1 = 479$ sont des nombres premiers.

Donc 239 est un nombre de Sophie Germain.

On montre par le critère d'arrêt que 227 et $\frac{227-1}{2} = 113$ sont des nombres premiers.

Donc 227 est un nombre premier sûr.

c) En considérant que les deux facteurs sont de la forme $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, avec

$a = n^2 + 2m^2$ et $b = 2mn$.

$$\begin{aligned}&(n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)\\ &= (n^2 + 2m^2)^2 - 4n^2m^2\\ &= n^4 + 4n^2m^2 + 4m^4 - 4n^2m^2 = n^4 + 4m^4\end{aligned}$$

b) Pour $n^4 + 4$, on prend dans la formule précédente $m = 1$, on obtient alors :

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

$n^4 + 4$ est premier si le plus petit facteur est égal à 1. On a alors :

$$\begin{aligned}n^2 - 2n + 2 = 1 &\Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow (n - 1)^2 = 0\end{aligned}$$

Donc $n^4 + 4$ est premier si $n = 1$.

Donc pour $n > 1$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

d) $4^{545} + 545^4 = 545^4 + 4 \times 4^{544} = 545^4 + 4(4^{136})^4$

On prend alors $m = 4^{136}$ dans la formule du 2.a)

$$\begin{aligned}545^4 + 4(4^{136})^4 &= [545^2 + 2 \times (4^{136})^2 + 2 \times 545 \times 4^{136}]\\ &\times [545^2 + 2 \times (4^{136})^2 - 2 \times 545 \times 4^{136}]\\ &= [545^2 + 2^{273}(4^{136} + 545)][545^2 + 2^{273}(4^{136} - 545)]\end{aligned}$$

Les deux facteurs sont manifestement supérieurs à 1. On a alors $4^{545} + 545^4$ non premier.

3. $$\begin{aligned}n^4 + n^2 + 1 &= (n^2 + 1)^2 - 2n^2 + n^2\\ &= (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n).\end{aligned}$$

Analyse : pour que $(n^4 + n^2 + 1)$ soit premier, il est nécessaire que le plus petit facteur soit égal à 1. On doit avoir :

$n^2 + 1 - n = 1 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow n = 0$ ou $n = 1$

Synthèse : pour $n = 0$, on trouve 1 non premier et pour $n = 1$, on trouve 3 premier.

$n^4 + n^2 + 1$ premier si, et seulement si, $n = 1$.

127. Déterminer un nombre

Les configurations pour avoir 9 diviseurs pour n, avec q et r premiers sont :

$$n = q^8 \text{ ou } n = q^2 \times r^2 = (qr)^2$$

1) $n = q^8$. On doit avoir :

$q^8 = 39p - 1 \Leftrightarrow q^8 - 1 = 39p$

$\Leftrightarrow (q - 1)(q + 1)(q^2 + 1)(q^4 + 1) = 3 \times 13 \times p$

Ceci n'est possible que pour $q - 1 = 1 \Leftrightarrow q = 2$

On a alors : $1 \times 3 \times 5 \times 17 \neq 3 \times 13 \times p$.

Pas de solution.

2) $n = (qr)^2$. On doit avoir :

$(qr)^2 = 39p + 1 \Leftrightarrow (qr)^2 - 1 = 39p \Leftrightarrow (qr - 1)(qr + 1) = 3 \times 13 \times p$

q et r étant premiers distincts alors $qr \geqslant 2 \times 3 = 6$

Les couples de diviseurs supérieurs ou égaux à 5 de $3 \times 13 \times p$ sont : $(13\ ,\ 3p)$ et $(39\ ,\ p)$

• $\begin{cases} qr - 1 = 13 \\ qr + 1 = 3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qr = 14 \\ p = 5 \end{cases}$

$qr = 14 = 2 \times 7 \Rightarrow q = 2$ et $r = 7$.

$n = 39 \times 5 + 1 = 196 = 2^2 \times 7^2$

• $\begin{cases} qr - 1 = 3p \\ qr + 1 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qr = 12 \\ p = \frac{11}{3} \end{cases}$

impossible.

• $\begin{cases} qr - 1 = 39 \\ qr + 1 = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qr = 40 \\ p = 41 \end{cases}$

$qr = 40 = 2^3 \times 5$ impossible

• $\begin{cases} qr - 1 = p \\ qr + 1 = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qr = 38 \\ p = 37 \end{cases}$

$qr = 38 = 2 \times 19 \Rightarrow q = 2$ et $r = 19$

$n = 39 \times 37 + 1 = 1\,444 = 2^2 \times 19^2$

Il y a donc deux solutions : 196 et 1 444.

128. Problème de lampes

Pour qu'une lampe soit allumée après ces 1 000 étapes, il faut qu'elle ait changé d'état un nombre impair de fois.

Les entiers qui ont un nombre impair de diviseurs sont les carrés parfaits.

$\sqrt{1000} \approx 31{,}3$ il y a 31 carrés parfaits inférieurs à 1 000.

Conclusion : il y a 31 lampes allumées après ces 1 000 étapes : les lampes : $1, 2^2, 3^2, \ldots, 31^2$.

129. L'âge du capitaine

1) L'âge de M. Dupont.

$2\,450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$.

Les diviseurs de 2 450 inférieurs à 100 sont :

D = {1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 25 ; 35 ; 49 ; 50 ; 70 ; 98}

Comme M. Dupont voyage avec ses deux filles, on peut sélectionner : 35 ; 49 ; 50 ; 70.

2) L'âge de ses deux filles.

Les âges raisonnables (ne sont ni des bébés, ni des majeures) sont : 5 ; 7 ; 10 ; 14.

La somme des 3 âges est paire donc il y a 1 ou 3 âges pairs. On teste ensuite si la somme est divisible par 4 :

a) Le père a 35 ans (pas jumelles car le 5 et le 7 sont déjà utilisés dans 35).

Deux choix possibles :

• 35 + 7 + 10 = 52 = 4 × 13 et

35 × 7 × 10 = 2 450

• 35 + 7 + 14 = 56 = 4 × 14 et

35 × 7 × 14 = 3 430 rejeté.

b) Le père a 49 ans (pas de jumelles, il faut avoir 2 nombres pairs pour les filles).

Deux choix possibles :

• 49 + 5 + 10 = 64 = 4 × 16 et

49 × 5 × 10 = 2 450

• 49 + 5 + 14 = 68 = 4 × 17 et

49 × 5 × 14 = 3 430 rejeté.

c) Le père a 50 ans (possibilité de jumelles de 7 ans).

1 choix possible :

50 + 7 + 7 = 64 = 4 × 16 et

50 × 7× 7 = 2 450

3) L'âge du capitaine.

Les âges possibles pour le fils du capitaine sont 13 ou 16. Si le fils (qui connaît son âge) a besoin d'une information complémentaire alors celui-ci a 16 ans (deux configurations).

Le fait que le capitaine (dont le fils connaît l'âge), plus vieux que M. Dupont, permet au fils de lever l'ambiguïté implique que le capitaine ait 50 ans.

Le capitaine a 50 ans, M. Dupont 49 ans et ses deux filles 5 et 10 ans.

130. Le théorème de Wilson

1. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Si p divise $x^2 - 1$, comme p est premier d'après le théorème de Gauss, p divise $(x - 1)$ ou $(x + 1)$. Or $x \in A$ donc $(x - 1)$ et $(x + 1)$ sont strictement inférieur à p donc non divisible par p. Conclusion p ne divise pas $x^2 - 1$.

2. a) Soit $x \in A$, donc premier avec p, d'après le théorème de Fermat :

$$x^{p-1} \equiv 1\ (p) \overset{p>3}{\Leftrightarrow} x \times x^{p-2} \equiv 1\ (p).$$

Soit r le reste de x^{p-2} dans la division par p, Pour $x \in A$, il existe donc r distinct de x d'après 1., tel que : $r \in A$ et $xr \equiv 1\ (p)$.

b) • Montrons que pour deux éléments distincts de A, x_1 et x_2 les nombres r_1 et r_2 obtenus sont distincts.

Par l'absurde : supposons $x_1 \neq x_2$ et $r_1 = r_2 = r$.

On a alors $x_1 r \equiv x_2 r\ (p) \Leftrightarrow r(x_1 - x_2) \equiv 0\ (p)$.

p divise $r(x_1 - x_2)$, or p ne divise pas $r \in A$, donc d'après le théorème de Gauss, p divise $(x_1 - x_2)$, or $x_1, x_2 \in A$ donc $-p < x_1 - x_2 < p$ donc $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ contradiction.

• L'ensemble A possède $p - 3$ éléments.

p est impair donc A possède un nombre pair d'éléments que l'on peut regrouper par couples $(x\ ;\ r)$ tels que $xr \equiv 1\ (p)$.

En faisant le produit des éléments de , on a :

$$2 \times 3 \times \ldots \times (p - 2) \equiv 1\ (p) \overset{\times(p-1)}{\Rightarrow} (p - 1)! \equiv p - 1 \equiv -1 (p)$$

3. Pour $p = 2$, on a $(2 - 1)! \equiv 1 \equiv -1\ (2)$.

Pour $p = 3$, on a $(3 - 1)! \equiv 2 \equiv -1\ (3)$.

Le résultat est donc vérifié pour $p = 2$ et $p = 3$.

4. $(p - 1)! \equiv -1\ (p)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$kp - (p - 1)! = 1$$

D'après le théorème de Bézout, p est premier avec 2, 3, ..., $p - 1$. L'entier p ne possède aucun diviseur autre que 1 inférieur à p donc p est premier.

5. De 2., 3. et 4. on en déduit l'équivalence du théorème de Wilson.

6. Il faut déterminer le reste de 12! par 13.

$$12! = 479\,001\,600 = 36\,846\,276 \times 13 + 12$$

Donc $12! \equiv 12 \equiv -1\ (13)$ donc d'après le théorème de Wilson 13 est premier.

Vu la complexité des calculs pour 13, ce théorème n'est pas judicieux comme test de primalité.

131. Ristournes

Appelons a, b et c les trois remises en pourcentage représentant trois entiers naturels.

Lorsqu'il est soumis à trois remises successives, le prix est, à chaque fois, multiplié par un facteur k.

Pour ces trois remises a, b, c, on a alors :

$$\left(\frac{100-a}{100}\right)\left(\frac{100-b}{100}\right)\left(\frac{100-c}{100}\right)\times 300 = 222{,}87$$

En multipliant cette équation par 10^4 et en divisant par 3, on obtient :

$$(100 - a)(100 - b)(100 - c) = 742\,900$$

Or $742\,900 = 2^2 \times 5^2 \times 17 \times 19 \times 23$

$(100 - a)$, $(100 - b)$ et $(100 - c)$ sont alors 3 diviseurs de 742 900 inférieurs à 100.

• On ne peut prendre comme diviseur deux des facteurs 17, 19, 23 car leur produit donne alors un nombre supérieur à 100. On répartit alors ces trois facteurs dans les trois diviseurs.

• Il reste ensuite à répartir les facteurs $2^2 \times 5^2$. On ne peut mettre le facteur 5 avec 23 car le produit serait supérieur à 100. On répartit alors les deux facteurs 5 avec 17 et 19 et l'on met le dernier facteur 2^2 avec 23.

On obtient la répartition suivante :

$$\begin{cases}100-a = 17\times 5 = 85\\ 100-b = 19\times 5 = 95\\ 100-c = 23\times 22 = 92\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 100-85 = 15\\ b = 100-95 = 5\\ c = 100-92 = 8\end{cases}$$

Les trois remises successives sont donc 15 %, 5 % et 8 %.

132. Tableau infini

1. Un nombre n de la ligne k et de la colonne $i \geqslant 1$, a pour expression :

$$n = k(k + 1) + (i - 1)(2k + 1).$$

On pose $N = i - 1$ donc $N \geqslant 0$, on a alors :

$$n = N(2k + 1) + k(k + 1).$$

2. Par double implication.

Si n est dans le tableau alors :

$$\begin{aligned}4n + 1 &= 4(2k + 1)N + 4k(k + 1) + 1\\ &= 4(2k + 1)N + 4k^2 + 4k + 1\\ &= 4(2k + 1)N + (2k + 1)^2\\ &= (2k + 1)(4N + 2k + 1)\end{aligned}$$

$4n + 1$ est alors le produit de deux nombres supérieurs ou égaux à 2 donc $4n + 1$ n'est pas premier.

Si $4n + 1$ n'est pas premier, alors $4n + 1 = pq$.

Avec p et q supérieurs ou égaux à 2.

$$4n + 1 \equiv 1\ (4) \Leftrightarrow pq \equiv 1\ (4)$$

On alors p et q impairs et

$$p \equiv 1\ (4) \Rightarrow q \equiv 1\ (4) \Rightarrow q - p \equiv 0\ (4)$$
$$p \equiv 3\ (4) \Rightarrow q \equiv 3\ (4) \Rightarrow q - p \equiv 0\ (4)$$

Donc q-p est un multiple de 4.

$$\begin{cases}2k + 1 = p\\ 4N + 2k + 1 = q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k = \dfrac{p-1}{2} \in \mathbb{N}\\ N = \dfrac{q-p}{4} \in \mathbb{N}\end{cases}$$

Donc n est dans le tableau.

133. Décomposition d'un nombre de 17 chiffres

1. $1\,001\,001 = 3 \times 333\,667$

2. a) $11^2 = 121$; $111^2 = 12\,321$

$1\,111^2 = 1234321$

b) Au vu des résultats, on peut conjecturer que :

$111\,111\,111^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321$

c) Le nombre est trop grand pour la calculatrice.

On décompose alors ce nombre :

$n^2 = (1\,111 \times 10^5 + 11\,111)^2$

$n^2 = 1\,234\,321 \times 10^{10} + 246\,886\,542 \times 10^5 + 123\,454\,321$

En posant l'opération :

$$\begin{array}{r}123\,454\,321\\ 2\,468\,864\,200\,000\\ 12\,343\,210\,000\,000\,000\\ \hline 12\,345\,678\,987\,654\,321\end{array}$$

3. $A = 111\,111\,111^2 = (111 \times 1\,001\,001)^2$

$A = (3 \times 37 \times 3 \times 333\,667)^2 = 3^4 \times 37^2 \times 333\,667^2$

134. Nombre de Mersenne divisible par 343

1. $2^{21} - 1 = 49 \times 42\,799$

2. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « $A = (1 + x)^7 - (1 + 7x)$. »

À l'aide du binôme de Newton :

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + \sum_{k=2}^{7}\binom{7}{k}x^k$$

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + x^2\sum_{k=2}^{7}\binom{7}{k}x^{k-2}$$

Donc $(1 + x)^7 - (1 + 7x)$ est divisible par x^2.

3. En remarquant que $147 = 21 \times 7$, on prend $x = 2^{21} - 1$

De plus, d'après 1. $2^{21} - 1 = 7^2q$ donc d'après 2.

$(1 + 2^{21} - 1)^7 - [1 + 7(2^{21} - 1)] = k(2^{21} - 1)^2$

$\Leftrightarrow 2^{147} - 1 - 7(7^2q) = k(7^2q)^2$

$2^{147} - 1 = 7^3q + 7^3(7kq^2) = 7^3q(1 + 7kq)$

Donc $7^3 = 343$ divise $2^{147} - 1$.

135. Décomposition impossible

1. a) $(4m + 1)$ est impair donc son diviseur p est impair.

Comme p divise $(4m + 1)$, p divise $4a^2 + 1$

$$4a^2 + 1 \equiv 0\ (p) \Leftrightarrow (2a)^2 \equiv -1\ (p)$$

On élève à la puissance $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$ car p impair :

$$[(2a)^2]^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ (p) \Leftrightarrow (2a)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ (p)$$

b) p est premier avec 4 et avec a car a n'est pas un multiple de p, d'après le théorème de Fermat :

$$2^{p-1} \times a^{p-1} \equiv 1\ (p)$$

On en déduit de la relation de 1. a) que $\frac{p-1}{2}$ est pair donc $p - 1 \equiv 0\ (4)$ et donc $p \equiv 1\ (4)$.

c) $4m + 3 = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}$.

D'après le 1.b)

$$\text{Pour tout } i \in [\![1\ ;\ m]\!],\ p_i \equiv 1\ (4)$$

On en déduit que : $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m} \equiv 1 (4)$

Or $4m + 3 \equiv 3\ (4)$. Contradiction.

2. Si $4a^2 + 1$ n'est pas premier alors il existe $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ tels que $4a^2 + 1 = ab$

$$4a^2 + 1 \equiv 1\ (4) \Rightarrow ab \equiv 1\ (4)$$

$$ab \equiv 1 (4) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv b \equiv 1 (4)\ ou \\ a \equiv b \equiv 3 (4) \end{cases}$$

D'après 1. la solution $a \equiv b \equiv 3\ (4)$ est à rejeter donc $a \equiv b \equiv 1\ (4)$. Il existe donc m et n tels que : $4a^2 + 1 \equiv (4m + 1)(4n + 1)$.

Réciproquement, si $4a^2 + 1 \equiv (4m + 1)(4n + 1)$, alors $4a^2 + 1$ n'est pas premier.

136. Le compte est bon

On trouve 6 flèches : $2 \times 16 + 4 \times 17 = 100$.

137. Nombres de Carmichaël

1. a) $561 = 3 \times 11 \times 17$

b) $n - 1 = 560$ qui est divisible par 2, 10 et 16 (16×35) donc pour tout les facteurs p de $n = 561$, $(p - 1)$ divise $(n - 1)$.

c) $n - 1 = k(p - 1)$

Si a est premier avec n alors a est premier avec p, d'après le théorème de Fermat :

$$a^{p-1} \equiv 1\ (p) \overset{\uparrow k}{\Rightarrow} a^{n-1} \equiv 1\ (p) \Rightarrow a^{n-1} - 1 \equiv 0\ (p)$$

Donc 3, 11 et 17 premiers entre eux deux à deux divise $(a^{n-1} - 1)$ donc $n = 3 \times 11 \times 17$ divise $(a^{n-1} - 1)$ d'où $a^{n-1} - 1 \equiv 0\ (n)$ donc $a^{n-1} \equiv 1\ (n)$.

En multipliant par a : $a^n \equiv a\ (n)$donc n est un nombre de Carmichaël.

2. $1\,105 = 5 \times 13 \times 17$

1 104 est divisible par 4, 12, 16 donc 1 105 est un nombre de Carmichaël.

3. Avec ces deux exemples, on a montré que l'on peut avoir $a^{n-1} \equiv 1\ (n)$ sans pour cela avec n premier. La réciproque du théorème de Fermat est fausse.

Travaux pratiques p. 158-159

TP1. Nombres générant des nombres premiers

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Entrevoir à travers les nombres de Mersenne et de Fermat, la démarche pour rechercher des nombres premiers très grands.

Savoir utilisée la contraposée et la réciproque d'une proposition.

A. Les nombres de Mersenne

1. $M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_4 = 15$, $M_5 = 31$ et $M_6 = 63$.

2. a) Si $a \neq 1$, d'après la somme des termes d'une suite géométrique :

$$1 + a + a^2 + \ldots a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\Leftrightarrow a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$$

Si $a = 1$ l'égalité est vérifiée car les deux termes sont nuls.

b) Si $n = dq$, alors en prenant $a = 2^d$ dans la factorisation standard :

$M_n = 2^n - 1 = (2^d)^q - 1$

$M_n = (2^d - 1)(2^{q-1} + 2^{q-2} + \ldots + 1)$

Donc M_n est divisible par $(2^d - 1)$.

3. Par la contraposée, si n n'est pas premier alors M_n n'est pas premier.

Si n n'est pas premier, alors il existe $d \in \mathbb{N}$, tel que $n = dq$ avec $d \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$.

D'après la question 2. b), M_n est divisible par :

$2^q - 1 \geqslant 3$ et $2^{q-1} + 2^{q-2} + \ldots + 1 \geqslant 2$.

Donc M_n n'est pas premier.

Cherchons un contre-exemple, en calculant les nombres de Mersenne avec n premier :

$M_7 = 2^7 - 1 = 127$ premier.

$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2\ 047 = 23 \times 89$ non premier.

M_{11} est un contre exemple et donc la réciproque est fausse.

4. Par la contraposée : si $a \neq 2$ ou n non premier alors M_n non premier.

Pour $a = 2$ et n non premier a déjà été traité à la question 3.

Il reste qu'à montrer le cas $a \neq 2$ donc $a > 2$.

D'après la factorisation standard, on a :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1)$$

Comme $a > 2$ alors :

$a - 1 > 1 \Rightarrow a - 1 \geqslant 2$ et $a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1 \geqslant 2$

Donc M_n n'est pas premier.

5. a) $s = s_0 q + r$ avec $2^s \equiv 2^{s_0} \equiv 1(p)$, on a alors :

$$2^s \equiv (2^{s_0})^q \times 2^r \equiv 1^{s_0} \times 2^r \equiv 2^r \equiv 1(p)$$

Si $r \neq 0$, alors s_0 n'est pas le plus petit élément de E. Impossible donc $r = 0$. Le nombre s est un multiple de s_0.

b) On sait que p est un diviseur de M_n donc $2^n \equiv 1\ (p)$

Donc $n \in$ E, donc s_0 est un diviseur de n.

Or n est premier donc $s_0 = 1$ ou $s_0 = n$.

Or $2^1 \not\equiv 1\ (p)$ donc $s_0 = n$.

c) Comme M_n est impair, un diviseur premier p de M_n est impair donc p est premier avec 2, d'après le théorème de Fermat : $2^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

Donc $(p - 1) \in$ E donc d'après 5. b), n divise $(p - 1)$.

p étant impair $(p - 1)$ est pair.

2 et n divise $(p - 1)$, comme n est impair, n est premier avec 2, donc d'après le corollaire du théorème de Gauss $2n$ divise $(p - 1)$.

On en déduit alors que : $p = 2nk + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

d) Les diviseurs de M_{23} sont à chercher dans l'ensemble des nombres de la forme $46k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Le premier diviseur à tester est 47 pour $k = 1$.

On trouve $M_{23} = 2^{23} - 1 = 8\ 388\ 607 = 47 \times 178\ 481$

M_{23} n'est donc pas premier. Cette méthode allège les tests à faire pour déterminer si M_n est premier ou non.

B. Les nombres de Fermat

1. a) D'après la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(-x)$:

$1 + (-x) + (-x)^2 + \ldots + (-x)^{2k}$

$$= 1 - x + x^2 - \ldots + x^{2k} = \frac{1-(-x)^{2k+1}}{1+(-x)}$$

$$= \frac{(1+x^{2k+1})}{(1+x)} \Leftrightarrow x^{2k+1} + 1 = (x + 1)(1 - x + x^2 - \ldots + x^2k)$$

b) Si $m = 2k + 1$, on a en prenant $x = 2$:

$$2^{2k+1} + 1 = 3(2^{2k} - 2^{2k-1} + \ldots - x + 1)$$

Donc $2^m + 1$ est divisible par 3 et $2^m + 1 > 3$ car $m > 1$ donc $2^m + 1$ n'est pas premier.

c) Si $m = (2k + 1)q$ avec $k \geqslant 1$ et $q \geqslant 2$ alors en prenant $x = 2^q$, on a :

$2^m + 1 = (2^q)^{2k+1} + 1 = (2^q + 1)((2^q)^{2k} - (2^q)^{2k-1} + \ldots - x + 1)$

$2^q + 1 \geqslant 5$ et $2^m + 1 > 2^q + 1$ donc $2^m + 1$ n'est pas premier

d) D'après 1. b) et 1. c) $2^m + 1$ est premier que si m n'admet que des diviseurs pairs donc si $m = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2. a) $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\ 537$

On vérifie avec le critère d'arrêt ou un algorithme que ces nombres sont premiers.

b) F_5=4 294 967 297, à l'aide de l'algorithme de l'exercice 45, on trouve :

$f(4\,294\,967\,297) \rightarrow$ ('non premier car divisible par' 641)

3. $(Fn - 1)^2 + 1 = (2^{2^n} + 1 - 1)^2 + 1 =$

$(2^{2^n})^2 + 1 = 2^{2 \times 2^n} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}$

Effectuons la division de F_{n+1} par F_n :

$Fn + 1 = F_n^2 - 2F_n + 1 + 1 = (F_n - 2)F_n + 2$.

Soit $d = \text{PGCD}(F_{n+1}, F_n)$, comme 2 est le reste de la division de F_{n+1} par F_n, alors $d = \text{PGCD}(F_n, 2)$, et comme F_n est impair donc $d = 1$.

4. Par récurrence. Soit la propriété :

pour tout $n \geqslant 2$, $F_n \equiv 7\ (10)$.

Initialisation : $n = 2$, $F_2 \equiv 17 \equiv 7\ (10)$.

La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$, supposons que $F_n \equiv 7\ (10)$, on a alors :

$F_{n+1} \equiv (F_n - 1)^2 + 1 \equiv (7 - 1)^2 + 1 \equiv 36 + 1 \equiv 7\ (10)$

La proposition est héréditaire.

TP2. Le système RSA

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Étudier un système de cryptage asymétrique.

A. Arithmétique du système RSA

1. e et m sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$eu + mv = 1.$$

Supposons que $(u_1 \ ; \ v_1)$ et $(u_2 \ ; \ v_2)$ deux couples vérifiant $eu + mv = 1$.

On a alors par soustraction des équations

$$e(u_1 - u_2) = m(v_2 - v_1)$$

m divise alors $(u_1 - u_2)$ donc u_1 et u_2 ont même reste dans la division par m.

On pose d le reste de la division de u par m, donc $u \equiv d\ (m)$ avec $1 \leqslant d < m$. Ce nombre d est alors unique.

En exprimant $eu + mv = 1$ modulo m, on a alors

$eu \equiv ed \equiv 1\ (m)$.

2. Montrons que p divise $a^{ed} - a$.

• Si p divise a alors p divise aussi $a^{e}d$ donc p divise $a^{ed} - a$.

• Si p premier ne divise pas a, alors d'après le théorème de Fermat : $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

Or $ed \equiv 1\ (m)$ donc $ed = 1 + km = 1 + k(p-1)(q-1)$

$$a^{ed} = (a^{p-1})^{k}(q-1) \times a \equiv 1^{k}(q-1) \times a \equiv a(p).$$

Donc $a^{ed} - a \equiv 0\ (p)$ et donc p divise $a^{ed} - a$.

De façon identique, on montre que q divise $a^{ed} - a$.

Comme p et q premiers entre eux divise $a^{ed} - a$, d'après le corollaire du théorème de Gauss, leurs produit $n = pq$ divise $a^{ed} - a$ et donc $a^{ed} \equiv a(n)$.

3. On détermine $m = 2 \times 10 = 20$ puis on détermine d tel que $ed \equiv 1\ (20) \Rightarrow 7d \equiv 1\ (20) \overset{\times 3}{\Rightarrow} d \equiv 3\ (20)$.

Comme $1 \leqslant d < 20$ on a $d = 3$.

B. Envoi d'un message

1. On a la fonction trappe de Bob

```
def fB(a):
    return a**7%33
```

On retrouve bien les nombres d'Alice.

2. $b^{d} \equiv (a^{e})^{d} \equiv a^{e}d \equiv a(n)$

Bob retrouve donc la lettre initiale et donc peut déchiffrer le message d'Alice.

3. De p et q Bob déduit (cf partie A)

Il écrit la fonction inverse suivantes :

```
def fBr(b):
    return b**3%33
```

fBr(14), *fBr*(20), *fBr*(8), *fBr*(12), *fBr*(2), *fBr*(9), *fBr*(0), *fBr*(1), *fBr*(11), *fBr*(16)

Il trouve : (5 , 14 , 17 , 12 , 8 , 3 , 0 , 1 , 11 , 4)

Que l'on transcrit en : FORMIDABLE

C. Authentification

Après avoir décodé le message d'Alice, Bob va analyser la signature d'Alice, en appliquant la fonction trappe f_A de Alice. Il pourra alors comparer $f_A[f_A^{-1}(A)]$ et A qui doivent être identiques.

CHAPITRE 6 Introduction au calcul matriciel et aux graphes

Manuel p. 162-199

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

On définit les matrices comme des tableaux de nombres sur lesquels on introduit une addition et une multiplication.

La progression dans le cours et les exercices doit permettre de comprendre les matrices comme des outils pour résoudre plusieurs problèmes. Ces problèmes sont nombreux dans les exercices et les TP : interpolation polynômiale, résolution de systèmes différentiels, calcul de coûts et gestion de stock, étude de population, etc.

Pour résoudre ces problèmes, souvent par inversion ou mise en puissance de matrices, nous abordons plusieurs techniques : polynômes annulateurs, diagonalisation, trigonalisation.

Un aspect plus théorique est également présenté en vue d'introduire des réflexes et des calculs propres aux structures algébriques et en algèbre linéaire : notions de sous-groupes, d'espaces vectoriels, résolution d'équation, exponentielle de matrices…

Le chapitre traite également de graphes pour lesquels on présente une approche introductive. L'objectif est ici de comprendre la manière dont on peut modéliser une situation par un graphe et comment l'on peut effectuer des déplacements sur ce graphe, en vue de compter le nombre de chemins possibles pour effectuer un tel déplacement.

Objectifs

- → Représenter une matrice.
- → Effectuer un calcul matriciel (somme, produit, puissance).
- → Déterminer et utiliser l'inverse d'une matrice carrée.
- → Résoudre un système d'équations en utilisant le calcul matriciel.
- → Déterminer les caractéristiques d'un graphe (orienté ou non).
- → Utiliser une matrice d'adjacence.
- → Manipuler des suites de matrices.
- → Représenter des transformations géométriques.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages de référence

- Max Hochart, *Cap Prépa Mathématiques, MPSI-PCSI*, Pearson Education, 2009.
- Joseph Grifone, *Algèbre linéaire*, Cépaduès, 2011.
- Nicolas Basbois, Pierre Abbrugiati, *Algèbre, MPSI/PCSI*, De Boeck, 2013.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 163

1. Étudier des séries statistiques

1. Il s'agit ici d'un calcul de moyenne pondérée. On a pour Camille une moyenne de 12,86, pour Antoine une moyenne de 11,14 et pour Ana une moyenne de 11,57.

2. Camille a en moyenne le mieux réussi la série d'épreuve.

Il a fallu ici mettre en relation deux tableaux de nombres, ou matrices. Cet exercice prépare à un calcul de produit de deux matrices comme sera posée l'activité 1.

2. Manipuler des suites arithmétiques et géométriques

1. On a : $u_1 = 1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -3$ et

$v_2 = -\frac{2}{3}$; $v_3 = -\frac{2}{9}$; $v_4 = -\frac{2}{27}$.

2. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -2. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

3. On a : $u_n = 3 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$; $v_n = -\frac{2}{3^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Résoudre des systèmes

a) $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 4x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -3x - 4y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + 7y = 52 \\ 9x - 8y = -65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 7 \end{cases}$

4. Réaliser des transformations géométriques

2. On *a* A(2 ; 1) ; B(–1 ; 2) ; C(2 ; 3).

3. On construit le parallélogramme ABCA′.

4. On construit la droite (BA) puis on reporte la distance BA.

5. On construit le cercle de centre C et de rayon OC et l'on reporte un secteur angulaire de mesure d'angle de $\frac{\pi}{4}$ en partant de C.

6. On a A′(5 ; 2) ; B′(5 ; 0) et C′$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Activités p. 164-165

1 Découvrir le calcul matriciel

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** En introduction on apprend à passer d'un tableau à double entrée à une matrice. On décrit ensuite des opérations algébriques sur ces tableaux de nombres en les justifiant.

A. Représenter les matrices

1. En gardant l'ordre de l'énoncé, on peut dresser deux tableaux à double entrée :

	Orange	Citron	Pomme	Banane
Nantes	1,15	1,25	0,65	1,2
Rungis	1,2	1,4	1	1
Lyon	1,05	1,2	0,95	1,15
Marseille	1,05	1,3	0,85	1,05
Lille	1,15	1,6	0,55	1,15

	Nantes	Rungis	Lyon	Marseille	Lille
Orange	1,15	1,2	1,05	1,05	1,15
Citron	1,25	1,4	1,2	1,3	1,6
Pomme	0,65	1	0,95	0,85	0,55
Banane	1,2	1	1,15	1,05	1,15

Le premier tableau est un tableau de 5 lignes et 4 colonnes ; le deuxième de 4 lignes et 5 colonnes.

2. On dresse cette fois le tableau sous forme matricielle :

$$C = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 60 \\ 30 & 50 & 10 \\ 70 & 60 & 70 \\ 60 & 50 & 40 \end{pmatrix}.$$

B. Opérations

1. a) En prenant en compte les deux commandes :

$$C' = \begin{pmatrix} 40 & 60 & 70 \\ 30 & 70 & 20 \\ 80 & 60 & 80 \\ 60 & 60 & 60 \end{pmatrix}.$$

b) Effectuer la somme des coefficients aux même emplacements dans les deux tableaux.

2. a) En effectuant les augmentations pour chaque prix, on obtient :

$$P' = \begin{pmatrix} 1{,}2075 & 1{,}3125 & 0{,}6825 & 1{,}26 \\ 1{,}26 & 1{,}47 & 1{,}05 & 1{,}05 \\ 1{,}1025 & 1{,}26 & 0{,}9975 & 1{,}2075 \\ 1{,}1025 & 1{,}365 & 0{,}8925 & 1{,}1025 \\ 1{,}2075 & 1{,}68 & 0{,}5775 & 1{,}2075 \end{pmatrix}$$

b) Multiplier chaque terme du tableau de nombre par la valeur considérée.

3. a) Il s'agit ici de sommer les produits des prix par quantité de chaque fruit : avec le marché de Nantes, on s'intéresse aux prix dans la première ligne de P' avec la commande du client 1 dans la première colonne de C' : 217, 875 euros.

Pour le marché de Rungis, on regarde cette fois la deuxième ligne de P' avec la première colonne de C' : 241,5 euros.

b) On représente les coûts de chaque client dans chaque marché ; les clients étant en colonne, on obtient un tableau à 5 lignes et 3 colonnes, chaque ligne représentant un marché :

$$T = \begin{pmatrix} 217{,}875 & 280{,}875 & 240{,}975 \\ 241{,}5 & 304{,}5 & 264{,}6 \\ 234{,}15 & 286{,}65 & 254{,}625 \\ 222{,}6 & 281{,}4 & 242{,}025 \\ 217{,}35 & 297{,}15 & 236{,}775 \end{pmatrix}$$

c) Il est nécessaire que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite. Ensuite, on développe chaque ligne de gauche avec chaque colonne de droite.

d) Pour le client 1, le marché le plus intéressant est celui de Lille, pour le client 2, celui de Nantes et pour le client 3 celui de Lille.

Aux vues des différences de prix, en ne choisissant qu'un marché, on peut considérer celui de Nantes.

2 Résoudre des systèmes à l'aide de matrices inversibles

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Manipuler la notion de matrice inversible et l'ordre du produit matriciel. Déterminer une formule d'inversion de matrices d'ordre 2. Pouvoir transcrire un système d'équations en égalité matricielle avec les règles du produit. Comprendre que les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'admettent pas tous un inverse. On commence à faire le lien suivant : résoudre un système, c'est déterminer l'inverse d'une matrice et réciproquement.

1. $(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$ et (S_2) n'admet pas de couple solution.

A. Représentation du système

1. On a $M_{x,y} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 7x+13y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 44 \end{pmatrix} = B$.

2. $M_{x,y}$ peut s'écrire sous la forme du produit matriciel suivant :

$$M_{x,x} = AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3. Ainsi, $(S_1) \Leftrightarrow M_{x,y} = B \Leftrightarrow AX = B$.

B. Inverse de matrice et résolution matricielle

1. Le nombre 2^{-1} est l'inverse de 2. Multiplier par l'inverse de 2 permet de faire apparaître l'unité des réels multipliée à x. On cherche ici à faire de même pour les équations matricielles ; cela fait intervenir l'inverse d'une matrice ainsi que l'unité matricielle.

2. Effectuons le produit AA^{-1} :

$$AA^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 7a+13c & 7b+13d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3c=1 \\ 7a+3c=0 \\ 2b+3d=0 \\ 7b+13d=1 \end{cases}.$$

3. On obtient alors :

$$\begin{cases}2a+3c=1\\7a+13c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{13}{5}\\c=-\dfrac{7}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2b+3d=0\\7b+13d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-\dfrac{3}{5}\\d=\dfrac{2}{5}\end{cases}$$

4. On peut alors écrire :

$$\begin{cases}a=\dfrac{13}{213-37}\\b=\dfrac{-3}{213-37}\\c=\dfrac{-7}{213-37}\\d=\dfrac{2}{213-37}\end{cases}$$

On obtient, si $A=\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}$, alors

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{t}{xt-yz} & \dfrac{-y}{xt-yz}\\ \dfrac{-z}{xt-yz} & \dfrac{x}{xt-yz}\end{pmatrix}$$

Et l'on constate que ces nombres ne sont possibles que si $xt-yz$ est non nul. Le nombre $xt-yz$ détermine donc si la matrice est inversible ou non.

5. On retrouve : $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

6. $(S_2) \Leftrightarrow CX=D$, où :

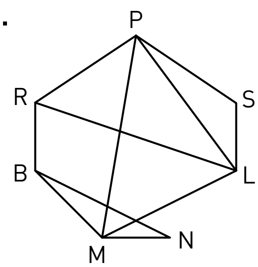
$$C=\begin{pmatrix}6 & 4\\3 & 2\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

En utilisant la question 4, on constate que le nombre déterminant si la matrice admet une matrice inverse où pas est $2\times 6-3\times 4=0$. On ne peut donc pas déterminer de matrice inverse ce qui explique que le système (S_2) n'admette pas de solution.

3 Découvrir les chemins et les graphes

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Comprendre la modélisation d'une carte par un graphe et celle d'un trafic par un déplacement dans ce graphe.

1.



2. Pour aller de Paris à Nice, il a fallu prendre deux lignes : Paris-Marseille et Marseille-Nice. On entend ici plus court par le plus petit nombre de lignes. On obtient un chemin de longueur 2.

3. Il y a 10 chemins de longueur 3 reliant Paris à Marseille et 3 reliant Bordeaux à Lyon.

4. On obtient la matrice :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}.$$

5. On calcule :

$$M^3=\begin{pmatrix}6&9&7&7&3&10&3\\9&2&9&2&7&3&3\\7&9&6&7&3&10&3\\7&2&7&2&4&2&2\\3&7&3&4&2&8&4\\10&3&10&2&8&4&5\\3&3&3&2&4&5&2\end{pmatrix}.$$

On retrouve les nombres de chemins donnés plus haut.

À vous de jouer p. 167-179

1. 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$

2. $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ 6 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$

2. 1. A est la matrice colonne : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$

2. On a : $A^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$.

3. $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -20 & 6 \end{pmatrix}$.

4. On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -10 & -15 & 6 \\ 12 & 29 & 2 \end{pmatrix}$ et

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -10 \\ -14 & 0 & -21 \end{pmatrix}$.

5. 1. $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -20 & 20 \end{pmatrix} = 4M$.

2. $M^3 = 4M^2 = 16M = \begin{pmatrix} -16 & 16 \\ -80 & 80 \end{pmatrix}$.

6. 1. $MM = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -M$

2. On a : $(MM)(MM)M = (-M)(-M)M = M$.

7. $\det(A) = -3 \neq 0$ donc A est inversible.

$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. On calcule le déterminant de la matrice : $\det(A) = 65 \neq 0$. Ainsi A est inversible avec

$A^{-1} = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

9. *1.* $AB = I_3 = BA$

2. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & 14 \end{pmatrix}$.

10. 1. $A^2 = I_3$ d'où le résultat.

2. On a $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 33 & 39 \\ 43 & 58 \\ 30 & 35 \end{pmatrix}$.

11. 1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

12. 1. Le système peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 8 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -3 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. On utilise la calculatrice pour obtenir la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

13. 1. Le système peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

2. On utilise la calculatrice pour obtenir la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

14. 1. Le système peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 & 2 \\ -5 & -6 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ -49 \\ 52 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

2. On utilise la calculatrice pour obtenir la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

15. 1. Le graphe est d'ordre 7.

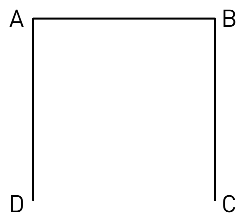
Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	6	5	3	5	3	5	3

2. Le graphe compte 15 arcs.

3. G-A-E-D-D-C.

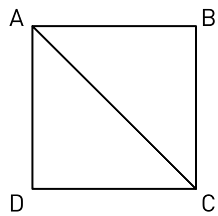
4. A-E-D-A.

16.



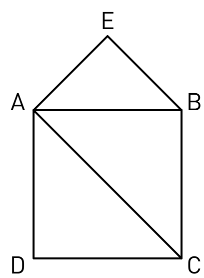
Sommet	A	B	C	D
Degré	2	2	1	1

17.



Sommet	A	B	C	D
Degré	3	2	3	2

18.



Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	3	3	2	2

19. 1. Le graphe est d'ordre 7 avec :

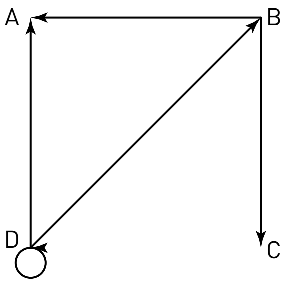
Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	3	3	3	4	3	3

2. Le nombre d'arêtes est donné par $\frac{22}{2} = 11$.

3. On peut donner par exemple F-G-C-B-E-G-C-E-D.

4. On peut donner par exemple A-D-F-A.

20.



Sommet	A	B	C	D
Degré	2	3	1	4

21. 1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Il y a 10 chemins de longueur 6 reliant D à B.

22. 1. Une matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a $m_{56}^{(10)} = 17017$donc il y a 17017 chaînes de longueur 10 reliant E à F.

23. 1. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}$

2. $V_{n+1} = U_{n+1} - X = AU_n + B - X = A(U_n - A) = AV_n$

3. $V_n = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $U_n = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}$.

24. 1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$AX + B = X \Leftrightarrow 4x - 3y = 2.$$

La matrice $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ convient.

2. $V_{n+1} = U_{n+1} - X = AU_n + B - AX - B = AV_n$, pour tout entier naturel n.

3. On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = A^n \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $U_n = A^n \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

25. 1. $B\left(-4\,;\dfrac{13}{3}\right)$

2. $C\left(\dfrac{-3-\sqrt{3}}{6}\,;\dfrac{3\sqrt{3}-1}{6}\right)$

26. 1. $B\left(\sqrt{2}-1\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\right)$.

2. $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;-\sqrt{2}\right)$.

Exercices apprendre à démontrer p. 180

Pour s'entraîner

On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PB^nP^{-1}$. On notera I la matrice identité de même taille que A.

Initialisation : si $n = 0$, $A^0 = I$. De plus $PB^0P^{-1} = PP^{-1} = I$. Ainsi $A^0 = PB^0P^{-1}$. L'égalité est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $A^n = PB^nP^{-1}$. On calcule alors

$A^n = AA^n = APB^nP^{-1} = PBP^{-1}PB^nP^{-1} = PBB^nP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$.

Ainsi l'égalité est vraie au rang n+1.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 0$. De plus, pour tout entier naturel n si elle est vraie pour l'entier n, alors elle est vraie au rang suivant. Par principe de récurrence, l'égalité est vraie pour tout entier naturel.

Exercices calculs et automatismes p. 181

27. Calcul matriciel

a) Fausse. A est une matrice ligne.

b) Vraie.

c) Fausse. Il faut que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.

d) Fausse.

28. Somme de matrices

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{5} \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -\frac{15}{14} & -\frac{8}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

29. Produit de matrices

a) 19 **b)** $\begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $(-17 \quad -2)$ **d)** $\begin{pmatrix} -21 & 17 \\ 22 & 2 \end{pmatrix}$

30. Puissance de matrices

1. b) **2.** c)

31. Inverse de matrices

a) Vraie. **b) Fausse.**

32. Matrice d'adjacence

1. b) **2.** c)

33. Parcours dans un graphe

On détermine la matrice M^3. On donne alors $m_{23}^{(3)}$.

Exercices d'application p. 182-185

Représenter une matrice

34. 1. A est de dimension 2×4.

2. $a_{11} = 1$; $a_{21} = 10$; $a_{13} = -1$.

35. 1. B est une matrice de dimension 3×4.

2. $b_{33} = 3 - 2 \times 3 = -3$ et $b_{23} = 2 - 2 \times 3 = -4$.

3. On a $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Et $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \\ -7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

36. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

37. Deux matrices dont égales si, et seulement si, leurs coefficients respectifs sont égaux. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1-x & 2+y & 3 \\ 0 & 4 & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \ ; y = -7 \ ; z = 3.$$

38. On travaille par équivalence :

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 \\ y-2 & 2x+1 & 3 \\ 0 & x+y & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 & 3y-2 & 1 \\ -1 & x-2 & 3 \\ 0 & x & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = x \ ; y = 3y-2 \\ y-2 = -1 ; 2x+1 = x-2 \\ x+y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = x \ ; y = 1 \\ y = -3 \ ; \ x = -3. \\ y = 0 \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution.

Calculer une somme ou un produit de matrices

39. a) $A+B=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $2A-B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

c) $-\frac{1}{2}A+\frac{2}{3}B=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

40. a) $\begin{pmatrix} -4 \\ 38 \end{pmatrix}$ **b)** Produit impossible.

c) Produit impossible. **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & -42 & 25 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$

41. On effectuer les produits suivants :
$AB=(5 \quad 0)$; $AE=(3 \quad -2 \quad -3)$;

$BC=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $BD=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$EB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$; $CD=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

42. On a :

a) $\begin{pmatrix} 15 & -1 & 13 \\ 27 & 10 & 2 \\ 21 & 16 & -13 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 32 & 10 \\ 11 & 2 & -21 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -29 & 16 & 45 \\ 58 & -23 & -6 \\ -7 & -1 & 259 \end{pmatrix}$

Calculer la puissance de matrices

43. a) $AB=\begin{pmatrix} 27 & -1 \\ 32 & -18 \end{pmatrix}$ **b)** $A^2=\begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$

c) $A^5=\begin{pmatrix} -275 & 75 \\ 50 & -350 \end{pmatrix}$ **d)** $B^2=\begin{pmatrix} 49 & 5 \\ 8 & 44 \end{pmatrix}$

e) $B^5=\begin{pmatrix} 11043 & 11275 \\ 18040 & -232 \end{pmatrix}$

44. On pose $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) $A^2=A \Leftrightarrow A \in \left\{M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} ; \det(M)=0\right\} \cup \{0 ; I_2\}$.

b) $A^2=I_2 \Leftrightarrow A \in \left\{M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} ; \det(M)=-1\right\} \cup \{\pm I_2\}$

c) $AB=BA \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} b+d & b \\ -b & d \end{pmatrix}$

45. a) $A+B=I_2$. **b)** $A^2=A$
c) $B^2=B$ **d)** et **e)** $AB=BA=0$

46. a) $A^2=I_3$, $A^3=A$ et $B^3=I_3$. Les puissances sont cycliques.

b) On peut conjecturer, pour tout entier naturel n, que :

$$A^n=\begin{cases} A \text{ si } n \text{ est impaire} \\ I_3 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$B^n=\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \equiv 2\ [3] \\ B \text{ si } n \equiv 1\ [3] \\ I_3 \text{ si } n \equiv 0\ [3] \end{cases}$$

47. a) $U^2=U$. **b)** $V^2=V$.
c) et **d)** $UV=VU=0$

Calculer et appliquer l'inverse d'une matrice

48. a) $\det(A)=0$ donc A n'est pas inversible.

b) $\det(A)=2$ et $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) $\det(A) = 8$ et $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\det(A) = -2$ et $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -0{,}25 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

49. On calcule les deux produits matriciels et on obtient : $A = I_2 = B$.

On peut en déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

50. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On a $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On ne peut pas trouver une telle matrice B telle que $AB = I_2$.

3. La matrice A ne peut donc pas être inversible.

51. On calcule le déterminant des trois matrices. On trouve : $\det(A) = 1$; $\det(B) = 8$; $\det(C) = 1$.

Finalement, on a :

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

52. 1. On a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} = AC$.

2. Si A était inversible on aurait :

$$AB = AC \Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Leftrightarrow B = C.$$

Or $B \neq C$ donc A n'est pas inversible.

53. On calcule les premières puissances de N :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que la matrice soit inversible, il existe alors A telle que $AN = I_2$. Ainsi $0 = AN^3 = ANN^2 = N^2$. Ce qui est absurde.

Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

54. On a : $6A - A^2 = 5I_2$. Finalement :

$$\frac{1}{5}(6I_2 - A)A = A \times \frac{1}{5}(6I_2 - A) = I_2.$$

La matrice A est donc inversible d'inverse $\frac{1}{5}(6I_2 - A)$.

55. On a : $12A - A^2 = 21I_2$. Finalement :

$$\frac{1}{21}(12I_2 - A)A = A \times \frac{1}{21}(12I_2 - A) = I_2.$$

La matrice A est donc inversible d'inverse $\frac{1}{21}(12I_2 - A)$.

56. On a : $A^2 + A = 2I_3$. Finalement :

$$\frac{1}{2}(A + I_3)A = A \times \frac{1}{2}(A + I_3) = I_3.$$

La matrice A est donc inversible d'inverse $\frac{1}{2}.(A + I_3)$

57. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « Calculer A^2 **+** $2I_3 - 3A$… »

On a : $A^2 - 3A = -2I_3$. Finalement :

$$-\frac{1}{2}(A - 3I_3)A = -A \times \frac{1}{2}(A - 3I_3) = I_3.$$

La matrice A est donc inversible d'inverse $-\frac{1}{2}(A - 3I_3)$.

58. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -2 & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$

b) A n'est pas inversible.

Résoudre un système d'équations

59. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

60. a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -x-y+z=-9 \\ -x+2y-z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x-5y-2z=2 \\ -x+4y+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

61. a) $AX + B = X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $AX + B = X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

Déterminer les caractéristiques d'un graphe

62. a) Le graphe est d'ordre 8.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	4	2	3	4	5	3	3	2

Le graphe compte 13 arêtes.

b) Le graphe est d'ordre 9.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	2	3	2	3	6	4	1	3	2

Le graphe compte 13 arêtes.

c) Le graphe est d'ordre 6.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	3	4	3	2	5	3

Le graphe compte 10 arcs.

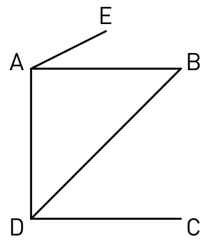
d) Le graphe est d'ordre 6.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	5	5	3	6	3	2

Le graphe compte 12 arcs.

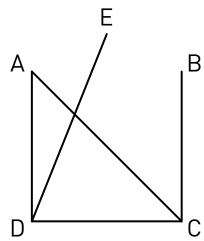
63. La question n'a de sens que si deux points ne peuvent pas être reliés par plus d'une arête. Dans ce cas le nombre maximal est $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

64. a)

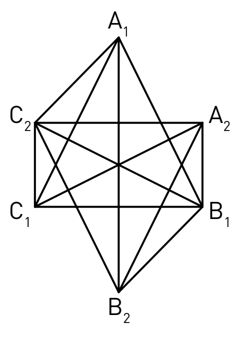


b) Impossible : somme de degrés impaire.

c)

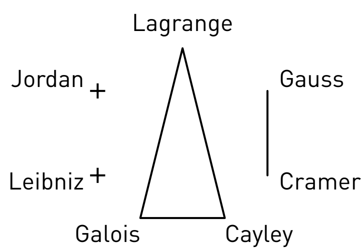


65.

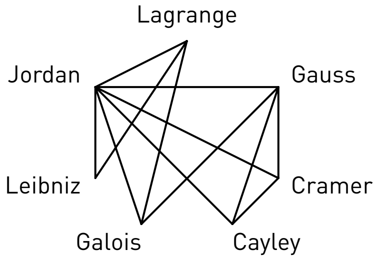


66. Cet exercice propose de débattre en classe sur les réponses. Les graphes proposés ici sont discutables concernant les domaines d'activité.

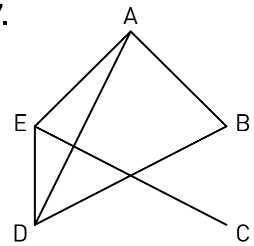
a)



b)



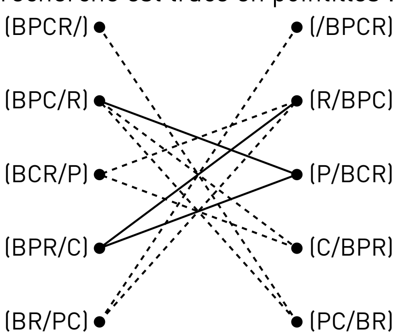
67.



68. Ce graphe est d'ordre 11, il possède 12 arêtes, Barnazat et Montluçon sont deux sommets non adjacents et l'on a :

Sommet	Clermont	Montluçon	Beauregard
Degré	2	3	4

69. On peut très bien résoudre ce problème sans les graphes, mais dans l'idée de ce chapitre on va utiliser un graphe pour modéliser les déplacements. On utilise les lettres B, P, C et R pour désigner les personnes qui traversent la rivière et chaque sommet modélisera les configuration (1re rive/2e rive), en ne gardant que les sommets possibles – on ne regardera pas le sommet (BP/CR) par exemple. Chaque arête du graphe modélise une traversée qui conduit d'une configuration à une autre. Nous obtenons le graphe suivant, le chemin recherché est tracé en pointillés :



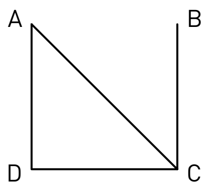
Déterminer et utiliser une matrice d'adjacence

70. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

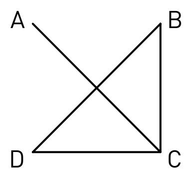
b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

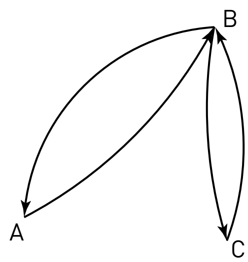
71. a)

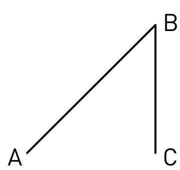


b)

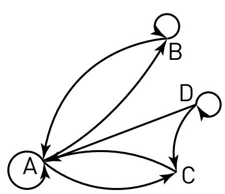


72. a)

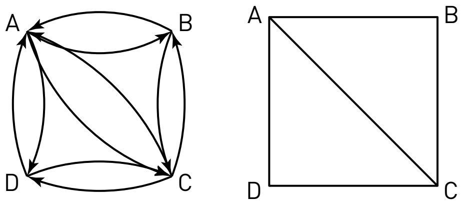




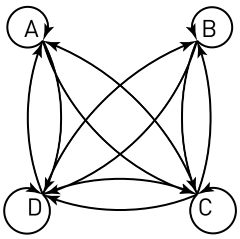
b)



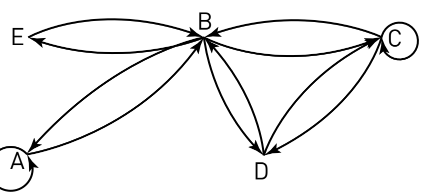
c)



d)



73.



Ce graphe est d'ordre 5. La somme des degrés vaut 14, il admet ainsi 7 arcs.

74. 1. Une matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a)

$$M^4 = \begin{pmatrix} 26 & 14 & 18 & 15 & 11 & 10 \\ 14 & 9 & 9 & 1 & 3 & 3 \\ 18 & 9 & 17 & 8 & 12 & 10 \\ 5 & 1 & 8 & 10 & 13 & 9 \\ 11 & 3 & 12 & 13 & 19 & 14 \\ 10 & 3 & 10 & 9 & 14 & 11 \end{pmatrix}.$$

b) On a donc $m_{13}^{(4)} = 18$ chemins de longueur 4 reliant A à C.

75. 1. Une chaîne possible de longueur 4 reliant A à F est A, E, B, C, F

2. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) On obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 24 & 25 & 20 & 30 & 32 & 41 \\ 25 & 6 & 31 & 9 & 30 & 13 \\ 20 & 31 & 8 & 31 & 20 & 45 \\ 30 & 9 & 31 & 6 & 25 & 13 \\ 32 & 30 & 20 & 25 & 24 & 41 \\ 41 & 13 & 45 & 13 & 41 & 22 \end{pmatrix}.$$

b) Ainsi, il y a $m_{26}^{(5)} = 13$ chaînes de longueur 5 reliant B à F.

76. 1. Un chemin possible de longueur 5 reliant A à E est A, E, B, D, C, E.

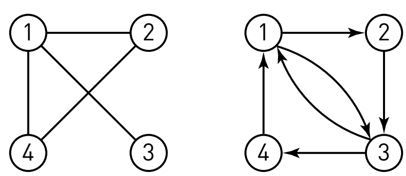
2. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On obtient :

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 106 & 63 & 119 & 135 & 56 \\ 0 & 115 & 69 & 129 & 147 & 60 \\ 0 & 129 & 78 & 147 & 166 & 69 \\ 0 & 147 & 88 & 166 & 188 & 78 \\ 0 & 129 & 78 & 147 & 166 & 69 \\ 0 & 69 & 41 & 78 & 88 & 37 \end{pmatrix}.$$

77. 1.



A **B**

2. On obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a qu'un chemin de longueur 2 reliant 2 et 4. Il y a un également dans le cas du graphe orienté.

78. 1. Il s'agit d'un graphe d'ordre 6.

2. La somme des degrés vaut 20.

3. Il y a donc 10 arêtes.

Exercices d'entraînement p. 186-189

Notion de matrice

79. Deux matrices dont égales si, et seulement si, leurs coefficients respectifs sont égaux. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-x \\ 2x+3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x+3 \\ 2-x & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x+3 = 2-x$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

80. a) A est une matrice à une ligne et six colonnes :

$$A = (2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7)$$

b) A est une matrice à cinq lignes et cinq colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

c) A est une matrice à trois lignes et deux colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

d) A est une matrice à dix lignes et dix colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) A est une matrice à cinq lignes et cinq colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

81. a) A est une matrice de dimension 3×3 avec $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leqslant j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

b) A est une matrice de dimension 3×3 avec $a_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

c) A est une matrice de dimension 3×2 avec $a_{ij} = i + j$.

d) A est une matrice de dimension 2×3 avec $a_{ij} = i - 2j$.

82. Une matrice symétrique est une matrice carrée. En effet si A est de dimension $n \times p$, alors A^t est de dimension $p \times n$ et deux matrices égales ont même dimension.

On considère A et B deux matrices symétriques de même dimension. Ainsi on a $a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{ij} = b_{ji}$. Considérons alors $A + B = (s_{ij})$, le produit est licite car les deux matrices sont de même dimension. On a $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Ensuite $s_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a_{ij} + b_{ij} = s_{ij}$ donc $(A + B)^t = A + B$.

On considère de plus $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons alors $\lambda A = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Ensuite $c_{ji} = \lambda a_{ji} = \lambda a_{ij} = c_{ij}$ donc $(\lambda A)^t = \lambda A$

Remarque : on montre de plus dans cet exercice que la transposée est linéaire.

Opérations sur les matrices

83. 1.a) $AB = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 72 & 48 \\ -48 & -32 \end{pmatrix}$.

b) On a ainsi $AB \neq BA$.

2.a) $CD = \begin{pmatrix} -34 & 70 \\ -14 & 29 \end{pmatrix}$ et $DC = \begin{pmatrix} -34 & 70 \\ -14 & 29 \end{pmatrix}$.

b) On a ainsi $CD = DC$. Le produit matriciel n'est pas commutatif mais il existe bien entendu des produits qui sont commutatifs.

84. Soit A une matrice carrée diagonale dont tous les coefficients sont égaux. On peut traiter l'exercice de deux manières.

Si l'on note α cette valeur, on peut alors écrire $A = \alpha I_n$. Ainsi si B est carrée de même dimension, alors $AB = \alpha I_n B = \alpha B = B \times \alpha I_n = BA$.

Si l'on ne remarque pas cette manière d'écrire A, on utilise la formule des coefficients du produit matriciel : $AB = (c_{ij})$ où :

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij} = b_{ij} a_{ii} = b_{ij} a_{jj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$.

D'où le résultat.

85. 1. a) On range les lignes de N_0 dans l'ordre P, V et les colonnes dans l'ordre vêtement, corps1, corps2, structure (attention à distinguer les deux corps car ils affectent des coefficients différents). Les lignes de N_1 respectent cet ordre et les colonnes sont dans l'ordre coton, pigment, plastique, métal.

On a alors :

$$N_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{21} & \frac{13}{21} \end{pmatrix} ; N_1 = \begin{pmatrix} 0{,}94 & 0{,}06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & \frac{11}{800} & \frac{789}{800} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

b) On a $N_C = N_0 N_1 = \begin{pmatrix} \frac{47}{300} & 0{,}01 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{11}{2100} & \frac{563}{700} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}$.

2. a) La matrice des prévisions en proportion est donnée par :

$$P_C = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

b) Les besoins bruts s'effectuent alors par le produit : $P_C N_C$. Ainsi les lignes correspondent aux mois et les colonnes aux matières. On obtient les proportions de chaque matière première dans le stockage pour chaque mois.

3. On obtient :

$$P_C N_C = \begin{pmatrix} \frac{47}{750} & * & * & * \\ \frac{47}{500} & * & \frac{1263}{1750} & * \\ \frac{47}{675} & * & * & * \end{pmatrix}.$$

La quantité de coton, en proportion sur le stockage total, est donnée sur la première colonne ; au mois de décembre, il faudra prévoir une part de $\frac{47}{675}$ pour le stockage du coton, soit environ 7 % du stockage. Le plastique pour le mois de novembre représentera lui environ 72 % du stockage nécessaire.

86. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$.

On considère une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AB = BA$. Or $AB = \begin{pmatrix} x + az & y + at \\ z & t \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} x & y + ax \\ z & t + az \end{pmatrix}$.

Deux matrices de même dimension sont égales si, et seulement si, elles ont mêmes coefficients.

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} x + az = x \\ y + at = y + ax \\ z = z \\ t + az = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = t \end{cases}, \ y \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les matrices $B=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ sont les matrices qui commutent avec A.

87. Nous avons l'embarras du choix ! $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ conviennent, pour $a \neq b$, l'un au moins non nul.

88. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le système $AX = Y$ admet une unique solution si, et seulement si, A est inversible.

2. $AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=x' \\ y+2z=y' \\ z=z' \end{cases}$

On remonte simplement le système qui est mis sous forme triangulaire. On obtient alors :

$$\begin{cases} x=x'-2y'+5z' \\ y=y'-2z' \\ z=z' \end{cases} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Y$$

3. Finalement $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

89. Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule son carré :

$$A^2=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}=3A-2I_3.$$

L'égalité précédente nous permet d'obtenir :

$$\begin{cases} A\dfrac{1}{2}(3I_3-A)=I_3 \\ \dfrac{1}{2}(3I_3-A)A=I_3 \end{cases}$$

Ce qui démontre l'inversibilité de A avec

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(3I_3-A)=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

90. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On a $A=I_3+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}=I_3+J$.

2. $(I_3+J)(I_3-J+J^2)=I_3+J^3$.On calcule ensuite la matrice obtenue : $J^3=0$.

3. Ainsi, on a $A(I_3-J+J^2)=(I_3-J+J^2)A=I_3$donc A est inversible d'inverse : $A^{-1}=I_3-J+J^2$.

91. Les deux inconnues du système sont des matrices carrées de dimension 2×2. Une manière de rédiger les choses est d'écrire ce système sous forme matricielle, la dimension des inconnues ne pose ici aucun problème (on peut ici faire intervenir le terme de blocs matriciels) :

$$\begin{cases} 2X+3Y=A \\ 3X+2Y=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Or $\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)=-5$ donc on obtient une solution unique à ce système :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Ainsi $X=\dfrac{-2}{5}A+\dfrac{3}{5}B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Et $Y = \frac{-2}{5}B + \frac{3}{5}A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

92. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : pour $n = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^1.$$

L'égalité est donc vraie au premier rang.

Hérédité : supposons que l'égalité soit vraie pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque. Alors :

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (HR)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 1$. De plus, pour tout entier naturel non nul n, si elle est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang suivant. Ainsi l'égalité est vraie quelque soit l'entier naturel non nul que l'on considère.

93. 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq b$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & c\frac{a^n - b^n}{a - b} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : pour $n = 1$,

$$\begin{pmatrix} a & c\frac{a - b}{a - b} \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = A^1.$$

L'égalité est donc vraie au premier rang.

Hérédité : supposons que l'égalité soit vraie pour un entier $n \geqslant 1$quelconque. Alors :

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^n & c\frac{a^n - b^n}{a - b} \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \text{ (HR)}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & c\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 1$. De plus, pour tout entier naturel non nul n, si elle est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang suivant. Ainsi l'égalité est vraie quel que soit l'entier naturel non nul que l'on considère.

2. Si $a = b$. $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2c \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$.

On peut conjecturer que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}c \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

On démontre ce résultat par récurrence.

94. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $\det(P) = 1 \neq 0$ donc la matrice P est inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut obtenir ce résultat en résolvant le système $\begin{cases} 3x + 2y = x' \\ x + y = y' \end{cases}$ et l'on obtient $\begin{cases} x' - 2y' = x \\ -x' + 3y' = y \end{cases}$ d'où le résultat.

2. On calcule $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

3. On démontre par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$. Une démonstration rigoureuse de ce point pourra se faire par récurrence, selon le contenu du cours effectué.

Ainsi $A^n = \begin{pmatrix} 32^n - 2 & -32^{n+1} + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$.

95. Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. $P^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. D'où :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On démontre par récurrence que :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. On effectue alors le produit matriciel :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 54^n + 62^n & 72^n + 4^n - 62^n & -32^n - 34^n + 62^n \\ 22^n + 54^n + 32^n & 142^n - 4^n - 32^n & -62^n + 34^n + 32^n \\ 2^n + 104^n + 92^n & 72^n - 2^{2n+1} - 92^n & -32^n + 64^n + 92^n \end{pmatrix}$$

96. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a + d = -1$ et $ad + bc = -2$.

1. On considère M et M' deux matrices de E. On écrit $M = \lambda A + \mu I_2$ et $M' = \lambda' A + \mu' I_2$, $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$. Alors : $M + M' = (\lambda + \lambda')A + (\mu + \mu')I_2$.

Ainsi $M + M' \in$ E.

2. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix}.$$

Or $a^2 + bc = -a(1 + d) + bc = -a + 2$;

$ab + bd = -b$; $ca + cd = -c$ et $cb + d^2 = -d + 2$. Ainsi $A^2 = -A + 2I_2$.

On en déduit que $A^2 \in$ E. De plus,

$$A^2 = -A + 2I_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A(A + I_2) = I_2.$$

Ainsi on en déduit que A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}(A + I_2)$. Ainsi $A^{-1} \in$ E avec $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$.

3. Soit M et M' deux matrices de E. On écrit $M = \lambda A + \mu I_2$ et $M' = \lambda' A + \mu' I_2$, $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} MM' &= \lambda\lambda' A^2 + (\lambda\mu' + \mu\lambda')A + \mu\mu' I_2 \\ &= (\lambda\mu' + \mu\lambda' - 1)A + (\mu\mu' + 2)I_2, \end{aligned}$$

avec $\lambda\mu' + \mu\lambda' - 1$ et $\mu\mu' + 2$ des réels. D'où $MM' \in$ E.

97. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) On calcule :

$$PA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Les lignes de la matrice PA sont celles de A après une permutation de l'ordre. Les lignes 1 et 2 ont été permutées.

2. On écrit alors $PA = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$ ce qui nous permet de retrouver le résultat attendu.

3. On peut reprendre la question précédente avec cette nouvelle matrice. On constate que P est une matrice de permutation : elle permute les deux premières lignes et laisse la troisième inchangée.

4. La matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ permute toutes les lignes d'une matrice. Ce n'est bien sûr pas la seule.

98. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On pose E = $\{M \in \mathrm{M}_3(\mathrm{R})$; $MJ = JM\}$.

a) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow MJ = JM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = d = h \\ b = f = g \\ a = e = i \end{cases}.$$

D'où le résultat.

b) $M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow$ il existe a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{il existe } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M = aI_3 + bJ + cJ^2$$

Suites de matrices

99. 1. $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

2. $U_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} -41 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

100. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = A^n U_0$. On démontre ce résultat par récurrence de la même manière que les suites géométriques réelles. Ici aucune difficulté technique.

2. a) On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 21 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On en déduit $U_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $U_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ 41 \end{pmatrix}$.

101. Soit $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.

1. Si $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = AC + B \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - y = 2 \\ -2x + 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{18} \\ y = \dfrac{2}{9} \end{cases}$

2. $V_n = U_n - C$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - C = A(U_n - C) = AV_n.$$

b) On mène le raisonnement par récurrence comme dans l'exercice précédent.

3. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{0{,}4^n}{3} + 2\dfrac{0{,}1^n}{3} & \dfrac{0{,}4^n}{3} - \dfrac{0{,}1^n}{3} \\ 2\dfrac{0{,}4^n}{3} - 2\dfrac{0{,}1^n}{3} & 2\dfrac{0{,}4^n}{3} + \dfrac{0{,}1^n}{3} \end{pmatrix}$$

Initialisation : pour $n = 0$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^0.$$

Hérédité : supposons l'égalité vraie pour un certain entier quelconque.

Alors $A^{n+1} = AA^n$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{0{,}4^n}{3} + 2\dfrac{0{,}1^n}{3} & \dfrac{0{,}4^n}{3} - \dfrac{0{,}1^n}{3} \\ 2\dfrac{0{,}4^n}{3} - 2\dfrac{0{,}1^n}{3} & 2\dfrac{0{,}4^n}{3} + \dfrac{0{,}1^n}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{0{,}4^{n+1}}{3} + 2\dfrac{0{,}1^{n+1}}{3} & \dfrac{0{,}4^{n+1}}{3} - \dfrac{0{,}1^{n+1}}{3} \\ 2\dfrac{0{,}4^{n+1}}{3} - 2\dfrac{0{,}1^{n+1}}{3} & 2\dfrac{0{,}4^{n+1}}{3} + \dfrac{0{,}1^{n+1}}{3} \end{pmatrix}.$$

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire pour tout entier naturel. Ainsi, elle est vraie pour tout entier naturel.

4. On calcule $V_0 = V_0 - C = \begin{pmatrix} -\dfrac{8}{45} \\ -\dfrac{1}{45} \end{pmatrix}$.

Ainsi $V_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{0{,}4^n}{15} - \dfrac{0{,}1^n}{9} \\ -2\dfrac{0{,}4^n}{15} + \dfrac{0{,}1^n}{9} \end{pmatrix}$.

Transformations géométriques

102. a) A′ = (5 ; 4) **b)** $B' = \left(\frac{1}{10} ; 0\right)$

c) $C' = (-1 ; \sqrt{3})$ **d)** $D' = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} ; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

103. On peut calculer les valeurs exactes de

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$.

On obtient :

$$A'\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}} ; \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}\right)$$

$$B'\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}} ; \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}\right)$$

104. On note v l'image de u :

$$v = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \end{pmatrix}.$$

105. On cherche θ réel tel que :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On résout de système pour obtenir :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

106. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = PX = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur Y ne garde que la première composante du vecteur X. La matrice P correspond à une projection orthogonale sur l'axe des abscisses.

2. a) Si on projette le vecteur X sur l'axe des ordonnées, on obtient le vecteur $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

b) La matrice correspondant à cette projection est $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

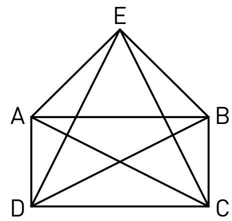
3. La matrice correspondant à une projection orthogonale sur l'axe des abscisses est donnée par $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Graphes

107. 1. a) Chaque équipe devra disputer 3 jeux.

b) 6 jeux seront disputés ce week-end

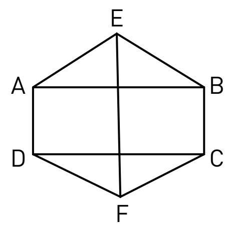
2. a)



b) 10 jeux seront disputés.

3. Les deux graphes sont complets

4. a)



b)Ce graphe n'est pas complet

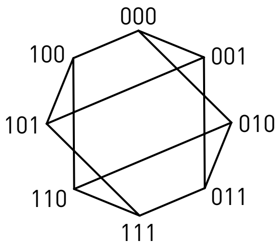
c) 9 jeux seront disputés.

5. 4 jeux sont possibles et il y aura au total 14 affrontements le week-end.

108. 1. Les mots en langage binaire se dénombrent par 2^n. Il s'agit de la même modélisation que celle des schémas de Bernoulli.

2. Il y a 8 mots de longueur 3 : 000 ; 001 ; 010 ; 011 ;111 ; 110 ; 101 ; 100.

3.

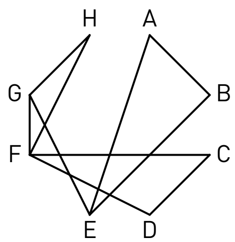


4. Les mots qui ne seront pas confondus sont ceux qui ne sont pas adjacents dans le graphe.

109. 1. On note pour plus de commodité les prénoms par des lettres comme dans le tableau suivant :

Erwan	A
Thibault	B
Jordan	C
Gwendoline	D
Alexis	E
Elodie	F
Alim	G
Aya	H

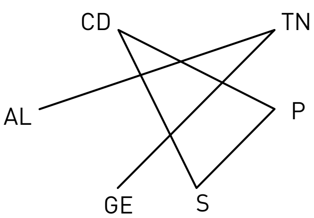
Chaque arête modélise une incompatibilité d'humeur.



2. On peut construire le groupe AHC, soit donc Erwan, Aya et Jordan.

3. On peut construire le groupe BDH, soit donc Thibault, Gwendoline et Aya.

110.



Chaque arête modélise le fait que deux options sont choisies simultanément par au moins un étudiant. On constate que l'on peut effectuer jusqu'à deux options dans une journée.

111. On considère la matrice d'adjacence du graphe :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On calcule M^4 et on trouve $m_{85}^{(4)} = 6$.

2. On calcule M^5 et on trouve $m_{12}^{(5)} = 29$.

Exercices bilan p. 190

112. Éviter tout débordement

1. On exprime chacune des suites dans un système couplé puis on écrit ce système sous forme matricielle. On obtient en traduisant l'énoncé :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{3}{4}b_n + 2 \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + 3 \end{cases}$$

Ce qui nous fournit l'égalité matricielle :

$$U_{n+1} = MU_n + C.$$

2. a) On a $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc P est inversible et est son propre inverse.

b) On calcule $PMP = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

c) Initialisation : pour $n = 0$, $M^0 = I_2 = P^2 = PD^0P$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que, $M^n = PD^nP$.

Alors, $M^{n+1} = MM^n = PDPPD^nP = PD^{n+1}P$.

Conclusion : l'égalité est vraie au premier rang et est héréditaire pour tout entier naturel. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel.

d) On a :

$$M^n = P\begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 0{,}25^n \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 30{,}5^n - 30{,}25^n \\ 0 & 0{,}25^n \end{pmatrix}.$$

3. On calcule $MX + C = X$.

4. a) Pour tout entier naturel $V_{n+1} = U_{n+1} - X = MU_n + C - MX - C = MV_n$.

b) On a : $U_n = V_n + X = M^n V_0 + X =$

$$M^n\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-180{,}5^n+90{,}25^n+10\\-30{,}25^n+4\end{pmatrix}.$$

5. a) La suite $(0{,}25^n)$ est décroissante car $0 < 0{,}25 < 1$. Ainsi la suite $(-3 \times 0{,}25^n)$ est croissante d'où la croissance de (b_n). De plus $-3 \times 0{,}25^n + 4 < 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

b) $0 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 10$.

c) Les deux suites sont croissantes, ainsi leurs termes sont strictement inférieurs à leurs limites. Le bassin A doit contenir au moins 1000 L et le bassin B au moins 400 L.

113. Randonnée en montagne

1. a) On obtient le tableau :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	4	4	4	4	4	4	4	3

b) Le graphe admet donc $\dfrac{38}{2} = 19$ arêtes.

2. Un itinéraire de D à A peut être 1-3-2-4-5-6-8-7-9-10.

3. Les sommets ne sont pas tous de degré pair, on ne peut donc pas trouver de chemin allant de D à A en utilisant une unique fois toutes les arêtes.

4. Si l'on note M la matrice d'adjacence, on obtient avec la calculatrice $m_{110}^{(5)} = 31$. Citons alors l'un de ces chemins allant de D vers A en cinq sentiers : 1-2-5-7-8-10. Ce chemin passe par le Pic Rouge.

114. Circuit touristique

1. On a : $M = \begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$

2. Avec la calculatrice, on obtient $m_{42}^{(5)} = 5$ qui sont : D-C-B-D-C-B ; D-C-D-E-A-B ; D-E-D-E-A-B ; D-E-A-E-A-B ; D-E-A-B-C-B.

3. $m_{11}^{(5)} = 1$, il s'agit de A-B-C-D-E-A et c'est bien un cycle. $m_{22}^{(5)} = 5$ et parmi ceux-ci il sont deux cycles distincts.

Préparer le BAC Je me teste p. 70

115. D **116.** B **117.** D

118. C **119.** B

Préparer le BAC Je révise p. 71

120. Matrices

1. A est de dimension 2×3.

2. $a_{12} = 2$

3. $A^t = \begin{pmatrix}3&-2\\2&4\\-1&6\end{pmatrix}$

121. Calcul matriciel

a) Produit non défini. **b)** $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-2&5&2\\3&3&-3\\1&4&-1\end{pmatrix}$

122. Matrice inversible

1. c)

2. a) $\begin{pmatrix}-5&16&10\\6&-18&-11\\1&-3&-2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}\frac{1}{12}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{12}\\\frac{1}{2}&-3&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{12}&\frac{1}{2}&\frac{1}{12}\end{pmatrix}$

3. a)

5. a) $\det(A) = -13$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-2}{13} \\ \frac{-4}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix}$.

b) $\det(A) = 0$

c) $\det(A) = 11$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$.

d) $\det(A) = -9$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

123. Systèmes d'équations

1. b)

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

124. Graphes

1. a)

2. b)

125. Suites de matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

2. $a_1 = 16$.

126. Transformations géométriques

1. $(-2\ ;\ -4)$

2. $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

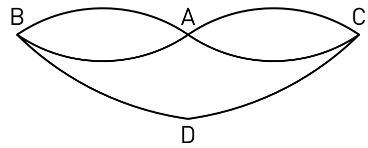
Exercices vers le supérieur

p. 194-197

127. Les sept ponts de Königsberg

A. Étude d'exemples

1.



2. a) On a B-D-A-C-B-E-A-C pour le graphe 1 et D-E-C-D-B-E-A-B-C pour le graphe 2.

b) Un cycle peut être donné par E-D-A-C-E-B-C-D-B-A-E.

c) On trouve une chaîne eulérienne : mais pas de cycle eulérien.

3. a) On obtient pour chaque graphe :

A	B	C	D	E
2	3	3	2	2

A	B	C	D	E
4	4	4	4	4

A	B	C	D	E
3	4	3	4	4

A	B	C	D	E
3	4	4	3	2

b) Lorsqu'il n'y a que des degrés pairs, on peut trouver un cycle eulérien. Lorsque l'on a deux sommets de degrés impairs, on peut trouver une chaîne eulérienne.

B. Théorème et conclusion

1. Le degré de s est donné par $s_0 + s_E$.

2. On parcourt toutes les arêtes une unique fois. Si le sommet n'est pas le départ, alors à chaque fois que l'on vient vers s, il faut repartir, ainsi $s_0 = s_E$. Si le sommet est celui de départ, on garde le premier départ et la dernière arrivée puis on reprend le même point que précédemment.

Ainsi $\deg(s) = s_0 + s_E = 2s_0$ est donc un nombre pair.

3. a) En enlevant toutes les arêtes de C, on enlève 2 au degré de chaque sommet de C.

b) Si les degrés étaient tous nuls alors, par connexité de G, on aurait G = C donc C serait eulérien. Absurde par hypothèse.

c) Soit s tel que son degré soit non nul. Alors il est pair et il admet un cycle. On concatène les deux cycles pour obtenir un cycle de longueur supérieure à C.

d) Par raisonnement par l'absurde, il existe donc un cycle eulérien.

4. Tous les sommets du graphe de Königsberg sont de degrés impairs, il n'existe pas de chaîne eulérienne dans ce graphe, le problème des ponts n'admet donc pas de solution.

128. Suites et matrices

Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b+c}{3} \\ y = \dfrac{-a+2b-c}{3} \\ z = \dfrac{-a-b+2c}{3} \end{cases}$

Ainsi P est inversible, d'inverse

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On calcule :

$$P^{-1}AP = D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On a $A = PDP^{-1}$et on démontre que :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{32^n}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & {}^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

3. a) On vérifie que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.

b) D'après la question précédente, on obtient $U_n = A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. Ainsi les trois suites convergent vers $\frac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0)$.

129. Diagonaliser une matrice

A. Un premier exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. On pose $f(x) = \det(A - xI_2)$.

a) Il nous est possible de déterminer une expression de cette expression algébrique :

$$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 4-x \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $f(x) = (1 - x)(4 - x) + 2$ qui est bien l'expression d'une fonction polynômiale du second degré.

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Ainsi, on note $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

2. a) Les deux racines $\lambda_1$et $\lambda_2$sont donc telles que $A - \lambda_1 I_2$ et $A - \lambda_2 I_2$ne sont pas inversibles. Ainsi les systèmes $(A - \lambda_1 I_2)X = 0$ et $(A - \lambda_2 I_2)X = 0$ n'admettent pas d'unique solution. Or la matrice colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ étant solution, cela signifie qu'il existe plusieurs solutions pour chaque système. Si l'on note V une solution pour le premier système, alors tout multiple de V est également solution. On dit que la droite vectorielle $\{kV ; k \in \mathbb{R}\}$ est solution du système. Le même raisonnement peut être tenu pour le deuxième système également. Ces deux systèmes ont donc une infinité de solutions.

b) Il est même facile dans ce cas de déterminer toutes les solutions de ces deux systèmes :

$$(A - \lambda_1 I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + 2y = 0.$$

Nous obtenons une équation cartésienne de droite, tout élément $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de cette droite est ainsi solution du système. On prendra ici $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$(A - \lambda_2 I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + y = 0.$$

Nous obtenons une équation cartésienne de droite. On prendra ici $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Il convient de construire la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\det(P) = 1$ainsi la matrice P est inversible et on a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) On calcule $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Une récurrence rapide nous permet d'obtenir le résultat demandé. L'hérédité utilisera le calcul :

$$D^{n+1} = D^nD = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

5. On a :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 23^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 23^n \end{pmatrix}.$$

B. Un deuxième exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6. a) On écrit le système :

$$(A - \lambda_1 I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

b) Il y a un nombre infini de solutions à ce système : c'est le plan tout entier d'équation cartésienne $x + y + z = 0$ qui est solution.

c) Il s'agit de trouver deux vecteurs non colinéaires et dont les coordonnées par exemple vérifient l'équation du plan. On choisit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : faire introduire un 0 dans les vecteurs permet de s'assurer immédiatement de leur non colinéarité et simplifiera la matrice que l'on va construire à partir de ces deux éléments.

7. a) On écrit le système :

$$(A - \lambda_2 I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Ce système correspond à l'intersection de deux plans non parallèles et non confondus ; donc à une droite : ensemble solution de ce système.

b) Il s'agit de déterminer un vecteur directeur de cette droite. On peut par exemple déterminer un système paramétrique de cette droite :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de cette droite est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. On forme la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) On demande ici de démontrer l'inversibilité de cette matrice. Pour ce faire, on résout à la main le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = x' \\ -y + z = y' \\ -x + z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' + y' - 2z'}{3} \\ y = \dfrac{x' - 2y' + z'}{3} \\ z = \dfrac{x' + y' + z'}{3} \end{cases}$$

La matrice P est donc inversible avec :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On effectue le calcul :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

130. Triangulariser une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On pose $f(x) = \det(A - xI_2)$.

a) Il nous est possible de déterminer une expression de cette expression algébrique :

$$A - xI_2 = \begin{pmatrix} -1-x & -1 \\ 4 & 3-x \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $f(x) = (-1 - x)(3 - x) + 4$ qui est bien l'expression d'une fonction polynômiale du second degré.

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. L'équation $f(x) = 0$ admet une racine double égale à 1.

2. La matrice $A - xI_2$ avec $x = 1$ n'est donc pas inversible. Le système $(A - I_2)X = 0$ n'admet donc pas d'unique solution. Si l'on considère une solution non nulle à ce système, tout multiple de cette solution reste solution. Le système admet donc une infinité de solutions.

On écrit le système :

$$(A-I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y = 0.$$

Une solution peut alors être donnée par $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. a) $\det(P) = -1 \neq 0$ donc la matrice P est inversible. On a alors :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On calcule :

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On effectue les deux calculs :

$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On démontre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice T^n est égale à $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette démonstration se fait par récurrence selon la même trame que celle de l'exercice 92.

5. Finalement, on obtient :

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2n & -n \\ 4n & 2n+1 \end{pmatrix}.$$

131. Quaternions

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} ; (z_1 ; z_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

1. Soit M une matrice de H. Il existe donc un couple de complexes $(z_1 ; z_2)$ tels que $M = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$. On peut écrire $z_1 = a + id$ et $z_2 = b + ic$ pour a, b, c, d des réels. Ainsi, l'on a :

$$M = \begin{pmatrix} a+id & -b+ic \\ b+ic & a-id \end{pmatrix} = aI + bJ + cK + dL.$$

2. Soit M et M' deux matrices de H. D'après la question précédente, il existe des réels a,b,c,d et a', b', c', d' tels que $M = aI + bJ + cK + dL$

et $M' = a'I + b'J + c'K + d'L$.

On effectue le produit :

$$MM' = (aI + bJ + cK + dL)(a'I + b'J + c'K + d'L).$$

Il est nécessaire de simplifier :

$J^2 = K^2 = L^2 = -I$; $KJ = L$; $JK = -L$; $LJ = -K$; $JL = K$; $KL = -J$; $LK = J$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} MM' = & (aa' - bb' - cc' - dd')I \\ & + (ab' + ba' - cd' + dc')J \\ & + (ac' + ca' + bd' - db')K \\ & + (ad' - bc' + cb' + da')L. \end{aligned}$$

Tous ces coefficients sont réels, ainsi MM' est donc un élément de H.

3. On a pu observer que $KJ \neq JK$ donc le produit matriciel n'est pas commutatif. Le prix à payer d'une structure algébrique sur un espace de dimension 4 est la perte de la commutativité. On doit cette construction à Hamilton.

132. Ensemble des nombres complexes

1. Soit $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$i^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; i^{-1} = -i.$$

2. On note $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) $i \in \mathbb{C}$ avec $a = 0$ et $b = 1$; $I_2 \in \mathbb{C}$ avec $a = 1$ et $b = 0$.

b) Soit $Z \in \mathbb{C}$. Il existe un couple de réels :

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Soit $Z, Z' \in \mathbb{C}$. Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont mêmes coefficients. Ainsi les deux matrices sont égales si les couples de réels sont tous deux identiques.

b) Soit $Z, Z' \in \mathbb{C}^*$. On peut écrire :

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\ Z' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}.$$

On effectue le produit matriciel :

$$ZZ' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa' - bb' & -a'b - ab' \\ a'b + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix} = Z'Z.$$

c) Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ avec $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. On calcule le déterminant de cette matrice :

$$\det(Z) = a^2 + b^2 \neq 0.$$

Z est donc inversible avec $Z^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Remarque : on pourra effectuer tous les parallèles possibles avec les règles algébriques démontrées dans les premiers chapitres.

133. Équations différentielles

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_3'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

1. On exprime donc le système sous forme matriciel :

$$X' = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

2.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) On demande ici de justifier l'inversibilité de cette matrice. Pour ce faire, on résout à la main le système suivant :

$$\begin{cases} x + 4y + 2z = x' \\ x + 3y - 3z = y' \\ x - 2y + 2z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y' + 3z'}{5} \\ y = \dfrac{x' - z'}{6} \\ z = \dfrac{5x' - 6y' + z'}{30} \end{cases}$$

La matrice P est donc inversible avec :

$$P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On effectue le calcul :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. $Y = P^{-1}X$

a) On utilise ici la linéarité de la dérivation :

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = DP^{-1}X = DY.$$

b) On écrit $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$. On obtient alors :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \\ y_3'(t) = 4y_3(t) \end{cases}$$

On résout chacune des équations différentielles :

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{t} \\ \mu e^{2t} \\ \nu e^{4t} \end{pmatrix}$$

avec λ, μ, ν des constantes réelles.

4. On utilise alors $X = PY$ pour obtenir :

$$\begin{cases} x_1(t) = \lambda e^t + 4\mu e^{2t} + 2\nu e^{4t} \\ x_2(t) = \lambda e^t + 3\mu e^{2t} - 3\nu e^{4t} \\ x_3(t) = \lambda e^t - 2\mu e^{2t} + 2\nu e^{4t} \end{cases}$$

134. Matrices magiques

1. La somme des coefficients de chaque ligne est égale à la somme des coefficients de chaque colonne égale à 0.

2. On peut donner par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On peut commencer à traduire la définition. Une matrice $A = (a_{ij})$ est magique si pour tous i,j on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \text{cste}.$$

Affirmation 1 : Vraie. Soit A et B deux matrices magiques. On écrit $A + B = (s_{ij})$ où $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Pour tous i, j on a :

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + b_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} s_{kj}.$$

Affirmation 2. Vraie. Soit A et B deux matrices magiques. On écrit $AB = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Pour tous i, j on a :

$$\sum_{l=1}^{n} c_{il} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{l=1}^{n} b_{kl} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\sum_{l=1}^{n} b_{lk} = \sum_{l=1}^{n} c_{li}.$$

135. Sous-groupe de matrice (1)

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Soit donc deux éléments de E :

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} a'+b' & b' \\ -b' & a'-b' \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$MM' = \begin{pmatrix} A+B & B \\ -B & A-B \end{pmatrix} \text{ avec } A = aa' \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$B = ab' + a'b \in \mathbb{R}$.

2. Soit $M \in E$. On calcule le déterminant de $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$: $\det(M) = a^2$. Ainsi : M est inversible si, et seulement si, $\det(M) \neq 0$ si, et seulement si, $a \neq 0$.

136. Sous-groupe de matrice (2)

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Une matrice de E est une matrice de rotation du plan autour de l'origine et d'angle a.

2. Soit $R(a)$, $R(b) \in$ E. On a :

$$R(a)R(b) = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $R(a)\,R(b) \in E$. Il s'agit de la composée de la rotation d'angle a avec la rotation d'angle b : c'est-à-dire la rotation d'angle $a + b$ du plan autour de l'origine.

3. On réutilise la question précédente. On remarque que :

$$I_2 = R(0) = R(a-a) = R(a)R(-a) = R(-a)R(a).$$

Ainsi $R(a)^{-1} = R(-a)$. L'inverse d'une rotation d'angle a et la rotation d'angle $-a$.

137. Interpolation polynomiale

A. Un cas trivial

Deux points permettent de définir une droite ; on est confronté à une fonction polynômiale de degré 0 ou 1 ou à une fonction non définie. On a, en notant les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$:

si $y_A = y_B$, la fonction notée f est constante égale à y_A ;

si $x_A = x_B$, la fonction n'est pas définie.

Sinon, on a : $f(x) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \dfrac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}$.

B. Un premier exemple

On considère les trois points $(-1 ; 2)$; $(1 ; -2)$ et $(4 ; 7)$ qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Un point appartient à la courbe d'une fonction si, et seulement si, ses coordonnées vérifient son équation. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = 7 \end{cases}$$

2. On peut écrire ce système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. A la calculatrice,

on obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{15} \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On obtient la fonction définie par

$$f(x) = x^2 - 2x - 1.$$

L'inversibilité de la matrice nous garantit l'unicité de la solution donc l'unicité de la fonction polynomiale de degré 2.

C. Vers un cas général

On pose $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$.

1. On écrit le système :

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_0 = y_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_0 = y_n \end{cases}$$

Et l'on peut l'écrire sous la forme $V\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = Y$ avec :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^{n-1} & x_1^n \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}.$$

2. À la condition où la matrice de Vandermonde est inversible, le système admet une unique solution $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et donc permet d'obtenir une unique fonction polynomiale de degré n.

D. Un deuxième exemple

On considère les quatre points $(-2\ ;\ 10)$; $(0\ ;\ 2)$; $(1\ ;\ 4)$ et $(3\ ;\ 12)$ qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Les coefficients de cette fonction vérifient le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

On inverse ce système, avec la calculatrice, on obtient la matrice inverse et ensuite :

$$\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{8}{21} \\ \frac{26}{15} \\ -\frac{4}{15} \end{pmatrix}.$$

Finalement $f(x) = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{26}{15}x^2 + \frac{8}{15}x + 2$.

138. Sous-groupe de matrice (3)

Soit $E = \left\{\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Soit $M(a)$, $M(b) \in E$. On a :

$$M(a)M(b) = \begin{pmatrix} e^{a+b} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Le produit de deux matrices de E est une matrice de la forme $M(A)$, avec $A \in \mathbb{R}$ donc un élément de E. On a d'après la question précédente :

$$M(a)M(b) = M(a + b).$$

3. On remarque que $I_3 = M(0) = M(a - a) = M(a)M(-a)$. Ainsi toute matrice $M(a)$ de E est inversible d'inverse $M(-a)$.

4. On peut émettre une conjecture avec des premiers calculs de puissance ou réutiliser les questions précédentes.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$M(a)^n = M(na).$$

Initialisation : pour $n = 1$ on a :

$$M(a)^1 = M(a) = M(1 \times a).$$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n non nul tel que l'égalité soit vraie au rang n. Calculons :

$M(a)^{n+1} = M(a)^n M(a) = M(na)M(a)$ **(HR)**

$\quad = M(na + a) = M((n + 1)a)$.

L'égalité reste vraie au rang suivant.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 1$. De plus, si on la suppose vraie pour un entier non nul quelconque, elle le reste pour l'entier suivant. Ainsi l'égalité est vraie pour tout entier naturel.

139. Espace vectoriel matriciel

Soit E = $\{M \in M_2(R)\ ;\ AM = MB\}$.

1. Soit M_1, $M_2 \in$ E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) On a trivialement $A \times 0 = 0 = 0 \times B$. Donc la matrice nulle appartient à cet ensemble.

b) $A(\lambda M_1) = \lambda(AM_1)$. Or $M_1 \in E$ donc $AM_1 = M_1B$.

D'où $A(\lambda M_1) = \lambda(M_1B) = (\lambda M_1)B$. Ainsi $\lambda M_1 \in$ E.

c) $A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2$. Or M_1, $M_2 \in$ E

donc $AM_1 = M_1 B$ et $AM_2 = M_2 B$. Ainsi $A(M_1 + M_2) = M_1 B + M_2 B = (M_1 + M_2)B$. Donc $M_1 + M_2 \in$ E.

On a montré que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(R)$.

2. a) On calcule séparément les deux produits matriciels :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux produits étant égaux, la matrice appartient bien à E.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$M \in E \Leftrightarrow AM = MB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow c = 0\ ;\ b = d.$

AC est la matrice nulle, elle appartient à E.

140. Équation matricielle de degré 2.

Soit l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M \in M_2(R)$, $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) On a : $MD = M^3 = DM$.

b) Si $MD = DM$, alors $MD = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix} = DM$, alors $b = c = 0$.

c) Si $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$.

Alors, $a^2 = 2$ et $d^2 = 1$. Les quatre matrices solutions sont donc :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) On calcule le déterminant de la matrice :

$\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible, avec :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) On effectue le calcul PDP^{-1} à la main.

c) On a $X^2 = A \Leftrightarrow X^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}X^2P = D$

$\Leftrightarrow (P^{-1}XP)^2 = D$. On pose $P^{-1}XP = M$.

d) Les solutions de l'équation $X^2 = A$ sont de la forme PMP^{-1} où $M^2 = D$. Les quatre solutions de l'équation $X^2 = A$ sont donc :

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{2}-2 & -3\sqrt{2}+6 \\ \sqrt{2}-1 & 2\sqrt{2}+3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}-2 & 3\sqrt{2}+6 \\ -\sqrt{2}+1 & -2\sqrt{2}-3 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} -3\sqrt{2}-2 & 3\sqrt{2}-6 \\ -\sqrt{2}-1 & -2\sqrt{2}+3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}-2 & -3\sqrt{2}+6 \\ \sqrt{2}+1 & 2\sqrt{2}-3 \end{pmatrix}.$$

e) $\Sigma = \begin{pmatrix} -8 & 24 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\pi = \begin{pmatrix} -158-45\sqrt{2} & 324-945\sqrt{2} \\ 95 & 127+45\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Plusieurs produits sont possibles bien entendu.

141. Matrices nilpotentes

On pose $E(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. On effectue le calcul en partant du membre de droite : $E(x)E(y) = \left(I + xA + \frac{x^2}{2}A^2\right)\left(I + yA + \frac{y^2}{2}A^2\right)$.

Dans le développement, toutes les puissances de A strictement supérieures à 2 s'annulent de par la nilpotence de la matrice.

On obtient $E(x)E(y) = \left(I + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2\right)$

$= E(x+y)$.

2. On démontre cette égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la même trame que la récurrence de l'exercice 138 avec l'égalité précédente.

3. On remarque que $E(0) = I$. Ainsi :

$$I = E(x - x) = E(x)E(-x).$$

La matrice $E(x)$est inversible pour tout réel x avec $E(x)^{-1} = E(-x)$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On détermine la matrice exponentielle de la matrice A :

$$E(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

142. Matrices antisymétriques

1. a) La transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne.

b) X est une matrice colonne de $M_{n,1}(R)$. Le produit AX est une matrice colonne à n lignes. La matrice X^t est une matrice ligne à n colonnes. Le produit X^tAX est donc licite, le membre de gauche a même nombre de colonnes que le nombre de lignes du membre de droite. Le produit donne un nombre réel.

2. On peut raisonner par équivalence :

$A^t = -A \Leftrightarrow A^t + A = 0 \Leftrightarrow X^tA^tX + X^tAX = 0$
$\Leftrightarrow (X^tAX)^t + X^tAX = 0$.

D'après la question précédente, X^tAX est un réel, il est donc égal à sa transposée. Les deux nombres dont la somme vaut 0 sont donc égaux, on en déduit le résultat.

On utilise ici le résultat facilement démontrable : $(AB)^t = B^tA^t$.

143. Trace de matrice

1. a) $Tr(A) = 2 - 7 = -5$.

b) $Tr(A) = -1 + 4 + 3 = 6$.

c) Pour tout entier naturel n, on a$Tr(I_n) = n$.

2. $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) On a :

$$A + B = (s_{ij})$$

avecs_{ij}=a_{ij}+b_{ij}. Ainsi

$$Tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} s_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= Tr(A) + Tr(B).$$

b) On a : $AB = (c_{ij})$

avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Ainsi

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} c_{k\,k} = Tr(BA).$$

3. Supposons qu'il existe deux matrices A, B telles que $AB - BA = I_n$.

Alors $Tr(AB - BA) = n$. Or, d'après les questions précédentes, $Tr(AB - BA) = 0$. Si n est non nul, ceci est impossible d'où le résultat.

Travaux pratiques p. 198-199

TP1. Modèle proie-prédateur

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Découvrir le modèle de Lokta-Volterra. L'étude est ici faite au travers d'une évolution couplée de deux suites récurrentes. Le phénomène à constater avec le tableur est la périodicité des effectifs des deux populations.

A. Modélisation sur tableur

Bilan : on constate dans les deux graphiques que la population des proies ou bien celle des prédateurs s'éloignent du point d'équilibre, que les évolutions des populations sont périodiques, légèrement décalée par rapport au temps.

On peut le comprendre : lorsque la population des proies augmente, les prédateurs ont davantage de nourriture donc après quelque temps, la population augmente. Plus il y a de prédateurs, plus les proies diminuent, et ensuite, cette population décroissant, les prédateurs ont moins de nourriture donc leur population décroit également ; d'où le phénomène cyclique.

B. Expression des suites (u_n) et (v_n)

1. On obtient le couple $(U\,,V) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

2. Soit n un entier naturel :

$$t_{n+1} = u_{n+1} - U = (a + 1 - bv_n)u_n - \frac{c}{d}$$

$$= u_n - \frac{c}{d} + au_n - bv_nu_n \;;$$

$$s_{n+1} = v_n - \frac{a}{b} - cv_n + dv_nu_n.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n - \dfrac{bc}{d}s_n - bt_ns_n \\ s_{n+1} = s_n + \dfrac{ad}{b}t_n - dt_ns_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

3. On obtient :

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{bc}{d} \\ 1 & \dfrac{ad}{b} \end{pmatrix} T_n \;;$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{bc}{d} \\ 1 & \dfrac{ad}{b} \end{pmatrix} X_n + \begin{pmatrix} \dfrac{ac}{d} \\ \dfrac{a^2(1-d)}{b^2} - \dfrac{c}{d} \end{pmatrix}.$$

TP2. Gestion de stocks

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Utiliser le calcul matriciel fourni par le tableur pour comprendre les différents niveaux du calcul dans la gestion de stock.

1. a) La matrice C_j se calcule comme un produit matriciel afin d'obtenir le coût des matières premières auquel on ajoute le coût de main d'oeuvre. On a $C_j = C_mQ_m + C_0$.

b) On effectue un produit matriciel du coût unitaire par jeux avec la quantité de jeux. On a $C = C_jQ_c$.

c) La recette s'obtient par le produit matriciel du prix de vente unitaire par la quantité de jeux. On a $R = VQ_c$.

2. Le Dicomaths p. 246 permet d'obtenir toutes les données pour effectuer les calculs matriciels sur le tableur.

d) Chez le fournisseur B, le bénéfice est de 7689,1. Pour le fournisseur A, il est de 7613,3. Ce fournisseur est donc à privilégier.

3. a) Le fournisseur A est à choisir dans ce cas.

b) Le fournisseur B est à choisir dans ce cas.

CHAPITRE 7 Chaînes de Markov

Manuel p. 200-235

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Le chapitre s'appuie tout d'abord sur les cours de probabilité de première et de terminale. Il utilise les définitions de variables aléatoires discrètes, probabilités conditionnelles et repose principalement sur le théorème de la probabilité totale.

La loi binomiale doit avoir été traitée en classe de spécialité afin de comprendre l'intérêt réel de ce chapitre et comprendre qu'elle ne peut pas couvrir tous les cas de modélisations, même simplifiées. La question est de savoir si l'on peut abaisser les hypothèses et considérer des expériences aléatoires, non plus indépendantes, mais qui dépendent les unes des autres, dans une faible mesure. Peut-on alors obtenir des résultats de prévisions sur les phénomènes aléatoires, au même titre que la loi des grands nombres dans le cas de répétitions indépendantes ?

Ce chapitre permet d'apporter des réponses à cette question, en utilisant ce qui est maintenant appelé « chaîne de Markov » et qui fut introduit par le mathématicien russe Andrei Markov au tout début du XX^{e} siècle. Ces chaînes modélisent des phénomènes aléatoires dans lesquels l'instant futur peut n'être décrit que par le seul instant présent.

Markov appliqua en particulier ces chaînes dans l'étude de la succession des lettres dans un roman d'Alexandre Pouchkine (voir exercice 22).

De nombreuses modélisations sont alors possibles : séquençage de l'ADN, logiciel d'écriture, intelligence artificielle, évolution de population, épidémiologie…

Ce chapitre propose une introduction aux chaînes de Markov dans le but de répondre à de premières questions concernant les différents états que peut prendre un système muni de conditions initiales : Quelles sont les lois de probabilités qui régissent ce système? Ces lois convergent-elles?

Le cours et la progression dans les exercices s'articulent autour de ces questions et des éléments introduits dans le chapitre précédent.

Si les transitions des états d'un système ne dépendent pas de l'instant donné, alors l'algèbre linéaire se révèlera un outil fondamental dans l'étude des chaînes de Markov. En lien avec le chapitre précédent ce cas sera privilégié dans ce chapitre et offre un développement particulier à l'algèbre linéaire.

Le choix est fait de commencer par travailler sur les déplacements dans un graphe, en lien avec le chapitre 6. On s'intéresse à l'algorithme de Dijkstra-Moore afin de déterminer le plus court chemin dans un graphe pondéré.

On introduit les chaînes de Markov avec un soin particulier porté sur la modélisation probabiliste. Les exercices proposés vont dans ce sens, en laissant une réelle liberté sur la modélisation et sa construction. De même les exercices soulignent l'importance de la distribution initiale dans l'étude des distributions et de leur évolution.

Objectifs

- → Appliquer l'algorithme de Dijkstra-Moore.
- → Justifier le caractère markovien.
- → Déterminer une matrice de transition.
- → Manipuler un graphe probabiliste.
- → Déterminer une probabilité.
- → Déterminer une distribution invariante.
- → Étudier une chaîne de Markov.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de référence

- Raphaël Lachieze-Rey, Chaînes de Markov et application, Université Paris-Descartes, 2018.
- Benaïm Michel, El Karoui Nicole, Promenade aléatoire, Ed de l'école Polytechnique

Site internet

- http://www.proba.jussieu.fr/cours/dea/telehtml/telehtml.html
- https://www.apmep.fr/IMG/pdf/P2_34_Compte_Rendu.pdf

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 201

1. Effectuer un calcul matriciel

1. On a les résultats suivants :

$A+B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $A-B=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ -3 & -3\end{pmatrix}$;

$2A-3B=\begin{pmatrix}-8 & 21\\ -8 & -9\end{pmatrix}$.

2. On a : $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -12\end{pmatrix}$;

$(3 \quad -2 \quad 4)\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}=(13 \quad 12 \quad 22)$;

$\begin{pmatrix}-1 & 10\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & \frac{22}{3}\\ \frac{13}{2} & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}$.

2. Résoudre un système

a) Le système est équivalent à :

$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ 36\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ -1\end{pmatrix}$.

b) Le système est équivalent à :

$\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ -3 & 6 & -2\\ 4 & 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 11\\ 18\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0,5\end{pmatrix}$.

3. Calculer une probabilité

2. $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = \frac{1}{6}$ et

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{13}{18}$. Cette dernière formule s'obtient par la formule de la probabilité totale.

3. Finalement $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{13}$.

4. Appliquer la formule de la probabilité totale

1. On a, d'après les hypothèses :

$P(M \cap F) = 0,48 \times 0,02 = 0,0096$;

$P(\bar{F} \cap M) = 0,52 \times 0,01 = 0,0052$.

2. Par définition, l'événement complémentaire vérifie : $\bar{F} \cap F = \varnothing$; $\bar{F} \cup F = \Omega$.

Ainsi, F *et* $\bar{F}$ *fo*rment un système complet d'événements.

3. Finalement, d'après la formule de la probabilité totale, on obtient : $P(M) = P(M \cap F) + P(\bar{F} \cap M) = 0,048$.

5. Manipuler des graphes orientés

1. a) On a un graphe d'ordre 6 dont les degrés de chaque sommet sont, dans l'ordre alphabétique : 3 ; 6 ; 2 ; 4 ; 4 ; 3.

b) On obtient $\frac{22}{2} = 11$ arcs dans ce graphe.

2. a) Un chemin de longueur 4 reliant A à F peut être donné par : A-E-B-A-F.

Un circuit de longueur 7 peut être donné par : A-F-E-D-B-B-B-A.

3. La matrice d'adjacence est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Activités p. 202-203

1 Parcourir des chemins dans un graphe pondéré

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** En lien avec le chapitre précédent, le choix est fait d'étudier les différents déplacements dans un graphe. On introduit ici les graphes pondérés et des chemins pondérés. Parmi ces chemins d'un point à un autre, nous nous intéressons au plus court d'entre eux en terme de pondération.

A. Graphe pondéré

1. Les temps de transmission correspondent à chaque arête du graphe, on les place alors au-dessus de ces arêtes afin de les pondérer.

2. a) Considérons tous les chemins possibles et notons pour chacun le temps total de transmission :

P-I-NY-C-D-S (18 ms)

P-I-NY-C-D-LA-S (20 ms)

P-I-NY-C-M-LA-S (26 ms)

P-I-NY-C-M-LA-D-S (26 ms)

P-M-LA-S (20 ms)

P-M-LA-D-S (20 ms)

P-M-C-D-S (20 ms)

P-M-C-D-LA-S (21 ms)

b) Le plus court chemin est donc P-I-NY-C-D-S avec un temps total de transmission de 18 ms.

Cependant cette méthode est bien fastidieuse.

B. Algorithme de Dijkstra-Moore : recherche du plus court chemin

1. a) I est le sommet adjacent à P de poids minimal : 1 contre 10 pour M.

9 correspond au point total de P à O en passant par I.

b) Passer par I pour aller de P à O est plus court que depuis NY, on garde donc le chemin le plus court et on élimine celui passant par NY.

c) La ligne 6 comportera la motion « Depuis P en passant par I et O ».

2. On complète le tableau :

P	I	O	NY	C	D	M	LA	S
	1(P)					10(P)		
		9(I)	8(I)			10(P)		
		9(I)		12(NY)		10(P)		
				12(NY)		10(P)		20(O)
				12(NY)			18(M)	
					17(C)		17(C)	19(C)
								18(D)

On obtient le chemin le plus court en remontant S-D-C-NY-I-P de poids 18.

2 Modéliser l'évolution d'une épidémie

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** L'évolution d'une épidémie, en effectuant des hypothèses de changement d'états d'un jour au jour, suivant est un exemple classique de chaîne de Markov. L'activité permet de construire la modélisation et de comprendre les relations entre les distributions de transition afin de répondre à l'une des questions de ce chapitre.

1. Pour tout entier n, l'univers des possibles de cette expérience aléatoire : « choisir un individu à l'instant n » comporte trois événements élémentaires. On associe un état de santé d'un individu à une valeur de l'ensemble {1 ; 2 ; 3}. Chaque X_n est ainsi une fonction d'un événement sur une valeur de {1 ; 2 ; 3}. L'ensemble image ne dépend donc pas de n et on note $X_n \in \{1 ; 2 ; 3\}$.

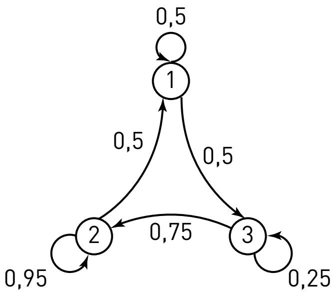
2. D'après les hypothèses, on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$P_{(Xn=1)}(X_{n+1} = 1) = 0{,}5$; $P_{(Xn=1)}(X_{n+1} = 3) = 0{,}5$;

$P_{(Xn=2)}(X_{n+1} = 1) = 0{,}05$; $P_{(Xn=2)}(X_{n+1} = 2) = 0{,}95$;

$P_{(Xn=3)}(X_{n+1} = 2) = 0{,}75$; $P_{(Xn=3)}(X_{n+1} = 3) = 0{,}25$.

3. On peut construire un graphe pondéré orienté à trois sommets.



4. a) Il s'agit de donner la loi de distribution initiale : $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

b) L'ensemble image permet de décrire l'ensemble de l'univers des possibles. Soit $n \in \mathbb{N}$, la famille $\big((X_n = 1) ; (X_n = 2) ; (X_n = 3)\big)$ forme un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule de la probabilité totale, on a :

$P(X_{n+1} = 1) = P\big((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)\big) + P\big((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)\big) + P\big((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1)\big)$

$= 0{,}5P(X_n = 1) + 0{,}05P(X_n = 2)$;

$P(X_{n+1} = 2) = P\big((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 2)\big) + P\big((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 2)\big) + P\big((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 2)\big)$

$= 0{,}95P(X_n = 2) + 0{,}75P(X_n = 3)$;

$P(X_{n+1} = 3) = P\big((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 3)\big) + P\big((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 3)\big) + P\big((X_n = 3) \cap (X_{n+1} =3)\big)$

$= 0{,}5P(X_n = 1) + 0{,}25P(X_n = 3)$.

c) On obtient la relation suivante :

$$\pi_{n+1} = \pi_n \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

3 Prévoir grâce aux états invariants

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Si l'étude des distributions et leur relation permet d'étudier l'évolution d'un système sur le court terme, il s'agit à présent de prévoir son évolution sur le long terme.

A. État initial particulier

1. On s'intéresse aux choix de navigateurs Internet année après année. Pour n un entier naturel, on tire un employé au hasard dans l'entreprise, on regarde son navigateur et on note X_n la variable aléatoire qui à l'un des trois événements élémentaires de l'expérience associe une valeur de l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$. On note :

$(X_n = 1)$= « l'employé utilise *SearchPlus* l'année n » ;

$(X_n = 2)$ = « l'employé utilise *FastFound* l'année n » ;

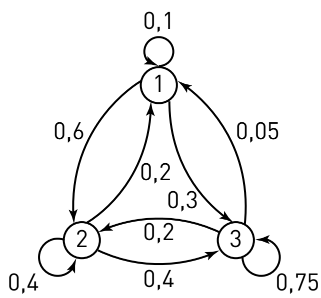
$(X_n = 3)$ = « l'employé utilise *EasyNavig* l'année n ».

De plus, les probabilités de changement de navigateur l'année suivante ne dépendent que du choix fait l'année présente.

La suite de variables aléatoires (X_n) suit une chaîne de Markov dont l'ensemble des états est $\{1 ; 2 ; 3\}$. Les probabilités de transition ne dépendent pas de l'année considérée, cette chaîne est donc homogène. On donne la matrice de transition :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

2.



L'état (ou distribution) initial(e) est donnée par : $\pi_0 = (0{,}1 \quad 0{,}3 \quad 0{,}6)$.

3. On utilise les données de probabilités pour en déduire une estimation des répartitions.

Les distributions de la chaîne de Markov se construisent de la manière suivante :

$$\pi_{n+1} = \pi_n \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

On constate que la répartition ne change pas en 2020 ni en 2021 : en effet $\pi_1 = \pi_0\, Q = \pi_0 = \pi_2$.

4. Si l'état initial est $r = (0{,}2 \quad 0{,}5 \quad 0{,}3)$ les distributions évoluent avec :

$\pi_1 = (0{,}135 \quad 0{,}38 \quad 0{,}485)$ et

$\pi_2 = (0{,}11375 \quad 0{,}33 \quad 0{,}55625)$.

B. Observation sur le long terme

On note $\pi_0 = (0{,}4 \quad 0{,}5 \quad 0{,}1)$.

1. On calcule :

$\pi_1 = (0{,}145 \quad 0{,}46 \quad 0{,}395)$

$\pi_6 \approx (0{,}1005 \quad 0{,}3011 \quad 0{,}5984)$

$\pi_{11} \approx (0{,}1000 \quad 0{,}30001 \quad 0{,}59999)$

$\pi_{12} \approx (0{,}1000 \quad 0{,}3000 \quad 0{,}6)$.

Plus les valeurs de n augmentent, plus les distributions se rapprochent de la distribution appelée état invariant.

2. On constate ceci pour d'autres distributions initiales, on pourra en choisir deux ou trois.

On peut conjecturer alors que, quel que soit l'état initial considéré, lorsque les distributions d'une chaîne de Markov convergent, elles convergent vers un état invariant.

À vous de jouer p. 205-217

1.

	A	B	C	D	E	F
Depuis A(0)	0	21(A)	∞	5(A)	∞	7(A)
Depuis D(5)			∞		11(D)	
Depuis E(11)		19(E)	25(E)			
Depuis B(19)			23(B)			
Depuis F(7)					10(F)	
Depuis E(10)		18(E)				
Depuis B(18)			23(B)			

Le chemin le plus court est donné par A-F-E-B-C, de longueur 23.

2. Le chemin le plus court reliant D à C est le chemin D-E-B-C, de poids 18.

3. Notons A, B et C les trois amis et X_n l'ami à qui Noé envoie un message au jour n. Pour tout entier n, l'ensemble image de X_n est {A ; B ; C}. Les probabilités d'envoi à un ami ne dépendent que de l'envoi du jour précédent avec la probabilité $P_{(Xn=ei)}(X_{n+1} = e_j) = 0{,}5$ pour $e_i \neq e_j \in \{A ; B ; C\}$. (X_n) est une chaîne de Markov.

4. Les probabilités de triche de cet élève ne dépendent que de s'il a triché la question d'avant. On peut ainsi construire une chaîne de Markov à deux états {0 ; 1} où $(X_n = 0)$ est l'événement « l'élève triche à la n-ième question » et $(X_n = 1)$ l'événement « l'élève ne triche pas à la n-ième question ». On peut donner les probabilités conditionnelles, pour $n \in \mathbb{N}$:

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{2}{3}$;

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{3}$;

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = 0{,}5$;

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0{,}5$.

5. Les probabilités de position de cette aiguille dans l'instant futur ne dépendent que de sa position dans le présent. On peut ainsi construire une chaîne de Markov à douze états qui sont les valeurs du cadran. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = 0{,}5$ si $j \equiv i + 1$; $i - 1$ [12], 0 sinon.

6. Si l'élève change tous les jours de leçon à réviser, son choix futur se porte sur les cours qu'il a sauf celui du jour présent. Les probabilités sur la leçon à réviser ne dépendent que de la leçon du jour présent. On peut donc adopter un modèle de Markov dont le nombre d'états est égal au nombre de leçons que l'élève possède.

Pour de perdre le modèle de Markov, il est nécessaire de changer l'hypothèse afin que les probabilités du choix futur soient dépendantes des choix présents et passés. On peut par exemple supposer que l'élève choisit aléatoirement parmi les cours qu'il n'a pas encore travaillés dans la semaine.

7. L'espace d'états est E = {0 ; 1 ; 2} et la matrice de transition est $Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Par lecture des probabilités de transition dans la matrice, nous obtenons :

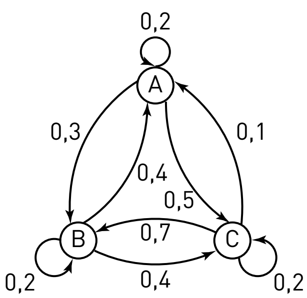
$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0{,}5$; $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 0{,}2$.

9. Par lecture des probabilités de transition dans la matrice, nous obtenons :

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) = 0{,}5$; $P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) = 0{,}1$;
$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0{,}2$.

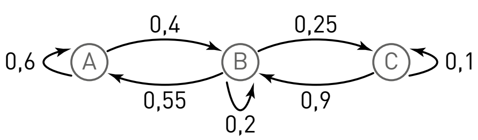
10. $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}35 & 0 & 0{,}65 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.



12.

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}55 & 0{,}2 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$



13. $\pi_{n+1} = \pi_n Q = (0{,}1P(X_n = \text{A}) + 0{,}5P(X_n = \text{B})$
$0{,}9P(X_n = \text{A}) + 0{,}5P(X_n = \text{B}))$

14. On commence par remarquer qu'il s'agit d'une chaîne à deux états.

La première partie de la question est un point de calcul matriciel. Calculons la première puissance :

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :
$Q^{2n} = I_2$; $Q^{2n+1} = Q$.
Ainsi, on obtient, en notant $\pi_0 = (x \quad y)$:

$$\pi_n = \begin{cases} (x \quad y) \text{ si } n \text{ est pair} \\ (y \quad x) \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

15. On commence par modéliser la situation par une chaîne de Markov à deux états. Soit n un entier naturel, on note $(X_n = 0)$ l'événement « le fumeur ne fume pas au jour n » et $(X_n = 1)$ l'événement « le fumeur fume au jour n ». La suite (X_n) définit ainsi une chaîne de Markov sur l'espace d'état {0;1}. On peut écrire la matrice associée : $Q = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.

On calcule $Q^2 = \begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}31 \\ 0{,}3875 & 0{,}6125 \end{pmatrix}$. S'il décide au jour 0 d'arrêter de fumer, on obtient comme distribution initiale $\pi_0 = (1\ 0)$. Finalement : $\pi_2 = \pi_0 Q^2 = (0{,}69\ 0{,}31)$.
La probabilité qu'il ne fume pas au deuxième jour est 0,69.

16. On calcule $Q^3 = \begin{pmatrix} 0{,}376 & 0{,}624 \\ 0{,}312 & 0{,}68 \end{pmatrix}$. Le coefficient $q_{1\,2}^{(3)} = 0{,}624$ désigne la probabilité de passer de A à B en trois étapes.

17. $\pi = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$

18. On calcule $AM = A$. Si $B = (p \quad 1 - p)$ est une autre distribution invariante, alors on résout le système afin d'obtenir : $BM = B \Leftrightarrow B = A$.

19. 1. $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Un raisonnement par récurrence nous donne : $Q^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2a-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2a-1)^n & 1-(2a-1)^n \\ 1-(2a-1)^n & 1+(2a-1)^n \end{pmatrix}$.

D'où $\pi_n = (x_n \quad y_n)$ avec :

$x_n = (1 + (2a-1)^n)P(X_0 = A) + (1 - (2a-1)^n)P(X_0 = B)$

$y_n = (1 - (2a-1)^n)P(X_0 = A) + (1 + (2a-1)^n)P(X_0 = B)$

20. On obtient, en choisissant d'arrondir les probabilités au centième :

$\pi_{20} = \pi_0 Q^{20} \approx (0{,}16 \quad 0{,}43 \quad 0{,}41)$

21. L'état du système dans l'année future dépend uniquement de celui de l'année présente. La chaîne de Markov a pour ensemble d'états {P ; V}. L'état invariant est unique $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$; la chaîne de Markov converge vers cet état. La répartition est alors répartie en 40 % des élèves dans le lycée P et 60 % dans le lycée V.

22. On commence par modéliser le problème par une chaîne de Markov.

Markov a établi que les probabilités de la lettre suivante ne dépendent que de la lettre présente. On peut alors adopter ce modèle avec une matrice de transition donnée par $\begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}87 \\ 0{,}66 & 0{,}34 \end{pmatrix}$.

Il est raisonnable dans cette section d'interpréter la question de la manière suivante : au bout d'un certain temps quelle est la probabilité de tomber sur une voyelle ou une consonne ? Ainsi, l'on détermine l'unique distribution invariante de la chaîne : $\pi = \begin{pmatrix} \frac{22}{51} & \frac{29}{51} \end{pmatrix}$. Par théorème, la chaîne converge vers cette unique distribution invariante. Le grand nombre de lettres peut nous indiquer ainsi qu'il est, au fur et à mesure que l'on avance dans le livre, un peu plus probable que la lettre regardée soit une consonne.

Exercices apprendre à démontrer p. 218

Pour s'entraîner

On raisonne par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$. On regarde la propriété au rang m : $P_{(X_n=ei)}(X_{n+m} = e_j)$ est le coefficient $(i\ ,\ j)$ de Q^m.

Initialisation : par définition d'une chaîne de Markov homogène, pour tout entier naturel $P_{(X_n=ei)}(X_{n+1} = e_j)$ désigne la probabilité de transition de l'état e_i à l'état e_j, soit donc le coefficient $(i\ ,\ j)$ de Q.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel m non nul tel que la propriété soit vraie au rang m. On a alors $Q^{m+1} = QQ^m$. Ainsi, le coefficient $(i\ ,\ j)$ de la matrice Q^{m+1} est donnée par :

$$\sum_{k=1}^{N} Q(i\ ,\ k)Q^m(k\ ,\ j).$$

Par hypothèse de récurrence,

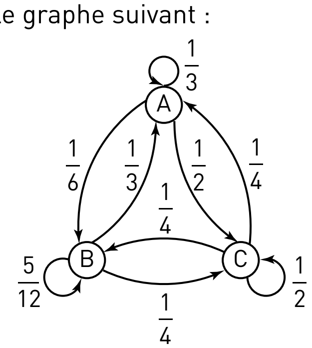
$Q^m(k\ ,\ j) = P_{(X_n=ek)}(X_{n+m} = e_j)$. Ainsi, d'après la démonstration rédigée, on a $\sum_{k=1}^{N} Q(i\ ,\ k)P_{(X_n=e_k)}(X_{n+m} = e_j)P_{(X_n=e_i)}(X_{n+m+1} = e_j)$. On en déduit alors la propriété au rang $m + 1$.

Conclusion : l'égalité est vraie au rang $m = 1$; de plus, pour tout entier naturel non nul, elle est héréditaire. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier non nul.

Exercices calculs et automatismes p. 219

23. Représenter à l'aide d'un graphe

On dresse le graphe suivant :



24. Lire un graphe

1. c) **2.** d) **3.** a)

4. d) **5.** a)

25. Matrice de transition (1)

1. c) **2.** c) **3.** b) **4.** d)

26. Matrice de transition (2)

$$Q = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$$

27. Matrice de transition (3)

On commence par noter le nombre de sommets : ici il y a en 4, c'est l'ordre de la matrice carrée. Ensuite, on place des arcs entre les sommets qui admettent des coefficients non nuls de par la matrice et ensuite on pondère les arcs avec ces coefficients.

28. Évolution des distributions

a) Vraie. **b) Fausse.**

c) Fausse.

29. Distribution invariante

a) Fausse. **b) Vraie.**

c) Vraie.

Exercices d'application p. 220-222

Déterminer un plus court chemin

30. On dresse le tableau pour appliquer l'algorithme de Dijkstra-Moore.

A	B	C	D	E	F	G
0	10(A)	∞	∞	8(A)	32(A)	∞
		∞	24(E)			∞
		29(D)				∞
		16(B)				17(B)
			21(C)			
					31(A)	32(A)

Le plus court chemin est A-B-G-F de longueur 31.

31. On dresse le tableau pour appliquer l'algorithme de Dijkstra-Moore.

A	B	C	D	E	F	G
	5(A)	16(A)		5(A)		
		15(B)		5(A)		
		14(E)	9(D)		16(E)	

Le plus court chemin pour aller de A à F est le chemin A-E-F de poids 16.

32. On dresse le tableau pour appliquer l'algorithme de Dijkstra-Moore.

G	A	B	C	D	E	F
		15(G)	4(G)		9(G)	
	24(A)	15(G)			9(G)	
		15(G)		32(E)		20(E)
	19(B)					20(E)
				30(A)		20(E)
				30(A)-30(F)		

Il y a deux chemins de poids minimal :

D-A-B-G ou D-F-E-G.

Justifier le caractère markovien

33. 1. $P(X_0 = \text{B}) = \dfrac{1}{2}$; $P_{(X_n=\text{A})}(X_{n+1} = \text{B}) = \dfrac{4}{5}$;

$P_{(X_n=\text{B})}(X_{n+1} = \text{B}) = \dfrac{1}{3}$.

2. $P(X_1 = \text{A}) = \dfrac{13}{30}$ et $P(X_1 = \text{B}) = \dfrac{17}{30}$.

3. $P(X_2 = \text{A}) = \dfrac{209}{450}$ et $P(X_2 = \text{B}) = \dfrac{241}{450}$.

34. a) La situation est une chaîne de Markov, c'est le modèle des urnes d'Ehrenfest.

b) Les états et les variables choisies ne permettent pas de modéliser la situation par une chaîne de Markov ; il est possible ici de changer l'espace d'états et la suite de variables pour obtenir un tel modèle.

c) La situation ne peut suivre un modèle de Markov et l'on ne peut pas trouver de modèle pertinent de Markov à partir de cette situation.

d) Tout comme le premier cas, la suite est une chaîne de Markov.

35. Plusieurs choix sont possibles.

• Un modèle de Markov : on remet la boule dans l'urne si le nombre de boules avant le tirage est pair. Sinon on retire la boule.

• Pas de modèle de Markov : on remet la boule dans l'urne si cela fait déjà trois fois que l'on a enlevé une boule.

Déterminer une matrice de transition

36. a) $M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ **b)** $M_2 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

37. Il s'agit de vérifier que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

Pour Q_1 : $0{,}3 + 0{,}7 = 1$; $0{,}8 + 0{,}2 = 1$.

Pour Q_2 : $1 - a^2 + a^2 = 1$.

Pour Q_3 : $\frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = 1$; $\frac{2}{7} + \frac{1}{5} + \frac{18}{35} = 1$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Pour Q_4 : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$; $\frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = 1$.

38. On a : $\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$.

39. a) $P_{(X_0=A)}(X_1 = B) = 0{,}3$. **b)** $P_{(X_1=B)}(X_2 = C) = 0{,}7$.

c) $P\big((X_0=A) \cap (X_1 = B)\big) = 0{,}06$.

d) $P\big((X_0 = B) \cap (X_1 = B)\big) = 0{,}09$.

40. On a : $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

41. Le temps qu'il fera dans le jour futur ne dépend que du temps qu'il fait au jour présent. Si l'on note X_n la variable aléatoire correspondant au temps qu'il fait au jour n, alors (X_n) peut être modélisée par une chaîne de Markov à deux états dont la matrice de transition est donnée par : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

42. On est en présence d'une chaîne de Markov à trois états dont la matrice de transition est donnée par :

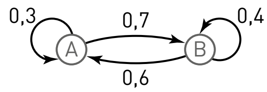
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

On a : $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

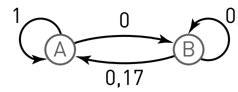
Manipuler un graphe probabiliste

43.

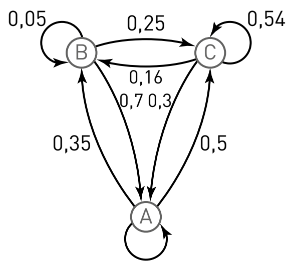
a)



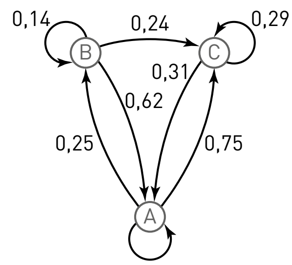
b)



c)



d)



44. 1. Les événements $(X_0 = A)$, $(X_0 = B)$ et $(X_0 = C)$ forment un système complet d'événements. On utilise ce système complet pour appliquer le théorème de la probabilité totale dans les questions a), b) et c). Ce théorème sera appliqué avec le système complet $(X_1 = A)$, $(X_1 = B)$ et $(X_1 = C)$ pour la question d).

a) $P(X_1 = A) = 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}53$.

b) $P(X_1 = B) = 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}33$.

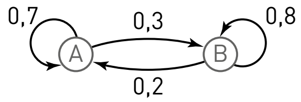
c). $P(X_1 = C) = 0{,}33$.

d) $P(X_2 = B) = 0{,}53 \times 0{,}5 + 0{,}33 \times 0{,}3 + 0{,}14 \times 0{,}6$
$= 0{,}448$.

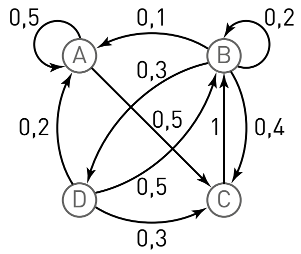
2. La matrice de transition est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}.$$

45.



46.



Calculer des probabilités

47. 1. $P(X_0 = A) = 0{,}5$; $P(X_0 = B) = 0{,}5$; $P(X_0 = C) = 0$.

2. a) $\pi_1 = (0{,}15 \quad 0{,}15 \quad 0{,}7)$ et $\pi_2 = (0{,}395 \quad 0{,}395 \quad 0{,}21)$.

b) $P(X_1 = A) = 0{,}15$ et $P(X_2 = C) = 0{,}21$.

3. $\pi_n = \pi_0 Q^n$.

4. $\pi_{10} = \pi_0 Q^{10} \approx (0{,}3 \quad 0{,}3 \quad 0{,}4)$ et $\pi_{20} = \pi_0 Q^{20} \approx (0{,}3 \quad 0{,}3 \quad 0{,}4)$. On peut calculer la distribution pour des entiers de plus en plus grands pour conjecturer qu'elle converge.

48. 1. a) On a $\pi_2 = (0{,}55 \; 0{,}45)$ et $\pi_3 = (0{,}535 \; 0{,}465)$.

b) $P(X_2 = B) = 0{,}45$ et $P(X_3 = A) = 0{,}535$.

2. On a pour tout entier naturel $n > 0$: $\pi_n = \pi_1 M^{n-1}$.

3. On a $\pi_{10} \approx (0{,}5385 \; 0{,}4615)$ et $\pi_{20} = (0{,}5385 \; 0{,}4615)$. La suite des distributions semble converger.

4. On a $\pi_1 = \pi_0 M$. Calculons $\det(M) = -0{,}3 \neq 0$. La matrice est donc inversible. On multiplie alors à droite par la matrice inverse.

49. 1. On a $\pi_0 = (0{,}2 \quad 0{,}8)$ et $\pi_1 = (0{,}404 \quad 0{,}596)$, $\pi_2 = (0{,}47948 \quad 0{,}52052)$ et $\pi_3 \approx (0{,}5074 \quad 0{,}4926)$.

2. Ainsi, la probabilité que l'enseignant désigné fasse grève est de 0,5074.

Déterminer une distribution invariante

50. a) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}$ **b)** $\pi = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$

51. On calcule pour les deux propositions πM. Dans le premier cas, $\pi M = \pi$, la distribution est donc invariante. Ce n'est pas le cas pour la seconde car $\pi M = (0{,}212 \quad 0{,}21 \quad 0{,}578)$.

52. 1. On donne la matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

2. On a pour tout entier naturel n : $\pi_n = \pi_0 M^n$.
Ainsi $\pi_5 = (0{,}18181 \; 0{,}81819)$ et $\pi_3 \approx (0{,}1818 \; 0{,}8182)$. La suite des distributions semble converger.

3. On résout l'équation $\pi M = \pi$ et on détermine $\pi = \begin{pmatrix} \frac{18}{99} & \frac{81}{99} \end{pmatrix}$.

53. 1. On vérifie que $\pi Q = \pi$.

2. On pose $\pi = (x \quad y)$ et on résout $\pi Q = \pi$ avec $x + y = 1$.

54. On résout le système $\begin{cases} -0{,}6x + 0{,}6z = 0 \\ 0{,}1x - 0{,}8y + 0{,}7z = 0, \\ 0{,}3x + 0{,}3y - 0{,}6z = 0 \end{cases}$ sans oublier la condition propre aux distributions : $x + y + z = 1$. On trouve alors $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

55. 1. Soit n un entier naturel. Par hypothèse, on a :

$$P_{(X_n=P)}(X_{n+1} = P) = 0{,}65 \;;$$
$$P_{(X_n=P)}(X_{n+1} = G) = 0{,}35;$$
$$P_{(X_n=G)}(X_{n+1} = P) = 0{,}7;$$
$$P_{(X_n=G)}(X_{n+1} = G) = 0{,}3.$$

2. On a $\pi_0 = (1 \quad 0)$; $\pi_1 = (0{,}65 \quad 0{,}35)$ et $\pi_2 = (0{,}6675 \quad 0{,}3325)$.

3. a) On détermine l'unique distribution invariante $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

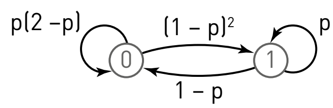
b) Par théorème du cours, la suite des distributions converge vers la distribution invariante. Kellia boira plus d'eau plate que d'eau gazeuse.

56. 1. On somme les coefficients sur chaque ligne :

$$p(2 - p) + (1 - p)^2 = 1.$$

Et $p + 1 - p = 1$. Q est donc stochastique.

2. On a le graphe suivant :



3. a) On a $Q = \begin{pmatrix} \frac{99}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$. On calcule les 10 distributions demandées avec :

$$\pi_9 \approx (0{,}989\ 0{,}011)$$
$$\pi_{10} \approx (0{,}989\ 0{,}011).$$

b) La suite des distributions semble converger.

4. On a $Q = \begin{pmatrix} \frac{84}{100} & \frac{16}{100} \\ \frac{6}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$. On calcule les 10 distributions demandées avec :

$$\pi_9 \approx (0{,}7895\ 0{,}2105)$$
$$\pi_{10} \approx (0{,}7895\ 0{,}2105).$$

La suite des distributions semble converger également.

5. On a respectivement

$\pi = \begin{pmatrix} \frac{90}{91} & \frac{1}{91} \end{pmatrix}$ et $\pi = \begin{pmatrix} \frac{15}{19} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$.

Les distributions convergent vers la distribution invariante.

6. La distribution invariante de cette chaîne de Markov est donnée par

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{p}{1-p+p^2} & \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2} \end{pmatrix}$$

Exercices d'entraînement p. 223-225

Algorithme de Dijkstra-Moore

57. Le chemin le plus court est le chemin A-E-D-G de longueur 80 km.

58. 1. On dresse le tableau pour effectuer l'algorithme :

A	B	C	E	G	L	P	V
		160(A)				180(A)	
			300(C)		340(C)	180(A)	
			260(P)				280(P)
					330(E)		280(P)
				370(V)	330(E)		
	410(L)						

Le plus court chemin est B-L-E-P-A de 410 km.

2. On reprend le tableau avec une arête en moins et on détermine le chemin A-C-L-B de 420 km.

Modéliser par une chaîne de Markov

59. 1. La marche aléatoire donnée par le graphe décrit un mouvement futur qui ne dépend que de la position présente de la grenouille. (P_n) est une chaîne de Markov d'espace d'états {A ; B ; C} et de matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

2. $\pi_n = \pi_0 M^n = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}^n$.

$\pi_4 = (0{,}272 \quad 0{,}3465 \quad 0{,}384335)$

et $\pi_6 = (0{,}27902 \quad 0{,}336645 \quad 0{,}384335)$.

La probabilité qu'elle revienne en B en quatre sauts est 0,3465 et en six sauts 0,336645.

60. a) Si l'on note $(X_n = 0)$, $(X_0 = 1)$ les événements respectifs « Léa choisit un roman le n-ième jour » et « Léa choisit une BD le n-ième jour », alors (X_n) forme une chaîne de Markov à deux états {0 ; 1}. En effet les choix du jour futur de Léa semblent ne dépendre que du jour présent. Les probabilités conditionnelles dépendent de l'entier n et l'on pourrait choisir d'écrire :

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0{,}8$ *si* $n \equiv 0 ; 1 ; 2 ; 3\ [7]$

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0{,}6$ *si* $n \equiv 4 ; 5 ; 6\ [7]$. La chaîne n'est pas homogène.

b) Si l'on note $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$ les événements respectifs « il choisit un chocolat la n-ième heure » et « il choisit un café la n-ième heure », alors (X_n) forme une chaîne de Markov à deux états $\{0 ; 1\}$. En effet les choix de l'heure future semblent ne dépendre que du choix de l'heure présente. Les probabilités conditionnelles dépendent de l'entier n et l'on pourrait choisir d'écrire :

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0{,}7$ lorsque n est petit et si $n \geqslant 18$, alors $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0{,}9$. La chaîne n'est pas homogène. On pourrait s'amuser à décrire à l'aide d'une suite la croissance de chance qu'il souhaite un café.

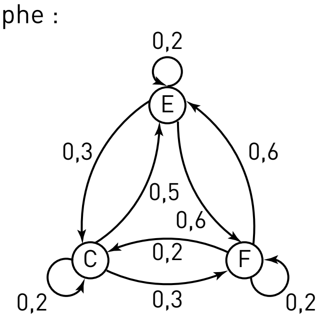
c) Le repas du renard au jour futur ne dépend pas uniquement du jour précédent mais jusqu'à trois jours dans le passé. On ne peut donc pas construire de chaîne de Markov.

61. 1. Les choix du professeur dans l'appréciation future ne dépendent que du choix fait lors de l'appréciation présente. On peut modéliser ce conseil de classe par une chaîne de Markov dont les états sont les trois mentions et l'entier n correspond aux élèves.

2. Cette chaîne est homogène, les probabilités ne dépendent pas des élèves rencontrés. La matrice de transition est donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

On a le graphe :

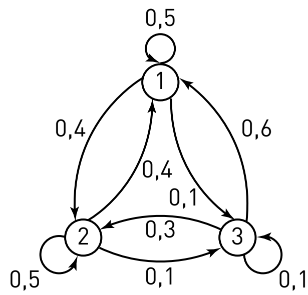


62. 1. Les probabilités du classement de Évane sur le podium ne dépendent que de son classement la semaine précédente. On peut modéliser ce classement par une chaîne de Markov dont les états sont les trois marches du podium $\{1 ; 2 ; 3\}$ et l'entier n correspond aux semaines écoulées.

2. Cette chaîne est homogène, les probabilités ne dépendent pas des semaines. La matrice de transition est donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

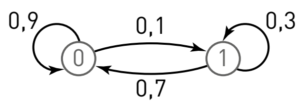
Le graphe est donné par :



63. Les probabilités de fonctionnement du panoramique des Dômes un jour donné ne dépendent que de son fonctionnement le jour précédent. On peut donc modéliser la situation par une chaîne de Markov à deux états qui sont le fonctionnement ou non du panoramique. Ce fonctionnement ne dépend pas du jour n considéré donc la chaîne est homogène et admet pour matrice de transition :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

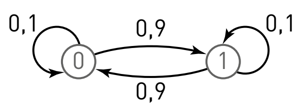
Son graphe est :

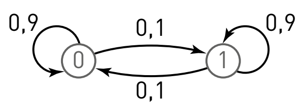


64. Les probabilités de changement dans chacune des situations ne dépendent que des choix de parité présents. On peut modéliser ces choix par une chaîne de Markov à deux états, homogène et dont les matrices de transition sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

avec :





65. 1. Les probabilités de changement d'états dans l'instant futur ne dépendent que de l'état présent comme le précise le graphe probabiliste. On considère alors (X_n) comme étant une suite de Markov à deux états dont la matrice de transition est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ et sa distribution initiale est $\pi_0 = (0 \quad 1)$.

2. On calcule $\pi_1 = \pi_0 M = (0{,}2\ 0{,}8)$ et $\pi_2 = \pi_1\, M = (\ 0{,}24 \quad 0{,}76)$. La probabilité que la particule se trouve dans l'état A au bout d'une microseconde est 0,2 ; au bout de deux microsecondes est 0,24.

3. a) On a pour tout entier naturel : $\pi_{n+1} = \pi_n M$.

b) On obtient ainsi les relations :

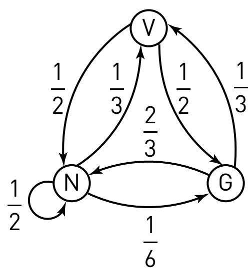
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}2b_n \\ b_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}8b_n \end{cases}$$

4. a) Les valeurs que renvoie l'algorithme sont les valeurs des suites : a_n et b_n. On utilise ici la relation propre aux distributions.

b) On fait tourner l'algorithme afin de montrer que l'affirmation est effectivement vraie.

66. 1. Dans cette ville, les probabilités du temps présent ne dépendent que du temps le jour passé. On peut modéliser la météo par une chaîne de Markov homogène à trois états {V ;N ; G}.

2. La matrice de transition de cette chaîne est $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Le graphe est :



3. Après un jour de grêle, il s'agit de regarder la troisième ligne de la matrice. Le temps le plus probable est donc la neige.

4. La question porte sur une conditionnelle sur deux jours dans le passé. Or nous travaillons avec une modélisation markovienne de la météo, ainsi :

$$P_{(X_{n-1}=N)\cap(X_n=N)}(X_{n+1} = V) = P_{(X_n=N)}(X_{n+1} = V) = \frac{1}{3}.$$

67. Il s'agit ici de mener la modélisation probabiliste du début à la fin. On note respectivement $(X_n = 0)$ et $(X_n = 1)$ les événements « elle écoute Mozart » et « elle écoute Mendelssohn » au n-ième jour. On modélise l'écoute du disque par une chaîne de Markov (X_n) à deux états {0 ; 1}, homogène, dont la matrice de transition est donnée par $Q = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Si on note le samedi comme $n = 0$, alors le vendredi suivant l'achat correspond à $n = 6$. On note (π_n) la suite de distribution avec $\pi_n = Q^n\pi_0$. On recherche donc π_6 en fonction de la distribution initiale $\pi_0 = (x_0 \quad y_0)$.

Finalement $\pi_6 = (0{,}6(x_0 + y_0) \quad 0{,}4(x_0 + y_0))$. Quel que soit le disque écouté à l'instant initial, Mozart sera le plus probablement écouté le vendredi suivant l'achat.

Étudier le comportement d'une chaîne de Markov

68. $\pi_n = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ et $\pi_{61} = (0{,}5 \quad 0{,}5)$.

69. On note respectivement $(X_n = 0)$ et $(X_n = 1)$ les événements « Noémie aide Mayna » et « Mayna aide Noémie » au n-ième jour. On modélise le travail des deux amies par une chaîne de Markov (X_n) à deux états {0 ; 1}, homogène, dont la matrice de transition est donnée par $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

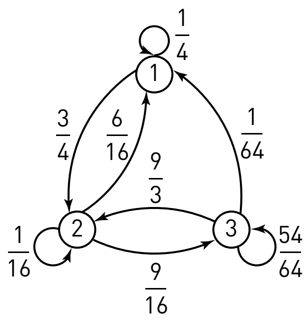
Si on note le lundi comme $n = 0$, alors le vendredi correspond à $n = 4$. On note (π_n) la suite de distributions avec $\pi_0 = (1 \quad 0)$ et $\pi_n = Q^n\pi_0$. On recherche donc π_4 : $\pi_4 \approx (0{,}71 \quad 0{,}29)$

Finalement Mayna aidera Noémie le vendredi avec une probabilité de 0,29.

70. On note X_n le nombre de salles propres au jour n. Ce nombre ne dépend que du nombre de salles utilisées au jour précédent. Ainsi (X_n) est une chaîne de Markov à trois états {1 ; 2 ; 3}.

Pour déterminer les probabilités d'utilisation des salles, il convient d'adopter une modélisation par loi binomiale : chaque soir, on répète trois fois de manière indépendante une expérience de Bernoulli avec succès de salle utilisée de probabilité 0,25. Le nombre de salles utilisées suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3\ ;\ 0{,}25)$. On note respectivement p_0, p_1, p_2, p_3 les probabilités qu'il y ait eu i salles utilisées. On a : $p_0 = \frac{27}{64}$, $p_1 = \frac{27}{64}$, $p_2 = \frac{9}{64}$, $p_3 = \frac{1}{64}$.
On utilise ces valeurs pour obtenir les probabilités conditionnelles de la troisième ligne de la matrice de transition de la chaîne de Markov. La deuxième ligne utilise une $\mathcal{B}(2\ ;\ 0{,}25)$ et la première ligne une $\mathcal{B}(1\ ;\ 0{,}25)$:

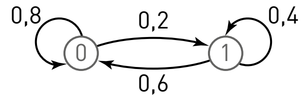
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{6}{16} & \frac{1}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{64} & \frac{9}{64} & \frac{54}{64} \end{pmatrix}.$$



La distribution invariante est unique égale à *:*

$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{40}{207} & \frac{16}{23} \end{pmatrix}$. Dans le contexte, si la chaîne de Markov converge, alors cela signifie que sur le long terme, le plus probable est que les trois salles soient propres, la société semble assez efficace !

71. 1. Les probabilités de choix de vélo à un jour donné ne dépendent que du choix du jour précédent. Ainsi, le choix de vélo peut être modélisé par une chaîne de Markov à deux états avec pour matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.



2. Il n'y a qu'une distribution invariante $(0{,}5 \quad 0{,}5)$. Les distributions de la chaîne de Markov convergent vers cette distribution. Ainsi, même si au premier jour des vacances seuls 5 % des clients louent un vélo électrique, la moitié environ en louera au bout d'un certain temps.

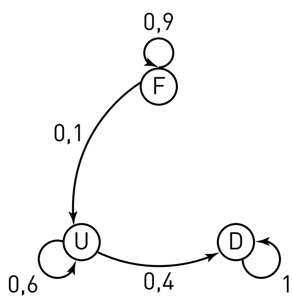
72. 1. Le premier élève effectue un tirage successif d'une pièce ; le modèle adopté est une loi binomiale d'espérance 50.

2. Le deuxième élève décide d'utiliser une chaîne de Markov de matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Cette chaîne admet comme distribution invariante $(0{,}5 \quad 0{,}5)$. Le professeur devra ainsi regarder les différences au début de la suite (paquets de nombres dans le cas aléatoire) car sur la fin les répartitions seront probablement très proches.

73. 1. La matrice de transition nous donne les différentes probabilités de changement d'états. Il y a une chance sur dix que la pièce passe de l'état fonctionnel à l'état usé ; sinon elle ne change pas d'état. Il y a quatre chances sur dix qu'étant usée, elle devienne défaillante.

2. On a :

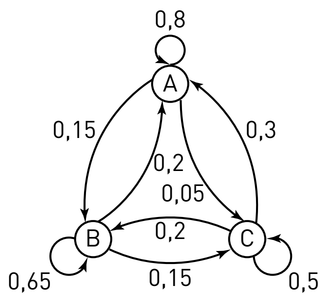


3. On note (π_n) la suite de distribution avec $\pi_n = Q^n\ \pi_0$ et $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$. On recherche donc $\pi_4 = Q^4\pi_0$.

$\pi_4 = (0{,}6561 \quad 0{,}1755 \quad 0{,}1684)$. La probabilité que la pièce soit défaillante au bout de quatre mois est d'environ 0,17.

74. 1. a) Les probabilités de changement d'abonnement d'une année ne dépendent que des données de l'année précédente. La répartition des abonnements suit une chaîne de Markov à trois états. Le nombre total d'abonnements restant constant au fil des ans, cette chaîne de Markov est homogène.

b) On a : $M = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}20 & 0{,}65 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}50 \end{pmatrix}$ et la distribution initiale : $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.



2. On a $\pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{13}{30} & \frac{1}{3} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$ et $\pi_2 = \begin{pmatrix} \frac{29}{60} & \frac{197}{600} & \frac{113}{600} \end{pmatrix}$.

La probabilité que l'individu soit abonné à A en 2020 est environ égale à 0,5.

3. On a pour tout entier naturel n : $\pi_n = \pi_0 M^n$.

D'où $\pi_{10} \approx (5367\ 0{,}315\ 0{,}1483)$ et

$\pi_{20} \approx (537\ 0{,}315\ 0{,}148)$. La suite semble être convergente.

4. On résout le système :

$$\begin{cases} -0{,}2x + 0{,}15y + 0{,}05z = 0 \\ 0{,}2x - 0{,}35y + 0{,}15z = 0 \\ 0{,}3x + 0{,}2y - 0{,}5z = 0 \end{cases}$$

en utilisant la relation $x + y + z = 1$. On trouve alors $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

5. Si la suite des distributions converge, elle converge vers sa distribution invariante. On en déduit qu'au bout d'un certain temps, la répartition des trois abonnements est identique.

Exercices bilan p. 226

77. Savoir perdre

1. Les probabilités de gagner la partie suivante ne dépendent, avec ce simulateur, que de la réussite au cours de la partie effectuée. La suite (X_n) est donc une chaîne de Markov d'ensemble d'états $E = \{0 ; 1\}$ avec pour tout entier naturel n, $P(X_n = 0) = a_n$ et $P(X_n = 1) = b_n$.

2. a) Par hypothèse : $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} & \frac{17}{20} \end{pmatrix}$.

b) La formule de la probabilité totale, en utilisant la **méthode 5** p. 213 du manuel nous donne :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{5}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{3}{5}b_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

c) Nous obtenons ainsi :

$$\pi_{n+1} = \pi_n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

3. a) La relation précédente nous fournit :

$$\pi_n = \pi_0 Q^n.$$

b) On calcule $\pi_5 = \pi_0 Q^5 \approx (0{,}35\ 0{,}65)$.

4. a) Il existe une unique distribution invariante : $\pi = \begin{pmatrix} \frac{8}{23} & \frac{15}{23} \end{pmatrix}$.

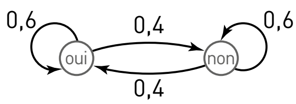
b) Le simulateur peut programmer les chances de victoire à 8 sur 23 afin que le joueur ait toujours les mêmes chances de gagner.

c) Par théorème, la distribution invariante étant unique sur une chaîne à deux états, les distributions convergent vers la distribution invariante.

78. Demande en mariage

1. La situation est particulière car une modélisation par un schéma de Bernoulli pourra convenir ici, de par l'indépendance dans la répétition des expériences. La chaîne de Markov à deux états obtenue admet comme matrice de transition :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$



2. a) La distribution initiale est de la forme $(1 \quad 0)$ ou $(0 \quad 1)$ selon la réponse de B.

b) On calcule $Q^3 = \begin{pmatrix} \frac{63}{125} & \frac{62}{125} \\ \frac{62}{125} & \frac{63}{125} \end{pmatrix}$. La probabilité que A obtienne la réponse de B est proche de 0,5.

c) On a $Q^9 \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Le résultat diffère peu.

4. a) la distribution invariante est unique, donnée par $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) Par théorème la suite des distributions converge vers la distribution invariante. Il y a une chance sur deux que B obtienne la réponse.

79. Le bon fromage

A. Étude du trajet

1. On dresse le tableau afin d'appliquer l'algorithme :

F	O	T	D	M	N	R	C
	130(F)	123(F)					
	130(F)		311(T)				
			311(T)		295(O)		
				396(N)		517(D)	517(M)

Le plus court trajet est donc F-O-N-M-C pour un trajet de 517 km.

2. À l'euro près, il lui faudra un budget mensuel de 414 euros.

3. Il s'agit de décomposer le trajet en deux morceaux en passant par Dijon. On trouve alors F-T-D-R-C pour un trajet de 640 km.

Le budget mensuel s'élève à 438 euros.

B. Étude d'une chaîne de Markov

1. Les probabilités du choix du fromage lors du retour suivant ne dépendent que du choix du retour actuel. On peut construire ainsi une chaîne de Markov à trois états S, C, F.

2. D'après les hypothèses, on a :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Avec $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$, on a :

$$\pi_4 = \pi_0 Q^4 = \begin{pmatrix} \frac{1389}{2\,500} & \frac{1111}{2\,500} & \frac{1111}{2\,500} \end{pmatrix}.$$

La probabilité qu'il ramène un autre fromage est de $\frac{2\,222}{2\,500}$. C'est donc fort probable.

Préparer le BAC Je me teste p.228

80. A **81.** B **82.** A
83. B **84.** A **85.** A

Préparer le BAC Je révise p.229

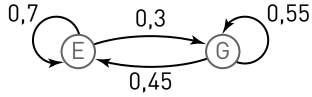
86. Optimiser un réseau d'irrigation

Le chemin de longueur minimale est le chemin A-B-F-H-K de longueur 9 km.

87. Évolution d'un marché

1. a) Les probabilités de changer d'opérateur à l'instant futur ne dépendent que de l'opérateur choisi à l'instant présent. Il s'agit d'une chaîne de Markov d'ensemble d'états {E ; G}

On a le graphe suivant :



b) En 2020, la probabilité qu'une personne ait choisi E est 0,1. D'où $\pi_0 = (0{,}1 \quad 0{,}9)$.

c) $M\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

2. $\pi_n = \pi_0 M^n$ et $\pi_2 = (0{,}56875 \quad 0{,}43125)$.

3. a) $e_n + g_n = 1$.

b) $e_{n+1} = 0{,}7e_n + 0{,}45g_n$.

c) $e_{n+1} = 0{,}7e_n + 0{,}45(1 - e_n)$

88. Changements d'états d'une particule

A. Étude d'un premier milieu

1. a) Les probabilités de passer d'un état à l'autre dans l'instant futur ne dépendent que de l'état à l'instant présent.

b) On suppose qu'en l'instant initial l'atome est en état stable.

c) $A = \begin{pmatrix} 0{,}995 & 0{,}005 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

2. $\pi_n = \pi_0 A^n$.

3. a) $\det(P) = 121 \neq 0$.

b) $D = \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{79}{200} \end{pmatrix}$.

4. Un raisonnement par récurrence nous permet de montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel. L'hérédité utilise l'égalité $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}A$ par hypothèse de récurrence.

5. $\pi_n = \dfrac{1}{121}(120 + 0{,}395^n \quad 1 - 0{,}395^n)$.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n = \begin{pmatrix} \dfrac{120}{121} & \dfrac{1}{121} \end{pmatrix}$.

B. Étude d'un second milieu

1. $A = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

2. $\pi_1 = (0{,}98 \; 0{,}02)$ et $a = 0{,}49$.

Exercices vers le supérieur p.230-233

89. Tirages consécutifs de pile ou face.

A. Estimation et simulation

1. a) Cette question permet de travailler sur la perception des élèves concernant l'aléatoire, en écho à l'exercice 72.

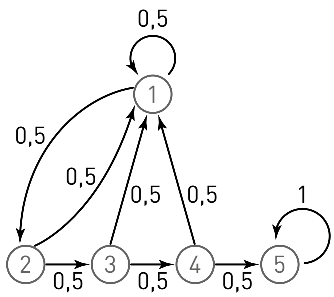
b) et **c)** On entre par exemple sous tableur les simulations avec la commande ALEA.ENTRE.BORNES(0 ; 1). Un tel phénomène se produit relativement souvent comme on peut le constater.

B. Modélisation et calcul

1. a) Pour tout entier naturel n non nul, X_n prend comme valeur un nombre entier entre 1 et 5. De plus, la valeur prise à l'instant $n + 1$ ne dépend que de la valeur à l'instant n. La suite (X_n) est ainsi une chaîne de Markov à cinq états. Dans le cadre de l'exercice, dès que l'on obtient au moins une fois 5 côtés consécutifs identiques, alors on a réalisé l'événements qui nous intéresse.

b) On obtient graphe et matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



c) Après un lancer, on commence une série avec une valeur.

2. a) Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\pi_n = \pi_1 M^{n-1}$.

b) Ainsi $\pi_{40} = \pi_1 M^{39}$

$\approx (0{,}134 \quad 0{,}07 \quad 0{,}036 \quad 0{,}019 \quad 0{,}741)$.

Ainsi, $p \approx 0{,}741$.

3. a) On réutilise la modélisation effectuée en déterminant π_{50}. On obtient $p \approx 0{,}821$.

b) On modélise à présent le problème par une chaîne de Markov à six états dont la matrice de transition est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\pi_{100} = \pi_1 M^{99}$ et $p \approx 0,807$.

90. Contrat d'assurance

1. Les probabilités de changement de bonification dans le futur ne dépendent que de l'état présent, pas des états passés. Ainsi, on peut modéliser le problème par une chaîne de Markov à trois états dont la matrice de transition est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

2. Les changements de bonification dépendent à présent des états passés dans une faible mesure certes, mais suffisamment pour nous faire, *a priori*, quitter le modèle de Markov.

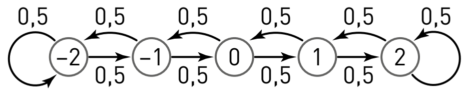
L'astuce ici, que l'on peut adopter dans les situations où les hypothèses sont « un cran trop poussées dans le passé », est de considérer une variable qui prend en compte deux années consécutives par le biais de couples d'états : $(e_i \,;\, e_j)$. On peut alors noter $Y_n = (X_n \,;\, X_{n-1})$ et obtenir une chaîne de Markov à 7 états qui sont les couples : (0 ; 0) (0 ; 1) (1 ; 0) (1 ; 2) (2 ; 2) (2 ; 1) (2 ; 0).

Dans cette situation particulière certains événements étant de probabilité nulle par hypothèse, il est possible de garder la même modélisation que précédemment. Ce ne serait plus possible néanmoins si le modèle de départ était une chaîne de Markov à quatre états.

91. Marche aléatoire en dimension 1

A. Non bloqué aux extrémités

1. Les probabilités de passage d'une case à la case suivante ne dépendent que de la case actuelle. (A_n) est donc une chaîne de Markov homogène dont le graphe est :



b) On obtient la matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

ainsi que $\pi_0 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$.

2. On a, pour tout entier naturel $\pi_n = \pi_0 M^n$.

Ainsi $\pi_5 = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{32} \end{pmatrix}$

Ainsi la probabilité qu'il se trouve en case 2 est de $\frac{5}{32}$, en case 0 de $\frac{1}{16}$

3. On a :

$\pi_{10} = \begin{pmatrix} \frac{55}{256} & \frac{165}{1024} & \frac{127}{512} & \frac{165}{1024} & \frac{55}{256} \end{pmatrix}$;

$\pi_{20} \approx (0,2 \quad 0,195 \quad 0,21 \quad 0,195 \quad 0,2)$;

$\pi_{30} \approx (0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2)$.

On peut conjecturer que la suite des distributions converge.

On résout le système $\pi = \pi M$ et on détermine une unique solution $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

B. Bloqué aux extrémités

La chaîne de Markov admet cette fois la matrice de transition suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\pi_{10} = \begin{pmatrix} \dfrac{31}{64} & 0 & \dfrac{1}{32} & 0 & \dfrac{31}{64} \end{pmatrix};$$

$$\pi_{20} = \begin{pmatrix} \dfrac{1023}{2\,048} & 0 & \dfrac{1}{1024} & 0 & \dfrac{1023}{2\,048} \end{pmatrix}.$$

Les distributions convergent vers :

$$\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

C. Simulation d'une marche aléatoire

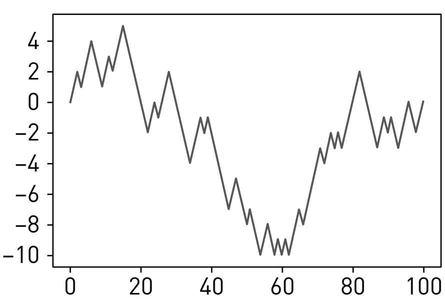
On complète le programme :

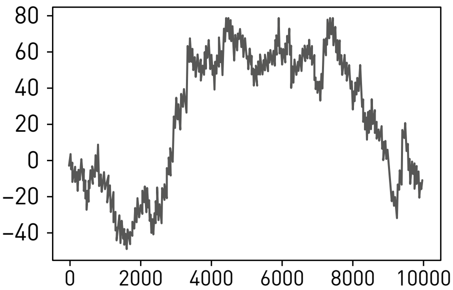
```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def automate(n):
    positions=[0]
    for i in range(n):
        p=positions[-1]
        if random.random()<0.5 :
            p=p+1
        else :
            p=p-1
        positions.append(p)
    return positions
print(automate(10000))
```

On s'éloigne de plus en plus de 0 d'un côté ou de l'autre mais on observe le retour en 0 qui s'effectue ensuite.

On pourra profiter de cet exercice pour aller plus loin et travailler en programmation sur les retours en 0 avec des représentions graphiques. On fournit quelques éléments dans ce sens.

```
x=np.array([k for k in range(10001)])
y=np.array(automate(10000))
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

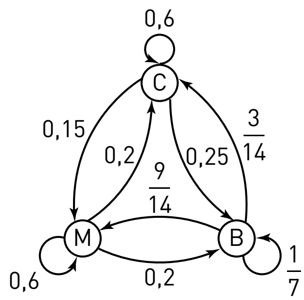




92. Séances d'accompagnement personnalisé

1. Les probabilités d'intégration des élèves dans les groupes la semaine suivante ne dépendent que de la position des élèves dans les groupes la semaine présente. On peut modéliser le problème via une chaîne de Markov à trois états C, M, B. On peut donner la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ \dfrac{3}{14} & \dfrac{9}{14} & \dfrac{1}{7} \end{pmatrix}$$



2. On a $\pi_0 = (0 \quad 0 \quad 1)$ et pour tout entier naturel, $\pi_n = \pi_0 M^n$.

3. a) $\pi M = \pi$

b) On en déduit qu'un état stable est donné par $\dfrac{1}{787}\pi$.

4. a)

```
import numpy as np
u=np.array([0, 0, 1])
M=np.array([[0.6, 0.15, 0.25],[0.2, 0.6, 0.2],
           [3/14, 9/14, 1/7]])
for k in range(1,8):
    u=u.dot(M)
print(u[1])
```

b) Le programme renvoie environ 0,46. Cette valeur correspond au premier coefficient de la matrice ligne π_7, soit donc la probabilité qu'un élève se trouve en groupe moyen.

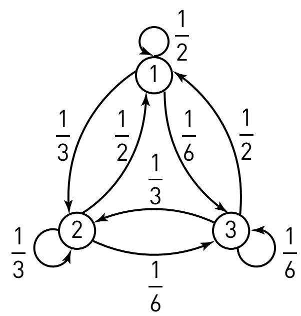
b) On modifie le programme et on obtient une probabilité d'environ 0,21 pour les élèves en besoin. L'AP semble effectivement efficace.

93. Jeu de société

1. Les probabilités de position future du pion ne dépendent *a priori* que du nombre de dés à tirer donc que de la case où il se trouve présentement. En réalité, en regardant ces probabilités, on conçoit que ces probabilités ne dépendent pas même de ce nombre de dés.

On peut établir un modèle de Markov afin d'étudier la position du pion. Cette chaîne est homogène, la position ne dépend en aucun cas de l'instant regardé.

2. On obtient $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et



3. Il s'agit de considérer l'union disjointe d'événements :

$$(\cap_{i=0}^{2}(X_i = 1)) \cup (\cap_{i=0}^{2}(X_i = 2)) \cup (\cap_{i=0}^{2}(X_i = 2)).$$

Après simplification et utilisation de la propriété de Markov, on obtient comme probabilité de cet événement :

$$\frac{1}{4}P(X_0 = 1) + \frac{1}{9}P(X_0 = 2) + \frac{1}{36}P(X_0 = 3).$$

Au bout de trois tours, on obtient :

$$\frac{1}{8}P(X_0 = 1) + \frac{1}{27}P(X_0 = 2) + \frac{1}{216}P(X_0 = 3).$$

94. Seulement le graphe

La chaîne de Markov considérée admet quatre états et l'on peut donner sa matrice de transition :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$$

π est une distribution invariante pour cette chaîne si, seulement si,

$$\pi = (0 \quad x \quad y \quad 0),$$

avec $x + y = 1$. Ainsi si la chaîne converge, le système concerné n'atteindra presque surement que les états B et C.

Finalement, on peut s'intéresser aux puissances de la matrice. On peut conjecturer puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a $Q^n = Q$, d'où $\pi_n = \pi_0 Q$. Ainsi selon la distribution initiale, le système se retrouve dans l'état B ou C d'une manière plus ou moins probable.

95. Marche sur un triangle

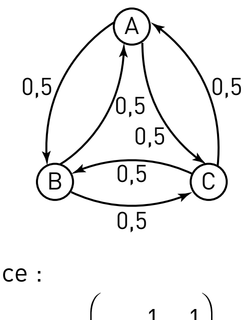
1. Les probabilités de position future du lapin ne dépendent que du sommet où il se trouve à l'instant présent.

On peut construire alors une chaîne de Markov dont les trois états sont les sommets du triangle. Les probabilités dépendent du triangle considéré.

2. a) On la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

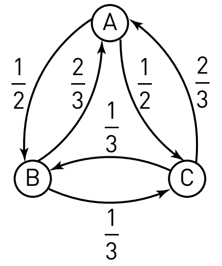
et le graphe :



b) On la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

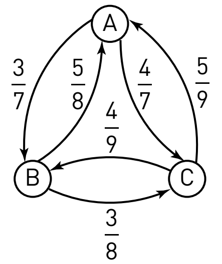
et le graphe :



c) On a la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

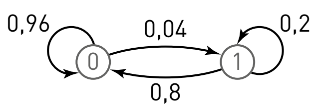
et le graphe :



96. Dans une salle de jeu

1. a) Pour tout entier naturel les probabilités que le système se trouve dans le futur dans un état donné ne dépendent pas de l'instant ni des états passés, juste de l'état présent. On peut alors définir une chaîne de Markov dont l'espace d'états est {0 ; 1} (considérer une chaîne à trois états {0 ; 1 ; 2} semble ici inutile du fait d'une image impossible). Sa matrice de transition est donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$



b) La distribution invariante de cette chaîne est $\pi = \begin{pmatrix} \frac{20}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$. On peut ajouter ainsi qu'il est très improbable selon cette modélisation qu'après un grand nombre de jours il y ait un simulateur en panne en début de soirée.

2. Il s'agit cette fois de considérer (X_n) comme une chaîne de Markov à trois états {0 ; 1 ; 2}. En effet, le réparateur laisse passer une journée avant de venir, il peut y avoir deux simulateurs en panne lors d'une soirée. Ainsi, on a : $Q = \begin{pmatrix} 0{,}64 & 0{,}32 & 0{,}04 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. En gardant un espace d'états comme dans les questions précédentes, c'est-à-dire en ne comptant que le nombre de machines en panne, il faudrait les informations données par deux jours consécutifs. Aussi on ne serait plus dans une situation de Markov.

On introduit alors deux nouveaux états :

$(X_n = 1_2)$ = le n-ième jour il y a une machine en panne dont c'est le deuxième jour de réparation ;

$(X_n = 2_2)$ = le n-ième jour il y a deux machines en panne avec une dont c'est le deuxième jour de réparation.

On obtient alors une chaîne de Markov à 5 états dont la matrice de transition est donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}64 & 0{,}32 & 0{,}04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette situation, la probabilité que les deux simulateurs fonctionnent au bout de trois soirées s'ils fonctionnaient la première soirée est environ 0,467.

97. Mouton d'hier, mouton d'aujourd'hui

1. La première stratégie peut être modélisée par une chaîne de Markov à trois états qui sont les gènes mm, Mm, MM chez le mouton.

On dresse la matrice de transition :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Le caractère du mouton correspond donc aux états Mm et MM.

La seconde stratégie peut être modélisée par chaîne de Markov à deux états qui sont l'absence ou la présence de ce caractère chez le mouton. On a la matrice suivante : $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Il est clair que la stratégie 2 permet de faire apparaître directement le caractère à tout le troupeau dès la deuxième génération.

Concernant la stratégie 1, calculons quelques distributions selon la distribution initiale. Plusieurs manières de traiter la question sont possibles : calculer la puissance n-ième de la matrice ; ou juste conjecturer sa convergence avec la calculatrice. On conjecture que la suite des puissances converge vers la matrice

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Ensuite si l'on considère une distribution initiale $\pi = (x \quad y \quad z)$, la suite des distributions converge vers : $(0{,}25 \quad 0{,}5 \quad 0{,}25)$.

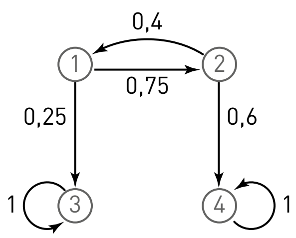
Ainsi quelle que soit la répartition initiale du troupeau, au bout d'un certain temps, il n'y a qu'une chance sur quatre pour que le mouton choisi au hasard soit encore sans le caractère donné.

98. Chaîne à quatre états

A. Étude de probabilités

1. Si le système est dans l'état 3 ou 4, alors il y reste l'instant d'après de manière quasi certaine. On parle d'états absorbants.

2.



3. Les probabilités dépendent bien évidemment de la distribution initiale. On a, en utilisant les probabilités conditionnelles, les propriétés de Markov et les probabilités de transition en plusieurs étapes :

$P((X_0 = 1) \cap (X_1 = 3)) = 0{,}6P(X_0 = 1)$;

$P((X_0 = 1) \cap (X_2 = 4)) = \dfrac{3}{10}P(X_0 = 1)$;

$P((X_0 = 2) \cap (X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) = \dfrac{9}{20}P(X_0 = 2)$.

Les trois probabilités suivantes sont nulles car il est impossible de passer de l'état 2 à l'état 3.

4. On pose $\pi = (a \quad b \quad x \quad y)$ avec $a + b + x + y = 1$. On résout $\pi Q = \pi$ et on détermine que $a = b = 0$.

B. Modélisation

On dresse dans cette partie toute la modélisation qui nous conduit à construire une suite de variables aléatoires (X_n) dont l'ensemble image est constitué des quatre états de la plante et qui est une chaîne de Markov. Cette chaîne de Markov est celle étudiée dans la partie précédente.

1. Il s'agit d'une probabilité calculée plus haut avec $P(X_0 = 1) = 1$. On a donc

$P((X_0 = 1) \cap (X_2 = 4)) = \dfrac{3}{10}$.

2. Si l'on suppose que les distributions convergent, alors elles convergent vers un état invariant : les plantes deviennent soit stériles soit mortes, d'après la question 4. Le traitement sur la maladie ne fonctionne donc pas.

99. Chaînes à deux états

1. Si $Q = (q_{ij})$, alors on a $q_{11} + q_{12} = 1$ et $q_{21} + q_{22} = 1$. On pose alors $p = q_{12}$ et $q = q_{21}$.

2. On travaille par disjonction de cas suivant les valeurs de p et q.

Si $p = q = 0$, toute distribution est invariante car $Q = I_2$.

Si $p = q = 1$, il n'y a pas de distribution invariante.

Si p, q sont non tous deux nuls ou non tous deux égaux à 1, il y a une unique distribution invariante qui est $\begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.

3. a) On démontre par récurrence que, lorsque p, q sont non tous deux nuls, alors, pour tout entier naturel :

$$Q^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de simples multiplications matricielles.

b) Dans le cas souhaité, on a $1 - p - q \in]0\,;1[$ ainsi la suite de terme général $(1 - p - q)^n$ converge vers 0. On obtient donc comme matrice limite la matrice $\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$.

100. Rebâtir sur les cendres

A. 1. Si l'on note (π_n) la suite des distributions de cette chaîne de Markov, on a pour tout entier naturel n : $\pi_n = \pi_0 Q^n$.

Avec $\pi_0 = (0 \quad 0 \quad 1)$, on calcule $\pi_5 = \pi_0 Q^5$. La probabilité que la forêt soit à dominante eucalyptus en 2025 est environ égale à 0,236.

2. a) L'événement considère pour un entier naturel, le fait que la forêt soit à dominante eucalyptus trois années de suite.

b) La probabilité dépend bien évidemment de la probabilité que cela se produise la première année considérée. En utilisant les probabilités conditionnelles ainsi que la propriété de Markov, on a :

$$P((X_n = E) \cap (X_{n+1} = E) \cap (X_{n+2} = E)) = 0{,}25P(X_n = E).$$

Ainsi lorsque pour une année donnée on se retrouve à dominante eucalyptus, il n'y a qu'une chance sur quatre pour que l'on puisse réintroduire des koalas après deux ans.

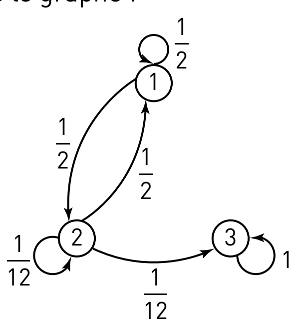
B. Si l'on note (r_n) la suite des distributions de cette chaîne de Markov, on a pour tout entier naturel n :

$$r_n = r_0 M^n.$$

Avec $r_0 = (1 \ 0)$, on calcule $r_5 = r_0 M^5$. La probabilité que la forêt subisse un incendie en 2025 est donc environ de 0,36.

101. Dresser une araignée

1. On dresse le graphe :



2. On a $\pi_1 = \pi_0 Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère le système complet d'événements $((X_n = i))$ pour $i = 1,2,3$. D'après la formule de la probabilité totale, on a $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2)$.

4. De même, on a

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{12}P(X_n = 2).$$

5. Pour tout entier naturel n, on a, d'après les deux questions précédentes, $v_{n+1} = v_n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

Une récurrence immédiate nous fournit

$$v_n = v_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}^n.$$

6. On a :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Finalement $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}^n = P \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$

On alors :

$$(P(X_n = 1) \ P(X_n = 2)) = (1 \quad 0) \ P \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On peut placer des coefficients littéraux pour les deux matrices et obtenir ainsi l'existence de deux réels a et b tels que :

$$P(X_n = 1) = a\left(\frac{5}{6}\right)^n + b\left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

7. Comme $0 < \frac{5}{6} < 1$ et $-1 < -\frac{1}{4} < 0$ on obtient, par limites de suites géométriques :

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - P(X_n = 1) = 1.$$

Or P (l'araignée obéit à l'ordre à l'instant n) $= 1 - P(X_n = 1)$. Ainsi au bout d'un certain temps l'araignée obéira à l'ordre.

102. Chaînes et congruences

1. Pour tout entier naturel, $X_n(\Omega) = \mathbb{Z}$. Soit $e \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(X_{n+1} = e) \Leftrightarrow (\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} Y_i = e) \Leftrightarrow (Y_{n+1} = e - X_n).$$

Ainsi les probabilités de positions à l'instant $n + 1$ ne dépendent que de l'état à l'instant n. La suite (X_n) constitue donc une chaîne de Markov à ensemble d'états infini, dénombrable.

2. Il s'agit de déterminer une probabilité de retour en 0 en n étapes.

Par hypothèse : $n \equiv 1$, 2 [3]. On s'intéresse ainsi à l'événement $(X_n = 2x - y = 0)$ où x et y sont des entiers naturels avec $x + y = n$.

On résout ainsi l'équation diophantienne :

$2x - y = 0$ de couples solutions $(k\ ;\ 2k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $n = 3k \equiv 0$ [3]. $(X_n = 0)$ est un événement impossible si n n'est pas un multiple de 3.

103. Trajectoires

1. La trajectoire VRR correspond à l'événement $((X_0 = V) \cap (X_1 = R) \cap (X_2 = R))$.

2. C'est la définition d'une chaîne de Markov.

3. Cette probabilité dépend de la distribution initiale de la chaîne de Markov :

$$P((X_0 = V) \cap (X_1 = R) \cap (X_2 = B)) = 0{,}16P(X_0 = V).$$

On peut alors effectuer plusieurs hypothèses pour la distribution initiale : soit l'on choisit une ville de départ avec probabilité de 1, soit on considère que les trois villes peuvent être choisies de manière équiprobable.

4. Les probabilités des trajectoires BRB et RBV sont respectivement $0{,}36P(X_0 = B)$ et $0{,}12P(X_0 = R)$. Si l'on suppose que la ville de départ est choisie de manière équiprobable, alors la première trajectoire est la plus probable.

5. On a $Q^2 = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}52 & 0{,}33 \\ 0{,}135 & 0{,}61 & 0{,}255 \\ 0{,}15 & 0{,}46 & 0{,}39 \end{pmatrix}$ et

$Q^3 = \begin{pmatrix} 0{,}141 & 0{,}562 & 0{,}297 \\ 0{,}144 & 0{,}529 & 0{,}327 \\ 0{,}138 & 0{,}586 & 0{,}276 \end{pmatrix}$. On en déduit donc

que la probabilité qu'elle revienne dans la même ville deux jours après l'avoir quittée est 0,946.

104. Matrices stochastiques

A. 1. Remarquons que AX est une matrice colonne.
$AX = X \Leftrightarrow$ pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$ le i-ème coefficient de la matrice colonne AX est égal au i-ème coefficient de X qui est 1.

D'où $AX = X \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} \times 1 = 1$, $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$.

2. Soit A, $B \in S_n$, ainsi $\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1$ et $\sum_{j=1}^{n} b_{i\,j} = 1$.

On note $AB = (c_{i\,j})$. D'après la question précédente : $ABX = A(BX) = AX = X$.

Ainsi, comme $ABX = X$ on a $\sum_{j=1}^{n} c_{i\,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$ et $AB \in S_n$.

B. 1. a) Si $A = (a_{i\,j})$, alors on a $a_{1\,1} + a_{1\,2} = 1$ et $a_{2\,1} + a_{2\,2} = 1$. On pose alors $p = a_{1\,1}$ et $q = a_{2\,2}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^{2n} = I_2$ et $A^{2n+1} = A$.

Si $A = I_2$, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = A$.

2. a) On évalue le polynôme en $x = 1$ et en $x = p + q - 1$. On trouve alors :

$$a = \frac{(p+q-1)^n - 1}{p+q-2}$$

$$b = 1 + \frac{1 - (p+q-1)^n}{p+q-2}.$$

b) Il s'agit de concevoir le polynôme avec évaluation matricielle. On obtient, pour $X = A$:
$A^n = (A - I_n)(A - (p + q - 1)I_n)P(A) + aA + bI_n$.
On vérifie que $(A - I_n)(A - (p + q - 1)I_n)$ est la matrice nulle.
On obtient alors :
$A^n = aA + bI_n$

$$= \begin{pmatrix} 1 + (1-p)\dfrac{(p+q-1)^n - 1}{p+q-2} & (1-p)\dfrac{(p+q-1)^n - 1}{p+q-2} \\ (1-q)\dfrac{(p+q-1)^n - 1}{p+q-2} & 1 + (1-q)\dfrac{(p+q-1)^n - 1}{p+q-2} \end{pmatrix}.$$

c) On a $p + q \notin \{ 0 ; 2\}$ donc $p + q - 1 \in]-1 ; 1[$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} a = \frac{-1}{p+q-2} ; \lim_{n\to+\infty} b = 1 + \frac{1}{p+q-2}.$$

Ainsi la matrice converge vers

$$B = \begin{pmatrix} \frac{q-1}{p+q-2} & \frac{p-1}{p+q-2} \\ \frac{q-1}{p+q-2} & \frac{p-1}{p+q-2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie $\frac{q-1}{p+q-2} + \frac{p-1}{p+q-2} = 1$, d'où $B \in S_2$.

3. Supposons que B soit la limite de la suite. Par récurrence immédiate, $A^N \in S_n$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Ainsi $\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}^{(N)} = 1$ et par somme de limites,

$1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}^{(N)} = \sum_{j=1}^{n} \lim_{N\to+\infty} a_{i\,j}^{(N)} = \sum_{j=1}^{n} b_{i\,j}$.

D'où $B \in S_n$.

On conclut en étudiant la limite d'un produit matriciel par somme et produits de limites sur les réels et en utilisant la relation $A^{2n} = A^n A^n$.

Travaux pratiques p. 234-235

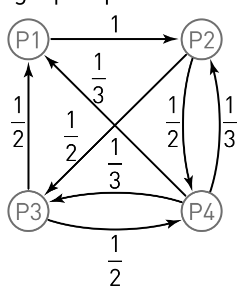
TP1. Algorithme *PageRank*

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Comprendre la manière dont Google attribue et évalue la pertinence des pages web dans un réseau. On travaille sur deux exemples.

A. Un premier exemple

1. P1 contient un lien ; P2 deux liens ; P3 deux liens et P4 trois liens.

2. On obtient le graphe probabiliste:



3. On obtient :

$s_1 = \frac{1}{3}s_4 + \frac{1}{2}s_3$; $s_2 = \frac{1}{3}s_4 + s_1$;

$s_3 = \frac{1}{3}s_4 + \frac{1}{2}s_2$; $s_4 = \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3$.

D'où le système donné.

4. On résout le système et on trouve :

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{34} & \frac{5}{17} & \frac{4}{17} & \frac{9}{34} \end{pmatrix}$$

La page P2 a le plus haut score.

B. Deuxième exemple

On obtient le système de 12 équations suivant :

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{2}s_4 + \frac{1}{2}s_3 \\ s_2 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{2}s_4 \\ s_3 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{2}s \\ s_4 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{2}s_3 \\ s_5 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{4}s_9 + s_7 \\ s_6 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{2}s_5 \\ s_7 = s_6 + \frac{1}{2}s_8 \\ s_8 = \frac{1}{2}s_5 \\ s_9 = \frac{1}{2}s_8 + \frac{1}{2}s_{10} + \frac{1}{2}s_{11} + \frac{1}{2}s_{12} \\ s_{10} = \frac{1}{4}s_9 + \frac{1}{2}s_{12} \\ s_{11} = \frac{1}{4}s_9 + \frac{1}{2}s_{10} \\ s_{12} = \frac{1}{4}s_9 + \frac{1}{2}s_{11} \end{cases}$$

On obtient la solution suivante :

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \\ s_5 = \dfrac{4}{21} \\ s_6 = \dfrac{2}{21} \\ s_7 = \dfrac{1}{7} \\ s_8 = \dfrac{2}{21} \\ s_9 = \dfrac{4}{21} \\ s_{10} = \dfrac{2}{21} \\ s_{11} = \dfrac{2}{21} \\ s_{12} = \dfrac{2}{21} \end{cases}$$

Les pages qui ont le plus haut score sont P5 et P9.

TP2. Urnes d'Ehrenfest

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Introduire un problème historique sur les phénomènes mécaniques dans l'étude des mouvements de particules. Travailler sur les listes et les représentations graphiques en Python.

A. Simulation du modèle

1.

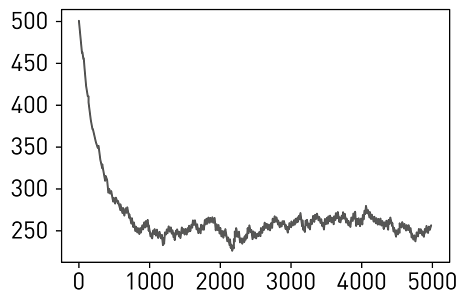
```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def Ehrenfest (N,n):
    A =[i for i in range (1,N+1)]
    Xn =[len(A)]
    for k in range (n):
        b = random.randint (1,N)
        if b in A:
            A.remove (b)
        else :
            A.append (b)
        Xn.append (len(A))
    return Xn
```

2. a)

```
def courbeEhrenfest (N,n):
    x = np.array ([k for k in range(n+1)])
    return plt.plot (x, Ehrenfest(N,n))
courbeEhrenfest (500,1000)
```

b) courbe Ehrenfest(500 , 2000)

Courbe Ehrenfest(500 , 5000)



Pour différentes valeurs de N, on constate que les X_n tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Plus N augmente plus la convergence est rapide.

B. Étude du modèle

1. Les valeurs de X_n ne dépendent, étape après étape, que de la valeur précédente. Les probabilités d'effectifs dans l'instant futur de l'urne A ne dépendent donc que du nombre de boules à l'instant présent. La suite de variables aléatoires (X_n) est donc une chaîne de Markov d'ensemble d'états $[\![0 ; N]\!]$.

2. La distribution initiale est une matrice de dimension $1 \times (N + 1)$:

$$\pi_0 = (0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1).$$

3. D'une étape sur l'autre, les valeurs de la suite de variables ne peuvent différer que de 1.

4. a) S'il n'y a aucune boule dans l'urne A, elles sont toutes dans l'urne B et au prochain tirage de numéro, il y aura avec certitude une boule dans l'urne A. Ainsi $Q(0\ ,\ 1) = 1$. On a aussi

$Q(N - 1\ ,\ N) = \dfrac{1}{N}$ car il ne reste alors qu'une boule dans l'urne B.

b) $Q(i\ ,j) = 0$ si les valeurs ne sont pas consécutives.

c) On a alors $Q(i\ ,\ i + 1)= 1 - \dfrac{i}{N}$ et $Q(i\ ,\ i - 1) = \dfrac{i}{N}$.

5. Outre les deux extrémités, chaque flèche allant vers la droite a pour poids $1-\dfrac{i}{N}$ et vers la gauche $\dfrac{i}{N}$. On peut écrire la matrice sous cette forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Pour $N = 4$, on a donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque n est pair, la distribution répartit les poids sur les effectifs pairs avec une probabilité de $\dfrac{3}{4}$ pour une répartition égale dans les deux urnes et lorsqu'il est impair, ils sont répartis sur les impairs, de manière équitable.