Mathématiques

Hyperbole 1re

NOUVEAU PROGRAMME 2019

Livre du professeur

Sous la direction de Joël Malaval

Michel Bachimont
Jean-Luc Bousseyroux
Bernard Chrétien
Pierre-Antoine Desrousseaux
Fabrice Destruhaut
Anne Keller
Jean-Marc Lécole
Isabelle Lericque
Annie Plantiveau
Frédéric Puigredo
Joël Ternoy
Mickaël Védrine
Myriam Vialaneix

Nathan

25 avenue Pierre de Coubertin, 75013 PARIS
ISBN : 978-209-172909-1

Sommaire

1 Suites numériques

Découvrir

1 Évolutions successives à accroissements constants

1

Rangée	1	2	3	4	5
Nombre de bâtonnets sur la rangée	3	7	11	15	19

2 **a)** Pour obtenir u_{n+1}, on ajoute 4 à u_n.
En effet, à la $(n+1)$-ième rangée, on a le même nombre de bâtonnets qu'à la n-ième rangée plus 2 bâtonnets de chaque côté.
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 4$.
c) Pour calculer u_{100}, il faudrait connaître u_{99}, donc u_{98}, u_{97}, …

3 **a)**

n	1	2	3	4	5
$4n$	4	8	12	16	20
u_n	3	7	11	15	19

Il semble que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, $u_n = 4n - 1$.
b) $u_8 = 4 \times 8 - 1 = 32 - 1 = 31$.

2 Évolutions successives à taux constant

1

Carré	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4
Aire (en cm^2)	64	16	4	1

2 **a)** On obtient a_{n+1} en multipliant a_n par :
$1 - \dfrac{75}{100} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}25 \times a_n$.

3 **a)** • $a_1 = 0{,}25 \times 64$.
$a_2 = 0{,}25 \times a_1 = 0{,}25^2 \times 64$.
On multiplie 64, deux fois par 0,25 pour obtenir a_2.
• $a_3 = 0{,}25 \times a_2 = 0{,}25^3 \times 64$.
On multiplie 64, trois fois par 0,25 pour obtenir a_3.
• $a_4 = 0{,}25 \times a_3 = 0{,}25^4 \times 64 = a_0 \times 0{,}25^4$.
b) Il semble que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times 0{,}25^n$.
c) Pour 10 carrés, le plus petit a pour aire, en m^2 :
$a_9 = a_0 \times 0{,}25^9 = 64 \times 0{,}25^9$.
$1\text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2$, donc l'aire du plus petit carré est $64 \times 0{,}25^9 \times 10^4\ \text{cm}^2$ c'est-à-dire environ 2 cm^2.

Acquérir des automatismes

3 • $b_5 = 5 \times 5 - 4 = 25 - 4 = 21$
• $b_{100} = 5 \times 100 - 4 = 496$

4 • $w_0 = -2$ • $w_1 = 1$ • $w_2 = 0$ • $w_3 = -5$
• $w_4 = -14$ • $w_5 = -27$ • $w_6 = -44$ • $w_7 = -65$
• $w_8 = -90$ • $w_9 = -119$ • $w_{10} = -152$

5 • $t_3 = 3 \times 3^2 - 33 \times 3 + 72 = 27 - 99 + 72 = 0$
• $t_8 = 3 \times 8^2 - 33 \times 8 + 72 = 192 - 264 + 72 = 0$
Ainsi, $t_3 = t_8$.

6 **a)** $k_1 = 5k_0 - 7 = 5 \times (-5) - 7$
$k_1 = -25 - 7 = -32$
b) $k_2 = 5k_1 - 7 = 5(-32) - 7 = -167$
$k_3 = 5k_2 - 7 = 5(-167) - 7 = -842$

7

n	0	1	2	3	4
z_n	2	4	16	256	65 536

10 **a)** $w_{100} = w_0 + 100r = 1 + 100 \times (-2) = -199$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$w_n = w_0 + nr = 1 + (-2)n = 1 - 2n$$

11 $k_{100} = k_5 + (100 - 5)r = -50 + 95 \times 0{,}5 = -2{,}5$

12 **a)** $t_6 = t_2 \times q^{6-2} = -2{,}5 \times 3^4 = -202{,}5$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$t_n = t_2 \times q^{n-2} = -2{,}5 \times 3^{n-2}$$

Remarque : $3^{n-2} = \dfrac{3^n}{3^2} = \dfrac{1}{9} \times 3^n$

donc $t_n = -\dfrac{2{,}5}{9} \times 3^n = -\dfrac{25}{90} \times 3^n = -\dfrac{5}{18} \times 3^n$

13 $m_{10} = m_{15} \times q^{10-15} = 7 \times 0{,}1^{-5} = 700\,000$

16 **a)** $\mathrm{S}_n = u_2 + (u_2 - 1{,}5) + (u_2 - 2 \times 1{,}5) + \ldots$
$+ (u_2 - (n-2) \times 1{,}5)$

$\mathrm{S}_n = \underbrace{u_2 + u_2 + \ldots + u_2}_{(n-2+1)\text{ fois}} - 1{,}5 \times (1 + 2 + \ldots + (n-2))$

$\mathrm{S}_n = (n-1)u_2 - 1{,}5 \times (1 + 2 + \ldots + (n-2))$

$\mathrm{S}_n = 0{,}5(n-1) - 1{,}5 \times \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$

$\mathrm{S}_n = 0{,}5(n-1) - 0{,}75(n-2)(n-1)$

$\mathrm{S}_n = (n-1)[0{,}5 - 0{,}75(n-2)]$

$\mathrm{S}_n = (n-1)(-0{,}75n + 2)$

$\mathrm{S}_n = -0{,}75n^2 + 2{,}75n - 2$

b) Avec la calculatrice, on lit que $\mathrm{S}_n = -77$ pour $n = 12$.

17 $\mathrm{S} = v_1 + 2v_1 + 2^2 v_1 + \ldots + 2^7 v_1$

$\mathrm{S} = v_1(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^7)$

$\mathrm{S} = -1 \times \dfrac{1 - 2^8}{1 - 2} = 1 - 2^8 = -255$

18 $\mathrm{T} = w_2 + 0{,}8w_2 + 0{,}8^2 w_2 + \ldots + 0{,}8^5 w_2$

$\mathrm{T} = w_2(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^5)$

$\mathrm{T} = 10 \times \dfrac{1 - 0{,}8^6}{1 - 0{,}8} = 50(1 - 0{,}8^6)$

$\mathrm{T} = 36{,}892\,8$

19 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $2n + 1$ est un nombre impair. Donc l'affirmation (**2**) est exacte.

20 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $c_n = n^2$.

21 Par exemple, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = n^2 - 3n + 1$$

22 $a_1 = 3 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = 3 \quad a_4 = -1$
et ainsi de suite.
Il semble que pour tout n impair, $a_n = 3$ et pour tout n pair, $a_n = -1$.

23 $u_1 = 4 \times 1 - 1 = 3$

$v_1 = 4v_0 - 1 = 4 \times (-1) - 1 = -5$

Donc $u_1 > v_1$ et l'affirmation **(2)** est vraie.

24 Par exemple, $u_0 = 5$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 1$.

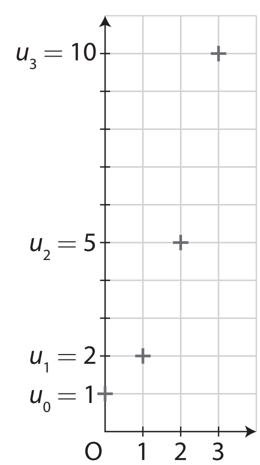
25 • $u_0 = -2$ • $u_1 = -0{,}5$ $u_2 = 0$
• $u_3 = 0{,}25$ • $u_4 = 0{,}4$

26 • $u_0 = 1$ • $u_1 = \sqrt{3}$ $u_2 = \sqrt{5}$
• $u_3 = \sqrt{7}$ • $u_4 = \sqrt{9} = 3$

27 • $u_0 = \dfrac{1}{2}$ • $u_1 = \dfrac{5}{6}$ $u_2 = \dfrac{7}{6}$
• $u_3 = \dfrac{3}{2}$ • $u_4 = \dfrac{11}{6}$

28 **a)** • $u_0 = 1$ • $u_1 = 2$ • $u_2 = 5$ • $u_3 = 10$

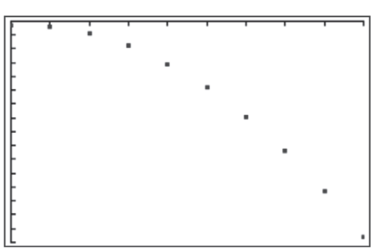
b)



c) $u_n = 50$ équivaut à $n^2 + 1 = 50$ c'est-à-dire $n^2 = 49$ soit $n = 7$ ou $n = -7$.
Or, $n \in \mathbb{N}$, donc $u_n = 50$ pour $n = 7$.

29

n	u(n)
0	-3
1	-4
2	-9
3	-18
4	-31
5	-48
6	-69
7	-94
8	-123
9	-156
10	-193



(*fenêtre :* $0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 11$, pas 1 et $-160 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 0$, pas 10)

30 **a)** $u_0 = 4$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n$.

b) $u_1 = u_0^2 - 2u_n = 4^2 - 2 \times 4 = 16 - 8 = 8$

$u_2 = u_1^2 - 2u_1 = 8^2 - 2 \times 8 = 48$

$u_3 = u_2^2 - 2u_2 = 48^2 - 2 \times 48 = 2\,208$

c) Voici la valeur de u_6 affichée dans la console :

```
>>>
U = 5628827661246116195137233648
```

Remarque : la calculatrice affiche :

$$u_6 \approx 5{,}628\,827\,661 \times 10^{26}$$

31 **a)** $v_1 = -\dfrac{1}{2}v_0 + 1 = -\dfrac{1}{2} \times 2 + 1 = 0$

$v_2 = -\dfrac{1}{2}v_1 + 1 = -\dfrac{1}{2} \times 0 + 1 = 1$

$v_3 = -\dfrac{1}{2}v_2 + 1 = -\dfrac{1}{2} \times 1 + 1 = \dfrac{1}{2}$

b)

```
V ← 2
Pour i allant de 1 à n
    V ← −0,5V + 1
Fin Pour
```

c)

```
n=int(input("Entrer n ="))
V=2
for i in range(1,n+1):
    V=-0.5*V+1
print("V =",V)
```

Voici la valeur de v_{10} affichée dans la console :

```
>>>
V = 0.66796875
```

Ainsi, $v_{10} \approx 0{,}668$.

32 $k_1 = \dfrac{1}{1 + k_0} = \dfrac{1}{1 + 2} = \dfrac{1}{3}$

$k_2 = \dfrac{1}{1 + k_1} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$

$k_3 = \dfrac{1}{1 + k_2} = \dfrac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\frac{7}{4}} = \dfrac{4}{7}$

33 • $u_3 = -3u_2 + 1 = -3 \times (-4) + 1 = 13$

• $u_2 = -3u_1 + 1$ c'est-à-dire $u_1 = -\dfrac{1}{3}(u_2 - 1)$.

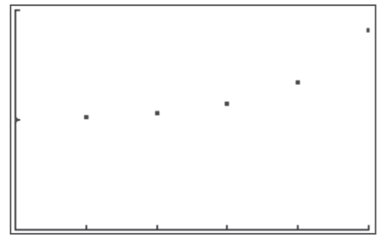
Ainsi, $u_1 = -\dfrac{1}{3}(-4 - 1) = \dfrac{5}{3}$.

• De la même façon, $u_0 = -\dfrac{1}{3}(u_1 - 1)$.

Ainsi, $u_0 = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3} - 1\right) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = -\dfrac{2}{9}$.

34

n	u
0	1
1	1.02
2	1.0608
3	1.1465
4	1.3374
5	1.8154
6	3.3321
7	11.17
8	124.99
9	15625
10	2.44E8



(*fenêtre :* $0 \leqslant X \leqslant 5$, pas 1 et $0 \leqslant Y \leqslant 2$, pas 1)

35 $u_1 = u_0 + 6$ soit $u_0 = u_1 - 6 = 4 - 6$.
L'affirmation **(3)** est exacte.

36 **a)** Oui : $2 - (-1) = 5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 3$

b) Non : $4 - 2 = 2$ mais $8 - 4 = 4$.

c) Non : $-8 - (-10) = 2$ mais $0 - (-8) = 8$.

d) Oui :

$3 - 7 = -1 - 3 = -5 - (-1) = -9 - (-5) = -4$

37 • $v_1 = 3$ • $v_2 = 5{,}5$ • $v_3 = 8$ • $v_4 = 10{,}5$

38 • $w_1 = -10$ • $w_2 = -20$ • $w_3 = -30$ • $w_4 = -40$

39 $t_5 - t_4 = 20 - 8 = 12$
Donc la suite arithmétique (t_n) a pour raison 12.

40 $h_6 = h_4 + (6 - 4)r$
$0 = 8 + 2r$ c'est-à-dire $r = -4$.
Donc la suite arithmétique (h_n) a pour raison -4.

41 • Succursale A :
$34 - 35 = 33 - 34 = -1$ mais $31 - 33 = -2$.
On ne peut pas modéliser le chiffre d'affaires de A avec une suite arithmétique.

• Succursale B :
$37 - 35 = 39 - 37 = 41 - 39 = 2$.
On peut modéliser le chiffre d'affaires de B durant ces 4 mois avec une suite arithmétique de raison 2.
Si l'évolution se poursuit ainsi, le chiffre d'affaires de B, le mois n (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$), sera $35 + 2(n - 1)$ c'est-à-dire $33 + 2n$.

42 • Pays A :
$0{,}60 - 0{,}57 = 0{,}63 - 0{,}60 = 0{,}66 - 0{,}63 = 0{,}03$.
Donc on peut modéliser l'évolution du prix du timbre-poste entre 2015 et 2018 dans ce pays A, avec une suite arithmétique de raison 0,03.
Si l'évolution se poursuit ainsi, le prix du timbre-poste, l'année $2015 + n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) sera $0{,}57 + 0{,}03n$, en euro.

• Pays B :

$0{,}53 - 0{,}51 = 0{,}02$ mais $0{,}57 - 0{,}53 = 0{,}04$.

Donc on ne peut pas modéliser l'évolution du prix du timbre-poste dans ce pays B avec une suite arithmétique.

• Pays C :

$0{,}58 - 0{,}60 = 0{,}56 - 0{,}58 = 0{,}54 - 0{,}56 = -0{,}02$.

Donc on peut modéliser l'évolution du prix du timbre-poste entre 2015 et 2018 dans ce pays C, avec une suite arithmétique.

Si l'évolution se poursuit ainsi, le prix du timbre-poste, l'année $2015 + n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) sera $0{,}60 - 0{,}02n$, en euros.

43 $u_8 = u_0 + 8r = 1 + 8 \times (-10) = -79$

44 $u_{50} = u_2 + (50 - 2)r$

$u_{50} = 3 + 48 \times 0{,}2 = 12{,}6$

45 • $u_3 = u_2 + r$ donc $r = u_3 - u_2$

soit $r = 5 - (-4) = 9$.

• $u_0 = u_2 + (0 - 2)r = -4 - 2 \times 9 = -22$

46 • $u_8 = u_6 + 2r$ soit $12 = 4 + 2r$

c'est-à-dire $2r = 8$. Ainsi, $r = 4$.

• $u_5 = u_6 + (5 - 6)r = 4 - 4 = 0$

47 • $u_{10} = u_2 + (10 - 2)r$ soit $1 = 7 + 8r$

c'est-à-dire $8r = -6$. Ainsi, $r = -\dfrac{3}{4}$.

• $u_0 = u_2 + (0 - 2)r = 7 - 2 \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{17}{2}$

48 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$b_n = b_1 + (n - 1)r$

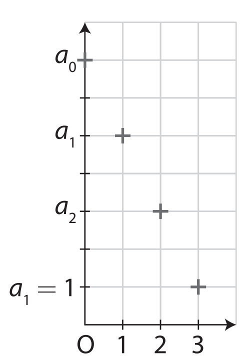
$b_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}(n - 1) = -\dfrac{1}{2}n + \dfrac{5}{4}$

49 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$a_n = a_0 + nr$

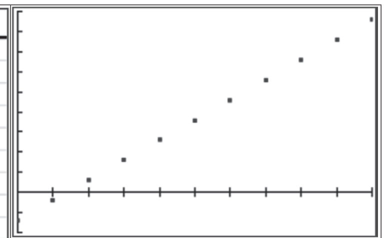
$a_n = 7 - 2n$

b)



50 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = -7 + 5n$.

n	u(n)
0	-7
1	-2
2	3
3	8
4	13
5	18
6	23
7	28
8	33
9	38
10	43



(*fenêtre :* $0 \leqslant X \leqslant 10$, pas 1 et $-10 \leqslant Y \leqslant 45$, pas 5)

51 **a)**

```
T=3.2
for i in range(1,16):
    T=T-1.5
    print("T",i,"=",T)
```

b) $t_{10} = -11{,}8$ et $t_{15} = -19{,}3$

52 $S = \dfrac{15 \times 16}{2} = 15 \times 8 = 120$

53 Le nombre de sons émis par l'horloge en 24 h est :

$2 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + 12) = 2 \times \dfrac{12 \times 13}{2} = 156$

54 $F = 3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 9 + 10)$

$F = 3 \times \dfrac{10 \times 11}{2} = 3 \times 5 \times 11 = 15 \times 11 = 165$

L'affirmation **(2)** est exacte.

55 $S = u_0 + (u_0 + 5) + (u_0 + 2 \times 5) + \ldots + (u_0 + 10 \times 5)$

$S = \underbrace{u_0 + u_0 + \ldots + u_0}_{11\,\text{termes}} + 5 \times (1 + 2 + \ldots + 10)$

$S = 11u_0 + 5 \times (1 + 2 + \ldots + 10)$

$S = 11 \times 2 + 5 \times \dfrac{10 \times 11}{2}$

$S = 11 \times (2 + 25) = 11 \times 27 = 297$.

56 $T = v_0 + (v_0 - 3) + (v_0 - 2 \times 3) + \ldots + (v_0 - 30 \times 3)$

$T = \underbrace{v_0 + v_0 + \ldots + v_0}_{31\,\text{termes}} - 3 \times (1 + 2 + \ldots + 30)$

$T = 31v_0 - 3(1 + 2 + \ldots + 30)$

$T = 31 \times 7 - 3 \times \dfrac{30 \times 31}{2}$

$T = 31 \times (7 - 45) = 31 \times (-38) = -1\,178$.

57 $E = w_0 + \left(w_0 + \dfrac{1}{2}\right) + \left(w_0 + 2 \times \dfrac{1}{2}\right) + \ldots + \left(w_0 + 15 \times \dfrac{1}{2}\right)$

$E = 16w_0 + \frac{1}{2} \times (1 + 2 + \ldots + 15)$

$E = 16 \times (-1) + \frac{1}{2} \times \frac{15 \times 16}{2}$

$E = 16 \times \left(-1 + \frac{15}{4}\right) = 16 \times \frac{11}{4} = 44.$

$44 \in \mathbb{N}$ donc Émilie a raison.

58 $S_n = a_0 + (a_0 + 1{,}5) + \ldots + (a_0 + 1{,}5n)$

$S_n = (n+1)a_0 + 1{,}5 \times (1 + 2 + \ldots + n)$

Or, $a_0 = a_2 + (0-2)r = -1 - 2 \times 1{,}5 = -4.$

Donc, $S_n = -4(n+1) + 1{,}5 \times \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = (n+1)(-4 + 0{,}75n)$

59 **a)** De 2 à 4, il y a 3 nombres $(4 - 2 + 1 = 3)$.

De 2 à 10, il y a 9 nombres $(10 - 2 + 1 = 9)$.

De 2 à 100, il y a 99 nombres $(100 - 2 + 1 = 99)$.

b) $F = h_2 + (h_2 + 5) + (h_2 + 2 \times 5) + \ldots + (h_2 + 98 \times 5)$

$F = 99h_2 + 5 \times (1 + 2 + \ldots + 98)$

$F = 99 \times 3 + 5 \times \frac{98 \times 99}{2}$

$F = 99 \times (3 + 5 \times 49) = 99 \times 248 = 24\,552$

60 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + 180$.

b) La suite (p_n) est arithmétique de raison 180, donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $p_n = 1000 + 180n$.

On note S le nombre de puces que prévoit de fabriquer l'usine de 2019 à 2025.

$S = p_0 + p_1 + \ldots + p_6$

$S = p_0 + (p_0 + 180) + \ldots + (p_0 + 6 \times 180)$

$S = 7p_0 + 180 \times (1 + 2 + \ldots + 6)$

$S = 7 \times 1000 + 180 \times \frac{6 \times 7}{2}$

$S = 7 \times (1000 + 3 \times 180) = 7 \times 1540 = 10\,780$

L'usine prévoit de fabriquer 10 780 puces de 2019 à 2025.

61 $u_1 = qu_0$ c'est-à-dire $5 = 4u_0$ soit $u_0 = \frac{5}{4}$.

L'affirmation **(1)** est exacte.

62 **a)** Non : $\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$ mais $\frac{30}{16} = 1{,}875$

b) Oui : $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = \frac{0{,}1}{1} = \frac{0{,}01}{0{,}1} = 0{,}1$

c) Non : $\frac{0}{-10} = 0$ mais $\frac{20}{10} = 2$

d) Oui : $\frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \frac{-32}{16} = -2$

63 Il avait recouvert la moitié de l'étang au bout de 39 jours.

64 • $v_1 = 1$ • $v_2 = 5$ • $v_3 = 25$ • $v_4 = 125$

65 $t_5 = qt_4$ c'est-à-dire $7{,}5 = 5q$

soit $q = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$.

66 $h_6 = q^2h_4$ c'est-à-dire $54 = 6q^2$ soit $q^2 = 9$.

Ainsi, $q = 3$ ou $q = -3$.

67 **a)** $\frac{1200}{1500} = \frac{960}{1200} = \frac{768}{960} = 0{,}8$

On constate donc que les taux d'évolution d'un mois au mois suivant sont constants. Il s'agit d'une baisse de 20 %.

b) On note h_n la hauteur d'eau, en mm, dans le puits le n-ième mois après le 1er juin. (h_n) est la suite géométrique de raison 0,8 telle que $h_0 = 1500$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $h_n = 1500 \times 0{,}8^n$.

c) $h_{12} = 1500 \times 0{,}8^{12}$ et $h_{12} \approx 103$.

Le 1er juin de l'année suivante, il y aura environ 103 mm d'eau dans le puits si l'évolution continue ainsi.

68 $u_8 = u_0q^8 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{2^4}{2^8} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

69 $u_0 = u_6q^{0-6} = 9 \times (-3)^{-6} = \frac{3^2}{3^6} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

70 $u_{10} = qu_9$ soit $18 = q \times (-6)$

c'est-à-dire $q = \frac{18}{-6} = -3$.

71 **a)** $v_7 = v_4q^3$ soit $-32 = -4q^3$

c'est-à-dire $q^3 = 8$. Ainsi $q = 2$.

b) $v_{10} = v_4q^6 = -4 \times 2^6 = -256$

72 **a)** $k_6 = k_4q^2$ soit $510 = 2\,040q^2$

c'est-à-dire $q^2 = \frac{510}{2\,040} = \frac{1}{4}$.

Or, $q < 0$, donc $q = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$k_n = k_4q^{n-4} = 2\,040 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

Remarque : $k_n = 2\,040 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$

c'est-à-dire $k_n = 2\,040 \times 16 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 32\,640 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

c) $k_9 = 2\,040 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{9-4} = 2\,040 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5$

$k_9 = -\frac{2\,040}{32} = -63{,}75$

172909_Chap01_000-000.indd 9 25/07/2019 17:48:20

73 • On note (u_n) cette suite géométrique telle que $u_{21} = 3\,145\,728$ et $u_{22} = 6\,291\,456$.

Sa raison est : $q = \dfrac{u_{22}}{u_{21}} = 2$.

• $u_8 = u_{21}q^{8-21} = u_{21}q^{-13}$

$u_8 = 3\,145\,728 \times 2^{-13} = \dfrac{3\,145\,728}{2^{13}} = \dfrac{3\,145\,728}{8\,192}$

Ainsi, $u_8 = 384$.

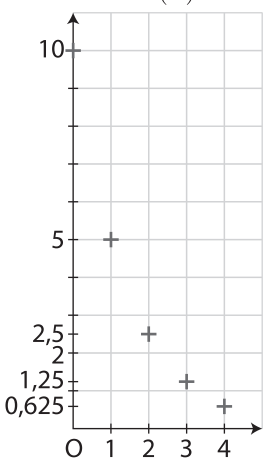
• $u_{15} = u_8 q^7$

$u_{15} = 384 \times 2^7 = 49\,152$

74 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

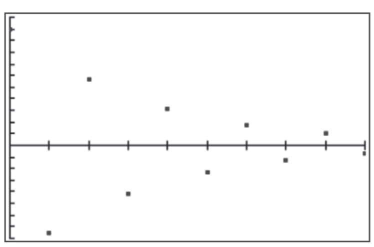
$g_n = g_0 q^n = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

b)



75

n	u(n)
0	50
1	-37.5
2	28.125
3	-21.09
4	15.82
5	-11.87
6	8.8989
7	-6.674
8	5.0056
9	-3.754
10	2.8157



(*fenêtre :* $0 \leqslant X \leqslant 9$, pas 1 et $-40 \leqslant Y \leqslant 55$, pas 5)

76 **a)** Ce programme affiche les termes de u_1 à u_{10} de la suite géométrique (u_n) de raison $\dfrac{1}{2}$ telle que $u_0 = -1\,000\,000$.

b) Le dernier nombre affiché par ce programme est $-976{,}562\,5$ (c'est-à-dire u_{10}).

En fait, $-1953{,}125$ est la valeur de u_9 (avant dernier nombre affiché).

77 $S = \dfrac{1-3^9}{1-3} = \dfrac{1-3^9}{-2} = \dfrac{3^9-1}{2}$

L'affirmation **(1)** est exacte.

78 $F = \dfrac{1-(-10)^6}{1-(-10)} = \dfrac{1}{11} \times (1-10^6) = -90\,909$

L'affirmation **(1)** est exacte.

79 $S = u_0 + 4u_0 + 4^2 u_0 + \ldots + 4^9 u_0 + 4^{10} u_0$

$S = u_0(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^9 + 4^{10})$

$S = -2 \times \dfrac{1-4^{11}}{1-4} = -2 \times \dfrac{1-4^{11}}{-3} = \dfrac{2}{3} \times (1-4^{11})$

$S = -2\,796\,202$

80 $T = v_5 + (-3)v_5 + (-3)^2 v_5 + \ldots + (-3)^{15} v_5$

$T = v_5(1 + (-3) + (-3)^2 + \ldots + (-3)^{15})$

$T = \dfrac{1-(-3)^{16}}{1-(-3)} = \dfrac{1-3^{16}}{4} = -10\,761\,680$

81 $M = w_0 + \dfrac{3}{4}w_0 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 w_0 + \ldots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^7 w_0$

$M = w_0\left(1 + \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^7\right)$

$M = w_0 \dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^8}{1-\dfrac{3}{4}} = 4w_0\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^8\right)$

Or, $w_0 = w_2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = 5 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = 5 \times \dfrac{16}{9} = \dfrac{80}{9}$

Donc, $M = 4 \times \dfrac{80}{9} \times \left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^8\right) = \dfrac{320}{9} \times \left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^8\right)$

82 **a)**

k		1	2	3	4
S	1	2,5	4,75	8,125	13,187 5

On obtient $S = 13{,}187\,5$ à la fin de l'algorithme.

b) Cet algorithme donne la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique (u_n) de raison 1,5 telle que $u_0 = 1$.

c)

```
def S(n):
    s=1
    for i in range(1,n+1):
        s=s+1.5**i
    return s
```

On obtient :

```
>>> S(4)
13.1875
>>> S(10)
170.9951171875
```

83

S ← 3
Pour k allant de 1 à 10
 S ← S + $2{,}5^k$
Fin Pour

84 **1.** B **2.** C **3.** D **4.** D **5.** A **6.** C

85 **1.** B. D **2.** B. C **3.** A. C **4.** B. C. D

86 **1. Vrai.** En effet, $u_{100} = u_{200} - 100r$ et $u_{300} = u_{200} + 100r$. Donc $u_{100} + u_{300} = 2 \times u_{200}$.
2. Vrai. En effet, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,
$w_{n-1} = \dfrac{w_n}{q}$ et $w_{n+1} = qw_n$.
Donc $w_{n-1} \times w_{n+1} = w_n^2$ soit $w_n = \sqrt{w_{n-1} \times w_{n+1}}$.
3. Vrai. En effet, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$$h_n = h_1 q^{n-1} = -4 \times (-2)^{n-1} = -4 \times \frac{(-2)^n}{-2}$$
$$h_n = 2 \times (-2)^n$$
On tabule cette suite avec la calculatrice et on observe que $h_{17} = -262\,144$.

87 **a)** Il manque la donnée de la valeur d'un terme, par exemple v_0 ou v_1 ou …
b) $v_1 = 1{,}02v_0 - 200 = 1{,}02 \times 5\,000 - 200 = 4\,900$
c) $v_2 = 1{,}02v_1 - 200 = 1{,}02 \times 4\,900 - 200 = 4\,798$
$v_3 = 1{,}02v_2 - 200 = 1{,}02 \times 4\,798 - 200 = 4\,693{,}96$

88 $u_6 = u_3 + 3r$ c'est-à-dire $42 = 15 + 3r$ soit $3r = 27$. Ainsi, $r = 9$.

89 **a)** $k_7 = k_5 q^2$ c'est-à-dire $-8 = -0{,}5q^2$ soit $q^2 = 16$. Ainsi, $q = 4$ ou $q = -4$.
b) $k_4 = k_1 q^3$ c'est-à-dire $108 = 0{,}5q^3$ soit $q^3 = 216$.
Pour tout nombre réel k, l'équation $x^3 = 4$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$. En tabulant la fonction cube avec le pas 1, on observe que $6^3 = 216$. Donc $q = 6$.

90 • L'algorithme 1 affiche les termes de u_1 à u_{10} de la suite arithmétique de raison -10 telle que $u_0 = -2$.
• L'algorithme 3 affiche les termes de u_1 à u_{12} de la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ telle que $u_0 = 10$.

91 **a)** $S = u_2 + (u_2 + 0{,}8) + \ldots + (u_2 + 8 \times 0{,}8)$
$$S = 9u_2 + 0{,}8 \times (1 + 2 + \ldots + 8)$$
$$S = 9 \times 4 + 0{,}8 \times \frac{8 \times 9}{2}$$
$$S = 64{,}8$$
b) $S = v_2 + 0{,}8v_2 + 0{,}8^2 v_2 + \ldots + 0{,}8^8 v_2$
$$S = v_2(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^8)$$
$$S = 4 \times \frac{1 - 0{,}8^9}{1 - 0{,}8} = 20 \times (1 - 0{,}8^9)$$

S'entraîner

93 **a)**

i		1	2	3
U	2 000	2 200	2 250	2 262,5

À la fin de l'algorithme, on obtient $U = 2\,262{,}5$; c'est le solde du compte de Pierre au 1er avril 2018.
b) $v_0 = 2\,000$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}25v_n + 1700$.

94 **a)**

i		1	2	3	4
U	200	190	182	175,6	170,48

À la fin de l'algorithme, on obtient $U = 170{,}48$. Ainsi, $U \approx 170$; cela représente le nombre d'adhérents au club de judo de cette ville en 2019.
b) $v_0 = 200$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}8v_n + 30$.

96 • **Mathématisation**
On note a_n et b_n les soldes respectifs des comptes de Gaylor avec l'option 1 et l'option 2.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$$a_n = a_0 + 1000 \times \frac{2}{100} n = 1000 + 20n$$
$$b_n = b_0 \left(1 + \frac{1{,}8}{100}\right)^n = 1000 \times 1{,}018^n$$
• **Résolution du problème**
On tabule les suites (a_n) et (b_n) avec la calculatrice.

n	an	bn
12	1240	1238.7
13	1260	1261
14	1280	1283.7
15	1300	1306.8

On constate que pour $n \leqslant 12$, $a_n \geqslant b_n$ et que pour $n = 13$, $a_{13} < b_{13}$.
À partir de $n = 13$, le solde du compte de Gaylor augmente de 20 € par an avec l'option 1, alors qu'il augmente d'au moins 22 € par an (car $1261 \times 1{,}8\,\% \approx 22$). Donc, pour tout $n \geqslant 13$, $a_n < b_n$.
• **Conclusion**
Après 13 ans de placement, l'option 2 devient plus intéressante.

97 On note a_n et b_n les nombres de timbres respectifs de Yasmine et Carole au bout de n mois.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$a_n = 1000 - 30n$

$b_n = 1000 \times \left(1 - \frac{3,5}{100}\right)^n = 1000 \times 0,965^n$

On tabule ces deux suites avec la calculatrice.

n	an	bn
9	730	725.68
10	700	700.28
11	670	675.77
12	640	652.12

On constate que pour $n \leqslant 9$, $a_n \geqslant b_n$ et que pour $n = 10$, $a_{10} < b_{10}$.
À partir de $n = 10$, le nombre de timbres de Yasmine diminue de 30 par mois, alors que celui de Carole diminue d'au plus 24 par mois
(car $700,28 \times 3,5\,\% \approx 24$). Donc, pour tout $n \geqslant 10$, $a_n < b_n$.

• **Conclusion**

Après 10 mois de ventes dans ces conditions, le nombre de timbres restants à Carole devient plus important que celui de Yasmine.

98 **a)** Zoé a remarqué que :

$$-4,2 - (-5) = -3,4 - (-4,2) = (-2,6) - (-3,4) = (-1,8) - (-2,6) = -1 - (-1,8) = 0,8$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$u_{n+1} - u_n = 0,8(n+1) - 5 - (0,8n - 5)$
$u_{n+1} - u_n = 0,8n + 0,8 - 5 - 0,8n + 5$
$u_{n+1} - u_n = 0,8$
Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 0,8.

99 **a)** $\frac{1,5}{0,5} = \frac{4,5}{1,5} = \frac{13,5}{4,5} = \frac{40,5}{13,5} = \frac{121,5}{40,5} = 3$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2}$
$u_{n+1} = \frac{3 \times 3^n}{2}$
$u_{n+1} = 3u_n$
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 3.

100 **a)** $v_0 = 1 \quad v_1 = 4 \quad v_2 = 12$
$v_1 - v_0 = 4 - 1 = 3$ et $v_2 - v_1 = 12 - 4 = 8$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

b) $\frac{v_1}{v_0} = \frac{4}{1} = 4$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{12}{4} = 3$ donc la suite (v_n) n'est pas géométrique.

101 **a)** f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) A et B appartiennent à la courbe de f et à la représentation graphique de (v_n).
C et D n'appartiennent pas à la courbe de f, donc non plus à la représentation graphique de (v_n).
E et F appartiennent à la courbe de f mais pas à la représentation graphique de (v_n) (-10 et 4,6 ne sont pas des nombres entiers naturels).

102 **a)** $1200 \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) + 800 = 2\,012$

Donc il y avait bien 2 012 € sur le compte d'Inès au 2 janvier 2001.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$S_{n+1} = S_n\left(1 + \frac{1}{100}\right) + 800$
$S_{n+1} = 1,01S_n + 800$

c) Avec la calculatrice, on tabule la suite (S_n) définie par $S_0 = 1200$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $S_{n+1} = 1,01S_n + 800$.
On constate que $S_{20} \approx 19\,079$.
Au 2 janvier 2020, le solde du compte d'Inès s'élève à environ 19 079 €.

103 **a)** On exécute Factorielle (5) et on obtient :

```
>>>
0 ! = 1
1 ! = 1
2 ! = 2
3 ! = 6
4 ! = 24
5 ! = 120
```

b) La ligne 5 du programme indique que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$\text{Factorielle}(n) = n \times \text{Factorielle}(n-1)$$

c'est-à-dire $u_n = n \times u_{n-1}$.
Ainsi, (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n$.

c) Pour $n \geqslant 1$, $n!$ est le **produit** des nombres entiers naturels de 1 à ***n***.
En effet,
$u_n = n\,u_{n-1} = n(n-1)u_{n-2} = n(n-1)(n-2)u_{n-3}$
et de proche en proche :

$$u_n = n(n-1)(n-2)\ldots \times 2 \times 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $n! = n(n-1)\ldots \times 2 \times 1$.
Remarque : le fait que $0! = 1$ est une convention.

104 **a)** $u_0 = 0$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + 2^n.$$

b) $u_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 1$.

105 $u_0 = 0$
$u_1 = \frac{1}{1 - u_0} = \frac{1}{1 - 0} = 1$
$u_2 = \frac{1}{1 - u_1}$ mais $1 - u_1 = 1 - 1 = 0$ et on ne peut pas diviser par 0.

172909_Chap01_000-000.indd 12 25/07/2019 17:51:53

Donc les données de $u_0 = 0$ et de cette relation de récurrence ne définissent pas une suite sur $\mathbb{N}$.

106 • $v_1 + v_2 + \ldots + v_8$ est égal à

$$v_1 + (v_1 + r) + \ldots + (v_1 + 7r)$$

c'est-à-dire $8v_1 + r(1 + 2 + \ldots + 7)$

soit $8v_1 + r\dfrac{7 \times 8}{2}$.

Ainsi, $8v_1 + 28r = 92$ c'est-à-dire $2v_1 + 7r = 23$.

• Or, $v_4 = v_1 + 3r$ c'est-à-dire $v_1 + 3r = 9$.

• On résout le système

$$\begin{cases} 2v_1 + 7r = 23 \\ v_1 + 3r = 9 \end{cases}$$

On multiplie par -2 la 2^e équation et on ajoute membre à membre avec la 1^{re} équation. On obtient :

$$2v_1 + 7r - 2v_1 - 6r = 23 - 2 \times 9$$
$$r = 5$$

On remplace r par 5 dans la 2^e équation du système ; il vient :

$$v_1 + 3 \times 5 = 9 \text{ c'est-à-dire } v_1 = -6.$$

• **Conclusion :** $v_1 = -6$ et $r = 5$.

107 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$v_{n+1} - v_n = 5u_{n+1} - 1 - (5u_n - 1)$

$v_{n+1} - v_n = 5(u_{n+1} - u_n)$.

(u_n) est une suite arithmétique de raison 6, donc

$v_{n+1} - v_n = 5 \times 6$

$v_{n+1} - v_n = 30$

Ainsi, (v_n) est une suite arithmétique de raison 30.

108 **a)** • $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0 + 1} = \dfrac{2}{2 + 1} = \dfrac{2}{3}$

$$u_2 = \frac{u_1}{u_1 + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{u_2 + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

$$u_4 = \frac{u_3}{u_3 + 1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{2}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

• $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{3}{2}$ • $v_2 = \dfrac{1}{u_2} = \dfrac{5}{2}$

• $v_3 = \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{2}$ • $v_4 = \dfrac{1}{u_4} = \dfrac{9}{2}$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n} = 1$$

Donc, (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

c) • Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 + n \times 1 = v_0 + n$$

Or, $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{2}$, donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{2} + n.$$

• Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2n+1}{2}} = \frac{2}{2n+1}$$

109 **a)** On passe du motif n° n au motif n° $(n + 1)$ en ajoutant 3 carrés. Ainsi, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$C_{n+1} - C_n = 3.$$

Donc la suite (C_n) est arithmétique de raison 3.

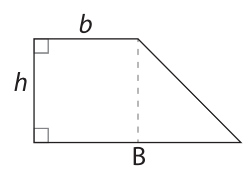
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$C_n = C_1 + 3(n + 1) = 1 + 3(n - 1)$$

c'est-à-dire $C_n = 3n - 2$.

Donc, $C_{1000} = 3 \times 1000 - 2 = 2\,998$.

110 Pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ de chaque trapèze, on utilise ici la formule suivante (avec les notations ci-contre) :



$$\mathcal{A} = \frac{(b + B)h}{2}$$

Remarque : on peut établir cette formule en décomposant ce trapèze en un rectangle et un triangle rectangle.

a) $a_0 = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1\right) \times 1}{2} = \dfrac{5}{4}$

$$a_1 = \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 2 + 1\right) \times 1}{2} = \frac{7}{4}$$

$$a_2 = \frac{\left(2 + \frac{1}{2} \times 3 + 1\right) \times 1}{2} = \frac{9}{4}$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}n + 1 + \frac{1}{2}(n + 1) + 1\right) \times 1}{2}$$

$$a_n = \frac{n + \frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{2n + 5}{2}}{2} = \frac{2n + 5}{4}$$

c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n + 1) + 5}{4} - \frac{2n + 5}{4}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n + 7 - 2n - 5}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc, la suite (a_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

d) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$S_n = a_0 + \left(a_0 + \frac{1}{2}\right) + \left(a_0 + 2\times\frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(a_0 + n\times\frac{1}{2}\right)$$

$$S_n = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}(1+2+\ldots+n)$$

$$S_n = \frac{5}{4}(n+1) + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}n\right)$$

$$S_n = \frac{1}{4}(n+1)(n+5)$$

$$S_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{5}{4}$$

S_n est l'aire du trapèze rectangle OABC avec $A(n+1\,;0)$, $B\left(n+1\,;\frac{1}{2}(n+1)+1\right)$ et $C(0\,;1)$.

111 **1. a)** On note (u_n) la suite des nombres entiers pairs ; c'est la suite arithmétique de raison 2 telle que $u_1 = 2$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2$.

$$S = 2 + 4 + \ldots + 100$$

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{50}$$

$$S = u_1 + (u_1 + 2) + \ldots + (u_1 + 49\times 2)$$

$$S = 50u_1 + 2\times(1+2+\ldots+49)$$

$$S = 50\times 2 + 2\times\frac{49\times 50}{2}$$

$$S = 100 + 49\times 50 = 2\,550$$

b) On note (v_n) la suite des nombres entiers impairs ; c'est la suite arithmétique de raison 2 telle que $v_0 = 1$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = 2n+1$.

$$T = 1 + 3 + \ldots + 99$$

$$T = v_0 + v_1 + \ldots + v_{49}$$

$$T = v_0 + (v_0 + 2) + \ldots + (v_0 + 49\times 2)$$

$$T = 50v_0 + 2\times(1+2+\ldots+49)$$

$$T = 50\times 1 + 2\times\frac{49\times 50}{2}$$

$$T = 50 + 49\times 50 = 2\,500$$

2. On note $\sum = 1 + 2 + \ldots + 100$

1^re^ méthode

$$\sum = S + T = 2\,550 + 2\,500 = 5\,050$$

2^e^ méthode

$$\sum = \frac{100\times 101}{2} = 50\times 101 = 5\,050$$

112 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a\times b^{n+1} = a\times b\times b^n = bu_n.$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison b.

113 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$m_{n+1} = m_n - 0{,}165m_n$$

$$m_{n+1} = 0{,}835m_n$$

Donc la suite (m_n) est géométrique de raison 0,835.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$m_n = m_0\,q^n = m_0\times 0{,}835^n$$

c) $m_n \leqslant \frac{1}{2}m_0$ équivaut à $m_0\times 0{,}835^n \leqslant \frac{1}{2}m_0$ c'est-à-dire $0{,}835^n \leqslant \frac{1}{2}$.

Avec la calculatrice, on tabule la suite $(0{,}835^n)$ et on observe que $0{,}835^3 \approx 0{,}58$ et $0{,}835^4 \approx 0{,}49$.

Donc au bout de 4 jours, la masse de radon a diminué de moitié de sa masse initiale.

114 **a)** $p_1 = 1200\times\left(1+\frac{50}{100}\right) = 1800$

$$p_2 = 1800\times\left(1+\frac{50}{100}\right) = 2\,700$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = \left(1+\frac{50}{100}\right)p_n = 1{,}5\,p_n$$

Donc la suite (p_n) est géométrique de raison 1,5.

c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$p_n = p_0q^n = 1200\times 1{,}5^n$$

Ainsi, $p_{24} = 1200\times 1{,}5^{24}$

soit $p_{24} \approx 20\,200\,935$

115 **a)** Pour obtenir l'aire d'un carré, on multiplie par $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ l'aire du carré précédent. Autrement dit, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{9}{16}u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{9}{16}$.

b) $S = u_0 + \frac{9}{16}u_0 + \ldots + \left(\frac{9}{16}\right)^n u_0$

$$S = u_0\left[1 + \frac{9}{16} + \left(\frac{9}{16}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{9}{16}\right)^n\right]$$

$$S = u_0\times\frac{1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}}{1-\frac{9}{16}}$$

Or, $u_0 = 1^2 = 1$, donc :

$$S = \frac{16}{7}\times\left[1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}\right].$$

116 **a)** $\ell_1 = 500\times\left(1+\frac{2}{100}\right) = 510$

$$\ell_2 = 510\times\left(1+\frac{2}{100}\right) = 520{,}2$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$\ell_{n+1} = \ell_n\left(1+\frac{2}{100}\right) = 1{,}02\times\ell_n$$

c) La suite (ℓ_n) est géométrique de raison 1,02.

172909_Chap01_000-000.indd 14 25/07/2019 17:54:24

d) On note S le montant total des loyers durant 9 années de location.

$S = 12\times(\ell_0+\ell_1+\ldots+\ell_8)$

$S = 12\times(\ell_0+1{,}02\ell_0+\ldots+1{,}02^8\ell_0)$

$S = 12\ell_0(1+1{,}02+1{,}02^2+\ldots+1{,}02^8)$

$S = 12\times 500\times\dfrac{1-1{,}02^9}{1-1{,}02}$

$S = 6\,000\times\dfrac{1-1{,}02^9}{-0{,}02}$

$S = 300\,000(1{,}02^9-1)$

soit $S \approx 58\,527{,}77$ €.

e) Avec la calculatrice, on tabule la suite (ℓ_n) et on observe que :

$$\ell_{23}\approx 788 \text{ et } \ell_{24}\approx 804$$

Donc, après 24 ans de location dans ces conditions, le loyer dépassera 800 € par mois.

117 **a)** On note (u_n) la suite géométrique de raison 4 telle que $u_0 = 4$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = 4\times 4^n = 4^{n+1}$.

Avec la calculatrice, on observe que $u_9 = 1\,048\,576$.

Donc $R = u_0+u_1+\ldots+u_9$

$R = u_0+4u_0+\ldots+4^9u_0$

$R = u_0(1+4+4^2+\ldots+4^9)$

$R = 4\times\dfrac{1-4^{10}}{1-4} = \dfrac{4}{3}\times(4^{10}-1)$

$R = 1\,398\,100$

b) On note (v_n) la suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ telle que $v_0 = \dfrac{1}{2}$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{(-2)^{n+1}}$.

On observe que $v_7 = -\dfrac{1}{256}$

Donc $S = v_0+v_1+\ldots+v_7$

$S = v_0-\dfrac{1}{2}v_0+\ldots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^7 v_0$

$S = v_0\left[1-\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^7\right]$

$S = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^8}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{3}\times\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\right]$

$S = \dfrac{85}{256}$

c) On note (w_n) la suite géométrique de raison 10^{-1} telle que $w_0 = 10^{-1}$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $w_n = 10^{-1}(10^{-1})^n = 10^{-(n+1)}$.

Donc $T = w_0+w_1+\ldots+w_{19}$

$T = w_0+10^{-1}w_0+\ldots+10^{-19}w_0$

$T = w_0(1+10^{-1}+\ldots+10^{-19})$

$T = 10^{-1}\times\dfrac{1-10^{-18}}{1-10^{-1}}$

$T = \dfrac{1}{9}(1-10^{-18}) = 0{,}111\,111\,111\,111$

118 **a)** $u_3 = 0{,}999 = 9\times10^{-1}+9\times10^{-2}+9\times10^{-3}$

$$u_3 = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = 0,\underbrace{99\ldots\ldots9}_{n\text{ fois}}$$

$$u_n = 9\times10^{-1}+9\times10^{-2}+\ldots+9\times10^{-n}$$

On note (a_n) la suite géométrique de raison 10^{-1} telle que $a_1 = 9\times10^{-1}$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$a_n = a_1q^{n-1} = 9\times10^{-1}\times(10^{-1})^{n-1}$$

$$a_n = 9\times10^{-1}\times10^{-n+1}$$

$$a_n = 9\times10^{-n}$$

Ainsi, $u_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$

c) 1^re^ méthode

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 1$,

$u_n = a_1+10^{-1}a_1+\ldots+(10^{-1})^{n-1}a_1$

$u_n = a_1[1+10^{-1}+10^{-2}+\ldots+(10^{-1})^{n-1}]$

$u_n = 9\times10^{-1}\times\dfrac{1-(10^{-1})^n}{1-10^{-1}}$

$u_n = 9\times10^{-1}\times\dfrac{1-10^{-n}}{9\times10^{-1}}$

$u_n = 1-10^{-n} = 1-\dfrac{1}{10^n}$

d) 2^e^ méthode

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 1$,

$$0,\underbrace{99\ldots\ldots9}_{n\text{ fois}}+0,\underbrace{00\ldots\ldots0}_{n-1\text{ zéros}}1 = 1$$

c'est-à-dire $u_n+10^{-n} = 1$

soit $u_n = 1-10^{-n} = 1-\dfrac{1}{10^n}$.

119 On note a_n la quantité d'eau, en L, dans la citerne au jour n (avec $n\in\mathbb{N}$) :

$a_0 = \dfrac{2}{3}\times1500 = 1000$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$a_{n+1} = a_n\left(1-\dfrac{5}{100}\right) = 0{,}95a_n$.

La suite (a_n) est géométrique de raison 0,95.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$a_n = 1000\times0{,}95^n.$$

Ainsi, $a_{10}\approx 598{,}7$ donc après 10 jours de sécheresse, il reste environ 598,7 L d'eau dans la citerne.

Pour arroser ses arbres au 10^e^ jour, le jardinier aura besoin de 650 L d'eau (65×10 L).

Donc le jardinier n'aura pas suffisamment d'eau dans sa citerne.

120 • **P** est **fausse**. En effet, $u_0 = -16$ et $-16 < 0$.
• **Q** est **vraie**. En effet, $u_{101} = 10\,185$.
• **R** est **fausse**. En effet, $n^2 - 16 = 425$ équivaut à $n^2 = 441$, c'est-à-dire $n = 21$ (car $n \in \mathbb{N}$). Donc $u_{21} = 425$.

121 Par définition, dire que (u_n) est une suite géométrique, signifie que : il existe un nombre réel q, tel que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
C'est donc la proposition **Q** qui définit une suite géométrique.
Donc **P** ne définit pas une suite géométrique parce que le nombre q dépend de n. Par exemple, la proposition est vraie pour la suite (u_n) définie par $u_n = n+1$. En effet, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = qu_n \text{ avec } q = \frac{n+2}{n+1}.$$

Mais cette suite (u_n) n'est pas géométrique :

$$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}.$$

122 • **non P :** « Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} - u_n \neq 2$. »
• **non Q :** « Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. »

Organiser son raisonnement

123 **a)** On suppose qu'il existe une suite arithmétique de raison r dont les trois premiers termes sont u_0, $u_1 = 5$ et u_2.
Alors, $u_0 = 5 - r$ et $u_2 = 5 + r$.
Le triangle est rectangle donc d'après le théorème de Pythagore :

$$(5+r)^2 = 5^2 + (5-r)^2$$

c'est-à-dire $25 + 10r + r^2 = 25 + 25 - 10r + r^2$
soit $20r - 25 = 0$.
Ainsi, $r = \frac{25}{20} = 1{,}25$ et :
• $u_0 = 3{,}75$ • $u_1 = 5$ • $u_2 = 6{,}25$
Donc il existe bien une suite arithmétique dont les trois premiers termes sont les mesures des longueurs u_0, $u_1 = 5$ et u_2 des côtés d'un triangle rectangle.

124 **a)**

n	u(n)
0	1
1	2
2	0
3	1
4	2
5	0
6	1
7	2
8	0
9	1
10	2

La suite (u_n) semble périodique de période 3 :
$u_0 = u_3 = u_6 = \ldots = 1$
$u_1 = u_4 = u_7 = \ldots = 2$
$u_2 = u_5 = u_8 = \ldots = 0$
b) On note (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ s'écrit sous la forme } 3k \\ 2 \text{ si } n \text{ s'écrit sous la forme } 3k+1 \\ 0 \text{ si } n \text{ s'écrit sous la forme } 3k+2 \end{cases} \text{ (avec } k \in \mathbb{N}\text{)}$$

1^er^ cas : $n = 3k$
Donc $v_n = 1$.
$-\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 2 = v_{n+1}$ car $n+1$ s'écrit sous la forme $3k+1$.
2^e^ cas : $n = 3k+1$
Donc $v_n = 2$.
$-\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 = -6 + 5 + 1 = 0 = v_{n+1}$ car $n+1$ s'écrit sous la forme $3k+2$.
3^e^ cas : $n = 3k+2$
Donc $v_n = 0$.
$-\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 = 0 + 0 + 1 = 1 = v_{n+1}$ car $n+1$ s'écrit sous la forme $3(k+1)$.
Conclusion : la suite (v_n) est telle que $v_0 = 1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1.$$

Donc, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n$ et la suite (u_n) est périodique de période 3.
c) $2\,020 = 2\,019 + 1 = 3 \times 673 + 1$
Ainsi, 2 020 est de la forme $3k+1$.
Donc $u_{2\,020} = 2$.

125 **a)** Voici un tableau de suivi des variables.

N	15	46	23	70	35	106
N%2==0	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Vrai
Syracuse(N)	46	23	70	35	106	53

N	53	160	80	40	20	10	5
N%2==0	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Syracuse(N)	160	80	40	20	10	5	16

N	16	8	4	2
N%2==0	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Syracuse(N)	8	4	2	1

On obtient la suite de nombres :
15 ; 46 ; 23 ; 70 ; 35 ; 106 ; 53 ; 160 ; 80 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1.

b) • Pour $N = 3$, on obtient :

3 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1

• Pour $N = 34$, on obtient :

34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1

• Pour $N = 75$, on obtient :

75 ; 226 ; 113 ; 340 ; 170 ; 85 ; 256 ; 128 ; 64 ; 32 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1

Remarque : on dit que l'ensemble des étapes de la suite est le **vol** et que le nombre d'étapes est la durée du vol. On peut vérifier par exemple qu'avec $N = 77\,671$, la durée du vol est 231.

c) Collatz a émis la conjecture que pour n'importe quel nombre entier naturel $N \geqslant 1$, on finit toujours par obtenir 1.

126 Un édifice de n étages, contient $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ cartes dressées et $1 + 2 + \ldots + (n-1)$ cartes horizontales.

Le nombre S total de cartes est :

$S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + 1 + 2 + \ldots + (n-1)$

$S = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 1 + 2 + \ldots + (n-1)$

$S = 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n$

$S = 3 \times \dfrac{n(n+1)}{2} - n$

$S = n\left(\dfrac{3}{2}n + \dfrac{3}{2} - 1\right) = \dfrac{n(3n+1)}{2} = \dfrac{3n^2 + n}{2}$

$5 \times 52 = 260$, donc on cherche n pour que $S = 260$ c'est-à-dire pour que $3n^2 + n = 520$ soit

$$3n^2 + n - 520 = 0.$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-520) = 6\,241 = 79^2$

$n' = \dfrac{-1-79}{6} = -\dfrac{40}{3}$ ou $n'' = \dfrac{-1+79}{6} = 13$

Or, n est un nombre entier naturel, donc $n = 13$.

Ainsi, Raphaël pourra construire un château de cartes de 13 étages sur ce modèle.

127 **a)** $u_0 = 300$.

L'aire du jardin envahie la $(n+1)$-ième semaine est obtenue en multipliant par $1 + \dfrac{4}{100}$ l'aire du jardin envahie la n-ième semaine et en ajoutant 13 m^2 dus à la dissémination des graines.

Donc, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1{,}04u_n + 13$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_{n+1} + 325$

$v_{n+1} = 1{,}04u_n + 13 + 325$

$v_{n+1} = 1{,}04u_n + 338$

$v_{n+1} = 1{,}04(u_n + 325)$

$v_{n+1} = 1{,}04v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,04.

Son premier terme est

$$v_0 = u_0 + 325 = 300 + 325 = 625.$$

c) • Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times 1{,}04^n$$

Or, $v_0 = 625$ donc $v_n = 625 \times 1{,}04^n$.

• Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = v_n - 325 = 625 \times 1{,}04^n - 325$$

d) On observe que $u_9 \approx 564{,}6$ et $u_{10} \approx 600{,}2$.

Après 10 semaines, les chardons auront envahi plus de 600 m^2.

128 **1. a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = v_n - \alpha.$$

La suite (u_n) est géométrique si, et seulement si, il existe un nombre réel q tel que **pour tout nombre *n*** de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} = qu_n$

$v_{n+1} - \alpha = q(v_n - \alpha)$

$\dfrac{1}{3}v_n + 2 - \alpha = qv_n - q\alpha$

$\left(\dfrac{1}{3} - q\right)v_n = \alpha - q\alpha - 2$

$\dfrac{1}{3} - q = 0$ et $\alpha - q\alpha - 2 = 0$

$q = \dfrac{1}{3}$ et $\alpha = \dfrac{1}{3}\alpha + 2$

$q = \dfrac{1}{3}$ et $\alpha = 3$

Donc la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = v_n - 3$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_0\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or, $u_0 = v_0 - 3 = 5 - 3 = 2$, donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Par conséquent, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = u_n + 3 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

2. En procédant comme ci-dessus, on obtient $q = -3$ et $\alpha = -3\alpha + 2$

Ainsi, $q = -3$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = w_n - \dfrac{1}{2}$ est géométrique de raison -3.

Donc, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_0(-3)^n$$

Or, $u_0 = w_0 - \dfrac{1}{2} = -1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

Donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = -\frac{3}{2} \times (-3)^n$$

Par conséquent, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$w_n = u_n + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \times (-3)^n + \frac{1}{2}$$

Remarque : de façon générale, si (u_n) est une suite telle que pour nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b nombres réels, $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$, où α est la solution de l'équation $x = ax + b$, est géométrique de raison a.

129 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1}.

En effet, les deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ sont les bissectrices de « l'angle droit du repère d'origine O », donc

$$\widehat{A_nOA_{n+1}} = \widehat{OA_nA_{n+1}} = 45°.$$

D'où $OA_{n+1} = A_nA_{n+1}$ et $OA_n = A_{n-1}A_n$.

$$A_nA_{n+1} = \sin(45°) \times OA_n = \frac{\sqrt{2}}{2} OA_n = \frac{\sqrt{2}}{2} A_{n-1}A_n.$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, on note ℓ la distance $A_{n-1}A_n$. La suite (ℓ_n) est donc géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\ell_1 = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On pose $S_n = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ldots + \ell_n$.

$$S_n = \ell_1 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

$$S_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = (\sqrt{2} + 1)\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$$

130 On note u_n la distance, en m, entre les sacs et le n-ième arbre (avec $1 \leqslant n \leqslant 20$).

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $1 \leqslant n \leqslant 20$,

$$u_{n+1} - u_n = 4$$

et donc, $u_n = u_1 + 4(n-1)$

c'est-à-dire $u_n = 15 + 4(n-1)$

soit $u_n = 4n + 11$

On note $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$ et D la distance parcourue par le jardinier.

$D = 2S$

$D = 2(u_1 + (u_1 + 4) + \ldots + (u_1 + 19 \times 4))$

$D = 2 \times [20u_1 + 4(1 + 2 + \ldots + 19)]$

$D = 2 \times \left(20 \times 15 + 4 \times \frac{19 \times 20}{2}\right)$

$D = 2 \times (300 + 4 \times 190)$

$D = 2 \times (300 + 760) = 2\,120$

Au total, le jardinier aura parcouru 2 120 m.

131 • Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, l'aire $\mathcal{A}_n$ du domaine jaune est :

$\mathcal{A}_n = u_n^2 - u_{n-1}^2$

$\mathcal{A}_n = (1 + 2 + \ldots + n)^2 - (1 + 2 + \ldots + (n-1))^2$

$\mathcal{A}_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2$

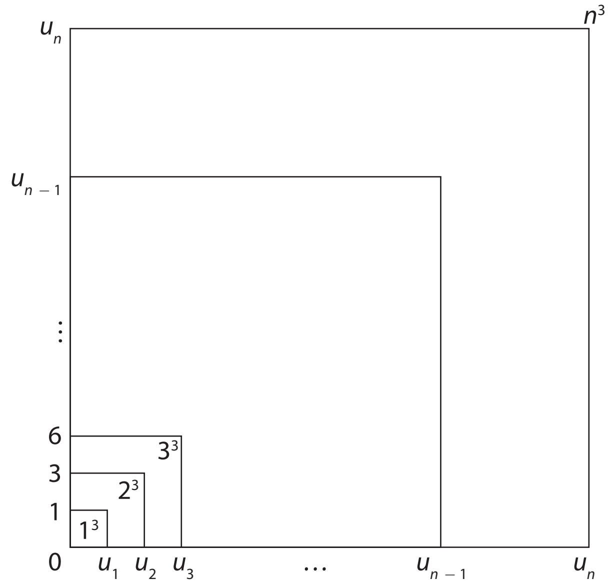
$\mathcal{A}_n = \frac{1}{4}[n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 n^2]$

$\mathcal{A}_n = \frac{n^2}{4}[(n+1)^2 - (n-1)^2]$

$\mathcal{A}_n = \frac{1}{4}n^2(n + 1 + n - 1)(n + 1 - n + 1)$

$\mathcal{A}_n = \frac{1}{4}n^2 \times 2n \times 2$

$\mathcal{A}_n = n^3$



Géométriquement, la somme $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ représente ci-dessous, l'aire du carré de côté u_n.

Ainsi, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = u_n^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

132 On note T_n le nombre de transistors dans les tous nouveaux microprocesseurs de l'année $1970 + n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

D'après l'énoncé, $T_0 = 2\,300$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $T_{n+1} = 1{,}40 \times T_n$.

On souhaite déterminer le premier rang n tel que $T_n \geqslant 15 \times 10^9$.

On peut procéder avec un tableur ou une calculatrice.

On trouve $n \geqslant 47$.

Selon la loi de Moore, les scientifiques auraient pu construire des ordinateurs quantiques à partir de 2017 !

Il n'en est rien car, comme dit dans le manuel, la miniaturisation des composants demande maintenant plus de temps.

133 **1.** Voici comment résoudre ce casse-tête en 7 déplacements ; on note le n° du disque déplacé et au-dessous la tige sur lequel il est disposé.

1	2	1	3	1	2	1
C	B	B	C	A	C	C

Remarque : dans la suite des numéros de disques on peut observer certaines symétries

1 2 1 3 1 2 1

On dit que c'est l'algorithme du miroir itéré qui régit les déplacements des disques.

Déplacer un 1er disque
Déplacer un autre disque
Déplacer à nouveau le 1er disque
Répéter

2. a) On transporte les $n-1$ disques les plus petits en B, puis on transporte le disque le plus grand en C et enfin, on transporte les $n-1$ disques les plus petits de B en C.

Ainsi, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$u_n = T_n + 1$
$u_n = 2T_{n-1} + 1 + 1$
$u_n = 2T_{n-1} + 2$
$u_n = 2(T_{n-1} + 1)$
$u_n = 2u_{n-1}$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2.

c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$u_n = u_1 \times 2^{n-1}$$

Or, $u_1 = T_1 + 1 = 1 + 1 = 2$, donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$u_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

Par conséquent, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$T_n = u_n - 1 = 2^n - 1$$

d) $T_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$

On peut transporter une tour de 10 disques de A en C en 1 023 coups au minimum.

134 **1. a)** $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

b)

```
X ← 0
Y ← 1
Afficher X, Y
Pour i allant de 2 à n
    Z ← X + Y
    X ← Y
    Y ← Z
    Afficher Z
Fin Pour
```

c)

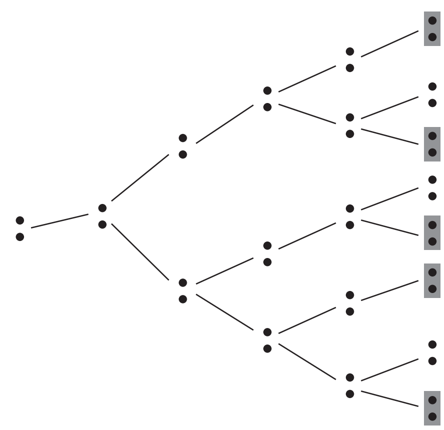
```
def Fibonacci(n):
    A=0
    B=1
    if n==0:
        print("F 0 =",A)
    if n>=1:
        print("F 0 =",A)
        print("F 1 =",B)
    for i in range(2,n+1):
        C=A+B
        A=B
        B=C
        print("F",i,"=",B)
```

d) On exécute Fibonacci(20) et on obtient :

```
>>> Fibonacci(20)
F 0 = 0
F 1 = 1
F 2 = 1
F 3 = 2
F 4 = 3
F 5 = 5
F 6 = 8
F 7 = 13
F 8 = 21
F 9 = 34
F 10 = 55
F 11 = 89
F 12 = 144
F 13 = 233
F 14 = 377
F 15 = 610
F 16 = 987
F 17 = 1597
F 18 = 2584
F 19 = 4181
F 20 = 6765
```

2.

Mois 1 2 3 4 5 6



Nombres de couples 1 1 2 3 5 8

Au 7e mois, parmi les 8 couples existants, seuls 5 sont adultes (trame grise) et vont procréer. Il y aura donc 13 couples $(8+5=13)$.

Plus généralement, le nombre de couples F_{n+2} au mois $n+2$ est égal au nombre de couples adultes, à savoir ceux présents au mois $n+1$, F_{n+1}, plus ceux nés au mois n (et qui vont donc devenir adultes au mois $n+2$), F_n.

Ainsi, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
Or, $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$.
Donc l'évolution de cette population de lapins est modélisée par la suite de Fibonacci.
$F_{12} = 144$, donc il y aura 144 couples de lapins au bout d'un an.

135 Avec n nombre de $\mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$, la n-ième ligne comporte $2n - 1$ cases et se termine par n^2.
Le carré immédiatement supérieur à 2 020 est 45^2 (soit 2 025). 2 020 est donc sur la ligne débutant par $44^2 + 1$ (soit 1 937) et finissant par 2 025 et comportant 89 cases. Donc 2 020 figure sur la 45^e^ ligne.
$2\,020 - 1937 = 83$, donc 2 020 occupe le 84^e^ rang de cette 45^e^ ligne.

136 Si u_0, u_1, u_2 sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison r, alors $u_0 = u_1 - r$ et $u_2 = u_1 + r$.
Si u_0, u_1, u_2 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison q, alors $u_0 = \dfrac{u_1}{q}$ et $u_2 = qu_1$.
On cherche donc r et q tels que

$$\begin{cases} u_1 - r = \dfrac{u_1}{q} \\ u_1 + r = qu_1 \end{cases}$$

Par addition membre à membre de ces équations, il vient $2u_1 = u_1\left(q + \dfrac{1}{q}\right)$ c'est-à-dire $q + \dfrac{1}{q} = 2$ soit

$$q^2 - 2q + 1 = 0.$$

De $(q-1)^2 = 0$, on déduit $q = 1$.
En remplaçant q par 1 dans la 2^e^ équation du système, il vient $u_1 + r = u_1$ soit $r = 0$.
Conclusion : u_0, u_1, u_2 ne sont les trois premiers termes d'une suite à la fois arithmétique et géométrique, que dans le cas où $u_0 = u_1 = u_2$.
Une suite arithmétique de raison 0 et une suite géométrique de raison 1 sont des suites constantes.

137 Résoudre cette équation équivaut à résoudre le système :

$$\begin{cases} X = \dfrac{x+1}{x-1} \\ 1 + X + X^2 + X^3 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} X = \dfrac{x+1}{x-1} \\ \dfrac{1 - X^4}{1 - X} = 0 \end{cases}$

(en effet, $X \neq 1$ car $x + 1 \neq x - 1$)

soit $\begin{cases} X = \dfrac{x+1}{x-1} \\ X^4 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} X = \dfrac{x+1}{x-1} \\ X^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} X = \dfrac{x+1}{x-1} \text{ (car } X \neq 1) \\ X = -1 \end{cases}$

L'équation $\dfrac{x+1}{x-1} = -1$ c'est-à-dire $x + 1 = -x + 1$ a pour solution $x = 0$.
Donc l'équation initiale a pour unique solution 0 et $\mathcal{S} = \{0\}$.

138 **1.** $u_1 = (3\,000 + 80)\left(1 - \dfrac{5}{100}\right) = 2\,926$
2. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$u_{n+1} = (u_n + 80)\left(1 - \dfrac{5}{100}\right)$
$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 80 \times 0{,}95$
$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$
3. a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520$
$v_{n+1} = 0{,}95u_n + 76 - 1520$
$v_{n+1} = 0{,}95u_n - 1444$
$v_{n+1} = 0{,}95(u_n - 1520)$
$v_{n+1} = 0{,}95v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,95.

$$v_0 = u_0 - 1520 = 3\,000 - 1520 = 1480$$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times 0{,}95^n$$

Or, $v_0 = 1480$ donc, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = 1480 \times 0{,}95^n$$

Par conséquent, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 1520 = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$$

4.

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que u ⩾ 2 000
    n ← n + 1
    u ← 1480 × 0,95^n + 1520
Fin Tant que
```

Remarque : avec un programme en langage Python ou avec la calculatrice, on constate que le nombre de cétacés dans la réserve sera inférieur à 2 000 pour $n = 22$.

Exploiter ses compétences

139 Chaque rangée comprend trois sièges de plus que la précédente.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $1 \leqslant n \leqslant 30$, on note S_n le nombre de sièges sur la rangée numérotée n.
(S_n) est une suite arithmétique de raison 3 telle que $S_1 = 21$.
On note S le nombre total de sièges dans les rangées 1 à 15.

$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{15}$
$S = S_1 + (S_1 + 3) + \ldots + (S_1 + 14 \times 3)$
$S = 15S_1 + 3 \times (1 + 2 + \ldots + 14)$
$S = 15 \times 21 + 3 \times \dfrac{14 \times 15}{2}$
$S = 15 \times 21 + 3 \times 7 \times 15 = 2 \times 15 \times 21 = 630$

On note S' le nombre total de sièges dans les rangées 16 à 30.

$S' = S_{16} + S_{17} + \ldots + S_{30}$
$S' = S_{16} + (S_{16} + 3) + \ldots + (S_{16} + 14 \times 3)$
$S' = 15S_{16} + 3 \times (1 + 2 + \ldots + 14)$

Or, $S_{16} = S_1 + 15 \times 3 = 21 + 15 \times 3 = 66$.
Donc, $S' = 15 \times 66 + 3 \times \dfrac{14 \times 15}{2}$
$S' = 15 \times 66 + 3 \times 7 \times 15 = 1305$

La recette totale pour une salle qui affiche complet est donc donnée par :

$$50 \times \frac{630}{3} + 40 \times 2 \times \frac{630}{3} + 40 \times \frac{1305}{3} + 30 \times 2 \times \frac{1305}{3}.$$

On trouve une recette de 70 800 €.

140 • L'altitude de son lieu de résidence habituel est 100 m.

$$1013 \times \left(1 - \frac{1{,}25}{100}\right) \approx 1000$$

La pression atmosphérique de son lieu de résidence habituel est environ 1 000 hPa.
• L'altitude à El Alto est 41×100 m.

$$1300 \times \left(1 - \frac{1{,}25}{100}\right)^{41} \approx 776$$

La pression atmosphérique à El Alto est donc d'environ 776 hPa.
• $P \times N =$ constante donc :

$$776 \times N \approx 1000 \times 15$$

soit $N \approx \dfrac{1000 \times 15}{776}$
et $N \approx 19$

Pour inspirer la même quantité d'air à El Alto qu'à son lieu de résidence habituel, Lina doit effectuer environ 19 inspirations par minute au repos.

141 • On note u_n le coût de forage de la n-ième dizaine de mètres avec n nombre de $\mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = u_n + 200\,000$$
$$u_{n+1} - u_n = 200\,000$$

Donc, la suite (u_n) est arithmétique de raison 200 000.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$u_n = u_1 + 200\,000(n-1)$$
$$u_n = 100\,000 + 200\,000n - 200\,000$$
$$u_n = 200\,000n - 100\,000$$

• Le coût S, en euro, pour un forage de n dizaines de mètres est :

$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
$S = u_1 + (u_1 + 200\,000) + \ldots + (u_1 + 200\,000(n-1))$
$S = nu_1 + 200\,000 \times (1 + 2 + \ldots + (n-1))$
$S = 100\,000n + 200\,000 \times \dfrac{(n-1) \times n}{2}$
$S = 100\,000n + 100\,000n(n-1)$
$S = 100\,000n^2$

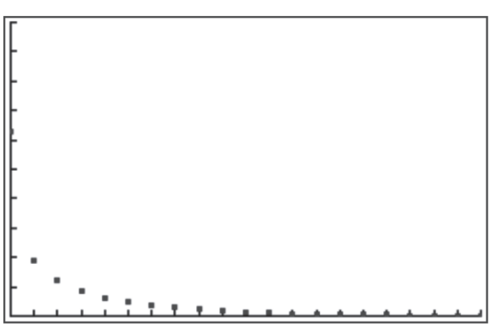
• On cherche donc le plus grand nombre entier n tel que $100\,000n^2 \leqslant 14\,400\,000$ c'est-à-dire tel que $n^2 \leqslant 144$. Donc $n = 12$.
Conclusion : avec ce budget, la compagnie pétrolière peut effectuer un forage de 120 m.

142 (x_n) est la suite définie par $x_0 = 0{,}63$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$$

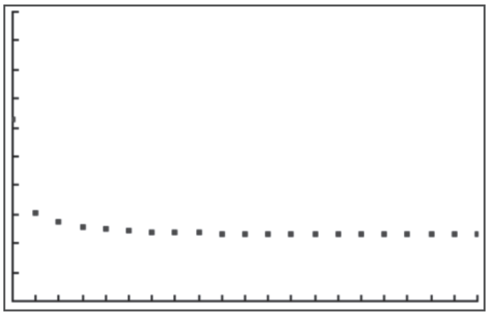
où r est un nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.
On envisage plusieurs valeurs de r et on représente graphiquement la suite (x_n) correspondante (*fenêtre :* $0 \leqslant X \leqslant 20$, pas 1 et $0 \leqslant Y \leqslant 1$, pas 0,1)

1er cas : $r \in [0\ ;\ 1]$
La population s'éteint.
Ici, $r = 0{,}8$.

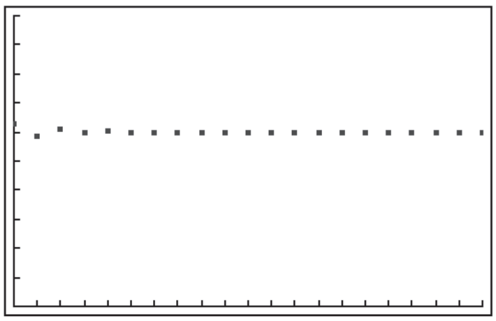


2^e^ cas : $r \in [1\ ;\ 3]$

L'effectif de la population se stabilise.



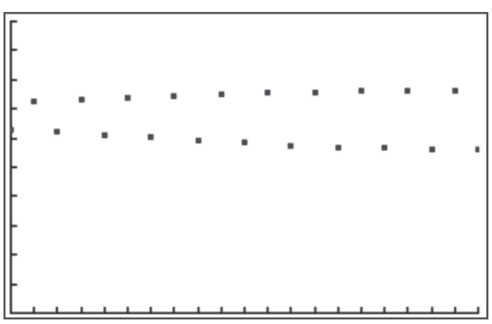
Ici, $r = 1{,}3$. Les valeurs x_n se stabilisent vers 0,25 et l'effectif de la population vers 25 loups.



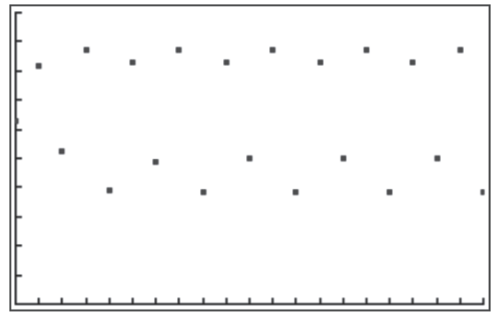
Ici, $r = 2{,}5$. Après avoir oscillé au début, les valeurs de x_n se stabilisent vers 0,6 et l'effectif de la population vers 60 loups.

3^e^ cas : $r \in [3\ ;\ 3{,}57]$

L'effectif de la population oscille entre plusieurs valeurs.



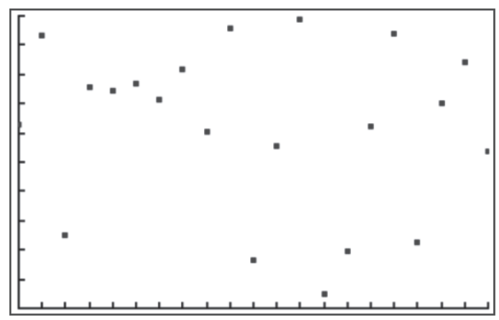
Ici, $r = 3{,}1$. Les valeurs de x_n oscillent entre deux valeurs, environ 0,6 et 0,8 ; l'effectif de la population oscille vers 60 loups ou 80 loups.



Ici, $r = 3{,}5$. Les valeurs de x_n oscillent entre quatre valeurs, environ 0,4 ; 0,5 ; 0,8 et 0,85. L'effectif de la population oscille vers 40 ou 50 ou 80 ou 85 loups.

4^e^ cas : $r \in [3{,}57\ ;\ 4]$

Le chaos s'installe.



Ici, $r = 4$. Aucune oscillation n'est visible.

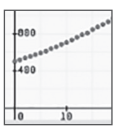
2 Comportement d'une suite

Découvrir

1 Sens de variation d'une suite

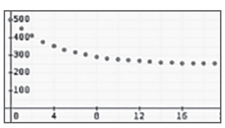
1

Modèle A



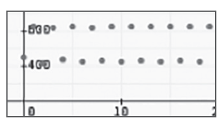
Population croissante à taux d'évolution constant

Modèle B



Population décroissante avec apport annuel constant

Modèle C



Population oscillante, ni croissante ni décroissante

2 Le modèle A ne parait pas durablement réaliste du fait de l'augmentation constante de la population.

3 **a)** $p_{n+1} - p_n = 0{,}035 p_n$ expression positive

b) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1{,}035 > 1$

c) On prouve ainsi que la suite (p_n) du modèle A est croissante.

2 Notion de limite infinie d'une suite

1 **a)** $c_5 = 15$, $c_6 = 21$

b) $c_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $c_{50} = 1275$.

2 **a)** Il semble que quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, c_n prend des valeurs de plus en plus grandes.

b) $c_{141} > 10000$, $c_{4600} > 10^6$

Acquérir des automatismes

3 **a)** $u_{n+1} - u_n = 2n - 9$, $2n - 9 > 0$ pour tout $n > \dfrac{9}{2}$, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 5.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 3x + 1$.
Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -6x - 3$. D'où le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$		$-$
Variations de f	$\nearrow$	$\dfrac{7}{4}$	$\searrow$

La fonction f est décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ donc la suite (v_n) est décroissante.

4 **a)** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}5$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$,
c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.
Donc la suite (u_n) est décroissante.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 3$ donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ c'est-à-dire $v_{n+1} > v_n$.
Donc la suite (v_n) est croissante.

c) $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1{,}02$ donc $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} > 1$
c'est-à-dire $w_{n+1} > w_n$.
Donc la suite (w_n) est croissante.

172909_Chap02_000-000.indd 23 25/07/2019 18:07:22

7 **a)**

n	v_n
0	4
1	1
2	-2
3	-5
4	-8
5	-11
6	-14

b) $4-3n<-10^5$ équivaut à $n>\dfrac{10^5+4}{3}$ soit $n>33334{,}67$.
$v_n<-10^5$ pour tout entier supérieur ou égal à 33 335.

$4-3n<-10^{20}$ équivaut à $n>\dfrac{10^{20}+4}{3}$ soit $n>3{,}33\times10^{19}$.
$v_n<-10^5$ pour tout entier strictement supérieur à $3{,}33\times10^{19}$.

c) Il semble que la suite (v_n) a pour limite $-\infty$.

8 **a)**

1	3
2	2.5
3	2.333333
4	2.25
5	2.2
6	2.166667

b) Comme $w_1=3$, $2<w_n<2{,}01$ équivaut à $2+\dfrac{1}{n}<2{,}000\,1$ soit $n>1\,000$.

c) Il semble que la suite (w_n) a pour limite 2.

9 (u_n) semble croissante, (v_n) semble décroissante, (w_n) semble croissante à partir du rang 2.

10 Julia se trompe, $u_{n+1}-u_n=5>0$, la suite (u_n) est croissante.

11 Paolo se trompe, $v_{n+1}-v_n=-2<0$, la suite (v_n) est décroissante.

12 **a)** $u_{n+1}-u_n=-3<0$, la suite (u_n) est décroissante.

b) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{5}>0$, la suite (u_n) est croissante.

c) $u_{n+1}-u_n=2n+1>0$, la suite (u_n) est croissante.

d) $u_{n+1}-u_n=2n+1<0$ pour $n\geqslant1$, la suite (u_n) est décroissante.

13 **a)** $v_{n+1}-v_n=n+4$, la suite (v_n) est croissante.

b) $v_{n+1}-v_n=-2n^2<0$, la suite (v_n) est décroissante.

14 **a)**
$$\begin{aligned} w_{n+1}-w_n &= \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{-1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)>0$ donc $\dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}<0$, la suite (w_n) est décroissante.

15 **a)**
$$\begin{aligned} t_{n+1}-t_n &= 1-\frac{2}{n+4}-1+\frac{2}{n+3}\\ &= \frac{2n+8-2n-6}{(n+4)(n+3)}\\ &= \frac{2}{(n+4)(n+3)}. \end{aligned}$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $(n+4)(n+3)>0$ donc $\dfrac{2}{(n+4)(n+3)}>0$, la suite (t_n) est croissante.

16 $v_{n+1}-v_n=-2v_n^2<0$, la suite (v_n) est décroissante.

17
$$\begin{aligned} t_{n+1}-t_n &= \frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}\\ &= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}>0, \end{aligned}$$
la suite (t_n) est croissante.

18
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 4-(n+2)^2-4+(n+1)^2\\ &= -2n-3<0, \end{aligned}$$
la suite (u_n) est décroissante.

19 **a)** $S_{n+1}-S_n=n+1$,

b) Comme $n\geqslant1$, $n+1>0$, la suite (S_n) est croissante.

20 $u_{n+1}-u_n=n^2-10>0$ si et seulement si $n^2>10$, c'est-à-dire $n>\sqrt{10}$ soit $n>3{,}16$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

21 **a)**
$$\begin{aligned} e_{n+1}-e_n &= 40\,000\times0{,}89^{n+1}+13\,000\\ &\quad -40\,000\times0{,}89^{n}-13\,000\\ &= 40\,000\times(0{,}89-1)\\ &= -0{,}11\times40\,000 \end{aligned}$$

b) $e_{n+1}-e_n<0$, la suite (e_n) est décroissante.
L'empreinte carbone de l'entreprise va diminuer.

22 La différence de deux termes impairs consécutifs est

$$\begin{aligned} u_{2k+3} - u_{2k+1} &= 3 + (-2)^{2k+3} - 3 - (-2)^{2k+1} \\ &= (-2)^{2k+1} \times ((-2)^2 - 1) \\ &= 3 \times (-2)^{2k+1}. \end{aligned}$$

Comme $(-2)^{2k+1} < 0$, les termes impairs de la suite (u_n) sont décroissants.

Par conséquent la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

23 La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, donc la suite (u_n) est croissante.

24 La suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

25 **a)**

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

b) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a le même sens de variation que la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2$, elle est croissante.

26 **a)**

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖	↘	

b) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$ a le même sens de variation que la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, elle est décroissante.

27 **a)** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - 3x$ permet de définir la suite (a_n).

b) f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, la suite (a_n) est donc décroissante.

28 **a)** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x^2$ permet de définir la suite (b_n).

b) $f'(x) = -2x$, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f(x)$		↘	

On en déduit que la suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 - n^2$ a le même sens de variation que la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2 - x^2$, elle est décroissante.

29 **a)** La suite (u_n) définie par $u_n = 4n - 7$ est croissante.

b) La suite (u_n) définie par $u_n = -n + 5$ est décroissante.

30 **a)**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

La fonction f définie par $f(x) = (x+1)^2$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (u_n) est croissante.

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

La fonction f définie par $f(x) = 2 - \dfrac{10}{x}$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (u_n) est décroissante.

31 La fonction f définie par $f(x) = x^2 - 200x$ est décroissante sur $]-\infty\,;100]$, puis croissante sur $[100\,;+\infty[$, donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang 100.

Laura se trompe.

32 w_n est de la forme $f(n)$, avec f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2x}{x+1}$.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0.$$

La fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (w_n) est croissante.

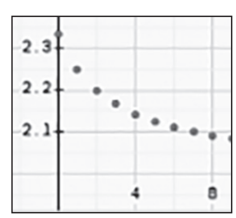
33 v_n est de la forme $f(n)$, avec f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 0{,}2x^2 + x - 3$.

$f'(x) = 0{,}4x + 1 > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (v_n) est croissante.

34 **a)**

n	u_n
0	2.333333
1	2.25
2	2.2
3	2.166667
4	2.142857
5	2.125



b) w_n est de la forme $f(n)$, avec f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}.$$

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2} < 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (w_n) est décroissante.

35 h_n est de la forme $f(n)$, avec f la fonction définie sur $[2\,;13]$ par $f(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}5x - 1{,}6$.
$f'(x) = -0{,}4x + 2{,}5$.
La fonction f est croissante sur $[2\,;6{,}25]$ puis décroissante sur $[6{,}25\,;13]$, donc la suite (h_n) est décroissante à partir du rang 6.
À 8 h on est en marée descendante.

36 (u_n) semble être une suite géométrique décroissante.

37 Rayan a raison $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2}{3} < 1$ et $v_0 > 0$ la suite (v_n) est décroissante.

38 **a)** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$, la suite (u_n) est croissante.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, la suite (u_n) est décroissante.

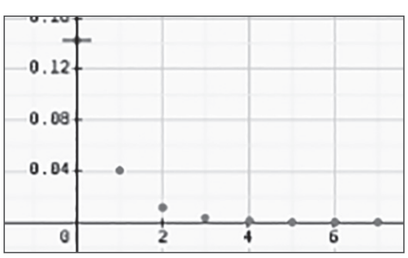
c) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{2} - 1 < 1$, la suite (u_n) est décroissante.

39 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $2^n > 0$, comme $5 > 0$, tous les termes de la suite (v_n) sont positifs.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{5 \times 2^{n+1}}{5 \times 2^n} = 2$, la suite (v_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 5$.

c) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 2 > 1$, la suite (v_n) est donc croissante.

40 **a)**



La suite (u_n) semble décroissante.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{7^{n+2}}}{\dfrac{2^n}{7^{n+1}}} = \dfrac{2^{n+1}}{7^{n+2}} \times \dfrac{7^{n+1}}{2^n} = \dfrac{2}{7}$.

c) $\dfrac{2}{7} < 1$, donc $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est décroissante.

41 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{9^{n+2}}{7^{n+1}}}{\dfrac{9^{n+1}}{7^n}} = \dfrac{9^{n+2}}{7^{n+1}} \times \dfrac{7^n}{9^{n+1}} = \dfrac{9}{7} > 1$, la suite (u_n) est croissante.

42 **a)** Pour tout n de $\mathbb{N}$, $3^n > 0$ et $n + 2 > 0$, d'où $v_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $2n + 3$ et $n + 3$ sont strictement positif, leur quotient l'est aussi donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 > 0 \text{ et } \frac{v_{n+1}}{v_n} > 1.$$

La suite (v_n) est croissante.

43 $u_n = 130\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{130\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{130\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4} < 1.$$

Lisa a raison, la suite est décroissante.

44 **a)** $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}35 < 1$, la suite (v_n) est décroissante.
$m_{n+1} - m_n = v_{n+1} - v_n < 0$ la suite (m_n) est décroissante.

45 **1. a)**

n	m_n	n	m_n
0	0,6	13	7,958460208
1	0,732	14	9,709321454
2	0,89304	15	11,84537217
3	1,0895088	16	14,45135405
4	1,329200736	17	17,63065194
5	1,621624898	18	21,50939537
6	1,978382375	19	26,24146235
7	2,413626498	20	32,01458407
8	2,944624328	21	39,05779256
9	3,59244168	22	47,65050693
10	4,382778849	23	58,13361845
11	5,346990196	24	70,92301451
12	6,523328039		

b) $\dfrac{m_{n+1}}{m_n} = \dfrac{0{,}6 \times 1{,}22^{n+1}}{0{,}6 \times 1{,}22^n} = 1{,}22 > 1$, la suite (m_n) est croissante.
2. a) $m_{48} \approx 8383$ g, $m_{72} \approx 990\,966$ g.
b) La masse de la culture dépasse 20 kg au bout de 53 h.
3. Le modèle choisi par les étudiants se traduit par une augmentation infinie de masse.

46 Méthode 1 suite (w_n).
Méthode 2 suite (v_n).
Méthode 3 suite (u_n).

47 **a)**

n	u_n
1	2
2	2
3	2.666667
4	4
5	6.4
6	10.66667
7	18.28571

La suite (u_n) semble croissante à partir du rang 2.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} - 1 = \dfrac{n-1}{n+1}$.

Pour $n > 1$, $\dfrac{n-1}{n+1} > 0$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

48 **a)** $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}7 < 1$, la suite (v_n) est donc décroissante.
b) $u_{n+1} - u_n = 8 - v_{n+1} - (8 - v_n) = v_n - v_{n+1} > 0$ car (v_n) est décroissante.
La suite (u_n) est donc croissante.

49 **a)** $u_0 = 6$, $u_1 = 4$, $u_3 = 3$, $u_4 = 4$.
b) $u_{n+1} = u_n - 3 + n + 1$
c) $u_{n+1} - u_n = -3 + n + 1$, $-3 + n + 1 > 0$ si et seulement si $n > 2$, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

50 **a)**

n	u_n
0	-0.2
1	0.2222222
2	0.3846154
3	0.4705882
4	0.5238095
5	0.56
6	0.5862069

La suite (a_n) semble croissante.
b) Considérons la fonction *f* définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+5}$.

Sa dérivée $f'(x) = \dfrac{19}{(4x+5)^2}$ est strictement positive.
La fonction *f* est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$ la suite (a_n) est croissante.

51 **a)** $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (S_n) est donc croissante.
b) $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$,

$$2 \times S_n = \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{2^n} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
$$= 1 + S_n - \frac{1}{2^n}.$$

On obtient $2S_n - S_n = S_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
c) $S_0 = 1 - 1 = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n < 1$ et comme la suite (S_n) est croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < S_n < 1$.

52 **a)** $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_n - 1} = \dfrac{2u_n - 2}{u_n - 1} = 2$, (v_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 2$.
b) $v_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Donc $u_n = 2^{n+1} + 1$.
c) $u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} + 1 - 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1}(2-1)$
$= 2^{n+1} > 0$,
la suite (u_n) est croissante.

53 **a)** $u_0 = 1$ équivaut à $A \times 3^0 + B = 1$ soit $A + B = 1$, $u_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$, on a donc $3A + B = 5$.
On obtient $A = 2$ et $B = -1$.
On a donc $u_n = 2 \times 3^n - 1$.
b) $u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 1 - 2 \times 3^n + 1$
$= 2 \times 3^n(3-1) = 4 \times 3^n > 0$
La suite (u_n) est donc croissante.

54 **a)** $u_1 = 650$, $u_2 = 785$.
b) La chaine garde 90 % de ses abonnés soit un coefficient de 0,9. Elle gagne 200 abonnés, d'où une augmentation de 200 soit $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 200$. .
c) $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$
$= 0{,}9u_{n+1} + 200 - u_{n+1}$
$= -0{,}1u_{n+1} + 200$
$= -0{,}1(0{,}9u_n + 200) + 200$
$= -0{,}09u_n + 180$
$= 0{,}9(-0{,}1u_n + 200)$
$v_n = u_{n+1} - u_n = 0{,}9u_n + 200 - u_n = -0{,}1u_n + 200$.

D'où $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}9$.

(v_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = 150$.
d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est croissante. La chaîne locale peut donc se féliciter de ses résultats.

55 Les deux suites semblent tendre vers 0.

56 **a)** La suite (u_n) semble tendre vers -2.
b) La suite (u_n) semble tendre vers 5.

57
a)

n	u_n
0	1
1	1.5
2	1.8
3	1.9
4	1.941176
5	1.961538
6	1.972973

La suite (u_n) semble tendre vers 2.
b)

n	u_n
0	6
1	5.5
2	5.25
3	5.125
4	5.0625
5	5.03125
6	5.015625

La suite (v_n) semble tendre vers 5.
c)

n	u_n
0	2
1	4.25
2	4.8125
3	4.953125
4	4.988281
5	4.99707
6	4.999268

La suite (w_n) semble tendre vers 5.

58 **a)** $v_0 = 3 \times 0,4^0 = 3$, $v_1 = 3 \times 0,4 = 1,2$,
$v_2 = 3 \times 0,4^2 = 0,48$,
$v_3 = 3 \times 0,4^3 = 0,192$, $v_4 = 3 \times 0,4^4 = 0,0768$.
b)

7	0.0049152
8	0.00196608
9	0.000786432

$0 < v_n < 10^{-3}$
pour $n > 8$.

15	0.000003221225
16	0.00000128849
17	5.153961e-7

$0 < v_n < 10^{-6}$
pour $n > 16$.

c) La suite (v_n) semble tendre vers 0.

59 **a)** $u_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$,
$u_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, $u_5 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.
b)

10	0.01
11	0.008264463
12	0.006944444

$0 < u_n < 10^{-2}$
pour tout entier $n > 10$.

100	0.0001
101	0.0000980296
102	0.00009611688

$0 < u_n < 10^{-4}$
pour tout entier $n > 100$.

c) La suite (u_n) semble tendre vers 0.

60 **a)** Chaque fraction est égale à l'aire du rectangle coloré dans laquelle elle est écrite.
b) La somme des aires est égale à l'aire du carré de côté 1.
Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ semble tendre vers 1.

61 **1. a)** La suite (u_n) qui modélise l'évolution du nombre d'insecte est une suite géométrique de raison $1 - \frac{20}{100} = 0,8$. Le nombre initial d'insectes est 15 000.
On a donc $u_n = 15000 \times 0,8^n$.
b) C'est l'écran 2 qui affiche les premiers points de la représentation graphique de (u_n).
2. a)

4	6144
5	4915.2

Le nombre d'insectes sera inférieur à 5 000 au bout de 5 ans.

12	1030.792
13	824.6337

Le nombre d'insectes sera inférieur à 1 000 au bout de 13 ans.

22	110.6805
23	88.54437

Le nombre d'insectes sera inférieur à 100 au bout de 23 ans.
b) La suite (u_n) semble tendre vers 0. La population d'insecte va s'éteindre.

62 **a)** Le coefficient qui permet de modéliser l'évolution de population est $1 - \frac{9}{100} = 0,91$. On a donc $v_n = 1250 \times 0,91^n$.
b) En 2020 il y aura $1250 \times 0,91^4$ soit environ 857 gazelles.
c) La population de gazelles sera inférieure à 100 individus en 2047.
d) La suite (v_n) semble tendre vers 0. La population de gazelles va s'éteindre.

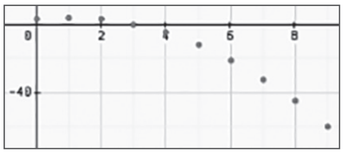
63 **a)** La limite de la suite 1 semble être $+\infty$,
b) la limite de la suite 1 semble être $-\infty$.

64 **a)** La limite de la suite semble être $+\infty$,
b) la limite de la suite semble être $-\infty$.

65 **a)** La limite de la suite (u_n) semble être $+\infty$,
b) La limite de la suite (v_n) semble être 5,
c) La limite de la suite (u_n) semble être $-\infty$.

172909_Chap02_000-000.indd 28 25/07/2019 18:13:52

66 **a)**

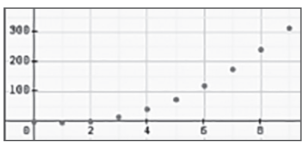


n	u_n
0	3
1	4
2	3
3	0
4	-5
5	-12
6	-21

b) $u_n < -100$ pour $n > 11$, $u_n < -1000$ pour $n > 32$.

c) La suite (u_n) semble tendre vers $-\infty$.

67 **a)**



n	u_n
0	-1
1	-6
2	-1
3	14
4	39
5	74
6	119

b) $v_n > 500$ pour $n > 11$, $v_n > 5000$ pour $n > 32$.

c) La suite (v_n) semble tendre vers $+\infty$.

68 **a)** $u_n = 1 + 3{,}5n$

b) $1 + 3{,}5n > 1000$ équivaut à $n > \dfrac{999}{3{,}5}$ soit $n > 285$.

$1 + 3{,}5n > 10^6$ équivaut à $n > \dfrac{10^6 - 1}{3{,}5}$
soit $n > 28714$.

c) La suite (u_n) semble tendre vers $+\infty$.

69 **a)** $u_n = 0{,}1 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

b)

22	740.1828
23	1122.274
24	1683.411

$u_n > 1000$ pour $n > 22$.

39	737155.5
40	1105733
41	1658600

$u_n > 10^6$ pour $n > 39$.

c) La suite (u_n) semble tendre vers $+\infty$.

70 **a)** $u_n = 10 \times 1{,}25^n$.

b)

n	u_n
0	10
1	12.5
2	15.625
3	19.53125
4	24.41406
5	30.51758
6	38.14697

7	47.68372
8	59.60464
9	74.50581
10	93.13226
11	116.4153
12	145.5192
13	181.8989

44	183671
45	229588.7
46	286985.9
47	358732.4
48	448415.5
49	560519.4
50	700649.2

c) Le nombre de bactéries est supérieur à 100 000 au bout de 52 heures.

d) La suite (u_n) semble tendre vers $+\infty$.

71 **a)** $p_n = 150000 \times 1{,}05^n$.

b)

n	u_n
0	150000
1	157500
2	165375
3	173643.8
4	182325.9
5	191442.2
6	201014.3

7	211065.1
8	221618.3
9	232699.2
10	244334.2
11	256550.9
12	269378.4
13	282847.4

14	296989.7
15	311839.2
16	327431.2
17	343802.7
18	360992.9
19	379042.5

c) La suite (p_n) semble tendre vers $+\infty$.
La population de la ville semble croitre indéfiniment.

72 **1.** 3 **2.** 1 **3.** 4 **4.** 3

73 **1.** 3 **2.** 1 **3.** 3

74 **1. Affirmation fausse**, $n \geqslant 1$, donc $n^2 \geqslant 1$ et $\frac{1}{n^2} > 0$. On a donc $2 + \frac{1}{n^2} > 2$.

2. Affirmation vraie, $n \geqslant 1$, donc $n^2 \geqslant 1$ et $\frac{1}{n^2} \leqslant 1$. On a donc $2 + \frac{1}{n^2} \leqslant 3$.

3. Affirmation fausse,

$$u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2}$$
$$= \frac{-2n-1}{n^2}.$$

Comme $n \geqslant 1$, $\frac{-2n-1}{n^2} < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

4. Affirmation vraie, $n > 1000$, équivaut à $n^2 > 10^6$ soit $\frac{1}{n^2} < 10^{-6}$. On sait que $2 + \frac{1}{n^2} > 2$, on peut donc affirmer que $2 < 2 + \frac{1}{n^2} < 2 + 10^{-6}$.

5. Affirmation fausse,

comme $2 < 2 + \frac{1}{n^2} < 2 + 10^{-6}$ pour $n > 1000$,

on peut affirmer qu'à partir du rang 1 000,

$u_n \in]2 - 10^{-6} ; 2 + 10^{-6}[$.

La suite (u_n) a pour limite 2.

75 **1. a)** $u_n = n^2 - 4 \cdot n + 6$

b)

N debut	0
N fin	10
Pas	1

La suite (u_n) semble croissante à partir du rang 2.

2. $f'(x) = 2x - 4$, $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 2$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	

La suite (u_n) a le même sens de variation que la fonction f, elle est croissante à partir du rang 2.

76 **1.** (u_n) figure 1, (v_n) figure 2 et (w_n) figure 3.

2. a) $1{,}99 < v_n < 2$ pour $n > 300$

b) $v_n < -10^{10}$ pour $n > 18$

c) $v_n > 10^6$. pour $n > 995$.

3. La suite (u_n) semble tendre vers $+\infty$. La suite (v_n) semble tendre vers 2

La suite (w_n) semble tendre vers $-\infty$.

S'entraîner

78 **a)**

```
def seuil_atteint(s):
    i=0
    u=3
    while u < s:
        i=i+1
        u=-2+1.2**i
    return(u,i)
```

b) seuil 500 : seuil$(500) = 35$; seuil$(10^6) = 76$; seuil$(10^{10}) = 127$

La suite (u_n) semble avoir pour limite $+\infty$.

79 **a)**

```
from math import*
def seuil_atteint(s):
    i=0
    u=5
    while u < s:
        i=i+1
        u=2*i**2-4*i+5
    return(u,i)
```

b) seuil$(100) = 8$; seuil$(1000) = 24$;

seuil$(10^6) = 709$

c) La suite (u_n) semble avoir pour limite $+\infty$.

81 **a)** $p_n = 270 \times 1{,}1^n$

b)

	A	B	C
1	n	p(n)	p(n)>10000
2	0	270	FAUX
3	1	297	FAUX
4	2	326,7	FAUX
5	3	359,37	FAUX
38	36	8346,42374	FAUX
39	37	9181,06612	FAUX
40	38	10099,1727	VRAI

Il y aura plus de 100 000 pies à partir de l'année 38.

82 **b)** $t_n > 100$ pour $n \geqslant 8$, $t_n > 1000$ pour $n \geqslant 19$, $t_n > 10000$ pour $n \geqslant 57$, $t_n > 10^6$ pour $n \geqslant 568$.

c) La suite (t_n) semble avoir pour limite $+\infty$.

83 **1. a)** $u_n = u_0 + nr$.

b) $a = n$ et $b = u_0$

c) Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et la suite (u_n) est croissante. Si $a < 0$, la fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et la suite (u_n) est décroissante.

2. a) $f(x) = \frac{5}{2}x - 1$, $\frac{5}{2} > 0$, la fonction f est croissante, la suite (u_n) est croissante.

b) $f(x) = (1 - \sqrt{2})x + 7{,}1 - \sqrt{2} < 0$, la fonction f est décroissante, la suite (u_n) est décroissante.

84 **1.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est décroissante, si $q > 1$, (u_n) est croissante.

2. $v_{n+1} - v_n = v_0 q^n (q-1)$.

a) Si $v_0 > 0$, le signe de $v_{n+1} - v_n$ est le même que celui de $q^n(q-1)$, (v_n) et (q^n) ont même sens de variation.

b) Si $v_0 < 0$, le signe de $v_{n+1} - v_n$ est le signe contraire de celui de $q^n(q-1)$, (v_n) et (q^n) ont des sens de variation contraire.

3. a) $2 > 0$ et $3 > 1$, la suite (u_n) est croissante.

b) $-5 < 0$ et $0{,}75 < 1$, la suite (u_n) est croissante.

c) $6 > 0$ et $0{,}5 < 1$, la suite (u_n) est décroissante.

d) $-3 < 0$ et $4{,}5 > 1$, la suite (u_n) est décroissante.

85 **a)** 80 % correspond à un coefficient de 0,8, les nouveaux adhérents sont au nombre de 20 : on a donc $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 20$.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{0{,}8u_n - 80}{u_n - 100} = 0{,}8$.

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 50$.

$v_n = 50 \times 0{,}8^n$, $50 > 0$ et $0{,}8 < 1$, la suite (v_n) est décroissante.

$u_n = 50 \times 0{,}8^n + 100$, $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

86 **1. a)** $p_1 = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

b) Gagner au moins une fois sur *n* parties est l'événement contraire de perdre *n* fois.

$$p_n = 1 - (\overline{p_1})^n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

2. a)

$n \leftarrow 1$
$p \leftarrow \dfrac{7}{8}$
Tant que $1 - p < 0{,}95$
  $n \leftarrow n + 1$
  $p \leftarrow \left(\dfrac{7}{8}\right)^n$
Fin de tant que
Afficher *n*

b) On obtient $n = 23$

87 **a)** La suite (u_n) semble croissante à partir du rang 3.

b) Étudions le signe de

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^{n+1} \times n^2 - \left(2^n (n+1)^2\right)}{n^2(n+1)^2}$$
$$= \frac{2^n(n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2}.$$

Comme $2^n > 0$ et $n^2(n+1)^2 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend du signe de $n^2 - 2n - 1$.

$u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier supérieur à $1 + \sqrt{2}$ soit pour $n \geqslant 3$.

88 **1.**

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	1	2
3	1	1,666667	1,75
4	2	1,722222	1,729166667
5	3	1,726852	1,727430556
6	4	1,727238	1,72728588
7	5	1,72727	1,727273823
8	6	1,727272	1,727272819
9	7	1,727273	1,727272735

(u_n) semble croissante.

(v_n) semble décroissante.

2. a) $$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\dfrac{(u_n + 3v_n)}{4} - \dfrac{(u_n + 2v_n)}{3}}{v_n - u_n} = \frac{(v_n - u_n)}{12(v_n - u_n)}$$
$$= \frac{1}{12}.$$

(w_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme 1.

b) $w_n = \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

3. $$t_{n+1} = 3\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) + 8\left(\frac{u_n + 3v_n}{4}\right)$$
$$= 3u_n + 8v_n = t_n.$$

La suite (t_n) est constante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 19$.

4. a) u_n et v_n sont solution du système :

$$\begin{cases} 3u_n + 8v_n = 19 \\ -u_n + v_n = \left(\dfrac{1}{12}\right)^n \end{cases}.$$

Soit $u_n = \dfrac{19}{11} - \dfrac{8}{11}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$ et $v_n = \dfrac{19}{11} + \dfrac{3}{11}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{8}{11}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \left(1 - \dfrac{1}{12}\right) > 0$. La suite (u_n) est croissante. De même $v_{n+1} - v_n < 0$. La suite (v_n) est décroissante.

89 **a)** • $p_1 = (1+r)p_0 + \mu$

donc $670 = (1+r) \times 500 + \mu$ soit $500r + \mu = 170$.

• $p_2 = (1+r)p_1 + \mu$ donc $874 = (1+r) \times 670 + \mu$ soit $670r + \mu = 204$.

On obtient $r = 0{,}2$ et $\mu = 70$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = p_{n+1} + 350 = 1{,}2p_n + 420$,

$v_{n+1} = 1{,}2(p_n + 350) = 1{,}2v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 1,2 avec $v_0 = 850$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 850 \times 1{,}2^n$
et $p_n = 850 \times 1{,}2^n - 350$.
d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$p_{n+1} - p_n = 850 \times 1{,}2^n(1{,}2 - 1) = 850 \times 1{,}2^n \times 0{,}2$
donc $p_{n+1} - p_n > 0$.
La suite (p_n) est croissante.

90 **a)** $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n$
$= nu_n + 4 - nu_n = 4.$
La suite (v_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_1 = 0$.
b) $v_n = v_0 + (n-1) \times 4 = 4n - 4$. $u_n = \dfrac{v_n}{n} = 4 - \dfrac{4}{n}$.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4}{n(n+1)} > 0.$
La suite (u_n) est croissante.

91 **a)**

n	u_n
0	4
1	6.542056
2	10.57402
3	16.77852
4	25.89524
5	38.42101
6	54.1313

b)

16	138.6699
17	139.1989

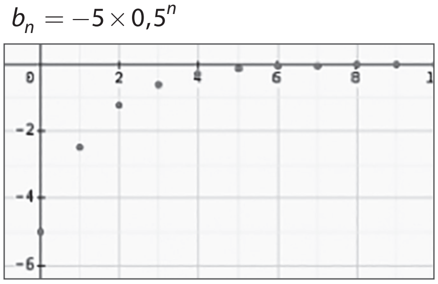
$n = 17$

25	139.9865
26	139.9919

$n = 26$

c) La suite semble tendre vers 140. Le niveau de la mer va atteindre 136 m.

92 **a)** $b_{n+1} = v_{n+1} - 8 = 0{,}5v_n + 4 - 8$
$= 0{,}5(v_n - 8) = 0{,}5b_n$
(b_n) est la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme -5.
b) $b_n = -5 \times 0{,}5^n$
c)



d) $v_n = b_n + 8$, la suite (v_n) semble rendre vers 8.

93 **a)**

n	0	1	2	3	4	5
u	3	2,25	2,0625	2,015625	2,003906	2,000977
2<u<2,001	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI

b)

```
from math import*
n=0
u=3
while u >2.001:
        n=n+1
        u=2+0.25**n
print(u,n)
```

```
from math import*
n=0
u=3
while u >2.000001:
        n=n+1
        u=2+0.25**n
print(u,n)
```

$u = 2.0009765625, n = 5$ $u = 2.0000009536743164, n = 10$

c) La suite (u_n) semble tendre vers 2.

94 **a)**

n	u_n
0	3
1	-9
2	-81
3	-6561
4	-4.304672E7
5	-1.85302E15
6	-3.433684E30

La suite (u_n) semble tendre vers $-\infty$.
b)

```
from math import*
n=0
u=-3
while u >-10**4:
        n=n+1
        u=-u**2
print(u,n)
```

```
from math import*
n=0
u=-3
while u >-10**50:
        n=n+1
        u=-u**2
print(u,n)
```

on a $n = 4$ on a $n = 7$

c) La suite (u_n) semble tendre vers $-\infty$ et confirmer les conjectures.

95 **a)** L'évolution du salaire est modélisée par la suite géométrique de premier terme 15 000 et de raison 1,015.
b)

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 15000$
Tant que $u < s$
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow 1{,}015u$
Fin de tant que
Afficher n

c)

```
from math import*
def seuil_atteint(s):
    i=0
    u=15000
    while u < s:
        i=i+1
        u=1.015*u
    return(u,i)
print(seuil_atteint(18000))
```

La valeur affichée en sortie pour n est 13. Le salaire annuel dépassera 18 000 € la treizième année.

96 **a)** L'évolution du salaire est modélisée par la suite arithmétique de premier terme 16 000 et de raison 145.

b)

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 16000$
Tant que $u < s$
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow u+145$
Fin de tant que
Afficher n

c)

```
from math import*
def seuil(s):
    n=0
    u=16000
    while u < s:
        n=n+1
        u=u+145
    return(n)
print(seuil(18000))
```

La valeur affichée en sortie pour n est 13. Le salaire annuel dépassera 18 000 € la treizième année.

97 **a)**

n	u_n
0	1
1	1.5
2	2.25
3	3.375
4	5.0625
5	7.59375
6	11.39063

b) $S_n = u_0 \dfrac{1-1{,}5^{n+1}}{1-1{,}5} = -2(1-1{,}5^{n+1})$

c) Comme $(1{,}5^{n+1})$ semble tendre vers $+\infty$, il semble que (S_n) tende aussi vers $+\infty$.

98 **a) Vrai**, la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0.
b) Faux, $u_0 = 500 > 100$
c) Faux $u_n = 500 \times 0{,}5^n \neq 0$.
d) Vrai, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) seront inférieurs à 5.
e) Vrai, la suite (u_n) est décroissante de premier terme égal à 500.
f) Faux, la suite (u_n) est décroissante de premier terme égal à 500.

99 **a) Faux**, $u_{47} = 103828 > 500$.
b) Vrai, $u_{2155} > 10^{10}$
c) Vrai, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $n^3 \geqslant 0$ donc $u_n > 5$.
d) Faux, $u_n = f(n)$ avec f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + 5$.
$f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$, donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Ainsi (u_n) est croissante.
e) Vrai, $u_{100} > 10^6$ et (u_n) est croissante. Donc pour tout $n \geqslant 100$, on a $u_n > 10^6$.

100 **a)** Il existe un entier naturel n tel que $u_n > u_{n+1}$.
b) Pour tout nombre entier naturel n, $u_n < 100$.
c) Il existe un nombre réel A, tel que pour tout nombre entier naturel n, $u_n \leqslant A$.

Organiser son raisonnement

101 La suite qui modélise le nombre de joueurs au bout de n semaines est définie par $u_0 = 7500$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 300$.

En utilisant un tableur, on conjecture que (u_n) est décroissante et tend vers 1 500. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1500$.

$v_{n+1} - v_n = 0{,}8(u_n - 1500) = 0{,}8v_n$.

La suite (v_n) est définie par $v_n = 6\,000 \times (0{,}8)^n$.

On a donc $u_n = 6\,000 \times (0{,}8)^n + 1500$.

Pour tout entier n, $u_n > 1500$ Le jeu sera maintenu sur le site

102 **a)** La suite est géométrique de raison q, avec $0 < q < 1$. Elle est donc décroissante.

b) On utilise un programme en langage Python pour déterminer en quelle année les sacs seront interdits : on obtient $n = 10$.

Les sacs seront interdits en 2029.

```
from math import*
def seuil(s):
    n=0
    u=16000000
    while u > s:
        n=n+1
        u=0.75*u
    return(n)
print(seuil(1000000))
```

103 **a)** La suite est géométrique de raison q, avec $0 < q < 1$. Elle est donc décroissante.

b) L'assurance lui rembourse $450 \times 0{,}8^4 = 184{,}32$ €.

c) On utilise un programme en langage Python pour déterminer en quelle année le remboursement sera inférieur à 80 €. On obtient $n = 8$. Ce sera en 2023.

```
from math import*
def seuil(s):
    n=0
    u=450
    while u > s:
        n=n+1
        u=0.8*u
    return(n)
print(seuil(80))
```

104 **1. a)** (u_n) : est définie par $u_0 = 200\,000$ et $u_{n+1} = 0{,}987u_n$.

(v_n) : est définie par $v_0 = 150\,000$ et $v_{n+1} = 1{,}015v_n$.

b)

n	u_n	v_n
0	200000	150000
1	197400	152250
2	194833.8	154533.8
3	192301	156851.8
4	189801	159204.5
5	187333.6	161592.6
6	184898.3	164016.5
7	182494.6	166476.7
8	180122.2	168973.9
9	177780.6	171508.5
10	175469.5	174081.1
11	173188.4	176692.3
12	170936.9	179342.7
13	168714.7	182032.9
14	166521.4	184763.4
15	164356.7	187534.8
16	162220	190347.8
17	160111.2	193203
18	158029.7	196101.1
19	155975.3	199042.6
20	153947.6	202028.3

c) La population de la ville A semble décroitre, celle de la ville B semble croitre.

2. La population de la ville B, dépassera celle de la ville A en $2015 + 11$, soit en 2026.

105 **1.** $p_{n+1} = 0{,}99p_n$ avec $p_0 = 1000$.

2. a)

$n \leftarrow 0$
$p \leftarrow 1000$
Tant que $p > A$
  $n \leftarrow n + 1$
  $p \leftarrow 0{,}99p$
Fin de tant que
Afficher $n \times 100$

b)

```
from math import*
def seuil_atteint(A):
    n=0
    p=1000
    while p>A:
        n=n+1
        p=0.99*p
    return(n)
print(seuil_atteint(800))
```

3. a) • La pression atmosphérique est égale à 800 mbar, approximativement à 2 300 m.

• La pression atmosphérique est égale à 700 mbar, approximativement à 3 600 m.

• La pression atmosphérique est égale à 500 mbar, approximativement à 6 900 m.

b) On conjecture que la limite de (p_n) est égale à 0.

106 **a)** $S_0 = 1$, $S_1 = 1{,}1$, $S_2 = 1{,}11$, $S_3 = 1{,}111$ et $S_4 = 1{,}1111$.

b) S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{10}$.

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right).$$

$\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, la limite de la suite (S_n) est $\frac{10}{9}$.

107 **a)** $T_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $T_1 = \frac{\sqrt{3}}{16}$.

b) Notons p_n la partie de T_n non coloriée.

On a $p_{n+1} = \frac{3}{4}p_n$.

La suite (p_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $\frac{\sqrt{3}}{4}$ donc $p_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

La partie colorée du triangle T_n est $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

Le plus petit entier n tel que $1-\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0{,}99$ est 17.

c) On conjecture que la limite de la suite des aires des triangles T_n est $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

108 **a)** Une perte de 20 % du chiffre d'affaire se traduit par un coefficient égal à 0,8, les clients qui s'abonnent entrainent une augmentation de 18 :

$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18$ et $u_0 = 65$.

b) La recette ne dépassera pas 4 420 € en 2018 $(u_5 = 4\,254{,}016)$.

c) La recette mensuelle de la société tend vers 4 680 € du fait de la stabilisation du nombre de clients à 90.

172909_Chap02_000-000.indd 34 25/07/2019 18:20:49

109 On modélise l'évolution des populations avec un tableur.

	A	B	C	D	E
1		v(n)	b(n)	c(n)	Total
2	0	50000	20000	40000	110000
3	1	47400	23400	39200	110000
4	2	45392	26192	38416	110000
5	3	43856,16	28496,16	37647,68	110000
6	4	42696,6368	30408,6368	36894,7264	110000

Comme la suite c_n est géométrique de raison 0,98, sa limite est zéro.
Les deux autres suites tendent vers 55 000.

110 **a)** Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$.
C'est donc la suite géométrique de premier terme $a_1 = 9$ et de raison $\frac{1}{4}$.
S_n est la somme des n premiers termes de cette suite.

$$S_n = 9 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = 12\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

b) Pour tout entier $n > 6$, $11{,}999 < S_n < 2$.
c) La limite de la suite (S_n) semble être 12.

111 **a)** En utilisant une feuille de calcul, on peut observer les variations de la suite (u_n) pour quelques valeurs de u_1.
Les valeurs maximales de u_n sont surlignées.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)
2	1	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
3	2	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
4	3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
5	4	0,3333333	0,5	0,6666667	0,8333333	1	1,1666667	1,3333333	1,5
6	5	1,0833333	1,125	1,1666667	1,2083333	1,25	1,2916667	1,3333333	1,375
7	6	1,2166667	1,225	1,2333333	1,2416667	1,25	1,2583333	1,2666667	1,275
8	7	1,2027778	1,2041667	1,2055556	1,2069444	1,2083333	1,2097222	1,2111111	1,2125
9	8	1,1718254	1,1720238	1,1722222	1,1724206	1,172619	1,1728175	1,1730159	1,1732143
10	9	1,1464782	1,146503	1,1465278	1,1465526	1,1465774	1,1466022	1,146627	1,1466518
11	10	1,1273865	1,1273892	1,127392	1,1273947	1,1273975	1,1274002	1,127403	1,1274058

J	K	L	M	N	O	P	Q	R
u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)	u(n)
1	2	3	4	5	6	7	8	100
2	3	4	5	6	7	8	9	101
2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	51,5
1,6666667	1,8333333	2	2,1666667	2,3333333	2,5	2,6666667	2,8333333	18,166667
1,4166667	1,4583333	1,5	1,5416667	1,5833333	1,625	1,6666667	1,7083333	5,5416667
1,2833333	1,2916667	1,3	1,3083333	1,3166667	1,325	1,3333333	1,3416667	2,1083333
1,2138889	1,2152778	1,2166667	1,2180556	1,2194444	1,2208333	1,2222222	1,2236111	1,3513889
1,1734127	1,1736111	1,1738095	1,1740079	1,1742063	1,1744048	1,1746032	1,1748016	1,1930556
1,1466766	1,1467014	1,1467262	1,146751	1,1467758	1,1468006	1,1468254	1,1468502	1,1491319
1,1274085	1,1274113	1,127414	1,1274168	1,1274195	1,1274223	1,127425	1,1274278	1,1276813

$u_2 = u_1 + 1$, $u_2 - u_1 = 1$, la suite (u_n) est croissante du rang 1 au rang 2 quelle que soit la valeur de u_1

$$u_3 = \frac{u_2}{2} + 1 = \frac{u_1+1}{2} + 1 = \frac{u_1}{2} + \frac{3}{2},$$

$$u_3 - u_2 = \frac{u_1}{2} + \frac{3}{2} - u_1 - 1 = -\frac{u_1}{2} + \frac{1}{2} > 0 \text{ si } u_1 < 1,$$

la suite (u_n) est croissante du rang 2 au rang 3 si $u_1 < 1$
Et ainsi de suite

$$u_4 = \frac{u_3}{3} + 1 = \frac{\left(\frac{u_1}{2} + \frac{3}{2}\right)}{3} + 1 = \frac{u_1}{6} + \frac{3}{2},$$

$$u_4 - u_3 = \frac{u_1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{u_1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{u_1}{3} > 0 \text{ si } u_1 < 0$$

$$u_5 = \frac{u_4}{4} + 1 = \frac{\left(\frac{u_1}{6} + \frac{3}{2}\right)}{4} + 1 = \frac{u_1}{24} + \frac{11}{8},$$

$$u_5 - u_4 = \frac{u_1}{24} + \frac{11}{8} - \frac{u_1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{u_1}{8} - \frac{1}{8} > 0 \text{ si } u_1 < -1$$

$$u_6 = \frac{u_5}{5} + 1 = \frac{\left(\frac{u_1}{24} + \frac{11}{8}\right)}{5} + 1 = \frac{u_1}{120} + \frac{51}{40},$$

$$u_6 - u_5 = \frac{u_1}{120} + \frac{51}{40} - \frac{u_1}{24} - \frac{11}{8} = -\frac{u_1}{30} - \frac{1}{8} > 0$$

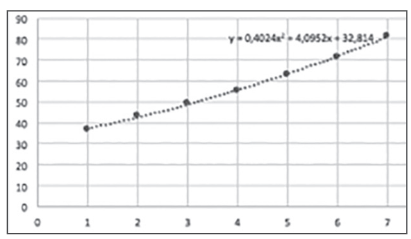
si $u_1 < -\frac{15}{4}$

$$u_7 = \frac{u_6}{6} + 1 = \frac{\frac{u_1}{120} + \frac{51}{40}}{6} + 1 = \frac{u_1}{720} + \frac{97}{80},\ u_7 - u_6$$

$$= -\frac{1}{144u_1} - \frac{1}{16} > 0 \text{ si } u_1 < -9$$

On conjecture que la suite (u_n) décroit à partir du rang 2, si $u_1 < 1$.
Il semble que plus u_1 est petit plus la plage de croissance de la suite (u_n) est grande.

112 **a)**



En utilisant un tableur, on peut modéliser la suite des chiffres d'affaires par :

$$c_n = 0{,}4n^2 + 4{,}1n + 32{,}8.$$

b) La suite (c_n) semble tendre vers $+\infty$. Il est peu probable qu'un chiffre d'affaire devienne infiniment grand.

113 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$v_n - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

On conjecture que la suite : $(v_n - u_n)$ tends vers 0.
Donc $v_n - u_n$ peut devenir aussi proche de 0 que l'on veut.

114 La suite des aires non colorée est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{25\pi}{2n}$.
On conjecture que cette suite tend vers 0. La suite des aires du domaine bleu est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \frac{25\pi}{2} - \frac{25\pi}{2n}$ tend vers $\frac{25\pi}{2}$.

172909_Chap02_000-000.indd 35 25/07/2019 18:21:42

115 **1.** $u_1 = 165$, $u_2 = 176$

2. a) On choisit l'algorithme 2, on atteint 220 par valeurs inférieures.

b) L'algorithme affiche 13.

3. On tabule la suite (u_n) dans la calculatrice. Elle ne semble pas atteindre 250. Les organisateurs n'auront pas à refuser des inscriptions.

Exploiter ses compétences

116 La tornade est classée F3 sur l'échelle de Fujita et a causé des dégâts considérables.

En tabulant la suite géométrique de premier terme 318 et de raison 0,98 on trouve que sa durée a été de 30 minutes.

117 Le nombre d'arbres est modélisé par la suite $(p_n) : \begin{cases} p_0 = 48900 \\ p_{n+1} = 0{,}95p_n + 3000 \end{cases}$

La population devrait se stabiliser aux environs de 60 000 arbres.

118 La quantité de médicament dans le sang est modélisé par la suite $(q_n) : \begin{cases} q_0 = 10 \\ q_{n+1} = 0{,}8q_n + 1 \end{cases}$

La quantité de médicament dans le sang se stabilise au bout de 18 heures à environ 5 mL;

119

	A	B	C	D	E	F	G
1		2nde	1ereG	1ereT	TG	TT	total
2	2017	=16*35	=350	=7*33	=11*36	=8*33	=SOMME(B2:F2)
3	=A2+1	=500	=0,7*B2	=0,3*B2	=0,15*E2+C2	=0,2*F2+D2	=SOMME(B3:F3)
4	=A3+1	=500	=0,7*B3	=0,3*B3	=0,15*E3+C3	=0,2*F3+D3	=SOMME(B4:F4)

	A	B	C	D	E	F	G
1		2nde	1ereG	1ereT	TG	TT	total
2	2017	560	350	231	396	264	1801
3	2018	500	392	168	409,4	283,8	1753,2
4	2019	500	350	150	453,41	224,76	1678,17
5	2020	500	350	150	418,0115	194,952	1612,9635

L'effectif se stabilisera à partir de 2029 autour de 1 600 élèves.

172909_Chap02_000-000.indd 36 25/07/2019 18:21:49

3 Second degré

Découvrir

1 Équation du second degré et forme canonique

1 $f(x) = x(-0{,}3x + 2{,}4)$

On résout $f(x) = 0$

$x = 0$ ou $-0{,}3x + 2{,}4 = 0$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{-2{,}4}{-0{,}3}$

$x = 0$ ou ou $x = 8$

La largeur du pont est égale à 8 m.

2 **a)** On développe l'expression donnée :

Pour tout $x \in [0;8]$:

$-0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8$

$= -0{,}3(x^2 - 8x + 16) + 4{,}8$

$= -0{,}3x^2 + 2{,}4x - 4{,}8 + 4{,}8$

$= -0{,}3x^2 + 2{,}4x$

$= f(x)$

b) Pour tout $x \in [0;8]$, $-0{,}3(x-4)^2 \leqslant 0$ donc :

$-0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8 \leqslant 4{,}8$

La hauteur maximale de l'arche est 4,8 m.

3 **a)** La forme qui permet de résoudre les équations est la forme canonique :

$-0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8 = 0{,}9$

$-0{,}3(x-4)^2 = 0{,}9 - 4{,}8$

$-0{,}3(x-4)^2 = -3{,}9$

$(x-4)^2 = \dfrac{-3{,}9}{-0{,}3}$

$(x-4)^2 = 13$

$x - 4 = \sqrt{13}$ ou $x - 4 = -\sqrt{13}$

$x = 4 + \sqrt{13}$ ou $x = 4 - \sqrt{13}$

$\mathscr{S} = \left\{4 + \sqrt{13}\ ;\ 4 - \sqrt{13}\right\}$.

$-0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8 = 2{,}82$

$-0{,}3(x-4)^2 = -4{,}8 + 2{,}82$

$-0{,}3(x-4)^2 = -1{,}98$

$(x-4)^2 = \dfrac{-1{,}98}{-0{,}3}$

$(x-4)^2 = 6{,}6$

$x - 4 = \sqrt{6{,}6}$ ou $x - 4 = -\sqrt{6{,}6}$

$x = 4 + \sqrt{6{,}6}$ ou $x = 4 - \sqrt{6{,}6}$

$\mathscr{S} = \left\{4 + \sqrt{6{,}6}\ ;\ 4 - \sqrt{6{,}6}\right\}$.

b) À 0,9m au-dessus de l'eau, la largeur du pont est égale à $4 + \sqrt{13} - \left(4 - \sqrt{13}\right) = 2\sqrt{13}$ m, soit environ $7{,}21\text{ m} > 3{,}90$ m.

À 2,92 m au-dessus du niveau de l'eau, la largeur de l'arche est égale à :

$4 + \sqrt{6{,}6} - \left(4 - \sqrt{6{,}6}\right) = 2\sqrt{6{,}6}$ m, soit environ $5{,}14\text{ m} > 3$ m.

Le bateau pourra donc passer sous l'arche de ce pont.

2 Inéquation du second degré

1 La longueur de la ligne est 60 m :

$$\mathrm{L} + 2\ell = 60$$

La zone de baignade doit avoir une superficie supérieure à 400 m² : $L\ell \geqslant 400$.

2 D'après la 1$^{\text{re}}$ équation, on obtient : $\mathrm{L} = 60 - 2\ell$.

On remplace alors L dans l'inéquation :

$(60 - 2\ell)\ell \geqslant 400$

$60\ell - 2\ell^2 - 400 \geqslant 0$

3 **a)** On utilise la forme factorisée :

$-2(\ell - 20)(\ell - 10) \geqslant 0$

$\ell - 20 = 0$ ou $\ell - 10 = 0$

$\ell = 20$ ou $\ell = 10$

On dresse le tableau de signe correspondant à l'inéquation :

ℓ	0		10		20		60
$\ell - 20$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ell - 10$		$-$	0	$+$		$+$	
-2		$-$		$-$		$-$	
$-2(\ell - 20)(\ell - 10)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = [20 \,;\, 60]$.

b) La zone de baignade de Marie Pierre peut avoir pour dimensions :
$10 \leqslant \ell \leqslant 20$ et $20 \leqslant L \leqslant 40$.

Acquérir des automatismes

3 a) $-x^2+120=0$ équivaut à
$\left(\sqrt{120}-x\right)\left(\sqrt{120}+x\right)=0$
c'est-à-dire $x=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$
ou $x=-\sqrt{120}=-2\sqrt{30}$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-2\sqrt{30}\,;\,2\sqrt{30}\right\}$.

b) $\frac{1}{4}x^2+3x+9=0$ équivaut à $\frac{1}{4}(x^2+12x+36)$
$=0$ qui est équivalente à $\frac{1}{4}(x+6)^2=0$,
c'est-à-dire : $x+6=0$ soit $x=-6$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-6\}$.

c) $3x^2+15x=0$ équivaut à $3x(x+5)=0$,
c'est-à-dire $x=0$ ou $x+5=0$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{0\,;\,-5\}$

d) $4x^2-4x+1=0$ équivaut à $(2x-1)^2=0$,
c'est-à-dire $2x-1=0$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4 a) $g(t)=-3(t^2+2t-6)$
En utilisant la méthode de la complétion du carré :

$$g(t)=-3[(t+1)^2-1^2-6]$$
$$g(t)=-3(t+1)^2+21$$

b) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $-3(t+1)^2\leqslant 0$ donc $g(t)\leqslant 21$
g admet 21 pour maximum atteint pour $t=-1$.

7 a) Ici $a=-2$, $b=11$ et $c=-12$
$\Delta=11^2-4\times(-2)\times(-12)=25$
$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions distinctes :
$x_1=\dfrac{-11-\sqrt{25}}{2\times(-2)}=4$ et $x_2=\dfrac{-11+\sqrt{25}}{2\times(-2)}=\dfrac{3}{2}$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\,;\,4\right\}$

b) Ici $a=1$, $b=1$ et $c=1$
$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3$
$\Delta<0$ donc l'équation n'a pas de solution.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\varnothing$

c) Ici $a=0{,}25$, $b=-0{,}4$ et $c=0{,}16$

$$\Delta=(-0{,}4)^2-4\times0{,}25\times0{,}16=0$$

$\Delta=0$ donc l'équation a une unique solution :
$x_0=\dfrac{0{,}4}{2\times0{,}25}=0{,}8$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{0{,}8\}$.

8 a) Ici $a=-1$, $b=5$ et $c=14$

$$\Delta=5^2-4\times(-1)\times(14)=81$$

$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions distinctes :
$x_1=\dfrac{-5-\sqrt{81}}{2\times(-1)}=7$ et $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{81}}{2\times(-1)}=-2$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-2\,;\,7\}$.

b) Ici $a=9$, $b=6$ et $c=1$

$$\Delta=6^2-4\times9\times1=0$$

$\Delta=0$ donc l'équation a une unique solution :
$x_0=\dfrac{-6}{2\times9}=-\dfrac{1}{3}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

c) Ici $a=0{,}4$, $b=2$ et $c=5$

$$\Delta=2^2-4\times0{,}4\times5=-4$$

$\Delta<0$ donc l'équation n'a pas de solution.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\varnothing$

9 1 est une solution évidente de l'équation.
L'autre solution vérifie $x'\times1=\dfrac{-6}{2}$.
Donc $x'=-3$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-3\,;\,1\}$

10 2 est une solution évidente de l'équation.
L'autre solution vérifie $x'\times2=-\dfrac{6}{2}$.
Donc $x'=-\dfrac{3}{2}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\,;\,2\right\}$.

11 -1 est une solution évidente de l'équation.
L'autre solution vérifie $x'\times(-1)=-\dfrac{1}{2}$. Donc $x'=\dfrac{1}{2}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\,;\,-1\right\}$.

14 a) $\Delta=7^2-4\times(-3)\times26=361$
$\Delta>0$ donc la fonction polynôme f a deux racines :
$x_1=\dfrac{-7-\sqrt{361}}{2\times(-3)}=\dfrac{13}{3}$ et $x_2=\dfrac{-7+\sqrt{361}}{2\times(-3)}=-2$.
Donc le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{13}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $\Delta=(-2)^2-4\times1\times9=-32$
$\Delta<0$ donc la fonction polynôme g n'a pas de racine.

D'où le tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

c) $\Delta = 24^2 - 4 \times (-9) \times (-16) = 0$

$\Delta = 0$ donc la fonction polynôme *h* a une seule racine :

$x_0 = \dfrac{-24}{2 \times (-9)} = \dfrac{4}{3}$

Donc le tableau de signes de $h(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$-$	

15 **a)** $\mathcal{S} = \left]-2 \,;\, \dfrac{13}{3}\right[$ $\qquad$ **b)** $\mathcal{S} = \varnothing$ $\qquad$ **c)** $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

16 $f(x) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - 4x^2 + 6$

$$f(x) = 4x + 7$$

Louisa a tort : ce n'est pas une fonction polynôme de degré 2.

17 **a)** $a = \dfrac{3}{2}$, $b = -1$, $c = 4$

b) $a = -4$, $b = 0$, $c = 5$

c) $a = -1$, $b = 3$, $c = 0$

d) $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$

18 $f(x) = -2x - 2x \times 3x + 4$

$f(x) = -6x^2 - 2x + 4$

Laura a raison : *f* est une fonction polynôme de degré 2.

19 On développe *f* :

$f(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x + 1 - x^2$

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

On factorise *f* :

$f(x) = (2x - 1 - x)(2x - 1 + x)$

$f(x) = (x - 1)(3x - 1)$

Ce sont les formes 1 et 3.

20 Tous les polynômes de la forme :

$a(x - 4)(x + 3)$ avec $a \neq 0$.

21 $-(-1)^2 + \dfrac{5}{4} \times (-1) + \dfrac{9}{4} = -1 - \dfrac{5}{4} + \dfrac{9}{4} = 0.$

-1 est une racine.

22 **a)** $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + x + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$$

b) $x^2 - (x^2 + 2x + 1) = -2x - 1$

c) $\left(x + \dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3}{2}x - 1\right) = \dfrac{3}{2}x^2 - x + x - \dfrac{2}{3}$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}$$

d) $\left(x + \dfrac{2}{5}\right)\left(x - \dfrac{2}{5}\right) = x^2 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

$$= x^2 - \frac{4}{25}$$

Les expressions **a)**, **c)** et **d)** correspondent à des expressions du second degré.

23 $f_2(x) = 3x^2 + 7 + 9x^2 - 24x + 16$

$f_2(x) = 12x^2 - 24x + 23$

$f_3(x) = 1 - 10x + 25x^2 - 25x^2$

$f_3(x) = -10x + 1$

Maya a tort : la fonction f_3 n'est pas une fonction polynôme de degré 2.

23

Forme factorisée	Forme développée
$(2x+3)(x+1)$	$2x^2 + 7x + 3$
$(x+3)(2x+1)$	$-2x^2 + 5x - 3$
$(2x-1)(3-x)$	$2x^2 + 5x + 3$
$(3-2x)(x-1)$	$-2x^2 + 7x - 3$

25 **a)** $f(x) = 2x^2 - 10x - 28$

b) 1re méthode :

Le produit est $\dfrac{c}{a} = \dfrac{-28}{2} = -14$

La somme est $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-10}{2} = 5$

2e méthode :

Les racines de *f* sont les solutions de :

$$(x - 7)(2x + 4) = 0$$

c'est-à-dire : $x - 7 = 0$ ou $2x + 4 = 0$

c'est-à-dire : $x = 7$ ou $x = -2$

La somme des racines est : $7 + (-2) = 5$

Le produit des racines est : $7 \times (-2) = -14$

Wesley a raison.

26 **a)** $f(x) = (x - 5)(x - 4)$

b) $(x - 5)(x - 4) = 0$

$x - 5 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$x = 5$ ou $x = 4$

$\mathcal{S} = \{4 \,;\, 5\}$.

27 **a)** $f(x) = x[2(x + 1) - (x - 4)]$

$f(x) = x(x + 6)$

b) $f(x)=x^2+6x$

c) On utilise la forme factorisée :

$x=0$ ou $x+6=0$

$x=0$ ou $x=-6$

$\mathcal{S}=\{0\ ;\ -6\}$.

28

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

29

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{1}{4}$		$-$	0	$+$		$+$	
-3		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

30 $\frac{1}{2}>0$ donc g est du signe de $(4t-1)(3t-2)$

t	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$4t-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3t-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

31 **(2)** en développant le membre de droite on démontre l'égalité.

32 **a)** forme **(3)**

33 **a)** formes **(4)** et **(2)**

34 **a)** $\Delta=2^2-4\times2\times(-1)=12$

$12>0$: donc l'équation a deux solutions.

b) $\Delta=3^2-4\times(-1)\times(-4)=-7$.

$-7<0$ donc l'équation n'a pas de solution.

c) $\Delta=(-4)^2-4\times3\times\frac{4}{3}=0$ donc l'équation a une solution.

35 $\Delta=4^2-4\times\frac{1}{2}\times8=0$ donc l'équation a une unique solution.

Octave a tort.

36 $f(x)=4\left(x^2+2x-\frac{5}{4}\right)$

$f(x)=4\left[(x+1)^2-1^2-\frac{5}{4}\right]$

$f(x)=4\left[(x+1)^2-\frac{9}{4}\right]$

37 **a)** $f(x)=2x^2-2x+3$

$f(x)=2(x^2-x)+3$

$f(x)=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+3$

$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{4}+3$

$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$

b) $g(x)=3x^2+6x+12$

$g(x)=3(x^2+2x)+12$

$g(x)=3\left[(x+1)^2-1^2\right]+12$

$g(x)=3(x+1)^2+9$

c) $h(t)=-5t^2-20t+20$

$h(t)=-5(t^2+4t)+20$

$h(t)=-5[(t+2)^2-2^2]+20$

$h(t)=-5(t+2)^2+40$

38

Fonction	Forme canonique
$-2x^2-4x+3$	$-2(x+1)^2$
$-2x^2-8x-5$	$-2(x+2)^2+3$
$-2x^2-4x-2$	$-2(x+1)^2+5$

39 **a)** $\Delta=(-5)^2-4\times2\times(-3)=49$

$49>0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1=\frac{5-\sqrt{49}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$ ou $x_2=\frac{5+\sqrt{49}}{2\times2}=3$

$\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}\ ;3\right\}$.

b) $\Delta=(-2)^2-4\times3\times\frac{1}{3}=0$.

L'équation a une solution :

$x_0=\frac{2}{2\times3}=\frac{1}{3}$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

c) L'équation peut s'écrire :

$x^2+2x-35=0$

$\Delta=(2)^2-4\times1\times(-35)=144$.

$144>0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1=\frac{-2-\sqrt{144}}{2\times1}=-7$ ou $x_2=\frac{-2+\sqrt{144}}{2\times1}=5$

$\mathcal{S}=\{-7\ ;5\}$.

d) $\Delta=1^2-4\times1\times9=-35$. $\Delta<0$, donc l'équation n'a pas de solution. $\mathcal{S}=\varnothing$.

40 **a)** $\Delta=1^2-4\times(-3)\times4=49$

$49>0$: l'équation a deux solutions :

$x_1=\frac{-1-\sqrt{49}}{2\times(-3)}=\frac{4}{3}$ ou $x_2=\frac{-1+\sqrt{49}}{2\times(-3)}=-1$

172909_Chap03_000-000.indd 40 25/07/2019 18:28:54

$\mathcal{S} = \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6} ; \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$.

b) $\Delta = 4^2 - 4\times(-4)\times 15 = 256$

$256 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{256}}{2\times(-4)} = \frac{5}{2}$ ou $x_2 = \frac{-4+\sqrt{256}}{2\times(-4)} = -\frac{3}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2}\right\}$.

c) $\Delta = 5^2 - 4\times 7\times 1 = -3$

$-3 < 0$, donc l'équation n'a pas de solution.

$\mathcal{S} = \varnothing$.

d) $\Delta = 2{,}5^2 - 4\times 0{,}5\times(-7) = 20{,}25$

$20{,}25 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-2{,}5-\sqrt{20{,}25}}{2\times 0{,}5} = -7$

ou $x_2 = \frac{-2{,}5+\sqrt{20{,}25}}{2\times 0{,}5} = 2$

$\mathcal{S} = \{-7 ; 2\}$.

41 Nassim n'a pas simplifié ses solutions.

42 $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7+4\sqrt{3}$

$\Delta = \left(2-\sqrt{3}\right)^2 - 4\times\left(-2\sqrt{3}\right) = 7+4\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{2} = 2$

$x_2 = \frac{2-\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = -\sqrt{3}$

43 **a)** $3x - 0{,}3x^2 = 0$ équivaut à $x(3-0{,}3x) = 0$.

Ce qui donne : $x = 0$ ou $3 - 0{,}3x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 10$

La largeur de l'arche au sol est 10 m.

b) $f(x) = -0{,}3(x^2 - 10x)$

$f(x) = -0{,}3(x-5)^2 + 0{,}3\times 5^2$

$f(x) = -0{,}3(x-5)^2 + 7{,}5$

On en déduit pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f(x) \leqslant 7{,}5$.

La hauteur maximale de l'arche est 7,5 m.

44 **a)** $\theta(0) = 3\times 0^2 - 12\times 0 + 40 = 40$

La température au début de l'observation est égale à 40 °C.

b) $\theta(t) = 3(t^2 - 4t) + 40$

$\theta(t) = 3[(t-2)^2 - 2^2] + 40$

$\theta(t) = 3(t-2)^2 + 28$

Pour tout t, $(t-2)^2 \geqslant 0$ et donc $3(t-2)^2 \geqslant 0$

On en déduit que pour tout t :

$$3(t-2)^2 + 28 \geqslant 28$$

La température minimale est 28 °C.

Le système de chauffage se déclenche lorsque $t - 2 = 0$, c'est-à-dire $t = 2$, après 2 h.

c) $3t^2 - 12t + 40 = 55$ cela revient à

$3t^2 - 12t - 15 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4\times 3\times(-15) = 324$

$324 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$t_1 = \frac{12-\sqrt{324}}{2\times 3} < 0$ (impossible t représente un temps) ou $t_2 = \frac{12+\sqrt{324}}{2\times 3} = 5$.

Le chauffage aura fonctionné entre 2 h et 5 h soit pendant 3 h.

45 **a)** $-\frac{4}{3}(t^2 - 30t + 225) + \frac{4}{3}\times 324$

$= -\frac{4}{3}t^2 + 40t - 300 + 432$

$= -\frac{4}{3}t^2 + 40t + 132$

$= \mathrm{N}(t)$

Pour tout $t \geqslant 0$, $(t-15)^2 \geqslant 0$ donc $-\frac{4}{3}(t-15)^2 \leqslant 0$ et on en déduit que :

$\mathrm{N}(t) \leqslant \frac{4}{3}\times 324$

Le nombre maximal de bactéries est 432.

b) $-\frac{4}{3}t^2 + 40t + 132 = 0$

$\Delta = 40^2 - 4\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times 132 = 2\,304$

$t_1 = \frac{-40-\sqrt{2\,304}}{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)} = 33$

$t_2 = \frac{-40+\sqrt{2\,304}}{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)} = -8 < 0$: impossible.

Il faudra 33 min pour que les bactéries aient toutes disparues.

46 Expressions **(1)** et **(3)**

47 **a)** Somme : $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{5}$

Produit : $\frac{c}{a} = -2$

b) Somme : $-\frac{b}{a} = \frac{2}{7}$ Produit : $\frac{c}{a} = -5$

c) Somme : $-\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ Produit : $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

d) Somme : $-\frac{b}{a} = 20$ Produit : $\frac{c}{a} = 14$

48 On calcule le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4\times 3\times 2 = -23$$

La fonction n'a donc pas de racine et n'admet pas de forme factorisée.

Marius a raison.

172909_Chap03_000-000.indd 41 25/07/2019 18:30:10

49 **a)** $x=1$ est une solution évidente.

Le produit des deux racines est donné par $\frac{5}{-1}$

$x'\times 1=-5$ donc $x'=-5$

$\mathcal{S}=\{1\,;\,-5\}$

b) $f(x)=-(x-1)(x+5)$

50 **a)** $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times 1=-3$

f ne se factorise pas.

b) $\Delta=(-4)^2-4\times(-1)\times(-4)=0$

La racine double de g est $-\frac{-4}{2\times(-1)}=-2$

$g(x)=-(x+2)^2$

c) $\Delta=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\times\frac{1}{4}\times(-2)=\frac{9}{4}$

h a deux racines :

$$x_1=\frac{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}}{2\times\frac{1}{4}}=-4 \text{ ou } x_2=\frac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}}{2\times\frac{1}{4}}=2.$$

$(x)=\frac{1}{4}(x+4)(x-2)$

d) $\Delta=7^2-4\times(-1)\times(-6)=25$

k a deux racines :

$$x_1=\frac{-7-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=6 \text{ ou } x_2=\frac{-7+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=1$$

$k(x)=-(x-1)(x-6)$

51 **a)** $\Delta=7^2-4\times(-1)\times(-18)=-23$

f ne se factorise pas

b) $\Delta=(-20)^2-4\times 25\times 4=0$

g a une unique racine :

$x_0=-\frac{-20}{2\times 25}=\frac{2}{5}.$

$g(x)=25\left(x-\frac{2}{5}\right)^2$

c) $\Delta=3^2-4\times(-4)\times 1=25$

h a deux racines :

$x_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-4)}=1$ ou

$x_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-4)}=\frac{-1}{4}$

$h(x)=-4(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)$

d) $\Delta=3^2-4\times 2\times(-2)=25$

k a deux racines :

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2}=-4 \text{ ou } x_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2}=1$$

$k(x)=(2x+4)(x-1)$

52 **a)** $3\times(-1)^2-1-2=0$

Donc -1 est une racine de g.

b) Le produit est donné par : $\frac{c}{a}=-\frac{2}{3}$

c) $x'\times(-1)=-\frac{2}{3}$ donc $x'=\frac{2}{3}$

53 **a)** $f(5)=3\times 5^2-13\times 5-10$

$=3\times 25-65-10$

$=0$

b) La somme est donnée par $-\frac{b}{a}=\frac{13}{3}$

c) On en déduit que la seconde racine est :

$x'=\frac{13}{3}-5=-\frac{2}{3}$

$f(x)=3(x-5)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

54 $-6\left(x+\frac{5}{6}\right)^2$

$=-6\left(x^2+\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}\right)$

$=-6x^2-10x-\frac{25}{6}$

$=h(x)$

La forme canonique de Marie est correcte.

Recherche des racines de h :

$h(x)=0$ équivaut à $x+\frac{5}{6}=0$ d'après la forme canonique. h a donc une unique racine $x=-\frac{5}{6}$ et sa forme factorisée est donc bien égale à sa forme canonique. La réponse de Fannie est donc correcte aussi.

55 Le produit de deux nombres inverses est 1, or les produit des deux racines de l'équation **(1)** et de la **(3)** sont respectivement $\frac{1}{9}$ et -1, on peut donc éliminer ces équations de nos recherches.

Pour l'équation **(2)** :

$\Delta=(-3)^2-4\times 7\times 7=-187$

L'équation n'a pas de solution.

La solution est l'équation **(4)**.

56 L'équation admet deux solutions inverses l'une de l'autre puisque leur produit donné par $\frac{c}{a}$ est 1. De plus, leur somme est égale à $-\frac{b}{a}=\frac{100}{7}>0$. Ainsi les deux racines sont de même signe puisque leur produit est positif et leur somme étant positive, ils sont donc positifs.

Armelle a raison.

57

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

58 **a)** Somme de deux nombres positifs (carré et 1) donc positif sur $\mathbb{R}$.

b) Somme de deux nombres négatifs (opposé d'un carré et -1) donc négatif sur $\mathbb{R}$.

59 Les inéquations sont la **(2)** et la **(3)**.

60 **a)**

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		2		11		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

61 **a)**

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-1[\cup]3\,;\,+\infty[$.

b) On calcule le discriminant :

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1 > 0$

L'expression a deux racines :

$t_1 = \dfrac{7-\sqrt{1}}{2} = 3$ et $t_2 = \dfrac{7+\sqrt{1}}{2} = 4$

t	$-\infty$		3		4		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;3[\cup]4\,;\,+\infty[$.

c) On calcule le discriminant :

$\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 > 0$

L'expression a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{25}}{-2} = 6$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{25}}{-2} = 1$

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = [1\,;6]$.

d) On calcule le discriminant :

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 3 = -11 < 0$

u	$-\infty$		$+\infty$
signe		$+$	

$\mathcal{S} = \varnothing$.

62 **a)** L'inéquation peut s'écrire :

$-2a^2 + 13a - 15 > 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = (13)^2 - 4 \times (-2) \times (-15) = 49 > 0$

L'expression a deux racines :

$a_1 = \dfrac{-13-\sqrt{49}}{-4} = 5$ et $a_2 = \dfrac{-13+\sqrt{49}}{-4} = \dfrac{3}{2}$

a	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2}\,;5\right[$.

b) L'inéquation peut s'écrire :

$x^2 + 2{,}1x - 3{,}52 \leqslant 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 2{,}1^2 - 4 \times 1 \times (-3{,}52) = 18{,}49 > 0$

L'expression a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-2{,}1-\sqrt{18{,}49}}{2} = -3{,}2$ et

$x_2 = \dfrac{-2{,}1+\sqrt{18{,}49}}{2} = 1{,}1$

x	$-\infty$		$-3{,}2$		$1{,}1$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = [-3{,}2\,;1{,}1]$.

c) L'inéquation peut s'écrire :

$10x^2 + 2x + 0{,}1 > 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 2^2 - 4 \times 10 \times 0{,}1 = 0$

L'expression a une racine :

$x_1 = \dfrac{-2}{20} = -0{,}1$

x	$-\infty$		$-0{,}1$		$+\infty$
signe		$+$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-0{,}1[\cup]-0{,}1\,;\,+\infty[$.

d) L'inéquation peut s'écrire :

$t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{13}{16} \leqslant 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{13}{16} = -3 < 0$

t	$-\infty$		$+\infty$
signe		$+$	

$\mathcal{S} = \varnothing$.

63 **a)** On calcule le discriminant :

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$

L'expression a deux racines :

$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{25}}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{4} = 2$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right] \cup [2\,;\,+\infty[$.

b) L'inéquation peut s'écrire : $x(5x-6)<0$

x	$-\infty$		0		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=\left]0\,;\frac{6}{5}\right[$.

c) On calcule le discriminant :

$\Delta=30^2-4\times(-3)\times(-75)=0$

L'expression a une racine :

$x_1=\dfrac{-30}{-6}=5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
signe		$-$	0	$-$	

$\mathcal{S}=\varnothing$

d) On calcule le discriminant :

$\Delta=6^2-4\times(-1)\times(-9)=0$

L'expression a une racine :

$x_1=\dfrac{-6}{-2}=3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe		$-$	0	$-$	

$\mathcal{S}=\mathbb{R}$

64 On calcule le discriminant :

$\Delta=(-12)^2-4\times2\times18=0$

L'expression a une racine :

$x=\dfrac{12}{4}=3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe		$+$	0	$+$	

$\mathcal{S}=\{3\}$ donc Hector a raison.

65 On calcule le discriminant :

$\Delta=(-3)^2-4\times2\times4=-32<0$

L'expression est partout du signe de $a=2$.

Donc pour tout réel x, $2x^2-3x+4>0$

Tous les nombres sont solutions, ce qui correspond à l'affichage du logiciel $x=x$.

66 Une inéquation qui n'a qu'une seule solution est une inéquation telle que $\Delta=0$ et le signe de a est opposé à celui recherché.

Par exemple : $-x^2+2x-1\geqslant0$

67 On calcule le discriminant :

$\Delta=(-3{,}5)^2-4\times3\times(-2{,}5)=42{,}25>0$

L'équation a donc deux solutions :

$x_1=\dfrac{3{,}5-\sqrt{42{,}25}}{6}=-\dfrac{1}{2}$ ou

$x_2=\dfrac{3{,}5+\sqrt{42{,}25}}{6}=\dfrac{5}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{3}\right[$

68 **a)** Forme **factorisée**

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=[-5\,;4]$

b) Forme **développée**

$f(x)\geqslant-60$ est équivalente à $3x^2+3x\geqslant0$ soit $3x(x+1)\geqslant0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=]-\infty\,;-1]\cup[0\,;+\infty[$

c) Forme **canonique**

Pour tout réel x, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0$ on en déduit donc que pour tout réel x :

$3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{243}{4}\geqslant-\frac{243}{4}$

$\mathcal{S}=\mathbb{R}$

69 **a)** On remarque que $x=1$ est une racine évidente de B. La seconde racine vérifie :

$x'\times1=\dfrac{-10}{-2}=5$ donc $x'=5$

On obtient alors le tableau de signes :

x	0		1		5		10
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $\mathcal{S}=]1\,;5[$

c) L'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle produit entre 11 et 49 objets.

70 **a)** $3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-20\,000>0$

$3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-20\,000=0$

$\Delta=256\,025$

$\mathrm{I}_1=\dfrac{-5-35\sqrt{209}}{6{,}4}<0$

$\mathrm{I}_2=\dfrac{-5+35\sqrt{209}}{6{,}4}\approx8{,}3$

I	0		I_2		$+\infty$
$3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-20\,000$		$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=[\mathrm{I}_2\,;+\infty[$: la plus petite valeur entière est 79 cm.

b) $3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-30\,000=0$

$\Delta=384\,025$

$\mathrm{I}_3=\dfrac{-5-\sqrt{\Delta}}{6{,}4}<0$

$I_4 = \dfrac{-5+\sqrt{\Delta}}{6{,}4} \approx 96{,}0$

x	0		I_4		$+\infty$
$3{,}2I^2 + 5I - 30\,000$		$-$	0		

$\mathcal{S} = [0\,;I_4]$: la plus petite valeur entière est 96 cm.

c) Les étirements à exercer sont entre 79cm et 96 cm.

71 **1.** A **2.** B **3.** C **4.** D **5.** B

72 **1.** B et C
2. A et B
3. A, B et C

73 **1.** $\Delta = 2^2 - 4\times 2\times \dfrac{1}{2} = 0$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc l'affirmation est fausse.

2. $\Delta = b^2 - 4\times(-4)$

$\Delta = b^2 + 16$

Un carré est toujours positif donc $\Delta > 0$: l'affirmation est vraie.

3. $\Delta = b^2 - 4\times 4\times(-1) = b^2 + 16$

Un carré est toujours positif donc $\Delta > 0$, l'équation a donc deux solutions.

Le produit de ces solutions est égal à $\dfrac{c}{a} = \dfrac{-1}{4} < 0$: les solutions sont donc de signes contraires.

L'affirmation est fausse.

74 **a)** $f(1) = 3\times 1^2 + 6\times 1 - 9 = 0$ donc 1 est une racine de f

b) La somme des racines est égale à $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{6}{3} = -2$

c) $1 + x' = -2$ donc $x' = -3$

la seconde racine de f est -3.

d) $f(x) = 3(x-1)(x+3)$

75 **a)** On développe l'expression donnée :

$2(x-2)^2 + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) + 1$

$= 2x^2 - 8x + 8 + 1$

$= 2x^2 - 8x + 9$

$= f(x)$

b) Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc on en déduit que $2(x-2)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$

f est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$.

76 **a)** $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$

b) $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times(-2) = 25$

c) $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{25}}{2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{2\times 2} = 2$

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\,;2\right\}$.

77 **a)** $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-15) = 64$

$\Delta > 0$ l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{64}}{2\times 1} = -5$ ou $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{64}}{2\times 1} = 3$

$\mathcal{S} = \{-5\,;3\}$.

b)

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

78 **a)** $\Delta = (-40)^2 - 4\times 25\times 16 = 0$

l'équation a une unique solution :

$x_1 = \dfrac{40}{2\times 25} = \dfrac{4}{5}$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{4}{5}\right\}$.

b)

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$+$	

c) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right[\cup \left]\dfrac{4}{5}\,;+\infty\right[$.

S'entraîner

80 **a)** $\Delta = 24^2 - 4\times 9\times 16$

$\Delta = 0$

L'équation a une unique solution $\dfrac{24}{2\times 9} = \dfrac{4}{3}$.

```
Delta = 0.0
la seule solution est 1.3333333333333333
```

Le programme affiche une valeur approchée de la solution.

b) $\Delta = 3{,}4^2 - 4\times 0{,}5\times 2$

$\Delta = 9{,}56$

L'équation a deux solutions

$\dfrac{-3{,}4+\sqrt{9{,}56}}{2\times 0{,}5} = -3{,}4+\sqrt{9{,}56}$

$\dfrac{-3{,}4-\sqrt{9{,}56}}{2\times 0{,}5} = -3{,}4-\sqrt{9{,}56}$

```
Delta = 9.559999999999999
les solutions sont -0.30807503325193863 et -6.491924966748061
```

Le programme affiche une valeur approchée des deux solutions et du discriminant.

81

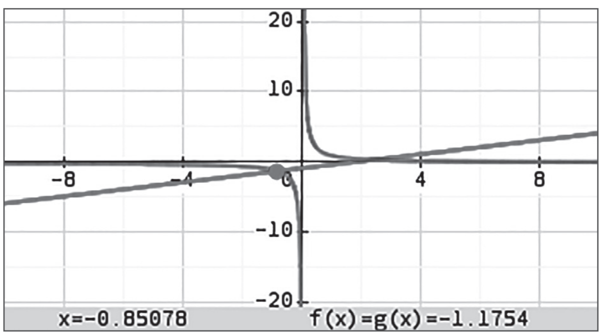
```
from math import*
a=float(input("Entrer a"))
b=float(input("Entrer b"))
c=float(input("Entrer c"))
alpha=-b/(2*a)
beta=(-b**2+4*a*c)/(4*a)
print("alpha=", alpha)
print("beta=", beta)
```

Pour $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ on obtient :

```
Entrer a2
Entrer b3
Entrer c4
alpha= -0.75
beta= 2.875
```

Soit $f(x) = 2(x + 0{,}75)^2 + 2{,}875$

83 **a)**



Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semblent avoir deux points d'intersection. Le premier a pour abscisse $x_1 \approx -0{,}85$ et le second $x_2 \approx 2{,}35$

b) Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{x}$$

Dans $\mathbb{R}^*$ cette équation équivaut à $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)x = 1$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - 1 = 0$.

$$\Delta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{41}{16}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

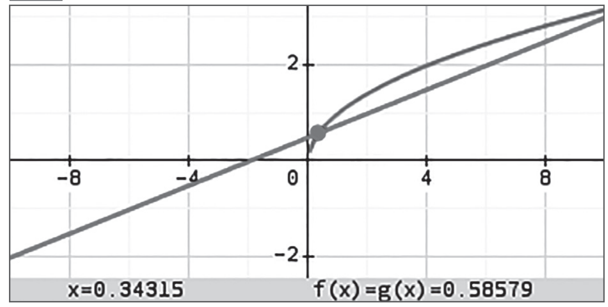
$$x_1 = \frac{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{41}{16}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{41}{16}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3 + \sqrt{41}}{4}$$

Donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersections d'abscisses x_1 et x_2.

On vérifie que $x_1 \approx -0{,}85$ et $x_2 \approx 2{,}35$

84 **a)**



Les courbes semblent avoir deux points d'intersection d'abscisses $x_1 \approx 0{,}4$ et $x_2 \approx 11{,}7$

b) En raison de la racine carrée, l'équation n'a de sens que si $x \geqslant 0$.

De plus, pour x réel positif, $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ est positif.

Deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux.

De plus, x étant positif, $\sqrt{x}^2 = x$

L'équation est, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, équivalente à : $\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)^2 = x$

c) L'équation précédente peut s'écrire :

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2 \times \frac{1}{16}} = \frac{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{8}} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2 \times \frac{1}{16}} = \frac{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{8}} = 6 + 4\sqrt{2}$$

Les deux solutions trouvées sont positives donc les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont $6 - 4\sqrt{2}$ et $6 + 4\sqrt{2}$.

85 **1. a)** $\Delta = b^2 - 4ac$

a et *c* sont de signes contraires donc leur produit est négatif et par conséquent $-4ac \geqslant 0$

Δ est donc la somme de deux nombres positifs donc est positif : l'équation aura donc au moins une solution.

b) Pour que l'équation ait deux solutions réelles distinctes, il faut que Δ soit strictement positif.

Or dans ce cas, $\Delta = 0$ si et seulement si $b = c = 0$.

Ainsi pour que l'équation ait deux solutions distinctes, il suffit que *b* ou *c* soit non nul.

2. $x^2 + 2x + 1 = 0$ est équivalente à $(x + 1)^2 = 0$.

L'équation admet donc une unique solution $x = -1$ mais *a* et *c* sont tous les deux positifs.

172909_Chap03_000-000.indd 46 25/07/2019 18:34:13

86 **1. a)** Les nombres u et v sont les solutions de l'équation :

$$(x-u)(x-v)=0.$$

On développe le membre de gauche :

$$x^2-(u+v)x+uv=0.$$

Or $S=u+v$ et $P=uv$, on en déduit que u et v sont les solutions de :

$$x^2-Sx+P=0.$$

b) u et v sont solutions de $x^2-Sx+P=0$, on en déduit que :

$$(x-u)(x-v)=x^2-Sx+P.$$

Par identification des coefficients, on obtient : $S=u+v$ et $P=uv$.

c) u et v sont solutions de $x^2-Sx+P=0$ si, et seulement si, $S=u+v$ et $P=uv$.

2. a) Les nombres cherchés sont solutions de l'équation : $x^2-6x+1=0$.

On calcule le discriminant :

$\Delta=(-6)^2-4\times1\times1=32.$

Les solutions sont :

$x_1=\dfrac{6-\sqrt{32}}{2}$ et $x_2=\dfrac{6+\sqrt{32}}{2}$.

b) Les longueurs du rectangle sont les solutions de l'équation : $x^2-24x+25=0$.

On calcule le discriminant :

$\Delta=(-24)^2-4\times1\times25=476$

Les solutions sont :

$x_1=\dfrac{24-\sqrt{476}}{2}$ et $x_2=\dfrac{24+\sqrt{476}}{2}$.

87 **a)** $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$\qquad\qquad=2^2-2\times(-11)=26$

b) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\dfrac{26}{(-11)^2}=\dfrac{26}{121}$

88 f s'écrit sous la forme : $f(x)=a(x+4)(x-5)$.

De plus $f(3)=8$ ce qui est équivalent à :

$a\times7\times(-2)=8$, soit $a=-\dfrac{4}{7}$.

La fonction f cherchée est :

$$f(x)=-\frac{4}{7}(x+4)(x-5).$$

89 D'après leurs formes canoniques, f admet pour maximum 109 lorsque $x=56$ et g admet pour maximum $\dfrac{436\,001}{4\,000}=109{,}000\,25$ lorsque $x=\dfrac{561}{10}=56{,}1$.

Donc Rafaël a tort.

90 $N(t)=-5(t^2-10t)+1000$

$N(t)=-5(t-5)^2-5\times5^2+1000$

$N(t)=-5(t-5)^2+875$

Le nombre maximal de bactéries observables est 875 après 5 min.

91 $E(\alpha)=-0{,}2(\alpha^2-64\alpha)+1800$

$E(\alpha)=-0{,}2(\alpha-32)^2+0{,}2\times32^2+1800$

$E(\alpha)=-0{,}2(\alpha-32)^2+2\,004{,}8$

Pour tout $0\leqslant\alpha\leqslant90$, $-0{,}2(\alpha-32)^2\leqslant0$

On en déduit que, pour tout $0\leqslant\alpha\leqslant90$:

$-0{,}2(\alpha-32)^2+2\,004{,}8\leqslant2\,004{,}8$.

La quantité maximale d'énergie est atteinte pour une inclinaison de $32\,°$.

92 **a)** On résout : $\dfrac{v^2}{14}+2v=175$

c'est-à-dire : $\dfrac{v^2}{14}+2v-175=0$.

On calcule le discriminant :

$\Delta=2^2-4\times\dfrac{1}{14}\times(-175)=54$

Les solutions sont :

$v_1=\dfrac{-2-\sqrt{54}}{2\times\dfrac{1}{14}}=-14-21\sqrt{6}<0$

et $v_2=\dfrac{-2+\sqrt{54}}{2\times\dfrac{1}{14}}=-14+21\sqrt{6}$

Le véhicule roulait à $21\sqrt{6}-14\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à l'instant du freinage, soit environ $37{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

b) $37{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=134{,}8\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Il ne respectait pas la limitation de vitesse.

93 Soit L et ℓ les dimensions du terrain de Guillaume. D'après les données on sait que :

$2(L+\ell)=17$ et $L\ell=17$

On en déduit donc que L et ℓ sont les solutions de l'équation :

$$x^2-8{,}5x+17=0.$$

On calcule le discriminant :

$\Delta=(-8{,}5)^2-4\times1\times17=4{,}25.$

Les solutions sont :

$x_1=\dfrac{8{,}5-\sqrt{4{,}25}}{2}$ et $x_2=\dfrac{8{,}5+\sqrt{4{,}25}}{2}$

Le terrain de Guillaume a pour dimensions :

$\dfrac{8{,}5-\sqrt{4{,}25}}{2}$ m, soit environ 3,2m et $\dfrac{8{,}5+\sqrt{4{,}25}}{2}$ m soit environ 5,3m.

94 **a)** On résout :

$X^2-3X=0$

$X(X-3)=0$

$X=0$ ou $X=3$ soit : $x^2=0$ ou $x^2=3$

$\mathcal{S}=\left\{0\ ;\ -\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\right\}$.

b) On résout :

$$-\frac{1}{6}X^2 + 3X - 13{,}5 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 3^2 - 4 \times \frac{-1}{6} \times (-13{,}5) = 0$

L'équation a une solution unique : $X_0 = \dfrac{-3}{2\left(-\frac{1}{6}\right)} = 9$

soit $x^2 = 9$.

$\mathcal{S} = \{-3\,;3\}$.

c) On résout :

$$3X^2 + 9X - 12 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-9-\sqrt{225}}{6} = -4$ ou $x_2 = \dfrac{-9+\sqrt{225}}{6} = 1.$

Soit $x^2 = -4$ (impossible) ou $x^2 = 1$

$\mathcal{S} = \{-1\,;1\}$

d) On résout :

$$2X^2 + 40X + 128 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 40^2 - 4 \times 2 \times 128 = 576$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-40-\sqrt{576}}{4} = -16$ ou

$x_2 = \dfrac{-40+\sqrt{576}}{4} = -4.$

Soit $x^2 = -16$ ou $x^2 = -4$ (impossible)

$\mathcal{S} = \varnothing$.

95 **a)** On calcule le discriminant :

$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 81 \times 1 = 0$

L'équation a une unique solution :

$x_0 = \dfrac{18}{2 \times 81} = \dfrac{1}{9}$

b) On pose $X = x^2$.

Cela revient à résoudre : $81X^2 - 18X + 1 = 0$.

D'après la question **a)** : $X = \dfrac{1}{9}$, soit $x^2 = \dfrac{1}{9}$.

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right\}$.

c) On pose $Y = x^2$.

Cela revient à résoudre : $81Y^4 - 18Y^2 + 1 = 0$.

D'après la question **b)** : $Y = -\dfrac{1}{3}$ ou $Y = \dfrac{1}{3}$

Soit $x^2 = -\dfrac{1}{3}$ (impossible) ou $x^2 = \dfrac{1}{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

96 L'équation 1 donne : $y = 49 - x$.

En substituant dans l'équation 2, on obtient :

$x^2 + (49-x)^2 = 1225$

Soit $2x^2 - 98x - 1176 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 98^2 - 4 \times 2 \times (-1176) = 19\,012$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{98-\sqrt{19\,012}}{4}$ ou $x_2 = \dfrac{98+\sqrt{19\,012}}{4}$

On remplace alors pour trouver les valeurs de y :

$y = 49 - \dfrac{98-\sqrt{19\,012}}{4} = \dfrac{98+\sqrt{19\,012}}{4}$

ou $y = 49 - \dfrac{98+\sqrt{19\,012}}{4} = \dfrac{98-\sqrt{19\,012}}{4}$

Le système a deux couples solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{98-\sqrt{19\,012}}{4}\,;\frac{98+\sqrt{19\,012}}{4}\right);\left(\frac{98+\sqrt{19\,012}}{4}\,;\frac{98-\sqrt{19\,012}}{4}\right)\right\}$$

97 L'équation 1 donne : $x = y + 10$ soit en substituant dans l'équation 2 :

$(y+10)y = -16$

soit $y^2 + 10y + 16 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 16 = 36$

L'équation a deux solutions :

$y_1 = \dfrac{-10-\sqrt{36}}{2} = -8$ ou $y_2 = \dfrac{-10+\sqrt{36}}{2} = -2$

On remplace pour trouver les valeurs de x correspondantes :

$x_1 = -8 + 10 = 2$ et $x_2 = -2 + 10 = 8$

Le système a deux couples solutions :

$$\mathcal{S} = \{(2\,;-8)\,;(8\,;-2)\}.$$

98 La seconde équation du système peut s'écrire :

$\dfrac{x+y}{xy} = -0{,}3$ soit en utilisant l'équation 1 :

$x + y = -0{,}3 \times (-2{,}5)$

On en déduit : $y = 0{,}75 - x$

L'équation 1, s'écrit alors : $x(0{,}75 - x) = -2{,}5$

soit $-x^2 + 0{,}75x + 2{,}5 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 0{,}75^2 - 4 \times (-1) \times 2{,}5 = 10{,}562\,5$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-0{,}75-\sqrt{10{,}562\,5}}{-2} = 2$

ou $x_2 = \dfrac{-0{,}75+\sqrt{10{,}562\,5}}{-2} = -1{,}25$

Ce qui donne : $y_1 = 0{,}75 - 2 = -1{,}25$

et $y_2 = 0{,}75 + 1{,}25 = 2$

Le système a deux couples solutions :

$$\mathcal{S} = \{(2\,;-1{,}25)\,;(-1{,}25\,;2)\}.$$

99 En utilisant la formule de la vitesse moyenne, $v = \dfrac{d}{t}$, les données de l'exercice se traduisent par :

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{195}{v_1} \\ t_1 - 1 = \dfrac{195}{v_1 + 4} \end{cases}$$

En substituant t_1 dans la seconde équation, on obtient :

$\dfrac{195}{v_1} - 1 = \dfrac{195}{v_1 + 4}$,

soit $-v_1^2 - 4v_1 + 780 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 780 = 3\,126$

L'équation a deux solutions :

$v_1 = \dfrac{4 - \sqrt{3126}}{-2}$ ou $v_1 = \dfrac{4 + \sqrt{3126}}{-2} < 0$: impossible

La vitesse du premier cycliste est $\dfrac{\sqrt{3126} - 4}{2}$ $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, soit environ $26 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et celle du second cycliste est $\dfrac{\sqrt{3126} + 4}{2}$ $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, soit environ $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

100 **1. a)** Après découpage, l'aire du carré de côté $x + 5$ est égale à l'aire du rectangle de départ ADFE (39) à laquelle s'ajoute l'aire du carré de côté 5.

soit : $(x + 5)^2 - 25 = 39$

b) $(x + 5)^2 = 64$ équivaut à $x + 5 = 8$ ou $x + 5 = -8$ soit $x = 3$ ou $x = -13 < 0$ car x est une longueur.

2. a) On calcule le discriminant :

$\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times (-39) = 256$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-10 - \sqrt{256}}{2} = -13$ ou $x_2 = \dfrac{-10 + \sqrt{256}}{2} = 3$

b) On retrouve bien les mêmes solutions.

101 On note a et b les longueurs des côtés adjacents à l'angle droit. On sait que $a > 0$ et $b > 0$

D'après les données, on obtient le système :

$$\begin{cases} ab = 429 \times 2 \\ a^2 + b^2 = 72{,}5^2 \end{cases}$$

L'équation 1 donne : $b = \dfrac{858}{a}$ ce qui en substituant dans l'équation 2 :

$a^2 + \dfrac{736\,164}{a^2} = 5\,256{,}25$

Soit : $a^4 - 5\,256{,}25a^2 + 736\,164 = 0$

On pose $\text{X} = a^2$

Cela revient à résoudre :

$$\text{X}^2 - 5\,256{,}25\text{X} + 736\,164 = 0$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = (-5\,256{,}25)^2 - 4 \times 736\,164 = 24\,683\,508{,}062\,5$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{5\,256{,}25 - 4\,968{,}25}{2} = 144$ ou

$x_2 = \dfrac{5\,256{,}25 + 4\,968{,}25}{2} = 5\,112{,}25$

Soit $a^2 = 144$ donc $a = 12$ puisque $a > 0$ et alors $b = \dfrac{858}{12} = 71{,}5$

Soit $a^2 = 5112{,}25$ donc $a = 71{,}5$ puisque $a > 0$ et alors $b = \dfrac{858}{71{,}5} = 12$

Le périmètre du triangle est :

$71{,}5 + 12 + 72{,}5 = 166$ m

102 M est un point de la droite d donc M a pour coordonnées $(x\,;\,2x + 4)$

De plus, on veut que $\text{OM} = \sqrt{5}$ soit :

$$\sqrt{x^2 + (2x + 4)^2} = \sqrt{5}$$

ce qui équivaut à :

$$x^2 + (2x + 4)^2 = 5$$

c'est-à-dire : $5x^2 + 16x + 11 = 0$

$\Delta = 16^2 - 4 \times 5 \times 11 = 36$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-16 - \sqrt{36}}{2 \times 5} = -2{,}2$ et $x_2 = \dfrac{-16 + \sqrt{36}}{2 \times 5} = -1$

Les points M ont donc pour coordonnées $(-2{,}2\,;\,-0{,}4)$ et $(-1\,;\,2)$.

103 **a)** $\text{D}(x) = 4\pi - \pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \pi\left(\dfrac{4 - x}{2}\right)^2$

$\text{D}(x) = \pi\left[4 - \dfrac{x^2}{4} - \left(4 - 2x + \dfrac{x^2}{4}\right)\right]$

$\text{D}(x) = \pi\left(2x - \dfrac{x^2}{4}\right)$

$\text{D}(x) = \dfrac{\pi}{2}(-x^2 + 4x)$.

b) Par la méthode de la complétion du carré :

$$\text{D}(x) = -\frac{\pi}{2}(x - 2)^2 + 2\pi.$$

L'aire de la partie bleue est maximale lorsque M est le milieu de [AB] et $\text{D}_{\max} = 2\pi$.

c) On doit avoir : $\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}(-x^2 + 4x) \leqslant \dfrac{3}{2}\pi$

c'est-à-dire $x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$ et $-x^2 + 4x - 3 \leqslant 0$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.

- $x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Delta = 8$; $x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

x	0		$2 - \sqrt{2}$		$2 + \sqrt{2}$		4
$x^2 - 4x + 2$		+	0	−	0	+	

- $-x^2 + 4x - 3 = 0$.

$\Delta = 4$; $x_3 = 1$ et $x_4 = 3$.

172909_Chap03_000-000.indd 49 25/07/2019 18:37:38

x	0		1		3		4
x^2-4x+2		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : Charlotte doit placer le point M tel que : $x \in \left[2-\sqrt{2}\,;1\right] \cup \left[3\,;2+\sqrt{2}\right]$.

104 **a)** Soit p le prix de vente à la tonne.
Comme il y a équilibre pour 25 tonnes, $25p = 25^2 + 632 \times 25 + 1\,075$ donc $p = 700$ €.
b) $\mathrm{B}(q) = 700q - \mathrm{C}(q) = -q^2 + 68q - 1075$
c) L'activité est rentable lorsque $\mathrm{B}(q) \geqslant 0$.
On cherche les racines de $\mathrm{B}(q)$. $\Delta = 324$, il y a donc deux racines : 25 (déjà connue), et 43.
Comme le coefficient de x^2 est négatif, $\mathrm{B}(q)$ est positif entre les racines. L'activité est rentable pour une production comprise entre 25 et 43 tonnes de papier.

105 **a)** $x \in [0,8\,;12]$
b) L'aire de la partie restante est :
$(12-x)(30-x) \geqslant 280$ ce qui est équivalent à : $360 - 12x - 30x + x^2 \geqslant 280$,
soit $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$
c) $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 1 \times 80 = 1444$
$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{42-\sqrt{1444}}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{42+\sqrt{1444}}{2} = 40$

x	$-\infty$		2		40		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi comme $x \in [0,8\,;12]$, on en déduit que les largeurs possibles du chemin sont comprises entre 0,8 m et 2 m.

106 **1.** L'inéquation est équivalente à :
$x^2 - 1000x - 8\,000 \geqslant 0$
$\Delta = (-1000)^2 - 4 \times 1 \times (-8\,000) > 0$
Par conséquent, l'inéquation admet des solutions.
2. a) Cet algorithme permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur positive dont l'image par h dépasse le nombre saisi pour M.
b) On obtient 1008 : 1008 est le plus petit entier positif tel que $h(1008) \geqslant 8\,000$.

107 **a) Faux :** sur $[1\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant 0$
b) Faux : les nombres de l'intervalle $\left[-2\,;0\right]$ ont une image positive.
c) Vrai : Tous les nombres de l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ ont une image positive.
d) Faux : Les nombres de l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$ ont aussi une image négative.
e) Faux : $\left]-1\,;1\right[\subset \left]-2\,;1\right[$ donc leur image est un nombre positif.

108 P_1 est vraie
P_2 est vraie
Réciproque de P_1 : Si $\Delta < 0$, alors pour tout nombre réel x, $f(x) > 0$
La réciproque est fausse, $f(x)$ peut être strictement négatif.
Réciproque de P_2 : Si $\Delta > 0$, alors $ac < 0$
La réciproque est fausse.

Organiser son raisonnement

109 On note h et c les côtés du triangle.
$h + c = 4{,}9$ et $h^2 + c^2 = 3{,}5^2$
Cela revient à résoudre l'équation :
$$h^2 + (4{,}9-h)^2 = 3{,}5^2$$
ce qui est équivalent à : $2h^2 - 9{,}8h + 11{,}76 = 0$
$\Delta = 1{,}96$
Les solutions sont :
$h_1 = \dfrac{9{,}8-1{,}4}{4} = 2{,}1$ ou $h_2 = \dfrac{9{,}8+1{,}4}{4} = 2{,}8$
Les côtés du triangle sont 2,1 et 2,8.
$h + c = 4{,}9$ et $3{,}5^2 + c^2 = h^2$
Cela revient à résoudre l'équation :
$$3{,}5^2 + (4{,}9-h)^2 = h^2$$
$$36{,}26 - 9{,}8h = 0$$
$$h = 3{,}7$$
Les côtés du triangle sont 3,7 et 1,2.

110 **a)** Méthode d'Abdel : il a calculé le discriminant de f pour déterminer les racines et en déduire ensuite la forme factorisée.
Avantage : cette méthode convient pour toutes les fonctions
Inconvénient : les calculs ne sont pas « astucieux ».
Bélinda : elle a trouvé une racine évidente de f puis a trouvé la forme factorisée à partir de cette racine.
Avantage : les calculs peuvent tous être faits à la main, et on en déduit rapidement la factorisation
Inconvénient : il n'est pas toujours facile de trouver une racine évidente.
Charlotte : elle a écrit f sous forme canonique, et a alors trouvé la forme factorisée de f puisque ce sont les mêmes.
Avantage : la méthode est rapide, car f a la même forme canonique et factorisée.

Inconvénient : il faut ensuite trouver comment factoriser la forme canonique dans le cas général.
Dominic : il a commencé à remarquer que les coefficients sont des multiples de 5, puis reconnait une identité remarquable ce qui lui permet de déterminer la factorisation, sans passer par la recherche des racines.
Avantage : il obtient directement la forme factorisée
Inconvénient : on ne peut l'utiliser que si la factorisation se fait à partir d'une identité remarquable.
b) La stratégie d'Abdel et celle de Charlotte auraient pu être utilisées mais pas les deux autres car les deux racines de *f* sont irrationnelles et la factorisation ne se fait pas à l'aide d'une identité remarquable.

111 On note x la largeur de la croix rouge.
L'aire de la partie rouge est donnée par :
$2x+3x-x^2=5x-x^2$
L'aire du drapeau est : $3\times 2=6$
L'aire de la croix rouge et la partie blanche ont la même aire, si $5x-x^2=\dfrac{6}{2}$ ce qui donne :
$-x^2+5x-3=0$.
On calcule le discriminant :
$\Delta=5^2-4\times(-1)\times(-3)=13$
L'équation a deux solutions :
$x_1=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{-2}=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ ou
$x_2=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{-2}=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$
Or $x_1\approx 4{,}3$: impossible, car les dimensions du drapeau sont 2 m et 3 m.
La largeur de la croix rouge doit donc être égale à $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ m.

112 On note x la longueur, en cm, du côté du carré le plus petit. Les deux autres côtés ont pour longueur $x+2$ et $x+4$.
L'aire se calcule en faisant :
$$x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=515,$$
équation qui est équivalente à : $3x^2+12x-495=0$
On calcule le discriminant :
$\Delta=12^2-4\times3\times(-495)=6\,084$
L'équation a deux solutions :
$x_1=\dfrac{-12-\sqrt{6\,084}}{2\times3}=-15$ ou
$x_2=\dfrac{-12+\sqrt{6\,084}}{6}=11$
x représente une longueur donc $x>0$.
Ainsi la longueur du plus petit carré est 11 cm et la longueur du polygone est donnée par :
$11+13+15=39$ m.

113 On calcule le discriminant :
$$\Delta=(m-1)^2-4m\times(-1)$$
$$\Delta=m^2-2m+1+4m$$
$$\Delta=m^2+2m+1$$
$$\Delta=(m+1)^2$$
Si $m=-1$, alors $\Delta=0$, l'équation a une unique solution.
Si $m\neq-1$, alors $\Delta>0$, l'équation a deux solutions.

114 On note *n* le nombre de personnes du groupe d'amis et le gain par personne.
L'énoncé se traduit par le système :
$\begin{cases} nx=2\times10^6 \\ (n-5)(x+20\,000)=2\times10^6 \end{cases}$
On obtient l'équation :
$\dfrac{-5x^2-10^5x+4\times10^{10}}{x}=0$
$x\neq0$, ce qui équivaut à $-5x^2-10^5x+4\times10^{10}=0$
On calcule le discriminant :
$\Delta=(-10^5)^2-4\times(-5)\times(4\times10^{10})$
$\Delta=10^{10}\times81$
Les solutions sont :
$x_1=\dfrac{10^5-\sqrt{81\times10^{10}}}{2\times(-5)}=8\times10^4$ ou
$x_2=\dfrac{10^5+\sqrt{81\times10^{10}}}{-10}=-10^5<0$
Le nombre d'amis du groupe est donné par :
$\dfrac{2\times10^6}{8\times10^4}=\dfrac{200}{8}=25.$
Il y avait 25 amis dans le groupe et chacun a gagné 80 000 €.

115 On note L et ℓ respectivement la longueur et la largeur du rectangle.
Les données se traduisent par :
$\begin{cases} L+\ell=\dfrac{k}{2} \\ L\ell=k \end{cases}$ ce qui est équivalent à $\begin{cases} L=\dfrac{k}{2}-\ell \\ L\ell=k \end{cases}$
En substituant dans la seconde équation :
$\begin{cases} L=\dfrac{k}{2}-\ell \\ \left(\dfrac{k}{2}-\ell\right)\ell=k \end{cases}$ soit, $\begin{cases} L=\dfrac{k}{2}-\ell \\ -\ell^2+\dfrac{k}{2}\ell-k=0 \end{cases}$
On résout la seconde équation, en calculant le discriminant :
$\Delta=\left(\dfrac{k}{2}\right)^2-4\times(-1)\times(-k)=\dfrac{k^2-16k}{4}$
Pour que cette équation ait des solutions, il faut que Δ soit positif.
$\dfrac{k^2-16k}{4}=\dfrac{k(k-16)}{4}$

k	0		16		$+\infty$
Signe		$-$	0	$+$	

Ainsi, l'équation aura des solutions si $k \geqslant 16$.

116 **a)** $g(2) = 2\times 2^3 - 7\times 2^2 + 2 + 10$

$g(2) = 2\times 8 - 7\times 4 + 12$

$g(2) = 0$

Donc 2 est une racine évidente de g.

b) On développe et on identifie les coefficients :

$$(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -7 \\ c - 2b = 1 \\ -2c = 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 + 2\times 2 \\ c = 1 + 2\times(-3) \\ c = \dfrac{10}{-2} \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -5 \end{cases}$

Et donc $g(x) = (x-2)(2x^2 - 3x - 5)$

c) On utilise la forme factorisée :

$$x - 2 = 0 \text{ ou } 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

On calcule le discriminant pour l'équation du second degré : $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times(-5) = 49$

$\Delta > 0$, l'équation a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{49}}{2\times 2} = -1 \text{ ou } x_2 = \frac{3+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{5}{2}$$

L'équation a trois solutions : $\mathscr{S} = \left\{-1\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,2\right\}$.

117 **a)**

```
n=float(input("Entrer la partie entière de la racine cherchée"))
k=float(input("Entrer k"))
a=n
for i in range (0,5):
    a=1/2*(a+k/a)
```

```
>>> a
1.414213562373095
```

b) $f(x) = 3(x^2 + 2x) + 5$

$f(x) = 3(x+1)^2 - 3 + 5$

$f(x) = 3(x+1)^2 + 2$

c) $f(x) = 8$ s'écrit $3(x+1)^2 + 2 = 8$ est équivalent à $(x+1)^2 = \dfrac{8-2}{3}$, c'est-à-dire : $(x+1)^2 = 2$.

d) $(x+1)^2 = 2$ est équivalent à $x + 1 = \sqrt{2}$ ou $x + 1 = -\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2} - 1$ ou $x = -\sqrt{2} - 1$.

```
>>> a-1
0.4142135623730949

>>> -a-1
-2.414213562373095
```

118 On note x la longueur en cm du segment consacrée au carré. Cela correspond à son périmètre. On en déduit donc que son aire est donnée par $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{16}$

La longueur consacrée au disque est $100 - x$.

Elle correspond au périmètre du cercle, soit :

$100 - x = 2\pi r$ où r est le rayon du cercle.

L'aire du disque est donnée par :

$$\pi\times\left(\frac{100-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(100-x)^2}{4\pi}$$

a) Lorsque la figure évolue de gauche à droite, x augmente de 0 à 100, donc l'aire du carré augmente. Lorsque la figure évolue de gauche à droite, x augmente de 0 à 100 on en déduit que $100 - x$ diminue de 100 à 0. On peut donc conclure que l'aire du disque diminue.

b)

$$\frac{x^2}{16} + \frac{10\,000 - 200x + x^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 + 40\,000 - 800x}{16\pi}$$

$$= \frac{\pi+4}{16\pi}\left(x^2 - \frac{800}{\pi+4}x\right) + \frac{40\,000}{16\pi}$$

$$= \frac{\pi+4}{16\pi}\left(x - \frac{400}{\pi+4}\right)^2 - \frac{\pi+4}{16\pi}\times\left(\frac{400}{\pi+4}\right)^2 + \frac{2\,500}{\pi}$$

$$= \frac{\pi+4}{16\pi}\left(x - \frac{400}{\pi+4}\right)^2 - \frac{10\,000}{\pi(\pi+4)} + \frac{2\,500}{\pi}$$

$$= \frac{\pi+4}{16\pi}\left(x - \frac{400}{\pi+4}\right)^2 + \frac{2\,500}{\pi+4}$$

D'après la forme canonique, la somme des deux aires admet un minimum et on en déduit qu'elle diminue jusqu'à $x = \dfrac{400}{\pi+4}$ puis qu'elle augmente.

119 $nx = 180$, donc $n = \dfrac{180}{x}$.

$(x-2)(n+3) = 180$

$(x-2)\left(\dfrac{180}{x} + 3\right) = 180$

$(x-2)(180 + 3x) = 180x$

$3x^2 - 6x - 360 = 0$

$x^2 - 2x - 120 = 0$

$\Delta = 480$ $x_1 = -10$ et $x_2 = 12$.

Le montant de son remplacement est 12 € par mois pendant 15 mois.

120 C'est une équation produit. Chaque facteur est de la forme :

$x^2 - nx + 10n = 0$ avec $1 \leqslant n \leqslant 40$

Le discriminant de cette équation est de la forme :

$$\Delta = (-n)^2 - 4\times 10n$$

$$\Delta = n(n-40)$$

On établit le signe de Δ :

n	1		40
		$-$	0

Ainsi les 39 premiers discriminants sont strictement négatifs et les équations correspondantes n'ont pas de solution.
Pour la dernière, $x^2 - 40x + 400 = 0$, $\Delta = 0$: l'équation a une unique solution : $\frac{40}{2} = 20$
L'équation donnée au départ a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{20\}$.

121 **1. a)** Toutes les puissances de 1 sont égales à 1, donc $P(1) = 1^n - 1 = 0$.
b) $Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$
En développant $(x-1)Q(x)$, on obtient :
$x^n - 1 = P(x)$.
2. a) $h(a) = a^n - a^n = 0$
b) $h(x) = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n)$
3. a) $f(x) = x^3 - 2^3$
$f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$
$g(x) = x^4 - 3^4$
$g(x) = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$
Pour factoriser $g(x)$ on aurait pu remarquer que $(x^2)^2 - (9)^2$ avec l'identité remarquable, on aurait obtenu :
$g(x) = (x^2 - 9)(x^2 + 9)$.
On applique la même méthode pour factoriser $x^2 - 9$ et on obtient :
$g(x) = (x-3)(x+3)(x^2+9)$.
b) On utilise les formes factorisées :
$f(x) = 0$ s'écrit $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$
$x - 2 = 0$ ou $x^2 + 2x + 4 = 0$
La première équation donne $x = 2$.
Pour la seconde équation, on calcule le discriminant :
$\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12$: la seconde équation n'a pas de solution.
L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $x = 2$.
$g(x) = 0$ s'écrit $(x-3)(x+3)(x^2+9) = 0$.
$x - 3 = 0$ ou $x + 3 = 0$ ou $x^2 + 9 = 0$, soit $x = 3$ $x = -3$ ou $x^2 = -9$.
La dernière équation n'a pas de solution.
L'équation $g(x) = 0$ a donc deux solutions : $\mathcal{S} = \{-3 ; 3\}$

122 On note x la longueur en m du petit cube.
Les données se traduisent par l'équation :
$(4+x)^3 - x^3 = 208$
On développe $(4+x)^3$ en remarquant que
$$\begin{aligned}(4+x)^3 &= (4+x)(4+x)^2\\ &= (4+x)(16 + 8x + x^2)\\ &= 64 + 32x + 4x^2 + 16x + 8x^2 + x^3\\ &= x^3 + 12x^2 + 48x + 64\end{aligned}$$
$(4+x)^3 - x^3 = 208$ est équivalente à :
$12x^2 + 48x - 144 = 0$
On calcule le discriminant :
$\Delta = 48^2 - 4 \times 12 \times (-144) = 9\,216$ l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-48 - \sqrt{9\,216}}{2 \times 12}$ ou $x_2 = \frac{-48 + \sqrt{9\,216}}{2 \times 12}$
$x_1 = -6$ ou $x_2 = 2$
x est une longueur donc c'est un nombre positif, par conséquent, la longueur de l'arête du grand cube est $4 + 2 = 6$ m.

123
$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\phi^2 = \phi + 1$	$\phi^6 = 8\phi + 5$
$\phi^3 = 2\phi + 1$	$\phi^7 = 13\phi + 8$
$\phi^4 = 3\phi + 2$	$\phi^8 = 21\phi + 13$
$\phi^5 = 5\phi + 3$	

$\phi^{21} = (\phi^7)^3 + (13\phi + 8)^2(13\phi + 8)$
On reconnait les termes de la suite de Fibonacci.
$\phi^{2019} = F_{2019} + F_{2018}$

124 Les données se traduisent par :
$$x^3 + 56 = (x+2)^3$$
En développant le membre de droite de l'équation, on obtient :
$x^3 + 56 = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ qui est équivalente à $2x^2 + 4x - 48 = 0$
On calcule le discriminant :
$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-48) = 400$ l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{400}}{2 \times 2}$ ou $x_2 = \frac{-4 + \sqrt{400}}{2 \times 2}$
$x_1 = -6$ ou $x_2 = 4$
x est une longueur donc la longueur de l'arête est 4 cm.

125 **Partie A**
L'état de saturation est atteint pour 3 h de travail.
Partie B

```
Saisir t
y ← −(200/9) t + 200/3
Si y ⩾ 0
    Afficher « souhait »
    Sinon
    Afficher « rejet »
Fin Si
```

Partie C
a) On doit résoudre $h(x) = 100$.
$-\frac{1}{36}x^2 + \frac{10}{3}x - 100 = 0$

On calcule le discriminant :

$$\Delta=\left(\frac{10}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{36}\right)\times(-100)=0$$

L'équation a une solution $x=\dfrac{-\dfrac{10}{3}}{2\times\left(-\dfrac{1}{36}\right)}=60$

La « saturation » est atteinte à 60 min.

b) On doit résoudre $h(x)\geqslant 60$.

$-\frac{1}{36}x^2+\frac{10}{3}x-60\geqslant 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta=\left(\frac{10}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{36}\right)\times(-60)=\frac{40}{9}$

Les deux racines sont :

$x_1=\dfrac{-\dfrac{10}{3}-\sqrt{\dfrac{40}{9}}}{2\times\left(-\dfrac{1}{36}\right)}=60+12\sqrt{10}>60$

Ou $x_2=\dfrac{-\dfrac{10}{3}+\sqrt{\dfrac{40}{9}}}{2\times\left(-\dfrac{1}{36}\right)}=60-12\sqrt{10}$

On dresse le tableau de signes :

x	0		$60-12\sqrt{10}$		60
Signe		$-$	0	$+$	

La personne est dite heureuse à partir de $60-12\sqrt{10}$ min, soit environ 22 min.

Exploiter ses compétences

126 Notons h la hauteur d'eau en m.

Déterminons le volume d'eau de la piscine.

Volume d'eau dans la partie de la piscine à fond plan (parallélépipède rectangle) :

$12\times 12{,}5\times h=150h$ m^3

La partie à fond incliné est un prisme droit, calculons son volume :

$\mathcal{A}_{\text{AFB}}\times 12=\frac{h\times 12{,}5}{2}\times 12=75h$ m^3

Volume d'eau de la piscine :

$150h+75h=225h$ m^3

Le montant à payer pour le remplissage de la piscine est donné par : $225h\times 3=675h$

Les contraintes liées au coût donnent :

$675h\leqslant 1200$

$h\leqslant\frac{1200}{675}$

La hauteur maximale de la piscine est $\frac{16}{9}$ m, soit environ 1,77 m.

127 On note n la plus petite dimension de l'aquarium.

Les autres dimensions sont n, $n+1$ et $n+2$.

Les données du document 2 permettent d'obtenir l'équation :

$n(n+1)(n+2)=4\times(4n+4(n+1)+4(n+2))$

Ce qui est équivalent à l'équation :

$$n^3+3n^2-46n-48=0$$

On remarque que -1 est une racine évidente, on peut donc factoriser le membre de gauche par $(n+1)$, l'équation est donc équivalente à :

$(n+1)(n^2+2n-48)=0$

C'est une équation produit :

$n+1=0$ ou $n^2+2n-48=0$

$n=-1$: impossible puisque $n>0$

On calcule le discriminant de l'équation du second degré :

$$\Delta=2^2-4\times 1\times(-48)=196$$

Les deux solutions sont :

$n=\frac{-2-\sqrt{196}}{2}=-8$ ou $n=\frac{-2+\sqrt{196}}{2}=6$

n représentant une longueur, la seule solution est $n=6$.

Les dimensions de l'aquarium sont 6 m, 7 m et 8 m.

Cherchons maintenant le coût de fabrication :

Chaque arête est présente 4 fois, donc le coût pour le ruban est : $4\times(6+7+8)\times 0{,}2=16{,}8$

Le prix du ruban adhésif est 16,8 €.

Cherchons l'aire de la surface vitrée :

Les faces de l'aquarium sont rectangulaires deux à deux identiques :

$2\times(6\times 7+7\times 8+8\times 6)=292$ dm^2

292 dm$^2=2{,}92$ m^2

Coût de la surface vitrée : $50\times 2{,}92=146$ €.

Le coût total de l'aquarium est :

$146+16{,}8=162{,}8$ €.

128 Déterminons la distance d entre deux rangées.

Le nombre de pommiers de la parcelle est donné par l'expression :

$\left(\frac{140}{d}+1\right)\left(\frac{28}{d}+1\right)$

Ce qui permet d'obtenir l'équation :

$\left(\frac{140}{d}+1\right)\left(\frac{28}{d}+1\right)=369$

En développant le membre de gauche :

$$\frac{3\,920}{d^2}+\frac{168}{d}+1=369$$

Ce qui donne l'équation :

$$\frac{-368d^2+168d+3\,920}{d^2}=0$$

$d\neq 0$, donc l'équation est équivalente à :

$-368d^2+168d+3\,920=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta=168^2-4\times(-368)\times 3\,920=2\,408^2$

Les deux solutions sont :

$$d=\frac{-168-\sqrt{2\,408^2}}{2\times(-368)}=3{,}5 \text{ ou}$$

$$d=\frac{-168+\sqrt{2\,408^2}}{2\times(-368)}=-\frac{70}{23}$$

Or d étant une distance est un nombre positif.

On peut donc conclure que la distance entre deux rangées est 3,5 m.

Le ramassage se fera donc à l'aide d'un tracteur de taille moyenne. Le coût étant de 75 € pour 1 h de ramassage.

Déterminons le nombre de rangées :

$\frac{24}{3{,}5}+1=9.$

Il faudra donc prévoir 9 h pour le ramassage de la parcelle, soit un coût égal à $9\times 75=675$ €.

129 Déterminons le prix de vente d'une tonne de pâte à papier.

L'activité est à l'équilibre lorsque l'entreprise produit et vend 20 tonnes et on note p le prix de vente en euros d'une tonne de pâte à papier.

$20^2+632\times 20+1000=20p$

$14\,040=20p$

$p=\frac{14\,040}{20}=702$ €.

Les coûts sont la somme des coûts fixes et des coûts variables :

$C=C_F+C_V$

$C=650+200+150+q^2+632q$

$C=q^2+632q+1000$

Le bénéfice est alors donné par :

$702q-(q^2+632q+1000)=-q^2+70q-1000$

Déterminons la quantité à produire pour que la production soit rentable.

$\Delta=70^2-4\times 1000=900$

Les deux racines sont données par :

$$q_1=\frac{-70-\sqrt{900}}{-2}=50 \text{ ou } q_2=\frac{-70+\sqrt{900}}{-2}=20$$

On peut alors dresser le tableau de signes :

q	0		20		50		$+\infty$
Signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

La production est rentable pour une quantité comprise strictement entre 20 et 50 tonnes de pâte à papier.

Cherchons le bénéfice maximal :

$$\begin{aligned}-q^2+70q-1000&=-(q^2-70q)-1000\\&=-(q-35)^2+35^2-1000\\&=-(q-35)^2+225\end{aligned}$$

Comme $(q-35)^2\geqslant 0$ pour tout nombre q, on en déduit que :

$-(q-35)^2\leqslant 0$ et $-(q-35)^2+225\leqslant 225.$

Le bénéfice est maximal est donc 225 € et il correspond à une production de 35 tonnes.

4 Dérivation

Découvrir

1 Vitesse moyenne et vitesse instantanée

1 **a)** La vitesse moyenne (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) de la bille entre les instants :

- $t = 1$ et $t = 1{,}2$ est $\dfrac{d(1{,}2) - d(1)}{0{,}2} = 10{,}78$
- $t = 0{,}9$ et $t = 1$ est $\dfrac{d(1) - d(0{,}9)}{0{,}1} = 9{,}31$

b) Entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + h$ (avec $1 + h \geqslant 0$ et $h \neq 0$), la distance parcourue par la bille est :

- si $h > 0$, $d(1+h) - d(1)$
- si $h < 0$, $d(1) - d(1+h)$.

La vitesse moyenne est :

- si $h > 0$, $\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h}$
- si $h < 0$, $\dfrac{d(1) - d(1+h)}{-h}$

c'est-à-dire dans les deux situations :

$$\frac{d(1+h) - d(1)}{h}.$$

c) $\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h} = \dfrac{4{,}9(1+h)^2 - 4{,}9}{h} = \dfrac{4{,}9h(2+h)}{h}$

$\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h} = 4{,}9(2+h)$.

2 Lorsqu'on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, $\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h}$ se rapproche de 9,8.

2 Un coût marginal

1 **a)** Le coût de production de q litres est $\text{C}(q)$, celui de $q + 1$ litres est $\text{C}(q+1)$, donc $\text{C}_m(q) = \text{C}(q+1) - \text{C}(q)$.

b) $\text{C}_m(q)$ est le taux de variation de la fonction C entre q et $q + 1$.

c) $\text{C}_m(50) = \dfrac{3}{1000} \times 50^2 - \dfrac{97}{1000} \times 50 + \dfrac{951}{1000}$

$\text{C}_m(50) = 3{,}601$.

Lorsque l'entreprise produit 50 litres d'huile d'olive, le coût induit par la production d'un litre supplémentaire est environ 3,60 €.

2 Géométriquement, la distance NP est égale au coût marginal $\text{C}_m(50)$.

Acquérir des automatismes

3 **a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2(2+h)^2 + 3 - (2 \times 2^2 + 3)}{h}$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2(4h + h^2)}{h} = \frac{2h(4+h)}{h}$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 2(4+h).$$

b) $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f, A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 2 et $2 + h$ avec $h \neq 0$, alors $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ est la pente de la sécante (AM).

c) Le taux $2(4+h)$ a pour limite 8 lorsque h tend vers 0 donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 8$.

4 **a)** La droite T passe par les points $A(-1\,;1)$ et $B(1\,;0)$ donc sa pente est $\dfrac{0-1}{1-(-1)}=-\dfrac{1}{2}$.

b) Le nombre dérivé de *f* en -1 est la pente de la tangente T, ainsi $f'(-1)=-\dfrac{1}{2}$.

7 *g* est dérivable en tout nombre réel $x>0$ et $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $g'(4)=\dfrac{1}{4}$.

D'autre part $g(4)=2$. Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est :

$y=g'(4)(x-4)+g(4)$, $y=\dfrac{1}{4}(x-4)+2$,

soit $y=\dfrac{1}{4}x+1$.

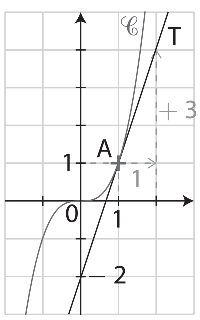
8 La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=3x^2$.

$g(1)=1$ et $g'(1)=3$ donc on trace la droite T qui passe par $A(1\,;1)$ et de pente 3.

On peut aussi déterminer une équation de T :

$y=3(x-1)+1$, soit $y=3x-2$ et on choisit deux points de cette droite $A(1\,;1)$ et par exemple $B(0\,;\,-2)$.



11 **a)** *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $g'(x)=-12x^2+2x$.

b) Pour tout nombre réel x, $f(x)=\dfrac{1}{5}(2x^2-x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x)=\dfrac{1}{5}(4x-1)$.

c) *h* est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$h'(x)=2(x^2-2x+2)+(2x-5)(2x-2)$

$h'(x)=2x^2-4x+4+4x^2-14x+10$

$h'(x)=6x^2-18x+14$.

12 *g* est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]-\infty\,;4[$ et $]4\,;+\infty[$ donc *g* est dérivable sur chacun de ces intervalles.

Pour tout nombre réel $x\neq 4$,

$$g'(x)=\frac{-2(x-4)-(-2x+5)}{(x-4)^2}$$

$$g'(x)=\frac{3}{(x-4)^2}.$$

13 $3h-11$ a pour limite -11 lorsque *h* tend vers 0 donc $f'(1)=-11$.

14 On effectue le calcul du taux de variation de la fonction *g* entre 3 et $3+h$.

15 Louise a tort. La pente de la tangente à la courbe représentative de *f* au point A est $f'(-1)=-2$.

16 On lit graphiquement que la pente de T est égale à 1 donc $f'(4)=1$.

17 La pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $\dfrac{1}{2}$ donc $g'(0)=\dfrac{1}{2}$.

18 Une équation de T est :

$y=-3(x-1)+2$, soit $y=-3x+5$.

La réponse correcte est la réponse **(2)**.

19 **a)** Pour tout nombre réel $h\neq 0$,

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4h+h^2}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h.$$

b) La limite de $4+h$ lorsque *h* tend vers 0 est 4 donc $f'(2)=4$.

20 **a)** Pour tout nombre réel $h\neq 0$,

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{-(1+h)^2+3(1+h)-1-(1)}{h}$$

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{-h^2+h}{h}=\frac{h(-h+1)}{h}=-h+1.$$

b) La limite de $-h+1$ lorsque *h* tend vers 0 est 1 donc *g* est dérivable en 1 et $g'(1)=1$.

21 **a)** Pour tout nombre réel *h* avec $h>-1$ et $h\neq 0$,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{4}{1+h}-4}{h}=\frac{4-4(1+h)}{h(1+h)}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{-4h}{h(1+h)}=\frac{-4}{1+h}.$$

b) La limite de $\dfrac{-4}{1+h}$ lorsque *h* tend vers 0 est -4 donc *f* est dérivable en 1 et $f'(1)=-4$.

22 **a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{g(4+h)-g(4)}{h} = \frac{(4+h)^2+7-23}{h} = \frac{8h+h^2}{h}$$

$$\frac{g(4+h)-g(4)}{h} = \frac{h(8+h)}{h} = 8+h.$$

b) La limite de $8+h$ lorsque h tend vers 0 est 8 donc $g'(4) = 8$.

23 **a)** Pour tout nombre réel h avec $h > -1$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{-2}{h+1}-(-2)}{h} = \frac{-2+2(h+1)}{h(h+1)}$$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{2h}{h(h+1)} = \frac{2}{h+1}.$$

b) La limite de $\frac{2}{h+1}$ lorsque h tend vers 0 est 2 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.

24 **a)** La pente de la sécante (AM) est :

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h} = \frac{h^2-2h}{h},$$

soit $\frac{h(h-2)}{h} = h-2$.

b) La limite de $h-2$ lorsque h tend vers 0 est -2 donc la pente de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est -2.

c) Et ainsi $f'(-1) = -2$.

25 **a)** La vitesse moyenne de la bille entre les instants 1,9 et 2 est $4{,}9 \times (-0{,}1) + 19{,}6 = 19{,}11\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Entre les instants 2 et 2,1, elle est égale à :

$$4{,}9 \times 0{,}1 + 19{,}6 = 20{,}09\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) La limite de $4{,}9h + 19{,}6$ lorsque h tend vers 0 est 19,6, donc la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 2$ est $19{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

26 **a)** $\mathrm{C}(q+1) = \frac{1}{500}(q+1)^3 + 100$

$$\mathrm{C}(q+1) = \frac{1}{500}(q^3+3q^2+3q+1)+100$$

$$\mathrm{C}(q+1) = \frac{1}{500}q^3 + \frac{3}{500}q^2 + \frac{3}{500}q + \frac{50\,001}{500}$$

b) $\mathrm{C}(q+1) - \mathrm{C}(q) = \frac{3}{500}q^2 + \frac{3}{500}q + \frac{1}{500}$

27 On lit sur le graphique :

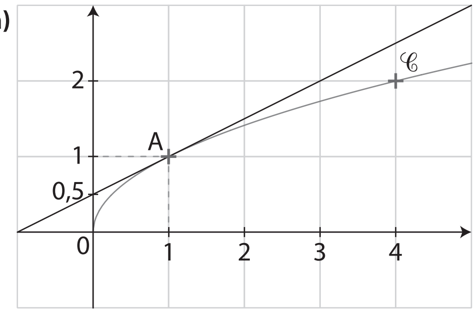
a) $h'(0) = 0$ **b)** $h'(1) = -2$

28 On lit sur le graphique :

a) $f(0) = 2$ $f(2) = 0$ $f(4{,}5) = 2$

b) $f'(0) = -4$ $f'(2) = \frac{1}{2}$ $f'(4{,}5) = 0$

29 **a)**

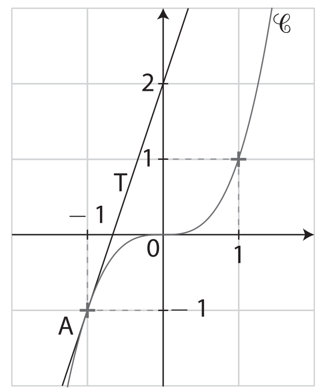


b) On lit $f'(1) = 0{,}5$.

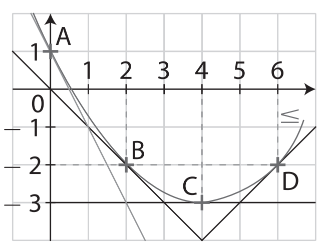
c) La pente de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est 0,5.

30 **a)** $f'(-1) = 3$. La pente de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est 3.

b)



31 **a) b)** et **c)**



32 Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A est :

a) $y = x$

b) $y = 3x$

c) $y = 2$

d) $y = -5x + 1$

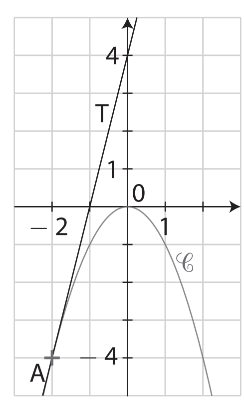
33 **a)** Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est :

$y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$,

soit $y = 4(x+2) - 4$,

$y = 4x + 4$.

b) Voir ci-contre.

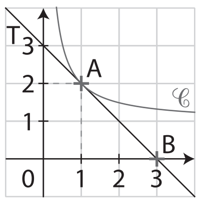


34 **a)** Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$y = g'(1)(x-1) + g(1)$,

soit $y = -1(x-1) + 2$, $y = -x + 3$.

b)



T passe par A(1 ; 2) et B(3 ; 0).

35 Pour tout nombre réel x,

a) $f'(x) = 0$ **b)** $g'(x) = 0$ **c)** $h'(x) = 1$

36 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2$.

L'expression est **(3)**.

37 Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

a) $g'(1) = -1$ **b)** $g'(2) = -\dfrac{1}{4}$

c) $g'(-2) = -\dfrac{1}{4}$ **d)** $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4$

38 Pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

a) L'égalité est vraie.

b) L'égalité est fausse.

c) L'égalité est vraie.

39 **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2$

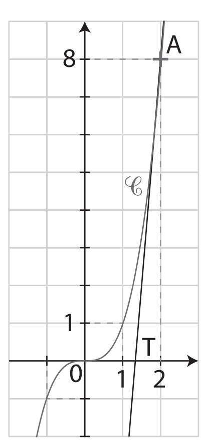
donc $f'(2) = 12$.

b) Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit $y = 12(x-2) + 8$,

$y = 12x - 16$.

c)



40 Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

donc $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 2 est

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit $y = -\dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{2}$,

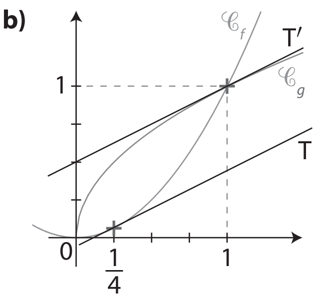
$y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.

Il s'agit bien de l'équation donnée par le logiciel.

41 **1. a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x$

donc $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b)



2. a) Pour tout nombre réel $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Voir graphique ci-dessus.

3. a) Les droites T et T′ semblent parallèles.

b) Les droites T et T′ ont la même pente car $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = g'(1) = \dfrac{1}{2}$ donc elles sont parallèles.

42 Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe :

$\mathscr{C}_f$: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, $y = 2(x-1) + 1$,

$y = 2x - 1$. Il s'agit de T_3.

$\mathscr{C}_g$: $y = g'(1)(x-1) + g(1)$, $y = -1(x-1) + 1$,

$y = -x + 2$. Il s'agit de T_1.

$\mathscr{C}_h$: $y = h'(1)(x-1) + h(1)$, $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1$,

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Il s'agit de T_2.

43 **a)** Pour tout t de $\mathbb{R}^*$, $f(t) = t^{-3}$ donc $n = -3$.

b) Pour tout t de $\mathbb{R}^*$, $f'(t) = -3t^{-4}$.

c) Donc, pour tout t de $\mathbb{R}^*$, $f'(t) = \dfrac{-3}{t^4}$.

44 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

L'expression est donc **(2)**.

45 Pour tout nombre réel x,

a) $f'(x) = 12x^2$

b) $g'(x) = x^2$

c) $h'(x) = -21x^2$

46 Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ donc $f'(x) > 0$.
Tom a raison.

47 Pour tout nombre réel x,
a) $f'(x) = 2x + 3$
b) $g'(x) = 6x^2 - 6x + 1$
c) $h'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$

48 **a)** Pour tout nombre réel x,
$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$.
b) Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f'(x) = 2x(3x - 1) + 3(x^2 + 5)$
$f'(x) = 9x^2 - 2x + 15$.

49 **a)** Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 1(x^2 + x + 2) + (x + 1)(2x + 1)$
$f'(x) = x^2 + x + 2 + 2x^2 + 3x + 1$
$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$
b) Pour tout nombre réel t,
$g'(t) = (3t^2 - 1)(2t - 1) + 2(t^3 - t)$
$g'(t) = 8t^2 - 3t^2 - 4t + 1$

50 Pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$,
$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

51 Pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$,
$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1) = 1$.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = 1(x - 1)$, $y = x - 1$.
Cette tangente est bien la droite *d*.

52 **a)** Pour tout nombre réel x, $u'(x) = 5$.
b) Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 2 \times 5 \times (5x + 7) = 10(5x + 7)$

53 Pour tout nombre réel x,
a) $f'(x) = 2 \times (-3)(-3x + 5) = -6(-3x + 5)$
b) $g'(x) = 2(2x + 4)\left(x^2 + 4x - \frac{1}{2}\right)$

54 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{5}$, $v'(x) = 5$.
b) Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{5}$,
$g'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{5}{(5x - 1)^2}$

55 Pour tout nombre réel t,
$f'(t) = -\frac{2t + 1}{(t^2 + t + 1)^2}$

56 Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{2}$,
$f(x) = \frac{1}{3}(2x - 1) + 3 \times \frac{1}{2x - 1}$, donc
$f'(x) = \frac{1}{3} \times 2 + 3 \times \left(-\frac{2}{(2x - 1)^2}\right)$
$f'(x) = \frac{2}{3} - \frac{6}{(2x - 1)^2}$

57 Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{4}$,
$u'(x) = 7$ et $v'(x) = 4$.
b) Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{4}$,
$g'(x) = \frac{7(4x - 1) - 4(7x + 5)}{(4x - 1)^2}$
$g'(x) = \frac{-27}{(4x - 1)^2}$

58 Pour tout nombre réel $x \neq 1$,
$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1) - (x^2 + 3x)}{(x - 1)^2}$
$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$

59 **a)** g est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(X) = \sqrt{X}$.
g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout nombre réel $X > 0$, $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$.
b) f est dérivable en tout nombre réel x tel que $3x + 4 > 0$. Ainsi f est dérivable sur $\left]-\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$ et pour tout nombre réel x tel que $x > -\frac{4}{3}$,
$f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x + 4}}$, $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}}$.

60 **1.** B **2.** C **3.** A

61 **1.** A, C, D **2.** B, D **3.** A, B, D **4.** B

62 **1. L'affirmation est vraie.**
En effet, pour tout nombre réel $x \neq 0$,
$f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$.

2. L'affirmation est vraie.
En effet, pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.
Donc $f'(-2) = 0$ et $f'(1) = 0$.
3. L'affirmation est fausse.
En effet, pour tout nombre réel $x > \frac{1}{4}$,
$g'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$.

63 h est un nombre réel, $h \neq 0$.
a) $f(1+h) = 3(1+h)^2 = 3(1+2h+h^2)$
$f(1+h) = 3 + 6h + 3h^2$.
b) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3+6h+3h^2-3}{h}$
$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3h(h+2)}{h} = 3(h+2)$.
c) $3(h+2)$ a pour limite 6 lorsque h tend vers 0 donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 6$.

64 Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$.
La pente de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est -4 et T est donc parallèle à d.

65 **a)** Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 3x^2$ donc $g'(1) = 3$.
b) Une équation de T est :
$y = g'(1)(x-1) + g(1)$, soit $y = 3(x-1)+2$,
$y = 3x - 1$.

66 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 5$,
$u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = x - 5$.
b) Pour tout nombre réel $x \neq 5$,
$u'(x) = -2$ et $v'(x) = 1$.
c) Pour tout nombre réel $x \neq 5$,
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2(x-5)-(-2x+3)}{(x-5)^2}$$
$$f'(x) = \frac{7}{(x-5)^2}$$

S'entraîner

68 **1. a)** Pour $0 < h \leqslant 1$, la pente de la sécante (OM) est :
$$c = \frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h+2.$$
L'algorithme s'écrit :

```
h ← 1
Tant que h > 0
    c ← h + 2
    Afficher c
    h ← h − pas
Fin Tant que
```

c) Avec pas = 0,1, on obtient :

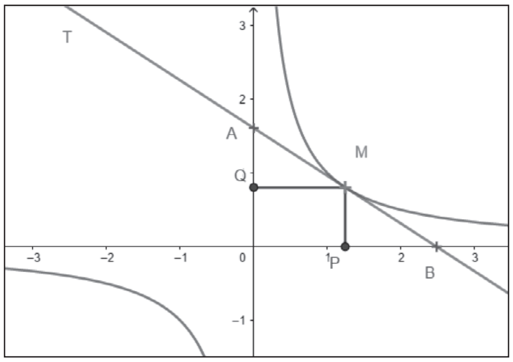
h	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
c	3	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1

2. a) Lorsque h tend vers 0, la droite T position limite des sécantes (OM) est la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g au point O.
La limite de la pente c lorsque h tend vers 0 est égale à 2 donc une équation de T est $y = 2x$
b) Ce nombre est la pente de T, soit $g'(0) = 2$.

69 **a)** Pour h tel que $1 < 1+h \leqslant 2$,
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \frac{-h}{h(1+h)} = -\frac{1}{1+h}$$
b) Le programme calcule et affiche le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ pour des valeurs de h de plus en plus proches de 0.
h est initialisée à 1 et diminue de la valeur pas à chaque passage dans la boucle tant que $h > 0$.
c) On obtient les taux de variation successifs avec un pas de 0,01.

71 **a)** On conjecture que l'aire du triangle est constante égale à 2.
b) Si $a > 0$, l'aire du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{a} = 2$.
Si $a < 0$, 'aire du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2}(-2a) \times \left(-\frac{2}{a}\right) = 2$.

72 **a)**



b) On conjecture que l'aire du triangle OPMQ est constante égale à 1.

c) Si $a > 0$, l'aire du rectangle OPMQ est égale à $a \times \dfrac{1}{a} = 1$.

Si $a < 0$, l'aire du rectangle OPMQ est égale à $(-a) \times \left(-\dfrac{1}{a}\right) = 1$.

73 **1. a)** La pente de la sécante (OM) est 1.

b) La limite de ce taux lorsque h tend vers 0 avec $h > 0$ est égale à 1.

2. a) La pente de la sécante (ON) est -1.

b) La limite de ce taux lorsque h tend vers 0 avec $h < 0$ est égale à -1.

3. Le taux $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ n'a pas de limite lorsque h tend vers 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

74 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) La limite de $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ est égale à $f'(1)$ lorsque h tend vers 0.

Donc pour h proche de 0 avec $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \approx \frac{1}{2}.$$

c) Alors, pour h proche de 0, $f(1+h) - f(1) \approx \dfrac{1}{2}h$,

soit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{1}{2}h$.

d) $\sqrt{1{,}02} \approx 1 + 0{,}1$, $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}1$

$\sqrt{0{,}996} \approx 1 - 0{,}002$, $\sqrt{1{,}02} \approx 0{,}998$

75 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = 6x^2 - \frac{1}{x^2}$$

b) Pour tout nombre réel $t > 0$,

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

76 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}(x^2 + 5) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times 2x$$

$$f'(x) = 2x\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^2 + 5}{x^2}$$

b) Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - x^2 - 5}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^2}$$

77 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 2$,

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$ et

$$g'(x) = \frac{4(x-2) - (4x-7)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

Pour tout nombre réel $x \neq 2$, $f'(x) = g'(x)$.

b) Pour tout nombre réel $x \neq 2$,

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{4x-7}{x-2} = \frac{-4x+8}{x-2}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{-4(x-2)}{x-2} = -4.$$

Alors pour tout nombre réel $x \neq 2$,

$f'(x) - g'(x) = 0$, donc $f'(x) = g'(x)$.

78 Pour tout nombre réel $x > -2$,

$f'(x) = \dfrac{3(x+2) - 3x}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$ et $g'(x) = x + \dfrac{3}{2}$.

Alors $f'(0) = g'(0) = \dfrac{3}{2}$.

D'autre part $f(0) = g(0) = 0$, les deux courbes ont donc la même tangente en O.

79 Pour tout nombre réel $x \neq 3$,

$$f'(x) = \frac{4(2x+1)(x-3) - (2x+1)^2}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)[4(x-3) - (2x+1)]}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(2x-13)}{(x-3)^2}$$

80 Pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(x+1) - 2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(1-x)\sqrt{x}}{2x(x+1)^2}$$

81 Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{x^2 - 1}{x^2} \times \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{x^4 - 1}{x^3}$$

82 **a)** Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 3 \times 2(2x - 5)^2 = 6(2x - 5)^2$

b) Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 4 \times (-3)(7 - 3x)^3 = -12(7 - 3x)^3$

c) Pour tout nombre réel $x \neq -\frac{1}{2}$,

$h'(x) = -3 \times 2(2x + 1)^{-4} = -6(2x + 1)^{-4}$

83 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
donc $f'(1) = -1$.

b) Pour h proche de 0 avec $h \neq 0$,
$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \approx f'(1)$, soit $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \approx -1$

c) Pour h proche de 0 avec $h \neq 0$,

$f(1+h) - f(1) \approx -h$, soit $\frac{1}{1+h} - 1 \approx -h$,

$\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

d) $\frac{1}{1{,}003} \approx 1 - 0{,}003$, $\frac{1}{1{,}003} \approx 0{,}997$

$\frac{1}{0{,}999\,2} \approx 1 - (-0{,}000\,8)$, $\frac{1}{0{,}999\,2} \approx 1{,}000\,8$

84 **1.** La vitesse du coureur à l'instant t est donnée par $v(t) = d'(t) = 10 - \frac{1}{10}t$.

Donc $v(t)$ diminue proportionnellement au temps de course.

2. a) La vitesse du coureur s'annule à l'instant :

$$t_1 = 100 \text{ s.}$$

b) La distance parcourue par le coureur est :

$$d(100) = 10 \times 100 - \frac{100^2}{20} = 500 \text{ m.}$$

3. a) La vitesse moyenne du coureur pendant cette course est $\frac{500}{100} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) La vitesse du coureur à l'instant $\frac{t_1}{2}$ est :

$$v(50) = 10 - \frac{50}{10} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

85 **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 8x$
donc $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc
$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = g'\left(-\frac{1}{2}\right)$, donc les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sont parallèles.

b) Pour tout nombre réel $x \neq 0$,
$f'(x) = g'(x)$ équivaut à $8x = -\frac{1}{x^2}$, soit $x^3 = -\frac{1}{8}$.

Cette équation admet $-\frac{1}{2}$ pour unique solution, il n'existe pas de réel *a* différent de $-\frac{1}{2}$ tel que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'abscisse a soient parallèles.

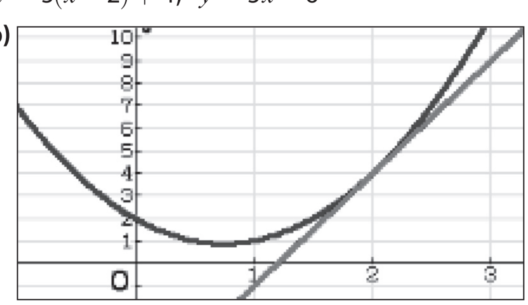
86 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x$.
$2x = 3$ équivaut à $x = \frac{3}{2}$.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est parallèle à la droite *d*.

87 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x$.
$2x = 10$ équivaut à $x = 5$.
La tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 5 a pour équation :
$y = f'(5)(x - 5) + f(5)$
$y = 10(x - 5) + 25$, $y = 10x - 25$.
Il s'agit de la droite *d*.

88 **1. a)** Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 4x - 3$ donc $f'(2) = 5$.
Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$
$y = 5(x - 2) + 4$, $y = 5x - 6$

b)



On conjecture que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T.

2. a) Pour tout nombre réel x,

$f(x)-(5x-6)=(2x^2-3x+2)-(5x-6)$

$f(x)-(5x-6)=2x^2-8x+8$

$f(x)-(5x-6)=2(x-2)^2$

b) Pour tout nombre réel x, $2(x-2)^2 \geqslant 0$

donc $f(x) \geqslant 5x-6$.

Ainsi la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T.

89 Pour tout nombre réel, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ équivaut à $x^2=2$.

Cette équation a pour solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Les coordonnées des points A et B sont :

$$\mathrm{A}\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{B}\left(-\sqrt{2}\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

90 **a)** Une équation de la tangente T_a à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse a est :

$y=2a(x-a)+a^2$, soit $y=2ax-a^2$.

b) A appartient à la tangente T_a si, et seulement si, $-2=2a-a^2$, soit $a^2-2a-2=0$.

Cette équation a pour solutions $a'=1+\sqrt{3}$ et $a''=1-\sqrt{3}$.

c) Les équations des tangentes à $\mathscr{P}$ qui passent par A sont :

$\mathrm{T}_{a'}$: $y=2\left(1+\sqrt{3}\right)x-4-2\sqrt{3}$

$\mathrm{T}_{a''}$: $y=2\left(1-\sqrt{3}\right)x-4+2\sqrt{3}$

91 **1.** Une équation T est :

$$y=2(x-1)+1,\quad y=2x-1.$$

2. a) Pour $h \neq 0$,

$y_\mathrm{M}=(1+h)^2$ et $y_\mathrm{P}=2(1+h)-1=1+2h$.

b) Pour h proche de 0, $y_\mathrm{M} \approx y_\mathrm{P}$, c'est-à-dire :

$$(1+h)^2 \approx 1+2h.$$

3. $(1{,}001)^2 \approx 1+0{,}002$, $(1{,}001)^2 \approx 1{,}002$,

$(0{,}995)^2 \approx 1-0{,}01$, $(0{,}995)^2 \approx 0{,}99$

92 **a) La proposition est vraie.**

En effet, pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

donc $f'(x)<0$.

b) La proposition est vraie.

En effet, $f'(1)=-1$.

c) La proposition est fausse.

En effet, $f'(-0{,}5)=-4$ et $f'(-0{,}5)<-1$.

93 **a) La proposition est vraie.**

En effet, si pour tout nombre réel x, $f(x)=g(x)$ alors $f'(x)=g'(x)$.

b) La proposition est fausse.

En effet f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ et $g(x)=x+1$ ont la même fonction dérivée et elles ne sont pas égales.

c) La proposition est vraie.

En effet, pour tout nombre réel $f(x)=1+g(x)$ donc $f'(x)=g'(x)$.

Organiser son raisonnement

94 Pour tout nombre réel a, $\mathrm{A}(a\,;a^2)$, $\mathrm{H}(0\,;a^2)$ et $\mathrm{H}'(0\,;\,-a^2)$.

Une pente de la droite (AH') est : $\dfrac{2a^2}{a}=2a$.

(AH') passe par A et a pour pente $2a$, c'est donc la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

95 **a)** Pour tout nombre réel x,

$\mathrm{C}'(x)=3x^2-200x+3\,000$.

b) Pour tout nombre réel x,

$\mathrm{C}'(x) \leqslant 600$ équivaut à $3x^2-200x+2\,400 \leqslant 0$.

Les racines du polynôme $3x^2-200x+2\,400$ sont

$x_1=\dfrac{20\left(5+\sqrt{7}\right)}{3} \approx 50{,}97$ et

$x_2=\dfrac{20\left(5-\sqrt{7}\right)}{3} \approx 15{,}69$

La production de l'entreprise doit être comprise entre ces deux valeurs.

96 **a)** Pour tout nombre réel x,

$x^2+2x=-x^2+6x-2$ équivaut à

$2x^2-4x+2=0$, soit $2(x-1)^2=0$.

L'unique solution de cette équation est $x=1$.

Les deux courbes ont un unique point commun, le point A de coordonnées $(1\,;3)$.

b) f : $x \mapsto x^2+2x$ a pour dérivée f' : $x \mapsto 2x+2$ donc $f'(1)=4$.

g : $x \mapsto -x^2+6x-2$ a pour dérivée g' : $x \mapsto -2x+6$ donc $g'(1)=4$.

$f'(1)=g'(1)$ donc les deux courbes ont une tangente commune au point A.

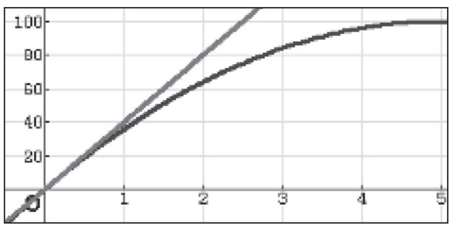
97 **a)** La fonction Taux calcule et renvoie le taux de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2$ entre a et $a+h$ avec $h \neq 0$.
b) On saisit le programme, on vérifie son fonctionnement.
c) Pour changer de fonction, on modifie la ligne 2 du programme.

98 Une équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

T_a passe par l'origine du repère si, et seulement si, $-af'(a) + f(a) = 0$, soit
$-a(2a-4) + a^2 - 4a + 5 = 0$,
$-a^2 + 5 = 0$, $a^2 = 5$.
On obtient alors les deux points de $\mathscr{C}$ dont les abscisses sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

99 **1.**



2. Pour $0 \leqslant t \leqslant 5$, $v(t) = -8t + 40$.
$v'(0) = 40$, $v'(2) = 24$, $v'(4) = 8$ et $v'(5) = 0$.
3. a) Voir le graphique.
La pente de T est la vitesse à l'instant $t = 0$.
b) La distance parcourue aurait été égale à :

$$40 \times 5 = 200 \text{ m}.$$

Il s'agit de l'ordonnée du point de T qui a pour abscisse 5.

100 Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$.
$f(-1) = 0$ et $f'(-1) = 1$ donc une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est :

$$y = x + 1.$$

On étudie l'intersection de $\mathscr{C}$ et T :
Pour tout nombre réel x,
$f(x) = x + 1$ équivaut à $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, soit
$(x^2-1)^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$.
$\mathscr{C}$ et T se coupent en deux points : $A(-1 ; 0)$ et $B(1 ; 2)$.
D'autre part $f'(1) = 1$ donc T est aussi tangente à $\mathscr{C}$ au point $B(1 ; 2)$.

101 Une équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
$y = 2a(x-a) + a^2 + 1$
$y = 2ax - a^2 + 1$.
Une équation de la tangente T'_b à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse b est :
$y = g'(b)(x-b) + g(b)$
$y = -2b(x-b) - b^2 - 1$
$y = -2bx + b^2 - 1$.
Les tangentes T_a et T'_b sont confondues si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2a = -2b \\ -a^2 + 1 = b^2 - 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a = -b \\ a^2 = 1 \end{cases}$$

On obtient donc deux tangentes communes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
$T_1 = T'_{-1}$ tangente à $\mathscr{C}_1$ en $A(1 ; 2)$ et à $\mathscr{C}_2$ en $B(-1 ; -2)$
$T_{-1} = T'_1$ tangente à $\mathscr{C}_1$ en $A(-1 ; 2)$ et à $\mathscr{C}_2$ en $B(1 ; -2)$

102 Pour x et y réels,
$ax^2 + (1-2a)x + a = y$ équivaut à
$a(x^2 - 2x + 1) + x = y$
$a(x-1)^2 + x = y$
Pour $x = 1$ et $y = 1$, l'égalité précédente est vérifiée pour tout nombre réel a.
Ainsi toutes les paraboles $\mathscr{P}_a$ passent par le point $E(1 ; 1)$.
La fonction $f : x \mapsto ax^2 + (1-2a)x + a$ a pour dérivée $f' : x \mapsto 2ax + 1 - 2a$ et $f'(1) = 1$.
Les paraboles $\mathscr{P}_a$ ont ainsi une tangente commune en E, cette droite passe par E et a pour pente 1.

103 La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A donc $f(0) = 1$ et par le point $B(2 ; 5)$ donc $f(2) = 5$.
D'après le graphique, la droite d a pour pente 1 donc $f'(0) = 1$.

On résume les conditions de l'énoncé par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f(2) = 5 \end{cases}$

Pour tout nombre réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $f'(x) = 2ax + b$.
Le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement, pour tout nombre réel x,
$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$.

104 Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 3px^2 + 2qx.$

La courbe de g a une tangente au point de coordonnées $(1\,;\,-1)$ parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si,

$\begin{cases} g(1) = -1 \\ g'(1) = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} p + q = -1 \\ 3p + 2q = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} p - \dfrac{3}{2}p = -1 \\ q = -\dfrac{3}{2}p \end{cases}$, $\begin{cases} p = 2 \\ q = -3 \end{cases}$

105 **a)** La pente de la tangente T est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2\,300 - 1200}{30 - 20} = 110.$$

b) Le coût marginal de production de la 21ᵉ tonne de médicament est assimilé à $C'(20)$, soit à la pente de la tangente T.

Il s'élève donc à 110 milliers d'euros.

106 **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2 - 3$ donc $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}.$

D'autre part $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8}.$

Une équation de T est :

$$y = -\frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8}, \text{ soit } y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$$

b) Pour tout nombre réel x,

$f(x) - \left(-\dfrac{9}{4}x + \dfrac{3}{4}\right) = (x+1)\dfrac{(2x-1)^2}{4}$ d'après le calcul réalisé.

Pour $x \in]-\infty\,;\,-1]$, $x + 1 \leqslant 0$

donc $f(x) \leqslant -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{3}{4}.$

Pour $x \in [-1\,;\,+\infty[$, $x + 1 \geqslant 0$

donc $f(x) \geqslant -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{3}{4}.$

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$ et au-dessus de T sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$.

On peut remarquer que $\mathscr{C}$ et T se coupent aux points de coordonnées $(-1\,;\,3)$ et $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{3}{8}\right)$.

107 Pour $h > 0$,

$\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}.$

Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ a pour limite 0 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0.$

108 **a)** Si f est paire alors pour tout nombre réel x, $f(-x) = f(x)$ donc $-f'(-x) = f'(x)$,

soit $f'(-x) = -f'(x)$ et la fonction f' est impaire.

b) Si f est impaire alors pour tout nombre réel x, $f(-x) = -f(x)$ donc $-f'(-x) = -f'(x)$,

soit $f'(-x) = f'(x)$ et la fonction f' est paire.

109 **1. a)** Cette tangente a pour pente 0 donc $f'(0) = 0.$

Pour $x \in [-2\,;\,2]$, $f'(x) = 2ax + b$ donc $f'(0) = b$ et ainsi $b = 0.$

b) Le système $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 1{,}5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} c = 2 \\ 4a + c = 1{,}5 \end{cases}$

soit $\begin{cases} c = 2 \\ a = -0{,}125 \end{cases}$

Donc, pour $x \in [-2\,;\,2]$,

$f(x) = -0{,}125x^2 + 2.$

2. a) Pour $x \in [-2\,;\,2]$,

$f(-x) = -0{,}125(-x)^2 + 2$

$f(-x) = -0{,}125x^2 + 2$

$f(-x) = f(x).$

Donc f est une fonction paire.

b) La courbe $\mathscr{C}$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. 1ʳᵉ méthode

La surface de la planche est $OC \times OS = 4\ m^2$

2ᵉ méthode

$f(1) = 1{,}875$

Pour $x \in [-2\,;\,2]$, $f'(x) = -0{,}25x$

donc $f'(1) = -0{,}25.$

Une équation de la droite (GH) est :

$y = -0{,}25(x - 1) + 1{,}875$, soit $y = -0{,}25x + 2{,}125.$

G a pour coordonnées $(0\,;\,2{,}125)$ et H a pour coordonnées $(2\,;\,1{,}625)$.

L'aire du trapèze OCHG est donc :

$$\frac{2{,}125 + 1{,}625}{2} \times 2 = 3{,}75\ m^2.$$

La forme la plus économique est celle du trapèze.

Exploiter ses compétences

110 Les informations de l'énoncé se traduisent par :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(2)=3 \\ f'(2)=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

car la pente de la tangente (OC) au raccordement en O est égale à 0 et celle de la tangente (AB) en A au raccordement est $\dfrac{5}{2}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ et le système s'écrit :

$$\begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ 8a+4b+2c+d=3 \\ 12a+4b+c=\dfrac{5}{2} \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ 8a+4b=3 \\ 12a+4b=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Ce système est équivalent :

$$\begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ 8a+4b=3 \\ 4a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a=-\dfrac{1}{8} \\ b=1 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=-\frac{1}{8}x^3+x^2.$$

111 Lorsque le caillou atteint la surface de l'eau $h(t)=0$, soit $40-4{,}9t^2=0$, $t^2=\dfrac{40}{4{,}9}$ et $t=\sqrt{\dfrac{40}{4{,}9}}$ (car $t\geqslant 0$).

La durée de la chute est donc $t\approx 2{,}9$ s.

La distance parcourue par le caillou à l'instant t est $d(t)=4{,}9t^2$, la vitesse instantanée du caillou à l'instant t est donnée par $v(t)=4{,}9\times 2t=9{,}8t$.

Donc la vitesse du caillou lorsqu'il atteint la surface de l'eau est :

$$v\left(\sqrt{\frac{40}{4{,}9}}\right)=9{,}8\times\sqrt{\frac{40}{4{,}9}}=28\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

112 Pour une production de q composants $(0<q\leqslant 200)$ le coût moyen est :

$$\frac{C(q)}{q}=\frac{1}{3\,000}q^2+\frac{200}{q}$$

Avec un traceur de courbes, on trace les courbes représentatives des fonctions $q\mapsto\dfrac{C(q)}{q}$ et $q\mapsto 8$.

On obtient $\dfrac{C(q)}{q}\leqslant 8$ pour $26\leqslant q\leqslant 140$.

Le coût marginal est donné par $C'(q)=\dfrac{1}{1000}q^2$ pour $0\leqslant q\leqslant 200$.

$C'(q)\leqslant 8$ équivaut à $q^2\leqslant 8\,000$, c'est-à-dire $q\leqslant 89$.

La quantité q de composants à produire doit donc être telle que $26\leqslant q\leqslant 89$.

113 On note a l'abscisse du point $M(a>0)$.

M a pour coordonnées $(a\,;0)$ et H a pour coordonnées $(0\,;26)$.

La pente de la droite (HM) est $-\dfrac{26}{a}$ et une équation de cette droite est $y=-\dfrac{26}{a}x+26$.

On étudie l'intersection de la droite (HM) et de la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y=-x^2+25$.

Pour cela, on résout l'équation :

$-x^2+25=-\dfrac{26}{a}x+26$, c'est-à-dire :

$x^2-\dfrac{26}{a}x+1=0$

On obtient $\Delta=\left(-\dfrac{26}{a}\right)^2-4=\dfrac{676-4a^2}{a^2}$

$\Delta=\dfrac{4(169-a^2)}{a^2}$.

- Si $0<a<13$ alors $\Delta>0$, (HM) et $\mathscr{C}$ se coupent en deux points.
- Si $a=13$ alors $\Delta=0$, (HM) et $\mathscr{C}$ se coupent en un seul point.
- Si $a>13$ alors $\Delta<0$, (HM) et $\mathscr{C}$ ne se coupent pas.

Donc l'observateur doit se placer à une distance minimale de $13-5=8$ m du pied du terril pour apercevoir l'extrémité du bâton.

Remarque : lorsque $a=13$, la droite (HM) est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

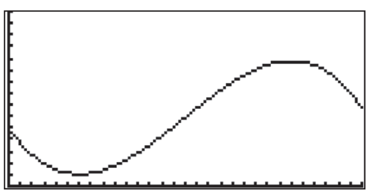
5 Applications de la dérivation

Découvrir

1 Signe de la dérivée et sens de variation

1 **a)** $f(0) = 500$ et $f(30) = 680$.
L'action coûte 500 € en début d'étude et 680 € en fin d'étude.

b)



c) On conjecture que le prix de l'action décroît sur l'intervalle $[0\,;6]$, puis croît sur l'intervalle $[6\,;24]$ et enfin décroît sur l'intervalle $[24\,;30]$.

2 **a)** *f* est une fonction polynôme donc *f* est dérivable sur l'intervalle $[0\,;30]$ et pour tout nombre réel *t* de l'intervalle $[0\,;30]$,

$f'(t) = -t^2 + 30t - 144$.

$\Delta = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-144) = 324$

et $\sqrt{\Delta} = 18$

$t_1 = \dfrac{-30-18}{2\times(-1)} = 24$ et $t_2 = \dfrac{-30+18}{2\times(-1)} = 6$.

b) Le signe de $f'(t)$ est celui d'une fonction polynôme du second degré, on déduit donc le tableau de variations de *f*.

t	0		6		24		30
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	500	↘	104	↗	1 076	↘	680

c) On constate que le prix de l'action est décroissant sur les intervalles où $f'(t) \leqslant 0$ et que le prix de l'action est croissant sur l'intervalle où $f'(t) \geqslant 0$.

2 Signe de la dérivée et maximum

1 **a)** $h(0) = 2$ donc le poids est lancé à 2 m de hauteur.

b) On peut conjecturer que la hauteur maximale atteinte par le poids est 5,2 m et que le poids se trouve à la distance horizontale de 8 m de ses pieds.

2 **a)** *h* est dérivable sur $[0\,; +\infty[$
et $h'(x) = -0{,}1x + 0{,}8$.
$h'(x) = 0$ si et seulement si, $x = 8$.
Ainsi $h'(x) \geqslant 0$. pour $0 < t \leqslant 6$ et $h'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 6$.

b) $h'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;8]$ donc *h* est croissante sur $[0\,;8]$.
$h'(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 8$ donc *h* est décroissante sur $[8\,; +\infty[$.
h admet donc un maximum en $x = 8$.

c) $h(8) = 5{,}2$ donc la hauteur maximum atteinte par le poids est 5,2 m.

3 $h(x) = 0$ si et seulement si
$-0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2 = 0$.
$\Delta = \dfrac{26}{25} = 1{,}04$ $x_0 \approx 18{,}2$ et $x_1 \approx -2{,}2$.
La longueur du lancer de l'athlète est environ 18 m.

Acquérir des automatismes

3 Par lecture graphique :

• pour tout nombre réel x de $[-2\,;\,-1]$ et de $[1\,;\,2]$, $g'(x) \geqslant 0$. Donc g est croissante sur chacun des intervalles $[-2\,;\,-1]$ et $[1\,;\,2]$.

• pour tout nombre réel x de $[-1\,;\,1]$ et $[2\,;\,3]$, $g'(x) \leqslant 0$. Donc g est décroissante sur chacun des intervalles $[-1\,;\,1]$ et $[2\,;\,3]$.

4 **a)** h est une fonction polynôme donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $h'(x) = 3x^2 + 3$.

Pour tout nombre réel x, $3x^2 + 3 > 0$ donc $h'(x) > 0$.

b) Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5 **a)** $k(x) = -3x^3 - 20x$

k est une fonction polynôme donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $k'(x) = -9x^2 - 20$.

Pour tout nombre réel x, $-9x^2 - 20 < 0$ donc $k'(x) < 0$.

b) Ainsi, la fonction k est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $498 < 501{,}5$ donc $k(498) > k(501{,}5)$.

8 k est une fonction polynôme donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$k'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

$k'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

On utilise le signe de $ax^2 + bx + c$ pour dresser le tableau de variations de la fonction k.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$		$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$	

$k\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$.

Ici k est impaire donc $k\left(-\sqrt{3}\right) = -k\left(\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$.

9 m est une fonction polynôme donc m est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$m'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x + 2)(x - 2)$

$m'(x) = 0$ si, et seulement, $x = 2$ ou $x = -2$.

On utilise le signe de $ax^2 + bx + c$ pour dresser le tableau de variations de la fonction m.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$m'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$m(x)$		$\searrow$	-16	$\nearrow$	16	$\searrow$	

$m(-2) = 8 - 24 = -16$.

Ici m est impaire donc $m(2) = -m(-2) = 16$.

10 g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et $\Delta > 0$.

$x_1 = \dfrac{-(-2) + 4}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) - 4}{2} = -1$

Le signe de $ax^2 + bx + c$ permet de dresser le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	

D'après ce tableau, $g(-1) = 10$ est un maximum local de la fonction g et $g(3) = -22$ est un minimum local de g.

11 h est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $h'(x) = -x^2 + 8x - 7$

$\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = 36$ et $\Delta > 0$.

$x_1 = \dfrac{-8 + 6}{2 \times (-1)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-8 - 6}{2 \times (-1)} = 7$

Le signe de $ax^2 + bx + c$ permet de dresser le tableau de variations de la fonction h.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{10}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{98}{3}$	$\searrow$	

D'après ce tableau, $h(1) = -\dfrac{10}{3}$ est un minimum local de la fonction h et $h(7) = \dfrac{98}{3}$ est un maximum local de h.

14 g est la somme de deux fonctions dérivables sur $[-5\,;\,-2]$ donc g est dérivable sur $[-5\,;\,-2]$. Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 4 + \dfrac{1}{x^2}$. Pour tout nombre réel x, $g'(x) > 0$.

x	-5		-2
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-19{,}8$	↗	$-7{,}5$

On obtient d'après le tableau de variations que $g(-5) = -19{,}8$ est le minimum de g sur $[-5\,;\,-2]$ et $g(-2) = -7{,}5$ est le maximum de g donc pour tout réel x de $[-5\,;\,-2]$, $-19{,}8 \leqslant g(x) \leqslant -7{,}5$.

15 **a)** h est une fonction polynôme de second degré donc pour tout t, $h'(t) = -4t + 5$.

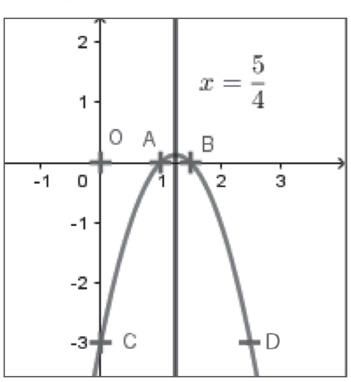
$h'(t) = 0$ si et seulement si, $-4t + 5 = 0$ soit $t = \dfrac{5}{4}$.

h' est une fonction affine ; on complète le tableau ci-dessous.

t	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗	$\frac{1}{8}$	↘	

b) L'équation $-2t^2 + 5t - 3 = 0$ a une solution évidente, 1, et sa seconde racine est $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$

On place d'abord le sommet $S\left(\dfrac{5}{4}\,;\,\dfrac{1}{8}\right)$, puis les points d'intersection avec l'axe des abscisses $A(1\,;0)$ et $B\left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$. On peut placer un autre point $C(0\,;\,-3)$. Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{5}{4}$ on place aussi $D\left(\dfrac{5}{2}\,;\,-3\right)$.



16 $f'(x)$ est positif sur les intervalles $[-3\,;1]$ et $[3\,;4]$.
$f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[1\,;3]$.

17 $f'(-2)$ est positif et $f'(3)$ est négatif.

18 Faustine a tort car f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$ $(f'(x) \geqslant 0)$ et f est décroissante sur $[0\,;1]$ $(f'(x) \leqslant 0)$.

19 $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

20 Pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
L'affirmation (2) est donc vraie.

21

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	3	↘	1	↗	

22

x	-5		-3		2		3		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

23 **a)** On peut conjecturer que les entiers -1 et 2 sont solutions de l'équation $g'(x) = 0$
b) On peut conjecturer le signe de $g'(x)$ dans le tableau ci-dessous.

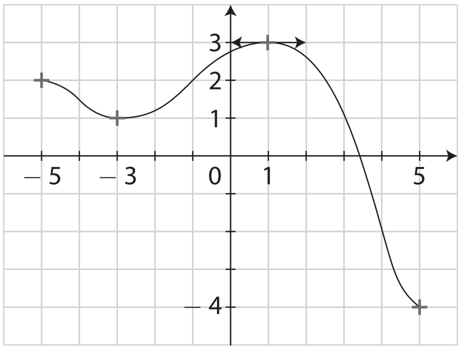
x	-3		-1		2		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

24 **a)** $h(0) < 0$
b) $h'(0) > 0$
c) $h(-3) > 0$
d) $h'(-3) < 0$
e) $h(2{,}5) > 0$
f) $h'(-2{,}5) < 0$

25 $f'(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ donc f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$.
$f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[-1\,;4]$ donc f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;4]$.

26 **a)** • f est décroissante sur les intervalles $[-5\,;\,-3]$ et $[1\,;5]$ donc $f'(x) \leqslant 0$ sur ces intervalles.
• f est croissante sur l'intervalle $[-3\,;1]$ donc $f'(x) \geqslant 0$ sur l' intervalle $[-3\,;1]$.

b)



27 • f est croissante sur les intervalles $[-3\,;\,-2]$ et $[0\,;2]$ donc $f'(x) \geqslant 0$ sur les intervalles $[-3\,;\,-2]$ et $[0\,;2]$.
Seule la courbe **C** vérifie cela donc on fait correspondre **1** à **C**.
• g est croissante sur les intervalles $[-3\,;\,-1]$ et $[1\,;2]$ donc $g'(x) \geqslant 0$ sur les intervalles $[-3\,;\,-1]$ et $[1\,;2]$.
Seule la courbe **A** vérifie cela donc on fait correspondre **2** à **A**.
• Finalement **3** correspond à **B**.

28 **a)** h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,
$h'(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - 6x + \dfrac{128}{3}$
$\Delta = -\dfrac{188}{9} < 0$ donc l'équation $h'(x) = 0$ n'a pas de solutions.

Le signe de $h'(x)$ est donc celui de $a = \dfrac{1}{3}$ donc pour tout nombre réel x, $h'(x) > 0$.
b) $h'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc h est croissante sur $\mathbb{R}$.
Chloé a donc raison.

29 **a)** Pour tout $x \neq 3$,
$f'(x) = \dfrac{1\cdot(2x-6)-(x+1)\times 2}{(2x-6)^2} = \dfrac{-8}{(2x-6)^2}$.

b) Pour tout $x \neq 3$, $(2x-6)^2 > 0$ et $-8 < 0$ donc $f'(x) < 0$.

c)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

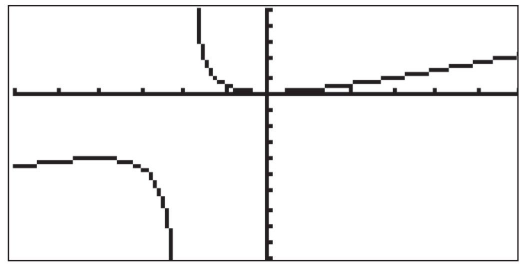
30 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq -2$,
$g'(x) = \dfrac{2x(x+2)-x^2\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

b) Pour tout nombre réel $x \neq -2$, $(x+2)^2 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x(x+4)$.

c) $x(x+4) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = -4$.
On obtient le tableau de signes ci-dessous

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	-8	↘	‖	↘	0	↗	

d)



$-6 \leqslant X \leqslant 6$, pas 1 ; $-20 \leqslant Y \leqslant 10$ pas 2

31 **a)** $h'(x) = \dfrac{2x(x^2+10)-x^2\times 2x}{(x^2+10)^2}$

$= \dfrac{20x}{(x^2+10)^2} = 20\cdot\dfrac{x}{x^4+20x^2+100}$.

b) Pour tout nombre réel x, $(x^2+10)^2 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $20x$.
$20x = 0$ si et seulement si $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	0	↗	

32 k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x,
$k'(x) = 6x^2 - 24{,}12x + 24{,}24$
$k'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = 2{,}02$. On complète le tableau de signes ci-dessous

x	$-\infty$		2		$2{,}02$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗	$4{,}24$	↘	$4{,}239\,992$	↗	

Pedro a donc tort.

33 6 est un maximum local et -4 est un minimum local.

34 $g'(x)$ s'annule en -1 en changeant de signe donc g admet en $x = -1$ un extremum local, ici par lecture du tableau il s'agit d'un maximum.

35 **a) (3)** **b) (2)** **c) (2)**

36 **a)** $f(0)=2$ et $f'(0)=0$.

b) Cette affirmation est vraie car $f'(x)=3x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe.

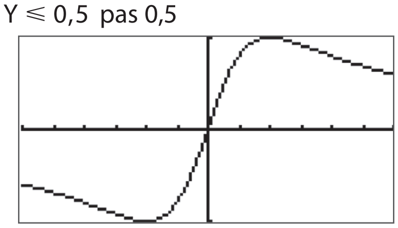
37 $f'(x)=6x^2-6x-36$.

b) $f'(x)=0$ si et seulement si $x=3$ ou $x=-2$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	45	$\searrow$	-80	$\nearrow$	

c) 45 est un maximum local de *f* et -80 est un minimum local de *f*.

38 **a)** *Fenêtre* $-6 \leqslant X \leqslant 6$, pas 1
$-0{,}5 \leqslant Y \leqslant 0{,}5$ pas 0,5



On peut conjecturer que 0,5 est un maximum local et que $-0{,}5$ est un minimum local.

b) *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$$g'(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$$

$$g'(x)=\frac{2(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}.$$

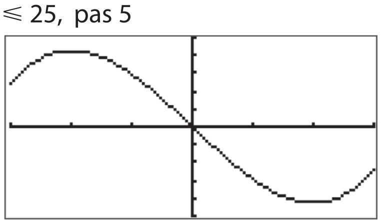
Pour tout nombre réel x, $(x^2+4)^2>0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2(4-x^2)$.

$2(4-x^2)=0$ si et seulement si $x=2$ ou $x=-2$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	

D'après le tableau *g* admet bien pour extremum locaux $-0{,}5$ et 0,5.

39 **a)** *Fenêtre* $-3 \leqslant X \leqslant 3$, pas 1
$-25 \leqslant Y \leqslant 25$, pas 5



On peut conjecturer que *f* admet deux extremums en $x=-2$ et $x=2$.

b) Pour tout x de $[-2\,;2]$, $f'(x)=4x^2-16$

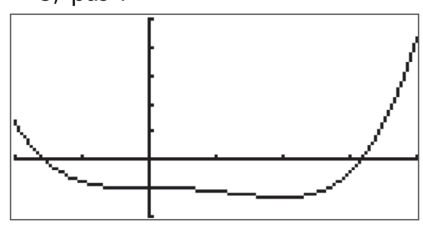
$f'(x)=0$ si et seulement si $x=-2$ ou $x=2$

x	-3		-2		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	$\nearrow$	$\frac{64}{3}$	$\searrow$	$-\frac{64}{3}$	$\nearrow$	-12

$$f(2)=\frac{4}{3}\times 2^3-16\times 2=\frac{64}{3}$$

f est impaire donc $f(-2)=-f(2)=\frac{64}{3}$

40 **a)** *Fenêtre* $-1 \leqslant X \leqslant 2$, pas 0,5
$-2 \leqslant Y \leqslant 5$, pas 1



On peut conjecturer que *f* admet un extremum local (un minimum) en $x=1$ égal à $-\frac{4}{3}$.

b) Pour tout x de $[-1\,;2]$, $f'(x)=4x^3-4x^2$

$f'(x)=4x^2(x-1)$

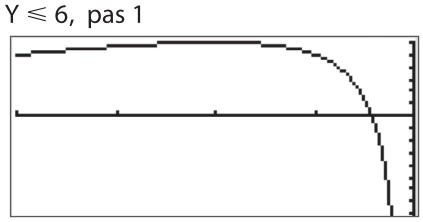
$f'(x)=0$ si et seulement si $x=0$ ou $x=1$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ car $4x^2 \geqslant 0$.

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$		$\searrow$		$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$

$f(1)=-\frac{4}{3}$ est un minimum local de *f* sur $[-1\,;2]$.

41 **a)** *Fenêtre* $-4 \leqslant X \leqslant 0$, pas 1
$-10 \leqslant Y \leqslant 6$, pas 1



Il semblerait que *f* admet un maximum local en $x=-2$ égal à 6.

b) Pour tout x de $[-4\,;0[$ $f'(x)=-\frac{4}{x^2}+1$

$$f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

Pour tout x de $[-4\,;0[$, $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 4$.
Sur $[-4\,;0[$ $x^2 - 4 = 0$ si et seulement si $x = -2$.

x	-4		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||
$f(x)$	5	$\nearrow$	6	$\searrow$	||

42 **a)** g est dérivable et $g'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.
$g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = 4$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	17	$\searrow$	13	$\nearrow$	

b) D'après **a)**, g admet un maximum local égal à 17 en $x = 2$ et un minimum local égal à 13 en $x = 4$.
c) Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ g admet 13 pour minimum local, donc pour tout $x \geqslant 2$, $g(x) \geqslant 13$.

43 **a)** $h'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$
$h'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$.

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

b) 0 est le minimum de h sur l'intervalle $[0\,;1]$, donc $h(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$.
c) La position relative, dans un repère, de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$ est donnée par le signe de $x^2 - x^3$ c'est-à-dire de $h(x)$. Or d'après **b)**, pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$, $h(x) \geqslant 0$ donc $x^2 \geqslant x^3$. Ainsi la courbe de la fonction carrée est située au-dessus de celle de la fonction cube sur $[0\,;1]$.

44 **a)** $f'(x) = 3x^2 - 3$
b) Sur $[0\,;+\infty[$ $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

c) D'après **b)**, 0 est le minimum local de f sur $[0\,;+\infty[$.
d) D'après **c)**, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $x^3 - 3x + 2 \geqslant 0$ ce qui donne $x^3 \geqslant 3x - 2$.

45 $-\dfrac{b}{2a} = 2$.
f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et f est croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

46 Elle se trompe, ce n'est pas le signe de $b = -5$ qui permet de donner la nature de l'extremum mais celui de $a = 2$. $a > 0$ donc la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

47 $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{-2} = -2$ et $f(-2) = 5$
donc réponse **(3)**.

48 $f'(x) = 2x - 4$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 2$
$f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

49 $f(x) = x^2 + x - 2$ est une fonction polynôme de degré 2 donc sa courbe représentative dans un repère est une parabole.
Iheb a donc raison.

50 A et B ont la même ordonnée et
$\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 = x_S$
Lison a donc raison.

51 **a)** f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ car $a = \dfrac{1}{3}$ et $a > 0$.
Il est obtenu en $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \times \frac{1}{3}} = -6$ et sa valeur est $f(-6) = -12$
b) $a = -\dfrac{3}{2}$ et $a < 0$ donc l'extremum local est un maximum, il est obtenu pour
$x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{4}{3}$ et sa valeur est $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$.
c) $f(x) = (x-5)^2$ est la forme canonique de $f(x)$. Ici, $a = 1$ et $a > 0$ donc l'extremum local est un minimum, il est obtenu en $x = -5$ et sa valeur est $f(5) = 0$.
d) $f(x) = -3(x+1)^2$ est la forme canonique de $f(x)$. Ici, $a = -3$ et $a < 0$ donc l'extremum local est un maximum, il est obtenu en $x = -1$ et sa valeur est $f(-1) = 0$.

52 **a)** f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -4x - 5$.

$f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = -\dfrac{5}{4}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{49}{8}$	↘	

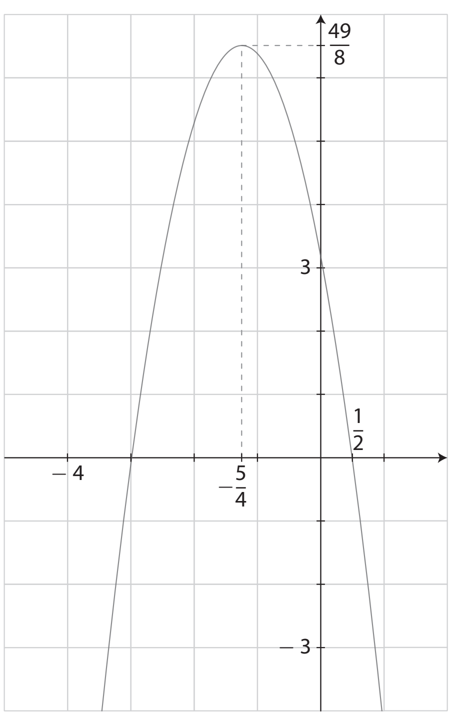
$f\left(-\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{49}{8}$

b) $f(x) = 0$ si, et seulement si, $-2x^2 - 5x + 3 = 0$.

$\Delta = 49$, $x_1 = -3$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\left\{-3\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}$.

c)



53 $\mathscr{C}_1$ est associé à $x^2 + 4x + 4$ ($a = 1$ est positif et $-\dfrac{b}{2a} = -2$)

$\mathscr{C}_2$ est associé à $\dfrac{3}{2}x^2 - 12x + 22$ ($a = \dfrac{3}{2}$ est positif et $-\dfrac{b}{2a} = 4$)

$\mathscr{C}_3$ est associé à $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ ($a = -\dfrac{1}{2}$ est négatif et $-\dfrac{b}{2a} = 2$)

$\mathscr{C}_4$ est associé à $-x^2 - 4x$ ($a = -1$ est négatif et $-\dfrac{b}{2a} = -2$)

54 **a)** f est une fonction polynôme du second degré avec $a = -2$.

$a < 0$ donc f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, il est obtenu pour $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{9}{4}$ et sa valeur est $f\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{25}{8}$

b) • Pour tout x de l'intervalle $\left[1\,;\,\dfrac{7}{2}\right]$, $f(x) \leqslant \dfrac{25}{8}$

• $f(1) = 0$ et $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = 0$ et $\dfrac{1 + \frac{7}{2}}{2} = \dfrac{9}{4}$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $\left[1\,;\,\dfrac{7}{2}\right]$.

Ainsi $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{25}{8}$ et donc $0 \leqslant 8f(x) \leqslant 25$

55 **a)** g est une fonction polynôme du second degré donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $g'(x) = 2x - 7$.

$g'(x) = 0$ si, et seulement, $x = \dfrac{7}{2}$. On obtient le tableau de variations de g suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

b) Pour tout x de l'intervalle $]3\,;4[$, $g(x) \geqslant -\dfrac{1}{4}$ donc $\dfrac{1}{g(x)} \leqslant -4$.

56 **a)** T : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(x) = 6x$

$y = 6(x - 1) + 4$

$y = 6x - 2$

b) $g(x) = 3x^2 - 6x + 3$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $g'(x) = 6x - 6$.

$g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

c) D'après **b)**, 0 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 6x - 2$

La conjecture d'Anaïs est démontrée.

57 **1.** C **2.** C **3.** B **4.** D

58 **1.** C **2.** B, D **3.** B, D **4.** A, C

59 **1. Faux.** En effet, il y a un minimum en $x=-2$ et un maximum en $x=2$ donc $f'(-2)=0$ et $f'(2)=0$. L'équation $f'(x)=0$ admet donc deux solutions.

2. Faux. En effet $f'(5)<0$ car f est décroissante sur $[2\,;5]$.

3. Vrai. En effet :

• f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;2]$ donc pour tout x de $[0{,}5\,;2]$, $f'(x)\geqslant 0$ donc $f'(1{,}5)\geqslant 0$.

• f est décroissante sur $[2\,;5]$ donc pour tout x de $[2\,;5]$ $f'(x)\leqslant 0$ donc $f'(4)\leqslant 0$.

• $f'(x)=0$ pour $x=2$.

Ainsi $f'(1{,}5)>0$ et $f'(4)<0$.

4. Vrai. En effet la dérivée f' de f s'annule en -2 et 2 en changeant de signe.

60 **a)** $f'(x)=3x^2+1$

Pour tout nombre réel x, $3x^2+1>0$ donc $f'(x)>0$.

b) $g'(x)=-6x^2-4=-(6x^2+4)$

Pour tout nombre réel x, $6x^2+4>0$ donc $g'(x)<0$.

c) $h'(x)=1+\dfrac{4}{x^2}$

Pour tout nombre réel $x\neq 0$, $x^2>0$ donc $h'(x)>0$.

61 **a)** $f'(x)=6x^2+6x-36$

b) $f'(x)=0$ si et seulement si $x=-3$ ou $x=2$.

c) f' est une fonction polynôme du second degré qui s'annule en -3 et 2.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

62 **a)** $f'(x)=4x^3-12x$

b) $f'(x)=4x(x^2-3)=4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$f'(x)=0$ si et seulement si $x=0$ ou $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

63 **a)** Pour tout $x\geqslant 0$, $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-x^2\times 1}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b) Pour tout $x\geqslant 0$, $(x+1)^2>0$, $x+2>0$, donc $f'(x)\geqslant 0$.

64 **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $f'(x)=4x^3+4x^2$

b) $f'(x)=4x^2(x+1)$.

$f'(x)=0$ si, et seulement si, $x=0$ ou $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$4x^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{4}{3}$	$\nearrow$		$\nearrow$	

65 **a)** $\mathrm{N}'(t)=-4t^3+64t=4t(-t^2+16)$
$=4t(4-t)(4+t)$

Sur $[0\,;+\infty[$, $\mathrm{N}'(t)=0$ si et seulement si, $t=0$ ou $t=4$.

t	0		4		$+\infty$
$4t$	0	$+$		$+$	
$16-t^2$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{N}'(t)$	0	$+$	0	$-$	

b) D'après le signe de $\mathrm{N}'(t)$ on peut établir les variations de N sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

t	0		4		$+\infty$
$\mathrm{N}(t)$	100	$\nearrow$	356	$\searrow$	

Le nombre de bactéries a donc augmenté sur les 4 premières heures et diminué au-delà.

S'entraîner

67 **a)** $g(1016) = 4$ et $g(0) = -250$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) < 5$.
Ainsi, l'ordonnée des points d'abscisses supérieures à 1016 est comprise entre 4 et 5 donc les points à coordonnées entières de $\mathscr{C}$ ont une abscisse inférieure ou égale à 1016 dans $[0\,;+\infty[$ donc comprise entre 0 et 1016.

b)
```
def g(x):
    return((5*x-1000)/(x+4))

for n in range(0,1017):
    a=g(n)
    if int(a) == a:
        print("(",n,";",a,")")
```

On obtient 21 points de $\mathscr{C}$ à coordonnées entières indiqués ci-dessous.

```
>>>
( 0 ; -250.0 )
( 1 ; -199.0 )
( 2 ; -165.0 )
( 6 ; -97.0 )
( 8 ; -80.0 )
( 11 ; -63.0 )
( 13 ; -55.0 )
( 16 ; -46.0 )
( 26 ; -29.0 )
( 30 ; -25.0 )
( 47 ; -15.0 )
( 56 ; -12.0 )
```

```
( 56 ; -12.0 )
( 64 ; -10.0 )
( 81 ; -7.0 )
( 98 ; -5.0 )
( 166 ; -1.0 )
( 200 ; 0.0 )
( 251 ; 1.0 )
( 336 ; 2.0 )
( 506 ; 3.0 )
( 1016 ; 4.0 )
```

68 **a)** $h(-105) = 1$ et $h(4) = -108$
Pour tout $x < 5$, $h(x) < 2$.
Ainsi, l'ordonnée des points d'abscisses strictement inférieures à 5 et supérieures ou égales à -105 est strictement inférieure à 2 donc les points à coordonnées entières de Γ ont une abscisse comprise entre -105 et 4.

b)
```
def h(x):
    y=((2*x+100)/(x-5))
    return y

for n in range(-105,5):
    a=h(n)
    if int(a) == a:
        print("(",n,";",a,")")
```

On obtient 8 points de Γ à coordonnées entières indiqués ci-dessous :

```
>>>
( -105 ; 1.0 )
( -50 ; -0.0 )
( -17 ; -3.0 )
( -6 ; -8.0 )
( -5 ; -9.0 )
( 0 ; -20.0 )
( 3 ; -53.0 )
( 4 ; -108.0 )
```

70 **a)** On conjecture que l'aire du rectangle est maximale pour une valeur de *a* environ égale à 1,8.

b) On note $x = \mathrm{OA}$ et $\mathrm{S}(x)$ l'aire du rectangle ABCD en fonction de x $(0 \leqslant x \leqslant 3)$.

L'ordonnée de B est $g(x)$ car B appartient à $\mathscr{C}$.

De plus, $\mathscr{P}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc $\mathrm{S}(x) = 2xg(x) = -\dfrac{8}{9}x^3 + 8x$.

La fonction S est dérivable sur $[0\,;3]$ et pour tout nombre réel x de cet intervalle, $\mathrm{S}'(x) = -\dfrac{8}{3}x^2 + 8$

Sur $[0\,;3]$, $-\dfrac{8}{3}x^2 + 8 = 0$ si et seulement si, $x^2 = 3$ c'est-à-dire $x = \sqrt{3}$.

On dresse le tableau de variations de S.

x	0		$\sqrt{3}$		3
$\mathrm{S}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{S}(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

$\mathrm{S}\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{8}{9}\left(\sqrt{3}\right)^3 + 8\sqrt{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

L'aire du rectangle est donc maximale lorsque l'abscisse du point A est $\sqrt{3}$.

71 **a)** On conjecture que l'aire du triangle ABC rectangle en B est maximale lorsque C a pour coordonnées $\left(2\,;\dfrac{64}{9}\right)$.

b) On note x l'abscisse de B $(-6 \leqslant x \leqslant 6)$ et $\mathrm{S}(x)$ l'aire du triangle ABC en fonction de x.

Le point C a pour coordonnées $(x\,;h(x))$ car C appartient à $\mathscr{C}$.

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{BC} = \frac{1}{2}(x+6) \times h(x)$$
$$= \frac{1}{2}(x+6)\left(-\frac{2}{9}x^2 + 8\right).$$

$\mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{BC} = \dfrac{1}{2}(x+6)\left(-\dfrac{2}{9}x^2 + 8\right)$

$\mathrm{S}'(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{9}x^2 + 8\right) + \dfrac{1}{2}(x+6)\left(-\dfrac{4}{9}x\right)$

$\mathrm{S}'(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{4}{3}x + 4.$

$\mathrm{S}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = -6$.

On dresse le tableau de variation de S.

x	-6		2		6
$\mathbf{S'(x)}$	0	$+$	0	$-$	
$\mathbf{S(x)}$	0	$\nearrow$	$\dfrac{256}{9}$	$\searrow$	0

$\mathrm{S}(2) = \dfrac{1}{2} \times 8\left(-\dfrac{8}{9} + 8\right) = \dfrac{256}{9}$. L'aire du triangle ABC est maximale lorsque l'abscisse de B est égale 2.

72 **a)** On pose h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x - 2$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

$h'(x) = 0$ si et seulement si, $x = 1$ ou $x = -1$.

On dresse le tableau de variations de h.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$, $h(x) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant g(x)$, donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,; 2]$.

Sur l'intervalle $[2\,; +\infty[$, $h(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant g(x)$, donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[2\,; +\infty[$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(2\,; 8)$ et $(-1\,; -1)$

b) On étudie le signe de $f(x) - g(x)$. Pour tout nombre réel x,

$f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$f(x) - g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$.

On utilise le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur les intervalles $]-\infty\,; -1]$ et $[0\,; 1]$, $f(x) - g(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur ces intervalles.

Sur les intervalles $[-1\,; 0]$ et $[1\,; +\infty[$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur ces intervalles.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(-1\,; -1)$, $(0\,; 0)$ et $(1\,; 1)$.

c) On résout l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

$2x^2 + 2x - 1 \leqslant x$ équivaut à $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$.

$2x^2 + x - 1 = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $x = 0{,}5$.

L'inéquation a pour ensemble de solution $\mathscr{S} = [-1\,; 0{,}5]$.

Ainsi sur l'intervalle $[-1\,; 0{,}5]$ $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ et sur les intervalles $]-\infty\,; -1]$ et $[0{,}5\,; +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(-1\,; -1)$ et $(0{,}5\,; 0{,}5)$.

73 **a)** Cas $h > 0$.

Pour tous nombres réels x et $x + h$ de I, $x + h > x$ donc $f(x+h) \geqslant f(x)$ car f est croissante sur I.

Ainsi $f(x+h) - f(x) \geqslant 0$ donc $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

Cas $h < 0$.

Pour tous nombres réels x et $x + h$ de I, $x + h < x$ donc $f(x+h) \leqslant f(x)$ car f est croissante sur I

Ainsi $f(x+h) - f(x) \leqslant 0$ donc $\dfrac{(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

b) Pour tout x de I, le taux d'accroissement de f en x est pour $h \neq 0$ avec $x + h$ appartient à I, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Ce taux a pour limite $f'(x)$ lorsque h tend vers 0.

Ainsi $f'(x) \geqslant 0$.

74 Notons x l'une des dimensions du rectangle.

On définit la fonction p sur $]0\,; +\infty[$ telle $p(x)$ représente le périmètre du rectangle.

La deuxième dimension du rectangle est $\dfrac{100}{x}$

Ainsi $p(x) = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right)$

La fonction p est dérivable sur $]0\,; +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$p'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} = \frac{2(x+10)(x-10)}{x^2}.$$

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$, $2(x+10) > 0$ donc le signe de $p'(x)$ est celui de $x - 10$.

$x - 10 = 0$ équivaut à $x = 10$.

x	0		10		$+\infty$
$p'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$p(x)$	‖	↘	40	↗	

D'après le tableau 40 est le minimum de p sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout $x>0$, $p(x)\geqslant 40$. Ceci prouve que tous les rectangles d'aire 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.

75 f est une fonction polynôme donc elle est dérivable et pour tout x, $f'(x)=3x^2-a$

Pour que f admette un extremum en 2 il est nécessaire que $f'(2)=0$, ce qui donne $a=12$.

Il faut vérifier que cela est suffisant.

$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)\ =3(x-2)(x+2)$.

f' est une fonction polynôme du second degré qui s'annule en 2 en changeant de signe. La valeur $a=12$ est donc suffisante.

76 **a)** $\mathrm{B}'(x)=-3x^2+20x+3\,000$.

Sur $[0\,;50]$, $\mathrm{B}'(x)=0$ si et seulement si

$x_0=\dfrac{10+10\sqrt{91}}{3}\approx 35{,}131$

x	0		x_0		50
$\mathrm{B}'(x)$		$+$	0	$-$	

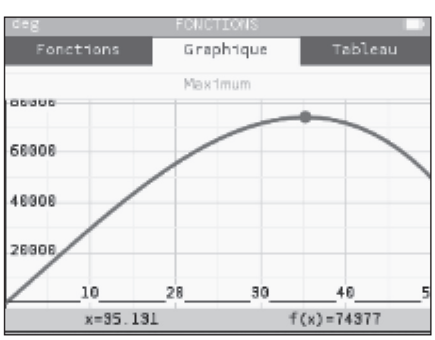
b)

x	0		x_0		50
$\mathrm{B}(x)$	0	↗	$\mathrm{B}(x_0)$	↘	50 000

$\mathrm{B}(x_0)\approx 74\,377$.

c) D'après le tableau de variations de B, le bénéfice est maximal pour 35,131 tonnes pour un bénéfice d'environ 74 377 €.

d)



77 **a)** Pour tout $x>0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{2x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $12x^2-15x+3$.

$12x^2-15x+3=0$ si et seulement si $x=1$ ou $x=\dfrac{1}{4}$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↗	0,95	↘	0,4	↗	

b) $f(0{,}1)=2{,}524\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}8$

D'après le tableau de variations de f, 0,4 est le minimum de f sur $[0{,}1\,;+\infty[$ donc pour tout $x\geqslant 0{,}1$, $f(x)\geqslant 0{,}4$.

78 **a)** $f(x)=\mathrm{AM}^2+\dfrac{\mathrm{MB}\times\mathrm{CB}}{2}$

$f(x)=x^2+\dfrac{(4-x)\times 4}{2}\ =x^2-2x+8$.

b) f est dérivable sur $[0\,;4]$ et pour tout x, $f'(x)=2x-2$.

$f'(x)=0$ si et seulement si $x=1$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	7	↗	16

c) L'aire du carré ABCD vaut, en unité d'aire, 16.

L'aire minimale de la partie colorée est 7, ce qui représente $\dfrac{7}{16}=43{,}75\ \%$

Myriam a donc raison.

79 **1.** L'effectif de l'entreprise est 40.

$\dfrac{10\times15+5\times18+13\times20+4\times25+6\times30+2\times40}{40}=21{,}5$

Le salaire annuel moyen est 21,5 k€.

2. a)

x	16	18	19,5	21,5	33
$\mathrm{Var}(x)$	72,25	54,25	46,0	42,0	174,25

b) La variance de cette série est 42.

3. a)

$$\mathrm{Var}(x)=\frac{1}{40}[10(15-x)^2+5(18-x)^2+13(20-x)^2$$
$$+4(25-x)^2+6(30-x)^2+2(40-x)^2]$$

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{40}[10(x^2 - 30x + 225) + 5(x^2 - 36x + 324)^2$$
$$+ 13(x^2 - 40x + 400) + 4(x^2 - 50x + 625)$$
$$+ 6(x^2 - 60x + 900) + 2(x^2 - 80x + 1600)]$$

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{40}[40x^2 - 1720x + 20\,170]$$

$$\mathrm{Var}(x) = x^2 - 43x + 504{,}25$$

b) La valeur qui minimise $\mathrm{Var}(x)$ est :

$$-\frac{b}{2a} = \frac{43}{2} = 21{,}5.$$

Il s'agit de la moyenne.

80 **1. a)** $f(0) = 0$ et $f'(0) = -12$

b) $f(1) = -11$ et $f'(1) = -9$

2. a) $f(0) = 0$ et $f(0) = q$ donc $q = 0$.

$f'(0) = p$ et $f'(0) = -12$ donc $p = -12$.

b) $f(1) = m + n - 12$ et $f(1) = -11$ donc $m + n = 1$

$f'(1) = 3m + 2n - 12$ et $f'(1) = -9$

donc $3m + 2n = 3$

$3m + 2n = 3$ équivaut à $m + 2(m + n) = 3$ c'est-à-dire $m + 2 = 3$. Donc $m = 1$. On en déduit $n = 0$.

Conclusion : $f(x) = x^3 - 12x$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$ ou $x = 2$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	16	↘	-16	↗	

81 **1. a)** Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$h'(x) = \frac{2(x^2 + 9) - 2x \times 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{2(-x^2 + 9)}{(x^2 + 9)^2}$$
$$= \frac{2(3 + x)(3 - x)}{(x^2 + 9)^2}$$

b) Pour tout nombré réel $x \geqslant 0$, $2(3 + x) > 0$ et $(x^2 + 9)^2 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $3 - x$.

c) $3 - x = 0$ si et seulement si $x = 3$.

On dresse le tableau de variations de h.

x	0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	

2. a) Le maximum de h sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est $\frac{1}{3}$ donc pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $h(x) \leqslant \frac{1}{3}$.

b) La fonction h est décroissante sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$, donc pour tout $x \geqslant 5$, $h(x) \leqslant h(5)$ c'est-à-dire $h(x) \leqslant \frac{5}{17}$. Or $\frac{5}{17} \leqslant 0{,}3$ et pour tout $x \geqslant 5$, $2x \geqslant 0$ et $x^2 + 9 > 0$ donc $0 \leqslant h(x) \leqslant 0{,}3$.

82 **a)** On complète la ligne par la condition : $f(k) > 2\,000$

On obtient le résultat ci-dessous.

```
>>>
Affirmation fausse
```

Cela signifie qu'il existe un nombre réel x de l'intervalle $[0\,;500]$ tel que $f(x) > 2\,000$. L'affirmation de Mélanie est donc fausse.

b) f est le produit de deux fonctions dérivables sur $[1\,;500]$ donc f est dérivable sur $[1\,;500]$ et pour tout $x \geqslant 1$, $f'(x) = 1 \times \left(24 - \sqrt{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$f'(x) = 24 - \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \text{ car } \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

$$f'(x) = 24 - \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

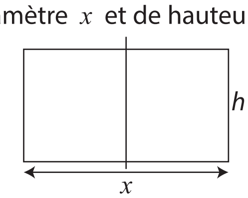
c) $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si, $\sqrt{x} \leqslant 16$, c'est-à-dire $x \leqslant 256$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	1		156		500
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	23	↗	$2\,048$	↘	$500(24 - \sqrt{500})$

D'après le tableau de variations $2\,048$ est un maximum local de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;500]$ donc pour tout nombre réel x de $[1\,;500]$, $f(x) \leqslant 2\,048$. Ainsi $\mathrm{M} = 2\,048$.

83 **a)** Le solide de révolution obtenu par rotation du rectangle autour de son axe de symétrie Δ est un cylindre de diamètre x et de hauteur h.



On sait que $2(x + h) = 60$ donc $h = 30 - x$

Ainsi x appartient à l'intervalle $[0\,;30]$.

Le volume du cylindre en $\mathrm{V}(x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2(30 - x)$

$\mathrm{V}(x) = \dfrac{\pi}{4}x^2(30 - x) = \dfrac{\pi}{4}(30x^2 - x^3).$

$\mathrm{V}'(x) = \dfrac{\pi}{4}(60x - 3x^2) = \dfrac{3\pi}{4}x(20 - x).$

$\mathrm{V}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 20$.

On dresse le tableau de variations de la fonction V.

x	0		20		30
$\mathbf{V'(x)}$	0	+	0	−	
$\mathbf{V(x)}$	0	↗	$1\,000\pi$	↘	0

Les dimensions du rectangle pour obtenir le plus grand volume sont 20 cm et 10 cm.

b) L'aire latérale du cylindre de révolution est :

$$\mathscr{A}(x) = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)(30 - x) = -\pi x^2 + 30\pi x$$

où x est le diamètre du cylindre avec $0 \leqslant x \leqslant 30$.

où $\mathscr{A}'(x) = -2\pi x + 30\pi$

$\mathscr{A}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 15$.

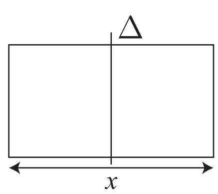
On dresse le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$.

x	0		15		30
$\mathscr{A}'(x)$		+	0	−	
$\mathscr{A}(x)$	0	↗	225π	↘	0

L'aire est maximale lorsque $x = 15$.

Les dimensions du rectangle sont 15 cm et 15 cm, il s'agit d'un carré de côté 15 cm.

c) L'aire totale du cylindre de révolution est



$\mathrm{S}(x) = 2\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 2\pi\dfrac{x}{2}(30 - x)$ avec $0 \leqslant x \leqslant 30$

$\mathrm{S}(x) = \dfrac{\pi}{2}x^2 - \pi x^2 + 30\pi x = \left(\dfrac{\pi}{2} - \pi\right)x^2 + 30\pi x.$

$\mathrm{S}(x) = -\dfrac{\pi}{2}x^2 + 30\pi x$

$\mathrm{S}'(x) = -\pi x + 30\pi.$

$\mathrm{S}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 30$.

Il s'agit d'un cylindre aplati.

x	0		30
$\mathbf{S'(x)}$		+	
$\mathbf{S(x)}$	0	↗	450π

84 **a)** $\mathscr{V}(x) = \mathrm{AM} \times \mathrm{AQ} \times \mathrm{AI}$

$\mathscr{V}(x) = x \times x \times (6 - x) = 6x^2 - x^3$ avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.

b) $\mathscr{V}'(x) = 12x - 3x^2 = 3x(4 - x)$

$\mathscr{V}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 4$.

On dresse le tableau de variations de la fonction $\mathscr{V}$.

x	0		4		6
$\mathscr{V}'(x)$	0	+	0	−	
$\mathscr{V}(x)$	0	↗	32	↘	0

c) La fonction $\mathscr{V}$ admet un maximum local en $x = 4$ donc le volume $\mathscr{V}(x)$ est maximum lorsque le point M est à 4 cm du point A.

85 **a)** *p* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $p'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

Sur $]0\,;+\infty[$, $p'(x)$ s'annule si et seulement si $x = 1$ et le signe de $p'(x)$ est celui de $x^2 - 1$.

On dresse le tableau de variations de la fonction *p*.

x	0		1		$+\infty$
$p'(x)$	‖	−	0	+	
$p(x)$	‖	↘	2	↗	

b) $p'(x)$ s'annule en $x = 1$ en changeant de signe donc *p* admet, d'après **a)**, un minimum sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ égal à $p(1) = 2$.

2. Le périmètre du rectangle OMNA est $2(\mathrm{OM} + \mathrm{OA})$.

On pose $\mathrm{OM} = x$ avec $x > 0$. Le point A a donc pour coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{x}\right)$.

Ainsi le périmètre du rectangle OMNA vaut $2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, c'est-à-dire $2p(x)$.

D'après **1.**, *p* admet un minimum en $x = 1$ donc les dimensions du rectangle sont $\mathrm{OM} = 1$ et $\mathrm{OA} = 1$ donc OMNA est un carré de côté 1.

86 **a)** La deuxième dimension y d'un rectangle d'aire $2\,019$ est $y = \dfrac{2\,019}{x}$ avec $x > 0$.

Ainsi le périmètre du L est $3y + 3x + (y - x)$ c'est-à-dire $4y + 2x$.

Donc $\mathrm{P}(x) = 2x + \dfrac{4 \times 2\,019}{x} = 2x + \dfrac{8\,076}{x}$.

b) La fonction P est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$\mathrm{P}'(x) = 2 - \dfrac{8\,076}{x^2}$

$\mathrm{P}'(x) = \dfrac{2(x^2 - 4\,038)}{x^2}$

Sur $]0\,;+\infty[$, $\mathrm{P}'(x) = 0$ si et seulement si $x = \sqrt{4\,038}$.

On dresse le tableau de variation de P.

x	0		$\sqrt{4\,038}$		$+\infty$
$\mathrm{P}'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\mathrm{P}(x)$	‖	↘	$4\sqrt{4\,038}$	↗	

$\mathrm{P}\left(\sqrt{4\,038}\right) = 2\sqrt{4\,038} + \dfrac{8\,076}{\sqrt{4\,038}}$

$\mathrm{P}\left(\sqrt{4\,038}\right) = 4\sqrt{4\,038}$

c) D'après **b)**, le périmètre minimum du polygone en L est obtenu pour $x = \sqrt{4\,038}$ et vaut $4\sqrt{1038}$.

87 f est dérivable sur $[0\,;12]$ et pour tout x,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) - (x^2 - 2x + 5) \times 1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{x^2 + x - 6}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

Pour tout x de l'intervalle $[0\,;12]$, $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 + x - 6$.

Sur $[0\,;12]$ $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$.

On dresse le tableau de variations de *f*.

x	0		2		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	1	↗	5

D'après le tableau de variations de *f*, Sandrine est passée lors de son plongeon à 1 m minimum du fond de la piscine.

88 **a)** Pour tout $x \neq 0$,

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.

$f'(2) = 0$ donc la proposition est vraie.

b) $f'(1) = -3$ et $-3 < 0$ donc la proposition est fausse.

c) Pour tout x de l'intervalle $[2\,;+\infty[$, $x + 2 > 0$, $x - 2 \geqslant 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi *f* est croissante sur $[2\,;+\infty[$.

La proposition est vraie.

d) Sur $]0\,;+\infty[$ $f'(x)$ s'annule en $x = 2$ en changeant de signe, donc $x_0 = 2$ est un extremum local.

Sur $]0\,;2]$, $f'(x) \leqslant 0$ sur $[2\,;+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc $x_0 = 2$ est un minimum local.

e) $f(1) = 3$ et $3 > -6$ donc la proposition est fausse.

89 La négation de P est : « Il existe un nombre réel x, $f(x) > 2$ ».

La négation de Q est : « Pour tout nombre réel x, $f'(x) < 0$ ».

90 **a)** • La réciproque de l'implication est :

« Si *f* est croissante sur un intervalle I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$ ».

• La contraposée de l'implication est :

« Si *f* n'est pas croissante sur un intervalle I, alors il existe au moins un nombre réel x de I, $f'(x) < 0$ ».

b) L'implication est vraie. La réciproque est vraie.

La contraposée est fausse. En effet la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ est constante et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Organiser son raisonnement

91 **a)** *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2$.

$f'(x) = 0.$ si et seulement si, $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

On dresse le tableau de variations de *f*.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{-45+4\sqrt{6}}{9}$	↘	$\frac{-45-4\sqrt{6}}{9}$	↗	

• $f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^3+2\sqrt{\dfrac{2}{3}}-5$

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-5$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{2}{9}\sqrt{6}+\frac{2}{3}\sqrt{6}-5$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{-45+4\sqrt{6}}{9}$$

• $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^3-2\sqrt{\dfrac{2}{3}}-5$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{6}-\frac{2}{3}\sqrt{6}-5=\frac{-45-4\sqrt{6}}{9}.$$

b)

n	0	1	2	3
x_n	2	2,1	2,094 57	2,094 55
$\left\lvert\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\rvert$	0,1	0,005 4	0,000 02	0,000 001

$\left\lvert\dfrac{f(2)}{g(2)}\right\rvert=\lvert-0{,}1\rvert=0{,}1$ et $0{,}1\geqslant 10^{-5}$ donc x prend la valeur $2-(-0{,}1)=2{,}1$

$\left\lvert\dfrac{f(2{,}1)}{g(2{,}1)}\right\rvert\approx\lvert 0{,}005\,4\rvert$ et $0{,}005\,4\geqslant 10^{-5}$ donc x prend la valeur $2{,}1-\dfrac{f(2{,}1)}{g(2{,}1)}\approx 2{,}094\,57$

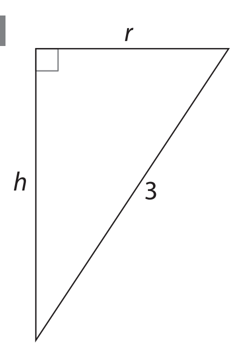
$\left\lvert\dfrac{f(2{,}094\,57)}{g(2{,}094\,57)}\right\rvert\approx\lvert 0{,}000\,02\rvert$ et $0{,}000\,02\geqslant 10^{-5}$ donc x_0 prend la valeur $2{,}094\,57-0{,}000\,02\approx 2{,}094\,55$

$\left\lvert\dfrac{f(2{,}094\,55)}{g(2{,}094\,55)}\right\rvert\approx\lvert-0{,}000\,001\rvert=10^{-6}$ et $10^{-6}<10^{-5}$ l'algorithme s'arrête.

c)
```
>>> Newton()
2.094551481698199
```

d) $a=2{,}094\,55$ arrondi au dix-millième.

92



D'après le théorème de Pythagore $r^2+h^2=9$.

Le volume d'un baril de rayon r et de hauteur h est $\pi r^2 h$ c'est-à-dire $\pi(9-h^2)h$.

Ainsi le volume du baril en fonction de la hauteur h est $V(h)=9\pi h-\pi h^3$ avec $h\geqslant 0$.

La fonction V est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout h, $V'(h)=9\pi-3\pi h^2$.

$V'(h)=3\pi(3-h^2)=3\pi\left(\sqrt{3}-h\right)\left(\sqrt{3}+h\right)$.

Sur $[0\,;+\infty[$, $V'(h)=0$ si et seulement si $h=\sqrt{3}$.

On dresse le tableau de variations de V.

$\boldsymbol{h}$	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\mathbf{V'(h)}$		+	0	−	
$\mathbf{V(h)}$	0	↗	$6\pi\sqrt{3}$	↘	

$$V\left(\sqrt{3}\right)=\pi\left(9-\sqrt{3}^2\right)\sqrt{3}$$

$$V\left(\sqrt{3}\right)=6\pi\sqrt{3}$$

$r^2=9-h^2=6$ donc $r=\sqrt{6}$.

Les dimensions du baril de volume maximum sont $r=\sqrt{6}$ pieds et $h=\sqrt{3}$ pieds.

93 **1. a)** $f'(x)=0{,}75x^4-6x^2+12$.

b) $f''(x)=3x^3-12x=3x(x^2-4)$
$=3x(x-2)(x+2)$.

2. a) $f''(x)=0$ si et seulement si, $x=0$ ou $x=2$ ou $x=-2$.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$\mathbf{3x}$		−	|	−	0	+	|	+	
$\mathbf{x^2-4}$		+	0	−	|	−	0	+	
$\mathbf{f''(x)}$		−	0	+	0	−	0	+	

On dresse le tableau de variations de f'.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$\mathbf{f'(x)}$		↘	0	↗	12	↘	0	↗	

D'après **2. a)**, pour tout nombre réel x, $f'(x)\geqslant 0$.

c) Pour tout x, $f'(x)\geqslant 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

94 Dans le repère orthonormé, on pose x l'abscisse de M avec $x\geqslant 0$. Ainsi $M(x\,;\sqrt{x})$.

$$AM^2=(x-1)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2=x^2-x+1.$$

Déterminer la position du point M de $\mathscr{C}$ le plus proche de A c'est déterminer la position du point M de $\mathscr{C}$ telle que la longueur AM est minimum, ce qui est équivalent à AM^2 minimum.

f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2-x+1$.
f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x)=2x-1$.

$f'(x)=0$ si et seulement si $x=\dfrac{1}{2}$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$$

Le point de $\mathscr{C}$ le plus proche de A est donc $M\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

95 On note x et y les dimensions d'un box.
Les douze box nécessitent $16x+15y$ de clôture donc $16x+15y=2$.
L'aire des douze box est $12xy$, c'est-à-dire $12x\left(\dfrac{2-16x}{15}\right)=\dfrac{3}{5}x(2-16x)$ avec $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{8}$.
$\mathscr{A}$ est la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{1}{8}\right]$ par $\mathscr{A}(x)=\dfrac{4}{5}(2x-16x^2)$

$\mathscr{A}'(x)=\dfrac{4}{5}(2-32x)$.

$\mathscr{A}'(x)=0$ si et seulement si, $x=\dfrac{1}{16}$.

On dresse le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$.

x	0		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{20}$	$\searrow$	0

$$y_{\max}=\frac{2}{15}-\frac{16}{15}x_{\max}=\frac{2}{15}-\frac{16}{15}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{15}$$

Les dimensions d'un box qui donnent le maximum d'espace aux animaux sont $\dfrac{1}{16}$ km c'est-à-dire 62,5 m sur $\dfrac{1}{15}$ km c'est-à-dire 66,7 m.

96 On note x l'abscisse du point M de $\mathscr{P}(0 \leqslant x \leqslant 0{,}5)$.
$\mathscr{P}$ a pour sommet le point $S(0\,;-0{,}25)$ donc la fonction f dont la courbe représentative est $\mathscr{P}$ est définie sur $[0\,;0{,}5]$ par $f(x)=ax^2-0{,}25$.

Or $f(0{,}2)=0$ donc $a=6{,}25$.

D'où $f(x)=6{,}25x^2-0{,}25$.

L'ordonnée de M est donc $f(x)$.

L'aire du rectangle bleu est :

$$\mathscr{A}(x)=x|f(x)|=x(0{,}25-6{,}25x^2)=-6{,}25x^3+0{,}25x$$

avec $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$.

$\mathscr{A}'(x)=-18{,}75x^2+0{,}25$.

Sur $[0\,;0{,}2]$, $\mathscr{A}'(x)=0$ si et seulement si $x=\sqrt{\dfrac{0{,}25}{18{,}75}}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$

On dresse le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{15}$		$0{,}2$
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{90}$	$\searrow$	0

$$\mathscr{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right)=-6{,}25\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right)^3+0{,}25\frac{\sqrt{3}}{15}$$

$$\mathscr{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right)=\frac{\sqrt{3}}{90}$$

L'abscisse du point M pour laquelle l'aire du rectangle bleu est maximale est $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$.

97 La durée du trajet de 1000 km à la vitesse moyenne v est $t=\dfrac{1000}{v}$.

Le salaire du chauffeur sera donc de :

$$10{,}20\times\frac{1000}{v}=\frac{10\,200}{v}.$$

La consommation en litres pour 1000 km sera de $100(v)=\dfrac{6\,000}{v}+2v$.

Le litre de carburant coûte 1,5 € donc le coût du carburant sera de $1{,}5\left(\dfrac{6\,000}{v}+2v\right)=\dfrac{9\,000}{v}+3v$.

Le prix de revient est alors :

$$P(v)=\frac{10\,200}{v}+\frac{9\,000}{v}+3v=\frac{19\,200}{v}+3v.$$

$$P'(v)=-\frac{19\,200}{v^2}+3$$

$$=\frac{3(-6\,400+v^2)}{v^2}=\frac{3(80+v)(80-v)}{v^2}.$$

Sur $]0\,;+\infty[$, $P'(v)=0$ si et seulement si $v=80$.

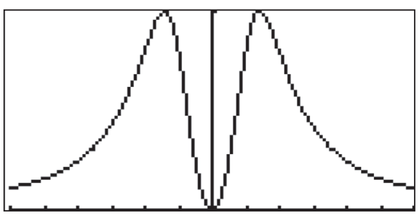
On dresse le tableau de variations de la fonction P.

v	0		80		$+\infty$
$\mathbf{P'}(v)$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{P}(v)$		$\searrow$	480	$\nearrow$	

Pour minimiser les coûts, la vitesse moyenne doit être de $80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ et le prix de revient est alors 480 €.

La durée du trajet, en h, est alors $\dfrac{1000}{80} = 12{,}5$ soit 12 h 30 mn.

98 **a)** Dans la fenêtre $-6 \leqslant X \leqslant 6$ (pas $= 1$) et $0 \leqslant Y \leqslant 1$ (pas $= 1$). On peut conjecturer que $m = 0$ et $M = 1$.



b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$$f'(x) = \frac{8x(4+x^4) - 4x^2 \times 4x^3}{(4+x^4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x(4-x^4)}{(4+x^4)^2} = \frac{8x(2-x^2)(2+x^2)}{(4+x^4)^2}$$

$$= \frac{8x(2+x^2)\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)}{(4+x^4)^2}$$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $8x(2-x^2)$ car $(4+x^4)^2 > 0$ et $2 + x^2 > 0$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$8x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\mathbf{P}(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	

D'après le tableau de variations de f, pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant 1$. De plus $4x^2 \geqslant 0$ et $4 + x^4 > 0$ donc $f(x) \geqslant 0$.

Donc pour tout x, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Ainsi $M = 1$ et $m = 0$.

99 On étudie les variations de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout x,

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

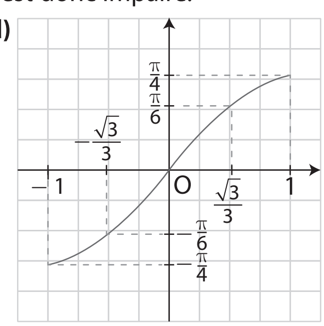
Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $x + 2 \geqslant 0$, $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

f conserve l'ordre donc $1{,}089 \geqslant 1{,}088$ implique $f(1{,}089) \geqslant f(1{,}088)$ c'est-à-dire $\dfrac{1{,}089^2}{2{,}089} \geqslant \dfrac{1{,}088^2}{2{,}088}$.

100 **a)** φ est dérivable sur $[-1\,;1]$ et pour tout x,
$\varphi'(x) = f'(x) - f'(-x)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

b) Pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$, $\varphi'(x) = 0$ donc φ est une fonction constante sur $[-1\,;1]$
Pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$,
$\varphi(x) = \varphi(0) = f(0) + f(-0) = 0 + 0 = 0.$
Ainsi pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$, $\varphi(x) = 0$.
c) Pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$:
$f(x) + f(-x) = 0$ donc $f(-x) = -f(x)$.
f est donc impaire.
d)



101 To find latitude and longitude of the southernmost point at which the full eclipse could viewed, we will find the extremum values of the function f.
$f'(x) = 0{,}025x - 1{,}157$.
$f'(x) = 0$ if and only if $x = 46{,}28$.

x	15		46,28		90
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8,321 5	$\searrow$	$-$3,908 98	$\nearrow$	19,984

So the number of degrees of longitude east of the prime meridian is 46°16'48" and the latitude is 3°54'32" South.

102 Pour tout nombre réel a, $f'(a) = -2a + 1$.

$f'(a)$ s'annule en $a = \dfrac{1}{2}$ en changeant de signe donc f admet en $\dfrac{1}{2}$ un extremum local.

Sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, $f'(a) \geqslant 0$ et sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $f'(a) \leqslant 0$ donc il s'agit d'un maximum local égal à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 6$, soit 6,25.

103 **a)** D'après le théorème de Pythagore $h^2 + r^2 = 3$.

Le volume du cône est $\dfrac{1}{3}\pi r^2 \times h = \dfrac{1}{3}\pi(3 - h^2)h$

La fonction V définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{V}(h) = \dfrac{1}{3}\pi(3h - h^3)$ est dérivable et pour tout h,

$\mathrm{V}'(h) = \dfrac{1}{3}\pi(3 - 3h^2) = \pi(1 - h^2)$

$\mathrm{V}'(h) = \pi(1 - h)(1 + h)$.

Sur $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{V}'(h) = 0$ si et seulement si $h = 1$.

On dresse le tableau de variation de la fonction V.

h	0		1		$+\infty$
$\mathrm{V}'(h)$		+	0	−	
$\mathrm{V}(h)$	0	↗	$\dfrac{2\pi}{3}$	↘	

Le volume du cône est maximal lorsque $h = 1$ m et $r = \sqrt{3 - 1^2} = \sqrt{2}$ m.

b) Ce volume maximal est $\dfrac{2\pi}{3}$ m^3.

104 f est dérivable sur $[0{,}5\,;\,3{,}4]$ et pour tout x, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ et $x = 3$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	0,5		1		3		3,4
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	5,125	↗	6	↘	2	↗	2,544

Par lecture du tableau $m = 1$, $c = 2$, $d = 3$ et $u = 6$.

105 Le temps t_1 mis pour l'aller est $t_1 = \dfrac{d}{20}$

Le temps t_2 mis pour le retour est $t_2 = \dfrac{d}{x}$

La vitesse moyenne aller-retour est :

$$\frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\dfrac{d}{20} + \dfrac{d}{x}} = \frac{40x}{x + 20}.$$

La moyenne arithmétique des deux vitesses est $\dfrac{20 + x}{2}$.

On note $f(x)$ la différence des deux vitesses :

$$f(x) = \frac{20 + x}{2} - \frac{40x}{x + 20}.$$

f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{800}{(x + 20)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x + 20)^2 - 1600}{2(x + 20)^2} = \frac{(x + 60)(x - 20)}{2(x + 20)^2}.$$

Pour tout nombre réel $x > 0$, $2(x + 20)^2 > 0$ et $x + 60 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 20$.

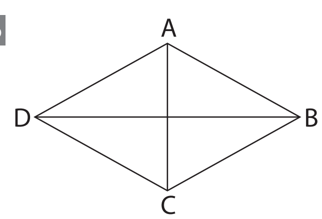
Sur $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 20$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	10	↘	0	↗	

Le minimum de f est 0 donc on peut affirmer que la vitesse arithmétique est supérieure ou égale à la vitesse moyenne.

106



ABCD est un losange de périmètre p tel que $\mathrm{BD} = \mathrm{L}$ et $\mathrm{AC} = \ell$.

L'aire du losange est $\dfrac{\mathrm{L}\ell}{2}$.

D'après le théorème de Pythagore, $\left(\dfrac{\mathrm{L}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{4}\right)^2$

donc $\mathrm{L}^2 + \ell^2 = \dfrac{p^2}{4}$.

L'aire est maximum lorsque $\dfrac{\mathrm{L}\ell}{2}$ est maximum, ce qui équivaut à $\dfrac{\mathrm{L}^2\ell^2}{4}$ maximum (la fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$).

$$\mathrm{L}^2\ell^2 = \mathrm{L}^2\left(\frac{p^2}{4} - \mathrm{L}^2\right) = \frac{p^2}{4}\mathrm{L}^2 - \mathrm{L}^4.$$

On note f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(\mathrm{L}) = \dfrac{p^2}{4}\mathrm{L}^2 - \mathrm{L}^4$.

f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout nombre réel L on a :

$$f'(\mathrm{L}) = \frac{p^2}{2}\mathrm{L} - 4\mathrm{L}^3 = \mathrm{L}\left(\frac{p^2}{2} - 4\mathrm{L}^2\right).$$

$f'(\mathrm{L}) = 0$ si et seulement si, $\mathrm{L} = 0$ ou $\mathrm{L} = \dfrac{p}{2\sqrt{2}}$.

L	0		$\dfrac{p}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(\mathrm{L})$		$+$	0	$-$	
$f(\mathrm{L})$	0	$\nearrow$	$\dfrac{p^4}{64}$	$\searrow$	

La fonction f admet un maximum sur $[0\,;\,+\infty[$ en $\mathrm{L} = \dfrac{p}{2\sqrt{2}}$.

$$\ell^2 = \frac{p^2}{4} - \mathrm{L}^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{8} = \frac{p^2}{8} \text{ donc } \ell = \frac{p}{2\sqrt{2}}.$$

Ainsi, parmi les losanges de périmètre p, il en existe un dont l'aire est maximum : c'est le carré (les diagonales du losange sont de même longueur).

107 **a)** $f(30) = \dfrac{44}{3} \approx 14{,}7$

$f(50) = 4$

À $30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ la consommation est 14,7 litres pour 100 km et à $50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ la consommation est de 4 L pour 100 km.

b) f est dérivable sur $[30\,;\,130]$ et pour tout x,

$$f'(x) = \frac{(16x - 800)x^2 - (8x^2 - 800x + 30\,000) \times 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(16x^2 - 800x - 16x^2 + 1600x - 60\,000)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{800x - 60\,000}{x^3}$$

c) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[30\,;\,130]$, $x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $800x - 60\,000$.

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{60\,000}{800} = 75$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f.

$\boldsymbol{x}$	30		75		130
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{44}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{8}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{612}{169}$

d) La consommation est minimum pour la vitesse de $75\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Cette consommation vaut, arrondie au centième, 2,67 litres pour 100 km.

e) La valeur de la variable x à la fin de l'exécution de l'algorithme est 51.

En effet, $f(50) = 4$ et sur l'intervalle $[30\,;\,75]$ la fonction f est décroissante par conséquent l'algorithme s'arrête juste après 50 donc à 51.

Cela signifie que la consommation est strictement inférieure à 4 L aux 100 km lorsque la vitesse sera supérieure à $51\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Exploiter ses compétences

108 D'après le Doc. 2, $f(0) = 2{,}2$ et $f'(0) = 2$.

D'après le Doc. 3, $f(0) = c$ et $f'(0) = b$

On déduit que $c = 2{,}2$ et $b = 2$.

Ainsi $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 2{,}2$.

D'après le Doc. 3, le panier est à 3 m du joueur et se situe à 3,7 m du sol.

$f(3) = -0{,}5 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2{,}2 = 3{,}7$.

Le joueur a des chances de marquer son panier.

109 On étudie la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}) - \mathrm{P}$

$g(\mathrm{P}) = -0{,}025\mathrm{P}^2 + 3\mathrm{P}$

g est dérivable et $g'(\mathrm{P}) = -0{,}05\mathrm{P} + 3$

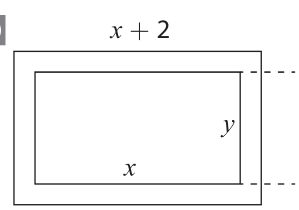
$g'(\mathrm{P}) = 0$ si et seulement si $\mathrm{P} = 60$

On dresse le tableau de variations de g.

P	0		60		$+\infty$
$g'(\mathrm{P})$		$+$	0	$-$	
$g(\mathrm{P})$	0	$\nearrow$	90	$\searrow$	

Le RMD est de 90 000 lièvres.

110



On note x et y les dimensions de la piscine.

On a donc $xy = 16$ donc $y = \dfrac{16}{x}$.

D'après le Doc. 1, la surface de la margelle est :

$2 \times 1 \times (x+2) + y \times 1 \times 2 = 2x + 4 + 2 \times \dfrac{16}{x}$

c'est-à-dire $2x + 4 + \dfrac{32}{x}$.

On note *f* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{32}{x}$.

$f'(x) = 2 - \dfrac{32}{x^2} = \dfrac{2(x^2-16)}{x^2} = \dfrac{2(x-4)(x+4)}{x^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-4$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 4$.

On dresse le tableau de variations de la fonction *f*.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	20	↗	

Louis utilisera donc $\dfrac{20}{0{,}25} = 80$ caillebotis.

2 bidons de 1 L coûtent 29,80 € pour un rendement de $24\ \text{m}^2$.

1 bidon de 2,5 L coûte 29,90 € pour un rendement de $30\ \text{m}^2$.

1 bidon de 5 L coûte 47,90 € pour un rendement de $40\ \text{m}^2$.

Louis doit donc prendre 2 bidons de 1 L.

111 D'après les Doc. 1 et 2, le bénéfice quotidien est :

$$B(x) = R(x) - 2 = -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x - 2$$

D'après le Doc. 3., $B'(x) = -2(x-1)^2(2x-5)$.

Pour tout x compris entre 0 et 10, $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc le signe de $B'(x)$ est celui de $-2(2x-5)$.

$B'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = \dfrac{5}{2}$.

On dresse le tableau de variations de R.

x	0		1		$\frac{5}{2}$		10
$R'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$R(x)$	-2	↗		↗	2,687 5	↘	$-5\,102$

La fonction R admet un maximum en 2,5 égal à 2,687 5.

Le bénéfice quotidien est donc maximum lorsque l'entreprise produit et vend 250 litres de parfum et il s'élève à 2 687,5 €.

6 Fonction exponentielle

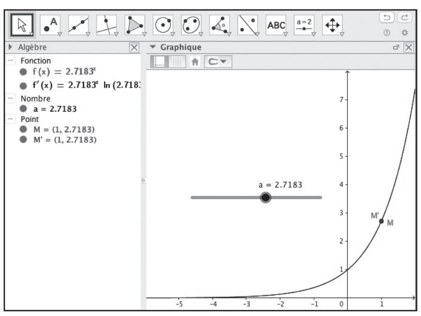
Découvrir

1 La fonction exponentielle

1 $f(0) = 1$.

2 Cette contrainte se traduit par :
pour tout nombre réel x, $f'(x) = f(x)$.

3 **a) b)**



c) $a \simeq 2{,}7183$.

2 Découvrir des propriétés de la fonction exponentielle

1

t	0	1	2	3
N(*t*)	1	2,718	7,389	20,086
t	4	5	6	7
N(*t*)	54,598	148,413	403,429	1 096,633

2 **a)** $N(2) \times N(3) = e^2 \times e^3 \approx 148{,}413$

$N(3) \times N(4) = e^3 \times e^4 \approx 1096{,}633$

$N(1) \times N(5) = e^1 \times e^5 \approx 403{,}429$

b) On remarque que :

$N(2) \times N(3) = N(5)$, $N(3) \times N(4) = N(7)$

$N(1) \times N(5) = N(6)$

Il semble que $e^a \times e^b = e^{a+b}$ où a et b désignent deux nombres réels.

3 **a)** $\dfrac{N(7)}{N(1)} = \dfrac{e^7}{e^1} \approx 403{,}429$

$\dfrac{N(5)}{N(4)} = \dfrac{e^5}{e^4} \approx 2{,}718$

$\dfrac{N(6)}{N(2)} = \dfrac{e^6}{e^2} \approx 54{,}598$

b) On remarque :

$\dfrac{N(7)}{N(1)} = N(6)$; $\dfrac{N(5)}{N(4)} = N(1)$ et $\dfrac{N(6)}{N(2)} = N(4)$.

Il semble que $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ où a et b désignent deux nombres réels.

Acquérir des automatismes

3 $f(x) = (5 + x)e^x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x,

$u(x) = 5 + x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v(x) = e^x$ $\qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \times e^x + (5 + x) \times e^x$

$f'(x) = e^x(1 + (5 + x))$

$f'(x) = e^x(6 + x)$

4 **a)** $f(x) = (2x - 5)e^x$

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = 2x - 5$ $\qquad u'(x) = 2$

$v(x) = e^x$ $\qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2 \times e^x + (2x - 5) \times e^x$

$f'(x) = e^x(2 + (2x - 5))$

$f'(x) = e^x(2x - 3)$

b) $g(t) = t\,\mathrm{e}^t$

La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t,

$u(t) = t$ $\quad$ $u'(t) = 1$

$v(t) = \mathrm{e}^t$ $\quad$ $v'(t) = \mathrm{e}^t$

$g'(t) = 1 \times \mathrm{e}^t + t \times \mathrm{e}^t$

$g'(t) = \mathrm{e}^t(1+t)$

5 **a)** $f(t) = 4\mathrm{e}^t - 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t, $f'(t) = 4\mathrm{e}^t$.

b) $g(x) = (-4x-5)\mathrm{e}^x + 10$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = -4x - 5$ $\quad$ $u'(x) = -4$

$v(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad$ $v'(x) = \mathrm{e}^x$

$g'(x) = -4 \times \mathrm{e}^x + (-4x-5) \times \mathrm{e}^x + 0$

$g'(x) = \mathrm{e}^x(-4 + (-4x-5))$

$g'(x) = \mathrm{e}^x(-4x-9)$

6 **a)** La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x^2$ $\quad$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad$ $v'(x) = \mathrm{e}^x$

$f'(x) = 2x \times \mathrm{e}^x + x^2 \times \mathrm{e}^x$

$f'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x)$

b) La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x^2 + 5x - 3$ $\quad$ $u'(x) = 2x + 5$

$v(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad$ $v'(x) = \mathrm{e}^x$

$g'(x) = (2x+5) \times \mathrm{e}^x + (x^2 + 5x - 3) \times \mathrm{e}^x$

$g'(x) = \mathrm{e}^x(2x + 5 + x^2 + 5x - 3)$

$g'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 7x + 2)$

7 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$f'(x) = 7 \times \mathrm{e}^{7x} = 7\mathrm{e}^{7x}$.

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$g'(x) = 1{,}5 \times 0{,}4 \times \mathrm{e}^{0{,}4x} = 0{,}6\mathrm{e}^{0{,}4x}$.

c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t,

$h'(t) = -70 \times (-0{,}1)\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 7\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

8 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = -0{,}00182 \times \left(-\frac{1}{7}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{7}x}$$

$$f'(x) = \frac{13}{50\,000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{7}x}$$

11 **a)** $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{10x-8} \times \mathrm{e}^{1-2x} = \mathrm{e}^{10x-8+1-2x} = \mathrm{e}^{8x-7}$

b) $\mathrm{B} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{4^{x+3}} = \mathrm{e}^{x+1-(4x+3)} = \mathrm{e}^{x+1-4x-3} = \mathrm{e}^{-3x-2}$

c) $\mathrm{C} = (\mathrm{e}^{5x+2})^2 = \mathrm{e}^{(5x+2)\times 2} = \mathrm{e}^{10x+4}$

12 **a)** $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2{,}5x} \times \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{0{,}5x-1}$

$\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2{,}5x+1} \times \mathrm{e}^{0{,}5x-1}$

$\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2{,}5x+1+0{,}5x-1}$

$\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2x}$

b) $\mathrm{B} = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^2}{\mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{9x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-2+9x}} = \mathrm{e}^{2x-(-2+9x)}$

$\mathrm{B} = \mathrm{e}^{2x+2-9x} = \mathrm{e}^{-7x+2}$

13 $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2a}(\mathrm{e}^{4a} - 1) - (\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{a})^2$

$\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2a+4a} - \mathrm{e}^{-2a} - (\mathrm{e}^{-a\times 2} + 2 \times \mathrm{e}^{-a+a} + \mathrm{e}^{a\times 2})$

$\mathrm{A} = \mathrm{e}^{2a} - \mathrm{e}^{-2a} - \mathrm{e}^{-2a} - 2\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{2a}$

$\mathrm{A} = -2$

14 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} = \mathrm{e}^{3(n+1)} = \mathrm{e}^{3n+3} = \mathrm{e}^{3n} \times \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^3 \times u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = \mathrm{e}^3$.

Son premier terme est $u_0 = \mathrm{e}^{3\times 0} = \mathrm{e}^0 = 1$.

b) $\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \ldots + u_5$

$\mathrm{S} = 1 + \mathrm{e}^3 + (\mathrm{e}^3)^2 + \ldots + (\mathrm{e}^3)^5$

$$\mathrm{S} = \frac{1 - (\mathrm{e}^3)^{5+1}}{1 - \mathrm{e}^3}$$

$$\mathrm{S} = \frac{1 - \mathrm{e}^{18}}{1 - \mathrm{e}^3}$$

15 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 2\mathrm{e}^{-0{,}5(n+1)} = 2\mathrm{e}^{-0{,}5n-0{,}5}$

$u_{n+1} = 2\mathrm{e}^{-0{,}5n} \times \mathrm{e}^{-0{,}5} = \mathrm{e}^{-0{,}5} \times u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-0{,}5}$.

Son premier terme est $u_0 = 2\mathrm{e}^{-0{,}5\times 0} = 2$.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$v_n = {u_n}^2 = (2\mathrm{e}^{-0{,}5n})^2 = 4\mathrm{e}^{-n}$

$v_{n+1} = 4\mathrm{e}^{-(n+1)} = 4\mathrm{e}^{-n-1} = 4\mathrm{e}^{-n} \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \times v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison e^{-1}.

Son premier terme est $v_0 = 4\mathrm{e}^{-0} = 4$.

18 **a)** La fonction *f* est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = 5x + 10 \qquad u'(x) = 5$

$v(x) = \mathrm{e}^x \qquad v'(x) = \mathrm{e}^x$

$f'(x) = 5 \times \mathrm{e}^x + (5x + 10) \times \mathrm{e}^x$

$f'(x) = \mathrm{e}^x(5 + 5x + 10)$

$f'(x) = \mathrm{e}^x(5x + 15)$.

b) Pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $5x + 15$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-5\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	

$5x + 15 = 0$

$5x = -15$

$x = -3$

$f(-3) = (5 \times (-3) + 10)\mathrm{e}^{-3} = -5\mathrm{e}^{-3}$.

19 **a)** La fonction *g* est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = -x \qquad u'(x) = -1$

$v(x) = \mathrm{e}^x \qquad v'(x) = \mathrm{e}^x$

$g'(x) = -1 \times \mathrm{e}^x + (-x) \times \mathrm{e}^x$

$g'(x) = \mathrm{e}^x(-1 - x)$.

b) Pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^7 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-1 - x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

$-1 - x = 0$

$-x = 1$

$x = -1$

$g(-1) = -(-1)\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$.

20 Les fonctions *f* et *g* sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel *t*,

$f'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$ et $g'(t) = -0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

Pour tout nombre réel *t*, $\mathrm{e}^{2t} > 0$ et $2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ et *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel *t*, $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$ et $-0{,}5 < 0$ donc $g'(t) < 0$ et *g* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc celle de la fonction *g* et $\mathscr{C}_2$ est celle de la fonction *f*.

21 **a)** $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{3+(-1)} = \mathrm{e}^2$

b) $\dfrac{(\mathrm{e}^4)^3}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{4\times3}}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{12}}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{12-2} = \mathrm{e}^{10}$

22 $A = \dfrac{\mathrm{e}^{4x+6}}{\mathrm{e}^{3-x}} = \mathrm{e}^{4x+6-(3-x)}$

$= \mathrm{e}^{4x+6-3+x} = \mathrm{e}^{5x+3}$

L'affirmation **(2)** est donc exacte.

23 $B = (\mathrm{e}^{5x+1})^2 = \mathrm{e}^{(5x+1)\times2} = \mathrm{e}^{10x+2}$

Florent a donc tort.

24 **a)** $\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^6 \times \mathrm{e}^{-5} = \mathrm{e}^{4+6+(-5)} = \mathrm{e}^5$

b) $\mathrm{e} \times (\mathrm{e}^3)^4 = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{3\times4} = \mathrm{e}^{1+12} = \mathrm{e}^{13}$

c) $\dfrac{(\mathrm{e}^{1,5})^2}{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^{1,5\times2}}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^1} = \mathrm{e}^{3-1} = \mathrm{e}^2$

d) $\dfrac{\mathrm{e}^{-0,4} \times \mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^{2,2}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-0,4+3}}{\mathrm{e}^{2,2}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2,6}}{\mathrm{e}^{2,2}} = \mathrm{e}^{2,6-2,2} = \mathrm{e}^{0,4}$

25 **a)** $\mathrm{e}^{12} \times \mathrm{e}^6 = \mathrm{e}^{18}$ **b)** $\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^9 = (\mathrm{e}^4)^2$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{14,5}}{\mathrm{e}^{1,5} \times \mathrm{e}^3} = \mathrm{e}^{10}$ **d)** $\mathrm{e} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{1,5}} = \mathrm{e}^{-0,5}$

26 $A = \dfrac{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{-5}} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-7}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2+5} \times 1}{\mathrm{e}^{-5+(-7)}} = \dfrac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^{-12}}$

$= \mathrm{e}^{7-(-12)} = \mathrm{e}^{19}$

Manon a donc tort.

27 $\dfrac{\mathrm{e}^{5,6} \times \mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^1} \times \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{0,3})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{5,6-4} \times 1}{\mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{0,3\times2}}$

$= \dfrac{\mathrm{e}^{1,6}}{\mathrm{e}^{1+0,6}} = \dfrac{\mathrm{e}^{1,6}}{\mathrm{e}^{1,6}} = \mathrm{e}^{1,6-1,6} = \mathrm{e}^0 = 1$

$(1 - \mathrm{e}^{-3})^2 - \mathrm{e}^{-5}(\mathrm{e}^5 - 2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-1})$

$= 1^2 - 2 \times 1 \times \mathrm{e}^{-3} + (\mathrm{e}^{-3})^2 - \mathrm{e}^{-5+5} + 2\mathrm{e}^{-5+2} - \mathrm{e}^{-5-1}$

$= 1 - 2\mathrm{e}^{-3} + \mathrm{e}^{-6} - \mathrm{e}^0 + 2\mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^{-6}$

$= 1 - 1$

$= 0$

28 **a)** $A = \mathrm{e}^{1-x} \times \mathrm{e}^{3x-2} = \mathrm{e}^{1-x+3x-2} = \mathrm{e}^{2x-1}$

b) $B = \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{3-5x} + \mathrm{e}^{2x+3-5x+1} = \mathrm{e}^{-3x+4}$

c) $C = (\mathrm{e}^x)^2 \times \mathrm{e}^{7+4x} = \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{7+4x} = \mathrm{e}^{2x+7+4x}$

$C = \mathrm{e}^{6x+7}$

d) $D = (\mathrm{e}^{2x})^3 \times \mathrm{e}^{-3} = \mathrm{e}^{6x} \times \mathrm{e}^{-3} = \mathrm{e}^{6x-3}$

29 **a)** $A = (\mathrm{e}^{t+1})^3 = \mathrm{e}^{(t+1)\times3} = \mathrm{e}^{3t+3}$

b) $B = (\mathrm{e}^{-2-3t})^{10} = \mathrm{e}^{(-2-3t)\times10} = \mathrm{e}^{-20-30t}$

c) $C = (\mathrm{e}^{0,6+1,4t})^2 = \mathrm{e}^{(0,6+1,4t)\times2} = \mathrm{e}^{1,2+2,8t}$

d) $D = (\mathrm{e}^{t^2+t-1})^2 = \mathrm{e}^{(t^2+t-1)\times2} = \mathrm{e}^{2t^2+2t-2}$

30 **a)** $A = \dfrac{e^{5a+7}}{e^{3a}} = e^{5a+7-3a} = e^{2a+7}$

b) $B = \dfrac{e^{4a+1}}{e^{-9}} = e^{4a+1-(-9)} = e^{4a+10}$

c) $C = \dfrac{e^{-3a}}{e^{1-4a}} = e^{-3a-(1-4a)} = e^{-3a-1+4a}$

$= e^{a-1}$

d) $D = \dfrac{e^{2a+1}}{e^{1-a}} = e^{2a+1-(1-a)} = e^{2a+1-1+a}$

$= e^{3a}$

31 **a)** $A = \dfrac{e^{x} \times e^{3x}}{e^{-x} \times e^{4x}} = \dfrac{e^{x+3x}}{e^{-x+4x}} = \dfrac{e^{4x}}{e^{3x}}$

$= e^{4x-3x} = e^{x}$

b) $B = \dfrac{(e^{-x})^3}{e^{x+4}} = \dfrac{e^{-x\times 3}}{e^{x+4}} = \dfrac{e^{-3x}}{e^{x+4}}$

$= e^{-3x-(x+4)} = e^{-3x-x-4} = e^{-4x-4}$

c) $C = (e^{0,5x})^2 \times \dfrac{1}{e^{x}} = e^{0,5x\times 2} \times e^{-x}$

$= e^{x} \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^{0} = 1$

d) $D = \dfrac{e^{3x} \times e^{6}}{e \times e^{4x}} \times e^{-5} = \dfrac{e^{3x+6+(-5)}}{e^{1+4x}}$

$= \dfrac{e^{3x+1}}{e^{1+4x}} = e^{3x+1-(1+4x)}$

$= e^{3x+1-1-4x} = e^{-x}$

32 **a)** $e^{x} \times e^{x} = e^{x+x} = e^{2x} \neq e^{x^2}$

La proposition est donc fausse.

b) $e^{0} \times e = e^{0} \times e^{1} = e^{0+1} = e^{1} \neq e^{0}$

La proposition est donc fausse.

c) $\dfrac{1}{e^{x} \times e^{-2}} \times e^{x} = \dfrac{e^{x}}{e^{x-2}} = e^{x-(x-2)}$

$= e^{x-x+2} = e^{2} \neq e^{-2}$

La proposition est donc fausse.

d) $\dfrac{1}{e^{3x}} = \dfrac{e^{0}}{e^{3x}} = e^{0-3x} = e^{-3x}$

La proposition est donc vraie.

33 **a)** $A = (e^{t} - 1)^2 = (e^{t})^2 - 2 \times e^{t} \times 1 + 1^2$

$= e^{2t} - 2e^{t} + 1$

b) $B = e^{2t}(e^{t} - e^{-2t}) = e^{2t} \times e^{t} - e^{2t} \times e^{-2t}$

$= e^{3t} - e^{0} = e^{3t} - 1$

c) $C = 3e^{t}(e^{t} - e^{-t}) - 5e^{2t}$

$= 3e^{t} \times e^{t} - 3e^{t} \times e^{-t} - 5e^{2t}$

$= 3e^{2t} - 3e^{0} - 5e^{2t}$

$= -2e^{2t} - 3$

34 **a)** $1 - \dfrac{(e^{x} - 1)^2}{e^{2x}} = 1 - \dfrac{(e^{x})^2 - 2 \times 1 \times e^{x} + 1^2}{e^{2x}}$

$= 1 - \dfrac{e^{2x} - 2e^{x} + 1}{e^{2x}} = \dfrac{e^{2x} - e^{2x} + 2e^{x} - 1}{e^{2x}}$

$= \dfrac{2e^{x} - 1}{e^{2x}}$

b) $\dfrac{1}{e^{x}} + \dfrac{3 - e^{x}}{e^{2x}} = \dfrac{1 \times e^{x}}{e^{x} \times e^{x}} + \dfrac{3 - e^{x}}{e^{2x}} = \dfrac{e^{x} + 3 - e^{x}}{e^{2x}}$

$= \dfrac{3}{e^{2x}}$

35 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} = -3e^{1,1(n+1)} = -3e^{1,1n+1,1}$

$u_{n+1} = -3e^{1,1n} \times e^{1,1} = e^{1,1} \times u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $e^{1,1}$.

Son premier terme est $u_0 = -3e^{1,1\times 0} = -3e^{0} = -3$.

36 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$v_{n+1} = \dfrac{1}{3}e^{5-0,6(n+1)} = \dfrac{1}{3}e^{5-0,6n-0,6}$

$v_{n+1} = \dfrac{1}{3}e^{5-0,6n} \times e^{-0,6} = e^{-0,6} \times v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $e^{-0,6}$

et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}e^{5-0,6\times 0} = \dfrac{1}{3}e^{5}$.

37 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^{x}$.

38 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -0,1e^{x}$.

L'affirmation **(2)** est exacte.

39 Les fonctions f, g, h, i, j et k sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

a) $f'(x) = e^{x}$

b) $g'(x) = 2,7e^{x}$

c) $h'(x) = 5e^{x} + 1$

d) $i'(x) = 3 - 3e^{x}$

e) $j'(x) = 15x^2 - 9e^{x}$

f) $k'(x) = -e^{x}$

40 **a)** La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t,

$u(t) = 1 - t$ $\quad u'(t) = -1$

$v(t) = e^{t}$ $\quad v'(t) = e^{t}$

$f'(t) = -1 \times e^{t} + (1 - t) \times e^{t}$

$f'(t) = e^{t}(-1 + 1 - t)$

$f'(t) = -t\,e^{t}$

172909_Chap06_000-000.indd 92 25/07/2019 19:20:56

41 Les fonctions f, g et h sont les produits de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,

a) $u(x) = 2x - 7$ $\quad u'(x) = 2$
$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2 \times e^x + (2x - 7) \times e^x$

$f'(x) = e^x(2 + 2x - 7)$

$f'(x) = e^x(2x - 5)$

b) $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$

$g'(x) = e^x(1 + x)$

c) $u(x) = 3x^2 - 2$ $\quad u'(x) = 6x$
$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$h'(x) = 6x \times e^x + (3x^2 - 2) \times e^x$

$h'(x) = e^x(6x + 3x^2 - 2)$

$h'(x) = e^x(3x^2 + 6x - 2)$

42 La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0{,}5\,;+\infty[$ donc dérivable sur $[0{,}5\,;+\infty[$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0{,}5\,;+\infty[$,
$u(x) = e^x$ $\quad u'(x) = e^x$
$v(x) = x$ $\quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

43 **a)** La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$u(x) = 3x + 1$ $\quad u'(x) = 3$
$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$$f'(x) = \frac{3 \times e^x - (3x+1) \times e^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(3 - 3x - 1)}{(e^x)^2} = \frac{2 - 3x}{e^x}$$

b) La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t,
$u(t) = 1 + e^t$ $\quad u'(t) = e^t$
$v(t) = e^t$ $\quad v'(t) = e^t$

$$f'(t) = \frac{e^t \times e^t - (1 + e^t) \times e^t}{(e^t)^2}$$

$$= \frac{e^t(\cancel{e^t} - 1 - \cancel{e^t})}{(e^t)^2} = \frac{-e^t}{(e^t)^2} = -\frac{1}{e^t}$$

44 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 5 \times e^{5x} = 5e^{5x}$

45 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = -5{,}8 \times e^{-5{,}8x+1} = -5{,}8e^{-5{,}8x+1}$
L'affirmation **(3)** est donc exacte.

46 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 0{,}7 \times e^{0{,}7x-8} = 0{,}7e^{0{,}7x-8}$
b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 6 \times 2 \times e^{2x} + 1 = 12e^{2x} + 1$
c) La fonction h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$u(x) = 2x + 1$ $\quad u'(x) = 2$
$v(x) = e^{-0{,}2x}$ $\quad v'(x) = -0{,}2 \times e^{-0{,}2x}$

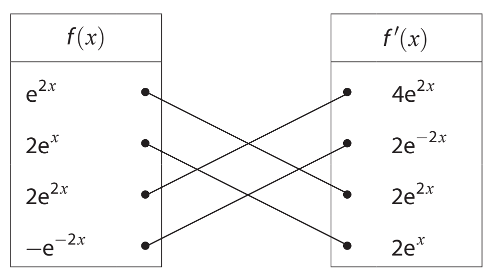
$h'(x) = 2 \times e^{-0{,}2x} + (2x+1) \times (-0{,}2e^{-0{,}2x})$

$h'(x) = e^{-0{,}2x}(2 + (2x+1) \times (-0{,}2))$

$h'(x) = e^{-0{,}2x}(2 - 0{,}4x - 0{,}2)$

$h'(x) = e^{-0{,}2x}(1{,}8 - 0{,}4x)$

47



48 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t,

$$f'(t) = 4{,}1 \times \left(-\frac{7}{3}\right) \times e^{-\frac{7}{3}t}$$

$$f'(t) = \frac{-28{,}7}{3} e^{-\frac{7}{3}t} = \frac{-287}{30} e^{-\frac{7}{3}t}$$

49 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x,
$u(x) = e^{-2x+1}$ $\quad u'(x) = -2e^{-2x+1}$
$v(x) = e^{5x-4}$ $\quad v'(x) = 5e^{5x-4}$

$$f'(x) = \frac{-2e^{-2x+1} \times e^{5x-4} - e^{-2x+1} \times 5e^{5x-4}}{(e^{5x-4})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-7e^{5x-4} \times e^{-2x+1}}{(e^{5x-4})^2} = \frac{-7e^{-2x+1}}{e^{5x-4}}$$

$f'(x) = -7e^{-2x+1-(5x-4)} = -7e^{-7x+5}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{-2x+1}}{e^{5x-4}} = e^{-2x+1-(5x-4)} = e^{-7x+5}$

Ainsi $f'(x) = -7e^{-7x+5}$

50 **a)** La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$f'(x) = 2e^{2x}$.

Or pour tout nombre réel x, $e^{2x} > 0$ et $2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

La fonction *f* est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et l'affirmation est exacte.

b) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$f'(x) = -3e^{-3x}$.

Or pour tout nombre réel x, $e^{-3x} > 0$ et $-3 < 0$.

Ainsi $f'(x) < 0$ et la fonction *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation est donc fausse.

51 Pour tout nombre réel x, $6{,}3 > 0$ et $e^{-2x} > 0$ donc $f'(x) > 0$.

La fonction *f* est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et Pauline a raison.

52 La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$g'(x) = 5 \times (-4{,}5)e^{-4{,}5x} = -22{,}5e^{-4{,}5x}$.

Or pour tout nombre réel x, $-22{,}5 < 0$ et $e^{-4{,}5x} > 0$ donc $g'(x) < 0$.

La fonction *g* est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

53 **a)** La fonction *f* est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = 6x - 2$ $\quad$ $u'(x) = 6$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = 6 \times e^x + (6x - 2) \times e^x$

$f'(x) = e^x(6 + 6x - 2)$

$f'(x) = e^x(4 + 6x)$

b) Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $4 + 6x$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$4 + 6x = 0$

$6x = -4$

$x = \dfrac{-4}{6}$

c) La fonction *f* est donc décroissante sur $\left]-\infty\,; -\dfrac{2}{3}\right[$ et croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{3}\,; +\infty\right[$.

54 **a)** La fonction *f* est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = 4 - 3x$ $\quad$ $u'(x) = -3$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = -3 \times e^x + (4 + 3x) \times e^x$

$f'(x) = e^x(-3 + 4 - 3x)$

$f'(x) = e^x(1 - 3x)$

$f'(x) = -e^x(3x - 1)$

b) Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 3x$.

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$1 - 3x = 0$

$-3x = -1$

$x = \dfrac{-1}{-3}$

c)

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$	↘	

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 4{,}2$

55 La fonction *f* est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x^2 - 4$ $\quad$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2x \times e^x + (x^2 - 4) \times e^x$

$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 4)$

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 4$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-1-\sqrt{5})$	↘	$f(-1+\sqrt{5})$	↗	

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 20$

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{20}}{2} = -1 - \sqrt{5}$

$x_2 = -1 + \sqrt{5}$

$f(-1-\sqrt{5}) \approx 0{,}25$

$f(-1+\sqrt{5}) \approx -8{,}51$

56 La fonction g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[1;3]$, donc g est dérivable sur $[1;3]$.
Pour tout nombre réel t,

$u(t) = e^t$ $\qquad u'(t) = e^t$

$v(t) = 2t$ $\qquad v'(t) = 2$

$$g'(t) = \frac{e^t \times 2t - e^t \times 2}{(e^t)^2} = \frac{e^t(2t-2)}{(e^t)^2} = \frac{2t-2}{e^t}$$

Pour tout nombre réel t de $[1;3]$, $e^t > 0$, $g'(t)$ est donc du signe de $2t - 2$.

t	1		3
$g'(t)$	0	+	
$g(t)$	$\frac{e^1}{2}$	↗	$\frac{e^3}{6}$

$2t - 2 = 0$

$2t = 2$

$t = \frac{2}{2} = 1$

57 La fonction h est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x^2 + 2x$ $\qquad u'(x) = 2x + 2$

$v(x) = e^x$ $\qquad v'(x) = e^x$

$$h'(x) = \frac{(2x+2) \times e^x - (x^2+2x) \times e^x}{(e^x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(2x + 2 - x^2 - 2x)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+2}{e^x}$$

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$, $g'(t)$ est donc du signe de $-x^2 + 2$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	
$h(x)$		↘	$h(-\sqrt{2})$	↗	$h(\sqrt{2})$	↘	

$-x^2 + 2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

$h(-\sqrt{2}) \approx -3{,}41$

$h(\sqrt{2}) \approx 1{,}17$

58 $f(1) = e^1$ $\qquad g(1) = e^{-0,5}$ $\qquad h(1) = e^{0,1}$

$-0{,}5 < 0{,}1 < 1$

Or la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{-0,5} < e^{0,1} < e^1$

$g(1) < h(1) < f(1)$.

La courbe $\mathscr{C}_3$ est donc la courbe représentative de la fonction f, la courbe $\mathscr{C}_1$ est celle de la fonction h et la courbe $\mathscr{C}_2$ est celle de la fonction g.

59 Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;1{,}5]$, $2t < 3t$

Or la fonction exponentielle est croissante sur l'intervalle $[0;1{,}5]$ donc $e^{2t} < e^{3t}$ et $f(t) < g(t)$.

La fonction f est donc représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$ et la fonction g par la courbe $\mathscr{C}_2$.

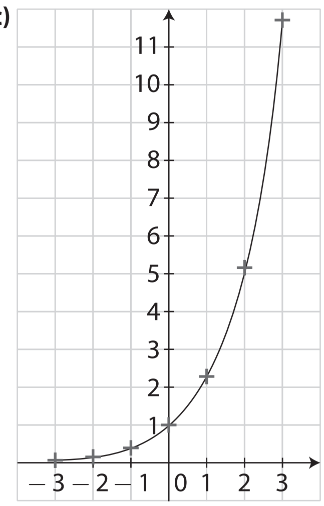
60 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$f'(x) = 0{,}82e^{0,82x}$.

Pour tout nombre réel x, $e^{0,82x} > 0$ et $0{,}82 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

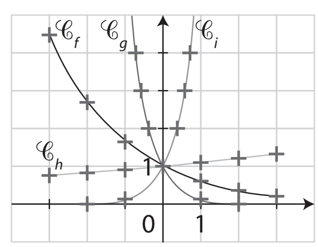
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,09	0,19	0,44	1	2,27	5,16	11,71

c)



Échelle : $\frac{1}{2}$

61



62 La fonction h est le quotient de deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[-3;1]$, h est donc dérivable sur l'intervalle $[-3;1]$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-3;1]$,

$u(x) = 5 - 4x$ $\qquad u'(x) = -4$

$v(x) = e^x$ $\qquad v'(x) = e^x$

$h'(x) = -4 \times e^x + (5 - 4x) \times e^x$

$h'(x) = e^x(-4 + 5 - 4x)$

$h'(x) = e^x(1 - 4x)$

b) Pour tout nombre réel x de $[-3;1]$, $e^x > 0$, $h'(x)$ est du signe de $1 - 4x$.

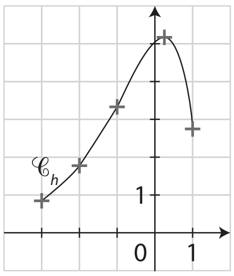
x	-3		$0{,}25$		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$17\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{0{,}25}$	$\searrow$	e^{1}

$1-4x=0$

$4x=1$

$x=\dfrac{1}{4}$

c)



63 $f(5)\approx 13{,}5$ ce qui signifie qu'à 5 h il y a 13,5 mg de médicament dans le sang.

$f(13{,}5)=100\mathrm{e}^{-0{,}4\times 13{,}5}\approx 0{,}45$

Au bout de 13 h 30, la quantité de médicament est de 0,45 mg.

Stéphane a donc tort.

64 La fonction f semble admettre un maximum égal à 23, atteint en $x=3$.

Le bénéfice maximum est donc d'environ 2 300 €.

L'affirmation **(1)** est exacte.

65 **a)** La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$,

$f'(x)=1013{,}25\times(-0{,}12)\mathrm{e}^{-0{,}12x}$

$f'(x)=-121{,}59\mathrm{e}^{-0{,}12x}$

Or pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^{-0{,}12x}>0$ et $-121{,}59<0$ donc $f'(x)<0$.

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $[0\,;10]$.

Ainsi plus l'altitude x augmente, plus la pression atmosphérique diminue.

b) À partir de 9 m, l'altitude reste inférieure à 350 hectopascals.

66 **a)** La fonction f modélise la valeur de la machine, en milliers d'euros, t années après l'acquisition de celle-ci.

b) En tabulant f à l'aide de la calculatrice on obtient : $f(6{,}9)\simeq 5{,}0158$ et $f(7)\simeq 4{,}9659$.

C'est donc au bout de 7 ans que la machine aura perdu la moitié de sa valeur.

67 **a)** $f(0)=35\mathrm{e}^{-1{,}6\times 0}-30=35\times\mathrm{e}^{0}-30=5$.

La température des frites à l'entrée du tunnel est de 5 °C.

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$ et pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;5]$,

$f'(t)=35\times(-1{,}6)\mathrm{e}^{-1{,}6t}$

$f'(t)=-56\mathrm{e}^{-1{,}6t}$

Pour tout nombre réel t de $[0\,;5]$, $-56<0$ et $\mathrm{e}^{-1{,}6t}>0$, donc $f'(t)<0$.

La température des frites est donc décroissante.

c) $f(1{,}5)=35\mathrm{e}^{-1{,}6\times 1{,}5}-30\simeq -26{,}8$

$f(1{,}5)<-24$

La température sera donc conforme.

68 **a)** Il semble que la fonction f admette un maximum en $x=1{,}5$.

Il faut donc vendre environ 150 parois de douche pour réaliser un bénéfice maximum.

b) $f(1{,}5)=(5-2\times 1{,}5)\mathrm{e}^{1{,}5}=2\mathrm{e}^{1{,}5}\simeq 8{,}963$.

Le bénéfice maximum est de 8 963 €.

69 **1.** C **2.** B **3.** A **4.** C **5.** D

70 **1.** B, C, D **2.** A, D **3.** A, B

71 **1. L'affirmation est vraie.**

En effet,

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}\times(\mathrm{e}^{-x+1})^{2}}{\mathrm{e}^{-x+4}}=\frac{\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-2x+2}}{\mathrm{e}^{-x+4}}=\frac{\mathrm{e}^{x-2x+2}}{\mathrm{e}^{-x+4}}$$

$\mathrm{e}^{-x+2-(-x+4)}=\mathrm{e}^{-x+2+x-4}=\mathrm{e}^{-2}$

La fonction g est donc une fonction constante.

2. L'affirmation est vraie.

En effet, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1}=5\mathrm{e}^{0{,}1(n+1)-1}=5\mathrm{e}^{0{,}1n+0{,}1-1}$

$u_{n+1}=5\mathrm{e}^{0{,}1n-1}\times\mathrm{e}^{0{,}1}$

$\quad=\mathrm{e}^{0{,}1}u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q=\mathrm{e}^{0{,}1}$ et de premier terme :

$$u_0=5\mathrm{e}^{0{,}1\times 0-1}=5\mathrm{e}^{-1}=\frac{5}{\mathrm{e}^{1}}.$$

3. L'affirmation est fausse.

En effet, $f(-2)\simeq -0{,}812$, $f(-1{,}9)\simeq -0{,}8376$ et donc $f(-1{,}9)<f(-2)$.

4. L'affirmation est fausse.

En effet, pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$.

72 **a)** $\mathrm{e}^{6}\times\mathrm{e}^{4}=\mathrm{e}^{6+4}=\mathrm{e}^{10}$

b) $(\mathrm{e}^{-1{,}5})^{4}=\mathrm{e}^{-1{,}5\times 4}=\mathrm{e}^{-6}$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{11}}{\mathrm{e}^{6}}=\mathrm{e}^{11-6}=\mathrm{e}^{5}$

d) $\mathrm{e}^{5x+6}\times\mathrm{e}^{-8x}=\mathrm{e}^{5x+6-8x}=\mathrm{e}^{-3x+6}$

e) $(\mathrm{e}^{4x-3})^2 = \mathrm{e}^{2(4x-3)} = \mathrm{e}^{8x-6}$

f) $\dfrac{\mathrm{e}^{7x}}{\mathrm{e}^{x+5}} = \mathrm{e}^{7x-(x+5)} = \mathrm{e}^{7x-x-5} = \mathrm{e}^{6x-5}$

73 Les fonctions f, g, h et i sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

a) Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 5\mathrm{e}^x$

b) Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 3{,}6 \times (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5x} = -1{,}8\mathrm{e}^{-0{,}5x}$

c) Pour tout nombre réel x,
$u(x) = 3x + 5$ $\quad u'(x) = 3$
$v(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

$h'(x) = 3 \times \mathrm{e}^x + (3x+5) \times \mathrm{e}^x$

$h'(x) = \mathrm{e}^x(3 + 3x + 5)$

$h'(x) = \mathrm{e}^x(3x + 8)$

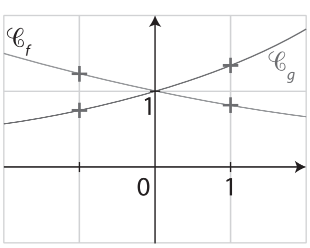
d) Pour tout nombre réel x,
$u(x) = 2x$ $\quad u'(x) = 2$
$v(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

$$i'(x) = \frac{2 \times \mathrm{e}^x - 2x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(2-2x)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{2-2x}{\mathrm{e}^x}$$

74 Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $25 - 10x$.

x	$-\infty$		2,5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

75



76 On résout graphiquement $f(x) \geqslant 2$.
On obtient comme ensemble solutions l'intervalle $[5\,;8]$.
En tabulant la fonction f avec la calculatrice avec un pas de 0,001 on obtient $f(5{,}198) < 2$ et $f(5{,}199) > 2$.
C'est donc à partir de 5 199 personnes connectées simultanément que la durée de chargement dépasse 2 s.

S'entraîner

78 **a)**

$t \geqslant 50$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
n	0	1	2	3	4	5	6	7	–
t	100	89,6	80,3	71,9	64,4	57,7	51,7	46,3	–

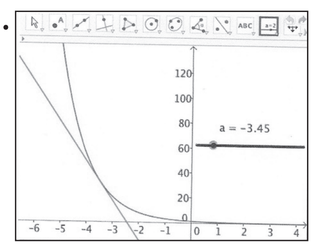
b) La valeur de n obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme est 7.
Cela signifie que le ventilateur s'arrête au bout de 7 minutes.

79

$s \leqslant 3{,}9$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
n	0	1	2	3	4	5	6
s	0,12	0,51	0,89	1,3	1,6	2,0	2,4
$s \leqslant 3{,}9$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	
n	7	8	9	10	11	–	
s	2,7	3,1	3,5	3,8	4,2	–	

b) La valeur de n obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme est $n = 11$.
Cela signifie que l'eau n'est plus utilisable 11 minutes après le début de l'incident.

81 **1.**



Il semble que, quel que soit le nombre réel a, la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la tangente T.

2. a) Une équation de la tangente T est :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
c'est-à-dire $y = -\mathrm{e}^{-a}(x-a) + \mathrm{e}^{-a}$.

b) La fonction d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $d'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-a}$.
Or, $d'(x) \leqslant 0$ si, et seulement si, $-\mathrm{e}^{-x} \geqslant -\mathrm{e}^{-a}$,
soit $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-a}$,
c'est-à-dire $-x \leqslant -a$ et $x \geqslant a$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$d'(x)$		−	0	+	
$d(x)$		↘	0	↗	

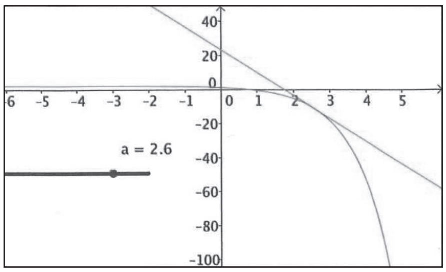
Ainsi, pour tout nombre réel x, $d(x) \geqslant 0$.

c) Quel que soit le nombre réel a et pour tout nombre réel x,

$e^{-x} \geqslant -e^{-a}(x-a)+e^{-a}$.

Ainsi, quel que soit le nombre réel a, la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la tangente T.

82 **1.**



Il semble que, quel que soit le nombre réel a, la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessous de la tangente T.

2. a) Une équation de la tangente T est :

$y = g'(a)(x-a)+g(a)$

$y = -e^{-a}(x-a)+2-e^{a}$.

b) La fonction d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $d'(x) = -e^{x}+e^{a}$.

$d'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si $-e^{x} \geqslant -e^{a}$, soit $e^{x} \leqslant e^{a}$,

c'est-à-dire $x \leqslant a$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
$d(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, pour tout nombre réel x, $d(x) \leqslant 0$.

c) Quel que soit le nombre réel a et pour tout nombre réel x,

$-e^{x} \leqslant -e^{a}(x-a)-e^{a}$

donc $2-e^{x} \leqslant -e^{a}(x-a)+2-e^{a}$.

Quel que soit le nombre réel a, la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessous de la tangente T.

83 Pour tout nombre réel x,

$$\frac{(e^{x}-1)(e^{x}+1)}{e^{2x}} = \frac{(e^{x})^2-1^2}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}} = 1-e^{-2x}$$

84 Pour tout nombre réel t,

$f(t)-g(t) = e^{at}-e^{bt}$

$f(t)-g(t) \geqslant 0$ si, et seulement si $e^{at}-e^{bt} \geqslant 0$

soit $e^{at} \geqslant e^{bt}$ c'est-à-dire $at \geqslant bt$ ou encore $(a-b)t \geqslant 0$.

• Si $a<b$ alors $a-b<0$ et on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(a-b)t$		$+$	0	$-$	

• Si $a>b$ alors $a-b>0$ et on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(a-b)t$		$-$	0	$+$	

Ainsi :

• Si $a>b$, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont confondues.

• Si $a<b$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$,

$\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en $t=0$.

• Si $a>b$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en $t=0$.

85 Christophe pense que les deux courbes qu'il a tracées à l'écran de sa calculatrice sont confondues sur l'intervalle $]-\infty\,;-3]$.

Fatima pense qu'une exponentielle peut être nulle.

$5(1+e^{4x+7}) = 5$

c'est-à-dire $1+e^{4x+7} = 1$ donc $e^{4x+7} = 0$ ce qui est impossible.

L'équation n'a donc aucune solution.

86 **a)** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = 3-x$ $\qquad u'(x) = -1$

$v(x) = e^{x}$ $\qquad v'(x) = e^{x}$

$g'(x) = -1\times e^{x}+(3-x)\times e^{x}$

$g'(x) = e^{x}(-1+3-x)$

$g'(x) = e^{x}(2-x)$

b) Pour tout nombre réel x, $e^{x}>0$, donc $g'(x)$ est du signe de $2-x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	e^2	$\searrow$	

c) Une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est :

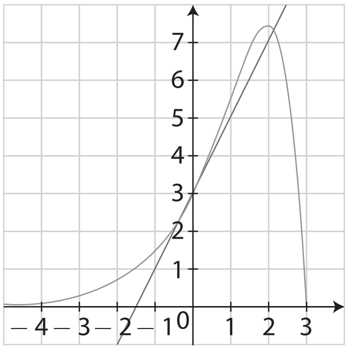
T_0 : $y = g'(0)(x-0)+g(0)$

$y = 2x+3$

En effet $g'(0) = e^{0}(2-0) = 2$ et

$g(0) = (3-0)e^{0} = 3$.

d)



87 **a)** Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$u(x) = 2 - x$ $\quad$ $u'(x) = -1$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = -1 \times e^x + (2 - x) \times e^x$

$f'(x) = e^x(-1 + 2 - x)$

$f'(x) = e^x(1 - x)$

$u(x) = x^2$ $\quad$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$g'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x$

$g'(x) = e^x(x^2 + 2x)$

b) Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ et $g'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	

et

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

c) La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$, la courbe $\mathscr{C}_2$ est donc celle de la fonction f et la courbe $\mathscr{C}_1$ est celle de la fonction g.

88 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x^2 + 1$ $\quad$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$$f'(x) = \frac{2x \times e^x - (x^2 + 1) \times e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(2x - x^2 - 1)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x} = \frac{-(x-1)^2}{e^x}$$

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $\dfrac{-(x-1)^2}{e^x} \leqslant 0$.

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

89 Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $-20x^2 + 43x - 2{,}1$.

x	$-\infty$		0,05		2,1		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

$-20x^2 + 43x - 2{,}1 = 0$

$\Delta = 1681$

$$x_1 = \frac{-43 - \sqrt{1681}}{2 \times (-20)} = 2{,}1$$

$$x_2 = \frac{-43 + \sqrt{1681}}{2 \times (-20)} = 0{,}05$$

Ainsi $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0{,}05\ ;\ 2{,}1]$ et $f(x) < 0$ sinon.

90 **a)** f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 3]$,

$u(x) = \dfrac{1}{4}(x - 4)$ $\quad$ $u'(x) = \dfrac{1}{4}$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{4} \times e^x + \frac{1}{4}(x - 4) \times e^x$$

$$f'(x) = e^x\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - 1\right)$$

$$f'(x) = e^x\left(\frac{-3}{4} + \frac{1}{4}x\right)$$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 3]$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\dfrac{-3}{4} + \dfrac{1}{4}x$.

x	0		3
$f'(x)$		−	0
$f(x)$		↘	

$\dfrac{-3}{4} + \dfrac{1}{4}x = 0$

$\dfrac{1}{4}x = \dfrac{3}{4}$

$x = 3$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

L'affirmation est donc vraie.

b) La tangente T a pour équation :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = -\dfrac{3}{4}x + 4$

L'affirmation est donc fausse.

c) La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$$y = \frac{-e^2}{4}(x - 2) + 5 - \frac{e^2}{2}$$

$$= \frac{-e^2}{4}x + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + 5 = \frac{-e^2}{4}x + 5$$

L'affirmation est donc fausse.

91 La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 1{,}5]$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-4\ ;\ 1{,}5]$,

$u(x) = -2x^2 + 3x$ $\quad u'(x) = -4x + 3$

$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$f'(x) = (-4x+3) \times e^x + (-2x^2+3x) \times e^x$

$f'(x) = e^x(-2x^2 - x + 3)$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-4\ ;\ 1{,}5]$, $e^x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-2x^2 - x + 3$.

x	-4		$-1{,}5$		1		$1{,}5$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-4)$	$\searrow$	$f(-1{,}5)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

$-2x^2 - x + 3 = 0$

$\Delta = 25$

$x_1 = \dfrac{1-5}{-4} = 1$

$x_2 = \dfrac{1+5}{-4} = -1{,}5$

$f(-4) \approx -0{,}81$

$f(-1{,}5) \approx -2{,}01$

$f(1) \approx 2{,}72$

Une fenêtre graphique adéquate est alors :

$x_{\text{min}} = -4$

$x_{\text{max}} = 1{,}5$

$y_{\text{min}} = -2{,}1$

$y_{\text{max}} = 2{,}8$

92 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$f'(x) = 1{,}5 \times 1{,}6e^{1{,}6x} = 2{,}4e^{1{,}6x}$

b) Pour tout nombre réel x, $e^{1{,}6x} > 0$ et $2{,}4 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout nombre réel x, $e^{1{,}6x} > 0$ et $1{,}5 > 0$ donc $f(x) > 0$.

93 **a)** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t,

$g'(t) = 0{,}2 \times (-1)e^{-t} = -0{,}2e^{-t}$

b) Pour tout nombre réel t, de $e^{-t} > 0$ et $-0{,}2 < 0$ donc $g'(t) < 0$.

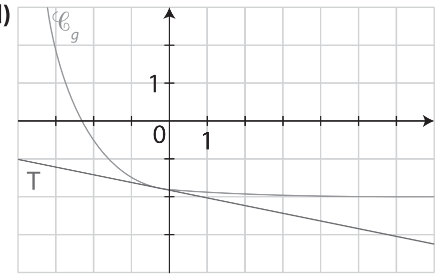
La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) La tangente T a pour équation :

$y = g'(0)(t-0) + g(0)$

$y = -0{,}2t + 0{,}2 - 2 = -0{,}2t - 1{,}8$

d)



94 **a)** $f(0) = 3 - 2e^{-5\times 0} = 3 - 2e^0 = 1$

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$,

$$f'(x) = -2 \times (-5) \times e^{-5x} = 10e^{-5x}$$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $e^{-5x} > 0$ et $10 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

c) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, donc pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:

$f(x) \geqslant f(0)$ soit $f(x) \geqslant 1$.

La fonction f est donc strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

d) $f(x) = 3$ lorsque $3 - 2e^{-5x} = 3$

c'est-à-dire $-2e^{-5x} = 0$ ou encore $e^{-5x} = 0$ ce qui est impossible.

L'équation $f(x) = 3$ n'admet donc aucune solution.

95 **1. a)** Il a voulu résoudre l'équation $2 + e^{5x} = 10$.

b) L'équation admet une solution α.

$0{,}41 < \alpha < 0{,}42$.

2. L'équation $e^{-0{,}55x-4} = 2$ a pour solution $x \simeq -8{,}5$.

96 **a)** $g'(0) = \dfrac{-1}{2}$

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel t,

$g'(t) = ke^{kt}$

c) $g'(0) = ke^0 = k = -\dfrac{1}{2}$ et $g(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$.

97 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 5e^{-0{,}2(n+1)} = 5e^{-0{,}2n-0{,}2}$

$u_{n+1} = 5e^{-0{,}2n} \times e^{-0{,}2} = e^{-0{,}2}u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $e^{-0{,}2}$ et de premier terme $u_0 = 5e^0 = 5$.

b) $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_6$

$S = 5 + 5e^{-0{,}2} + 5(e^{-0{,}2})^2 + \ldots + 5(e^{-0{,}2})^6$

$S = 5(1 + e^{-0{,}2} + (e^{-0{,}2})^2 + \ldots + (e^{-0{,}2})^6)$

$S = 5 \times \dfrac{1-(e^{-0{,}2})^{6+1}}{1-e^{-0{,}2}} = 5 \times \dfrac{1-e^{-1{,}4}}{1-e^{-0{,}2}}$

Ainsi $S \simeq 20{,}781$

L'écrivain a vendu 20 781 livres de 2012 à 2018.

172909_Chap06_000-000.indd 100 25/07/2019 19:32:59

98 **Partie A**

a) $f(1) = 10(1 - e^{-0,3}) \approx 2,59$

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$.

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;5]$,

$f'(t) = 10 \times (0 - (-0,3)e^{-0,3t}) = 3e^{-0,3t}$.

Pour tout nombre réel t de $[0\,;5]$, $e^{-0,3t} > 0$ et $3 > 0$ donc $f'(t) > 0$.

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

c) La fonction f admet $f(5) \simeq 7,8$ comme maximum sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

L'équation $f(t) = 10$ n'admet donc aucune solution.

d) $2,31 < \alpha < 2,32$.

Partie B

a) La superficie de forêt brûlée après une journée est d'environ 2,6 hectares.

b) $50 \times \dfrac{20}{100} = 10$.

20 % de 50 hectares représente 10 hectares.

Or $f(t) = 10$ n'a pas de solution.

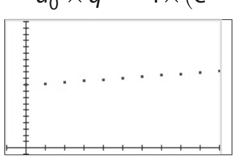
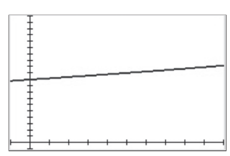
L'affirmation du journaliste est incorrecte.

c) 5 hectares de forêt ont été brûlés, au bout de 2,32 jours.

99 **1. a)** La suite (u_n) est géométrique de raison $e^{0,02}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (e^{0,02})^n = e^{0,02n}$

c)  

fenêtre : $-1 < X < 10$, pas 1 et $-0,1 < Y < 2$, pas 0,1.

La courbe $\mathscr{C}_f$ semble réaliser un prolongement continu du nuage de points.

b) $f(0,5) = e^{0,01} \approx 1,010$

Au 1er juillet 2018, le village comptait 1 010 habitants.

$f(1,5) = e^{0,03} \approx 1,030$

Au 1er juillet 2019, le village comptait 1 030 habitants.

$f\left(6 + \dfrac{1}{12}\right) = f\left(\dfrac{73}{12}\right) = e^{\frac{73}{600}} \approx 1,129$

Au 1er juillet 2024, le village comptera 1 129 habitants.

100 **a)** $f(0) = \dfrac{120e^0}{e^0 + 3} = \dfrac{120}{4} = 30$

Le chiot mesurait 30 cm le jour de l'adoption.

b) La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

$u(t) = 120e^t$ $\qquad u'(t) = 120e^t$

$v(t) = e^t + 3$ $\qquad v'(t) = e^t$

$$f'(t) = \frac{120e^t(e^t + 3) - 120e^t \times e^t}{(e^t + 3)^2}$$

$$f'(t) = \frac{120e^{2t} + 360e^t - 120e^{2t}}{(e^t + 3)^2}$$

$$f'(t) = \frac{360e^t}{(e^t + 3)^2}$$

c) Pour tout nombre réel t de l'intervalle de $[0\,;+\infty[$, $e^t > 0$, $360 > 0$ et $(e^t + 3)^2 > 0$, donc $f'(t) > 0$.

d)

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	30 $\nearrow$	

e) La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f(2) < 100$ et $f(3) > 100$.

Au bout de 3 mois, le chiot dépassera 1 m.

101 **a)** Pour tous nombres réels x et y,

$\dfrac{e^x + e^y}{e^{x+y}} = \dfrac{e^x}{e^{x+y}} + \dfrac{e^y}{e^{x+y}} = e^{x-x-y} + e^{y-x-y}$

$= e^{-y} + e^{-x}$.

L'affirmation est donc vraie.

b) La fonction $f : x \mapsto e^{-4x-5}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout nombre réel x positif $f'(x) = -4e^{-4x-5}$

Pour tout nombre réel x positif, $e^{-4x-5} > 0$ et $-4 < 0$ donc $f'(x) < 0$ et f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Or $f(0) \approx 0,007$ soit $f(0) \leqslant 1$.

L'affirmation est donc vraie.

c) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty\,;0]$.

Pour tout nombre réel x négatif, $e^x \leqslant e^0$ soit $e^x \leqslant 1$.

L'affirmation est donc fausse.

d) $e^{-1} + e^{-2} \approx 0,5$ et $e^{-1+(-2)} = e^{-3} \approx 0,05$ donc $e^{-1} + e^{-2} > e^{-1+(-2)}$

L'affirmation est donc vraie.

e) Pour tout nombre réel x, $e^{x+3} = e^x \times e^3$ donc $a = e^3$.

L'affirmation est donc vraie.

102 **a)** La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

si $x = y$, alors $e^x = e^y$ et l'affirmation est vraie.

b) Pour les mêmes raisons que précédemment,

si $e^x \leqslant e^y$ alors $x \leqslant y$.

L'affirmation est exacte.

c) $-2 < 0$ et $e^{-(-2)} = e^2 \approx 7,4$ et $e^2 > 1$

L'affirmation est donc fausse.

103 **a)** $e^{-7} \approx 0{,}00091$ donc $e^{-7} < 0{,}001$.
Il existe un nombre réel x, tel que $e^x \leqslant 0{,}001$.
b) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Il existe un nombre réel a, tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{at}$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Organiser son raisonnement

104 Pour tout entier n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2\frac{e^{2,8(n+1)}}{e^{0,8(n+1)-1}} = 2\frac{e^{2,8n} \times e^{2,8}}{e^{0,8n-1} \times e^{0,8}}$$

$$u_{n+1} = 2\frac{e^{2,8}}{e^{0,8}} \times \frac{e^{2,8n}}{e^{0,8n-1}} = 2e^2 \times u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $2e^2$ et de premier terme $u_0 = 2\frac{e^0}{e^{0-1}} = 2e$.

105 La fonction f est dérivable sur $[0\,;3]$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;3]$,
$u(x) = 0{,}22x^2 - 1{,}6x + 3$ $u'(x) = 0{,}44x - 1{,}6$
$v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$
$f'(x) = (0{,}44x - 1{,}6) \times e^x + (0{,}22x^2 - 1{,}6x + 3) \times e^x$
$f'(x) = e^x(0{,}22x^2 - 1{,}16x + 1{,}4)$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;3]$, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $0{,}22x^2 - 1{,}16x + 1{,}4$.

x	0		$\frac{1{,}16 - \sqrt{0{,}1136}}{0{,}44}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$0{,}22x^2 - 1{,}16x + 1{,}4 = 0$
$\Delta = 0{,}1136$

$$x_1 = \frac{1{,}16 - \sqrt{0{,}1136}}{2 \times 0{,}22} \simeq 1{,}8704$$

$$x_2 = \frac{1{,}16 + \sqrt{0{,}1136}}{2 \times 0{,}22} \simeq 3{,}40$$

La fonction f admet donc un maximum égal à

$$f\left(\frac{1{,}16 - \sqrt{0{,}1136}}{0{,}44}\right)$$

$$f\left(\frac{1{,}16 - \sqrt{0{,}1136}}{0{,}44}\right) \simeq 5{,}0435$$

L'entreprise doit donc vendre 1 870 cafetières pour obtenir un bénéfice maximal de 50 435 €.

106 **a)** $\alpha \simeq 0{,}33$.
b) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^x = e^y$ équivaut à $x = y$.
c) $f(x) = 0$ lorsque $e^x = e^{4x-1}$ ce qui équivaut à $x = 4x - 1$ soit $-3x = -1$ et $x = \frac{1}{3}$.
L'équation $f(x) = 0$ admet donc comme solution $x = \frac{1}{3}$.

107 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$u(x) = 2 - 0{,}5x$ $u'(x) = -0{,}5$
$v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$

$$f'(x) = -0{,}5 \times e^x + (2 - 0{,}5x) \times e^x$$
$$= e^x(-0{,}5x + 1{,}5)$$

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-0{,}5x + 1{,}5$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

La fonction f admet donc un maximum en $x = 3$ égal à $f(3) \simeq 10{,}04$.
Ainsi pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant f(3) \leqslant 11$.

108 $f(x) = (ax + b)e^x$.
D'après le tableau de variations $f(6) = e^6$ et $f'(6) = 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,
$u(x) = ax + b$ $u'(x) = a$
$v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$
$f'(x) = a \times e^x + (ax + b) \times e^x$
$f'(x) = e^x(ax + a + b)$.
Or $f'(6) = 0$, on déduit que :
$e^6(6a + a + b) = 0$
soit $7a + b = \frac{0}{e^6} = 0$ et $b = -7a$.
De $f(6) = e^6$, on déduit que :

$$(6a + b)e^6 = e^6$$

soit $6a + b = \frac{e^6}{e^6} = 1$
ainsi $6a + b = 1$

Or $b = -7a$ donc $6a - 7a = 1$
on obtient $-a = 1$ donc $a = -1$ et
$b = -7a = -7 \times (-1) = 7$.
Ainsi $f(x) = (-x + 7)e^{x}$.

109 L'aire $\mathscr{A}(x)$ du panneau publicitaire est donné, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$\mathscr{A}(x) = x \ f(x) = 4xe^{-0,4x}$$

$\mathscr{A}(x)$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et

$u(x) = 4x$ $\qquad u'(x) = 4$
$v(x) = e^{-0,4x}$ $\qquad v'(x) = -0,4e^{-0,4x}$

$\mathscr{A}'(x) = 4e^{-0,4x} + 4x \times (-0,4) \times e^{-0,4x}$

$\mathscr{A}'(x) = e^{-0,4x}(-1,6x + 4)$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;10]$, $e^{x} > 0$ donc $\mathscr{A}'(x)$ est du signe de $4 - 1,6x$.

x	0		2,5		10
$\mathscr{A}'(x)$		+	0	−	
$\mathscr{A}(x)$		↗		↘	

$4 - 1,6x = 0$
$x = \dfrac{4}{1,6} = 2,5$

L'aire sera donc maximale lorsque $OB = 2,5$.
Les dimensions du panneau publicitaire sont alors de 2,5 m sur 1,47 m.

110 **a)** Il semble que $\mathscr{C}_f$ soit au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty\,;-3[\cup]2\,;+\infty[$, que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en $x = -3$ et $x = 2$ et que $\mathscr{C}_f$ soit en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-3\,;2[$.

b) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0,1e^{x^2-6}}{0,1e^{-x}} = e^{x^2-6+x}$

Or $e^{x^2+x-6} > 1$, si et seulement si, $x^2 + x - 6 > 0$
$\Delta = 25$
Il y a deux solutions $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2 \times 1} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2 \times 1} = 2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x^2 + x - 6$		+	0	−	0	+	

• Ainsi pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty\,;-3[\cup]2\,;+\infty[$, $x^2 + x - 6 > 0$, c'est-à-dire $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 1$ et $f(x) > g(x)$. (Pour tout réel x, $g(x) > 0$).

• Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-3\,;2[$, $x^2 + x - 6 < 0$, soit $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 1$ et $f(x) < g(x)$. (Pour tout réel, $g(x) > 0$).

• Pour $x = -3$ et $x = 2$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $f(x) = g(x)$.

La conjecture émise au **a)** est donc démontrée.

111 **1. a)** La tangente T_0 à $\mathscr{C}$ en M_0 a pour équation :

$T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$\qquad y = x + 1$

b) N_1 est le point de T_0 d'abscisse h donc son ordonnée est $y = 1 + h$ et $N_1(h\,;1 + h)$

2. a) $f(h) = 1 + h$ et $f'(h) = f(h) = 1 + h$.
La tangente T_1 à $\mathscr{C}$ en M_1 a pour équation :

$T_1 : y = f'(h)(x - h) + f(h)$
$\qquad y = (1 + h)(x - h) + 1 + h$
$\qquad y = x \cancel{-h} + hx - h^2 + 1 \cancel{+h}$
$\qquad y = (1 + h)x - h^2 + 1$

b) Le point N_2 de T_1 a pour abscisse $2h$ et a pour ordonnée :

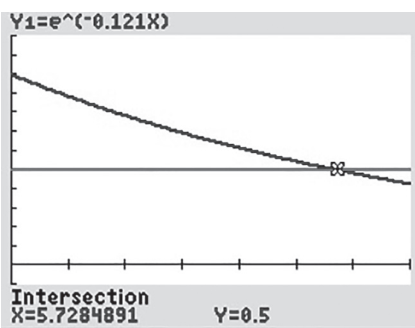
$y = (1 + h)2h - h^2 + 1$
$\quad = 2h + 2h^2 - h^2 + 1$
$\quad = h^2 + 2h + 1$
$\quad = (h + 1)^2$

Donc $N_2(2h\,;(h + 1)^2)$

3. a)

```
from pylab import*
xlim(-10,10)
ylim(0,10)
def Expo(N,h):
    x=0
    y=1
    plot(x,y,'k.')
    for k in range(0,N):
        x=x+h
        y=y*(1+h)
        plot(x,y,'k.')
    show()
```

b)



c) Il faut donner la valeur $-0,01$ à h pour que la courbe soit tracée sur l'intervalle $[-4\,;0]$.

112 **a)** Lorsque n est très grand, $h = \dfrac{1}{n}$ est très petit.

On a alors $e^{nh} \approx (1 + h)^n$ soit $e^{n \times \frac{1}{n}} \approx \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

c'est-à-dire $e \approx \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \simeq \text{e}.$

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ a pour limite le nombre e.

b) Lorsque l'on saisit $\text{N} = 10$, l'algorithme affiche :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur affichée	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,52	2,55	2,57	2,58	2,59

113 • On sait que $f(0) = -1$ or $\text{e}^0 - \text{e} = 1 - \text{e} \neq -1$.
On élimine donc la 3^e fonction.

• La fonction $x \mapsto \text{e}^{1,5x} - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto 1,5\text{e}^{1,5x}$.
Or $1,5 > 0$ et $\text{e}^{1,5x} > 0$ donc la fonction $x \mapsto \text{e}^{1,5x} - 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction f correspondant au tableau de variation est donc la fonction $x \mapsto \text{e}^x(x-1)$.

114 **1. a)** La fonction g est dérivable sur $[0,5 ; 3]$.
Pour tout nombre réel x de cet intervalle,

$u(x) = 10 - 6x \qquad u'(x) = -6$
$v(x) = \text{e}^{-x+2} \qquad v'(x) = -1\text{e}^{-x+2}$ donc

$g'(x) = -6 \times \text{e}^{-x+2} + (10-6x) \times (-1\text{e}^{-x+2}) + 0$

$g'(x) = \text{e}^{-x+2}(-6 + (10-6x) \times (-1))$

$g'(x) = \text{e}^{-x+2}(-16 + 6x)$

b) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5 ; 3]$, $\text{e}^{-x+2} > 0$, donc $g'(x)$ est donc du signe de $-16 + 6x$.

x	0,5	2		$\frac{8}{3}$		3
$g'(x)$		−		0	+	
$g(x)$	$g(0,5)$ ↘	0	↘	$g\left(\frac{8}{3}\right)$	↗	$g(3)$

$-16 + 6x = 0$
$6x = 16$
$x = \dfrac{8}{3}$

$g(0,5) \approx 33,4$

$g\left(\dfrac{8}{3}\right) \approx -1,1$

$g(3) \approx -0,9$

c) $g(2) = (10 - 6 \times 2)\text{e}^{-2+2} + 2 = -2\text{e}^0 + 2 = 0$

d) On obtient le tableau de signes suivant :

x	0,5		2		3
$g(x)$		+	0	−	

2. a) La fonction f est dérivable sur $[0,5 ; 3]$.
Pour tout nombre réel x de cet intervalle,

$u(x) = 6x - 4 \qquad u'(x) = 6$

$v(x) = \text{e}^{-x+2} \qquad v'(x) = -1\text{e}^{-x+2}$

$f'(x) = 6 \times \text{e}^{-x+2} + (6x-4) \times (-1\text{e}^{-x+2}) + 2$

$f'(x) = \text{e}^{-x+2}(6 + (6x-4) \times (-1)) + 2$

$f'(x) = (10 - 6x)\text{e}^{-x+2} + 2$

$f'(x) = g(x)$

b)

x	0,5		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

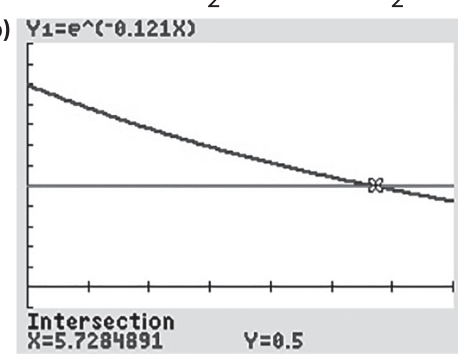
La fonction f admet un maximum en $x = 2$.
Il faut donc extraire 2 000 tonnes de minerai pour obtenir un résultat d'exploitation maximum.

115 **1.** La fonction N est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$,
$\text{N}'(t) = -0,121\text{N}_0\text{e}^{-0,121t}$
$-0,121\text{N}_0 < 0$ et $\text{e}^{-0,121t} > 0$ donc $\text{N}'(t) < 0$ et la fonction N est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. a) $\text{N(T)} = \dfrac{\text{N}_0}{2}$

donc $\text{N}_0\,\text{e}^{-0,121t} = \dfrac{\text{N}_0}{2}$ et $\text{e}^{-0,121t} = \dfrac{1}{2}$

b)



fenêtre : $0 \leqslant \text{X} \leqslant 7$, pas 1 et $-0,1 \leqslant \text{Y} \leqslant 1,2$, pas 0,1.
$\text{T} \approx 5,728$.

3. a) $\text{N(2T)} = \text{N}_0\,\text{e}^{-0,121 \times 2\text{T}}$

$= \text{N}_0\,(\text{e}^{-0,121\text{T}})^2$

$= \text{N}_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$= \dfrac{\text{N}_0}{4}$

b) $2\text{T} \approx 11,456$.
Au bout de 11 456 ans le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 n'est plus égal qu'au quart de sa valeur initiale.

116 $e^{x-1} \times e^{2x-5} = \dfrac{e}{e^x}$

soit $e^{3x-6} = e^{1-x}$ ce qui équivaut à $3x - 6 = 1 - x$

Ainsi $4x = 7$ et $x = \dfrac{7}{4}$

$\mathcal{S} = \{1{,}75\}$.

117 $e^1 \times e^2 \times e^3 \times \ldots \times e^{100}$

$= e^{1+2+3+\ldots+100}$

$= e^{\frac{(1+100)\times 100}{2}}$

$= e^{5050}$.

118 La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^x$ vérifie $f(1) = 3^1 = 3$.

Pour tous nombres réels x et y,

$f(x+y) = 3^{x+y} = 3^x \times 3^y = f(x) \times f(y)$

119 On pose $X = e^x$

L'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ s'écrit alors $(e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0$

$X^2 + 2X - 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$

$X_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1$

Or $X = e^x$

L'équation $e^x = -3$ n'admet aucune solution.

L'équation $e^x = 1$ équivaut à $e^x = e^0$ donc $x = 0$.

L'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ admet comme solution le nombre 0.

120 **1.** $f(0) = 1370e^{-0{,}065\times 0} + 30 = 1400$.

La température à la sortie du four est de 1 400 °C.

2. a) La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Pour tout nombre réel *t* de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

$f'(t) = 1370 \times (-0{,}065)e^{-0{,}065t} + 0$

$f'(t) = -89{,}05e^{-0{,}065t}$.

Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,

$e^{-0{,}065t} > 0$ et $-89{,}05 < 0$ donc $f'(t) < 0$.

La fonction *f* est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Une fois sortie du four, la température de la pièce diminue.

3. $f(5) \simeq 1020$

Or $1020 > 650$

La pièce ne peut pas être démoulée après 5 h.

4. À l'aide de la calculatrice, on cherche une valeur approchée de la solution α de l'équation $f(t) = 650$.

On obtient $\alpha \simeq 12{,}198$

La pièce pourra donc être démoulée au bout de 12 h 12 min au minimum.

5. a) $f(t) = 25$

Si $1370e^{-0{,}065t} + 30 = 25$ soit $e^{-0{,}065t} = \dfrac{-5}{1370}$ ce qui est impossible.

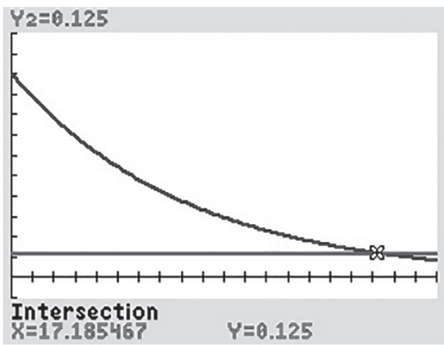
La pièce ne pourra donc pas atteindre une température de 25° C.

b) Ce résultat était prévisible car la température ambiante de la pièce est de 30° C.

Exploiter ses compétences

121 Dater les fragments de charbon de bois revient à résoudre l'équation $N_0 e^{-0{,}121t} = 0{,}125N_0$ soit $e^{-0{,}121t} = 0{,}125$.

On obtient une valeur approchée de la solution à l'aide de la calculatrice.



fenêtre : $0 \leqslant X \leqslant 20$, pas 1 et $-0{,}1 \leqslant Y \leqslant 1{,}2$, pas 0,1.

On obtient $t \simeq 17{,}2$.

Les fragments de charbon de bois ont environ 17 000 ans.

122 Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = f(x)$

La fonction *f* est donc paire sur $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La hauteur de l'arche est donc $f(0)$.

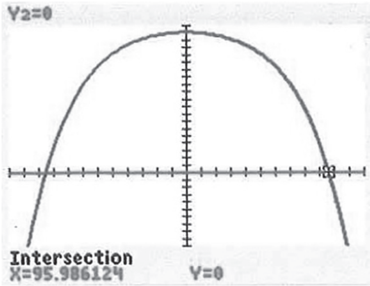
$f(0) = 209{,}6 - 8{,}81(e^0 + e^0)$

$= 191{,}98$

Pour déterminer la largeur de l'arche, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

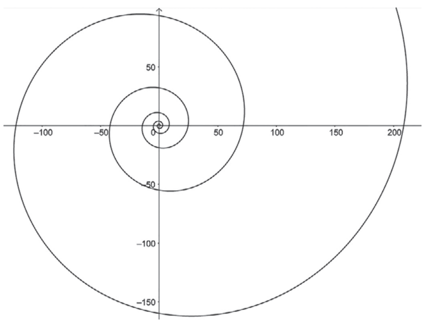
À l'aide de la calculatrice, on obtient une valeur approchée des solutions α et β.

$\alpha \simeq 95{,}99 \quad \beta \simeq -95{,}99$.

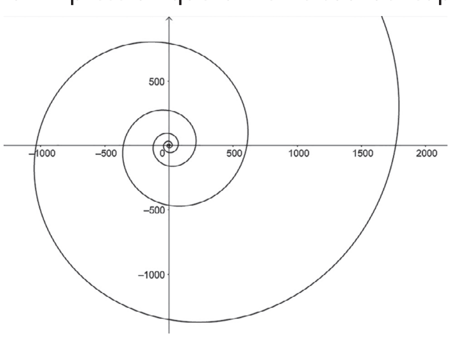


La largeur de l'arche est donc de 191,98 m et sa hauteur est également de 191,98 m.

123 La représentation de la courbe d'équation polaire $r = \mathrm{e}^{0{,}17\theta}$ est obtenue à l'aide de GeoGebra.



L'épigraphe sur la tombe « eadem mutata resurgo » signifie « déplacée, je réapparais à l'identique ».
Lorsque l'on agrandit, ou réduit le repère sur GeoGebra, on a l'impression que la même courbe réapparait.



Le graveur n'a pas tracé une spirale logarithmique mais une spirale d'Archimède.

124 La tension f vérifie, pour tout $t \geqslant 0$

$$f'(t) = \frac{-1}{10^3 \times 3{,}2 \times 10^{-3}} f(t)$$

D'après le doc. 2 :

$$f(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3{,}2}t} + \mathrm{B}$$

Or à l'instant $t = 0$, la tension est égale à 4,6 V, ainsi $f(0) = 4{,}6$ et $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 4{,}6$.

D'après le doc. 3, si t est très grand alors $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3{,}2}} \simeq 0$.
Or lorsque t est très grand, la tension est nulle, ainsi $\mathrm{A} \times 0 + \mathrm{B} = 0$ et $\mathrm{B} = 0$.
Ainsi $\mathrm{A} = 4{,}6$.

On obtient $f(t) = 4{,}6\mathrm{e}^{-\frac{1}{3{,}2}t}$.
La tangente T au point d'abscisse 0 a pour équation :
$\mathrm{T} : y = f'(0)(t-0) + f(0)$

$$y = \frac{-1}{3{,}2} \times 4{,}6(t-0) + 4{,}6$$

$$y = \frac{-4{,}6}{3{,}2}t + 4{,}6$$

La tangente T coupe l'axe des abscisses lorsque $\frac{-4{,}6}{3{,}2}t + 4{,}6 = 0$ soit en $t = \frac{-4{,}6}{\frac{-4{,}6}{3{,}2}} = 3{,}2$

7 Trigonométrie

Découvrir

1 Une nouvelle mesure d'angle : le radian

1 **a)** Si la mesure de l'angle est 180°, l'arc de cercle est un demi-cercle de rayon 1. Son périmètre vaut donc π m.

b) Pour un angle au centre de 180°, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ vaut π m. Ainsi, par proportionnalité, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ vaut $\frac{80 \times \pi}{180}$, c'est-à-dire environ 1,4 m.

2 L'angle $\widehat{AOB}$ vaut donc, en simplifiant, $\frac{4\pi}{9}$rad.

2 Cosinus et sinus d'un angle

1 **a)** La longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ vaut $\frac{2\pi}{10}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{5}$.

b) La mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ est $\frac{360}{10} = 36°$.

c) Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (OI). Ainsi les coordonnées du point M sont $(OH\,; MH)$.

Or le triangle OH est rectangle en H

donc $\cos(36°) = \frac{OH}{OM} = OH$

et $\sin(36°) = \frac{MH}{OM} = MH$.

Arrondies au centième, les coordonnées de M sont $(0{,}81\,; 0{,}59)$.

2 **a)** L'arc $\overset{\frown}{IM}$ mesure $\frac{\pi}{5}$ d'après **1** **a)** et a pour rayon 1 donc $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{5}$ rad.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0{,}81$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0{,}59$.

On retrouve les résultats obtenus au **1** **c)**

c) $\overset{\frown}{IN} = \frac{2\pi}{5}$ et $\overset{\frown}{IP} = \frac{4\pi}{5}$.

L'abscisse du point N est $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31$

L'abscisse du point P est $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \approx -0{,}81$

3 La largeur de la fenêtre vaut donc $0{,}81 + 0{,}31$, c'est-à-dire 1,12 m.

La hauteur de la fenêtre vaut donc $2 \times 0{,}59$, c'est-à-dire 1,18 m.

Acquérir des automatismes

3 La mesure de l'angle $\widehat{MON}$ est égale à $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$, donc $\widehat{MON} = \frac{7\pi}{12}$rad. Ainsi la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est égale à $\frac{7\pi}{12} \times 3$ cm, c'est-à-dire $\frac{7\pi}{4}$ cm.

4 **a)** $\widehat{IOM} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = 30°$.

b) $-\frac{16\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 3 \times 2\pi$

donc $-\frac{16\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

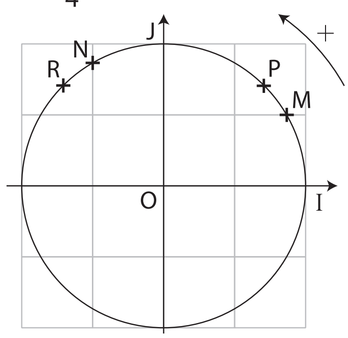
Donc $\widehat{ION} = 120°$.

c) $\widehat{IOP} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 45°$.

d) $\dfrac{19\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{16\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2 \times 2\pi$

donc $\dfrac{19\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

Or $\dfrac{3\pi}{4} = 3 \times \dfrac{\pi}{4}$ donc, pour placer R, on reporte trois fois la longueur $\dfrac{\pi}{4}$ dans le sens direct à partir de I.



7 Pour tout nombre réel x,
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Ainsi, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$

soit $\sin^2(x) = 1 - \dfrac{5}{9}$. D'où $\sin^2(x) = \dfrac{4}{9}$.

On en déduit que $\sin(x) = \dfrac{2}{3}$ ou $\sin(x) = -\dfrac{2}{3}$.

Or x appartient à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$ donc $\sin(x) \leqslant 0$.

Ainsi $\sin(x) = -\dfrac{2}{3}$.

8 Pour tout nombre réel x,
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Ainsi, $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{15}{16}$.

On en déduit que $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Or $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$ donc $\cos(x) \geqslant 0$.

Ainsi $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

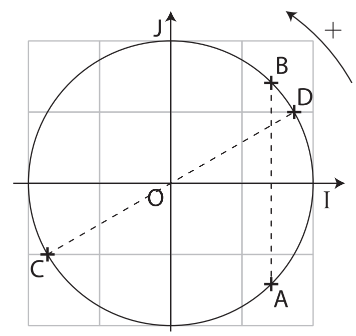
9 **a)** A est le point image du nombre réel $\dfrac{7\pi}{4}$.
Comme $\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi$, le point A est le symétrique du point B image du nombre réel $\dfrac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des abscisses.

Ainsi, $\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) C est le point image du nombre réel $-\dfrac{5\pi}{6}$. Comme $-\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} - \pi$, le point C est le symétrique du point D image du nombre réel $\dfrac{\pi}{6}$ par rapport à l'origine du repère. Ainsi, $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.



10 **a)** $\cos\left(\dfrac{16\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

et $\sin\left(\dfrac{16\pi}{3}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(\dfrac{23\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

et $\sin\left(\dfrac{23\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

11 **a)** $\dfrac{\pi}{6}$ rad $= 30°$ **b)** $\dfrac{\pi}{2}$ rad $= 90°$

c) π rad $= 180°$

12 **a)** $30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad **b)** $45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad

c) $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad **d)** $90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad

e) $180° = \pi$ rad

13 Agnès a tort. En effet, la longueur d'un arc de cercle de rayon 2 cm et d'angle au centre de mesure 45° est $\ell = 2 \times \dfrac{\pi \times 45}{180}$, soit $\ell = \dfrac{\pi}{2}$ cm.

14 Réponse **(2)**. En effet, la longueur d'un arc de cercle de rayon 3 cm et d'angle au centre de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ rad est $\ell = 3 \times \dfrac{\pi}{3}$, soit $\ell = \pi$ cm.

15 **a)** $\ell = 8 \times \dfrac{5\pi}{2} = 20\pi$

b) $3\pi = R \times \dfrac{3\pi}{4}$ soit $R = \dfrac{3\pi}{\dfrac{3\pi}{4}}$

Ainsi $R = 4$.

16 Nicolas a tort. En effet, on a : $3 = 2 \times \alpha$ donc $\alpha = \dfrac{3}{2}$rad.

α est donc différent de $\dfrac{\pi}{2}$rad.

L'angle n'est pas droit.

17 **a)** 140° **b)** 75° **c)** 67,5° **d)** 144°.

18 **a)** $\dfrac{8\pi}{9}$rad **b)** $\dfrac{7\pi}{18}$rad

c) $\dfrac{29\pi}{36}$rad **d)** $\dfrac{7\pi}{20}$rad

19 **a)** $\ell = 6 \times \dfrac{5\pi}{6} = 5\pi$ cm soit $\ell \approx 15{,}71$ cm

b) $\ell = 3 \times \dfrac{8\pi}{7} = \dfrac{24\pi}{7}$ m soit $\ell \approx 10{,}77$ m

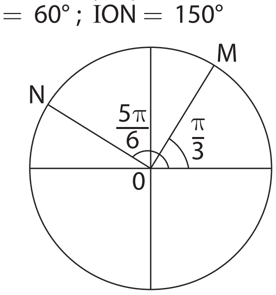
c) $\ell = 12 \times \dfrac{11\pi}{5} = 26{,}4\pi$ km soit $\ell \approx 82{,}94$ km

20 **a)** $\ell = 2 \times \dfrac{\pi \times 150}{180} = \dfrac{5\pi}{3}$ m soit $\ell \approx 5{,}24$ m.

b) $\ell = 4 \times \dfrac{\pi \times 80}{180} = \dfrac{16\pi}{9}$ cm soit $\ell \approx 5{,}59$ cm.

c) $\ell = 30 \times \dfrac{\pi \times 5}{180} = \dfrac{5\pi}{6}$ mm soit $\ell \approx 2{,}62$ mm.

21 **a)** $\widehat{IOM} = 60°$; $\widehat{ION} = 150°$



b) $\widehat{MON} = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$rad. Ainsi la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est $\ell = 2{,}5 \times \dfrac{\pi}{2}$ cm soit $\ell = 3{,}93$ cm

22 **a)** $40 = R \times \dfrac{\pi \times 30}{180}$ soit $R = \dfrac{240}{\pi}$ cm donc $R \approx 76{,}4$ cm

b) $1 = R \times \pi$ soit $R = \dfrac{1}{\pi}$ m donc $R \approx 0{,}318$ m

23 **a)** $3\pi = \pi \times \alpha$ soit $\alpha = 3$rad

b) $300 = 150 \times \alpha$ soit $\alpha = 2$rad

24 **a)**

```
def Longueur (r, a) :
    ℓ = r*a
    return ℓ
```

b) La commande Longueur (10, 0.1) retourne 1.

c) La valeur renvoyée par Longueur (10,3*pi) n'a pas de sens puisque l'arc ferait un cercle complet et la moitié d'un. La mesure de l'angle au centre doit varier entre 0 et 2π.

25 **a)** π **b)** $\dfrac{\pi}{2}$ **c)** $\dfrac{\pi}{18}$.

26 $\widehat{IOM} = 18°$.

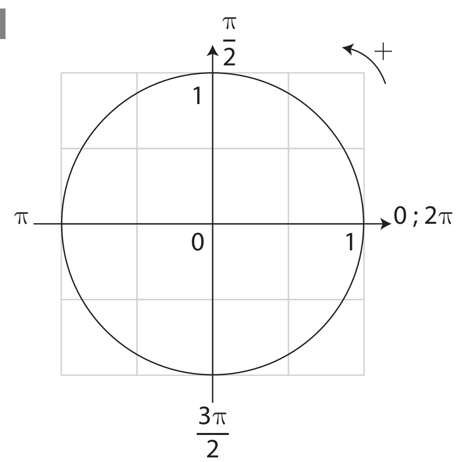
27 **a)** A : $\dfrac{\pi}{4}$; B : $\dfrac{3\pi}{4}$; C : $\dfrac{5\pi}{4}$; D : $\dfrac{7\pi}{4}$

b) I : 0 ; M : $\dfrac{\pi}{3}$; N : $\dfrac{2\pi}{3}$; P : π ; Q : $\dfrac{4\pi}{3}$; R : $\dfrac{5\pi}{3}$.

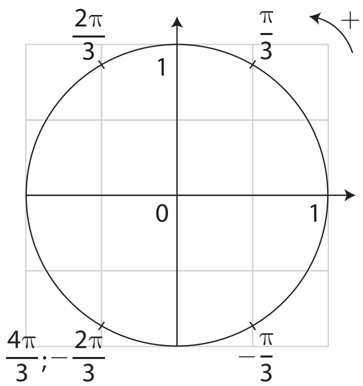
28 Lily a tort. $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$ ont bien le même point image mais $\dfrac{5\pi}{3}$ n'appartient pas à l'intervalle $[2\pi\,;4\pi[$.

29 A : $\dfrac{\pi}{6}$; B : $\dfrac{2\pi}{3}$; C : $-\dfrac{3\pi}{4}$; I : 1002π; J : 7π ; K : $-\dfrac{\pi}{2}$; L : $-\dfrac{\pi}{6}$

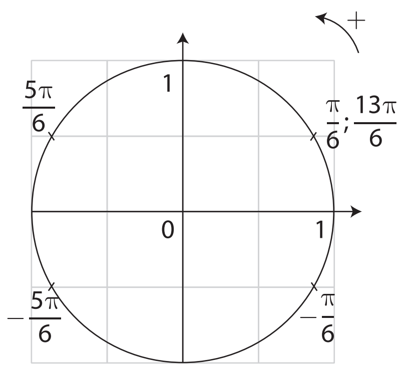
30



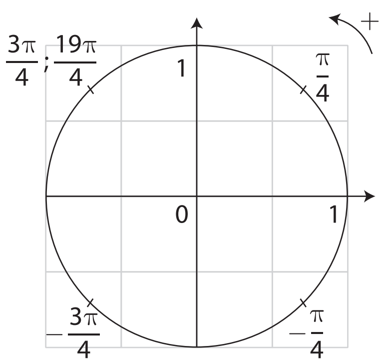
31



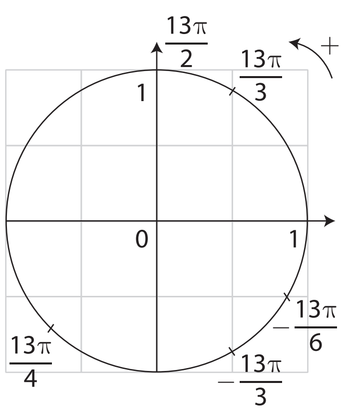
32



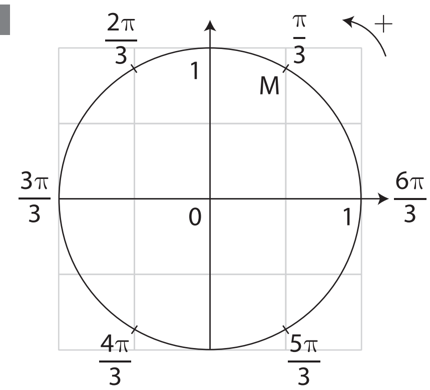
33



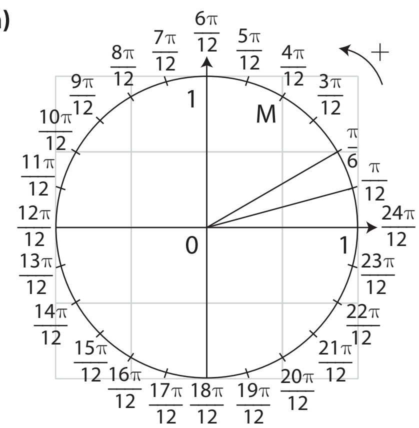
34



35



36 **a)**



b) On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{IOM}$ puisque $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}$

c) Voir la figure à la question **a)**.

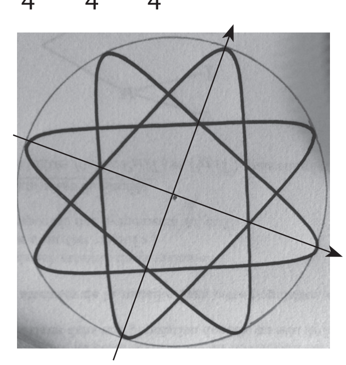
37 C : $\frac{\pi}{3}$; B : $-\frac{7\pi}{4}$; K : $-\frac{13\pi}{6}$; I : 2ϖ

G : 15π ; H : $\frac{7\pi}{6}$; D : $\frac{2\pi}{3}$; E : $-\frac{5\pi}{4}$

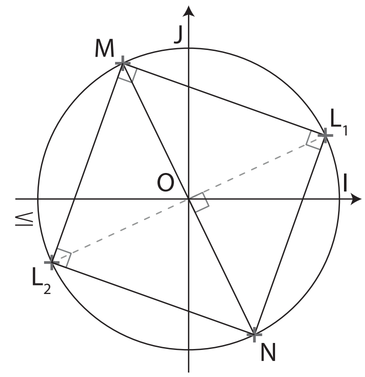
38 G : $\frac{\pi}{6}$; N : $\frac{17\pi}{6}$; K : $\frac{5\pi}{4}$; L : $-\frac{8\pi}{3}$;

M : $\frac{3\pi}{2}$; J : $-\frac{11\pi}{2}$; H : $\frac{5\pi}{3}$; P : $-\frac{9\pi}{4}$

39 Faux. Le cercle étant coupé en 8 arcs de même longueur, il s'agit des nombres réels $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{6\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{8\pi}{4}$ dans le repère ci-dessous.



40 **a)** et **b)**



$ON = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ donc $N \in \mathscr{C}$.

c) $\widehat{IOL_1} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$rad donc L1 est le point image du nombre réel $\frac{\pi}{6}$.

• L2 est le symétrique de L1 par rapport à O donc L2 est le point image du nombre réel $\frac{\pi}{6} - \pi$, soit $-\frac{5\pi}{6}$.

• N est le symétrique de M par rapport à O donc N est le point image du nombre réel $\frac{2\pi}{3} - \pi$, soit $-\frac{\pi}{3}$.

41 • $\widehat{COA} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$rad donc la longueur de l'arc rouge est $\ell_1 = 1{,}5 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ cm soit $\ell_1 \approx 2{,}4$ cm

• $\widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$rad donc la longueur de l'arc vert est $\ell_2 = 1{,}5 \times \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{8}$ cm soit $\ell_2 \approx 2$ cm

• $\widehat{BOC} = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$rad donc la longueur de l'arc bleu est $\ell_3 = 1{,}5 \times \frac{13\pi}{12} = \frac{13\pi}{8}$ cm soit $\ell_3 \approx 5{,}1$ cm

42 **a)** $\frac{27\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 3 \times 2\pi$.

b) $\frac{3\pi}{4}$ a donc le même point image que le nombre réel $\frac{27\pi}{4}$.

43 **a)** $-\frac{101\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{102\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 17 \times 2\pi$

b) $\frac{\pi}{3}$ a donc le même point image que le nombre réel $-\frac{101\pi}{3}$.

44 • $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{3}$

• 0 ; -8π • π ; -9π • $-\frac{29\pi}{4}$; $\frac{19\pi}{4}$

• $-\frac{23\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$ • $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$

45 **a)** $\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$

b) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$

c) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$

d) $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

46 **a)** La commande Mpi(pi/3, 7*pi/3) renvoie « oui ».

b) Les points sont les mêmes.

c) On remplace « Oui » par : « Les nombres réels *a* et *b* ont le même point image sur un cercle trigonométrique ».

On remplace « Non » par : « Les nombres réels *a* et *b* n'ont pas le même point image sur un cercle trigonométrique ».

47 **a) L'affirmation est fausse.**

En effet, $\frac{\pi}{7} - \left(-\frac{13\pi}{7}\right) = 2\pi$ mais $\frac{28\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{27\pi}{7}$ qui n'est pas un multiple de 2π.

b) L'affirmation est fausse.

En effet, $\frac{28\pi}{5} - \left(-\frac{27\pi}{5}\right) = 11\pi$ qui n'est pas un multiple de 2π.

c) L'affirmation est vraie.

En effet, $\frac{3\pi}{11} - \left(-\frac{107\pi}{11}\right) = 10\pi = 5 \times 2\pi$.

48 **a)** $\cos(x) = 0{,}6$; $\sin(x) = 0{,}8$.

b) $\sin(y) = 0{,}4$; $\cos(y) \approx -0{,}9$.

49 **a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

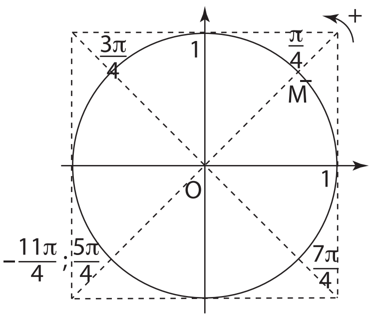
50 **a)** $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0{,}81$; $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0{,}59$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}97$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}26$

c) $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right) \approx 0{,}22$; $\quad \sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) \approx -0{,}97$

d) $\cos\left(-\frac{19\pi}{8}\right) \approx 0{,}38$; $\quad \sin\left(-\frac{19\pi}{8}\right) \approx -0{,}92$

51 a)



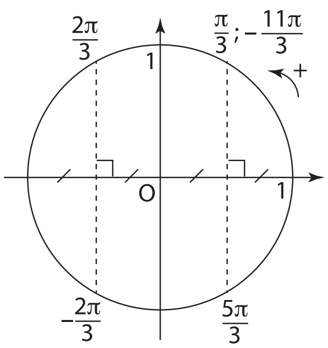
b) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

52 a)



b) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\quad \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\quad \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\quad \sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

53 a) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

54 a) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

c) $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

55 a) $\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad$ **b)** $\cos(17\pi) = -1$

c) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

56 • $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ donc $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ ont des points images symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Ainsi, $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

• $-\frac{23\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 3 \times 2\pi$ donc $-\frac{23\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Ainsi, $\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

57 a) Faux. En effet, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

b) Vrai. En effet, $0 < 0{,}9\pi < \pi$.

c) Vrai. En effet, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

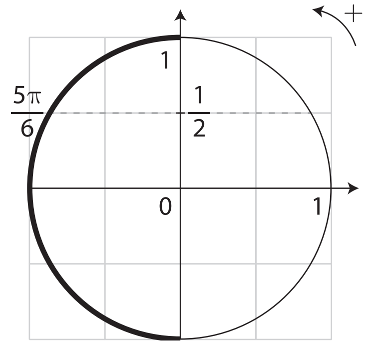
d) Faux. En effet, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

58 a) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

c) $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

59 Matthieu a raison comme le montre la figure ci-dessous.



Il s'agit de $\frac{5\pi}{6}$.

60 **a)** $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$ **d)** $-\frac{5\pi}{6}$

61 **a)** $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

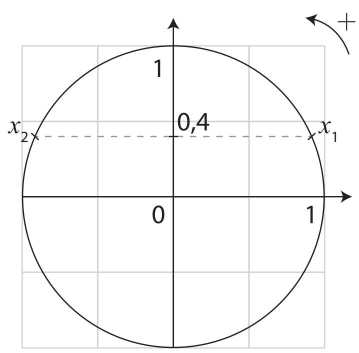
b) $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\frac{5\pi}{2}$.

d) Aucune solution.

62 **1. a)** $x \approx 0{,}2$ **b)** $x \approx -0{,}7$

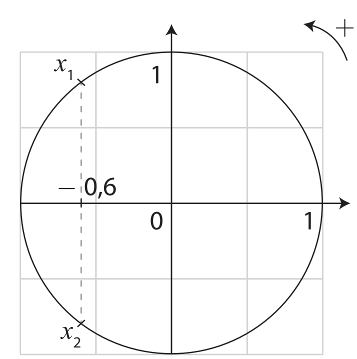
2. a) L'équation admet deux solutions sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.



b) Il s'agit de $x_1 \approx 0{,}41$ et $x_2 = \pi - x_1 \approx 2{,}73$

63 **1. a)** $x \approx 1{,}3$ **b)** $x \approx 2{,}6$

2. a) L'équation admet deux solutions sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.



b) Il s'agit de $x_1 \approx 2{,}21$ et $x_2 = -x_1 \approx -2{,}21$

64 **1.** M : $\frac{\pi}{6}$ et N : $\frac{2\pi}{3}$

$\overset{\frown}{MN}$ a pour longueur $\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$.

2. a) $\overset{\frown}{MN}$ a pour longueur : $\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{11\pi}{12}$.

b) $\overset{\frown}{MN}$ a pour longueur : $\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi}{3}$.

65 $\cos^2(x)=\frac{5}{49}$

66 Romain a raison. En effet, pour tout nombre réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Ainsi $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

67 Réponse **(3)**. En effet,

$\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

68 • $\frac{3\pi}{4}$: ②

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0$

• $-\frac{7\pi}{12}$: ③

$\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)<0$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)<0$

• $\frac{\pi}{9}$: ①

$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)>0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)>0$

• $-\frac{\pi}{3}$: ④

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)>0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)<0$

69 $\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)>0$

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)<0$

$\sin\left(\frac{13\pi}{5}\right)>0$

70 Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Ainsi, $\sin^2(x)=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$ soit $\sin(x)=\frac{4}{5}$ ou

$\sin(x)=-\frac{4}{5}$.

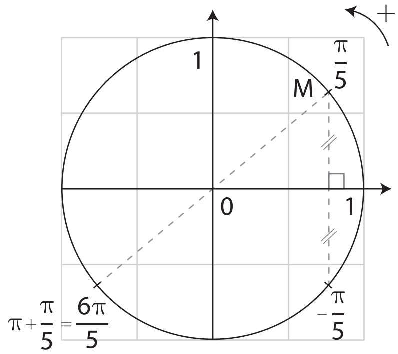
Or $x \in [0\,;\pi]$ donc $\sin(x) \geqslant 0$. Ainsi $\sin(x)=\frac{4}{5}$.

71 Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Ainsi, $\cos^2(x)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$ soit $\cos(x)=\frac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\cos(x)=-\frac{\sqrt{8}}{3}$.

Or $x\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $\cos(x)\leqslant 0$. Ainsi $\cos(x)=-\frac{\sqrt{8}}{3}$.

72 **1. a)** et **2. a)**



b) Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Ainsi $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\frac{16-\left(5+2\sqrt{5}+1\right)}{16}$

soit $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

Ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ou $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Or $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

2. b) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

73 **1.** C **2.** C **3.** B **4.** D **5.** D **6.** C

74 **1.** B, D **2.** B **3.** B, C, D

75 **1. Vrai.** En effet, $\frac{4\times 180°}{9}=80°$.

2. Vrai. En effet, $\frac{31\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{30\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+5\times 2\pi$.

Donc $\frac{31\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

Soit $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

3. Faux. En effet, par exemple,

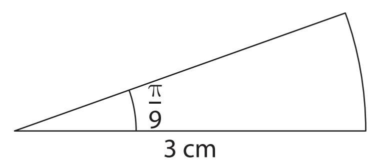
$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Vrai. En effet, les points images des nombres réels $\frac{\pi}{3}$ et $\pi+\frac{\pi}{3}$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

5. Vrai. En effet, les points images des nombres réels $\frac{\pi}{7}$ et $\pi-\frac{\pi}{7}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

76 **a)** $\frac{\pi}{9}\text{rad}=\frac{180°}{9}=20°$.

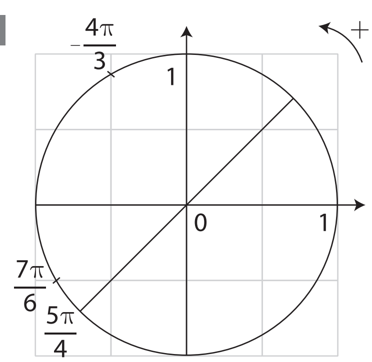
b)



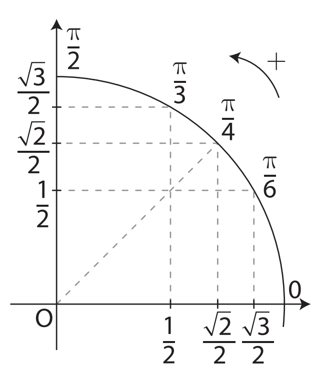
c) $\ell=R\times\alpha=3\times\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{3}$ cm

Ainsi $\ell\approx 1{,}05$ cm

77

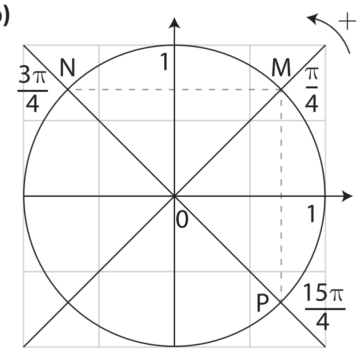


78



79 **a)** $\frac{15\pi}{4}-2\times 2\pi=-\frac{\pi}{4}$

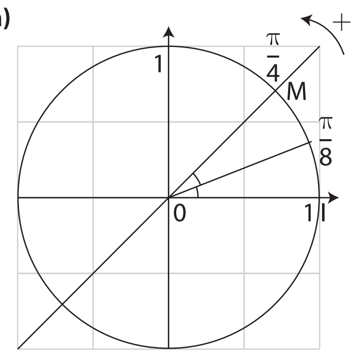
b)



c) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

80 **1. a)**



b) $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$.

On trace alors la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{IOM}}$.

c) On en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

2. Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Ainsi $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2$ soit

$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Or, d'après la question **1. c)**, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

S'entraîner

82 **a)** Voici le tableau de suivi des valeurs des variables *k* et S lors de l'exécution de l'algorithme.

k		-3	-2	-1
S	0	-1	$-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$
k	0	1	2	3
S	$-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$	$-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0

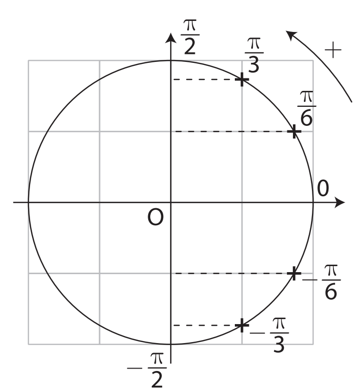
La valeur stockée dans la variable S à la fin de l'exécution de l'algorithme est 0.

Cette valeur est celle de la somme :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, on remarque que les valeurs des nombres réels appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$ annulent celles des nombres réels appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\sin(0) = 0$.

Ainsi la somme est nulle.



83 **a)** Voici le tableau de suivi des valeurs des variables *k* et S lors de l'exécution de l'algorithme.

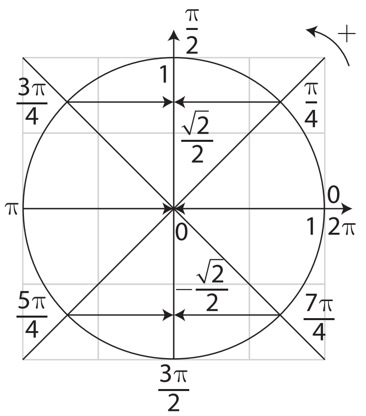
k		0	1	2	3
S	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$	$\sqrt{2}+1$
k	4	5	6	7	8
S	$\sqrt{2}+1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0

La valeur affichée par l'algorithme est 0.

Cette valeur est celle de la somme :

$$\sin(0)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin(\pi)$$
$$+\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)+\sin(2\pi)$$

b)



Sur le cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que les valeurs des nombres réels appartenant à l'intervalle $]0\,;\pi[$ annulent celles des nombres réels appartenant à l'intervalle $]\pi\,;2\pi[$.

De plus, $\sin(0)=\sin(2\pi)=0$.

85 **a)** Lorsqu'on déplace le curseur X, on lit dans l'affichage Algèbre que l'aire du losange semble égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit environ 0,87 lorsque $X\approx 1{,}05$ rad.

b) L'aire du losange est égale à $1\times\sin(X)$ soit $\sin(X)$.

La solution de l'équation $\sin(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est le nombre $\frac{\pi}{3}$ soit environ 1,05.

86 **a)** Lorsqu'on déplace le curseur X, on lit dans l'affichage Algèbre que l'aire du triangle OHM est égale à quatre fois celle du triangle IMH lorsque $X\approx 0{,}64$rad.

b) L'aire du triangle OHM est égale à $\frac{\cos(X)\times\sin(X)}{2}$

L'aire du triangle IMH est égale à $\frac{(1-\cos(X))\times\sin(X)}{2}$

L'équation $\frac{\cos(X)\sin(X)}{2}=4\frac{(1-\cos(X))\sin(X)}{2}$ est équivalente à $5\cos(X)\sin(X)=4\sin(X)$

Comme $M\neq I$, $X\neq 0$ donc $\sin(X)\neq 0$.

Ainsi, l'équation est équivalente à $5\cos(X)=4$ soit $\cos(X)=\frac{4}{5}$.

À l'aide de la calculatrice $X\approx 0{,}644$.

87 **a)** Dans le triangle OMH rectangle en H, le théorème de Pythagore donne :

$OM^2=OH^2+MH^2$,

c'est-à-dire $1=OH^2+MH^2$.

Or $OH=OM$ donc $1=2OH^2$ soit $OH^2=\frac{1}{2}$.

Ainsi, $OH=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Le triangle OMH est isocèle rectangle en H donc les angles $\widehat{HOM}$ et $\widehat{HMO}$ ont pour mesure 45°.

c) La mesure de l'angle $\widehat{HOM}$ est $\frac{\pi}{4}$ rad.

Donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos(\widehat{HOM})=\frac{OH}{OM}=\frac{OH}{1}=OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin(\widehat{HOM})=\frac{HM}{OM}=\frac{HM}{1}=HM=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

88 $\frac{101\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}=\frac{96\pi}{6}=8\times 2\pi$.

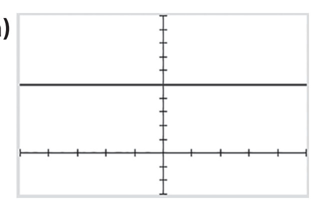
Les nombres réels $\frac{101\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ ont donc le même point image sur un cercle trigonométrique.

89 On suppose que la longueur de l'arc est supérieure à 0,5.

On a alors $(1-x)\times x\geqslant 0{,}5$ soit $-x^2+x-0{,}5\geqslant 0$.

Comme $\Delta=-1<0$, $-x^2+x-0{,}5$ est du signe de a donc $-x^2+x-0{,}5<0$ ce qui est contradictoire donc la longueur de l'arc est inférieure à 0,5.

90 **a)**



b) On peut émettre la conjecture pour tout nombre réel x,

$(\cos(x)+2\sin(x))^2+(2\cos(x)-\sin(x))^2=5$

En effet, $(\cos(x)+2\sin(x))^2+(2\cos(x)-\sin(x))^2$

$=\cos^2(x)+4\cos(x)\sin(x))+4\sin^2(x)$

$+4\cos^2(x)-4\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)$

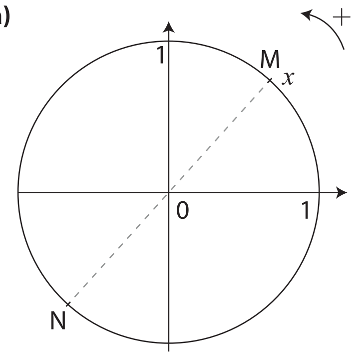
$=5\cos^2(x)+5\sin^2(x)$

$=5(\cos^2(x)+\sin^2(x))$

$=5\times 1=5$

172909_Chap07_000-000.indd 116 30/07/2019 14:51:54

91 **a)**



b) Le point N est l'image du nombre réel $\pi + x$.

c) N est le symétrique de M par rapport à O.

Ainsi les coordonnées de N sont les opposées de celles de M, soit :

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

92 Le périmètre du terrain rectangulaire est $(45+80)\times 2$ soit 250 m.

Le périmètre du second terrain est $2\times 45 + \ell_1 + \ell_2$ où ℓ_1 est la longueur du petit arc de cercle et ℓ_2 est la longueur du grand arc de cercle.

Or $\ell_1 = 40\times\dfrac{2\pi}{5} = 16\pi$ m et $\ell_2 = 85\times\dfrac{2\pi}{5} = 34\pi$ m

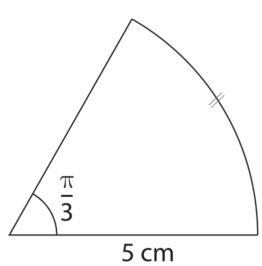
Ainsi le périmètre du second terrain est $90 + 16\pi + 34\pi$ soit environ 247 m.

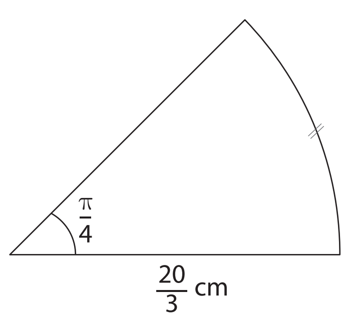
On en déduit que le terrain ayant le plus grand périmètre est le rectangulaire.

93 **a)** $\ell = 5\times\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$ cm

b) $\dfrac{5\pi}{3} = \mathrm{R}\times\dfrac{\pi}{4}$ donc $\mathrm{R} = \dfrac{20}{3}$ cm.

c) $\dfrac{\pi}{3}\text{rad} = 60°$ et $\dfrac{\pi}{4}\text{rad} = 45°$





94 • Arc rouge :

$$\ell_1 = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi$$

• Arc bleu :

$$\ell_2 = 4\times\frac{\pi}{4} = \pi$$

Les deux arcs sont de même longueur.

95 **a)** Le périmètre de la base est $2\times 2{,}4\times\pi$ soit $4{,}8\pi$ cm.

b) Ainsi $4{,}8\pi = 4\times\alpha$ d'où $\alpha = 1{,}2\pi$ rad.

96 On a $2 = \mathrm{R} = \dfrac{\pi}{5}$.

Ainsi $\mathrm{R} = \dfrac{10}{\pi}$ m.

La distance séparant Zoé du miroir est $\mathrm{R} \approx 3{,}18$ m.

97 **a)** LO = LS car O et S appartiennent à un même cercle de centre L.

LO = OS car L et S appartiennent à un même cercle de centre O.

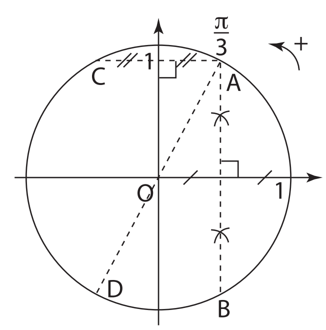
Ainsi, LO = LS = OS et le triangle SOL est équilatéral.

b) On a donc $\widehat{\mathrm{SOL}} = 60°$ soit $\widehat{\mathrm{SOL}} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

c) $\ell = 696\,000\times\dfrac{2\pi}{3}$ km

soit $\ell \approx 1\,457\,699$ km.

98 **a)**

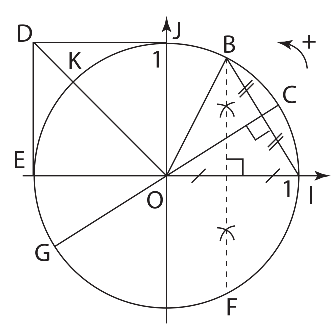


b) B : $-\dfrac{\pi}{3}$

c) C : $\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

d) D : $\dfrac{\pi}{3} - \pi = -\dfrac{2\pi}{3}$

99 **1.**



2. B : $\frac{\pi}{3}$; C : $\frac{\pi}{6}$; E : π ; F : $-\frac{\pi}{3}$; G : $\frac{7\pi}{6}$; K : $\frac{3\pi}{4}$

100 **a)** $\frac{101\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 16 \times 2\pi$

On peut donc effectuer 16 tours entiers.

b) Il reste alors $1 \times \frac{5\pi}{3}$ cm de fil soit environ 5,2 cm.

101 **a)** $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB} = 120°$

b) $\widehat{IOB} = 120° - 90° = 30°$

$\widehat{IOC} = \widehat{BOC} + \widehat{IOB} = 120° + 30° = 150°$

c) $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$rad

$\widehat{IOB} = \frac{\pi}{6}$rad

$\widehat{IOC} = \frac{5\pi}{6}$rad

d) I : 0 ; A : $\frac{\pi}{2}$; B : $-\frac{\pi}{6}$; C : $-\frac{5\pi}{6}$

102 **1. a)**

Valeur de x	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$x > 0$	Vrai		
$x > \pi$	Vrai	Vrai	Faux

Lorsque x prend la valeur $\frac{13\pi}{3}$, la valeur de x à la fin de l'algorithme est $\frac{\pi}{3}$.

b)

Valeur de x	$-\frac{19\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$x > 0$	Faux		
$x < -\pi$	Vrai	Vrai	Faux

Lorsque x prend la valeur $-\frac{19\pi}{6}$, la valeur de x à la fin de l'algorithme est $\frac{5\pi}{6}$.

2. Le rôle de cet algorithme est de stocker dans la variable x le nombre réel de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ qui a le même point image sur un cercle trigonométrique que le nombre réel affecté à x.

103 **a)** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

c) $3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 8\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 8\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - (-1) = 1.$

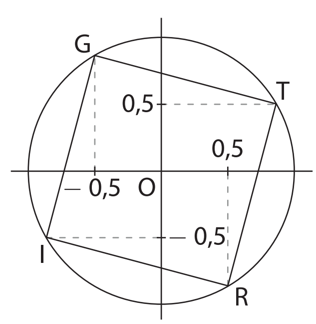
104 **a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx \dfrac{\pi^2 - 4\left(-\frac{\pi}{6}\right)^2}{\pi^2 + \left(-\frac{\pi}{6}\right)^2}$

soit $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx \dfrac{\frac{8}{9}\pi^2}{\frac{37}{36}\pi^2}$ d'où $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx \frac{32}{37}$

b) $\frac{32}{37} \approx 0{,}864\,864\,86$ et

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866\,025\,40\ldots$

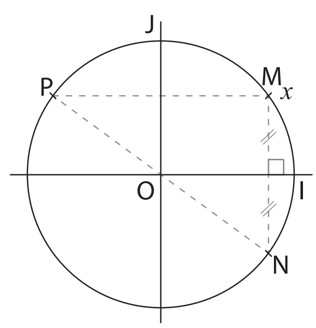
105 **a)**



b) $\widehat{GOT} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$rad

c) TRIG est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu O, sont de même longueur 2 et sont perpendiculaires. TRIG est donc un carré.

106 **1. a)**



b) N est le point image du nombre réel $-x$.

c) Ainsi $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

2. P est le symétrique de N par rapport à O.

P est le point image du nombre réel $\pi - x$.

Ainsi $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

107 **a)** On peut émettre la conjecture : pour tout nombre réel x,

$(1 + \cos(x) + \sin(x))^2 - 2(1 + \cos(x))(1 + \sin(x)) = 1$

b) $(1 + \cos(x) + \sin(x))^2 - 2(1 + \cos(x))(1 + \sin(x))$

$= 1 + \cos^2(x) + \sin^2(x) + 2\cos(x) + 2\sin(x)$

$+2\cos(x)\sin(x) - 2 - 2\sin(x)$

$-2\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x)$

$= 0$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$

108 **1. c)** On peut émettre la conjecture. N est le point image du nombre réel 2X.

2. • $\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ soit

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ d'où $\frac{\sqrt{3}}{2}=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On en déduit que $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-2}$ soit

$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ou $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

or $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

• $\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ soit

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

d'où $\frac{1}{2}=2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

109 **1. a)** $x=\frac{2\pi}{3}$ et $x=-\frac{2\pi}{3}$.

b) L'arc de cercle rouge a pour longueur $\frac{4\pi}{3}$.

c) Comme $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin=\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

la longueur totale du tracé rouge est :

$\ell=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit $\ell=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$.

On a donc $\ell\approx 5{,}92$.

2. a) $x=\frac{\pi}{6}$ et $x=\frac{5\pi}{6}$

b) $x=-\frac{3\pi}{4}$ et $x=-\frac{\pi}{4}$

c) Les deux arcs de cercle ont pour longueur $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$ soit $\frac{5\pi}{12}$.

De plus, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi la longueur totale du tracé vert est :

$\ell=2\times\frac{5\pi}{12}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ soit

$\ell=\frac{5\pi}{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

On a donc $\ell\approx 5{,}76$

110 **a)** Dans le triangle MOA rectangle en M,

$\cos(\widehat{MOA})=\frac{OM}{OA}=\frac{1}{2}$.

Ainsi $\widehat{MOA}=60°$ et M est l'image du nombre réel $\frac{\pi}{3}$.

111 Dans le triangle ANB rectangle en A,

$\tan(35°)=\frac{AN}{100}$

Dans le triangle ARB rectangle en A,

$\tan(55°)=\frac{AR}{100}$

Donc $AN\approx 70{,}02\,\text{m}$ et $AR\approx 142{,}81\,\text{m}$.

Ainsi, $NR\approx 72{,}79\,\text{m}$.

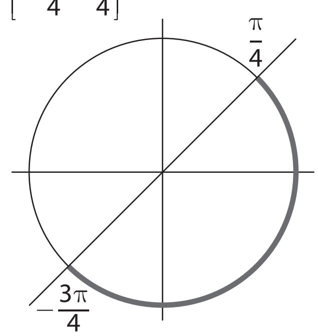
112 **a) L'affirmation est fausse.** En effet, il en existe une infinité.

En voici deux : $\cos^{-1}(0{,}7)$ et $\cos^{-1}(0{,}7)+2\pi$.

b) L'affirmation est fausse. En effet, pour tout nombre réel x, $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

113 **a) La réciproque est fausse.**

En effet, si $\cos(x)\geqslant\sin(x)$, alors x peut appartenir à l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$



b) La réciproque est fausse. En effet, par exemple,

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{3}\neq-\frac{\pi}{3}$.

c) La réciproque est fausse. En effet,

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{3\pi}{4}\neq\frac{\pi}{4}$.

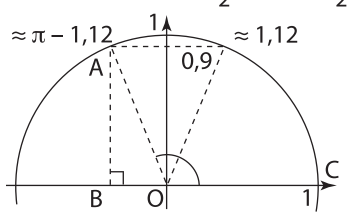
114 **a)** Pour $x=-\frac{\pi}{3}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui ne peut être égal à un nombre positif.

b) Pour $x=\frac{3\pi}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$

Organiser son raisonnement

115 **a)** L'échelle étant $\frac{1}{2}$, $AB = \frac{1{,}8 \text{ m}}{2} = 0{,}9$ m.

b)



x est le nombre réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\sin(x) = 0{,}9$.

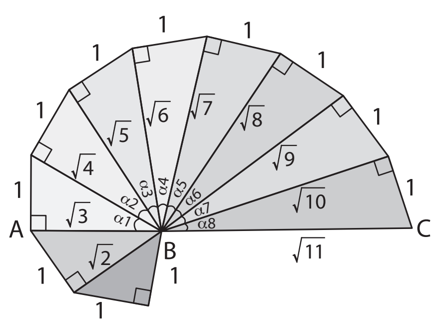
On a $\sin^{-1}(0{,}9) \approx 1{,}12$

d'où $x \approx \pi - 1{,}12$

Donc $x \approx 2{,}02$ m.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ est donc 2,02 m environ sur la maquette, et 4,04 m en réalité.

116 En appliquant successivement le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles colorés, on obtient les longueurs inscrites sur le schéma.



Ainsi, $\sin(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{4}}$; $\sin(\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$; … ; $\sin(\alpha_8) = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

On a alors :

$$\widehat{ABC} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \ldots + \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

$\widehat{ABC} \approx 179{,}02°$ et $\widehat{ABC} \neq 180°$.

Les points A, B, C ne sont pas alignés.

117

```
from math import *
N=int(input("Entrez un entier"))
S=0
for i in range(1,N+1):
    S=S+sin(i)/i
p=2*S+1
print(p)
```

118 • $\sin(\widehat{DAC}) = \frac{DC}{AC}$ or $DC = 29{,}7$

et $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 21^2 + 29{,}7^2$

donc $AC = \sqrt{1323{,}09}$

Ainsi $\widehat{DAC} = \sin^{-1}\left(\frac{29{,}7}{\sqrt{1323{,}09}}\right)$

• $\sin(\widehat{DAE}) = \frac{AI}{DI}$ où I est le milieu du segment $[AB]$.

Or $AI = \frac{1}{2}AB = 14{,}85$

et $DI^2 = DA^2 + AI^2 = 21^2 + 14{,}85^2$

donc $DI = \sqrt{611{,}522\,5}$

Ainsi $\widehat{DAE} = \sin^{-1}\left[\frac{14{,}85}{\sqrt{661{,}522\,5}}\right]$

• Or $\widehat{AED} = 180° - \widehat{DAE} - \widehat{DAC}$ soit $\widehat{AED} \approx 89{,}997$

Marc a tort, l'angle est quasi droit.

119 **1. a)** Le polygone est régulier à 6 côtés ; ainsi le triangle OAJ est équilatéral. Donc $\widehat{AOJ} = \frac{\pi}{3}$rad. et $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{6}$rad. A est donc le point image du nombre réel $\frac{\pi}{6}$.

b) $AH = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$BI = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

c) Le demi-périmètre du polygone rouge est :

$$p_1 = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

Le demi-périmètre du polygone bleu est :

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times 6 = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

On a donc $3 < \pi < \frac{6}{\sqrt{3}}$

2.

```
from math import *
def Archimede(N):
    u=3
    v=6/sqrt(3)

    for i in range(0,N):
        v=2*u*v/(u+v)
        u=sqrt(u*v)
    return (u,v)
```

b) Archimede (4) renvoie (3.141 031 950 890 510 2, 3.142 714 599 645 368 7)

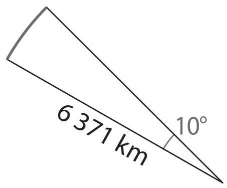
c) $\frac{223}{71} \approx 3{,}140\,845\,07$

$\frac{22}{7} \approx 3{,}142\,857\,143$

Remarque : Archimède n'avait pas les techniques actuelles pour effectuer ces calculs.

120 **1. a)** 10° degrés séparent les extrémités de cette frontière.

b)



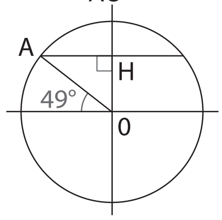
La frontière a une longueur égale à :

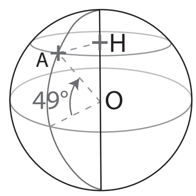
$\ell_1 = 6\,371 \times \dfrac{\pi \times 10}{180}$

$= \dfrac{6\,371}{18}\pi$ km soit $\ell_1 \approx 2\,002$ km

2. • Déterminons le rayon HA du 49° parallèle.

$\sin(\widehat{AOH}) = \dfrac{AH}{AO}$ donc $AH = 6\,371 \times \sin(41°)$ km





• Ensuite, le document permet d'estimer les degrés séparant les extrémités de la frontière, on lit $123° - 95° = 28°$.

La longueur de cette frontière est donc égale à

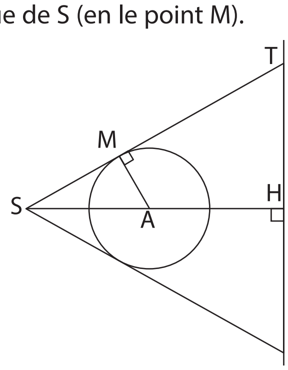
$\ell_2 = AH \times \dfrac{\pi \times 28}{180}$ soit

$\ell_2 = 6\,371 \times \sin(41°) \times \dfrac{\pi \times 28}{180}$ km

On a donc $\ell_2 \approx 2\,043$ km.

121 **1.** H est le point d'intersection de la droite (SA) avec le mur.

T est le point d'intersection du mur avec la tangente au cercle issue de S (en le point M).



Dans le triangle ASM, rectangle en M :

$\sin(\widehat{ASM}) = \dfrac{AM}{SA} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ donc $\widehat{ASM} = 30°$.

Dans le triangle STH, rectangle en H, $\tan(\widehat{HST}) = \dfrac{TH}{SH}$.

Ainsi, $\tan 30° = \dfrac{TH}{8}$

d'où $TH = 8\tan(30°) = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ et $TH \approx 4{,}62$ m.

Le diamètre du disque formé par l'ombre sur le mur est égal à $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ m soit environ 9,24 m.

122 On a $\tan(45°) = \dfrac{BC}{AB}$ et $\tan(60°) = \dfrac{BD}{AB}$

Ainsi $AB\tan(45°) = BC = BD - 7 = AB\tan(60°) - 7$

donc $AB(\tan(45°) - \tan(60°)) = -7$

soit $AB = \dfrac{7}{\tan(60°) - \tan(45°)}$

or $\tan(60°) = \dfrac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \sqrt{3}$

et $\tan(45°) = \dfrac{\sin(45°)}{\cos(45°)} = 1$

donc $AB = \dfrac{7}{\sqrt{3} - 1} \approx 9{,}56$ m

123 **1.** On peut émettre la conjecture :

$$AB^2 + CD^2 = 84$$

2. a) Dans le triangle OHB rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore :

$$OB^2 = OH^2 + HB^2$$

Ainsi $HB^2 = OB^2 - OH^2$.

Or $\sin(\alpha) = \dfrac{OH}{OM}$ donc $OH = OM\sin(\alpha)$.

On a alors $HB^2 = OB^2 - OM^2\sin^2(\alpha)$.

b) Le triangle AOB étant isocèle en O, H est le milieu de $[AB]$.

Ainsi $AB^2 = (2HB)^2$

$= 4HB^2$

$= 4OB^2 - 4OM^2\sin^2(\alpha)$

c) De même, $OC^2 = OK^2 + KC^2$

Ainsi $KC^2 = OC^2 - OK^2$ or $\cos(\widehat{MOK}) = \dfrac{OK}{OM}$ donc $OK = OM\cos(\alpha)$

On a alors $KC^2 = OC^2 - OM^2\cos^2(\alpha)$

On en déduit que :

$CD^2 = (2KC)^2$

$= 4KC^2$

$= 4OC^2 - 4OM^2\cos^2(\alpha)$

On a donc :

$AB^2 + CD^2$
$= 4OB^2 - 4OM^2 \sin^2(\alpha) + 4OC^2 - 4OM^2 \cos^2(\alpha)$
$= 4OB^2 + 4OC^2 - 4OM^2(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))$
$= 4OB^2 + 4OC^2 - 4OM^2$
$= 4 \times 25 + 4 \times 25 - 4 \times 4$
$= 84$

124 On remplace x par $\frac{\pi}{5}$, ce qui donne :

$$\sin(\pi) = 16\sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right) - 20\sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

On pose $X = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, on a ainsi :

$$16X^5 - 20X^3 + 5X = 0.$$

Or $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \neq 0$ donc l'équation est équivalente à :

$$16X^4 - 20X^2 + 5 = 0.$$

On pose $Y = X^2$, on a ainsi $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$.
Le discriminant valant 80, cette équation admet deux solutions distinctes.

$Y_1 = \frac{20 - \sqrt{80}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $Y_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$

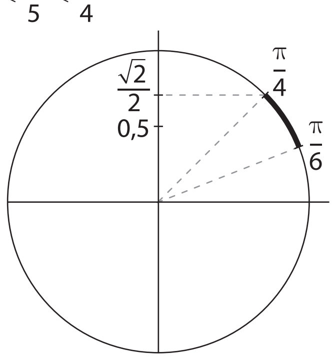
Ainsi $X_1^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $X_2^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$

On a alors :

$X_1 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ ou $X_1 = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$

et $X_2 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$ ou $X_1 = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$

De plus, $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$



Donc $0,5 < \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ parmi les 4 valeurs, la seule appartenant à l'intervalle $\left]0,5\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ est $X_1 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$

125 **1. a)** Dans le triangle BDC rectangle en D $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{BD}{BC}$ donc

$BD = BC\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Or $AD = AB - BD$.

Ainsi $AD = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Dans le triangle BCD rectangle en D, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{CD}{BC}$

donc $CD = BC\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Ainsi $CD = \frac{1}{2}$.

2. a) Le théorème de Pythagore dans le triangle ACD rectangle en D permet d'écrire $AC^2 = CD^2 + AD^2$.

D'où $AC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.
Donc $AC^2 = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} = 2 - \sqrt{3}$.

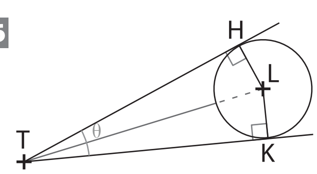
Ainsi $AC = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

b) $\widehat{ACD} = \pi - \widehat{ADC} - \widehat{CAD}$
$= \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
$= \frac{\pi}{12}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{CD}{CA} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{AD}{CA} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

126



La tangente (TH) au cercle issue de T est perpendiculaire au rayon $[HL]$. Ainsi le triangle THL est rectangle en H.
Les triangles THL et TKL ont deux côtés respectivement égaux et sont rectangles. D'après le théorème de Pythagore, ils ont donc trois côtés respectivement égaux et sont alors isométriques.

Ainsi $\widehat{HTL} = \widehat{LTK} = \frac{\theta}{2}$

Ainsi, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{HL}{TL}$ donc $TL = \frac{HL}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

soit $\text{TL} \approx \dfrac{\dfrac{3}{11} \times 6\,371}{\sin(0{,}25)}$

c'est-à-dire $\text{TL} \approx 398\,217$ km

127 Chaque point rouge est donc équidistant des deux autres. Le triangle formé par ces points est donc équilatéral, et les angles aux sommets sont donc égaux $\dfrac{\pi}{3}$rad.

On se place alors dans le repère $(\text{O}\,;\text{I}\,;\text{J})$. Le cercle rouge est donc de rayon 1. Les arcs rouges $\overset{\frown}{\text{AB}}$, $\overset{\frown}{\text{BC}}$ et $\overset{\frown}{\text{AC}}$ sont de même longueur et donc de longueur $\dfrac{2\pi}{3}$.

Sur le cercle rouge trigonométrique, les points A et B sont les images des réels $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

Or $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi $\text{AB} = \sqrt{3}$.

L'arc bleu $\overset{\frown}{\text{AB}}$ a pour longueur $\text{AB} \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

Le tracé bleu a donc une longueur égale à $\ell = \sqrt{3}\pi$

Le périmètre du cercle rouge est égal à $p = 2\pi$

On a donc $p = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\ell$.

128 Le théorème de Pythagore dans le triangle LEO rectangle en L permet d'écrire :

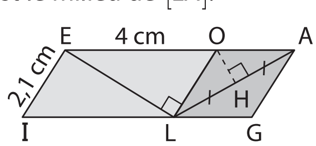
$\text{OE}^2 = \text{LE}^2 + \text{OL}^2$

Ainsi $\text{LE}^2 = \text{OE}^2 - \text{OL}^2$

d'où $\text{LE}^2 = 4^2 - 2{,}1^2 = 11{,}59$.

Donc $\text{LE} = \sqrt{11{,}59}$ cm soit $\text{LE} \approx 3{,}4$ cm.

• OLA est isocèle en O donc le pied H de la hauteur issue de O est le milieu de $[\text{LA}]$.



Ainsi, $\cos(\widehat{\text{OLH}}) = \dfrac{\text{LH}}{\text{LO}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\text{LA}}{2{,}1}$

et $\text{LA} = 4{,}2\cos(\widehat{\text{OLH}})$.

Or $\widehat{\text{OLH}} = \dfrac{1}{2}\widehat{\text{OLG}} = \dfrac{1}{2}\widehat{\text{EOL}}$.

En effet, OLG est aussi isocèle en L et (HL) est bissectrice de l'angle $\widehat{\text{OLG}}$.

Comme $\cos(\widehat{\text{EOL}}) = \dfrac{\text{OL}}{\text{EO}} = \dfrac{2{,}1}{4} = 0{,}525$

on en déduit que $\widehat{\text{EOL}} = \cos^{-1}(0{,}525)$

d'où $\widehat{\text{OLH}} = \dfrac{1}{2}\cos^{-1}(0{,}525)$

et $\text{LA} \approx 3{,}67$ cm donc $\text{LA} > \text{LE}$.

129 Le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B permet d'écrire :

$\text{AC}^2 = \text{AB}^2 + \text{BC}^2$.

Ainsi $\text{AC}^2 = 1^2 + 1^2$

et $\text{AC} = \sqrt{2}$.

Le théorème de Pythagore dans le triangle AEC rectangle en A permet d'écrire :

$\text{EC}^2 = \text{AE}^2 + \text{AC}^2$.

Ainsi $\text{EC}^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2$.

d'où $\text{EC}^2 = 3$ et $\text{EC} = \sqrt{3}$.

Donc dans le triangle AEC, $\sin(\widehat{\text{ECA}}) = \dfrac{\text{EA}}{\text{EC}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d'où $\widehat{\text{ECA}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Le triangle AOC est isocèle en O

donc $\widehat{\text{AOC}} = 180° - 2\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$\widehat{\text{AOC}} \approx 109{,}5°$.

130 **a)** D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}\ell^2 &= \text{R}^2 - h^2\\ &= 20^2 - h^2\\ &= 400 - h^2\end{aligned}$$

L'aire de la base vaut $\mathcal{A} = \pi\ell^2$
$= \pi(400 - h^2)$

Le volume du cône vaut donc

$\text{V}(h) = \dfrac{1}{3}\pi(400 - h^2)h$

b) $\text{V}(h) = \dfrac{1}{3}\pi(400h - h^3)$

$\text{V}'(h) = \dfrac{1}{3}\pi(400 - 3h^2)$

On a $\text{V}'(h) = 0 \Leftrightarrow 400 - 3h^2 = 0$

$\Leftrightarrow h^2 = \dfrac{400}{3}$

$\Leftrightarrow h = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ ou $h = -\dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction V.

h	0		$\dfrac{20}{\sqrt{3}}$		20
$\text{V}'(h)$		$+$	0	$-$	
$\text{V}(h)$	0	$\nearrow$	$\text{V}\left(\dfrac{20}{\sqrt{3}}\right)$	$\searrow$	0

Le volume du cône est maximal lorsque $h = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ cm.

c) Le périmètre de la base est alors égal à :

$$\begin{aligned} p &= 2\pi\ell \\ &= 2\pi\sqrt{400 - h^2} \\ &= 2\pi\sqrt{400 - \frac{400}{3}} \\ &= 40\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ cm} \end{aligned}$$

La longueur du cercle de base est aussi la longueur de l'arc de cercle du carton restant après avoir ôté le secteur circulaire d'angle au centre de mesure α.

On a donc, $40\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 20(2\pi - \alpha)$

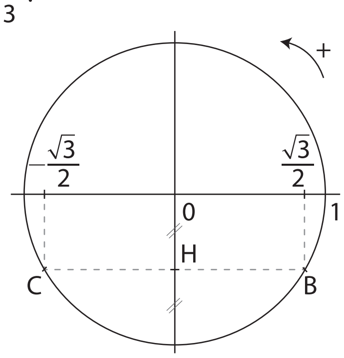
Ainsi $20\alpha = 40\pi - 40\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ d'où $\alpha = 2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$rad

soit $\alpha \approx 66°$.

Exploiter ses compétences

131 Tout d'abord, on réalise un croquis : ABC est un triangle équilatéral, d'après le Doc. 1, inscrit dans le cercle de rayon 1 (unité = 45 cm d'après le Doc. 2).

Les arcs de cercle $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{BC}$ sont donc de même longueur $\dfrac{2\pi}{3}$.



Ainsi A, B, C sont les points image respectifs des réels $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Or $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi, sur le croquis, $AH = 1{,}5$, $HB = HC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En réalité, $AH = 1{,}5 \times 45 = 67{,}5$ cm

$HB = HC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 45 \approx 39$ cm

Installation :

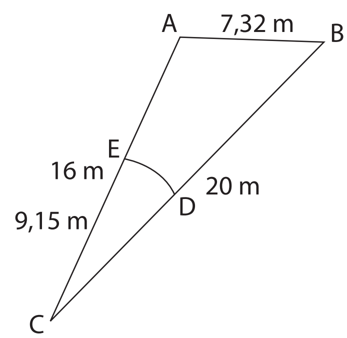
① On perce le point A.

② À l'aide du niveau, on trace un trait vertical partant de A et on place H à 67,5 cm de A.

③ À l'aide du niveau, on trace un trait horizontal passant par H et on perce les point B et C tels que $HB = HC = 39$ cm.

132 On réalise un schéma.

• Déterminons l'angle $\widehat{ACB}$. On utilise la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC.



$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos(\widehat{ACB})$

Ainsi $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{7{,}32^2 - 16^2 - 20^2}{-2 \times 16 \times 20}$

soit $\cos(\widehat{ACB}) = 0{,}941\,277\,5$

L'angle $\widehat{ACB}$ est égal à environ 0,344 rad

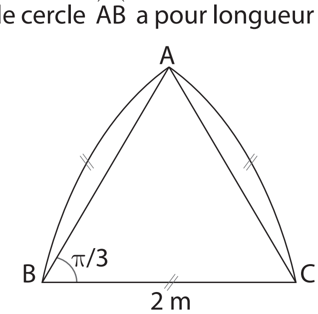
• L'arc de cercle $\overset{\frown}{DE}$ représentant le mur a une longueur égale à $\ell \approx 9{,}15 \times 0{,}344$ m soit $\ell \approx 3{,}15$ m

133 <u>Coût</u>

On complète le plan de face du Doc. 2 par le triangle ABC équilatéral de côté 2 m.

L'angle $\widehat{ABC}$ est donc égal à $\dfrac{\pi}{3}$rad.

Ainsi l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ a pour longueur $\ell = \dfrac{\pi}{3} \times 2$ m.

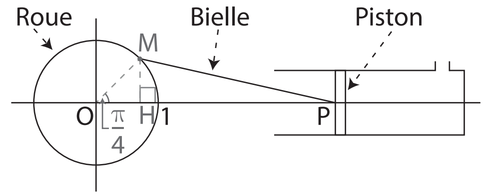


Soit $\ell \approx 2{,}1$ m donc $\ell \approx 1{,}5 \text{ m} + 6 \times 0{,}1$ m

Bruno peut choisir entre des rouleaux de 1 m ou 2 m de large.

<u>Coût pour des rouleaux de 1 m de large</u>
Le coût serait de $4 \times (120\text{ €} + 6 \times 10\text{ €})$ soit 720 €
<u>Coût pour des rouleaux de 2 m de large</u>
Le coût serait de $2 \times (280\text{ €} + 6 \times 13\text{ €})$ soit 716 €.
Bruno va donc choisir les rouleaux de 2 m de large.
<u>Déclaration en mairie</u>
H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{AH}{AB}$ donc $AH = AB\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ soit $AH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ m c'est-à-dire $AH \approx 1{,}73$ m ce qui est inférieur à 1,80 m.
Ainsi la serre de Bruno ne nécessite aucune formalité particulière.

134 Après 15,125 secondes, la roue aura fait, d'après le doc 2, 15 tours et $\frac{1}{8}$ de tour. Le point M est donc l'image du nombre réel $\frac{2\pi}{8}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique représenté par la roue.



Ainsi, $MH = OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m De plus, le théorème de Pythagore dans le triangle MHP rectangle en H donne : $MP^2 = MH^2 + HP^2$ donc $HP^2 = 3^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ soit $HP = \sqrt{\frac{17}{2}}$ m.
On en déduit que la distance d vaut $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{17}{2}}$ m soit environ 3,62 m.

172909_Chap07_000-000.indd 125 30/07/2019 14:53:41

8 Fonctions sinus et cosinus

Découvrir

1 Les fonctions trigonométriques

1 **b)** On remarque que point U appartient au cercle trigonométrique.
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;2\pi]$, $OU^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donc $OU = 1$.

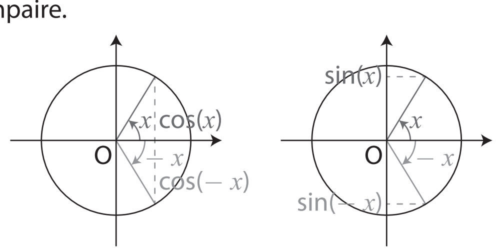
2 **b)** $M(t\,;\sin(t))$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
Le point M décrit donc la courbe représentative de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

3 **b)** $P(t\,;\cos(t))$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
Le point P décrit donc la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

2 Parité et périodicité de cos et sin

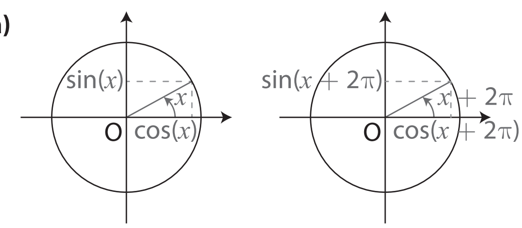
1 On sait que $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ donc la courbe rouge représente la fonction cos et la courbe bleue représente la fonction sin.

2 **a)** On observe que la courbe rouge est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que la courbe bleue est symétrique par rapport à l'origine du repère. On peut conjecturer que la fonction cos est paire et que la fonction sin est impaire.
b)



$\cos(-x) = \cos(x)$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$.

3 **a)**



Pour tout x, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$.
b) Graphiquement on peut tracer les courbes représentatives des fonctions cos et sin sur les intervalles $[-3\pi\,;-\pi]$, $[\pi\,;3\pi]$, … par translation de vecteur $-2\pi\vec{i}$, $2\pi\vec{i}$,…

Acquérir des automatismes

3 **a)** Pour tout nombre réel x,
$g(-x) = 2\cos(-x) - \cos(-2x)$
$g(-x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$
g est donc une fonction paire.
La fonction cosinus est paire, il en est de même des fonctions $x \mapsto \cos(ax+b)$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$).
b) g est une fonction paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère. Donc la courbe de g est affichée sur l'écran 2.

4 **a)** Pour tout nombre réel x,

$$h\left(x + \frac{4\,\pi}{3}\right) = \cos\left(1{,}5\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$h\left(x + \frac{4\,\pi}{3}\right) = \cos\left(1{,}5x + 1{,}5 \times \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$h\left(x + \frac{4\,\pi}{3}\right) = \cos(1{,}5x + 2\pi) = \cos(1{,}5x) = h(x).$$

Donc la fonction h est périodique de période $\dfrac{4\pi}{3}$.

b) Une graduation en abscisse représente $\frac{\pi}{3}$ donc la partie de la courbe qui se « répète » doit être tracée sur 4 graduations, ce qui est le cas de l'écran ❸.

5 **a)** $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ **d)** $\sin(\pi) = 0$

6 Pour tout nombre réel x,

$$\sin(x + 9\pi) = \sin(x + \pi + 4 \times 2\pi)$$
$$= \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

Julie n'a donc pas raison.

7 On conjecture que la fonction f est impaire et périodique de période 1.

8 La fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ donc f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

L'affirmation (2) est donc exacte.

9 La fonction f est paire et la fonction g est impaire.

b) La fonction f est périodique de période π.

La fonction g est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

c) La translation du vecteur $\pi\vec{i}$ laisse invariante la courbe $\mathscr{C}_f$.

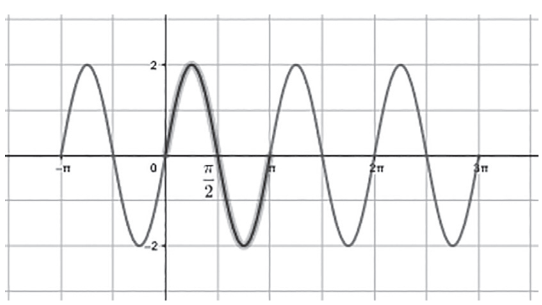
La translation du vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ laisse invariante la courbe $\mathscr{C}_g$.

10 **a)** h a pour période 0,5.

b) Pour tout nombre réel x,

$h(x + 1) = h(x + 0{,}5 + 0{,}5) = h(x + 0{,}5) = h(x)$

11



12 **a)** f est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à O) et périodique de période 2.

b) Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = -2\sin(-2x) = -(-2\sin(2x)) = -f(x)$

f est donc impaire.

Pour tout nombre réel x,

$$f(x + 2) = -2\sin(\pi(x + 2)) = -2\sin(\pi x + 2\pi)$$
$$= -2\sin(\pi x) = f(x)$$

(La fonction sinus est périodique de période 2π).

13 **a)** Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$.

La fonction f est donc impaire.

b) On peut déduire que la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

14 **a)** Pour tout nombre réel x,

$g(-x) = -x + \sin(-x)$

$g(-x) = -x - \sin(x)$

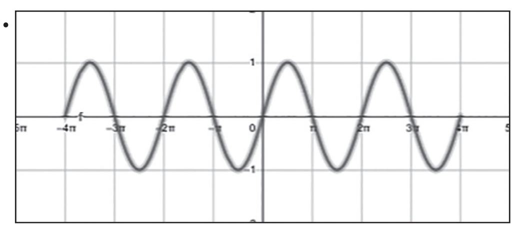
$g(-x) = -(x + \sin(x))$

$g(-x) = -g(x)$.

La fonction g est donc impaire.

b) On peut déduire que la courbe représentative de la fonction g est symétrique par rapport à l'origine du repère.

15 **1.**



2. a) $(0 ; 0)$ **b)** $(3\pi ; 0)$ **c)** $(-2\pi ; 0)$

16 **a)** Pour tout nombre réel x,

$f(x + 8) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 8)\right)$

$f(x + 8) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x + 2\pi\right)$

$f(x + 8) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

$f(x + 8) = f(x)$.

La fonction f est donc périodique de période 8.

b) Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}(-x)\right)$

$f(-x) = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}(x)\right)$

$f(-x) = -f(x)$.

La fonction f est donc impaire.

c) À partir du tracé de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$, on obtient par symétrie de centre l'origine du repère la courbe sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ puis par translation de vecteur $8\vec{i}$ la courbe sur l'intervalle $[-4 ; 12]$.

17 **a)** Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,

$$C(t + 4) = 250\sin\left(\frac{\pi}{2}(t + 4)\right) = 250\sin\left(\frac{\pi}{2}t + 2\pi\right)$$
$$= 250\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = C(t).$$

b) On peut en déduire que la concentration du médicament sera nulle au bout de 4 h dans le sang du patient.

18 **a)** Dans $[0\,;\pi]$, $\sin(x)=0{,}5$ équivaut à $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$.

b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, $\sin(x)=0{,}5$ équivaut à $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$.

c) $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17\pi}{6}$
On utilise le fait que sin est de période 2π. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{13\pi}{6}\,;\frac{17\pi}{6}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\sin(x)=0{,}5$ équivaut à $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi\,;\frac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}\text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$

19 **a)** Dans $[0\,;\pi]$, $1+2\sin(x)=0$ équivaut à $\sin(x)=-0{,}5$.
Or sur $[0\,;\pi]$, $\sin(x)\geqslant 0$ donc l'équation n'a pas de solution.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\varnothing$.

b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, $\sin(x)=-0{,}5$ équivaut à $x=-\frac{5\pi}{6}$ ou $x=-\frac{\pi}{6}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\right\}$.

c) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{7\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$.
On utilise le fait que la fonction sin est périodique de période 2π.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{7\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\sin(x)=-0{,}5$ équivaut à $x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}=\left\{-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\,;-\frac{\pi}{6}+k2\pi\right\}\ k\in\mathbb{Z}.$$

20 **a)** Dans $[0\,;\pi]$, $-4\sin(t)+2\sqrt{3}=0$ équivaut à $\sin(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{2\pi}{3}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right\}$.

b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, $\sin(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{2\pi}{3}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right\}$.

c) $\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{8\pi}{3}$.
On utilise le fait que la fonction sin est périodique de période 2π.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{7\pi}{3}\,;\frac{8\pi}{3}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi\,;\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}\text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$

21 **1.** La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

2. a) • L'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ est symétrique par rapport à O donc c'est la parité qui permet d'obtenir le sens de variations de *f* sur $[-\pi\,;\pi]$

• $0+2\pi=2\pi$ et $\pi+2\pi=3\pi$

C'est la périodicité qui permet d'obtenir le sens de variations de *f* sur $[2\pi\,;3\pi]$

• $0-2\pi=-2\pi$ et $\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3\pi}{2}$

C'est la périodicité qui permet d'obtenir le sens de variations de *f* sur $[-4\pi\,;-3\pi]$

b)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	2π		$\frac{5\pi}{2}$		3π
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

22 **1. a)** Périodicité : $3\pi - 2\times 2\pi = -\pi$ et $4\pi - 2\times 2\pi = 0$.
b) Parité : les intervalles $[-4\pi\,;-3\pi]$ et $[3\pi\,;4\pi]$ sont symétriques par rapport à 0.
c) Parité : l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ est symétrique par rapport à 0.

2.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	0

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

x	-4π		$-\frac{7\pi}{2}$		-3π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

23 **a)** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ **d)** $\cos(\pi) = -1$.

24 Pour tout nombre réel x,
$\cos(x+10\pi) = \cos(x+5\times 2\pi) = \cos(x)$ car la fonction cos a pour période 2π.
Fiona a donc raison.

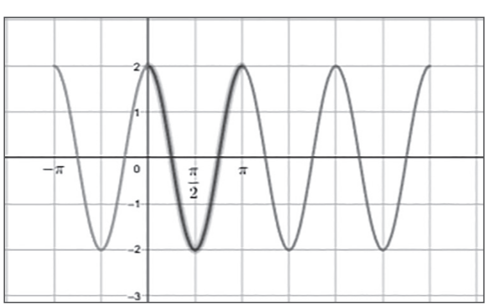
25 On peut conjecturer que *f* est paire et de période 1.

26 (3) *f* est croissante sur $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$.

27 **a)** *h* a pour période 1.
b) Pour tout nombre réel x, $h(x+2\times 1) = h(x)$.

28 **a)** *f* et *g* sont des fonctions paires.
b) *f* a pour période π et *g* a pour période $\frac{\pi}{2}$.

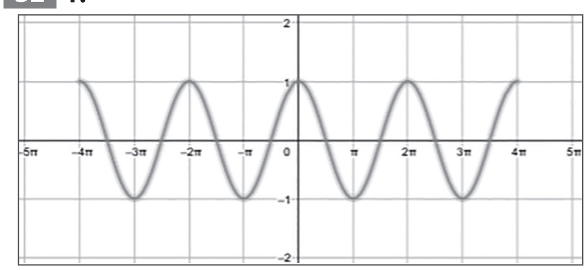
29



30 **a)** *f* semble paire et sa période semble être 2.
b) • Pour tout nombre réel x,
$f(-x) = -2\cos(\pi(-x)) = -2\cos(\pi x) = f(x)$
(La fonction cos est paire).
f est donc paire.
• Pour tout nombre réel x,
$f(x+2) = -2\cos(\pi(x+2)) = -2\cos(\pi x + 2\pi)$
$= -2\cos(\pi x)$
(La fonction cos a pour période 2π).
f est donc périodique de période 2.

31 **a)** Pour tout nombre réel x,
$f(-x) = \cos(2(-x)) = \cos(-2x) = \cos(2x)$
(La fonction cos est paire).
Donc *f* est paire.
b) On peut déduire que la courbe représentative dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

32 **1.**



2. a) $x = 0$ **b)** $x = 3\pi$ **c)** $x = -2\pi$ **d)** $x = 2\pi$.

33 **a)** Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,
$P(t+0{,}75) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}(t+0{,}75)\right)$
$P(t+0{,}75) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t + 2\pi\right)$
$P(t+0{,}75) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$
(La fonction cos a pour période 2π).
$P(t+0{,}75) = P(t)$.
b) Un cycle dure 0,75 s donc dans 60 secondes il y a $\frac{60}{0{,}75} = 80$ cycles c'est-à-dire 80 battements de cœur.

34 **a)** Dans $[0\,;\pi]$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.
b) La fonction cos est paire donc dans $[-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right\}$.
c) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$

On utilise le fait que cos a pour période 2π.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{7\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi ; -\frac{\pi}{4} + k2\pi\right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

35 **a)** Dans $[0 ; \pi]$, $\sqrt{3} + 2\cos(x) = 0$ équivaut à $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = \frac{5\pi}{6}$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$.

b) La fonction cos est paire donc dans $[-\pi ; \pi]$, $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

c) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$.

On utilise le fait que cos a pour période 2π.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{7\pi}{6} ; \frac{17\pi}{6}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6} + k2\pi ; -\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\} \; k \in \mathbb{Z}.$$

36 **1.** La fonction cos est décroissante sur $[0 ; \pi]$ et croissante sur $[\pi ; 2\pi]$.

2. a) • C'est la parité qui permet d'obtenir à partir des variations de *f* sur $[0 ; 2\pi]$ celles sur $[-2\pi ; 0]$.

• $0 + 3 \times 2\pi = 6\pi$ et $2\pi + 3 \times 2\pi = 8\pi$.

C'est donc la périodicité qui permet d'obtenir le sens de variations de *f* sur $[6\pi ; 8\pi]$ à partir de la question 1.

• $0 - 2 \times 2\pi = -4\pi$ et $\pi - 2 \times 2\pi = -3\pi$.

C'est donc la périodicité qui permet d'obtenir le sens de variations de *f* sur $[-4\pi ; 2\pi]$.

b)

x	-2π		$-\pi$		0
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1

x	6π		7π		8π
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1

x	-4π		-3π
$f(x)$	1	↘	-1

37 **1. a)** $\pi - 2\pi = -\pi$ et $3\pi - 2\pi = \pi$.

C'est donc la périodicité qui permet d'obtenir le tableau de variations de cos sur $[-\pi ; \pi]$.

b) C'est la parité qui permet d'obtenir le tableau de variations de cos sur $[-3\pi ; -\pi]$.

c) $\pi + 2\pi = 3\pi$ et $3\pi + \pi = 4\pi$

C'est donc la symétrie d'axe $x = 3\pi$ qui permet d'obtenir le tableau de variations de cos sur $[2\pi ; 4\pi]$.

2.

x	$-\pi$		0		π
$\cos(x)$	-1	↗	1	↘	-1

x	-3π		-2π		$-\pi$
$\cos(x)$	-1	↗	1	↘	-1

x	2π		3π		4π
$\cos(x)$	1	↘	-1	↗	1

38 **1.** B **2.** D **3.** C **4.** A **5.** B

39 **1.** B. C.

2. C.

3. A. B. D.

4. D.

40 **1.** • Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = 2\cos(3(-x)) = 2\cos(-3x) = 2\cos(3x) = f(x)$

f est donc paire.

• Pour tout nombre réel x,

$g(-x) = 2\sin(3(-x)) = 2\sin(-3x) = -2\sin(3x) = -g(x)$

g est donc impaire.

L'affirmation est donc fausse.

2. $f(0) = 2\cos(0) = 2$ et $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos(\pi) = -2$

$f(0) \neq f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ donc f n'est pas périodique de période $\dfrac{\pi}{3}$.

L'affirmation est donc fausse.

3. Pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \cos(3x) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant 2\cos(3x) \leqslant 2$ c'est-à-dire $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

L'affirmation est donc vraie.

4. Pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} g(x+2\pi) &= 2\sin(3(x+2\pi)) = 2\sin(3x+6\pi) \\ &= 2\sin(3x) = g(x) \end{aligned}$$

(La fonction sinus est périodique de période 2π).

L'affirmation est donc vraie.

41 • La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et elle passe par le point de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;1\right)$, il s'agit donc de la courbe ❸.

• La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et passe par le point de coordonnées $(\pi\,;\,-1)$, il s'agit donc de la courbe ❷.

42 **a)** La période est 3.

b) La période est π.

43 • Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = \sin^2(-x) - 3\cos(-x)$

$f(-x) = (-\sin(x))^2 - 3\cos(x)$ (La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire).

$f(-x) = \sin^2(x) - 3\cos(x)$

$f(-x) = f(x)$.

La fonction f est donc paire.

• Pour tout nombre réel x,

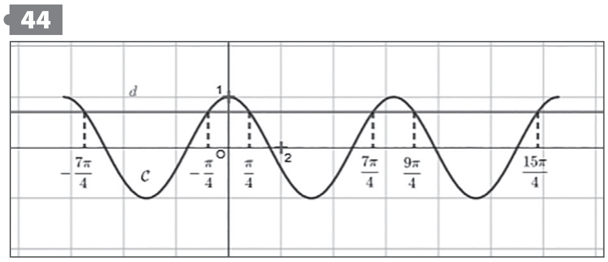
$g(-x) = \sin(-x)\cos(-x)$

$g(-x) = -\sin(x)\cos(x)$ (La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire).

$g(-x) = -g(x)$.

La fonction g est donc impaire.

44



S'entraîner

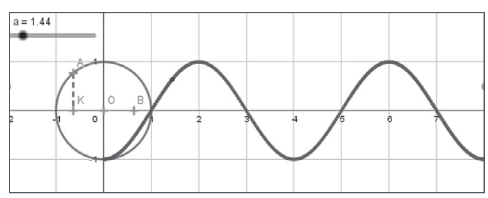
46

```
from math import *
a=0
b=pi/2
while b-a>0.01:
    m=(a+b)/2
    if cos(m)>0.4:
        a=m
    else:
        b=m
print("La valeur de a est :",a)
print("La valeur de b est :",b)
```

47

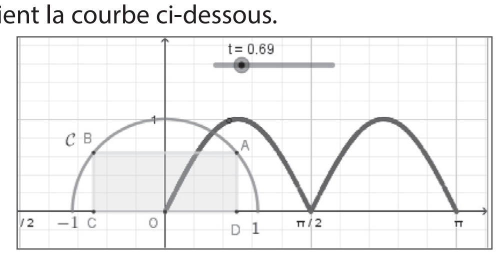
```
from math import *
a=pi/4
b=pi/2
while b-a>0.01:
    m=(a+b)/2
    if sin(m)>0.75*m:
        a=m
    else:
        b=m
print("La valeur de a est :",a)
print("La valeur de b est :",b)
```

49 **a)** Lorsqu'on déplace le curseur de 0 à 8, on obtient la courbe ci-dessous.



b) On peut conjecturer qu'on obtient une sinusoïde de période 4.

50 **a)** Lorsqu'on déplace le curseur de 0 à π, on obtient la courbe ci-dessous.



b) On peut conjecturer qu'on obtient une sinusoïde de période $\dfrac{\pi}{2}$.

51 **a)** Pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(ax+b) = \cos(ax+b+2\pi) \\ &= \cos\left(a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right) = f\left(x+\frac{2\pi}{a}\right) \end{aligned}$$

(car la fonction cos a pour période 2π). Ainsi $T = \dfrac{2\pi}{a}$.

b) À partir du graphique, on constate que g a pour période 4 et que $g(0) = \dfrac{1}{2}$.

Donc $a = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$g(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x + b\right)$

$g(0) = \cos(b) = \dfrac{1}{2}$.

Or $0 < b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos(b) = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $b = \dfrac{\pi}{3}$.

Ainsi $g(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

52 On pose h la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par
$h(x) = f(x) - g(x)$
$h(x) = \cos^2(x) - \cos(x) = \cos(x)(\cos(x) - 1)$
Pour tout nombre réel x de $[0\,;\pi]$, $\cos(x) \leqslant 1$ donc $\cos(x) - 1 \leqslant 0$.

Sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\cos(x) \leqslant 0$.

On dresse le tableau de signes de $f(x)$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x) - 1$	0	$-$		$-$	
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$-$	0	$+$	

La position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est donnée par le signe de $h(x)$.
D'après le tableau $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(0\,;0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;0\right)$.

53 **1. a)** Pour tout nombre réel x,
$f(-x) = 3\cos(2(-x)) = 3\cos(-2x) = 3\cos(2x) = f(x)$
La fonction f est donc paire.

b) D'après **a)**, la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on peut donc restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. a) Pour tout nombre réel x,

$$f(x+\pi) = 3\cos(2(x+\pi)) = 3\cos(2x + 2\pi)$$
$$= 3\cos(2x) = f(x).$$

La fonction f est donc périodique de période π.

b) On peut restreindre l'étude de f à un intervalle d'amplitude π, donc à $[0\,;\pi]$.

3. • Pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $0 \leqslant 2x \leqslant \pi$.
La fonction cos étant décroissante sur $[0\,;\pi]$ on déduit que la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc f également.

• Pour tout x de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ on a $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ donc $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$.
La fonction cos étant croissante sur $[\pi\,;2\pi]$ on déduit que la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et donc f également.

54 **a)** Dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ équivaut à $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

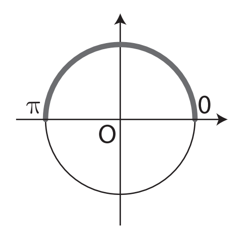
b) Il s'agit du cercle trigonométrique ②.

c) Dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $2\cos(x) - \sqrt{3} \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à x appartient à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{6}\right]$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $2\cos(x) - \sqrt{3} \geqslant 0$ est donc :

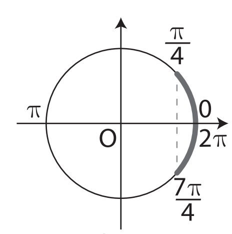
$$\mathscr{S} = \left[-\frac{\pi}{6} + k2\pi\,;\frac{\pi}{6} + k2\pi\right] \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

55 **1. a)** On trace en gras sur le cercle trigonométrique l'ensemble des points M associés aux nombres réels x tels que $\sin(x) \geqslant 0$.



On déduit que l'ensemble des solutions dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ de l'inéquation $\sin(x) \geqslant 0$ est $\mathscr{S}_1 = [0\,;\pi]$.

b) On trace en gras sur le cercle trigonométrique l'ensemble des points M associés aux nombres réels x tels que $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



On déduit que l'ensemble des solutions dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ de l'inéquation $-\sqrt{2} + 2\cos(x) \geqslant 0$ est $\mathscr{S}_2 = \left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}\,;2\pi\right]$.

2. a)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$-\sqrt{2}+2\cos(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(-\sqrt{2}+2\cos(x))\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

b) D'après le tableau de signes obtenu au **a)**, on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation E est $\mathcal{S} = \left]\frac{\pi}{4}\,;\pi\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}\,;2\pi\right[$.

56 **1.** Pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $\frac{x}{2} - 1 \leqslant \frac{x}{2} + \sin(x) \leqslant 1 + \frac{x}{2}$

c'est-à-dire $\frac{x}{2} - 1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{2} + 1$.

2. **a)** La courbe $\mathscr{C}$ est située entre les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $y = \frac{x}{2} - 1$ et $y = \frac{x}{2} + 1$.

b) L'équation $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ équivaut à $\sin(x) = -1$ c'est-à-dire à $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathscr{C}$ coupe donc d_1 en une infinité de points.

L'équation $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ équivaut à $\sin(x) = 1$ c'est-à-dire à $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathscr{C}$ coupe donc d_2 en une infinité de points.

d_1 et d_2 ont le même coefficient directeur $\left(\frac{1}{2}\right)$, donc elles sont parallèles.

57 **a)** $f(0) = 1$ et $\mathrm{T} = 2$

b) • Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,
$f(x) = \sqrt{2}\sin(ax + b) = \sqrt{2}\sin(ax + b + 2\pi)$
(La fonction sin a pour période 2π)

$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) + b\right)$

$f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)$.

Or T est la période donc $\frac{2\pi}{a} = \mathrm{T}$ c'est-à-dire $a\mathrm{T} = 2\pi$.

• $f(0) = 1$ équivaut à $\sqrt{2}\sin(b) = 1$.

a et b vérifient donc le système $\begin{cases} a\mathrm{T} = 2\pi \\ \sqrt{2}\sin(b) = 1 \end{cases}$.

c) $a\mathrm{T} = 2\pi$ donc $a = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation équivaut à $\sqrt{2}\sin(b) = 1$ équivaut à $\sin(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $b = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$.

58 **a)** On peut conjecturer que la fonction g a un maximum en $x \approx -1$ égal à 1 et un minimum en $x \approx 2$ égal à -1.

b) Sur $[-\pi\,;\pi]$, l'équation $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ équivaut à $x + \frac{\pi}{3} = 0$ c'est-à-dire $x = -\frac{\pi}{3}$.

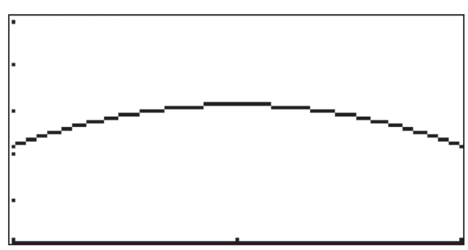
$g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos(0) = 1$ et on sait que pour tout x de $[-\pi\,;\pi]$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$ donc 1 est atteint par g donc le maximum de g sur $[-\pi\,;\pi]$ est 1 obtenu en $-\frac{\pi}{3}$.

Sur $[-\pi\,;\pi]$, l'équation $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ équivaut à $x + \frac{\pi}{3} = \pi$ ou $x + \frac{\pi}{3} = -\pi$ c'est-à-dire $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{4\pi}{3}$.

Or $-\frac{4\pi}{3} \notin [-\pi\,;\pi]$.

$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\pi) = -1$ et pour tout x de $[-\pi\,;\pi]$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant -1$ donc -1 est atteint par g donc le minimum de g sur $[-\pi\,;\pi]$ est -1 obtenu en $\frac{2\pi}{3}$.

59 **1. a)** On trace à la calculatrice dans la fenêtre $\frac{\pi}{4} \leqslant \mathrm{X} \leqslant \frac{\pi}{2}$, pas $\frac{\pi}{8}$; $0 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 10$, pas 2 la courbe représentative de R.



On conjecture que le maximum de $\mathrm{R}(\theta)$ est 6,25 m.

b) $\mathrm{R}(\theta) = \frac{100}{16}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 6{,}25\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

Pour tout nombre réel θ de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{R}(\theta) \leqslant 6{,}25$ car $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$.

Sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{R}(\theta) = 6{,}25$ équivaut à $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ équivaut à $2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ équivaut à $\theta = \frac{3\pi}{8}$.

La valeur 6,25 est atteinte pour $\theta = \frac{3\pi}{8}$ donc $\mathrm{R}(\theta)$ est maximum pour $\frac{3\pi}{8}$.

2. $R(\theta) = \dfrac{v^2}{16}\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Pour tout nombre réel θ de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$R(\theta) \leqslant \dfrac{v^2}{16}$ car $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$.

Sur $\left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $R(\theta) = \dfrac{v^2}{16}$ équivaut à $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

c'est-à-dire $2\theta - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui donne $\theta = \dfrac{3\pi}{8}$.

$\dfrac{v^2}{16}$ est atteint par R donc le maximum de R est $\dfrac{v^2}{16}$ qui dépend de v.

La vitesse influence donc la distance horizontale maximale.

60 **1.** $H(0) = -6{,}4\sin(0) - 11{,}6\cos(0) + 13{,}9 = 2{,}3$

$B(0) = -7{,}4\sin(0) - 9{,}5\cos(0) + 5{,}4 = -4{,}1$.

L'écart de températures au 1er janvier est de $2{,}3 - (-4{,}1) = 6{,}4$ °C.

2. a) La valeur $x = 0$ correspond à la valeur $t = 0$ c'est-à-dire au 1er janvier.

La valeur $e = 6{,}4$ correspond à l'écart de températures au 1er janvier.

b) x représente le temps en mois, *e* l'écart de températures à l'instant *t* et *m* le mois où l'écart de températures est le plus grand.

c) On obtient l'affichage ci-dessous.

```
>>>
10.825182104125261
5.1999999999999975
```

Le plus grand écart de températures est de 10,8 °C et il est obtenu au cours du 5e mois.

3.

```
from math import *
def H(x):
    y=-6.4*sin(pi*x/6)-11.6*cos(pi*x/6)+13.9
    return y
def B(x):
    y=-7.4*sin(pi*x/6)-9.5*cos(pi*x/6)+5.4
    return y
x=0
e=6.4
while x<12:
    d=H(x)-B(x)
    if d<e:
        e=d
        m=x
    x=x+0.1
print(e)
print(m)
```

```
>>>
6.174817895874739
11.199999999999976
```

61 **a)** Pour tout réel *t* de $[0 ; 5]$,

$$f(t+5) = 0{,}6\sin\left(\frac{2\pi}{5}(t+5)\right) = 0{,}6\sin\left(\frac{2\pi}{5}t + 2\pi\right)$$
$$= 0{,}6\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = f(t).$$

La période d'un cycle est donc $T = 5$ s.

b) Pour tout réel $t \in [0 ; 5]$,

• $0{,}6\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right) = 0{,}3$ équivaut à $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right) = \dfrac{1}{2}$

équivaut à $\dfrac{2\pi}{5}t = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{2\pi}{5}t = \dfrac{5\pi}{6}$

équivaut à $t = \dfrac{5}{12}$ ou $t = \dfrac{25}{12}$

La personne inspire $0{,}3\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$ à $t = \dfrac{5}{12}$ s et à $t = \dfrac{25}{12}$ s.

• Pour $t \in [0 ; 5]$, $0{,}6\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right) = -0{,}3$ équivaut à

$-\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right) = -0{,}5$

équivaut à $\dfrac{2\pi}{5}t = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $\dfrac{2\pi}{5}t = \dfrac{11\pi}{6}$

équivaut à $t = \dfrac{35}{12}$ ou $t = \dfrac{55}{12}$

La personne expire $0{,}3\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$ à $t = \dfrac{35}{12}$ s et à $t = \dfrac{55}{12}$ s.

62 **1. a)** On peut conjecturer que *f* est paire et périodique de période 2π.

b) Pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{1}{2+\cos(-x)} = \frac{1}{2+\cos(x)} = f(x).$$

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{2+\cos(x+2\pi)} = \frac{1}{2+\cos(x)} = f(x).$$

c) D'après **b)**, *f* est paire donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0 ; +\infty[$.

De plus, *f* est périodique de période 2π, donc on peut étudier le sens de variations de *f* sur $[0 ; \pi]$.

2. a) Pour tout nombre réel x de $[0 ; \pi]$,

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{(\cos(x)+2)^2}.$$

$\sin(x) \geqslant 0$ et $(\cos(x)+2)^2 > 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$, *f* est donc croissante sur $[0 ; \pi]$.

b) On obtient la courbe représentative de *f* sur $[-\pi ; \pi]$ par la symétrie d'axe des ordonnées puis on applique les translations de vecteurs $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$.

63 **1. a)** Pour tout nombre réel x,

$g(x+2\pi) = (1+\cos(x+2\pi))\sin(x+2\pi)$

$g(x+2\pi) = (1+\cos(x))\sin(x)$ car sin et cos ont pour période 2π.

$g(x+2\pi) = g(x)$.

La fonction *g* est donc périodique de période 2π.

b) Pour tout nombre réel x,

$g(-x) = (1+\cos(-x))\sin(-x)$

$g(-x) = (1+\cos(x))\times(-\sin x)$

La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.
$g(-x) = -g(x)$.
La fonction g est donc impaire.
c) La parité de g permet de restreindre l'étude de la fonction g à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et sa périodicité à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

2. a) Par la lecture graphique, $g'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ et $g'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$ et $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{3}$.

b)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

x	-2π	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$g(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

64 **a)** $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
Or $\frac{\pi}{2} > 1$
La proposition est donc fausse.

b) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0.$

La proposition est donc vraie.
c) Pour tout nombre réel x,

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}(x+12)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}x + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-24)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}x - 4\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}x - 2\times 2\pi\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right).$$

La proposition est donc vraie.

65 **a)** Pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
Si x est solution de (E) alors $\sin(x) = \frac{x}{2}$ donc $-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
b) Si x est solution de (E) alors $\sin(x) = \frac{x}{2}$
donc $-\sin(x) = -\frac{x}{2}$
donc $\sin(-x) = \frac{-x}{2}$
donc $-x$ est solution de (E).

66 $0) = \frac{0}{2} + \cos(0) = 1$

$f(0+2\pi) = f(2\pi) = \frac{2\pi}{2} + \cos(2\pi) = \pi + 1$

$f(0) \neq f(0+2\pi)$ donc l'affirmation est fausse.

b) $\frac{\pi}{4} \in [0\,;\,1]$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$
L'affirmation est donc fausse.

Organiser son raisonnement

67 **a)**Pour tout réel x,

$$f(x+10) = \sin\left(\frac{\pi}{5}(x+10)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}x + 2\pi\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) = f(x).$$

$$g(x+6) = \sin\left(\frac{\pi}{3}(x+6)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x + 2\pi\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) = g(x).$$

Ainsi f est de période $T_1 = 10$ et g de période $T_2 = 6$.

b) On pose $\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ irréductible.
Ainsi $bT_1 = aT_2$.
Pour tout nombre réel x,
$h(x + bT_1) = f(x + bT_1) + g(x + aT_2)$
$= f(x) + g(x) = h(x)$
donc $T = bT_1 = aT_2$
(car f a pour période T_1 et g a pour période T_2).
c) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{2}$ donc $a = 5$, $b = 3$
et $T = 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$.

68 **1. a)** On pose $X = \sin(x)$.
L'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0$.
b) $2X^2 + X - 1 = 0$ si et seulement si $X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-1\,;\,\frac{1}{2}\right\}$.
c) $X = \sin x$
Dans $[0\,;\,2\pi[$, $\sin x = -1$ si et seulement si $x = \frac{3\pi}{2}$
$\sin x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} \,;\, \frac{5\pi}{6} \,;\, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

2. Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

L'équation (F) est équivalente à :

$$1 - \sin^2 x + 2\sin^2(x) = 2$$

c'est-à-dire à $\sin^2(x) = 1$.

On pose $\mathrm{X} = \sin(x)$.

L'équation (F) s'écrit $\mathrm{X}^2 = 1$ qui admet pour solution $\mathrm{X} = -1$ ou $\mathrm{X} = 1$.

Dans $[-\pi \,;\, \pi]$, $\sin(x) = 1$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin(x) = -1$ si et seulement si $x = -\frac{\pi}{2}$

L'ensemble des solutions de (F) est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right\}$.

69 **a)** Pour tout nombre réel t de $\left[0 \,;\, \frac{2\pi}{13}\right]$,

$$-0{,}65 \leqslant v(t) \leqslant 0{,}65.$$

$v(t) = 0{,}65$ si et seulement si $\sin(13t) = 1$

si et seulement si $13t = \frac{\pi}{2}$

si et seulement si $t = \frac{\pi}{26}$

$v(t) = -0{,}65$ si et seulement si $\sin(13t) = -1$

si et seulement si $13t = \frac{3\pi}{2}$

si et seulement si $t = \frac{3\pi}{26}$

Ainsi, la vitesse maximale est $0{,}65\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ à l'instant $t = \frac{\pi}{26}$ s et la vitesse minimale est $-\,0{,}65\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ à l'instant $t = \frac{3\pi}{26}$ s.

b) $v(t) = 0$ si et seulement si $\sin(13t) = 0$

si et seulement si $13t = 0$ ou $13t = \pi$ ou $13t = 2\pi$,

si et seulement si $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{13}$ ou $t = \frac{2\pi}{13}$.

$$h\left(\frac{2\pi}{13}\right) = 0{,}05\cos\left(13 \times \frac{2\pi}{13}\right) = 0{,}05\cos(2\pi) = 0{,}05.$$

$$h\left(\frac{\pi}{13}\right) = 0{,}05\cos\left(13\left(\frac{\pi}{13}\right)\right)$$

$$= 0{,}05\cos(\pi) = -0{,}05 \text{ et } h(0) = 0{,}05.$$

Les vitesses sont nulles lorsque le piston est dans sa position haute et basse.

70 **a)** For any real number $t \geqslant 0$, $\mathrm{O}(t) \leqslant 180$

$\mathrm{O}(t) = 180$ equals $30\sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) = 30$

equals $\frac{\pi}{10}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

equals $t = 5 + 20k$ with $k \in \mathbb{N}$

The maximum number of owls is 180, this occurs after 5 years.

b) For any real number $t \geqslant 0$, $\mathrm{M}(t) \geqslant 300$

$\mathrm{M}(t) = 300$ equals $\sin\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{20}\right) = -1$

equals $\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ with $k \in \mathbb{N}$

equals $t = \frac{29}{2} + 20k$ with $k \in \mathbb{N}$

The minimum number of mice is 300, this occurs after 14,5 years.

c) When the number of mice increases, the owl population increases too, and reaches the maximum, however the mice population often plummets, leaving too little food for owls whose population also then crashes.

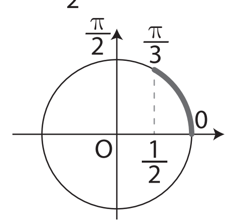
71 **a)** Pour tout nombre réel x de $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)(2\cos(x) + 2) = 2\cos^2(x) + 2\cos(x) - \cos(x) - 1$$

$$= 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1.$$

b) Pour tout x de l'intervalle $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$, $2\cos(x) + 2 > 0$.

Sur $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) - \frac{1}{2} = 0$ équivaut à $x = \frac{\pi}{3}$.



L'ensemble des points M associés aux nombres réels x tels que $\cos(x) - \frac{1}{2} \geqslant 0$ est tracé en gras.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) - \frac{1}{2} \geqslant 0$ est $\mathcal{S} = \left[0 \,;\, \frac{\pi}{3}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\cos(x) + 2$		$+$		$+$	
$\cos(x) - \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$		$+$	0	$-$	

L'inéquation a pour ensemble de solution l'intervalle $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{3}\right]$.

72 Le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1

Ses coordonnées dans le repère orthonormé $(\mathrm{O, A, C})$ sont $(\cos(t) \,;\, \sin(t))$ avec $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Le point P a donc pour coordonnées $(\sin(t)\,;\,\sin(t))$ car il appartient à la droite (OB) d'équation $y = x$.
Le point Q a pour coordonnées $(\sin(t)\,;\,0)$.
L'aire du rectangle PQAR est $\text{QA} \times \text{QP}$.
$\text{QA} = 1 - \sin(t)$ et $\text{QP} = \sin(t)$.
Donc l'aire de PQAR est $(1 - \sin(t)) \times \sin(t)$ c'est-à-dire $-\sin^2(t) + \sin(t)$.
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} -\sin^2(t) + \sin(t) - 0{,}25 &= -(\sin^2(t) - \sin(t) + 0{,}25) \\ &= -(\sin(t) - 0{,}5)^2 \end{aligned}$$

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$,
$-(\sin(t) - 0{,}5)^2 \leqslant 0$
donc $-\sin^2(t) + \sin(t) - 0{,}25 \leqslant 0$
c'est-à-dire $-\sin^2(t) + \sin(t) \leqslant 0{,}25$.
On a donc démontré que quelle que soit la position du point M, l'aire du rectangle PQAR est inférieure ou égale à 0,25.

73 Pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin(x) \times (1 - \sin(x))$
Pour tout x, $\sin(x) \leqslant 1$ donc $1 - \sin(x) \geqslant 0$.
Pour tout x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]$, $\sin(x) \leqslant 0$ et pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$.
On dresse le tableau de signes de $f(x)$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$1 - \sin(x)$		$+$		$+$	0
$\sin(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0

La position relative de la courbe représentative de f par rapport à l'axe des abscisses du repère est donnée par le signe de $f(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
Sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]$, $f(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessous de l'axe des abscisses, et sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
$f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$.

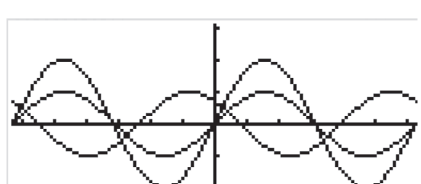
74 • La fonction $t \mapsto 50\sin(\omega t) + 50$ a pour période $\frac{2\pi}{\omega}$.
• Le potentiel physique a pour période 23 jours donc $\frac{2\pi}{\omega} = 23$ ce qui donne $\omega = \frac{2\pi}{23}$.
• Le potentiel émotionnel a pour période 28 jours donc $\frac{2\pi}{\omega} = 28$ ce qui donne $\omega = \frac{2\pi}{28}$.
• Le potentiel physique a pour période 33 jours donc $\frac{2\pi}{\omega} = 33$ ce qui donne $\omega = \frac{2\pi}{33}$.
b) Le potentiel physique d'un individu est à 100 % si et seulement si $\sin\left(\frac{2\pi}{23}t\right) = 1$
si et seulement si $\frac{2\pi}{23}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$.
si et seulement si $t = \frac{23}{4} + 23k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Le potentiel émotionnel d'un individu est à 100 % si et seulement si $\sin\left(\frac{2\pi}{28}t\right) = 1$ si et seulement si $\frac{2\pi}{28}t = \frac{\pi}{2} + k'2\pi$ avec $k' \in \mathbb{N}$.
si et seulement si $t = \frac{28}{4} + 28k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$.
Les potentiels physique et émotionnel sont à 100 % si et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$. tels que $\frac{23}{4} + 23k = \frac{28}{4} + 28k'$ c'est-à-dire $23k - 28k' = \frac{5}{4}$ soit $4(23k - 28k') = 5$.
Or $23k - 28k'$ est un nombre entier.
Donc on aurait 4 qui divise 5 qui est un nombre premier. Ce qui absurde.
Les potentiels physique et émotionnel ne peuvent être simultanément à 100 %. Il en est donc de même pour les trois potentiels.
c) $50\sin\left(\frac{2\pi}{23} \times 7\,305\right) + 50 \approx 18{,}4$

$50\sin\left(\frac{2\pi}{28} \times 7\,305\right) + 50 \approx 18{,}8$

$50\sin\left(\frac{2\pi}{33} \times 7\,305\right) + 50 \approx 87{,}8$

Une personne de 20 ans a un très bon potentiel intellectuel et des potentiels physique et émotionnel beaucoup plus faibles.

75 **1. a)**



b) On peut conjecturer que la translation de vecteur $-\frac{3\pi}{4}\vec{i}$ permet de passer de $\mathscr{C}_f$ à $\mathscr{C}_g$.
c) Pour tout nombre réel x,
$g\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin(x) = f(x)$.

Donc les point M d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$ et N d'abscisse $x-\frac{3\pi}{4}$ de $\mathscr{C}_g$ ont la même ordonnée.

d) On peut donc construire $\mathscr{C}_g$ à partir de $\mathscr{C}_f$ par une translation de vecteur $-\frac{3\pi}{4}\vec{i}$.

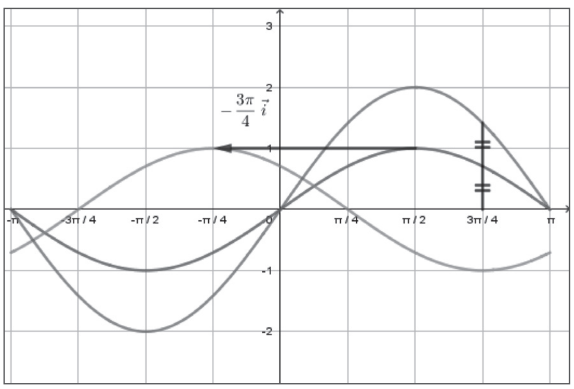
2. Pour tout nombre réel x,

$$h(x)=2\sin(x)=2f(x).$$

Donc l'ordonnée du point P d'abscisse x de $\mathscr{C}_h$ est le double de l'ordonnée du point M de $\mathscr{C}_f$ de même abscisse x.

Pour construire $\mathscr{C}_h$ à partir de $\mathscr{C}_f$, on prend un point M de $\mathscr{C}_f$ et on construit le point P de $\mathscr{C}_h$ dont l'ordonnée est le double de celle de M.

3.



76 **a)** $A(0)=500+\cos(0)+\sqrt{3}\sin(0)=501$

Le point de référence est à 501 m.

b) Pout tout nombre réel x,

$$500+2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=500+2\left[\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$500+2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=500+2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$500+2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=500+\sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{4}\right)+\cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$=A(x).$$

c) L'altitude maximale est 502 m.

En effet pour tout x, $A(x)\leqslant 502$ et $A\left(\frac{4\pi}{3}\right)=502$.

Une personne part à 25 km à l'est du point de référence $(x=25)$ pour aller à 25 km à l'ouest $(x=-25)$ donc x appartient à l'intervalle $[-25\,;25]$.

La fonction A est périodique de période $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

$$\frac{4\pi}{3}+8\pi=\frac{28\pi}{3}>25$$

$$\frac{4\pi}{3}-8\pi=-\frac{20\pi}{3}>-25$$

$$\frac{4\pi}{3}-2\times 8\pi=-\frac{4\pi}{3}<-25.$$

La personne atteint donc 2 fois l'altitude maximale.

77 **a)** La longueur de la ligne brisée OABCD est $OA+AB+BC+CD$.

$$OA^2=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}=\frac{\pi^2+8}{16}$$

donc $OA=\dfrac{\sqrt{\pi^2+8}}{4}$

$$AB^2=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

$$AB^2=\frac{\pi^2}{16}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

Donc $AB=\dfrac{\sqrt{\pi^2+24-16\sqrt{2}}}{4}$

Par symétrie ; $BC=AB$ et $CD=OA$.

D'où

$$OA+AB+BC+CD=\frac{\sqrt{\pi^2+8}}{2}+\frac{\sqrt{\pi^2+24-16\sqrt{2}}}{2}$$

$$OA+AB+BC+CD\approx 3{,}79$$

b) Pour tout $n=1000$ et $n=2\,000$ on obtient les résultats ci-dessous.

```
>>> Longueur(1000)
3.820197296312374
>>> Longueur(2000)
3.8201976658488292
```

On peut donc supposer qu'une valeur approchée à 2 chiffres significatifs après la virgule est 3,82.

Pour déterminer le plus petit entier n, on modifie le programme.

```
from math import *

def Longueur():
    n=4
    L=0
    while L<3.82:
        L=0
        n=n+1
        p=pi/n
        for k in range(0,n):
            a=k*pi/n
            b=a+p
            L=L+sqrt(p**2+(sin(b)-sin(a))**2)
    return n
```

On obtient

```
>>> Longueur()
50
```

78 **a)** Dans le triangle OHC rectangle en H, $OH=\cos(\alpha)$ et et $HC=\sin(\alpha)$ donc l'aire du rectangle ABCD est $2OH\times 2HC=4\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

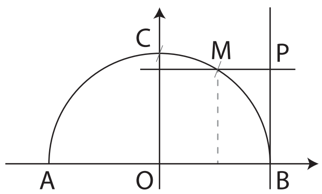
Le volume du parallélépipède rectangle est donc $3\times 4\cos(\alpha)\sin(\alpha)$ c'est-à-dire $12\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

b) Le volume du parallélépipède peut s'écrire $6\sin(2\alpha)$.

Il est maximum lorsque $\sin(2\alpha) = 1$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

c'est-à-dire lorsque $2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ soit $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

79 Dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$, M a pour coordonnées $(\cos(t)\,;\,\sin(t))$ avec $0 < t < \pi$



P a pour coordonnées $(1\,;\,\sin(t))$ et A a pour coordonnées $(-1\,;\,0)$

$\mathrm{AM} = 2\mathrm{MP}$ équivaut à $\mathrm{AM}^2 = 4\mathrm{MP}^2$

équivaut à $(1+\cos(t))^2 = 4(1-\cos(t))^2$

équivaut à

$\cos^2(t) + 2\cos(t) + 1 + \sin^2(t) = 4(1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))$

équivaut à $2(\cos(t)+1) = 4(1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))$

équivaut à $2\cos^2(t) - 5\cos(t) + 1 = 0$.

On pose $\mathrm{X} = \cos(t)$.

L'équation s'écrit $2\mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 1 = 0$.

$\Delta = 17$ et $\mathrm{X}_1 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$ et $\mathrm{X}_2 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$

$\mathrm{X}_1 > 1$ donc $\cos(t) = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$

ce qui donne $t \approx 1{,}35$ rad.

Il existe donc un unique point M tel que $\mathrm{AM} = 2\mathrm{MP}$.

80 Un motif bleu est représenté sur une période.

La fonction g semble périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

Pour tout nombre réel x,

$$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\cos\left(6\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi)\cos(6x + 4\pi)$$

$$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x)\cos(6x) = g(x).$$

La fonction g a donc pour période $\dfrac{2\pi}{3}$.

On cherche le plus grand entier k tel que $k \times \dfrac{2\pi}{3} \leqslant 2\,019$

c'est-à-dire $k \leqslant \dfrac{6\,057}{2\pi}$. On obtient $k = 964$.

Il y a donc 964 périodes sur l'intervalle $[0\,;\,2\,019]$.

Par symétrie (la fonction g est impaire) on peut conclure qu'il y a 2×964 soit 1928 motifs bleus.

81 **1. a)** $\mathscr{C}_f$ semble au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;\,+\infty[$

b) La valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semble maximal est 1,6.

2. Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$h(x) = g(x) - f(x)$

$h(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$

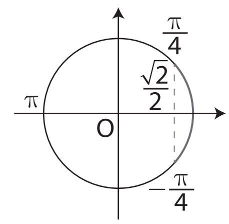
$h(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - \cos(x))$.

Pour tout $x \geqslant 0$, $1 - \cos(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $h(x) \geqslant 0$.

C'est-à-dire $f(x) \leqslant g(x)$.

$\mathscr{C}_f$ est donc au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. a) • Pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

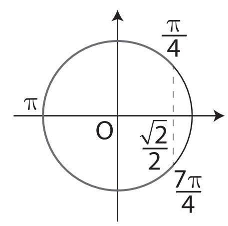


$-\dfrac{\pi}{4} \leqslant x - \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

donc $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$.

• Pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$,



$\dfrac{\pi}{4} \leqslant x - \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{7\pi}{4}$

donc $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

et $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.

b)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
e^{-x}		$+$		$+$	
$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$		$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	0

La fonction h admet un maximum en $\dfrac{\pi}{2}$ donc l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal est $\dfrac{\pi}{2}$.

172909_Chap08_000-000.indd 140 30/07/2019 15:19:11

Exploiter ses compétences

82 À partir du Doc. 1, la période du mouvement est $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{n}$.

D'après le Doc. 3,

- $\mathrm{T} = 16$ donc $\dfrac{2\pi}{n} = 16$, et $n = \dfrac{\pi}{8}$.
- $x(2) = 0$ donc $\mathrm{C}\sin(2n + \alpha) = 0$ comme $\mathrm{C} \neq 0$

$2n + \alpha = 0$ donc $\alpha = -2n = -\dfrac{\pi}{4}$

- $v(4) = 2\pi$ donc $\dfrac{\pi}{8} \times \mathrm{C}\cos\left(4 \times \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\pi$

donc $\mathrm{C}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 16$

donc $\mathrm{C} = 16\sqrt{2}$.

L'amplitude du mouvement est $16\sqrt{2}$ m.

83 • D'après le Doc. 1 :

$\mathrm{L}(0) = 40\,000$ et $\mathrm{L}(6) = 25\,000$.

D'après le Doc. 2 : $\mathrm{L}(0) = a + b$ et $\mathrm{L}(6) = a$

On déduit que $a = 25\,000$ et $b = 15\,000$.

• D'après le Doc. 1 : $\mathrm{C}(0) = 5\,000$ et $\mathrm{C}(6) = 7\,000$

D'après le Doc. 2 : $\mathrm{C}(6) = c + d$ et $\mathrm{C}(0) = c$

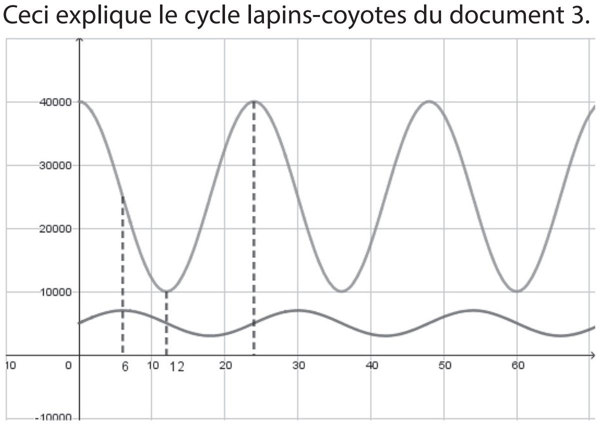
On déduit que $c = 5\,000$ et $c = 2\,000$.

On trace les courbes représentatives des fonctions C et L.

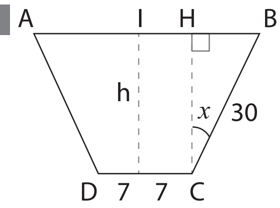
Les populations de lapins et de coyotes ont le même cycle qui est de 6 ans.

La population de lapins est au maximum (40 000) en 2012. Et décroît jusqu'en 2024. Celle des coyotes en 2012 est de 5 000 individus et croît jusqu'en 2018. Puis décroît jusqu'en 2030.

Ceci explique le cycle lapins-coyotes du document 3.



84



Dans le triangle HBC rectangle en H :

$\cos(x) = \dfrac{\mathrm{HC}}{30}$ donc $h = 30\cos(x)$.

$\sin(x) = \dfrac{\mathrm{HB}}{30}$ donc $\mathrm{HB} = 30\sin(x)$.

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB} = 7 + \mathrm{HB} = 7 + 30\sin(x)$

donc $\mathrm{AB} = 2(7 + 30\sin(x))$.

L'aire du trapèze ABCD est :

$$\frac{(\mathrm{CD} + \mathrm{AB}) \times h}{2} = \frac{[14 + 2(7 + 30\sin(x))] \times 30\cos(x)}{2}$$

c'est-à-dire $30(14 + 30\sin(x))\cos(x)$.

On note f la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = 30(14 + 30\sin(x))\cos(x)$.

D'après le Doc. 3, $f'(x) = 900\cos(2x) - 420\sin(x)$

Donc $f'(x) = 900[-2\sin^2(x) + 1] - 420\sin(x)$

$f'(x) = -1800\sin^2(x) - 420\sin(x) + 900$

On pose $\mathrm{X} = \sin(x)$.

$f'(x) = 0$ s'écrit donc $-1800\mathrm{X}^2 - 420\mathrm{X} + 900 = 0$

$\Delta = 6\,656\,400$ et $\mathrm{X} = \dfrac{3}{5}$ ou $\mathrm{X} = -\dfrac{5}{6}$.

$f'(x) = -1800\left(\sin(x) + \dfrac{5}{6}\right)\left(\sin(x) - \dfrac{3}{5}\right)$

Pour tout nombre x de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$ donc $\sin(x) + \dfrac{5}{6} > 0$.

$0 \leqslant \dfrac{3}{5} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc il existe a tel que $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Pour tout $x \geqslant \alpha$, $\sin(x) \geqslant \sin(\alpha)$ car sin est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(x) - \dfrac{3}{5} \geqslant 0$.

On dresse le tableau de variations de *f*.

x	0		α		$\dfrac{\pi}{2}$
$-1800\left(\sin(x) + \dfrac{5}{6}\right)$		$-$		$-$	
$\sin(x) - \dfrac{3}{5}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	420	↗	768	↘	0

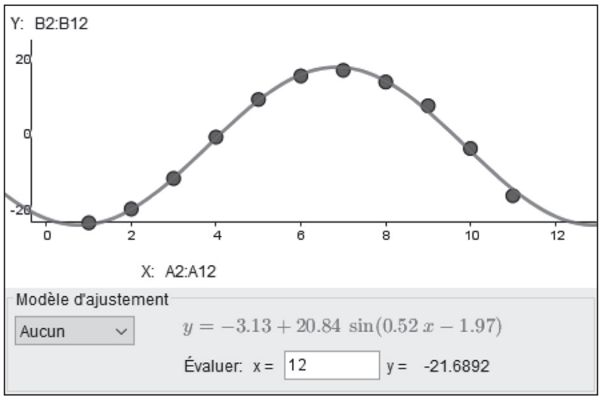
$f(x) = 30(14 + 30\sin(\alpha))\cos(x) = 30\left(14 + 30 \times \frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{5}$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ donc $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

car $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

À la calculatrice $\alpha \approx 0{,}64$ rad soit environ $36{,}9\ °$.
L'équilibre est maximum pour α rad.

85 En utilisant le tableur de GeoGebra on obtient l'écran ci-dessous. On peut estimer qu'au mois de décembre la température était de $-21{,}7$ °C.



9 Produit scalaire et calcul vectoriel

Découvrir

1 Le travail d'une force en physique

1 a)

$\widehat{BAC}$	0°	30°	45°	60°	120°
W	**50 000**	**25 000$\sqrt{3}$**	**25 000$\sqrt{2}$**	25 000	− **25 000**

b) Dans ce cas, $\widehat{BAC} = 90°$ d'où $\cos(\widehat{BAC}) = 0$, donc $W = 0$. En conséquence, le travail (l'efficacité) de la force est nulle. Louise a donc raison.

2 a) $W = AB \times \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.
Comme $AB > 0$ et $\|\vec{F}\| > 0$, il vient :
$W > 0$ équivaut à $\cos(\widehat{BAC}) > 0$,
soit $0° \leqslant \widehat{BAC} < 90°$.
$W = 0$ équivaut à $\cos(\widehat{BAC}) = 0$,
soit $\widehat{BAC} = 90°$.
$W < 0$ équivaut à $\cos(\widehat{BAC}) < 0$,
soit $90° < \widehat{BAC} \leqslant 180°$.

b) $W < 0$ équivaut à $\widehat{BAC}$ est obtus, ce qui signifie que le vent exerce une force contraire au sens de déplacement de Vincent.

2 Une expression du produit scalaire

1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
Dans les deux figures : $\widehat{BAC} = \widehat{HAC}$ et le triangle ACH est rectangle en H.
D'où $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{HAC}) = \dfrac{AH}{AC}$
soit $AH = AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.

L'affirmation de Fred est donc vraie : il suffit de mesurer les longueurs AB et AH.

2 a) $(\widehat{BAC}) = 180° - \widehat{HAC}$, d'où
$\cos(\widehat{BAC}) = \cos(180° - \widehat{HAC}) = -\cos(\widehat{HAC})$.

b) Dans le triangle ACH, rectangle en H, $\cos(\widehat{HAC}) = \dfrac{AH}{AC}$.
Donc, $AH = AC \times \cos(\widehat{HAC}) = -AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
D'où, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times (-AH)$, c'est-à-dire
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

c) Il suffit donc de mesurer les longueurs AB et AH pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$: Fred a donc raison.

Acquérir des automatismes

3 a) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = DE \times DC \times \cos(\widehat{CDE})$.
Le triangle AED est équilatéral donc $\widehat{ADE} = 60°$,
d'où $\widehat{CDE} = 90° - 60° = 30°$.

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = 4 \times 5 \times \cos(30°) = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

b) ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.
D'où $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = DA \times DE \times \cos(\widehat{ADE})$
$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DE} = 4 \times 4 \times \cos(60°) = 8$

4 a) Le triangle ABC est isocèle en C, donc le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est I.
D'où $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens, d'où : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BI \times BA = 2{,}5 \times 5 = 12{,}5$.

b) Le projeté orthogonal du point A sur (CI) est I donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CI}^2 = CI^2$.
D'après le théorème de Pythagore, $CI^2 = CA^2 - AI^2$, donc $CI^2 = 36 - 6{,}25 = 29{,}75$.
D'où $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = 29{,}75$.

7 **a)** H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \times 2 = -8$.
b) D'autre part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
D'où $-8 = 4 \times 5 \times \cos(\widehat{BAC})$,
c'est-à-dire $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-8}{20} = -\dfrac{2}{5}$.
Donc avec la calculatrice, il vient $\alpha \approx 114°$.

8 $\overrightarrow{AB}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;1)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$.
Par projection orthogonale sur (AB),
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AK$. D'où, $AK = \dfrac{10}{AB} = \dfrac{10}{\sqrt{8}}$
soit $AK \approx 3{,}5$.

11 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$,
$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF}$,
$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = -AD^2 + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} + AE \times DF$.
Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = -AD^2 + AE \times DF = -4 + 1 \times 4 = 0$.
Donc les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.

12 Dans le repère orthonormé $(A\,; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$:
$A(0\,;0)$, $D(0\,;2)$, $K\left(\dfrac{4}{3}\,;0\right)$, $C(3\,;2)$.
Donc, $\overrightarrow{AC}(3\,;2)$ et $\overrightarrow{DK}\left(\dfrac{4}{3}\,;\,-2\right)$.
Ainsi, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DK} = 3 \times \dfrac{4}{3} + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$
et les droites (AC) et (DK) sont perpendiculaires.

13 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$,
d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \times \cos(60°) = 12 \times \dfrac{1}{2} = 6$.

14 $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$
d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-15}{15} = -1$
soit $\widehat{BAC} = \pi$ rad.

15 ABCD est un parallélogramme donc
$\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 30°$ (angles alternes-internes)
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 5 \times \cos(30°) = \dfrac{15\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15}{2}\sqrt{3}$.
L'affirmation d'Elida n'est donc pas correcte.

16 **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre réel et non un vecteur.
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.
c) L'écriture $\dfrac{1}{\vec{v}}$ n'a pas de sens car 1 est un nombre réel et $\vec{v}$ un vecteur.
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{CA}) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$

17 **a)** L'affirmation est fausse. En effet,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \cos(60°) = 36 \times \dfrac{1}{2} = 18$
b) L'affirmation est vraie. En effet,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 6 \times \cos(0°)$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$.
c) L'affirmation est vraie. En effet, $\widehat{BAC} = 90°$ donc $\cos(\widehat{BAC}) = 0$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

18 **a)** $\widehat{BAC} = 0°$ donc $\cos(\widehat{BAC}) = 1$. D'où :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6 \times 2 \times 1$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$
b) $\widehat{BCA} = 180°$ donc $\cos(\widehat{BCA}) = -1$.
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{BCA}) = 2 \times 4 \times (-1)$
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -8$.

19

AB	AC	$\widehat{BAC}$ en rad dans $]-\pi\,;\pi]$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
$\mathbf{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$	8	$\dfrac{\pi}{4}$	12
5	8	$\mathbf{\dfrac{2\pi}{3}}$	-20
2	4	$\mathbf{\dfrac{\pi}{4}}$	$4\sqrt{2}$
2	**7,5**	$-\dfrac{\pi}{3}$	7,5

20 **a)** $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = EB \times EC \times \cos(\widehat{BEC})$
$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = 4 \times 4 \times \cos(60°) = 8$
b) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = 4 \times 2 \times \cos(60°) = 4$
c) $\widehat{DCE} = 90° - 60° = 30°$
$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = 4 \times 4 \times \cos(30°) = 8\sqrt{3}$
d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = BA \times BF \times \cos(90°) = 4 \times 4 \times 0 = 0$

172909_Chap09_000-000.indd 144 30/07/2019 15:33:55

21 L'hexagone est constitué exactement de six triangles équilatéraux identiques de côté 1.

a) $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times 1 \times \cos(60°) = \dfrac{1}{2}$

b) $\widehat{DOA} = \widehat{COD} + \widehat{BOC} + \widehat{AOB} = 3 \times 60° = 180°$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = OA \times OD \times \cos(180°) = 1 \times 1 \times (-1)$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = -1$

c) $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(120°) = -\dfrac{1}{2}$

d) $OA = AB = BC = CO$ donc $OABC$ est un losange d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \times 1 \times \cos(120°) = -\dfrac{1}{2}$.

e) $DC = DO$ et $BC = BO$, donc (DB) est la médiatrice de $[CO]$ d'où $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CO}$ orthogonaux.

$COED$ est un losange, d'où $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DE}$.

Finalement, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CO} = 0$.

f) $DOFE$ est un losange, donc $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DE}$.

D'où $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DA} = DE \times DA \times \cos(60°)$.

$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{DA} = 1 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

22 **a)** Le triangle ABC est équilatéral donc la médiane (AA') est aussi la hauteur relative à $[BC]$.

Donc le triangle $AA'B$ est rectangle en A'.

D'après le théorème de Pythagore, il vient :

$AA'^2 = AB^2 - BA'^2$, soit $AA'^2 = 16 - 4 = 12$.

Donc, $AA' = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

b) Le triangle ABC est équilatéral donc la médiane (AA') est aussi la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$.

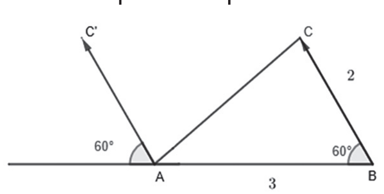
Donc $\widehat{BAA'} = 30°$.

$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = AA' \times AB \times \cos(BAA')$

$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{3} \times 4 \times \cos(30°) = 8\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12$

(AA') est perpendiculaire à $[BC]$ donc $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

23 On note C' le point tel que $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC}$.



$\widehat{BAC'} = 180° - 60° = 120°$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = AB \times AC' \times \cos(120°)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3$

Remarque : la linéarité du produit scalaire permet de répondre plus rapidement, mais elle n'a peut-être pas été abordée à ce stade.

24 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Le théorème de Pythagore conduit à :

$AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, soit $AC = 2\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2\sqrt{2} \times \cos(135°)$,

$135° = 180° - 45°$ donc $\cos(135°) = -\cos(45°)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2\sqrt{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -8$

25 Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = 9$.

26 **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 2 = 8$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 2 = 8$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 4 = -16$

27 Dans chaque cas, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ car $\widehat{AOB}$ est aigu.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ car $\widehat{AOB}$ est obtus.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ car $\widehat{AOB}$ est obtus

28 • Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = 16$.

Le résultat d'Ambre est correct.

• On note I' le milieu de $[CD]$.

Le triangle CDI est isocèle en I, donc le projeté orthogonal de I sur (CD) est I'.

Les vecteurs $\overrightarrow{CI'}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CD} = CI' \times CD = 2 \times 4 = 8$.

Le résultat d'Ambre n'est pas correct.

• Le projeté orthogonal de A sur (CB) est B, donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CB^2 = 9$.

Le résultat d'Ambre n'est pas correct.

29 **a)** D et E ont le même projeté orthogonal sur (AB), C et F ont le même projeté orthogonal sur (AB) d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

b) Par projection orthogonale sur (AB), on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GJ} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

c) Par projection orthogonale sur (AB), on a :

$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

d) Par projection orthogonale sur (JK), on a :

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{JK} = JK^2$.

Par projection orthogonale sur (AB), on obtient :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JK} = AB \times JK$

$JK^2 \neq AB \times JK$. Donc $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{JK} \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

30 **a)** Par projection orthogonale des points C et D sur (AB) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \times DC = 24$.

Remarque : on peut aussi utiliser le fait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et de même sens.

b) Par projection orthogonale du point C sur (AB) : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times DC = 24$.

c) Par projection orthogonale du point C sur (AD) : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = AD^2 = 4$.

d) Par projection orthogonale des points B et C sur (AD) : $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = AD^2 = 4$.

e) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$ orthogonaux donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$.

f) $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DA}$ orthogonaux donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA} = 0$.

31 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -3$

32 **a)** $-3\vec{u}\cdot(4\vec{v}) = -12\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 24$

b) $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 1$

c) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = 1 - 4 + 5 = 2$

33 **a)** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

$(\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{v}^2$

$(\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 1 + 0 - 0 - 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Réponse **(3)**.

b) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Réponse **(1)**.

c) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = 1 - 0 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Réponse **(3)**.

34 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Or, ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux, ainsi que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$,

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

D'où $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = AB^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

Or, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = AB^2 - AD^2$.

Finalement, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 25 - 4 = 21$.

35 **1.** $(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Le projeté orthogonal de A sur (HC) ou (BC) est H et les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires et de même sens, donc :

$(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC} = HC^2 + BC \times HC = 9 + 5\times 3 = 24$

2. a) En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on obtient :

$AH = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

b) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 + \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Le projeté orthogonal de B sur (AH) est H, donc $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 + AH^2 = 9 + 5 = 14$.

36 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB})\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})$

E est le milieu des diagonales du parallélogramme ABCD, donc $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{EB}$.

D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{EB}) = AE^2 - EB^2$.

37 $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\sqrt{10} + \sqrt{10} = 0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux.

38 **a)** $\vec{u}(2\,;0)$ et $\vec{v}(2\,;1)$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4 + 0 = 4$.

b) $\vec{u}(-4\,;1)$ et $\vec{v}(2\,;-3)$

donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = -8 - 3 = -11$.

39 **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2 - 12 = -14$. Réponse **(2)**.

b) $\vec{t}\left(-5\,;\sqrt{3}\right)$ et $\vec{i}(1\,;0)$

donc $\vec{t}\cdot\vec{i} = -5 + 0 = -5$. Réponse **(2)**.

c) $\vec{w} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$. Réponse **(1)**.

40 $\overrightarrow{AB}(1\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;1)$.

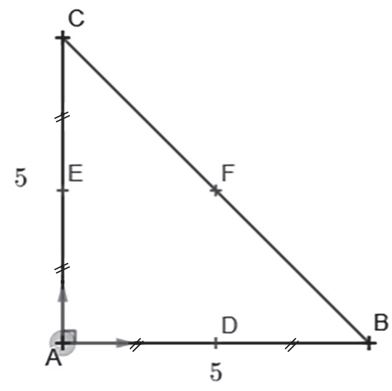
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5 + 2 = 7$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -7$

c) $\overrightarrow{AB}^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

d) $AB = \sqrt{5}$

41 **a)**



$A(0\,;0)$, $D(2{,}5\,;0)$, $E(0\,;2{,}5)$.

$B(5\,;0)$ et $C(0\,;5)$ donc les coordonnées du milieu F de [BC] sont : $F(2{,}5\,;2{,}5)$.

b) On déduit de **a)**, $\overrightarrow{AF}(2{,}5\,;2{,}5)$ et $\overrightarrow{ED}(2{,}5\,;-2{,}5)$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{ED} = 2{,}5^2 - 2{,}5^2 = 0$.

D'où $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux.

42 Dans le repère donné, $\overrightarrow{AC}(a\,;b)$ et $\overrightarrow{DB}(a\,;-b)$.

Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = a^2 - b^2$.

43 L'affirmation est exacte. En effet, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ et

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2$,

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$,

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.

44 L'affirmation est fausse. En effet, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ et

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Il suffit de choisir $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non orthogonaux pour invalider l'affirmation.

45 L'affirmation est exacte. En effet, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$, et en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, il vient :

$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ d'où

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$.

46 En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$,

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ équivaut à $CB^2 = AB^2 + AC^2$.

On retrouve donc le théorème de Pythagore et sa réciproque, appliqués au triangle ABC.

47 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(9 + 36 - 25) = 10$

48 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(16 - 9 - 25) = -9$

49 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(25 + 49 - 9) = 32{,}5$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2\right)$.

ABCD est un parallélogramme

d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(49 - 25 - 9) = 7{,}5$

50 $p = \frac{1}{2}(BC^2 + AC^2 - AB^2)$, donc $p = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

51 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos(\widehat{FEG})$

Or, $-1 \leqslant \cos(\widehat{FEG}) \leqslant 1$, d'où

$-EF \times EG \leqslant \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} \leqslant EF \times EG$, soit

$-10 \leqslant \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} \leqslant 10$. Or, $12 \notin [-10\,;10]$,

donc la construction du triangle EFG est impossible.

52 **a)** Par projection orthogonale sur (AB),

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 = 9$.

b) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CE} = CB \times CE \times \cos(\widehat{BCE})$,

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CE} = 3 \times 2 \times \cos(60°) = 3$.

c) Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.

53 ABCD est un parallélogramme donc

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

D'où $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -AD^2$.

L'affirmation est exacte.

54 a) $\overrightarrow{AB}(1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;-1)$.

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3 - 1 = 2$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$,

$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

D'où $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \cos(\widehat{BAC})$, soit

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{10}}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC} \approx 63°$.

55 **a)** Le triangle ABC est équilatéral

donc $\widehat{BAC} = 60°$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \cos(60°) = 18$.

b) $CB = CA$ et $DB = DA$ donc la droite (CD) est la médiatrice de [AB] et passe donc par O.

D'où les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (CO) sont O et D.

$\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BD} = CO \times OD$.

Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles COB et ODB, conduit à :

$CO = 3\sqrt{3}$ et $OD = 3\sqrt{2}$.

Donc $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BD} = 9\sqrt{6}$.

c) Par projection orthogonale de B et D sur (OA), il vient : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BD} = OA \times BO = 9$.

d) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD})$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ donc $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 9\sqrt{6} + 9$.

Remarque : introduire un repère orthonormé pour utiliser l'expression analytique du produit scalaire peut être pertinent.

56 **a)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD})$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 2 \times \cos(60°) = 4$.

b) $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \|\overrightarrow{AD}\|^2$

$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 = 16 + 8 + 4 = 28$

c) • ABCD est un parallélogramme donc

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

D'après **b)**, $AC^2 = 28$, d'où $AC = 2\sqrt{7}$.

• $BD^2 = \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2$

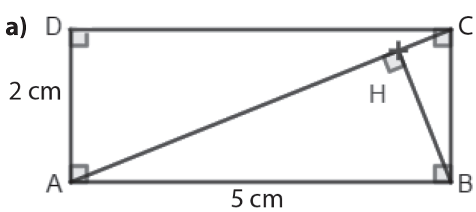
$BD^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2$

$BD^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2$

$BD^2 = 16 - 8 + 4 = 12$

soit $BD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

57 **a)**



b) Le projeté orthogonal du point C sur (AB) est B, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = 25$.

c) Le projeté orthogonal du point B sur (AC) est H, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en B, conduit à $AC = \sqrt{29}$.

Ainsi, $25 = AH\sqrt{29}$, soit $AH = \dfrac{25}{\sqrt{29}}$.

$AH \approx 4{,}6$ cm.

58 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) + (4 + \sqrt{5})(4 - \sqrt{5})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 1 + 16 - 5 = 12$

$12 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

59 **a) L'affirmation est vraie.** En effet, ABC est un triangle rectangle en A ou $A = B$ ou $A = C$.

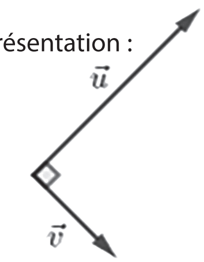
Dans tous les cas, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

b) L'affirmation est vraie. En effet, la médiatrice (CD) de [AB] est perpendiculaire à la droite (AB), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

60 $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$ équivaut à

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, soit $-2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, c'est-à-dire $4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, soit $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, ce qui équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.

Exemple de représentation :



61 **a)** $\overrightarrow{AB}(-6\ ;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\ ;6)$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 6 = 0$.

b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc le triangle ABC est rectangle en A.

On peut même préciser que ABC est isocèle en A car $AB = AC = \sqrt{37}$.

62 $\overrightarrow{AB}(3\ ;-2)$ et $\overrightarrow{CD}(-4\ ;-6)$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -12 + 12 = 0$.

D'où les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

63 **a)** Ligne 5 : x*u+y*v==0

Ligne 6 : vecteurs orthogonaux

Ligne 8 : vecteurs non orthogonaux

b) Avec $\vec{t}(3\ ;-2)$ et $\vec{w}(-4\ ;-6)$ le programme affiche : vecteurs orthogonaux.

Avec $\vec{t}(3\ ;-2)$ et $\vec{w}(-4\ ;6)$ le programme affiche : vecteurs non orthogonaux.

64 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux équivaut à

$(x + 3)(-7 - x) + (x + 6)(x + 9) = 0$, soit

$5x + 33 = 0$, c'est-à-dire $x = -\dfrac{33}{5} = -6{,}6$.

65 On introduit le repère orthonormé

$\left(A, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

$A(0\ ;0)$, $C(\sqrt{2}\ ;1)$, $D(0\ ;1)$ et $E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;0\right)$.

D'où $\overrightarrow{AC}(\sqrt{2}\ ;1)$ et $\overrightarrow{DE}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;-1\right)$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = 1 - 1 = 0$.

Donc les droites (AC) et (ED) sont perpendiculaires.

66 **1.** A **2.** C **3.** B **4.** B **5.** D

67 **1.** B, C, D **2.** B, C, D **3.** C, D **4.** A, B, D

68 **1. Faux.** En effet,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 \times \cos(45°) = \dfrac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$.

2. Vrai. En effet,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

3. Vrai. En effet, $\widehat{ACB} = \dfrac{180 - 45}{2} = 67{,}5°$.

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \times CA \times \cos(\widehat{ACB})$,

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \times 4 \times \cos(67{,}5°)$.

4. Vrai. En effet, $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$,

donc $BC^2 = BA^2 - 2 \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$

$BC^2 = 32 - 2 \times 8\sqrt{2} = 32 - 16\sqrt{2}$.

5. Vrai. En effet, ABC est isocèle en A, donc par projection orthogonale sur (BC) et comme $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA'}$ sont colinéaires et de même sens :

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \times CA'$.

69 **a)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = OA \times OA' \times \cos(\widehat{AOA'})$,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = 3 \times 3 \times \cos(45°) = 9 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{9}{2}\sqrt{2}$.

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = OA \times OB' \times \cos(\widehat{AOB'})$,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = 3 \times 4 \times \cos(60°) = 12 \times \dfrac{1}{2} = 6$.

c) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC'} = OA \times OC' \times \cos(\widehat{AOC'})$,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC'} = 3 \times 4 \times \cos(120°) = 12 \times \dfrac{-1}{2}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC'} = -6$.

70 **a)** Le projeté orthogonal du point C sur (AB) est B, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = 9$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2 \times \cos(45°) = 4\sqrt{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}(4\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;-3)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 3 = 7$.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(25 + 36 - 16) = 22{,}5$.

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

Or, ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{2}(BA^2 + BD^2 - AD^2)$,

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{2}(9 + 4 - 16) = -\dfrac{3}{2}$.

D'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2}$.

71 **a)** Le projeté orthogonal du point C sur (AB) est H. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 3 \times 4 = 12$.

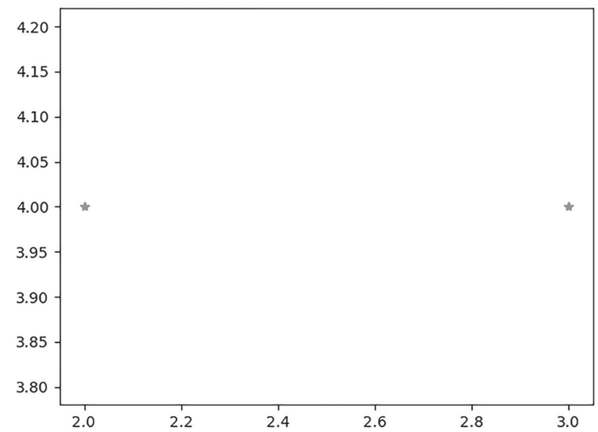
b) Le projeté orthogonal du point B sur (AC) est K. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AK \times AC = 6AK$.

Ainsi, $6AK = 12$, soit $AK = 2$.

S'entraîner

73

```
from pylab import *

for x in range(0,6):
    for y in range(0,6):
        if -x*(5-x)+y**2==10:
            plot(x,y,"r*")
show()
```



Deux points de coordonnées $(2\,;4)$ et $(3\,;4)$ apparaissent quand on exécute le programme.

74 On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point M.

On a, $MA^2 = x^2 + y^2$ et $MB^2 = (5 - x)^2 + y^2$.

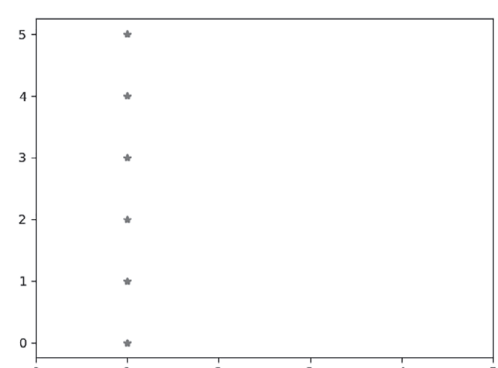
D'où $MA^2 - MB^2 = -15$ équivaut à

$x^2 - (5 - x)^2 = -15$.

Programme en langage python :

```
from pylab import *
for x in range(0,6):
    for y in range(0,6):
        if x**2-(5-x)**2==-15:
            plot(x,y,"r*")
show()
```

Affichage :



76 **a)** À l'aide du logiciel, on conjecture que lorsque a varie (BE) et (CF) restent perpendiculaires.

b) $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF})$,

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$.

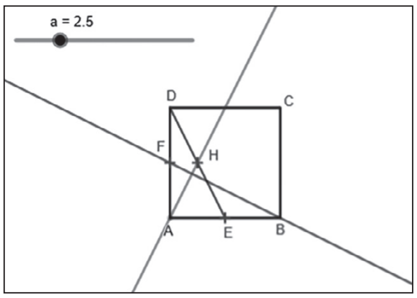
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DF}$.

donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}=0$.

D'où $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=-a\times\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a\times a=0$.

Donc les droites (BE) et (CF) sont perpendiculaires.

77 **a)**



On conjecture que lorsqu'on fait varier a, les droites (AH) et (FB) restent perpendiculaires.

b) $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})$.

Par conséquent,

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})$.

Or les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FA}=0$.

$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens

donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}a\times a=\frac{1}{2}a^2$.

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FA}$ sont colinéaires et de sens contraires

donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FA}=-\frac{1}{2}a\times a=-\frac{1}{2}a^2$.

D'où $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{FB}=0$.

Ce résultat ne dépend donc pas de a.

Pour tout nombre réel a strictement positif, les droites (AH) et (FB) sont perpendiculaires.

78 **1.** $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ équivaut à $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$,

soit $\vec{u}^2=\vec{v}^2$, c'est-à-dire $\vec{u}^2-\vec{v}^2=0$,

ce qui s'écrit $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=0$.

Ainsi, $\vec{u}-\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. On raisonne en deux temps.

• On suppose que $\vec{v}(x\,;y)$ et $\vec{u}(a\,;b)$ sont orthogonaux.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ donc $ax+by=0$, soit $ax=-by$.

1er cas : $b\neq 0$.

On note k le nombre réel $\frac{x}{b}$. Ainsi, $x=kb$.

$ax=-by$ conduit à $akb=-by$,

c'est-à-dire $-ka=y$.

2e cas : $b=0$.

$ax=-by$ conduit à $ax=0$, c'est-à-dire $a=0$ ou $x=0$.

Or $a=0$ est impossible car $\vec{u}\neq\vec{0}$. Donc $x=0$.

Sous cette condition on note k le nombre réel, $k=\frac{y}{-a}$. Ainsi, $x=kb$ et $y=-ka$.

• Réciproquement, s'il existe un nombre réel k tel que $x=kb$ et $y=-ka$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=kab-kab=0$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

79 $AB^2-AC^2=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2$

$AB^2-AC^2=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})^2-(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})^2$.

Or, $(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})^2=AH^2+2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HB}+HB^2$ et

$(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})^2=AH^2+2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+HC^2$, donc

$AB^2-AC^2=2\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC})+HB^2-HC^2$

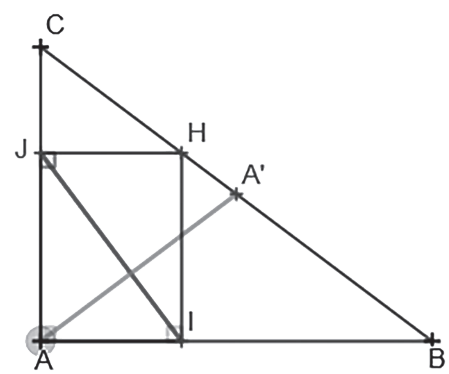
$AB^2-AC^2=2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}+HB^2-HC^2$.

(AH) est la hauteur issue de A donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, soit $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

Finalement, $AB^2-AC^2=HB^2-HC^2$.

80 **1. a)** Les projetés orthogonaux des points I et J sur la droite (AB) sont respectivement I et A.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA}$.



Le projeté orthogonal du point H sur la droite (AB) est I, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA}$. D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$.

b) On procède de la même façon : les projetés orthogonaux des points A et H sur la droite (AC) correspondent respectivement aux projetés orthogonaux de I et J sur (AC).

On obtient $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$.

2. A′ est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{IJ}$,

$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}$,

$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH},$

$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CB}.$

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Finalement, $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$. Donc les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

81 **1.** Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 + 0 = 0$,
d'où $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
De même pour $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$.

2. a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$, donc $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$.

b) Le projeté orthogonal de C sur (OA) est C' et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires et de même sens, d'où $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = OA \times OC'$.

c) Le projeté orthogonal de B sur (OA) est B' et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et de même sens, d'où :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB'$
$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires et de même sens, d'où par projection orthogonale sur (OA) :
$\vec{u} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = OA \times B'C'$.
Finalement, $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = OA \times OB' + OA \times B'C'$.

d) B' appartient au segment $[OC']$ d'où $OC' = OB' + B'C'$.
Donc, $OA \times OC' = OA \times OB' + OA \times B'C'$,
c'est-à-dire $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

82 • $\overrightarrow{BA}(3\,;3)$ et $\overrightarrow{BC}(4\,;-3)$.
D'où $\overrightarrow{BA}. \cdot \overrightarrow{BC} = 12 - 9 = 3$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$.
• $\overrightarrow{AB}(-3\,;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(7\,;0)$.
D'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -21$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$.
• $\overrightarrow{CA}(-7\,;0)$ et $\overrightarrow{CB}(-4\,;3)$.
D'où $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 28$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \neq 0$.
Finalement, le triangle ABC n'est pas rectangle.

83 On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point C.
$\overrightarrow{AB}(-4\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(x-2\,;y-4)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ équivaut à $-4(x-2) - 2(y-4) = 0$,
soit $-4x - 2y + 16 = 0$.
Le point $C(x\,;y)$ appartient à la droite *d* donc $y = x$.
De $-4x - 2x + 16 = 0$,
on en déduit que $x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.
Finalement les coordonnées de C sont $\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

84 Le projeté orthogonal de C sur (AH) est P, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HP}$.
Le projeté orthogonal de A sur (HC) est Q, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HQ} \cdot \overrightarrow{HC}$.
Finalement, $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{HQ} \cdot \overrightarrow{HC}$, soit $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HQ} \cdot \overrightarrow{HC}$.

85 **a)** ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
$AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$,
$AB^2 - AD^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$,
$AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ orthogonaux équivaut à $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, soit $AB^2 = AD^2$, c'est-à-dire $AB = AD$.
Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est donc un losange.

86 **a)** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA^2 = 9$ par projection orthogonale de B sur (AC).

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AE^2$ par projection orthogonale de B sur (AE).
Dans le triangle ABE rectangle en E,
$AE = \cos(30°) \times AB$, soit $AE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$.
Finalement, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 12$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = AE \times AF$ par projection orthogonale de B sur (AF).
$\widehat{CAF} = 90° - 30° = 60°$.
Dans le triangle ACF rectangle en F,
$AF = \cos(60°) \times AC$, soit $AF = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.
Finalement, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 2\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = 3\sqrt{3}$.

d) $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$.
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$,
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = AF \times AE$ par projection orthogonale de C sur (AE).
D'où $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

e) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$,
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ orthogonaux donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$,
$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 3\sqrt{3}$ (d'après **c)**).

f) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{FE} = FE \times FE$ par projection orthogonale des points C et B sur (FE).
$FE = AE - AF = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{2}$.
D'où $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{FE} = \frac{-24\sqrt{3} + 57}{4}$.

87 **a)** On introduit le repère orthonormé $(A\,;\,I, J)$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{b}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{b}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{CQ}(-b\,;-DQ)$ et $\overrightarrow{DP}(AP\,;-b)$.

$\widehat{QDM} = 45°$ et $\widehat{MQD} = 90°$ donc le triangle DQM est rectangle isocèle en Q.

D'où $QD = QM$.

Comme APMQ est un rectangle, il vient :

$AP = QM = QD$.

De $\overrightarrow{CQ}(-b\,;-DQ)$ et $\overrightarrow{DP}(DQ\,;-b)$, on déduit $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{DP} = -b\times DQ + DQ\times b = 0$.

Finalement, les droites (CQ) et (DP) sont perpendiculaires.

b) $CQ = \sqrt{(-b)^2+(-DQ)^2} = \sqrt{b^2+DQ^2}$ et $DP = \sqrt{DQ^2+(-b)^2} = \sqrt{DQ^2+b^2}$.

Par conséquent, $CQ = DP$.

88 **a)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})$,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = -AD^2 + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$

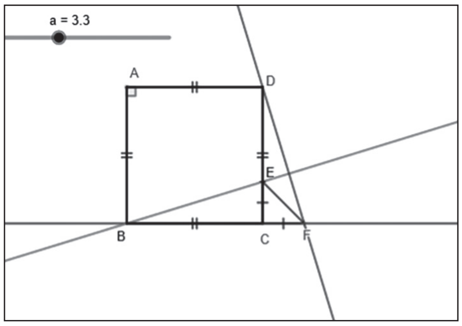
$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$ donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} = 0$.

$\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = DC\times AB = c\times a$.

Finalement, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = -b^2 + ac$.

b) $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AC}$ orthogonaux équivaut à $-b^2+ac=0$, soit $ac = b^2$.

89 **1. a)**



b) Lorsqu'on fait varier le curseur a et que l'on déplace le point E, on conjecture que les droites (BE) et (DF) sont perpendiculaires.

2. On introduit le repère orthonormé $(B\,;I, J)$ tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{a}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{a}\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BE}(a\,;CE)$ et $\overrightarrow{DF}(CF\,;-a)$

Donc $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF} = a\times CF - a\times CE$.

Comme $CF = CE$, il vient $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF} = 0$.

D'où les droites (BE) et (DF) sont perpendiculaires.

90 **1re méthode :** en utilisant le produit scalaire.

On note a la longueur AB (avec $a > 0$).

On introduit le repère orthonormé $(A\,;I, J)$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$.

$B(a\,;0), D(0\,;a)$.

La longueur d'une hauteur dans un triangle équilatéral de côté a est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, d'où

$E\left(\frac{1}{2}a\,;a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ et $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\,;\frac{1}{2}a\right)$.

Donc, $\overrightarrow{EF}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}a\,;-\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ et $\overrightarrow{BD}(-a\,;a)$.

Donc, $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 0$.

Par conséquent, les droites (BD) et (DE) sont perpendiculaires.

2e méthode : sans utiliser le produit scalaire.

En utilisant le même repère que dans la première méthode, on a :

$\overrightarrow{AC}(a\,;a)$ et $\overrightarrow{EF}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}a\,;-\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

On teste la colinéarité de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$:

$\left(-\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\times a - \left(-\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\times a = 0$,

Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.

91 **a)** $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CF}\times CG\times\cos(\widehat{FCG})$

$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CG} = \ell\times(a-\ell)\times\cos(60°) = \frac{1}{2}\ell(a-\ell)$

b) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CG})\cdot\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FC}^2 + \overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{FC}$

$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FC} = \ell^2 - \frac{1}{2}\ell(a-\ell) = \ell^2 - \frac{1}{2}a\ell + \frac{1}{2}\ell^2$

$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\ell^2 - \frac{1}{2}a\ell$

c) CGF est un triangle rectangle en F équivaut à $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FC} = 0$, c'est-à-dire $\frac{3}{2}\ell^2-\frac{1}{2}a\ell = 0$, soit $\frac{1}{2}\ell(3\ell-a) = 0$.

Finalement, CGF est un triangle rectangle en F équivaut à $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{a}{3}$.

Or, $\ell = 0$ est impossible car $\ell > 0$ donc, une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle CGF soit rectangle en F est $\ell = \frac{a}{3}$.

92 **a)** ABC est un triangle rectangle en A donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

D'où $(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=0$, c'est-à-dire,

$AH^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AH}$, c'est-à-dire

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ et $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires et de sens opposés, donc $AH^2-HB\times HC=0$,

soit $AH^2=BH\times CH$.

b) B' est le milieu de $[AC]$ et C' est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{HB'}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC})$ et $\overrightarrow{HC'}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB})$.

$\overrightarrow{HB'}\cdot\overrightarrow{HC'}=\dfrac{1}{4}(HA^2+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB})$.

Or, $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=0$

donc $\overrightarrow{HB'}\cdot\overrightarrow{HC'}=\dfrac{1}{4}(HA^2-HC\times HB)=0$ d'après **a)**.

Donc les droites (HB') et (HC') sont perpendiculaires.

93 **a)** $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})$,

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}=-AD^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DA}$ donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AB}=DI\times AB=\dfrac{1}{2}a^2$.

Finalement, $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}=-b^2+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}-b^2$.

b) À l'aide du théorème de Pythagore, il vient :

$AI=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b^2}$ et $DB=\sqrt{a^2+b^2}$.

c) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}=AI\times DB\times\cos(\widehat{BEI})$.

En translatant les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DB}$ en la même origine E, il vient :

$\dfrac{a^2}{2}-b^2=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}\times\cos(\widehat{BEI})$,

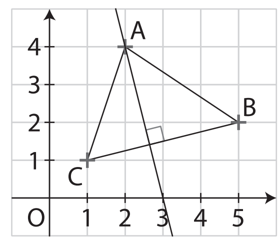
soit $\cos(\widehat{BEI})=\dfrac{a^2-2b^2}{\sqrt{a^2+4b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}}$.

d) Pour $a=b=4$, (ABCD est alors un carré de côté 4), il vient $\cos(\widehat{BEI})=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ et $\widehat{BEI}\approx 108°$.

94

```
from math import *
def cos(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
    p=(xB-xA)*(xC-xA)+(yB-yA)*(yC-yA)
    AB=sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)
    AC=sqrt((xC-xA)**2+(yC-yA)**2)
    cos=p/(AB*AC)
    return cos
```

95 **a)**



b) $\overrightarrow{CA}(1\,;3)$ et $\overrightarrow{CB}(4\,;1)$. Donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=4+3=7$.

c) Le projeté orthogonal de A sur (CB) est H, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de même sens, donc

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CH\times CB$.

D'où $CH=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CB}=\dfrac{7}{\sqrt{4^2+1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{17}}$.

De plus, $CA=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ACH rectangle en H, il vient :

$AH=\sqrt{10-\dfrac{49}{17}}=\dfrac{11}{\sqrt{17}}$.

En unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est :

$\mathscr{A}=\dfrac{BC\times AH}{2}=\dfrac{\sqrt{17}\times 11}{2\times\sqrt{17}}=\dfrac{11}{2}$.

96 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(AB^2+AM^2-BM^2)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(64+16-36)=22$.

Par ailleurs, le projeté orthogonal de M sur (AB) est H et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens,

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=AB\times AH$.

En conséquence, $AH=\dfrac{22}{8}=\dfrac{11}{4}=2{,}75$.

H est donc situé sur $[AB]$ à une distance de 2,75 m du point A.

97 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$.

Or, D est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=AD^2-DC^2$.

b) ABC est un triangle isocèle en A, donc la médiane (AD) est aussi la hauteur issue de A.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABD rectangle en D, il vient :

$AD^2=AB^2-DB^2$, soit $AD^2=AB^2-DC^2$.

D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2-DC^2-DC^2=AB^2-2DC^2$.

c) $BC=4$ donc $DC=2$. D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9-8=1$.

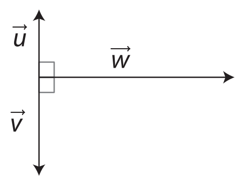
Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$, soit

$\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{1}{9}$.

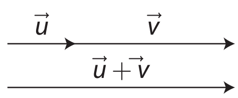
Ainsi, $\widehat{BAC}\approx 84°$.

98 D'après le théorème de Pythagore,
$AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \quad AB^2 = 3^2 + 2^2 = 13,$
$BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4.$
Par ailleurs, dans le plan (ABC),
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, soit
$4 = \sqrt{13} \times \sqrt{8} \times \cos(\widehat{BAC})$, donc
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{4}{\sqrt{104}} = \dfrac{\sqrt{26}}{13}.$
À l'aide de la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC} \approx 67°$.

99 **a) L'affirmation est fausse.** En effet, il suffit de considérer le contre-exemple avec des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tous les deux orthogonaux à un vecteur $\vec{w}$ comme indiqué sur la figure suivante :



Dans ce cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas égaux.
b) L'affirmation est fausse. En effet, il suffit de considérer le contre-exemple suivant dans lequel $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens.



On a $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ sans avoir $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.
c) L'affirmation est vraie. En effet, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls,
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta).$
$|\cos(\theta)| \leqslant 1$ et $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\cos(\theta)|$
donc $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
d) L'affirmation est vraie. En effet, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ équivaut à
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leqslant (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$,
soit $2\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$,
c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
Cette dernière inégalité est toujours vraie d'après **c)**.

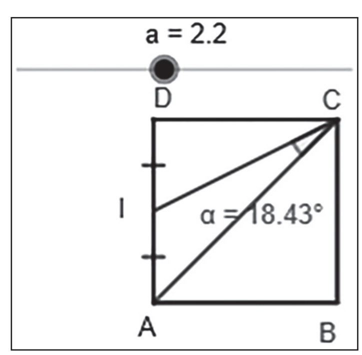
100 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{BC^2}{2}$ équivaut à
$\dfrac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - CA^2) = \dfrac{BC^2}{2}$, soit
$\dfrac{1}{2}(BA^2 - CA^2) = 0$, c'est-à-dire $BA = CA$.
Finalement, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{BC^2}{2}$ équivaut à ABC est un triangle isocèle en A, c'est-à-dire P équivaut à Q.

101 **a)** « Si P, alors Q » est vraie. En effet,
si $\vec{u} = 3\vec{v}$ alors $\|\vec{u}\| = \|3\vec{v}\| = 3\|\vec{v}\|$ $(3 > 0)$.
« Si Q, alors P » est fausse :
on considère dans un repère le contre-exemple : $\vec{u}(0\,;3)$ et $\vec{v}(1\,;0)$.
Comme l'implication précédente est fausse, il ne peut pas y avoir équivalence entre P et Q.
b) « Si P, alors Q » est vraie. En effet, si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ alors $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$, soit $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$.
« Si Q, alors P » est fausse. On peut considérer le contre-exemple : $\vec{v} = \vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$.
Comme l'implication précédente est fausse, il ne peut pas y avoir équivalence entre P et Q.

Organiser son raisonnement

102 Comme H est situé sur $[BC]$,
$BC = BH + HC = 4 + 16 = 20$
ABC est un triangle rectangle en A, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
D'où $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = 0$, ce qui conduit à
$AH^2 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0.$
Or $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.
Par conséquent, $AH^2 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.
Comme $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires et de sens opposés, il vient $AH^2 = -HB \times HC$.
D'où $AH^2 = 4 \times 16 = 64$, soit $AH = 8$.
À l'aide du théorème de Pythagore appliqué au triangle ABH rectangle en H puis au triangle ABC rectangle en A, on obtient :
$BA^2 = AH^2 + BH^2$, soit $BA = 4\sqrt{5}$
et $AC^2 = BC^2 - AB^2$, soit $AC = \sqrt{400 - 80} = 8\sqrt{5}$.

103 **1. a)**



b) Lorsque a varie, on conjecture que la mesure de l'angle $\widehat{ICA}$ reste constante.

2. a) On introduit le repère orthonormé $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$.

$A(0\,;0), C(a\,;a)$ et $I\left(0\,;\frac{1}{2}a\right)$ donc

$\overrightarrow{CA}(-a\,;-a)$ et $\overrightarrow{CI}\left(-a\,;-\frac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$.

b) $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = CI \times CA \times \cos(\widehat{ICA})$.

Or, $CI = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ et $CA = \sqrt{2}a$,

d'où $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \times \sqrt{2}a \times \cos(\widehat{ICA})$, c'est-à-dire

$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{10}}{2}a^2 \times \cos(\widehat{ICA})$.

c) $\cos(\widehat{ICA}) = \dfrac{\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA}}{\frac{\sqrt{10}}{2}a^2} = \dfrac{\frac{3}{2}a^2}{\frac{\sqrt{10}}{2}a^2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

$\frac{3}{\sqrt{10}}$ est indépendant de a, donc la mesure de l'angle $\widehat{ICA}$ est constante et $\widehat{ICA} \approx 18°$.

104 On note a la longueur AB avec $a > 0$ et b la longueur AE avec $b > 0$.

On introduit le repère orthonormé $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$.

$A(0\,;0), B(a\,;0)$ et $G(0\,;-b)$ donc $I\left(\frac{a}{2}\,;\frac{-b}{2}\right)$.

$E(-b\,;0), D(0\,;a)$.

D'où, $\overrightarrow{AI}\left(\frac{a}{2}\,;-\frac{b}{2}\right)$ et $\overrightarrow{ED}(b\,;a)$.

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{ED} = \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} = 0$, donc les droites (IA) et (ED) sont perpendiculaires.

105 On pose $S = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Comme ABCD est un parallélogramme, $AB = CD$ et $BC = AD$.

$S = 2AB^2 + 2AD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

On note I le milieu des diagonales $[BD]$ ou $[AC]$.

$S = 2(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2) = 2((\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID})^2)$

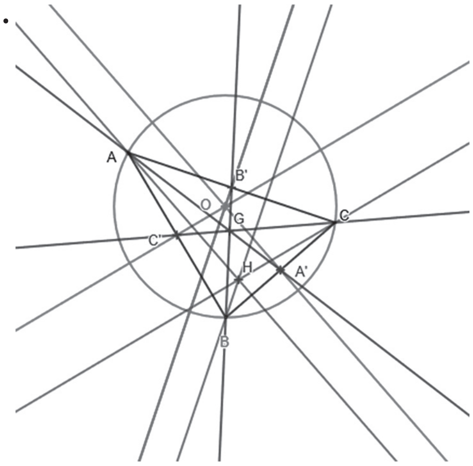
$S = 2(2AI^2 + 2\overrightarrow{AI}\cdot(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}) + IB^2 + ID^2)$

I est le milieu de $[BD]$ donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

$S = 2(2AI^2 + 2IB^2) = 2\left(2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2\right)$

$S = AC^2 + BD^2$.

106 **1.**



2. a) A' est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'}$

b) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, donc

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, d'où

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

D'après **2. a)**, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ donc, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

c) O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, donc (OA') est la médiatrice de $[BC]$, d'où les droites (OA') et (BC) sont perpendiculaires.

D'après **2. b)**, les droites (AH) et (OA') sont parallèles donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

d) On raisonne comme dans **2. b)** et **2. c)** pour obtenir que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.

e) A est un point de la droite (AH) et (AH) est perpendiculaire à (BC), donc (AH) est la hauteur issue de A.

De même (BH) est la hauteur issue de B.

De même (CH) est la hauteur issue de C.

H appartient à ces trois hauteurs qui ne sont pas confondues sinon les côtés du triangle ABC seraient parallèles entre eux, ce qui est impossible.

Par conséquent, les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H.

Remarque : H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. a) A' est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.

D'où $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'}$,

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'})$,

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'}$,

De $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ on déduit $3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{A'A}$.

Finalement, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc,

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$,

$3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Or, B' est le milieu de $[AC]$, donc
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{B'B}$.
Finalement, $3\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BB'}$.
Remarque : G est le centre de gravité du triangle ABC.
4. a) $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}$,
$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}$,
$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}$,
$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}+\vec{0}=\overrightarrow{OH}$.
b) De $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$, on déduit que les points O, G et H sont alignés (dans cet ordre).

107 D est le projeté orthogonal de A sur (BF) donc
$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}$.
Le projeté orthogonal de F sur (BA) est E donc
$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}$.
E est le projeté orthogonal de C sur (BA) donc
$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$.
Le projeté orthogonal de A sur (BC) est C donc
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=BC^2$.
$\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de même sens, d'où
$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BD}=BF\times BD$.
Finalement, $BF\times BD=BC^2$.
Par conséquent, $BF=\dfrac{BC^2}{BD}=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}$.

108 On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point C.
$\overrightarrow{AB}(-2\,;-4), \overrightarrow{CC'}(2{,}5-x\,;4-y)$
$\overrightarrow{AC}(x-3\,;y-5), \overrightarrow{BB'}(3\,;3)$
$\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ d'où :
$-21+2x+4y=0$ et $-24+3x+3y=0$
$(x\,;y)$ est donc solution du système
$\begin{cases}2x+4y=21\\3x+3y=24\end{cases}$, ce qui conduit à $\begin{cases}x=5{,}5\\y=2{,}5\end{cases}$.

109 On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ de deux façons.
Dans le triangle équilatéral ADC, on a $DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. De même $DF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.
Dans le triangle équilatéral ABC, le théorème des milieux conduit à $EF=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.
$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{2}(DE^2+DF^2-EF^2)$,
$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}a^2+\dfrac{3}{4}a^2-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{5}{8}a^2$.
Par ailleurs, dans le triangle DEF,
$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=DE\times DF\times\cos(\widehat{EDF})$.
Donc, $\cos(\widehat{EDF})=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}}{DE\times DF}=\dfrac{\frac{5}{8}a^2}{\frac{3}{4}a^2}=\dfrac{5}{6}$.
D'où $\widehat{EDF}$ est indépendant de a et $\widehat{EDF}\approx 34°$.

110 **a)** $\widehat{EBC}=90°-60°=30°$.
Or, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=BC\times BE\times\cos(\widehat{EBC})$,
donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times1\times\cos(30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
ABCD est un carré donc $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$,
d'où $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BE}$.
$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
b) $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=1\times1\times\cos(60°)=\dfrac{1}{2}$.
c) $BC=BF$ et $\widehat{CBF}=90°-30°=60°$ donc le triangle BCF est équilatéral.
d) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF}=1\times1\times\cos(60°)=\dfrac{1}{2}$.
$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF}=-\dfrac{1}{2}$.
e) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}=-\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EG}=-EA\times EG\times\cos(\widehat{AEG})$,
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}=-1\times1\times\cos(90°+60°)$,
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}=-1\times(-\sin(60°))=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
f) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EG})$,
$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}$.
$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$.
Les droites (DE) et (BG) sont donc perpendiculaires.
g) La droite (BG) est perpendiculaire à la droite (DE) et à la droite (EF) ($[EF]$ et $[BG]$ sont les diagonales du carré BFGE).
Donc les droites (DE) et (EF) sont parallèles et elles sont confondues car elles ont au moins un point commun E.
Finalement, D, E et F sont alignés.

111 ACGE est un rectangle car il s'agit d'un parallélogramme dont les diagonales $[CE]$ et $[AG]$ sont de même longueur.
$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{EC}=(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GC})$,
$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{GC}$ donc,
$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{EC}=(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EA})\cdot(-\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EA})=EA^2-GE^2$.
$EA=a$ et $GE=\sqrt{2}a$ ($[GE]$ est la diagonale d'un carré de côté a).
Donc $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{EC}=a^2-2a^2=-a^2$.

172909_Chap09_000-000.indd 156 29/07/2019 18:06:32

Par ailleurs, en translatant les vecteurs à la même origine I, il vient : $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{EC} = GA \times EC \times \cos(\alpha)$.

Or, $GA = EC = \sqrt{a^2 + 2a^2}$.

D'où $\cos(\alpha) = \dfrac{-a^2}{a^2 + 2a^2} = -\dfrac{1}{3}$.

Donc α est indépendant de a et $\alpha \approx 109°$.

Remarque : une autre méthode consiste à calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$ à l'aide du triangle IAC isocèle en I et en utilisant le milieu J de [BD].

112 **1. a) 1^er^ cas :** $\widehat{BAC}$ aigu

Dans le triangle ACH rectangle en H,

$\sin(\widehat{HAC}) = \dfrac{CH}{AC}$. Or, H appartient au segment [AB] donc $\widehat{HAC} = \widehat{BAC}$.

Par conséquent, $AC \times \sin(\widehat{BAC}) = CH$.

$S = \dfrac{1}{2}AB \times CH = \dfrac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC})$,

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$.

2^e^ cas : $\widehat{BAC}$ obtus

Dans le triangle ACH rectangle en H,

$\sin(\widehat{HAC}) = \dfrac{CH}{AC}$. Or $\widehat{HAC} = 180° - \widehat{BAC}$,

et $\sin(180° - \widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BAC})$.

Par conséquent, $AC \times \sin(\widehat{BAC}) = CH$.

$S = \dfrac{1}{2}AB \times CH = \dfrac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC})$,

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$.

b) En permutant les rôles de A et B dans la réponse à **1. a)**, on obtient :

$S = \dfrac{1}{2}ac\sin(\widehat{CBA})$.

c) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin(\widehat{ACB})$.

2. Ainsi :

$\dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{2}ac\sin(\widehat{CBA}) = \dfrac{1}{2}ab\sin(\widehat{ACB})$.

En divisant tous les membres de ces égalités par $\dfrac{abc}{2}$, il vient : $\dfrac{\sin(\widehat{BAC})}{a} = \dfrac{\sin(\widehat{CBA})}{b} = \dfrac{\sin(\widehat{ACB})}{c}$.

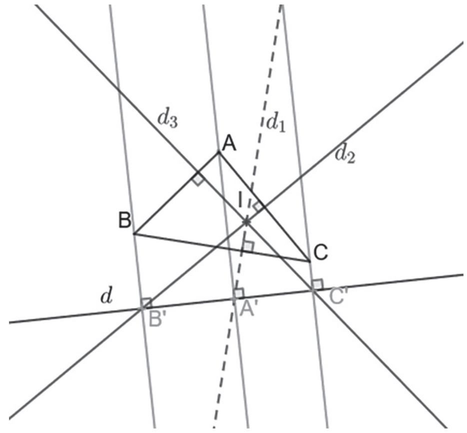
3. $\widehat{BCA} = 180° - (75° + 50°) = 55°$.

$\dfrac{\sin(50°)}{AC} = \dfrac{\sin(55°)}{5}$ d'où $AC \approx 4{,}7$.

$\dfrac{\sin(55°)}{5} = \dfrac{\sin(75°)}{BC}$ d'où $BC \approx 5{,}9$.

113 Les droites d_2 et d_3 ne sont pas parallèles sinon (AB) et (AC) seraient parallèles.

On note I le point d'intersection des droites d_2 et d_3.



On souhaite montrer que la droite (IA′) est perpendiculaire à la droite (BC).

$\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'A'})\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$,

$\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IC'}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IC'}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{AC}$,

d_3 est perpendiculaire à (AB) et passe par C′, d'où $\overrightarrow{IC'}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux soit $\overrightarrow{IC'}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$.

Les projetés orthogonaux de A, B et C sur la droite (A′C′) sont respectivement A′, B′ et C′ donc

$\overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$.

De plus, $\overrightarrow{IC'} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'C'}$.

Par conséquent,

$\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'C'})\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$,

$\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB'}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$.

$\overrightarrow{IB'}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux soit $\overrightarrow{IB'}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

Les projetés orthogonaux de A et C sur la droite (B′C′) sont respectivement A′ et C′ donc

$\overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$.

D'où,

$\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$,

$\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$,

$\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'C}\cdot(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A'})$,

$\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'C}\cdot\vec{0} = 0$.

Donc la droite (IA′) qui passe par I et A′, est perpendiculaire à la droite (BC).

D'où la droite (IA′) correspond à la droite d_1.

Finalement les trois droites d_1, d_2 et d_3 sont concourantes en I.

114 **1. a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = AO^2 + \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AO} = 0$.

Le projeté orthogonal de M sur la droite (AO) est A et le projeté orthogonal de M sur la droite (BO) est B, donc $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OM} = AO^2$ et $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM} = OB^2$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = AO^2 - AO^2 + 0 + OB^2 = OB^2$.

b) Le projeté orthogonal du point M sur (AB) est D et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de même sens donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = AB \times AD$.
Les diagonales du rectangle OAMB sont de même longueur d'où $AB = OM = 1$.
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 1 \times AD = AD$.
À l'aide de **1. a)** on déduit $AD = OB^2$.
A, D et B sont alignés dans cet ordre et $AB = 1$, d'où $\overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|\overrightarrow{AB}$. Par conséquent, $\overrightarrow{AD} = OB^2\overrightarrow{AB}$.

2. a) $M(x\,;y)$ donc $A(x\,;0)$ et $B(0\,;y)$.
Donc $OB^2 = y^2$ et $\overrightarrow{AB}(-x\,;y)$.
On note $(x_D\,;y_D)$ les coordonnées du point D.
$\overrightarrow{AD} = OB^2\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\begin{cases} x_D - x = y^2 \times (-x) \\ y_D = y^2 \times y \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_D = x(1-y^2) \\ y_D = y^2 \times y \end{cases}$.

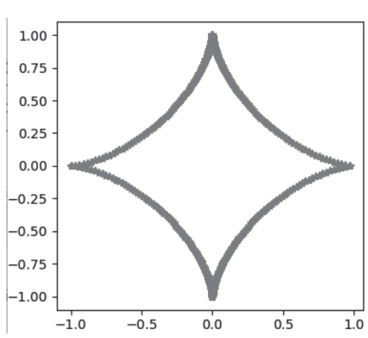
Or $OM^2 = 1$, donc $x^2 + y^2 = 1$,
soit $1 - y^2 = x^2$. On obtient donc : $\begin{cases} x_D = x^3 \\ y_D = y^3 \end{cases}$.

b) $y^2 = 1 - x^2$ équivaut à $y = \sqrt{1-x^2}$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$.
Or, $y^3 = yy^2 = y(1-x^2)$ donc $y^3 = \sqrt{1-x^2}(1-x^2)$ ou $y^3 = -\sqrt{1-x^2}(1-x^2)$.

c)

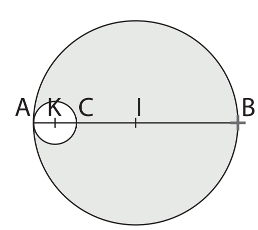
```
from math import *
from pylab import *
x=-1
while x<=1:
    a=x**3
    b=(1-x**2)*sqrt(1-x**2)
    plot(a,b,'r*')
    plot(a,-b,'r*')
    x=x+0.01
show()
```

Affichage à l'issue de l'exécution du programme :

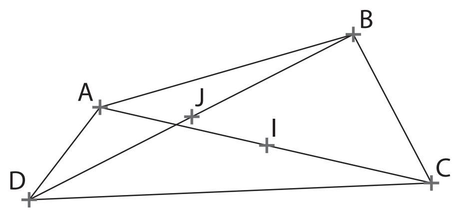


115 On note I le milieu du segment $[BC]$.
$$\frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$$
$$\frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$
$$\frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$$
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2)$ équivaut donc à
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AI})\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, soit encore à $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.
L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[BC]$.

116 On note I le milieu du segment $[AB]$.
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$,
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$,
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.
On note K le milieu du segment $[AC]$. On a de même, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = MK^2 - KA^2$.
$(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}) \times (\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}) < 0$ équivaut à
$\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} > 0 \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} < 0 \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} > 0 \end{cases}$.
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} > 0$ équivaut à $MI^2 > IA^2$, soit $MI > IA$, c'est-à-dire M n'appartient pas au disque fermé D_1 de diamètre $[AB]$.
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} < 0$ équivaut à M appartient au disque ouvert D_2 de diamètre $[AC]$.
$D_2 \subset D_1$ donc l'ensemble des points M qui vérifient $\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} > 0 \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} < 0 \end{cases}$ est l'ensemble vide.
On raisonne de même pour le 2e cas :
$\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} < 0 \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} > 0 \end{cases}$ conduit à M appartient à D_1 auquel on retire D_2 et le cercle de diamètre $[AC]$.
Finalement,
$(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}) \times (\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}) < 0$ équivaut à M appartient à D_1 auquel on retire D_2 et le cercle de diamètre $[AC]$.
La zone colorée (les frontières des disques étant exclues) correspond à l'ensemble des points cherchés.



117 On nomme ABCD un quadrilatère quelconque, I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[BD]$.



Dans le triangle ABC :

$AB^2 + BC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2$

$AB^2 + BC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC})^2$

$AB^2 + BC^2 = 2IB^2 + \dfrac{1}{2}AC^2$ (formule de la médiane).

De même dans le triangle ACD :

$CD^2 + DA^2 = 2ID^2 + \dfrac{1}{2}AC^2.$

Donc,

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + 2(IB^2 + ID^2).$

Dans le triangle IBD, $IB^2 + ID^2 = 2IJ^2 + \dfrac{1}{2}DB^2.$

Finalement,

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + DB^2 + 4IJ^2.$

Or $IJ^2 \geqslant 0$ d'où l'inégalité d'Euler.

118 On note $(a\,;b)$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et $(c\,;d)$ celles du vecteur $\vec{v}$.

On constate que $b = 2a$ et $c = -2d$.

Donc $\vec{u}(a\,;2a)$ et $\vec{v}(-2d\,;d)$.

D'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2ad + 2ad = 0$, c'est-à-dire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

119 **1. a) L'affirmation est vraie.** En effet, dans le plan (ABC) le projeté orthogonal du point C sur la droite (AI) est B et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} = AB \times AI = \dfrac{1}{2}.$

b) L'affirmation est fausse. En effet, I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} = AI^2 = \dfrac{1}{4}.$

D'après **a)**, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} \neq \dfrac{1}{4}.$

c) L'affirmation est vraie. En effet,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}.$

$\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AE}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ} = 0.$

D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}.$

d) L'affirmation est fausse. En effet, d'après **1. c)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$. Or, I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB}$, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}.$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = 2IB \times IC \times \cos(\widehat{BIC})$, soit

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos(\widehat{BIC}).$

Dans le triangle BIC rectangle en B :

$\cos(\widehat{BIC}) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}$. Donc $\widehat{BIC} \neq 60°.$

2. a) $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{GC},$

$\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GC}.$

Or, $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{FB}$ orthogonal à $\overrightarrow{IB}$, donc $\overrightarrow{GC}$ orthogonal à $\overrightarrow{IB}$.

De plus, $\overrightarrow{BC}$ orthogonal à $\overrightarrow{GC}$,

donc $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{GC} = 0 + 0 = 0.$

b) De **2. a)** on déduit que $\overrightarrow{IC}$ orthogonal à $\overrightarrow{GC}$, c'est-à-dire le triangle ICG est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore (appliqué à deux reprises) :

$IJ^2 = IC^2 + CJ^2 = 1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}.$

D'où $IJ = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.$

c) $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EJ} = \dfrac{1}{2}(IE^2 + EJ^2 - IJ^2).$

Le théorème de Pythagore conduit à :

$IE^2 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$

$EJ^2 = 2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{4}.$

Donc $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EJ} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{4} + \dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2}\right) = 1.$

Or, dans le plan (EIJ), $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EJ} = EI \times EJ \times \cos(\widehat{IEJ})$, donc

$\cos(\widehat{IEJ}) = \dfrac{\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EJ}}{EI \times EJ} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{4}}}$, et $\widehat{IEJ} \approx 53°.$

Exploiter ses compétences

120 $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_1}$ donc $\|\vec{F}\| = \|\vec{F_1} + \vec{F_1}\|$,

Par conséquent,

$\|\vec{F}\|^2 = \|\vec{F_1} + \vec{F_1}\|^2 = (\vec{F_1} + \vec{F_1})^2,$

$\|\vec{F}\|^2 = \vec{F_1}^2 + 2\vec{F_1}\cdot\vec{F_1} + 2\vec{F_2}^2,$

$\|\vec{F}\|^2 = F_1^2 + 2\vec{F_1}\cdot\vec{F_1} + F_2^2.$

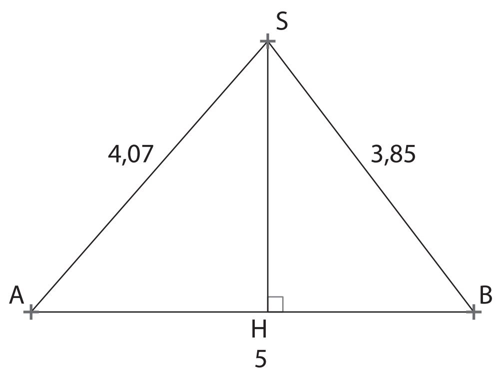
$F_1 = 600$ et $F_2 = 50$ (en kN).

$\vec{F_1}\cdot\vec{F_1} = F_1 \times F_2 \times \cos(45°),$

$\vec{F_1}\cdot\vec{F_1} = 600 \times 50 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Finalement, $\|\vec{F}\|^2 = 362\,500 + 30\,000\sqrt{2}$, soit $\|\vec{F}\| = \sqrt{362\,500 + 30\,000\sqrt{2}}$ et $\|\vec{F}\| \approx 636$ kN.

121 On considère le triangle ABC tel que $AS = 4{,}07$, $BS = 3{,}84$ et $AB = 5$ (en hm).



$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(AS^2 + AB^2 - BS^2)$,

$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(4{,}07^2 + 5^2 - 3{,}84^2) = 13{,}4097$.

On note H le pied de la hauteur issue de S. Par projection orthogonale du point S, sur (AB), il vient : $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = AH \times AB$ (le produit scalaire $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB}$ est positif donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont dans le même sens).

D'où $AH = \dfrac{\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} = \dfrac{13{,}4097}{5} = 2{,}68194$.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ASH rectangle en H, on obtient :

$SH = \sqrt{AS^2 - AH^2}$.

$SH \approx 3{,}06$ hm.

Donc la hauteur de la tour est bien supérieure à 300 m.

122 On note a la longueur de l'arête [EG].

Les triangles EHG et HFG sont des triangles équilatéraux identiques d'où $JE = JF$.

I est le milieu de [EF] donc $IE = IF$.

Par conséquent dans le plan (EFJ), (IJ) est la médiatrice de [EF].

Ainsi, le triangle EJI est rectangle en I.

Sachant que la hauteur EJ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, le théorème de Pythagore conduit alors à :

$IJ^2 = EJ^2 - IE^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$.

On raisonne maintenant dans le triangle CEF.

I est le milieu de [EF] donc $\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{IE}$ et

$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IE}) \cdot (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IF})$,

$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IE}) \cdot (\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{IE}) = CI^2 - IE^2$,

$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = \left(\frac{IJ}{2}\right)^2 - IE^2 = \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{8}a^2$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = CE \times CF \times \cos(\widehat{ECF})$,

d'où $\cos(\widehat{ECF}) = \dfrac{\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}}{CE \times CF}$.

Le théorème de Pythagore permet d'obtenir :

$CE^2 = CI^2 + EI^2 = \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{8}a^2$.

Finalement, comme $CE = CF$, il vient :

$\cos(\widehat{ECF}) = \dfrac{-\frac{1}{8}a^2}{\frac{3}{8}a^2} = -\frac{1}{3}$. Donc $\widehat{ECF} \approx 109{,}5°$.

123 Dans le repère orthonormé $(O\,;I,J)$, on note $(x\,;y)$ les coordonnées du point P.

P appartient au demi-cercle de centre O et de rayon 9, donc $x^2 + y^2 = 81$, soit $y^2 = 81 - x^2$.

De plus, $D(6\,;0)$ et $C(-3\,;0)$.

D'où $\overrightarrow{PC}(-3 - x\,; -y)$ et $\overrightarrow{PD}(6 - x\,; -y)$.

$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = (-3 - x)(6 - x) + y^2$,

$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = -18 - 3x + x^2 + 81 - x^2 = -3x + 63$.

$PC^2 = (-3 - x)^2 + y^2 = 6x + 90$.

De même $PD^2 = (6 - x)^2 + y^2 = 117 - 12x$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = PC \times PD \times \cos(\widehat{CPD})$,

donc

$\cos(\widehat{CPD}) = \dfrac{\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}}{PC \times PD} = \dfrac{-3x + 63}{\sqrt{6x + 90} \times \sqrt{-12x + 117}}$.

D'où $\cos(\widehat{CPD}) = f(x)$ avec $x \in [-9\,;9]$.

La fonction f définie sur $[-9\,;9]$ par

$f(x) = \dfrac{-3x + 63}{\sqrt{6x + 90} \times \sqrt{-12x + 117}}$ admet un minimum, atteint une seule fois en $x = \frac{27}{7}$.

Comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$, $\widehat{CPD}$ est maximum uniquement pour $x = \frac{27}{7}$, c'est-à-dire pour $P\left(\frac{27}{7}\,;\frac{18}{7}\sqrt{10}\right)$ puisque

$\sqrt{81 - \left(\frac{27}{7}\right)^2} = \frac{18}{7}\sqrt{10}$.

10 Applications du produit scalaire

Découvrir

1 Calcul d'un angle de tir

1 **a)** D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB}$ donc $\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TA} = \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TA})^2 = TB^2 + TA^2 - 2\overrightarrow{TB} \cdot \overrightarrow{TA}$
donc $AB^2 = TB^2 + TA^2 - 2TA \cdot TB\cos(\widehat{ATB})$.

2 **a)** $TA^2 = TC^2 + CA^2 = 25^2 + 20^2 = 1025$
$TB^2 = TC^2 + CB^2 = 25^2 + 27{,}32^2 = 1371{,}3824$

b) $AB^2 = TB^2 + TA^2 - 2TA \cdot TB\cos(\widehat{ATB})$
donc $\cos(\widehat{ATB}) = \dfrac{TB^2 + TA^2 - AB^2}{2TA \times TB}$
d'où $\cos(\widehat{ATB}) = 0{,}9880$ d'où $\widehat{ATB} \simeq 8{,}9°$.

2 Déterminer les équations d'un cercle et de deux tangentes

1 **1.** N appartient à Γ si et seulement si $AN = 1$, c'est-à-dire $AN^2 = 1$.
D'où $(x-3)^2 + (y-0)^2 = 1$
soit $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 1$
Donc $N \in \Gamma$ si, et seulement si,
$x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0$.

2 $B(2{,}8\,;y)$ appartient à Γ, donc
$2{,}8^2 - 6 \times 2{,}8 + y^2 + 8 = 0$ soit $y^2 = 0{,}96$
d'où $B(2{,}8\,;0{,}98)$.

3 La droite T est la tangente en B au cercle Γ si, et seulement si, les droites T et (AB) sont perpendiculaires.
Ainsi un point M appartient à la tangente T si, et seulement si, les droites (AB) et (BM) sont perpendiculaires, c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

4 $M(x\,;y)$ d'où $\overrightarrow{AB}(-0{,}2\,;v)$ et $\overrightarrow{BM}(x-2{,}8\,;y-v)$
et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ soit $-0{,}2(x-2{,}8) + v(y-v) = 0$
d'où $-0{,}2x + vy = v^2 - 0{,}56$.

Acquérir des automatismes

3 **a)** Un point M appartient à $\mathscr{E}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$, c'est-à-dire $MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2 = 8$.
Or $\dfrac{1}{4}AB^2 = \dfrac{1}{4} \times 4 = 1$ donc M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $MI^2 = 9$ soit $MI = 3$.
$\mathscr{E}$ est le cercle de centre I et du rayon 3 cm.

b) Un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 15$, c'est-à-dire $MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2 = 15$.
Or $\dfrac{1}{4}AB^2 = \dfrac{1}{4} \times 4 = 1$ donc M appartient à $\mathscr{E}$, si et seulement si $MI^2 = 16$ soit $MI = 4$.
$\mathscr{E}$ est le cercle de centre I et du rayon 4 cm.

4 **a)**
$AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB})^2 + (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC})^2$
d'où :
$$AB^2 + AC^2 = AK^2 + KB^2 + 2\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{KB} + AK^2 + KC^2 + 2\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{KC}$$
soit :
$$AB^2 + AC^2 = 2AK^2 + KB^2 + KC^2 + 2\overrightarrow{AK}(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}).$$
Or K est le milieu de [BC], donc $KB = KC = \dfrac{1}{2}BC$
et $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.
Donc $AB^2 + AC^2 = 2AB^2 + \dfrac{1}{2}BC^2$

b) $2{,}5^2 + 4^2 = 2AK^2 + \dfrac{1}{2} \times 6^2$
d'où $AK^2 = \dfrac{1}{2}(6{,}25 + 16 - 18)$ soit $AK^2 = 2{,}125$.
Ainsi $AK = \sqrt{2{,}125}$ soit $AK \simeq 1{,}5$ cm.

7 **a)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(120°)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6 \times 5 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -15$

b) • D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABD :

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(120°)$

$BD^2 = 36 + 25 + 30 = 91$

Donc $BD = \sqrt{91}$.

• $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{BAD} = 180° - 120° = 60°$

D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos(60°)$

$AC^2 = 36 + 25 - 2 \times 6 \times 5 \times \dfrac{1}{2}$

$AC^2 = 36 + 25 - 30 = 31$

Donc $AC = \sqrt{31}$.

8 **a)** D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

soit $AC^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \times 4 \times 8 \times \cos(150°)$

D'où $AC^2 \simeq 135{,}43$ et $AC \simeq 11{,}64$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD})$

$= 4 \times 8 \times \cos(30°) \simeq 27{,}71$.

c) D'après la relation de Chasles

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ d'où $BD^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2$

soit $BD^2 = BA^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}$

d'où $BD^2 \approx 16 + 64 + 2 \times (27{,}71)$

donc $BD^2 \approx 135{,}42$ et $BD \approx 11{,}64$ cm.

9 D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$25 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos(\widehat{BAC})$

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{16 + 36 - 25}{2 \times 4 \times 6} = \dfrac{27}{48} = \dfrac{9}{16}$

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC} \approx 56°$.

10 D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

soit $BC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7\cos(45°)$

d'où $BC^2 \approx 24{,}50$ et $BC \approx \sqrt{24{,}50}$

soit $BC \approx 4{,}95$ cm.

D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

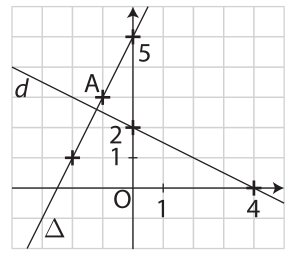
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

soit $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times BA \times BC}$

d'où $\cos(\widehat{ABC}) \approx \dfrac{25 + 24{,}5 - 49}{2 \times 5 \times 4{,}95} \approx 0{,}01$

et $\widehat{ABC} \approx 89{,}42°$.

13 **a)**



b) Un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite Δ est un vecteur directeur de la droite *d*.

Donc, par exemple $\vec{n}(-2\ ;\ 1)$.

Δ a une équation cartésienne de la forme :

$$-2x + y + c = 0$$

Or, A appartient à Δ

donc $-2 \times (-1) + 3 + c = 0$ soit $c = -5$.

Une équation cartésienne de Δ est :

$$-2x + y - 5 = 0$$

14 Méthode de la complétion du carré :

• $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1^2 = (x+1)^2 - 1$

• $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1^2 = (y-1)^2 - 1$

Un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à $\mathscr{F}$ si, et seulement si $(x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 = 4$

c'est-à-dire $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 6$.

Donc $\mathscr{F}$ est le cercle de centre $A(-1\ ;\ 1)$ et de rayon $\sqrt{6}$.

15 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 7{,}25$

On utilise la méthode de complétion au carré.

Les termes en x :

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

Les termes en y :

$$y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$$

Ainsi $M(x\ ;y)$ appartient à l'ensemble $\mathscr{G}$ si et seulement si $(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 7{,}25$ c'est-à-dire $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12{,}25$

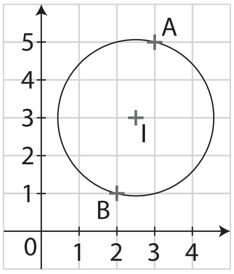
Donc $\mathscr{G}$ est le cercle de centre $A(1\ ;2)$ et de rayon $\sqrt{12{,}25}$.

16 $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -6{,}25$

17 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2 = 4 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{7}{4}$

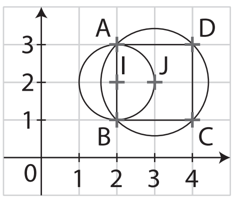
18 C appartient au cercle de centre I et de diamètre [AB], le triangle ABC est rectangle en C donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. Jessica a raison.

19 **a)**



$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, donc M appartient au cercle de diamètre [AB]

20 **a)**



b) Les points communs aux deux ensembles sont les points A et B.

21 M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-9$ soit $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=-9$ avec I milieu de [AB]. Soit $MI^2=\frac{1}{4}\times 4^2-9=-5$ (impossible)

Il n'existe pas de point M tel que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-9$

22 M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=49$ soit $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=49$ avec I milieu de [AB].

Soit $MI^2-\frac{1}{4}\times 14^2=49$ c'est-à-dire $MI^2=98$.

L'ensemble $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon $7\sqrt{2}$.

23 M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $MI=2$.

Or, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-5$ soit $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=-5$

avec I milieu de [AB]. Donc $2^2-\frac{1}{4}AB^2=-5$ soit $AB^2=36$ et $AB=\sqrt{36}=6$ cm.

24 M appartient au cercle de centre I et de rayon 3 si, et seulement si, $MI=3$. Or $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ soit $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=k$ c'est-à-dire $9-\frac{1}{4}\times 4^2=k$ d'où $k=5$.

25 M appartient au cercle de centre I et de rayon 8 cm si, et seulement si, $MI=8$. Or $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ donc $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=k$ soit $64-\frac{1}{4}\times 4=k$ d'où $k=63$.

26 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\leqslant 8$ équivaut à $MI^2-\frac{1}{4}AB^2\leqslant 8$ avec I milieu de [AB] d'où $MI^2-\frac{1}{4}\times 4\leqslant 8$ soit $MI^2\leqslant 9$ d'où $MI\leqslant 3$.

L'ensemble des points M cherché est donc le disque de centre I et de rayon 3 cm, frontière incluse.

27 $M(x\,;0)$ est tel que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8$ si et seulement si $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=6$

$MI^2=\left(\frac{7}{2}-x\right)^2+\frac{25}{4}$; $AB^2=5^2+1^2=26$

d'où $\left(\frac{7}{2}-x\right)^2+\frac{25}{4}-\frac{26}{4}=6$ et $\left(\frac{7}{2}-x\right)^2=\frac{25}{4}$.

On a donc $\frac{7}{2}-x=\frac{5}{2}$ soit $x=1$

ou $\frac{7}{2}-x=\frac{-5}{2}$ soit $x=6$.

Les points recherchés sont $M_1(1\,;0)$ et $M_2(6\,;0)$.

28 $M(0\,;y)$. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8$. équivaut à

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2=8$

$MI^2=9+(-3-y)^2$ et $AB^2=16+4=20$

d'où $9+(-3-y)^2-\frac{1}{4}\times 20=8$

soit $(-3-y)^2=12$ d'où :

$-3-y=2\sqrt{3}$ et $y=-2\sqrt{3}-3$

ou $-3-y=-2\sqrt{3}$ et $y=2\sqrt{3}-3$

Les points M recherchés sont $M_1(0\,;-2\sqrt{3}-3)$ et $M_2(0\,;2\sqrt{3}-3)$

29 **a)** M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si

$$MI^2-\frac{1}{4}AB^2=k \text{ soit } MI^2-\frac{1}{4}\times 144=k$$

et $MI^2=k+36$.

b) • Si $k<-36$ $MI^2<0$: $\mathscr{E}=\varnothing$.

• Si $k=-36$ $MI^2=0$: $\mathscr{E}$ est réduit au point I.

• Si $k>-36$ $\mathscr{E}$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+36}$.

30 **a)** $AB^2+AC^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2$ d'où

$$\begin{aligned}AB^2+AC^2&=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})^2+(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})^2\\&=AI^2+2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}+IB^2+AI^2+2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}+IC^2\\&=2AI^2+2\overrightarrow{AI}(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})+IB^2+IC^2\end{aligned}$$

Comme I est le milieu de [BC].

$$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \text{ et } IB=IC=\frac{BC}{2}$$

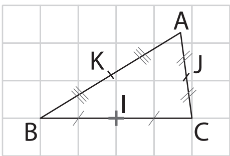
On obtient $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{4}BC^2+\frac{1}{4}BC^2$

soit $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

b) $4^2 + 5^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} \times 6^2$ soit $AI^2 = 11,5$

d'où $AI = 3,4$ cm.

31 **a)**



b)

$AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 + AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2$

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + IB^2 + IC^2$

d'où $AI^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2$

soit $AI^2 = \frac{1}{2}(3,5^2 + 2,5^2) - \frac{1}{4}4^2$

et $AI^2 = 5,25$ donc $AI \simeq 2,3$ cm

De même $BJ^2 = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2) - \frac{1}{4}AC^2 = 12,56$

donc $BJ \simeq 3,5$ cm

et $CK^2 = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2) - \frac{1}{4}AB^2 = 8,0625$

donc $CK \simeq 2,8$ cm

32 $AC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12$

33 Réponse (2) $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{25 + 9 - 49}{30} = -\frac{1}{2}$

34 $BC^2 = 13$

$AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(60°) = 13$

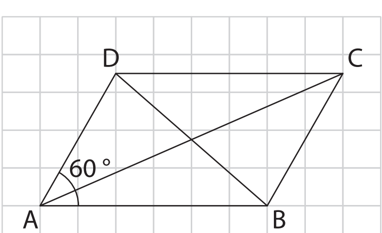
Vincent a raison.

35 D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

soit $BC^2 = 40 - 12 = 38$ $BC = \sqrt{38}$

36



b) D'après la propriété d'Al-Kashi appliquée au triangle ABD :

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos(\widehat{DAB})$

soit $BD^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos(60°) = 28$

d'où $BD = \sqrt{28}$.

c) $\widehat{ABC} = 180 - 60 = 120°$

d) $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos(120°)$

$AC^2 = 36 + 16 - 2 \times 6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$AC^2 = 76$

d'où $AC = \sqrt{76}$.

37 **a)** D'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle AVB :

$AB^2 = VA^2 + VB^2 - 2VA \times VB \times \cos(\widehat{AVB})$

$AB^2 = 81 + 25 - 2 \times 9 \times 5 \times \cos(60°)$

$AB^2 = 106 - 90 \times \frac{1}{2}$

$AB^2 = 61.$

Donc $AB = \sqrt{61}$ et $AB \approx 7,8$ milles.

38 D'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$BC^2 \approx 72\,900 + 202\,500 - 83\,111 \approx 192\,289$

D'où $BC \approx 439$ m.

39 D'après la propriété d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC on obtient

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\alpha$$

soit $25 = 36 + 16 - 48\cos(\alpha)$

d'où $\cos(\alpha) = \frac{36 + 16 - 25}{48} = 0,5625$ soit $\alpha \simeq 56°$.

40 On utilise le théorème d'Al-Kashi dans le triangle dessiné sur le billard.

$1100^2 = 1400^2 + 1200^2 - 2 \times 1400 \times 1200 \times \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha) \approx 0,652$ d'où $\alpha \simeq 49°$.

41 La formule d'Al-Kashi appliquée dans le triangle ABC donne :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{A})$$

D'où $\cos\widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{134}{442}$

Donc $\widehat{A} \approx 72°$ avec la calculatrice.

De même, $\cos(\widehat{C}) = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \times CB} = \frac{444}{612}$

donc $\widehat{C} \approx 43°$.

On a donc $\widehat{B} \approx 180 - (72 + 43) \approx 65°$.

42 **a)** $AB^2 = (-2)^2 + (-4)^2 = 20$

d'où $AB = 2\sqrt{5}$.

$AC^2 = 5^2 + (-5)^2 = 50$ d'où $AC = 5\sqrt{2}$ cm.
$BC^2 = 7^2 + (-1)^2 = 50$ d'où $BC = 5\sqrt{2}$ cm.
b) La formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC entraîne $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB\cos(\widehat{ACB})$
d'où $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \times CB}$ soit $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{4}{5}$
et $\widehat{ACB} \approx 36{,}9°$.
De même $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \times BC} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$
d'où $\widehat{ACB} \approx 71{,}6°$ et $\widehat{BAC} = 180 - (36{,}9 + 71{,}6)$
$= 71{,}6°$.

43 **a)** Dans le triangle DCE on a :
$CE^2 = CD^2 + DE^2 = 20$ d'où $CE = 2\sqrt{5}$.
Dans le triangle BCF on a
$CF^2 = CB^2 + BF^2 = 16 + \dfrac{64}{9} = \dfrac{208}{9}$ d'où $CF = \dfrac{4\sqrt{13}}{3}$
Dans le triangle EAF, on a :
$EF^2 = AF^2 + AE^2 = \dfrac{16}{9} + 4 = \dfrac{52}{9}$ d'où $EF = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$
b) La propriété d'Al-Kashi appliquée au triangle ECF permet d'écrire $EF^2 = CE^2 + CF^2 - 2CE \times CF\cos(\widehat{ECF})$
d'où $\cos(\widehat{ECF}) = \dfrac{CE^2 + CF^2 - EF^2}{2CE \times CF} = \dfrac{7}{\sqrt{65}}$
on a donc $\widehat{ECF} \approx 30°$

44 Dans le triangle HGK rectangle en G
$HK^2 = HG^2 + GK^2 = a^2 + 9a^2 = 10a^2$, donc
$HG = a\sqrt{10}$.
Dans le triangle JKF rectangle en F
$JK^2 = JF^2 + KF^2 = 5a^2$, donc $JK = a\sqrt{5}$.
Le théorème d'Al-Kashi dans le triangle HJK permet d'écrire :
$HJ^2 = HK^2 + JK^2 - 2HK \times JK\cos(\alpha)$
soit $a^2 = 10a^2 + 5a^2 - 2a\sqrt{10} \times a\sqrt{5}\cos(\alpha)$
donc $\cos(\alpha) = \dfrac{14a^2}{10\sqrt{2}a^2} = \dfrac{7}{5\sqrt{2}}$, $\cos(\alpha) \approx 0{,}99$
donc $\alpha \approx 8°$.

45 $PB^2 = PF^2 + FB^2 = 100{,}36$
$PD^2 = FB^2 + (0{,}6 - 0{,}4)^2 = 100{,}04$
Le théorème d'Al-Kashi dans le triangle PDB donne :
$DB^2 = PD^2 + PB^2 - 2PD \times PB \times \cos(\hat{P})$
$\cos(\hat{P}) \approx \dfrac{200{,}24}{200{,}4} \approx 0{,}999$ d'où $\hat{P} \approx 2°$.

46 **a)** D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC on a :
$AB^2 + AC^2 = 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = BC^2$
d'où $9 + x^2 - 3x = 37$ soit $x^2 - 3x - 28 = 0$.
b) AC est la solution positive de l'équation
$$x^2 - 3x - 28 = 0$$
$\Delta = 121$; $x_1 = 7$; $x_2 = -4$ et donc $AC = 7$.

47 **1. a)** $AB^2 = 1^2 + 6^2 = 37$ d'où $AB = \sqrt{37}$
$AC^2 = 2^2 + 3^2 = 13$ d'où $AC = \sqrt{13}$
$BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$ d'où $BC = 4\sqrt{2}$
b) La formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC permet d'écrire
$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$
d'où $\cos(\widehat{BAC}) \approx 0{,}41$ et $\widehat{BAC} = 65{,}8°$
2. a) Dans le triangle ACH rectangle en H
$\sin(\widehat{CAH}) = \dfrac{CH}{AC}$ d'où $CH = AC \times \sin(\widehat{CAH})$ soit $CH \approx 3{,}3$
b) Aire $(ABC) = \dfrac{1}{2} \times CH \times AB \approx 10\,u.a$

48 **a)** d_1 : $\vec{u}(-3\,;2)$, $\vec{v}(2\,;3)$, $A\left(1;\dfrac{2}{3}\right)$.
b) d_2 : $\vec{u}(0\,;1)$, $\vec{v}(1\,;0)$, $B(7\,;3)$.

49 Réponse **(2)**

50 **a)** d_2 d'équation $x + 5y - 4 = 0$ est parallèle à la droite d_1.
b) d_3 $-5x + y + 1 = 0$ est perpendiculaire à d_1.

51 **a)** Une équation cartésienne de la droite *d* est de la forme $2x + y + c = 0$.
$A(4\,;1)$ appartient à *d*, donc $8 + 1 + c = 0$ et $c = -9$.
$2x + y - 9 = 0$ est une équation cartésienne de *d*.
b) $\vec{n}(2\,;1)$ est un vecteur normal à *d*.
c) $A(0\,;9)$ et $B(2\,;5)$ sont des points de *d*.

52 **a)** Une équation cartésienne de *d* est de la forme $-3x - 5y + c = 0$.
$A(4\,;2)$ appartient à (*d*), d'où $-12 - 10 + c = 0$ soit $c = 22$. Une équation cartésienne de *d* est $-3x - 5y + 22 = 0$.
b) L'équation réduite de *d* est $5y = 3x - 22$ soit $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{22}{5}$.
c) Un vecteur directeur de *d* est $\vec{v}(5\,;-3)$ sa pente *h* est $\dfrac{3}{5}$.

53 $\overrightarrow{AB}(-6\,;2)$ et $\vec{n}(1\,;3)$.
$\overrightarrow{AB}(-6\,;2) = -6 + 6 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$
Une équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme $x + 3y + c = 0$.
$A(5\,;1)$ appartient à (AB) donc $5 + 3 + c = 0$.
Une équation cartésienne de (AB) est $x + 3y - 8 = 0$.

54 **a)** Un vecteur normal à d_1 est $\vec{n}_1(1\,;2)$.
Un vecteur normal à d_2 est $\vec{n}_2(-3\,;\,-6)$.
b) $\vec{n}_2 = -3\vec{n}_1$. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

55 **a)** $\vec{n}_1\left(-\frac{4}{5}\,;\frac{3}{5}\right)$ est normal à la droite d_1.
$\vec{n}_2(3\,;4)$ est normal à la droite d_2.
b) $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = -\frac{4}{5}\times 3+\frac{3}{5}\times 4 = 0$
c) Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux, les droites d_1 et d_2 sont donc perpendiculaires.

56 $\overrightarrow{AB}(-6\,;3)$ est un vecteur normal à la hauteur d issue de C dans le triangle ABC.
Une équation cartésienne de d est de la forme $-6x+3y+c=0$.
$C(-1\,;\,-3)$ appartient à d donc :
$-6\times(-1)+3\times(-3)+c=0$, soit $c=3$.
Une équation cartésienne de d est $-6x+3y+3=0$, soit $-2x+y+1=0$.

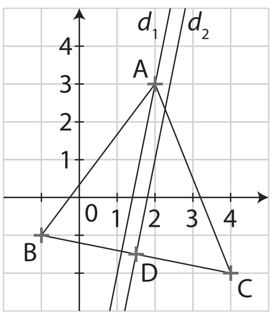
57 $\overrightarrow{AB}(-3\,;1)$ est un vecteur normal à la médiatrice d du segment [AB]. Une équation de d est :
$-3x+y+c=0$.
Le milieu I de [AB] a pour coordonnées
$$\left(\frac{5+2}{2}\,;\frac{-2-1}{2}\right),\ \text{soit}\ \left(\frac{7}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\right)$$
I appartient à d donc $-3\times\frac{7}{2}-\frac{3}{2}+c=0$, soit $c=12$.
Une équation cartésienne de d est $-3x+y+12=0$.

58 **a)** $\overrightarrow{AB}(3\,;\,-1)$ est un vecteur normal à d
Une équation cartésienne de d est de la forme $3x-y+c=0$.
$A(1\,;3)$ appartient à d donc $3-3+c=0$.
D'où $c=0$.
Une équation cartésienne de d est $3x-y=0$.
b) Une équation cartésienne de la parallèle à d qui passe par B est de la forme $3x-y+c=0$; $B(4\,;2)$ appartient à cette droite, donc $12-2+c=0$ soit $c=-10$.
Une équation de cette droite est $3x-y-10=0$.

59 **a)** $\vec{n}_2(2\,;\,-1)$ est normal à la droite d_2.
b) $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 1\times 2+2\times(-1)=0$ donc d_1 et d_2 sont perpendiculaires.
c) Les coordonnées de M point d'intersection de d_1 et d_2 sont solutions du système :
$$\begin{cases}x+2y-8=0\\2x-y+4=0\end{cases}$$
On trouve $M(0\,;4)$.

60 **a)** $\vec{n}_1(1\,;1)$ est un vecteur normal à d_1
d_2 est perpendiculaire à d_1 donc $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de d_2.
Une équation cartésienne de d_2 est de la forme $x-y+c=0$.
$A(2\,;1)$ appartient à d_2 donc $2-1+c=0$
d'où $c=-1$
Une équation cartésienne de d_2 est donc :
$$x-y-1=0.$$
b) Les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2 sont solutions du système $\begin{cases}x+y=1\\x-y=1\end{cases}$
soit $x=1$ et $y=0$
d_1 et d_2 sont sécantes en $M(1\,;0)$.

61 **a)**



b) $\overrightarrow{BC}(5\,;\,-1)$ est un vecteur normal à d_1
Une équation cartésienne de d_1 est de la forme $5x-y+c=0$.
A appartient à d_1 d'où
$10-3+c=0$ soit $c=-7$.
Une équation cartésienne de d_1 est $5x-y-7=0$.
c) Un vecteur normal à d_2 est $\vec{n}_2(-5\,;1)$.
$\vec{n}_2=-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.
d) Le vecteur $\overrightarrow{BC}(5\,;-1)$ est un vecteur normal à la médiatrice [BC]. d a donc une équation de la forme $5x-y+c=0$
Or le milieu $I\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ de [BC] appartient à d, ainsi
$\frac{15}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)+c=0$ et $c=-9$.
d a pour équation $5x-y-9=0$.

62 **a)** $\vec{n}(-3\,;1)$ est un vecteur directeur de d_1, c'est un vecteur normal à d_2 est :
$$-3x+y+c=0$$
$A(2\,;6)\in d_2$ donc $-6+6+c=0$
Une équation de d_2 est $-3x+y=0$.
b) Les coordonnées de d_1 sont solution du système
$$\begin{cases}x+3y-7=0\\-3x+y=0\end{cases}$$
On trouve $H\left(\frac{7}{10}\,;\frac{21}{10}\right)$.

c) La distance de A à d_1 est la distance AH

$$AH=\sqrt{\left(\frac{7}{10}-2\right)^2+\left(\frac{21}{10}-6\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{10}$$

63 **a)** $\overrightarrow{BC}(-4\,;\,-1)$ est un vecteur normal à la médiatrice *d* issue de A. Une équation cartésienne de la droite *d* est de la forme $-4x-y+c=0$.
A appartient à *d* d'où $-4\times 2-(-1)+c=0$ soit $c=7$. Une équation de la droite *d* est donc $-4x-y+7=0$ soit $4x+y-7=0$.
b) Un vecteur normal à d_2 est $\overrightarrow{AC}(-2\,;3)$.
Une équation de la droite d_2 est de la forme $-2x+3y+c=0$. $B(4\,;3)$ appartient à d_2, d'où $-8+9+c=0$ et $c=-1$.
Une équation de la droite d_2 est $-2x+3y-1=0$.
c) Les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2 sont solution du système

$$\begin{cases}4x+y=7\\-2x+3y=1\end{cases}$$

On trouve $H\left(\frac{10}{7}\,;\,\frac{9}{7}\right)$.
d) $\overrightarrow{CH}$ vecteur directeur de la droite (CH) est $\overrightarrow{CH}\left(\frac{10}{7}\,;\,-\frac{5}{7}\right)$. $\overrightarrow{AB}(2\,;4)$ est un vecteur directeur de la droite (AB). $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{10}{7}\times 2-\frac{5}{7}\times 4$ d'où $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. (CH) est perpendiculaire à (AB) ; c'est la troisième hauteur du triangle ABC.

64 **a)** $\overrightarrow{AB}(-6\,;1)$ est un vecteur normal à la médiatrice d_1 du segment [AB].
$C'\left(2\,;\,\frac{5}{2}\right)$ est le milieu du segment [AB].
Une équation cartésienne de d_1 est de la forme $-6x+y+c=0$ et $-12+2{,}5+c=0$ soit $c=9{,}5$.
La droite d_1 a donc pour équation $-6x+y+9{,}5=0$
La médiatrice d_2 du segment [AC] a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AC}(-5\,;\,-6)$.
La droite d_2 a donc une équation de la forme $-5x-6y+c=0$
Or le milieu $J\left(\frac{5}{2}\,;-1\right)$ du segment [AC] appartient à d_2, ainsi $-5\times\frac{5}{2}-6\times(-1)+c=0$ et $c=6{,}5$.
La droite d_2 a donc pour équation $-5x-6y+6{,}5=0$.
b) Les coordonnées du point K vérifient le système :

$$\begin{cases}-6x+y=-9{,}5\\-5x-6y=-6{,}5\end{cases}$$

qui équivaut à $\begin{cases}y=-9{,}5+6x\\-5x-6y=-6{,}5\end{cases}$

On a donc $-5x-6(-9{,}5+6x)=-6{,}5$ et $x=\frac{127}{82}$

On obtient $y=-9{,}5+6\times\left(\frac{127}{82}\right)=-\frac{17}{82}$.

Ainsi $K\left(\frac{127}{82}\,;-\frac{17}{82}\right)$

c) $KA=\sqrt{\left(5-\frac{127}{82}\right)^2+\left(2+\frac{17}{82}\right)^2}=\sqrt{\frac{56\,425}{3\,362}}$

$KB=\sqrt{\left(-1-\frac{127}{82}\right)^2+\left(3+\frac{17}{82}\right)^2}=\sqrt{\frac{56\,425}{3\,362}}$

$KC=\sqrt{\left(0-\frac{27}{82}\right)^2+\left(-4+\frac{17}{82}\right)^2}=\sqrt{\frac{56\,425}{3\,362}}$

Ainsi KA = KB = KC.
Le point K est bien le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

65 **a)** $OA=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$, donc A appartient à $\mathscr{C}$.
b) Un vecteur normal à T est $\overrightarrow{OA}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
$\vec{n}(1\,;\sqrt{3})$ est un vecteur normal à *d*.
$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{n}$; $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc les droites T et *d* sont parallèles.

66 **a)** $AB=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$ donc B appartient au cercle $\mathscr{C}$.
b) $\overrightarrow{AB}\left(1\,;\sqrt{3}\right)$ est un vecteur normal à T et B appartient à T.
Une équation cartésienne de T est de la forme $x+\sqrt{3}y+c=0$ et $4+\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}+c=0$ soit $c=-7-2\sqrt{3}$.
Une équation cartésienne de T est :

$$x+\sqrt{3}y-7-2\sqrt{3}=0.$$

c) $B'(x'\,;y')$. A est le milieu de [BB'], soit $3=\frac{4+x'}{2}$ et $x'=2$ et $2=\frac{2+\sqrt{3}+y'}{2}$ et $y'=2-\sqrt{3}$.
T_2 est parallèle à T_1 donc une équation cartésienne de T_2 est de la forme $x+\sqrt{3}+c'=0$ avec $2+\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)+c'=0$ soit $c'=1-2\sqrt{3}$.
Une équation de T_2 est $x+\sqrt{3}y+1-2\sqrt{3}=0$.

67 **a)** Cercle de centre $A(3\,;1)$ et de rayon 3.
b) Cercle de centre $A(0\,;\,-5)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
c) Cercle de centre $A(-2\,;5)$ et de rayon 4.
d) Cercle de centre $A(0\,;0)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

68 **a)** $(2-2)^2+(4+1)^2=25$, Ida a raison.
b) $(5-2)^2+(3+1)^2=25$, B appartient à $\mathscr{C}$.
$(7-2)^2+(-2+1)^2=26$, C n'appartient pas à $\mathscr{C}$.
$(6-2)^2+(2+1)^2=25$, D appartient à $\mathscr{C}$.

69 **a)** $(x-2)^2+(y-5)^2=9$
b) $(x+3)^2+(y-2)^2=1$
c) $(x+1)^2+(y+4)^2=6$
d) $x^2+(y-1)^2=8$

70 Cercle bleu : $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.
Cercle noir : $(x-3{,}2)^2+(y-2)^2=1$.
Cercle rouge : $(x-5{,}4)^2+(y-2)^2=1$.
Cercle jaune : $(x-2{,}1)^2+(y-1)^2=1$.
Cercle vert : $(x-4{,}3)^2+(y-1)^2=1$.

71 **a)** $\text{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$
Une équation cartésienne du cercle de centre A qui passe par B est $(x-1)^2+(y-1)^2=17$
b) $\text{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$
Une équation cartésienne du cercle de centre A qui passe par B est $(x-2)^2+y^2=2$.
c) $\text{AB}=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$
Une équation cartésienne du cercle de centre A qui passe par B est $(x+1)^2+(y-3)^2=50$.
d) $\text{AB}=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$
Une équation cartésienne du cercle de centre A qui passe par B est $x^2+(y-4)^2=50$.

72 $\mathrm{I}\left(1\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ et $\text{AB}=\sqrt{17}$
Une équation du cercle de diamètre [AB] est :
$$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=17.$$

73 $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{9}{2}\right)$ et $\text{AB}=\sqrt{2}$.
Une équation du cercle de diamètre [AB] est :
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=2.$$

74 **1. a)** $\mathrm{I}(1\,;2)$ est le centre du cercle.
Son rayon est $\text{IA}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=10$.
b) Une équation de $\mathscr{C}$ est $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
2. a) $\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=(4-x)(-2-x)+(3-y)(1-y)$
$=-8+x^2-2x+3+y^2-4y$
$=x^2-2x+y^2-4y-5$
b) M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=0$
soit $x^2-2x+y^2-4y-5=0$.
Par la méthode de complétion des carrés
$x^2-2x=(x-1)^2-1$ $y^2-4y=(y-2)^2-4$
d'où $x^2-2x+y^2-4y-5=0$ équivaut à
$$(x-1)^2+(y-2)^2-1-4-5=0$$
c'est-à-dire $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.

75 **a)** $x^2-10x=(x-5)^2-25$
$y^2+4y=(y+2)^2-4$
b) $x^2+y^2-10x+4y+23=0$ équivaut à
$(x-5)^2+(y+2)^2-25-4+23=0$
soit $(x-5)^2+(y+2)^2=6$
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\text{A}(5\,;\,-2)$ et de rayon $\sqrt{6}$.

76 **a)** $x^2-4x=(x-2)^2-4$
$y^2+6y=(y+3)^2-9$
$x^2+y^2-4x+6y+12=0$ peut s'écrire
$$(x-2)^2+(y+3)^2=1$$
$\mathscr{F}$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;\,-3)$ et de rayon 1.
b) $x^2+10x=(x+5)^2-25$
$y^2-4y=(y-2)^2-4$
$x^2+y^2+10x-4y+29=0$ peut s'écrire
$(x+5)^2+(y-2)^2=0$ $\mathscr{F}$ n'est pas un cercle.
c) $x^2+8x=(x+4)^2-16$
$y^2-10y=(y-5)^2-25$
$x^2+y^2+8x-10y+42=0$ peut s'écrire
$$(x+4)^2+(y-5)^2=-1$$
$\mathscr{F}$ n'est pas un cercle.
d) $x^2-12x=(x-6)^2-36$
$x^2+y^2-12x=0$ peut s'écrire $(x-6)^2+y^2=36$
$\mathscr{F}$ est le cercle de centre $\Omega(6\,;0)$ et de rayon 6.

77 **a)** $x^2-2x=(x-1)^2-1$
$y^2-4y=(y-2)^2-4$
$x^2+y^2-2x-4y+3=0$ peut s'écrire
$$(x-1)^2+(y-2)^2=2.$$
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\text{A}(1\,;2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
b) $(2-1)^2+(3-2)^2=2$. B appartient à $\mathscr{C}$
c) Un vecteur normal à *d* est $\vec{n}(1\,;1)$.
$$\overrightarrow{\text{AB}}(2-1\,;3-2)=\vec{n}(1\,;1)$$
d est bien tangente à $\mathscr{C}$ en B.

78 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$
a) $x^2-2x=(x-1)^2-1$
$y^2-6y=(y-3)^2-9$.
$x^2+y^2-2x-6y+8=0$ peut s'écrire
$$(x-1)^2+(y-3)^2=2$$
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\text{A}(1\,;3)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
b) $(0-1)^2+(4-3)^2=2$ donc B appartient à $\mathscr{C}$.
c) $\overrightarrow{\text{AB}}(-1\,;1)$ est un vecteur normal à T, une équation de T est de la forme $-x+y+c=0$. $\text{B}\in\text{T}$ donc $c=-4$
Une équation de T est $-x+y-4=0$.

79 $\vec{n}(2\,;\,-1)$ est un vecteur normal à d.
$\vec{n}'(1\,;3)$ est un vecteur normal à d'.
$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires donc les droites d et d' non parallèles ne sont pas les tangentes à un même cercle en des points opposés.

80 **1.** C 2. B **3.** A **4.** D

81 **1.** A · B **2.** D **3.** A · D

82 **1. Vrai**. En effet, d'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC,

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$20^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \times 10 \times 12 \cos(\widehat{BAC})$

Ainsi, $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{10^2 + 12^2 - 20^2}{2 \times 10 \times 12} = -\dfrac{13}{20}$

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC} \approx 131°$.

2. Faux. En effet, l'équation de $\mathscr{C}_1$ s'écrit $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 11$ et donc le centre de $\mathscr{C}_1$ est le point $A(2\,;\,-1)$.

Or, le centre de $\mathscr{C}_2$ est le point $B(2\,;1)$.

3. Vrai. En effet, on note H le projeté orthogonal de O sur la droite d.

H a des coordonnées de la forme $\left(x\,;\,-x+\sqrt{2}\right)$.

$OH^2 = x^2 + \left(-x+\sqrt{2}\right)^2 = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

OH^2 est minimum c'est-à-dire OH est minimum lorsque $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (c'est l'abscisse du sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$).

Donc H, projeté orthogonal de O sur d, a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$OH^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ et $OH = 1$, donc H appartient au cercle de centre O et de rayon 1. Donc la droite d est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en $H\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

83 **a)** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$= 9 + 12{,}25 - 21\cos(50°)$

Soit $BC \approx \sqrt{7{,}75} \approx 2{,}8$ cm.

b) $\widehat{ACB} = 180 - 2 \times 70 = 40°$

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$
$= 9 + 9 - 18\cos(40°)$

soit $AB^2 \approx 4{,}211$ soit $AB \approx 2{,}1$ cm.

c) $AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \times BA\cos(\beta)$

soit $\cos(\beta) = \dfrac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2BC \times BA} = \dfrac{1}{2}$ d'où $\beta = 60°$.

84 **1. a)** Une équation cartésienne de d est de la forme $2x + y + c = 0$.

b) d passe par $A(-3\,;2)$ d'où $-6 + 2 + c = 0$ soit $c = 4$.

c) Une équation de la droite d est $2x + y + 4 = 0$.

2. a) Une équation cartésienne de d' est de la forme $-x + 2y + c = 0$. $B(1\,;\,-4)$ appartient à d' donc $-1 - 8 + c = 0$ soit $c = 9$.

Une équation cartésienne de d' est $-x + 2y + 9 = 0$.

b) $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d ; $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de d.

$\overrightarrow{CD}(-5\,;3)$ est un vecteur directeur de (CD).

Une équation cartésienne de (CD) est de la forme $3x + 5y + c = 0$

$C(3\,;2)$ appartient à (CD) d'où $9 + 10 + c = 0$ soit $c = -19$. Une équation cartésienne de (CD) est $3x + 5y - 19 = 0$.

85 **a)** $AB^2 = (5-2)^2 + (1-(-3))^2 = 25$
d'où $AB = 5$ le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est égal à 5.

b) Une équation de $\mathscr{C}$ est $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

c) $(2-2)^2 + (2+3)^2 = 25$; E appartient à $\mathscr{C}$.
$(4-2)^2 + (3+3)^2 = 85$; F n'appartient pas à $\mathscr{C}$.
$(7-2)^2 + (-3-3)^2 = 61$; G n'appartient pas à $\mathscr{C}$.
$(6-2)^2 + (0+3)^2 = 25$; H appartient à $\mathscr{C}$.

S'entraîner

87 Voici la partie de l'algorithme concernée par les adaptations.

```
Si p = 0 alors
    a ← (x_A + x_B) / 2
    b ← (y_A + y_B) / 2
    Afficher « Γ est réduit au point I(a ; b) »
    Sinon
    Afficher « Γ est le cercle de centre
              I(a ; b) et de rayon √p »
Fin Si
```

88

```
d ← √((x − x_A)² + (y − y_A)²)
Si d = r
    Afficher « M appartient au cercle »
    Sinon
    Afficher « M n'appartient pas au cercle »
Fin Si
```

90 **a)** $OM^2 - R^2 = (OM + R)(OM - R)$

$OM + R > 0$ donc $OM^2 - R^2$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est du signe de $OM - R$.

b) 1er cas : M est à l'extérieur du disque de frontière $\mathscr{C}$, $OM > R$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} > 0$.

2e cas : M appartient au cercle $\mathscr{C}$, $OM = R$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

3e cas : M appartient au disque de frontière $\mathscr{C}$ (exclue) ; $OM < R$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} < 0$.

91 La puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$ est $MO^2 - r^2$ soit $MO^2 - 16$.

a) $MO^2 - 16 = 20$ équivaut à $MO^2 = 36$ soit $MO = 6$

$\mathscr{E}_a$ est le cercle de centre O et de rayon 6.

b) $MO^2 - 16 = 16$ soit $MO^2 = 32$ et $MO = 4\sqrt{2}$

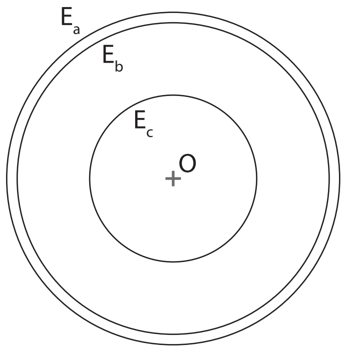
$\mathscr{E}_b$ est le cercle de centre O et de rayon $4\sqrt{2}$.

c) $MO^2 - 16 = -7$ soit $MO^2 = 9$ et $MO = 3$

$\mathscr{E}_c$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

d) $MO^2 - 16 = -16$ soit $MO^2 = 0$

$\mathscr{E}_d$ est réduit au point 0.



92 **a)** $AM^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

b) $y = 1 - x$

c) $AM^2 = (x-2)^2 + (1-x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 4$

d) AM^2 est minimum pour $x = \dfrac{-(-4)}{2 \times 2} = 1$

c) Les coordonnées de M projeté orthogonal de A sur d sont $(1 ; 0)$.

93 **a)** $\vec{n}(2 ; -1)$ est un vecteur normal à d.

Une équation de la perpendiculaire à d qui passe par O a pour équation $-x - 2y + c = 0$, avec $0 - 0 + c = 0$. Les coordonnées du projeté orthogonal de O sur d sont les solutions du système $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ soit $x = -\dfrac{6}{5}$ $y = \dfrac{3}{5}$

La distance de O à d est $OB = \sqrt{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2}$ soit $OB = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \approx 1{,}34$.

$\dfrac{3\sqrt{5}}{5} > 1$ donc d est extérieure à $\mathscr{C}$.

94 Le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre $B(2 ; -2)$ et pour rayon 3.

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2}$$

et $R + R' = 2 + 3 = 5$.

Or, $AB < R + R'$ donc les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants.

95 En décomposant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ à l'aide de la relation de Chasles on obtient

$$\begin{aligned} AB^2 + AD^2 &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})^2 \\ &= 2AC^2 + 2\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) + CB^2 + CD^2 \\ &= 2AC^2 + \frac{1}{2}BD^2 \end{aligned}$$

(B milieu de $[CD]$ donc $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ et $CB = CD = \dfrac{1}{2}BD$).

D'où $4^2 + AD^2 = 2 \times 4^2 + \dfrac{1}{2} \times 36$

soit $AD^2 = 34$ et $AD = \sqrt{34}$.

De même dans le triangle ACE

$$AC^2 + AE^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}CE^2$$

soit $16 + AE^2 = 68 + \dfrac{36}{2}$.

$AE^2 = 70$ et $AE = \sqrt{70}$.

96 Dans le triangle MAC en décomposant $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MC}$ à l'aide de la relation de Chasles on a

$$\begin{aligned} MA^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= 2MO^2 + OA^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 0$ car O milieu de $[AC]$, de plus $OC = OA = \dfrac{1}{2}AC$.

Donc $MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \dfrac{1}{2}AC^2$.

De même dans le triangle MDB on obtient :

$$MD^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}BD^2.$$

Or les diagonales d'un rectangle ont la même longueur donc $AC = BD$ et $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

97 **a)** Dans le triangle ABC en décomposant $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ à l'aide de la relation de Chasles on obtient

$$\begin{aligned} BA^2 + BC^2 &= (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2. \end{aligned}$$

De même dans le triangle ADC on obtient

$$DA^2 + DC^2 = 2DI^2 + \frac{1}{2}AC^2.$$

b) On a

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2BI^2+2DI^2+AC^2$$
$$=2(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JI})^2+2(\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JI})^2+AC^2$$
$$=2(BJ^2+JI^2+2\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{JI})+2(DJ^2+JI^2+2\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{JI})+AC^2$$
$$=2BJ^2+2DJ^2+4\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{JI}+4\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{JI}+4IJ^2+AC^2$$
$$=2\frac{BD^2}{4}+2\frac{DB^2}{4}+4\overrightarrow{JI}\cdot(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DJ})+4IJ^2+AC^2.$$

Or $\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$ donc $4\overrightarrow{JI}(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DI})=0$

On a donc

$$AB^2+BC^2+AD^2+DC^2=BD^2+AC^2+4IJ^2.$$

c) Donc comme $IJ^2 \geqslant 0$ on a

$$AB^2+BC^2+AD^2+DC^2 \geqslant BD^2+AC^2.$$

2. La somme $AB^2+BC^2+AD^2+AC^2$ est minimale quand $IJ=0$ soit quand les diagonales du quadrilatère ont même milieu.

ABCD est alors un parallélogramme.

98

```
from math import*
x_A=float(input("entrer l'abscisse de A:"))
y_A=float(input("entrer l'ordonnée de A:"))
x_B=float(input("entrer l'abscisse de B:"))
y_B=float(input("entrer l'ordonnée de B:"))
x_C=float(input("entrer l'abscisse de C:"))
y_C=float(input("entrer l'ordonnée de C:"))
c=(x_B-x_A)**2+(y_B-y_A)**2
b=(x_C-x_A)**2+(y_C-y_A)**2
a=(x_B-x_C)**2+(y_B-y_C)**2
2x=(c+b-a)/(2*sqrt(c*b))
print("cos(BAC)=",x)
```

99 $AC=2\sqrt{2}$, $AD=4$, $AE=4\sqrt{2}$.

$\widehat{BAE}=3\times45°=135°$.

La formule d'Al-Kashi appliquée dans le triangle ABE donne :

$BE^2=AB^2+AE^2-2AB\times AE\cos(\widehat{BAE})$

$BE^2=4+32-16\sqrt{2}\cos(135°)$

$BE^2=52$, $BE=2\sqrt{13}$.

100 **a)** Les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ sont solutions du système

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y=\sqrt{x} \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$$

La solution positive de $x^2+x-1=0$ est

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}62$$

d'où $y=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\approx 0{,}79$ et donc $A(0{,}62\,;0{,}79)$.

b) Le triangle IOA est isocèle en O

$OI=OA=1$ et $AI=\sqrt{(1-0{,}62)^2+(-0{,}79)^2}\approx 0{,}88$

d'après la formule d'Al-Kashi

$$\cos(\widehat{IOA})=\frac{OA^2+OI^2-AI^2}{2OA\times OI}\approx 0{,}62$$

d'où $\widehat{IOA}=51{,}7°$.

101 **a)** $\overrightarrow{AM}^2=4$ équivaut à $AM^2=4$ c'est-à-dire $AM=2$. Donc l'ensemble cherché est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et rayon 2 cm.

b) $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. Donc l'ensemble cherché est la droite d perpendiculaire à la droite (BC) en B, c'est donc la droite (AB).

c) $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CD}=2$ équivaut à $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD}=2$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (CD).

$2>0$ donc les vecteurs colinéaires $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens et $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD}=2$ équivaut à $CH\times CD=2$ c'est-à-dire $CH=\dfrac{2}{CD}=1$.

Donc l'ensemble cherché est la droite d' perpendiculaire à la droite (CD) en H milieu de [CD].

d) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=1$ équivaut à $MI^2-\dfrac{1}{4}AC^2=1$, où I est le milieu de [AC], c'est-à-dire à $MI^2-\dfrac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\right)^2=1$ soit $MI^2=3$.

Ainsi $MI=\sqrt{3}$ et l'ensemble cherché est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

102 **a)** h_A hauteur issue de A a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}(-6\,;-2)$. On choisira $\vec{n}(3\,;1)$ comme vecteur normal à h_A, une équation de h_A est $3x+y+c=0$ d'où comme $A\in h_A$:

$3-2+c=0$, $c=-1$

Une équation h_A est $3x+y-1=0$.

b) $\overrightarrow{AC}(-3\,;3)$, on choisira $\vec{n}(-1\,;1)$ comme vecteur normal à h_B hauteur issue de B, $B\in h_B$ donc une équation de h_B est $-x+y+c=0$ et

$-4+3+c=0$, d'où $c=1$.

Une équation de h_B est $-x+y+1=0$.

c) Les coordonnées de H sont solutions du système :

$$\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ -x+y+1=0 \end{cases}$$

On trouve $H\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

103 **a)** $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$, donc A appartient au cercle $\mathscr{C}$.

b) $\overrightarrow{OA}(3\,;4)$ est un vecteur normal à T. Une équation cartésienne de T est de la forme $3x+4y+c=0$.

$A\in T$ donc $9+16+c=0$ d'où $c=-25$.

Une équation cartésienne de T est $3x+4y-25=0$.

104 T_1 a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(-2\,;2{,}5)$.

T_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{CD}(3{,}75\,;3)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-2\times3{,}75+2{,}5\times3=0$.

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ donc T_1 et T_2 sont perpendiculaires.

105 **a)** $\overrightarrow{AA'}$ est un vecteur normal à d et I appartient à d.

b) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(1\,;1)$.

Il est normal à (AA'). Une équation cartésienne de (AA') est donc de la forme $x+y+c=0$ et $A(2\,;4)\in(AA')$ d'où $2+4+c=0$.

Une équation cartésienne de (AA') est $x+y-6=0$.

Les coordonnées de I milieu de $[AA']$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \text{ soit } \mathrm{I}\left(\frac{5}{2}\,;\frac{7}{2}\right).$$

On a donc $\dfrac{2+x_{A'}}{2}=\dfrac{5}{2}$ soit $x_{A'}=3$ et $\dfrac{4+y_{A'}}{2}=\dfrac{7}{2}$ soit $y_A=3$ d'où $A'(3\,;3)$.

106 **1. a)** $\overrightarrow{AB}(3\,;\,-2)$ est normal à d_1.

$\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}\,;2\right)$ milieu de $[AB]$ appartient à d_1 d'où d_1 a pour équation $3x-2y+c=0$ et $\dfrac{3}{2}-4+c=0$ soit $c=\dfrac{5}{2}$.

Une équation cartésienne de d_1 est $3x-2y-\dfrac{5}{2}=0$.

b) $\overrightarrow{AB}$ est normal à d_2, une équation cartésienne de d_2 est $3x-2y+c=0$.

$O(0\,;0)\in d_2$, donc $c=0$.

Une équation cartésienne de d_2 est $3x-2y=0$.

c) $\overrightarrow{AB}$ est normal à d_3, une équation de d_3 est de la forme $3x-2y+c=0$.

$B(2\,;1)\in d_3$ donc $6-2+c=0$ et $c=-4$.

Une équation cartésienne de d_3 est $3x-2y-4=0$.

2. a) Les droites d_1, d_2 et d_3 ont même vecteur normal $\vec{n}(3\,;\,-2)$, elles sont donc parallèles.

b) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont perpendiculaires à la droite (BC), elles sont donc parallèles.

107 On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M.

$$\overrightarrow{AM}(x+1\,;y-1)\quad \overrightarrow{AB}(4\,;\,-2)$$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ équivaut à $4(x+1)-2(y-1)=0$ c'est-à-dire $4x-2y+6=0$ soit $2x-y+3=0$.

L'ensemble cherché est donc une droite (c'est la perpendiculaire en A à la droite (AB)).

108 $\overrightarrow{BA}(4\,;\,-1)$ est un vecteur normal à la tangente T en A au cercle de centre B.

Une équation cartésienne de T est $4x-y+c=0$;

$A(3\,;2)\in T$ donc $12-2+c=0$ soit $c=-10$.

Une équation de T est $4x-y-10=0$.

109 On cherche les coordonnées de C projeté orthogonal de A sur d.

$\vec{n}(1\,;1)$ est un vecteur normal à d, c'est un vecteur directeur de la droite (CA).

Une équation cartésienne de la droite (CA) est $x-y+c=0$. $A\in(CA)$ donc $5-1+c=0$ soit $c=-4$.

Une équation de (CA) est $x-y-4=0$.

Les solutions du système $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=4, \end{cases}$ soit $x=4$ et $y=0$, sont les coordonnées de $A'(4\,;0)$ le projeté orthogonal de A sur d.

$$AA'=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Une équation du cercle $\mathscr{C}$ est $(x-5)^2+(y-1)^2=2$.

110 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$

a) $x^2-2x=(x-1)^2-1$

$y^2-6y=(y-3)^2-9$

$x^2+y^2-2x-6+8=0$ peut s'écrire

$(x-1)^2+(y-3)^2=2$.

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $A(1\,;3)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b) $(0-1)^2+(4-3)^2=2$ donc $B\in\mathscr{C}$.

c) $\overrightarrow{AB}(-1\,;1)$ est un vecteur normal à T, une équation de T est $-x+y+c=0$.

$B\in T$, donc $0+4+c=0$.

Une équation de T est $-x+y-4=0$.

111 **a)** $x^2-2x=(x-1)^2-1$

$y^2-4y=(y-2)^2-4$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc $(x-1)^2+(y-2)^2=2$.

$\mathscr{C}$ a pour centre $A(1\,;2)$ et rayon $r=\sqrt{2}$.

b) $H(x\,;mx+5)\in d$.

$$\begin{aligned} AH^2 &= (x-1)^2+(mx+3)^2 \\ &= x^2-2x+1+m^2x^2+6mx+9 \\ &= (m^2+1)x^2+(6m-2)x+10 \end{aligned}$$

AH^2 est minimal pour $x=\dfrac{-(6m-2)}{2(m^2+1)}$

soit $x=\dfrac{-3m+1}{m^2+1}$ et $y=\dfrac{-3m^2+m}{m^2+1}+5$

soit $y=\dfrac{-3m^2+m+5m^2+5}{m^2+1}=\dfrac{2m^2+m+5}{m^2+1}$

c) La position de d par rapport à $\mathscr{C}$ dépend du signe de AH^2-2 soit $(m^2+1)x^2+(6m-2)x+8$.

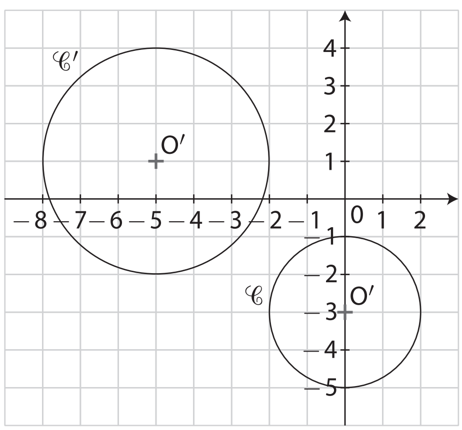
$$\begin{aligned} \Delta &= (6m-2)^2-4(m^2+1)\times 8 \\ &= 36m^2-24m+4-32m^2-32 \\ &= 4m^2-24m-28 \\ &= 4(m^2-6m-7) \end{aligned}$$

• $\Delta=0$ pour $m_1=-1$ et $m_2=7$

d est tangente à $\mathscr{C}$.

• $\Delta > 0 \quad m < -1$ ou $m > 7$
d est sécante à $\mathscr{C}$.
• $\Delta < 0 \quad -1 < m < 7$
d ne coupe pas $\mathscr{C}$.

112 $\mathscr{C}$ a pour centre $\Omega(-5\,;1)$ et rayon $r = 2$.
$\mathscr{C}'$ a pour centre $\mathrm{O}'(0\,;\,-3)$ et rayon $r' = 3$.
b) $\Omega\mathrm{O}'^2 = (0+5)^2 + (-3-1)^2 = 25 + 16 = 41$
$\Omega\Omega' = \sqrt{41} \approx 6{,}4$.
$\Omega\Omega' > r + r'$ les cercles sont disjoints.



113 **a)** $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
Une équation de $\mathscr{C}_1$ est $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
$\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $\mathrm{I}_1(1\,;0)$ et de rayon 1.
b) $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$.
$\sqrt{5} < 3$ les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécants.
c) Une équation de $\mathscr{C}_2$ est $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ soit $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.
Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont solutions du système.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 4x + 4y - 4 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = -2y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y^2 - 8y + 4 + y^2 + 4y - 4 = 0 \\ x = -2y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y^2 - 4y = 0 \\ x = -2y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = \dfrac{4}{5} \\ x = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

d'où $\mathrm{A}_1(2\,;0)$ et $\mathrm{A}_2\left(\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{4}{5}\right)$.

2. a) $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\left(-\dfrac{8}{5}\,;\dfrac{4}{5}\right)$ est normal à d.

I milieu de $[\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2]$, ainsi $\mathrm{I}\left(\dfrac{6}{5}\,;\dfrac{2}{5}\right)$.
Une équation cartésienne de d est de la forme

$$-\frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y + c = 0.$$

$\mathrm{I} \in d$ donc $-\dfrac{48}{25} + \dfrac{8}{25} + c = 0$ soit $c = \dfrac{8}{5}$.
Une équation de d est $-8x + 4y + 8 = 0$.
b) $\mathrm{I}_1(1\,;0)$ donc $-8 + 0 + 8 = 0 \quad \mathrm{I}_1 \in d$.
$\mathrm{I}_2(2\,;2)$ donc $-16 + 8 + 8 = 0 \quad \mathrm{I}_2 \in d$.
donc d est la droite $(\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2)$.
$\overrightarrow{\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2}(1\,;2)$ est un vecteur directeur de $(\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2)$.
Une équation de $(\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2)$ est de la forme $2x - y + c = 0$.
$\mathrm{I}_1 \in (\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2)$ donc $2 + c = 0$ soit $c = -2$.
Une équation de $(\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2)$ est $2x - y - 2 = 0$ soit $-8x + 4y + 8 = 0$.

114 $\mathscr{C}$ a pour équation $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$.
d_m a pour équation $y = mx + 2 - 2m$ donc $\mathrm{M}(x\,;y) \in d_m$ équivaut à $y - 2 = mx - 2m$.
a) Si $x = 2$, $y - 2 = 2m - 2m$ donc $y = 2$
$\mathrm{I} \in d_m$ quelle que soit la valeur de m.
b) En remplaçant $y - 2$ par $mx - 2m$ dans l'équation de $\mathscr{C}$, on obtient $(x-2)^2 + (mx - 2m)^2 = 1$ soit $x^2 - 4x + 4 + m^2x^2 - 4m^2x + 4m^2 - 1 = 0$ qui équivaut à $(1 + m^2)x^2 - (4 + 4m^2)x + 4m^2 + 3 = 0$
$\Delta = (4 + 4m)^2 - 4 \times (1 + m^2)(4m^2 + 3)$
$\Delta = 16 + 32m^2 + 16m^4 - 16m^2 - 16m^4 - 12 - 12m$
$\Delta = 4m^2 + 4 = 4(m^2 + 1) > 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

$$x_{m_1} = \frac{4 + 4m^2 - \sqrt{4(m^2+1)}}{2(1 + m^2)}$$

donc $x_{m_1} = \dfrac{2m^2 + 2 - \sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2}$

et $x_{m_2} = \dfrac{2m^2 + 2 + \sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2}$

On obtient alors

$$y_{m_1} = m \times \frac{2m^2 + 2 - \sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2} + 2 - 2m$$

$$y_{m_1} = \frac{2m^3 + 2m - m\sqrt{1 + m^2} + 2 + 2m^2 - 2m - 2m^3}{1 + m^2}$$

$$y_{m_1} = \frac{2m^2 - m\sqrt{1 + m^2} + 2}{1 + m^2}$$

et $y_{m_2} = \dfrac{2m^2 + m\sqrt{1 + m^2} + 2}{1 + m^2}$

115 **a)** $\overrightarrow{AB}(-1\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;2)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -1\times 4 + 2\times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

Le triangle ABC est rectangle en A.

b) BC $= 5$

I milieu de [BC] a pour coordonnées $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\,;5\right)$, c'est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Une équation de ce cercle est

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = \frac{25}{4}.$$

116 **a)** • $x^2 + y^2 - 8x + 6y = -15$ équivaut à

$(x-4)^2 + (y+3)^2 - 16 - 9 = -15$

c'est-à-dire $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 10$.

C'est donc le cercle de centre A$(4\,;\,-3)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

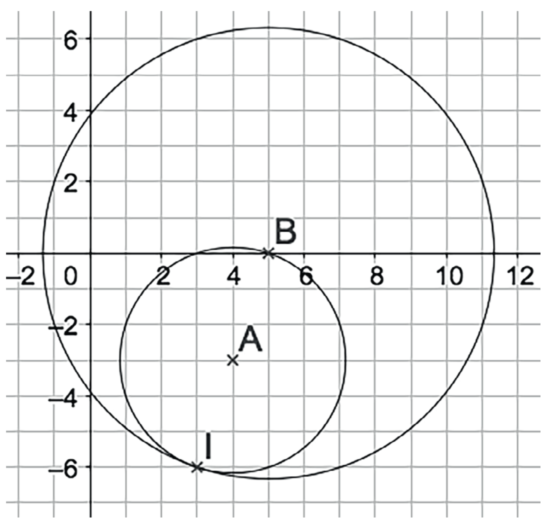
• $x^2 + y^2 - 10x = 15$ équivaut à

$$(x-5)^2 + y^2 - 25 = 15$$

c'est-à-dire $(x-5)^2 + y^2 = 40$.

C'est donc le cercle de centre B$(5\,;0)$ et de rayon $2\sqrt{10}$.

b)



Il semble que ces cercles sont intérieurement tangents en $\mathrm{I}(3\,;\,-6)$.

117 **a)** Si M $\in \mathscr{F}$ demi-cercle de centre O et de rayon 1 alors OM $= 1$, soit $x^2 + y^2 = 1$.

b) M$(0\,;\,-1)$ est tel que $0^2 + 1^2 = 1$, M $\notin \mathscr{F}$.

La réciproque n'est pas vraie.

118 Un vecteur normal à d est $\vec{n}(m\,;\,-1)$.

Un vecteur normal à d' est $\vec{n'}(m'\,;\,-1)$.

d et d' sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux c'est-à-dire $\vec{n}\cdot\vec{n'} = 0$.

Ainsi, d et d' perpendiculaires équivaut à

$mn' + (-1)\times(-1) = 0$ c'est-à-dire $mn' = -1$.

Organiser son raisonnement

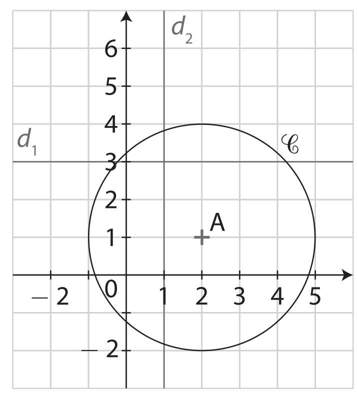
119 **2. a)** Une équation de $\mathscr{C}$ est

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

soit $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et d_1 sont solutions de $x^2 - 4x - 1 = 0$ (on remplace y par 3) soit $x_1 = 2-\sqrt{5}$ et $x_2 = 2+\sqrt{5}$ d'où $\mathrm{A}_1\left(2-\sqrt{5}\,;3\right)$ $\mathrm{A}_2\left(2+\sqrt{5}\,;3\right)$.

c) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et d_2 sont les solutions de $y^2 - 2y - 7 = 0$ (on remplace x par 1) soit $y_1 = 1-2\sqrt{2}$ et $y_2 = 1+2\sqrt{2}$ d'où $\mathrm{B}_1\left(1\,;1-2\sqrt{2}\right)$ $\mathrm{B}_2\left(1\,;1+2\sqrt{2}\right)$.



120 A et C ont même ordonnée donc d_1 la médiatrice de [AC] a pour équation $x = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ soit $x = \dfrac{3}{4}$.

$\overrightarrow{AB}(3\,;\,-3)$ est normal à d_2, la médiatrice de [AB].

d_2 passe par J le milieu de [AB] soit $\mathrm{J}\left(0\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

Une équation de d_2 est de la forme $3x - 3y + c = 0$ et $-\dfrac{9}{2} + c = 0$.

Une équation de d_2 est $3x - 3y + \dfrac{9}{2} = 0$ soit $x - y + \dfrac{3}{2} = 0$.

Les coordonnées du centre Ω du cercle passant par A, B et C sont solutions du système

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ x - y + \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Donc $\Omega\left(\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{9}{4}\right)$.

On procède de façon différente avec d_1 et d_3 la médiatrice de $[BC]$ qui a $\overrightarrow{BC}\left(\frac{3}{2}\,;3\right)$ comme vecteur normal et passe par le milieu $F\left(\frac{9}{4}\,;\frac{3}{2}\right)$.

D'où une équation cartésienne de d_3 de la forme $\frac{3}{2}x+3y+c=0$ avec $\frac{3}{2}\times\frac{9}{4}+3\times\frac{3}{2}+c=0$

soit $c=-\frac{63}{8}$.

Les coordonnées de Ω sont solutions du système

$$\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}x+3y-\frac{63}{8}=0 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}\times\frac{3}{4}+3y-\frac{63}{8}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{9}{4} \end{cases}$

d'où $\Omega\left(\frac{3}{4}\,;\frac{9}{4}\right)$.

121 $C(x\,;y)$ est le centre du cercle.

Il appartient à la droite d : $3x+4y=22$

$$\left.\begin{array}{l} A\in\mathscr{C} \text{ donc } AC^2=x^2 \\ B\in\mathscr{C} \text{ donc } BC^2=x^2 \end{array}\right\} \text{ d'où } AC^2=BC^2$$

soit $(x-7)^2+(y-9)^2=(x+1)^2+(y-5)^2$

et $x^2-14x+49+y2-18y+81$

$$=x^2+2x+1+y^2-10y+25$$

On a donc $-16x-8y=-104$ or $4y=22-3x$

On a alors $-16x-44+6x=-104$

soit $-10x=-60$ et $x=6$.

En remplaçant dans $3x+4y=22$ on obtient $y=1$.

Ainsi $C(6\,;1)$.

122 **1. a)** En utilisant la relation de Chasles on obtient $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$

soit $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

b) Soit I le milieu de $[BC]$. Toujours grâce à la relation de Chasles on obtient $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}$

comme I est le milieu de $[BC]$; $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$

On peut conclure $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

G est donc au $\frac{2}{3}$ de la médiane $[AI]$ en partant de A.

2. On montre de même que

$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ (avec J milieu de $[AC]$)

$\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$ (avec K milieu de $[AB]$)

G appartient aux trois médianes du triangle.

3. $MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

En utilisant la relation de Chasles on a :

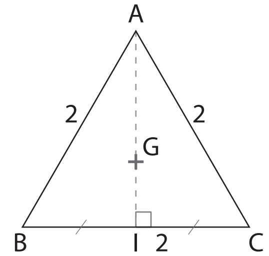
$$\begin{aligned} MA^2+MB^2+MC^2 &= (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2 \\ &\quad +(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2 = MG^2+GA^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+MG^2 \\ &\quad +GB^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+MG^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC} \\ &= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}) \end{aligned}$$

or $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

D'où

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

4. a)



ABC est équilatéral donc la médiane $[AI]$ est aussi la hauteur issue de A.

D'où $AI^2=AB^2-BI^2=3$ soit $AI=\sqrt{3}$

G est aux deux tiers $[AI]$ donc $AG=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Il en est de même pour BG et CG.

b) $MA^2+MB^2+MC^2=25$ équivaut à

$$3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2=25$$

soit $3MG^2+3\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=25$ et $3MG^2=25-4$

$$MG^2=\frac{21}{3}=7 \text{ soit } MG=\sqrt{7}$$

L'ensemble recherché est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{7}$ cm.

123 $y^2-8y=(y-4)^2-16$

Une équation de $\mathscr{C}_1$ est donc $x^2+(y-4)^2=16$

$\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $A(0\,;4)$ et de rayon 4

$x^2-16x=(x-8)^2-64$

$$y^2+4y=(y+2)^2-4$$

Une équation de $\mathscr{C}_2$ est donc

$$(x-8)^2+(y+2)^2=36$$

$\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $B(8\,;-2)$ et de rayon 6.

Calcul de la distance AB :

$$AB=\sqrt{(8-0)^2+(-2-4)^2}=10$$

La somme des longueurs des rayons est 10.

Les cercles sont donc tangents extérieurement.

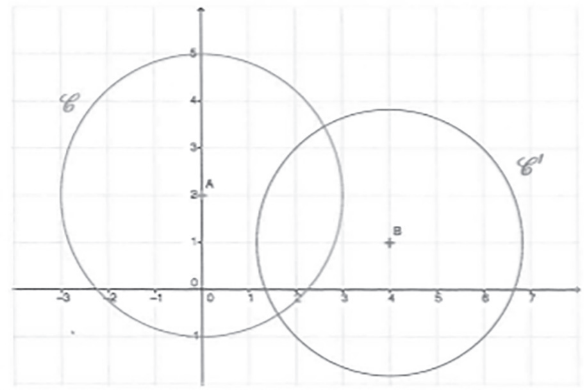
124 • $x^2+y^2-4y-5=0$

équivaut à $x^2+(y-2)^2-4-5=0$

soit $x^2+(y-2)^2=9$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre $A(0\,;2)$ et de rayon 3.

• $x^2+y^2-8x-2y+7=0$
équivaut à $(x-4)^2-16+(y-1)^2+1+7=0$
soit $(x-4)^2+(y-1)^2=8$.
$\mathscr{C}'$ est donc le cercle de centre B(4 ; 1) et de rayon $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.



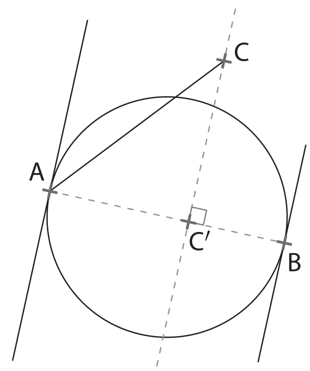
b) $M(x\,;y)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
On a donc
$$x^2+y^2-4y-5=x^2+y^2-8x-2y+7$$
soit $-4y-5=-8x-2y+7$ en multipliant les 2 membres par -1 on obtient $4y+5=8x+2y-7$

c) $2y=8x-12$ et $y=4x-6$
il vient alors $y^2=16x^2-48x+36$
En reportant dans l'équation de $\mathscr{C}$ on a :
$$x^2+16x^2-48x+36-4(4x-6)-5=0$$
soit $17x^2-64x+55=0$

d) $\Delta=356$, les solutions de cette équation sont
$$x_1=\frac{32-\sqrt{89}}{17}\approx 1{,}33 \text{ et } x_2=\frac{32-\sqrt{89}}{17}\approx 2{,}44$$
On obtient $y_1=4\times\frac{32-\sqrt{89}}{17}-6=\frac{-4\sqrt{89}+26}{17}$
et $y_2=4\times\frac{32+\sqrt{89}}{17}-6=\frac{4\sqrt{89}+26}{17}$
Ainsi $M\left(\frac{32-\sqrt{89}}{17}\,;\frac{-4\sqrt{89}+26}{17}\right)$ et
$N\left(\frac{32+\sqrt{89}}{17}\,;\frac{4\sqrt{89}+26}{17}\right)$

e) $\left(\frac{32-\sqrt{89}}{17}\right)^2+\left(\frac{-4\sqrt{89}+26}{17}\right)^2-4\left(\frac{-4\sqrt{89}+26}{17}\right)-5$
$$=\frac{1024-64\sqrt{89}+89}{289}+\frac{1424-208\sqrt{89}+676}{289}+\frac{16\sqrt{89}-104}{17}-5$$
$$=\frac{1113-64\sqrt{89}+2100-208\sqrt{89}+272\sqrt{89}-1768-1445}{289}$$
$=0$
On démontre de même que $M\in\mathscr{C}'$ et N appartient à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Conclusion $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en M et N.

125 $\mathscr{E}$ est le cercle de diamètre [AB]. $\mathscr{E}'$ est la perpendiculaire à (AB) passant par C.
Cette perpendiculaire coupe exactement deux fois $\mathscr{E}$ si elle est incluse dans la bande de plan de frontières *d* la droite perpendiculaire à (AB) passant par B et d' la droite perpendiculaire à (AB) passant par A. (Frontières non comprises). Le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) est C′, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC'$.
Si C = A, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
Si C = B, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2$ soit $0<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<AB^2$



126 a) *d*, médiatrice de [AB] passe par C′ le milieu de [AB]. $C'\left(-3\,;\frac{3}{2}\right)$.
Les points A et B ont même abscisses, *d* est parallèle à l'axe des abscisses, elle a pour équation $y=\frac{3}{2}$.
d' la médiatrice de [BC] passe par $A'\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}(9\,;3)$. Une équation de d' est de la forme $9x+3y+c=0$
A′ appartient à d' d'où $9\times\frac{3}{2}+3\times\frac{-3}{2}+c=0$ soit $c=-9$. Une équation de d' est $9x+3y-9=0$ soit $3x+y-3=0$.

b) Les coordonnées de O sont solutions du système
$$\begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ 3x+y-3=0 \end{cases} \quad \text{soit } O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$$

2. a) *m* la médiane issue de A passe par $A(-3\,;6)$ et $A'\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ le milieu de [BC]. Un vecteur directeur de (*m*) est
$$\overrightarrow{AA'}\left(\frac{3}{2}+3\,;-\frac{3}{2}-6\right) \text{ soit } \overrightarrow{AA'}\left(\frac{9}{2}\,;-\frac{15}{2}\right).$$
Une équation de *m* est de la forme
$$-\frac{15}{2}x-\frac{9}{2}y+c=0 \text{ soit } 15x+9y+c'=0$$
A appartient à *m*, d'où $-45+54+c'=0$ soit $c'=-9$. Une équation de *m* est $15x+9y-9=0$ soit $5x+3y-3=0$

m' médiane issue de C a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CC'}\left(-9\,;\,\frac{3}{2}\right)$. Une équation de m' est donc

$$\frac{3}{2}x + 9y + c = 0.$$

Comme $A(6\,;0)$ appartient à m' on obtient $9 + c = 0$ soit $c = -9$.

Une équation de m' est $\frac{3}{2}x + 9x - 9 = 0$.

b) Les coordonnées de G sont solutions du système

$$\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ \frac{3}{2}x + 9y = 9 \end{cases}$$

On trouve $G(1\,;0)$.

c) h la hauteur issue de C est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

h' hauteur issue de A a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}(9\,;3)$. Une équation de h' est de la forme

$$9x + 3y + c = 0$$

A appartient à h' donc $-27 + 18 + c = 0$ soit $c = 9$. Une équation de h' est $9x + 3y + 9 = 0$ soit $3x + y + 3 = 0$.

h' coupe l'axe des abscisses en $H(-1\,;0)$.

d) Considérons les vecteurs $\overrightarrow{GO}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{GH}(-1\,;\,-1)$. $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{GO}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires, les points G, O et H sont donc alignés.

127 **1.** $\mathscr{C}_0$ a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y - 10 = 0$$

$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$

$y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$ d'où une équation de $\mathscr{C}_0$ est $(x+1)^2 + (y+3)^2 - 20 = 0$

$\mathscr{C}_0$ est le cercle de centre $I_0(-1\,;\,-3)$ et de rayon $\sqrt{20}$.

$\mathscr{C}_1$ a pour équation $x^2 + y^2 + 8y - 10 = 0$

$y^2 + 8y = (y+4)^2 - 16$. D'où une équation de $\mathscr{C}_1$ est $x^2 + (y+4)^2 = 26$.

$\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $I_1(0\,;\,-4)$ de rayon $\sqrt{26}$

$\mathscr{C}_2$ a pour équation $x^2 - 2x + y^2 + 10y - 10 = 0$ soit $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 36$.

$\mathscr{C}_2$ est cercle de centre $I_2(1\,;\,-5)$ de rayon 6.

2. Une équation de $\mathscr{C}_K$ est

$x^2 + y^2 + (2-2k)x + (6+2k)y - 10 = 0$

$x^2 + (2-2k)x = (x+1-k)^2 - (1-k)^2$

$y^2 + (6+2k)y = (y+3+k)^2 - (3+k)^2$

Une équation de $\mathscr{C}_K$ est donc

$$(x+1-k)^2 + (y+3+k)^2 = 2k^2 + 4k + 20$$

Considérons $2k^2 + 4k + 20$

$$\Delta = -144 < 0 \text{ donc } 2k^2 + 4k + 20 > 0$$

Pour toute valeur de k $\mathscr{C}_K$ est le cercle de centre $I_K(k-1\,;\,-k-3)$ et de rayon $\sqrt{2k^2 + 4k + 20}$.

3. $-k-3 = -(k-1) - 4$, l'ensemble des points I_K est la droite d'équation $y = -x - 4$.

4. Recherchons les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. Elles sont solutions de

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 6y = 10 \\ x^2 + y^2 + 8y = 10 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} 2y - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 + 8y = 10 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 + 8x - 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x^2 + 4x + 5 = 0 \end{cases}$$

On trouve $A(1\,;1)$ et ainsi $B(-5\,;\,-5)$.

On vérifie que A et B appartiennent aux cercles $\mathscr{C}_k$:

$1^2 + 1^2 - 2k + 2 + 2k + 6 - 10 = 0$

$5^2 + 5^2 - 10k - 10 + 10k - 30 = 10.$

Les cercles $\mathscr{C}_k$ passent par les points fixes $A(1\,;1)$ et $B(-5\,;\,-5)$.

128 $\overrightarrow{MA}(1-x\,;1-y)$ $\overrightarrow{MB}(9-x\,;1-y)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (1-x)(9-x) + (1-y)(1-y) \\ &= 9 - 10x + x^2 + 1 - 2y + y^2 \\ &= x^2 - 10x + y^2 - 2y + 10 \\ &= (x-5)^2 + (y-1)^2 - 16\end{aligned}$$

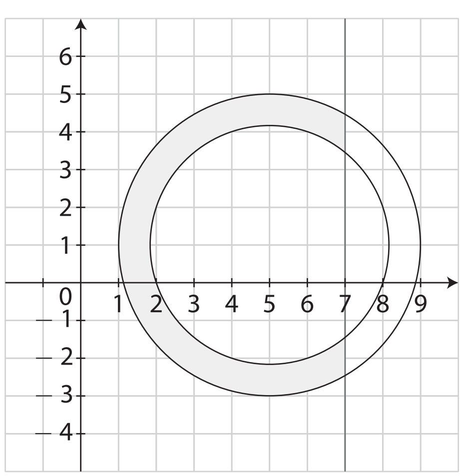
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \geqslant -7$ équivaut à $(x-5)^2 + (y-1)^2 \geqslant 9$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \leqslant 0$ équivaut à $(x-5)^2 + (y-1)^2 \leqslant 16$

L'ensemble des point $M(x\,;y)$ vérifiant

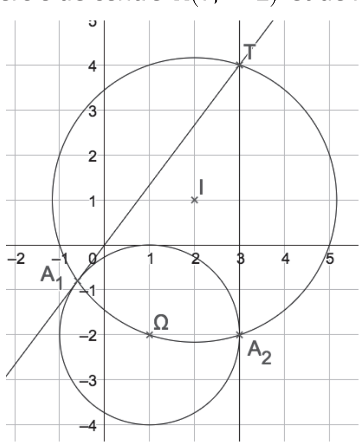
$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-1)^2 \geqslant 9 \\ (x-5)^2 + (y-1)^2 \leqslant 16 \\ x \leqslant 7 \end{cases}$$

est la partie de couronne comprise entre les cercles de centre $\Omega(5\,;1)$ et de rayon 3 et 4 située à gauche de la droite d'équation $x = 7$



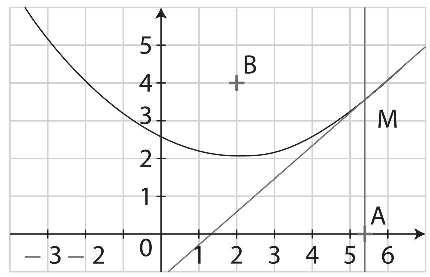
129 **a)** d_0 a pour équation $y = 2$
d_1 a pour équation $x = 1$, elles sont sécantes en A(1 ; 2).
$m \times 1 + (1 - m) \times 2 + m - 2 = 0$.
A appartient à d_m pour toute valeur de m.
b) Les droites passant par A ont pour équation $ax + by + c = 0$ avec $a + 2b + c = 0$
soit $c = -a - 2b$.
Les droites d'équation $ax + by - a - 2b = 0$ appartiennent à $\mathscr{F}$ si, et seulement si, $\dfrac{m}{a} = \dfrac{1-m}{b}$
$\left(= \dfrac{m-2}{-a-2b} \text{ vérifié automatiquement}\right)$
$\dfrac{m}{a} = \dfrac{1-m}{b}$ si, et seulement si, $m = \dfrac{a}{a+b}$
Ce n'est possible que si $b \neq -a$.
L'équation de la droite passant par A qui n'appartient pas à $\mathscr{F}$ est $ax - ay + a = 0$ soit $x - y + 1 = 0$.
c) H_m est le projeté orthogonal de O sur la droite d_m.
Le triangle OAH_m est rectangle en H_m : il est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AO].
H_m appartient à $\mathscr{C}$.
d) Lorsque m décrit $\mathbb{R}$, H_m décrit $\mathscr{C}$ à l'exception du deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

130 **1. a)** $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$
Une équation de $\mathscr{C}$ est donc
$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 1 = 0$$
soit $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1 ; -2)$ et de rayon 2.



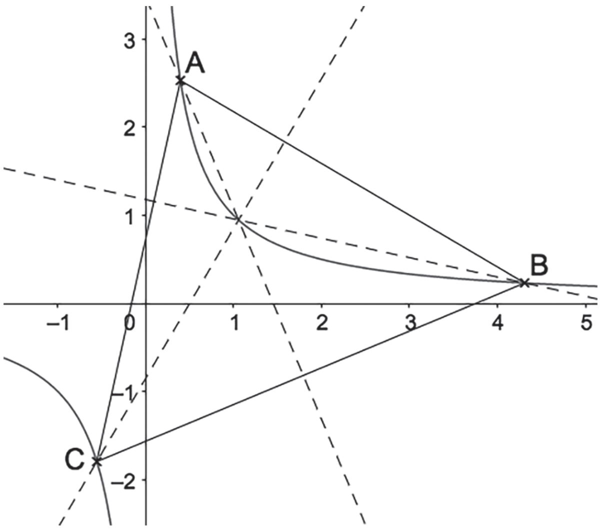
2. a) (TA_1) la tangente à $\mathscr{C}$ issue de T est perpendiculaire à la droite (ΩA_1).
Le point A_1 appartient donc au cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[\Omega T]$. De même A_2 appartient au cercle $\mathscr{C}'$.
b) Le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre $I(2 ; 1)$ le milieu de $[\Omega T]$. et pour rayon IT.
$$IT = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}.$$
Une équation de $\mathscr{C}'$ est donc $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$
soit $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 5 = 0$
c) Les coordonnées des points A_1 et A_2 sont les solutions du système $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$
y est donc solution de l'équation $5y^2 + 14y + 8 = 0$
$\Delta = 36$, donc $y_1 = -\dfrac{4}{5}$ et $y_2 = -2$ d'où $x_1 = -\dfrac{3}{5}$ et $x_2 = 3$
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en $A_1\left(-\dfrac{3}{5} ; -\dfrac{4}{5}\right)$
et $A_2(3 ; -2)$.

131 **a)** Pour construire M équidistant de l'axe des abscisses et de B on mène par A la perpendiculaire Δ à l'axe des abscisses. On trace la médiatrice d du segment [AB]. Ces droites sont sécantes en M équidistant de l'axe des abscisses et B.
b)



c) $M(x ; y)$ appartient à Δ donc $x = a$.
$M(x ; y)$ appartient à d de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(2 - a ; 4)$ qui passe par $I\left(\dfrac{a+2}{2} ; 2\right)$ le milieu de [AB].
Une équation de d est donc de la forme
$$(2-a)x + 4y + c = 0.$$
$I \in d$ donc $(2-a)\left(\dfrac{2+a}{2}\right) + 8 + c = 0$
soit $c = \dfrac{a^2 - 20}{2}$.
La droite d a pour équation :
$$(2-a)x + 4y + \frac{a^2 - 20}{2} = 0$$
Les coordonnées de M sont solutions de
$\begin{cases} x = a \\ (2-a)x + 4y + \dfrac{a^2-20}{2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{a^2 - 4a + 20}{8} \end{cases}$
M décrit la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2 - 4x + 20}{8}$ quand a décrit $\mathbb{R}$.

132 **a)**



b) Il semble que l'orthocentre H appartienne toujours à l'hyperbole, quelles que soient les positions sur $\mathscr{H}$ des points A, B d'abscisses strictement positives et du point C d'abscisse strictement négative.

2. On note $A\left(a\,;\frac{1}{a}\right)$, $B\left(b\,;\frac{1}{b}\right)$, $C\left(c\,;\frac{1}{c}\right)$, $H(x\,;y)$ les coordonnées respectives des points A, B, C et H avec a, b des nombres réels strictement positifs, c un nombre réel strictement négatif et x, y des nombres réels. H est le point de concours des hauteurs du triangle ABC, donc les droites (HC) et (AB) sont perpendiculaires ainsi que les droites (HA) et (BC).

$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ conduisent a un système d'inconnues x, y :

$$\begin{cases}(c-x)\times(b-a)+\left(\frac{1}{c}-y\right)\times\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=0\\(a-x)\times(c-b)+\left(\frac{1}{a}-y\right)\times\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=0\end{cases}$$

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir la solution :

1

$$(c-x)\cdot(b-a)+\left(\frac{1}{c}-y\right)\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=0$$

$$\rightarrow\ \mathbf{(c-x)\,(-a+b)+\left(-y+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0}$$

2

$$(a-x)\cdot(c-b)+\left(\frac{1}{a}-y\right)\cdot\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\rightarrow\ \mathbf{(a-x)\,(-b+c)+\left(-y+\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0}$$

3

Résoudre[{$1, $2}, {x, y}]

$$\rightarrow\ \left\{\left\{\mathbf{x=-\frac{1}{a\,b\,c},y=-a\,b\,c}\right\}\right\}$$

D'où : $y=\frac{1}{x}$, c'est-à-dire H appartient à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

133 On note I le milieu du segment [BC].

$\frac{1}{2}(AC^2-AB^2)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)$

$\frac{1}{2}(AC^2-AB^2)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$\frac{1}{2}(AC^2-AB^2)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB})$

Or I est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Ainsi $\frac{1}{2}(AC-AB)^2=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB})=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$.

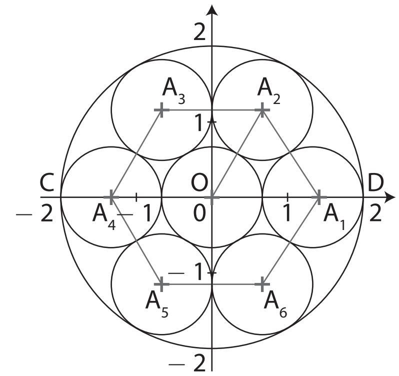
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2)$ équivaut donc à

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire $\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AI})\cdot\overrightarrow{BC}=0$,

soit encore à $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [BC].

134 On choisit comme repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ où O est le centre du cercle central et d'unité le cm.



Équation de $\mathscr{C}$ le cercle central

$$(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

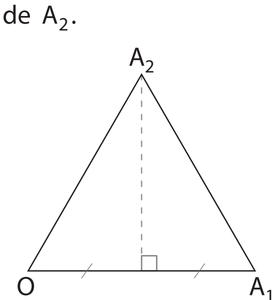
soit $x^2+y^2=\frac{4}{9}$

Coordonnées de $A_1\left(\frac{4}{3}\,;0\right)$.

Une équation de $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre A_1 :

$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$ soit $x^2-\frac{8}{3}x+y^2+\frac{4}{3}=0$

Coordonnées de A_2.



Le triangle OA_1A_2 est équilatéral. Les coordonnées de A_2 sont $A_2\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Une équation de $\mathscr{C}_2$ est :

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

Les points A_3 ; A_4 ; A_5 et A_6 sont les quatre derniers sommets de l'hexagone régulier $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ leurs coordonnées sont $A_3\left(-\frac{2}{3}\,;\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $A_4\left(-\frac{4}{3}\,;\,0\right)$; $A_5\left(-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ et $A_6\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

On a donc $\mathscr{C}_3$ de centre A_3 qui a pour équation :

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$\mathscr{C}_4$ de centre A_4 a pour équation :

$$\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$$

$\mathscr{C}_5$ de centre A_5 a pour équation :

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

et $\mathscr{C}_6$ de centre A_6 a pour équation :

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

135 A et B ont des ordonnées opposées donc I le milieu de $[AB]$ appartient à l'axe des abscisses.

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(2\,;\,0)$ et de rayon

$$IA=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$

Une équation de $\mathscr{C}$ est $(x-2)^2+y^2=17$

La droite (CI) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CI}(12\,;\,-3)$.

Une équation de (CI) est de la forme

$$-3x-12y+c=0$$

I appartient à (CI) donc $-6+c=0$ soit $c=6$.

Une équation de (CI) est $-3x-12y+6=0$ soit $x+4y-2=0$.

Les coordonnées des points d'intersection de (CI) et $\mathscr{C}$ sont solutions de $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=17\\ x=2-4y\end{cases}$

soit $\begin{cases}x=2-4y\\ 17y^2=17\end{cases}$

$\mathscr{C}$ et (CI) se coupent en $D(-2\,;\,1)$ et $F(6\,;\,-1)$

A et F ont la même abscisse, l'axe des abscisses est la droite perpendiculaire à (FA) qui passe par I.

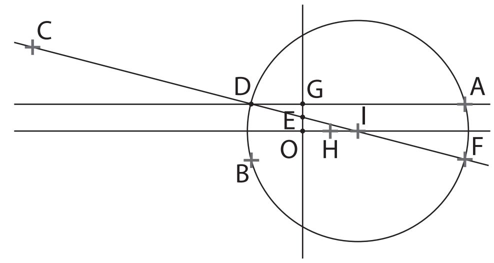
$E\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ est le milieu de $[DI]$.

L'axe des ordonnées est la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses qui passe par E.

(AD) coupe l'axe des ordonnées en $G(0\,;\,1)$

H le milieu de $[OI]$ a pour coordonnées $H(1\,;\,0)$

Le repère est $(O\,;\,\overrightarrow{OH}\,;\,\overrightarrow{OG})$.



136 Objectif BAC

1. a) En utilisant la relation de Chasles on obtient

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})$$
$$=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA})+\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IA}$$

Comme I est le milieu de $[AD]$

$$\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}\ \text{ et }\ \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IA}=-IA^2$$

d'où $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$.

b) L'ensemble $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M tels que $IM=IA$, c'est le cercle de centre I qui passe par A.

2. a) $\overrightarrow{AC}(-3\,;\,2{,}5)$ $\overrightarrow{DB}(5\,;\,6)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=-3\times5+2{,}5\times6=0$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à la droite (BD).

b) Une équation cartésienne de la droite (DB) est de la forme $-3x+2{,}5y+c=0$

$D(-5\,;\,0)$ appartient à (DB), donc $+15+c=0$ soit $c=-15$

Une équation de (DB) est $-3x+2{,}5y-15=0$ soit $-6x+5y-30=0$.

c) L'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$ est le cercle de diamètre $[AD]$. Son centre est $I(-1\,;\,0)$ le milieu de $[AD]$. Une équation de $\mathscr{E}$ est $(x+1)^2+y^2=16$.

Exploiter ses compétences

137 Les points A, B, C désignent respectivement les bouées 1, 2 et 3. Le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $A(0\,;\,0)$ et de rayon 4 a pour équation $x^2+y^2=16$

Le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $B(4\,;\,0)$ et de rayon 4 a pour équation $x^2+y^2-8x=0$

Le cercle $\mathscr{C}_3$ de centre $C(0\,;\,4)$ et de rayon 4 a pour équation $x^2+y^2-8y=0$

Les coordonnées de I sont $I(4\,;\,4)$.

Les coordonnées de F sont solutions de

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 8x = 0 \end{cases}$$

On trouve $F\left(2\,;\,-2\sqrt{3}\right)$.

de même on obtient $E\left(-2\sqrt{3}\,;\,2\right)$. $\overrightarrow{CE}\left(-2\sqrt{3}\,;\,-2\right)$; $\overrightarrow{CI}(4\,;\,0)$.

$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CI} = -8\sqrt{3}$

$CE = 4 \quad CI = 4$

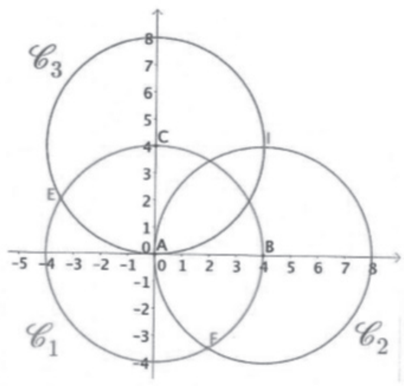
$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CI} = 4 \times 4 \times \cos\widehat{ECI}$ d'où $16\cos\widehat{ECI} = -8\sqrt{3}$ soit $\cos\widehat{ECI} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\widehat{ECI} = 150°$.

On obtient de même $\widehat{IBF} = \widehat{FAE} = 150°$

On en déduit que la longueur totale de la ligne de délimitation est $8\pi\left(\dfrac{210}{360} + \dfrac{210}{360} + \dfrac{150}{360}\right)$

soit $\dfrac{114\pi}{9} \approx 40$ côtés de carreaux

Comme indiqué dans l'énoncé : 1 côté de carreau = 100 m. Il faut environ 4 000 m de ligne de délimitation soit une dépense de $\dfrac{4\,000}{25} \times 40 = 64\,000$ €.



138 $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre A et de rayon 5

Une équation de $\mathscr{C}_1$ est $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 25$ soit $x^2 + y^2 - 2x = 24$

$\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre B et de rayon 10 est

$$(x-12)^2 + (y-10)^2 = 100$$

soit $x^2 + y^2 - 24x - 20y = -144$

$\mathscr{C}_3$ est le cercle de centre C et de rayon 15.

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 24 \\ x^2 + y^2 - 24x - 20y = -144 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 24 \\ 11x + 10y = 84 \end{cases}$

On obtient les couples solutions $(4\,;\,4)$ et $\left(\dfrac{1164}{121}\,;\,\dfrac{576}{121}\right)$.

Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécants en $E(4\,;\,4)$ et $D\left(\dfrac{1164}{121}\,;\,\dfrac{576}{121}\right)$

$CE = \sqrt{(4-16)^2 + (4+5)^2} = 15.$

E appartient au cercle $\mathscr{C}_3$.

$CD = \sqrt{\left(\dfrac{1164}{121} - 16\right)^2 + \left(\dfrac{576}{121} + 5\right)^2} \approx 11{,}66.$

D n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}_3$

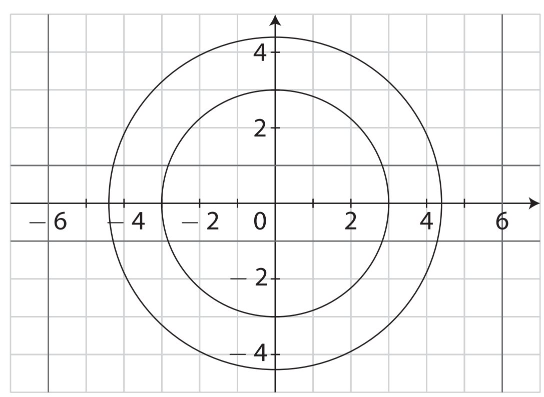
Le téléphone de Victor est au point $E(4\,;\,4)$.

139 On réalise un dessin l'échelle 10/254. En effet 10 inches sont représentés par 1 cm et 10 inches = 25,4 cm.

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité le cm et on trace les droites d'équations $x = 1$; $x = -1$; $y = 6$ et $y = -6$ et les cercles de centre O et de rayons 4,5 et 3 cm.

Leurs équations sont

$$x^2 + y^2 = 20{,}25 \text{ et } x^2 + y^2 = 9$$



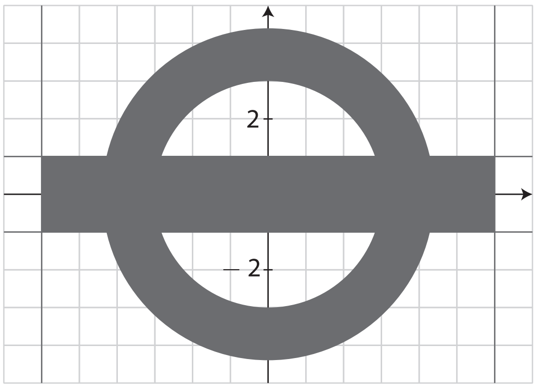
Le rectangle bleu est la représentation de l'ensemble solution du système $\begin{cases} -6 \leqslant x \leqslant 6 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$

La portion de couronne située au-dessus du rectangle est la représentation de l'ensemble solution du système $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9 \\ x^2 + y^2 \leqslant 20{,}25 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$

Celle située en dessous est la représentation du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9 \\ x^2 + y^2 \leqslant 20{,}25 \\ y \leqslant -1 \end{cases}$$

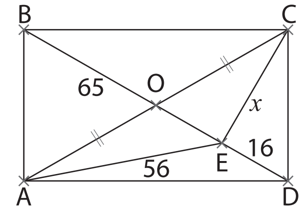
Il reste ensuite à placer le texte UNDERGROUND



Commandes Geogebra

- **a** : $-6 \leqslant x \leqslant 6 \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1$
- **b** : $9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 20{,}25 \wedge y \geqslant 1$
- **e** : $9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 20{,}25 \wedge y \leqslant -1$
- **j** : $9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 20{,}25 \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1$

140



(OE) est une médiane du triangle AEC. En utilisant la relation de Chasles on a:

$$\begin{aligned} EC^2 + EA^2 &= \overrightarrow{EC}^2 + \overrightarrow{EA}^2 \\ &= (\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA})^2 \\ &= 2EO^2 + 2\overrightarrow{EO} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + OC^2 + OA^2 \end{aligned}$$

O milieu de $[AC]$ entraine $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$

et $OC = OA = \dfrac{1}{2}AC$.

On a donc $EC^2 + EA^2 = 2EO^2 + \dfrac{1}{2}AC^2$

soit $x^2 + 56^2 = 2 \times (40{,}5 - 16)^2 + \dfrac{1}{2} \times 81^2$

d'où $x^2 = 1345$. $x = \sqrt{1345}$ EC $\approx 36{,}7$ m.

172909_Chap10_000-000.indd 182 30/07/2019 16:55:13

11 Probabilités conditionnelles

Découvrir

1 Probabilités conditionnelles

1

	Éthanol	Non éthanol	Total
Électrique	39	26	65
Non électrique	46	389	435
Total	85	415	500

2 **a)** • $p_1 = \frac{85}{500} = 0{,}17$. La probabilité que ce véhicule fonctionne à l'éthanol est 0,17.

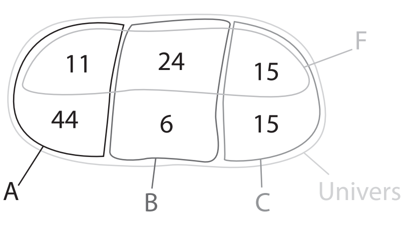
$p_2 = \frac{39}{500} = 0{,}078$. La probabilité que ce véhicule ait un fonctionnement hybride est 0,078.

b) $p_3 = \frac{39}{65} = 0{,}6$. Parmi les véhicules qui fonctionnent à l'électricité, la probabilité de choisir un véhicule qui fonctionne à l'éthanol est 0,6.

3 **a)** $P_1 = P(B)$; $P_2 = P(A \cap B)$. **b)** $P_3 = \frac{P_2}{P_1}$.

2 Formule des probabilités totales

1 **a)**



b) $P(F) = \frac{11 + 24 + 15}{115} = \frac{50}{115} = \frac{10}{23}$.

2 **a)** • $A \cap B$: « L'adhérent choisi pratique l'athlétisme et le badminton ». Cet ensemble est vide.

• $A \cap C$: « L'adhérent choisi pratique l'athlétisme et le canoë ». Cet ensemble est vide.

• $B \cap C$: « L'adhérent choisi pratique le badminton et le canoë ». Cet ensemble est vide.

• $A \cup B \cup C$: « L'adhérent choisi pratique l'athlétisme ou le badminton ou le canoë ».

b) • $P(A \cap F) = \frac{11}{115}$ • $P(B \cap F) = \frac{24}{115}$

• $P(C \cap F) = \frac{15}{115}$

c) $P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F)$

$= \frac{11 + 24 + 15}{115} = \frac{50}{115} = \frac{10}{23} = P(F)$

La somme de ces trois probabilités est égale à la probabilité de F.

Acquérir des automatismes

3 « L'employé choisi est en CDI et a plus de 30 ans » est l'événement $\overline{D} \cap \overline{J}$.

Sa probabilité est :

$$P(\overline{D} \cap J) = P_{\overline{D}} \times P_{\overline{D}}(\overline{J}) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08.$$

4 Deux boules de l'urne portent des numéros impairs (3 et 5) donc $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

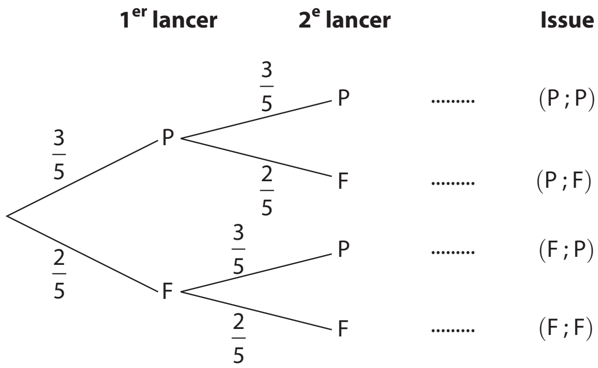
Cinq boules de l'urne portent un numéro inférieur ou égal à 5 (2, 2, 3, 4 et 5) donc $P(C) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

L'événement $B \cap C$ est réalisé par le tirage d'une boule portant un numéro impair et inférieur ou égal à 5 (boule 3 ou boule 5) donc $P(B \cap C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Or, $P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

Ainsi $P(B \cap C) \neq P(B) \times P(C)$ donc les événements B et C ne sont pas indépendants.

7 **a)** On note P l'événement « La pièce est tombée sur Pile » et F l'événement « La pièce est tombée sur Face ».



b) La probabilité p d'obtenir les deux côtés de la pièce est :

$$p = P(P\,;F) + P(F\,;P) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}.$$

8 Les événements L et $\overline{L}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$P(G) = P(L)\times P_L(G) + P(\overline{L})\times P_{\overline{L}}(G)$

$P(G) = 0,4\times 0,12 + 0,6\times 0,15$

$P(G) = 0,138$

On en déduit que :

$$P_G(L) = \frac{P(L\cap G)}{P(G)} = \frac{P(L)\times P_L(G)}{P(G)} = \frac{0,4\times 0,12}{0,138} = \frac{8}{23}.$$

La probabilité d'obtenir L sachant qu'on a obtenu G est égale à $\frac{8}{23}$, soit environ 0,348.

9 **a)** $P_A(B)$: probabilité de choisir un élève de Première sachant que l'on a choisi une fille.

b) $P_B(A)$: probabilité de choisir une fille sachant qu'on a choisi un élève de Première.

10 **a)** Branche verte : $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

b) Branche rouge : $P_A(\overline{B})$.

c) Chemin bleu : $P(A\cap B)$.

11 **a)** (3) 0,6 ; **b)** (1) 0,9 ; **c)** (2) 0,18.

12 **a)** Quentin a raison.

En effet, $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}$.

b) Nadia a tort.

En effet, $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0,35}{0,5} = \frac{7}{10}$ et $\frac{7}{10} \neq \frac{5}{35}$.

13 **a)** $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = 0,2\times 0,5 = 0,1$.

b) $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = 0,1\times 0,85 = 0,085$.

14 On note R l'événement « le joueur joue au Real Madrid F.C. » et F l'événement « le joueur est français ».

a) $P(R) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \approx 0,267$.

b) $P_R(F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$.

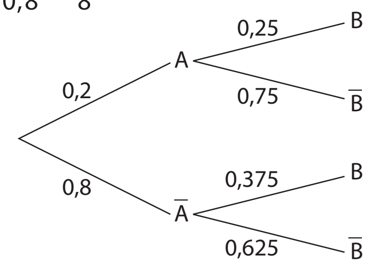
c) $P_F(\overline{R}) = \frac{5}{7} \approx 0,714$.

15 **a)** • $P(A) = 0,2$ • $P(\overline{A}) = 0,8$ • $P(A\cap B) = 0,05$

• $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0,5$ • $P_A(B) = \frac{0,05}{0,2} = \frac{1}{4} = 0,25$

• $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{0,5}{0,8} = \frac{5}{8} = 0,625$

b)



16 **a)** • $P(A\cap B) = P_A(B)\times P(A) = 0,4\times 0,1 = 0,04$.

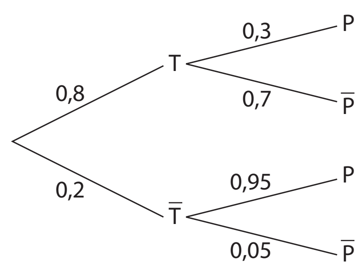
• $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B})\times P(\overline{A}) = 0,2\times 0,9 = 0,18$.

• $P(A\cap\overline{B}) = P_A(\overline{B})\times P(A) = 0,6\times 0,1 = 0,06$.

b)

	A	$\overline{A}$	**Total**
B	0,04	0,72	0,76
$\overline{B}$	0,06	0,18	0,24
Total	0,1	0,9	1

17 **a)**



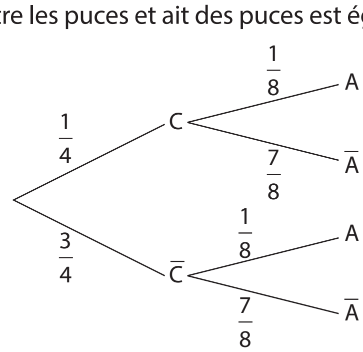
b) • $P(T\cap\overline{P}) = P_T(\overline{P})\times P(T) = 0,7\times 0,8 = 0,56$.

La probabilité qu'un chien choisi au hasard soit traité contre les puces et n'ait pas de puces est égale à 0,56.

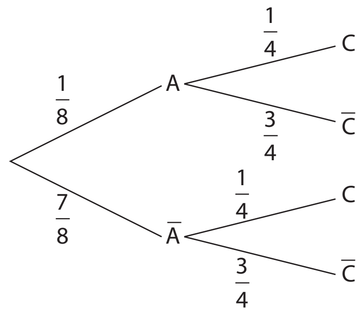
• $P(\overline{T}\cap P) = P_{\overline{T}}(P)\times P(\overline{T}) = 0,95\times 0,2 = 0,19$.

La probabilité qu'un chien choisi au hasard ne soit pas traité contre les puces et ait des puces est égale à 0,19.

18 **1. a)**



b)



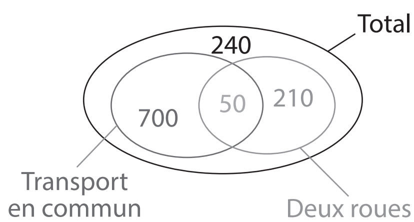
2. • $P(A \cap C) = P_A(C) \times P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

La probabilité que la carte tirée soit l'As de cœur est égale à $\frac{1}{32}$.

$P(\overline{A} \cap C) = P_{\overline{A}}(C) \times P(\overline{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$.

La probabilité que la carte tirée soit un cœur mais pas un As est égale à $\frac{7}{32}$.

19 **a)**



b) On note T l'événement « L'élève utilise les transports en commun » et R l'événement « L'élève utilise un deux roues ».

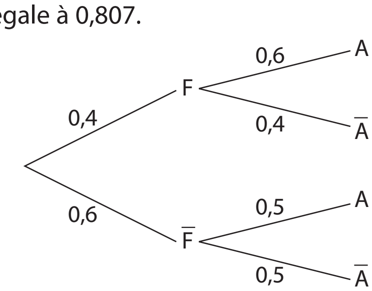
$$P_T(R) = \frac{50}{750} = \frac{1}{15}.$$

Sachant que l'élève utilise les transports en commun, la probabilité qu'il utilise aussi un deux roues est égale à $\frac{1}{15}$, soit environ 0,067.

c) $P_R(\overline{T}) = \frac{210}{260} = \frac{21}{26}$.

Sachant que l'élève utilise un deux roues, la probabilité qu'il n'utilise pas les transports en commun est environ égale à 0,807.

20 **a)**



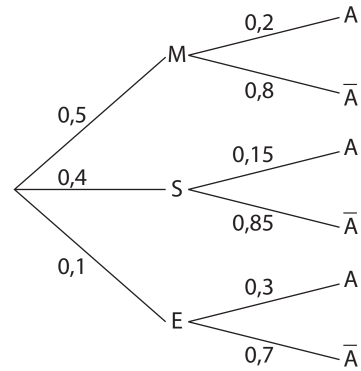
b) • $P(\overline{F} \cap A) = P_{\overline{F}}(A) \times P(\overline{F}) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$.

La probabilité que le CV reçu soit celui d'un garçon et soit accepté est égale à 0,3.

• $P(\overline{A} \cap F) = P_F(\overline{A}) \times P(F) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.

La probabilité que le CV reçu soit celui d'une fille et soit refusé est égale à 0,16.

21 **a)**



b) • $P(M \cap A) = P_M(A) \times P(M) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$.

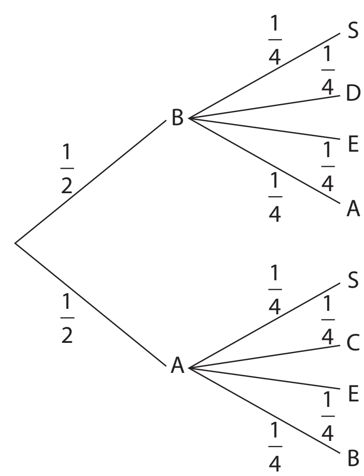
La probabilité que l'arbre choisi soit un mélèze et doive être abattu est égale à 0,1.

• $P(E \cap \overline{A}) = P_E(\overline{A}) \times P(E) = 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}7$.

La probabilité que l'arbre choisi soit un épicéa et ne doive pas être abattu est égale à 0,07.

22 **1.** La probabilité que le scarabée se déplace vers le point B sachant qu'il se trouve au point A est $\frac{1}{4}$.

2. a)



b) La probabilité que le scarabée soit au point B au bout de 2 minutes est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

23 Alicia a tort.

En effet, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$ et $0{,}16 \neq 1$ donc $A \cap B$ n'est pas l'événement certain.

24 **a)** $P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$ et $0{,}2 \neq 0{,}3$.

Donc A et B ne sont pas indépendants.

b) $P(A) \times P(B) = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35 = P(A \cap B)$.

Donc A et B sont indépendants.

c) $P(A) \times P(B) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56 = P(A \cap B)$.

Donc A et B sont indépendants.

25 **a)** $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}7 = 0{,}2$.

b) A et B ne sont pas incompatibles car $P(A \cap B) = 0{,}2$ et $0{,}2 \neq 0$.

c) A et B sont indépendants car

$$P(A)\times P(B)=0,5\times 0,4=0,2=P(A\cap B).$$

26 **a)** $P(A\cap B)=0,4\times 0,25=0,1.$

$P(A)=0,4$

$P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)$

$\quad =0,55+0,1-0,4=0,25$

Or $P(A)\times P(B)=0,4\times 0,25=0,1=P(A\cap B)$

donc A et B sont indépendants.

b) $P(A\cap B)=0,7\times 0,1=0,07$

$P(A)=0,7$

$P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)$

$\quad =0,82+0,07-0,7=0,19$

Or $P(A)\times P(B)=0,7\times 0,19=0,133$

donc $P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$ et A et B ne sont pas indépendants.

27 **a)** Si l'on obtient 3 avec l'un des dés et 4 avec l'autre, alors les événements A et B sont réalisés. Ces événements ne sont donc pas incompatibles.

b) D'une part ; $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ et $P(B)=\dfrac{11}{36}$,

donc $P(A)\times P(B)=\dfrac{11}{216}$.

D'autre part, $P(A\cap B)=\dfrac{2}{36}$.

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$.

Donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

28 On note S_1 (resp. S_2) l'événement « Le premier (resp. le second) téléphone sonne ».

S_1 et S_2 sont indépendants donc

$$P(S_1\cap S_2)=P(S_1)\times(PS_2)=0,6\times 0,7=0,42.$$

$p=P(\overline{S_1}\cap\overline{S_2})=P(\overline{S_1\cup S_2})=1-P(S_1\cup S_2)$

$p=1-(P(S_1)+P(S_2)-P(S_1\cap S_2))$

$p=1-(0,6+0,7-0,42)=0,12.$

La probabilité que, dans l'heure qui vient, elle ne soit pas dérangée par un téléphone est égale à 0,12.

29 **a)** Si A et B incompatibles,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, donc $P(B)=\dfrac{1}{12}$.

b) A et B sont indépendants : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)$$
$$=P(A\cup B)+P(A)P(B)-P(A)$$

$P(B)[1-P(A)]=P(A\cup B)-P(A)$ donc :

$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$P(B)=\frac{1}{12}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{9}$$

30 On note M_1 (resp. M_2) l'événement « Le premier (resp. le second) moteur de l'avion tombe en panne ».

M_1 et M_2 sont indépendants donc :

$P(M_1\cap M_2)=P(M_1)\times P(M_2)=0,000\,1\times 0,000\,1=10^{-8}$.

$p=P(\overline{M_1}\cap\overline{M_2})=P(\overline{M_1\cup M_2})=1-P(M_1\cup M_2)$

$p=1-(P(M_1)+P(M_2)-P(M_1\cap M_2))$

$p=1-(0,000\,1+0,000\,1-10^{-8})=0,999\,800\,01$

La probabilité que l'avion arrive à bon port est égale à 0,999 800 01.

31 **1.** On note A (resp. B) l'événement « La première (resp. la seconde) salle est occupée ».

a) $P(A\cup B)=0,9$ et $P(A\cap B)=0,5$

De plus, $P(A)=P(B)$.

Donc $2P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)=0,9+0,5$

$2P(A)=1,4$ et $P(A)=0,7$.

Ainsi, $P(\overline{A})=0,3$ et la probabilité que la première salle soit libre est égale à 0,3.

b) On peut présenter les résultats avec un tableau croisé.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,5	0,2	0,7
$\overline{B}$	0,2	0,1	0,3
Total	0,7	0,3	1

$$p=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=0,2+0,2=0,4.$$

La probabilité qu'une seule salle soit libre est égale à 0,4.

2. $P(A\cap B)=0,5$.

$$P(A)\times P(B)=0,7\times 0,7=0,49.$$

Donc $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ et les événements A et B ne sont pas indépendants.

32 • $P(D\cap F)=P(D)\times P_D(F)=0,2\times 0,5=0,1.$

• $P(\overline{D}\cap F)=P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(F)=0,8\times 0,1=0,08.$

• $P(F)=P(D\cap F)+P(\overline{D}\cap F)=0,1+0,08=0,18.$

• $P(\overline{F})=1-P(F)=1-0,18=0,82.$

33 **a)** Laïla a raison.

En effet, $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$

$P(D)=0,3+0,4+0,08=0,78.$

b) Victor a tort.

En effet, $P(D\cap B)=P(D)-P(D\cap A)-P(D\cap C)$

$P(D\cap B)=0,85-0,1-0,02=0,73$ et $0,73\neq 0,95.$

34 **a)** $P(A\cap D)=P_A(D)\times P(A)=0,4\times 0,1=0,04.$

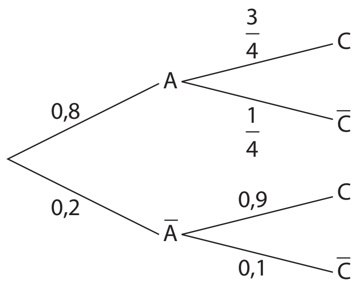
b) A, B, C forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$

$P(D)=0,04+0,5\times 0,2+0,1\times 0,7=0,21.$

c) $P_D(A)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0,04}{0,21}=\dfrac{4}{21}\approx 0,19.$

35 **a)**



b) Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

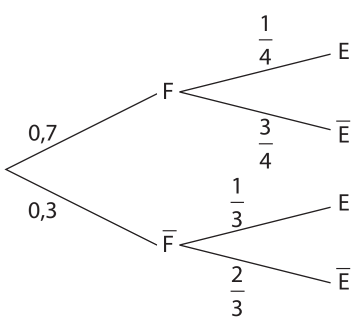
$P(C) = P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C)$

$P(C) = \frac{3}{4} \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}78.$

c) $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} \times 0{,}8}{0{,}78} = \frac{10}{13} \approx 0{,}77.$

Sachant qu'elle comporte au moins 5 pièces, la probabilité que l'habitation choisie au hasard soit un appartement est environ égale à 0,77.

36 **a)**



b) $P(F \cap E) = P_F(E) \times P(F) = \frac{1}{4} \times 0{,}7 = 0{,}175$

La probabilité que le passager soit un Français qui parle couramment l'espagnol est égal à 0,175.

Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(E) = P(F \cap E) + P(\overline{F} \cap E)$

$P(E) = 0{,}175 + \frac{1}{3} \times 0{,}3 = 0{,}275.$

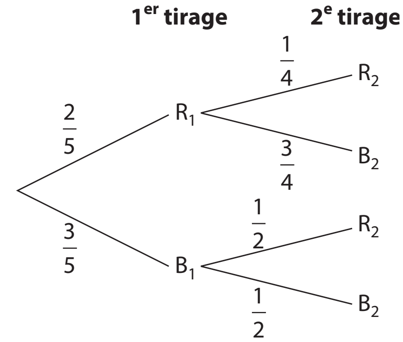
La probabilité que le passager parle couramment l'espagnol est égale à 0,275.

c) $P_E(F) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}175}{0{,}275} = \frac{7}{11}.$

Sachant que le passager choisi parle couramment l'espagnol, la probabilité qu'il soit français est égale à $\frac{7}{11}$, soit environ 0,64.

37 **a)** On note R_1 (resp. B_1) l'événement « la boule tirée est rouge (resp. bleue) au 1er tirage ».

On note R_2 (resp. B_2) l'événement « la boule tirée est rouge (resp. bleue) au 2^{e} tirage ».



b) D'après la formule des probabilités totales :

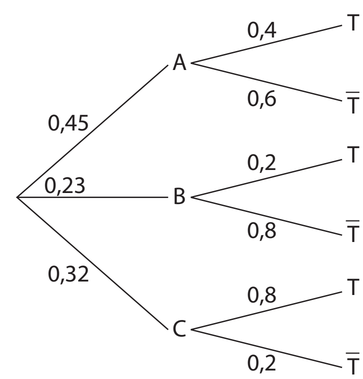
$P(B_2) = P_{R_1}(B_2) \times P(R_1) + P_{B_1}(B_2) \times P(B_1)$

$P(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = 0{,}6.$

La probabilité que la deuxième boule tirée soit bleue est égale à 0,6.

38 **a)** $P_A(T) = 0{,}4$ signifie que, sachant que l'employé choisi fait partie du service A, la probabilité qu'il réside à moins de 30 min de l'entreprise est égale à 0,4.

b)



c) Les évènements A, B, C forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$

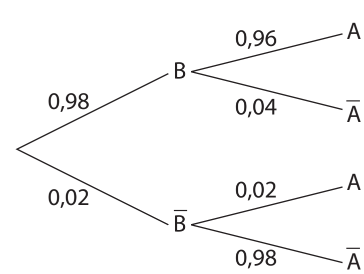
$P(T) = 0{,}4 \times 0{,}45 + 0{,}2 \times 0{,}23 + 0{,}8 \times 0{,}32 = 0{,}482.$

d) $P_T(B) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}2 \times 0{,}23}{0{,}482} \approx 0{,}095.$

Sachant que l'employé réside à moins de 30 min de l'entreprise, la probabilité qu'il fasse partie du service B est égale à 0,095 environ.

39 On note B l'événement « La pièce est bonne » et A l'événement « La pièce est acceptée ».

a)



b) D'après la formule des probabilités totales :

$P(\overline{A}) = P(B \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap \overline{A})$

$P(\overline{A}) = 0{,}98 \times 0{,}04 + 0{,}02 \times 0{,}98 = 0{,}058\,8.$

c) La probabilité qu'il y ait une erreur est :

$P(B \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap A)$

$= 0{,}98 \times 0{,}04 + 0{,}02 \times 0{,}02 = 0{,}039\,6.$

40 **a)** La probabilité qu'il ait moins de 15 ans est :

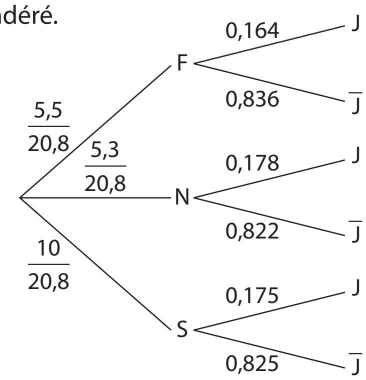
$$p = \frac{16{,}4\ \% \times 5{,}5 + 17{,}8\ \% \times 5{,}3 + 17{,}5\ \% \times 10}{5{,}5 + 5{,}3 + 10}$$

$p \approx 0{,}173.$

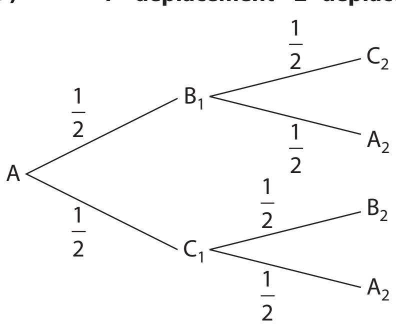
b) Cet habitant a moins de 15 ans, la probabilité qu'il soit suédois est :

$$p' = \frac{\dfrac{17{,}5\ \% \times 10}{5{,}5 + 5{,}3 + 10}}{p} \approx \frac{0{,}084}{0{,}173} \approx 0{,}486.$$

On peut également représenter la situation par un arbre pondéré.



41 **a)** **1er déplacement** **2^{e} déplacement**



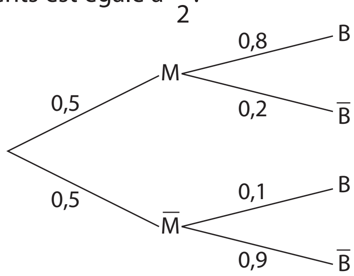
b) D'après la formule des probabilités totales :

$P(A_2) = P(B_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap A_2)$

$P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

La probabilité qu'il se retrouve en A à l'issue de deux déplacements est égale à $\frac{1}{2}$.

42



On note M l'événement « L'individu a pris le médicament » et B l'événement « Le taux de glycémie a baissé de façon significative ».

D'après l'énoncé ; $P(M) = 0{,}5$,

$P_M(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{M}}(B) = 0{,}1$.

La probabilité que le taux de glycémie de la personne choisie au hasard ait baissé de façon significative, c'est-à-dire $P(B)$, est donnée par :

$$P(B) = P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B)$$
$$P(B) = 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}5 \times 0{,}1$$
$$P(B) = 0{,}45$$

43 **a)** F est l'évènement « Le candidat est une fille » et A est l'évènement « Le candidat est admis ».

D'après l'énoncé, $P(F) = 0{,}52;$ $P(F \cap A) = 0{,}39;$ $P_{\overline{F}}(A) = 0{,}7.$

Ainsi, $P_F(A) = \frac{P(F \cap A)}{P(F)} = \frac{0{,}39}{0{,}52} = 0{,}75.$

La probabilité qu'une fille qui se présente soit admise est égale à 0,75.

b) Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(F \cap A) + P(\overline{F} \cap A)$$
$$P(A) = 0{,}39 + P_{\overline{F}}(A) \times P(\overline{F})$$
$$P(A) = 0{,}39 + 0{,}7 \times (1 - 0{,}52) = 0{,}726.$$

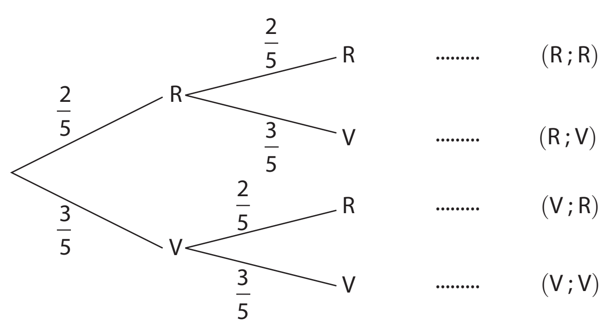
La probabilité qu'un candidat soit admis est égale à 0,726.

44 **a) (2)** $\frac{1}{36}$; **b) (1)** $\frac{2}{36}$; **c) (3)** $\frac{1}{6}$.

45 **a) Faux.** Elle est égale à $0{,}1 \times 0{,}1$ soit 0,01.

b) Vrai. En effet, elle est égale à $0{,}9 \times 0{,}9$ soit 0,81.

46 **a)** **1er tirage** **2^{e} tirage** **Issue**



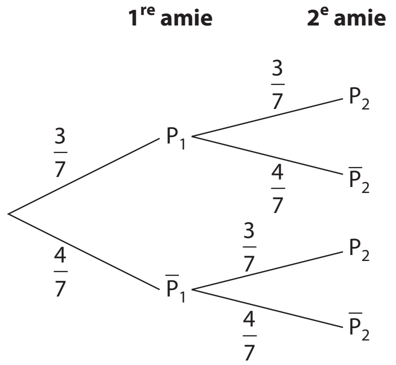
b) $P(A) = P(R\,;R) + P(V\,;V)$

$P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{13}{25} = 0{,}52.$

$P(B) = P(V\,;R) + P(R\,;V) + P(V\,;V)$

$P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{25} = 0{,}84.$

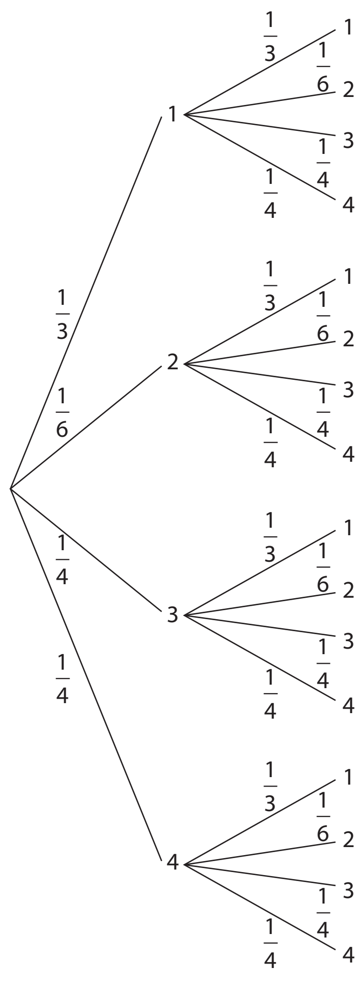
47 **a)** On note P_i l'évènement « Le chiffre choisi par l'amie i est pair ».



b) La probabilité qu'Alice ait raison est :

$P(P_1 \cap P_2) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$.

48 **a)**



b) La probabilité que les numéros obtenus soient identiques est :

$p = P(1\,;1) + P(2\,;2) + P(3\,;3) + P(4\,;4)$

$p = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

$p = \frac{19}{72} \approx 0{,}264$.

49 La probabilité que les deux pièces proviennent d'un pays différent est :

$$p = P(A\,;E) + P(E\,;A) + P(A\,;F) + P(F\,;A) + P(E\,;F) + P(F\,;E)$$

$$p = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

50 La probabilité que l'automobiliste croise un feu vert et un orange est :

$$p = P(V\,;O) + P(O\,;V)$$

$$p = \frac{35}{60} \times \frac{5}{60} + \frac{5}{60} \times \frac{35}{60}$$

$$p = \frac{7}{72} \approx 0{,}097.$$

51 **1.** D ; **2.** C ; **3.** A ; **4.** D.

52 **1.** A, B, C, D ; **2.** A, B, C ; **3.** A, B, D.

55 **1. Vrai.** En effet, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ donc $P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0{,}3 - 0{,}4$.

2. Faux. En effet, $P_C(D) = 1 - P_C(\overline{D}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

3. Vrai. En effet, $P(B) = 0{,}3$ et $P_B(D) = 1 - P_B(\overline{D}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ donc $P(B \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

4. Vrai. En effet, $P(D) = 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}65$.

5. Faux. En effet, $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

6. Vrai. En effet, $P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}7}{0{,}65} = \frac{21}{65}$.

7. Vrai. En effet, $P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}3 \times 0{,}2}{0{,}35} = \frac{6}{35}$.

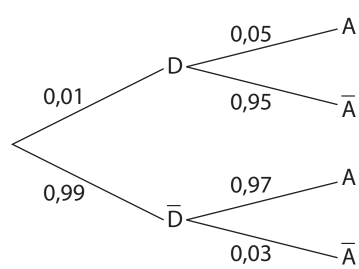
8. Faux. En effet, $P(D \cap A) = 0{,}21$ et $P(D) \times P(A) = 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}195$ donc $P(D \cap A) \neq P(D) \times P(A)$.

54 La phrase (1) signifie « La probabilité qu'un individu choisi au hasard soit vacciné est 0,3 », soit $P(V) = 0{,}3$.

La phrase (2) signifie « Sachant qu'un individu est vacciné, la probabilité qu'il soit malade est $\frac{1}{5}$ », soit $P_V(M) = \frac{1}{5}$.

La phrase (3) signifie « Sachant qu'un individu est non vacciné, la probabilité qu'il soit malade est $\frac{1}{3}$ », soit $P_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{3}$.

55 **a)**



b) $P(D \cap A) = P_D(A) \times P(D) = 0{,}05 \times 0{,}01 = 0{,}000\,5$.
La probabilité que la pièce choisie soit défectueuse et acceptée au contrôle est $0{,}000\,5$.

56 Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})$
$P(B) = 0{,}25 \times 0{,}8 + 0{,}6 \times 0{,}2$
$P(B) = 0{,}32$.
La probabilité que le touriste choisi parle anglais est égale à 0,32.

S'entraîner

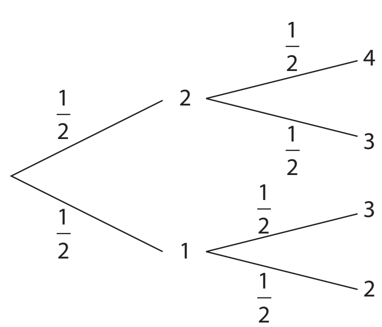
58 **a)**

```
p ← 0
Pour i allant de 1 à 2
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1]
    Si a < 0,5, alors
        p ← p + 2
        sinon
        p ← p + 1
    Fin Si
Fin Pour
Afficher p
```

b) L'arbre des probabilités ci-dessous indique les numéros des cases où le lapin peut se situer après chaque déplacement. La probabilité que le lapin termine son parcours sur la case numéro 3 est donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

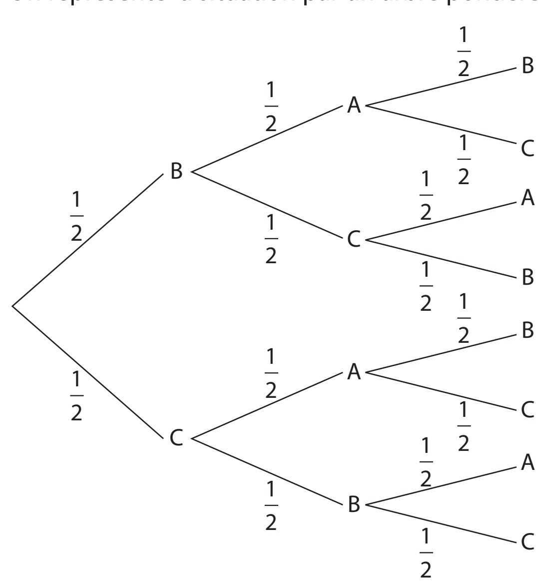
1er déplacement   2e déplacement



59 **a)**

```
p ← 0
Pour i allant de 1 à 3
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1]
    Si p = 0
        Si a < 1/2 alors
        p ← 1
        sinon
        p ← 2
        Fin Si
    Fin Si
    Si p = 1 alors
        Si a < 1/2 alors
        p ← 0
        sinon
        p ← 2
        Fin Si
    Fin Si
    Si p = 2 alors
        Si a < 1/2 alors
        p ← 0
        Sinon
        p ← 1
        Fin Si
    Fin Si
Fin Pour
Afficher p
```

b) On représente la situation par un arbre pondéré.



172909_Chap11_000-000.indd 190 30/07/2019 15:45:00

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que la fourmi termine son parcours au point A est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

61 Dans la cellule G2, on saisit la formule =NB.SI(E2:E1001;1)/1000

La probabilité de gagner une partie est estimée, grâce au tableur, à environ 0,678 (on se rapproche de la probabilité obtenue par le calcul).

62 Dans la cellule E2, on saisit : =SI(D2<=9; SI(ALEA()<0.1;0;1); SI(ALEA()<0.5;0,1))

Pour simuler 500 parties, on recopie jusqu'à la ligne 501.

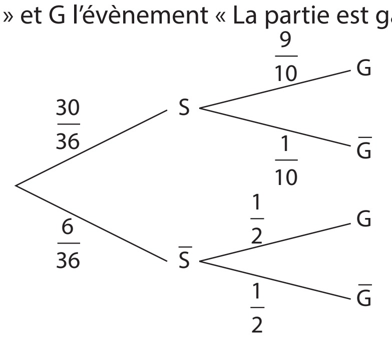
Dans la cellule G2, on saisit : =NB.SI(E2:E501;1)/500

I15

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Numéro de partie	Dé 1	Dé 2	Somme des deux dés	Réponse de la fille : juste=1 ; fausse=0		Probabilité de gagner une partie	
2	1	1	4	5	1		0,834	
3	2	6	6	12	1			
4	3	5	5	10	0			
5	4	5	4	9	1			
6	5	2	5	7	1			
7	6	3	3	6	1			
8	7	4	4	8	1			
9	8	3	2	5	1			
10	9	3	2	5	1			
11	10	1	1	2	1			
12	11	3	4	7	1			

Il semble que la probabilité de gagner une partie soit environ 0,8.

On joue une partie au hasard et on note S l'événement « La somme des deux dés est inférieure ou égale à 9 » et G l'évènement « La partie est gagnée ».



Avec un tableau croisé, on constate qu'il y a 30 façons d'obtenir une somme inférieure ou égale à 9.

D'après la formule des probabilités totales :

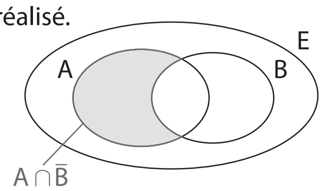
$$P(G) = P(G \cap S) + P(G \cap \overline{S}) = \frac{9}{10} \times \frac{30}{36} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

soit $P(G) \approx 0,83$.

63 **1. a)** $P_A(\overline{B})$ désigne la probabilité que B ne se réalise pas sachant que A s'est réalisé.

$P_A(B)$ désigne la probabilité que B se réalise sachant que A s'est réalisé.

b)



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

c) $P(A \cap \overline{B}) = P_A(\overline{B}) \times P(A)$

Donc, $P_A(\overline{B}) \times P(A) = P(A) - P(A \cap B)$

$P_A(\overline{B}) \times P(A) = P(A) - P_A(B) \times P(A)$

d'où $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(A) - P_A(B) \times P(A)}{P(A)}$ et $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.

2. On montre de même que $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

64 **1. a)** On doit démontrer que

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$$

b) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

c) Or A et B sont indépendants, donc

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) \times (1 - P(A))$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) \times P(\overline{A})$

Ce qui prouve que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2. On procède de même :

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}) \times P(B)$ (car $\overline{A}$ et B sont indépendants)

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})(1 - P(B)) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$ donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

3. a) On a alors $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P(A) \times P(B)$

donc $P_A(B) = P(B)$

et $P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}) = P(\overline{A}) \times P(B)$

donc $P_{\overline{A}}(B) = P(B)$.

Ainsi $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$ lorsque A et B sont indépendants.

On démontre de la même façon que

$$P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) = P(A).$$

b) A et B sont indépendants lorsque la réalisation ou non de A n'a pas d'influence sur la réalisation de B (et réciproquement).

65 A est indépendant avec lui-même lorsque $P(A \cap A) = P(A) \times P(A)$ ce qui équivaut à $P(A) = P(A)^2$ ou encore $P(A)(1 - P(A)) = 0$

soit $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

A est donc soit l'événement impossible soit l'événement certain.

66 **a)** $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$.

b) A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

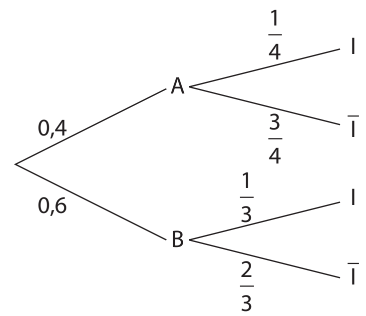
c) D'après le **a)**,

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}$$

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$$

67 **a)**



b) A et B forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

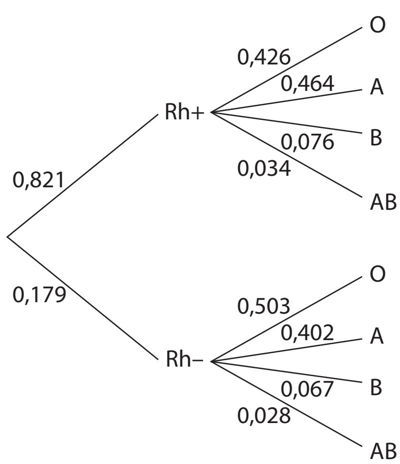
$P(I) = P_A(I) \times P(A) + P_B(I) \times P(B)$

$P(I) = \frac{1}{4} \times 0{,}4 + \frac{1}{3} \times 0{,}6 = 0{,}3.$

c) $P_I(A) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{1}{4} \times 0{,}4}{0{,}3} = \frac{1}{3}.$

Donc $P_I(A) \neq \frac{1}{2}.$ Le fournisseur se trompe.

68 **a)**



Par exemple, le tableau indique :

$P(Rh + \cap A) = 0{,}381$ et $P(Rh+) = 0{,}821$

donc $P_{Rh+}(A) = \frac{P(Rh + \cap A)}{P(Rh+)} = \frac{0{,}381}{0{,}821} \approx 0{,}464.$

b) Les événement $Rh+$ et $Rh-$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales.

$PO = P(Rh + \cap O) + P(Rh - \cap O)$

$PO \approx 0{,}426 \times 0{,}821 + 0{,}503 \times 0{,}179$

$PO \approx 0{,}440.$

La probabilité qu'une personne choisie au hasard soit du groupe O est d'environ 0,44.

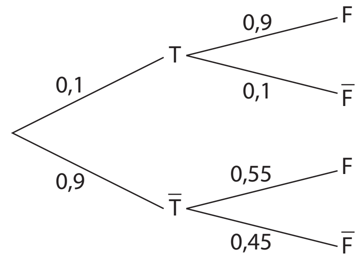
69

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,075	0,45	0,525
$\overline{B}$	0,175	0,3	0,475
Total	0,25	0,75	1

Par exemple,

$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}075.$

70 **a)** On note T l'événement « L'élève a lu le 7^e tome » et F l'événement « L'élève a vu le 7^e film ». On représente la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales :

$P(F) = P(T \cap F) + P(\overline{T} \cap F)$

$P(F) = 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}9 \times 0{,}55$

$P(F) = 0{,}585.$

b) On en déduit la probabilité demandée :

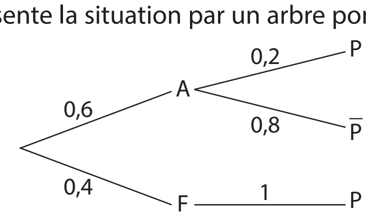
$P_F(T) = \frac{P(F \cap T)}{P(F)}$

$P_F(T) = \frac{0{,}09}{0{,}585}$

$P_F(T) \approx 0{,}154.$

71 On note A (resp. F) l'événement « Le touriste choisi est Anglais (resp. Français) » et P l'événement « Le touriste choisi parle français ».

On représente la situation par un arbre pondéré.



Les événements A et F forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

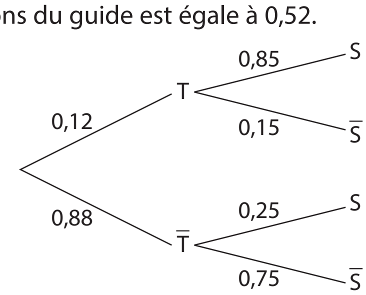
$P(P) = P(A \cap P) + P(F \cap P)$

$P(P) = 0{,}2 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}4$

$P(P) = 0{,}52.$

La probabilité que le touriste choisi comprenne les explications du guide est égale à 0,52.

72 **a)**



b) Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formules des probabilités totales :

$P(S) = P(T \cap S) + P(\overline{T} \cap S)$

$P(S) = 0{,}85 \times 0{,}12 + 0{,}25 \times 0{,}88$

$P(S) = 0{,}322.$

c) $P_{\overline{S}}(T) = \dfrac{P(T \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{P_T(\overline{S}) \times P(T)}{1 - P(S)}$

$P_{\overline{S}}(T) = \dfrac{0{,}15 \times 0{,}12}{1 - 0{,}322} \approx 0{,}027.$

Sachant que l'équipementier ne l'a pas sponsorisé, la probabilité qu'il ait fini dans les trois premiers est environ égale à 0,027.

73 On note A l'événement « Le voyageur a choisi le train de 7 h 27 » et R l'événement « Le voyageur arrive en retard ». D'après la formule des probabilités totales :

$P(R) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap R)$

$P(\overline{A} \cap R) = P(R) - P(A \cap R)$

$P(\overline{A} \cap R) = 0{,}06 - 0{,}8 \times 0{,}05$

$P(\overline{A} \cap R) = 0{,}02$

$P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R) = 0{,}02$

$0{,}2 \times P_{\overline{A}}(R) = 0{,}02$

$P_{\overline{A}}(R) = 0{,}1.$

74 **1. a)** $\overline{A}$ est l'événement « Les élèves choisies sont toutes les deux des filles ».

$$P(\overline{A}) = P(F\,;F) = \frac{18}{32} \times \frac{18}{32} = \frac{81}{256}.$$

b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{175}{256}.$

2. a) $\overline{B}$ est l'événement « Aucun des deux élèves choisis n'est une fille » autrement dit « Les deux élèves choisis sont des garçons ».

$$P(\overline{B}) = P(G\,;G) = \frac{14}{32} \times \frac{14}{32} = \frac{49}{256}.$$

b) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \dfrac{207}{256}.$

75 **a)** • $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$

$= 0{,}01 \times 0{,}95 = 0{,}009\,5.$

• $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B) = 0{,}99 \times 0{,}05 = 0{,}049\,5.$

• $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = 0{,}99 \times 0{,}95 = 0{,}940\,5.$

• $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}01 \times 0{,}05 = 0{,}000\,5.$

b) Présenter uniquement le défaut B se traduit par $\overline{A} \cap B$.

La probabilité que ces deux enceintes présentent uniquement le défaut B est :

$$0{,}049\,5 \times 0{,}049\,5 \approx 0{,}002\,5.$$

76 **a)** $P(A) \times P(F) = \dfrac{138}{240} \times \dfrac{160}{240} = \dfrac{23}{60}.$

$P(A \cap F) = \dfrac{92}{240} = \dfrac{23}{60}.$

Ainsi $P(A \cap F) = P(A) \times P(F)$ et les événements A et F sont indépendants.

b) $A \cap F$ est l'événement « Le licencié est une femme adulte ».

La probabilité cherchée est :

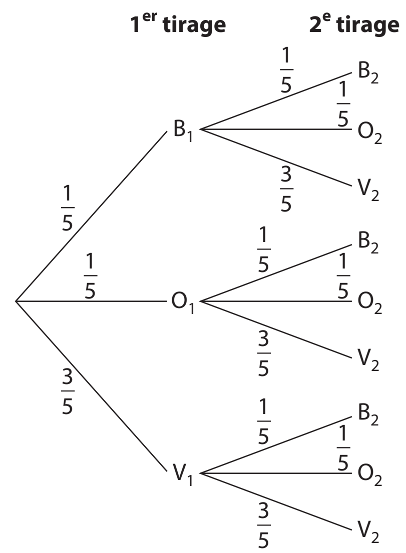
$p = P(A \cap F\,;\overline{A \cap F}) + P(\overline{A \cap F}\,;A \cap F) + P(A \cap F\,;A \cap F)$

$p = \dfrac{23}{60} \times \dfrac{37}{60} + \dfrac{37}{60} \times \dfrac{23}{60} + \dfrac{23}{60} \times \dfrac{23}{60}$

$p \approx 0{,}62.$

77 **Situation 1**

a)



b) $P(A) = P(B_1 \cap V_2) + P(O_1 \cap V_2) + P(V_1)$

$P(A) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}$

$P(A) = 0{,}84.$

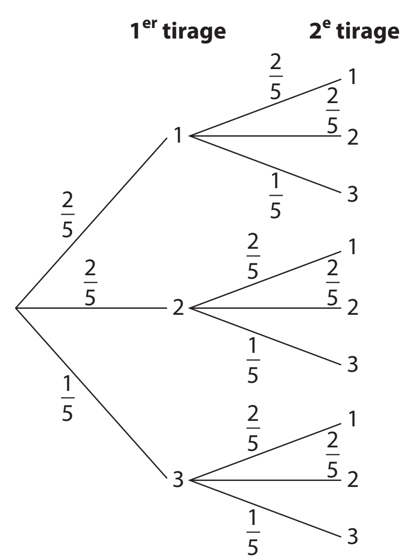
La probabilité qu'au moins l'une des boules tirées soit verte est égale à 0,84.

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(O_1 \cap O_2) = 1 - \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5} = 0{,}96.$

La probabilité que les deux boules tirées ne soit pas oranges est égale à 0,96.

Situation 2

a)



b) $P(C) = P(1\,;1) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = 0{,}16.$

$P(D) = 1 - P(\overline{D})$

$P(D) = 1 - (P(1\,;2) + P(2\,;1))$

$P(D) = 1 - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5}$

$P(D) = 0{,}68.$

78 **a)** L'implication et vraie car :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

La réciproque est « Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors $P_A(B) = P(B)$ ».

Elle est aussi vraie car $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

b) L'implication est vraie, c'est la formule des probabilités totales.

La réciproque est « Si $P(C) + P(D) = P(A)$, alors $C = A \cap B$ et $D = A \cap \overline{B}$ ». Elle est fausse car C et D peuvent être deux événements sans rapport avec A et B.

c) L'implication est vraie car si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$, or $P(A) \times P(B) \neq 0$.

La réciproque est « Si A et B ne sont pas indépendants, alors ils sont incompatibles ». Elle est fausse car le fait que $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$ n'implique pas que $P(A \cap B) = 0$.

d) L'implication est vraie car si $A \cap B = \varnothing$, alors $P(A \cap B) = 0$ et donc $P_A(B) = 0$.

La réciproque est « Si $P_A(B) = 0$, alors $A \cap B = \varnothing$ ». Elle est vraie car $P_A(B) = 0$ implique $P(A \cap B) = 0$ donc $A \cap B = \varnothing$.

79 **a)** Pour tout événement A ; on a $P_A(A) = 1$.

b) Il existe un événement C tel que $P(A) + P(C) = 1$.

c) Pour tous événements A et B, on a

$$P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B).$$

Organiser son raisonnement

80 La probabilité que la mutation ait lieu est :

$p = P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) + P(\overline{G_1} \cap G_2 \cap G_3)$
$\quad + P(G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3) + P(G_1 \cap G_2 \cap \overline{G_3})$

Or les trois gènes sont indépendants et donc les trois mutations le sont, donc

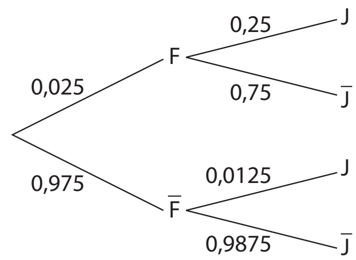
$p = P(G_1) \times P(G_2) \times P(G_3) + P(\overline{G_1}) \times P(G_2) \times P(G_3)$
$\quad + P(G_1) \times P(\overline{G_2}) \times P(G_3) + P(G_1) \times P(G_2) \times P(\overline{G_3})$

$p = 0{,}02 \times 0{,}03 \times 0{,}05 + 0{,}98 \times 0{,}03 \times 0{,}05$
$\quad + 0{,}02 \times 0{,}97 \times 0{,}05 + 0{,}02 \times 0{,}03 \times 0{,}95$

$p = 0{,}003\,04.$

Ainsi, sur 50 000 animaux, 152 animaux présenteront cette mutation $(50\,000 \times 0{,}003\,04 = 152)$.

81 On note F l'événement « Recours à une FIV » et J l'événement « Naissance de jumeaux ». On peut représenter la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales :

$P(J) = P(F \cap J) + P(\overline{F} \cap J)$

$P(J) = 0{,}025 \times 0{,}25 + 0{,}975 \times 0{,}012\,5$

$P(J) \approx 0{,}018.$

La probabilité demandée est donc :

$P_J(F) = \dfrac{P(J \cap F)}{P(J)}$

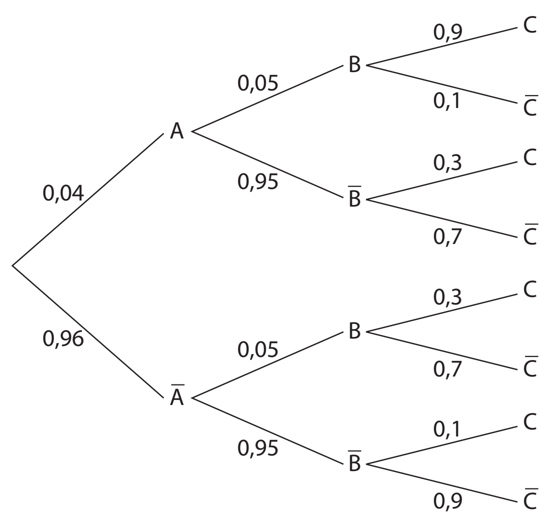
$P_J(F) = \dfrac{0{,}006\,25}{0{,}018}$

$P_J(F) \approx 0{,}347.$

L'affirmation de Tom n'est donc pas correcte. Il est plus probable que ce ne soit pas suite à une FIV.

82 On note A l'événement « le père est asthmatique », B l'événement « la mère est asthmatique » et C l'événement « l'enfant est asthmatique ».

On peut donc représenter la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales :

$P(C) = 0{,}04 \times 0{,}05 \times 0{,}9 + 0{,}05 \times 0{,}95 \times 0{,}3$
$\quad + 0{,}95 \times 0{,}05 \times 0{,}3 + 0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}1$

$P(C) = 0{,}118\,8$

La probabilité qu'aucun des parents ne soient asthmatiques sachant que l'enfant ne l'est pas est :

$$P_{\overline{C}}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$$

$$P_{\overline{C}}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}9}{1 - 0{,}118\,8}$$

$P_{\overline{C}}(\overline{A} \cap \overline{B}) \approx 0{,}931$

La probabilité demandée est :

$1 - P_{\overline{C}}(\overline{A} \cap \overline{B}) \approx 0{,}069.$

83 **1. a)** La variable p correspond à la position de la fourmi. La variable a prend des valeurs aléatoires qui indiquent dans quelle direction la fourmi se déplace.

b) Il faut compléter l'algorithme par les lignes suivantes, avant Fin Si :

```
Si p = 2 alors
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1]
    Si a < 0,75 alors
        p ← 3
        Sinon
        p ← 1
    Fin Si
Fin Si
Si p = 3 alors
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1]
    Si a < 0,75 alors
        p ← 1
        sinon
        p ← 2
    Fin Si
Fin Si
```

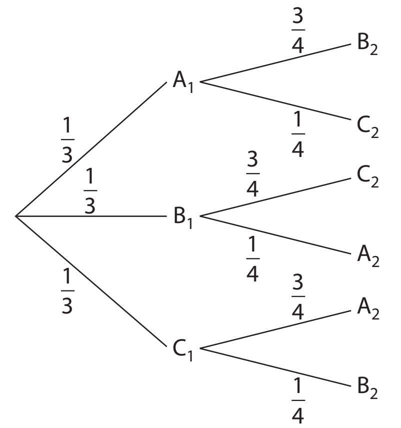
c) Voici le programme en langage Python.

```python
from random import *
p=randint(1,3)
if p==1:
    a=random()
    if a<0.75:
        p=2
    else:
        p=3
else:
    if p==2:
        a=random()
        if a<0.75:
            p=3
        else:
            p=1
    else:
        if p==3:
            a=random()
            if a<0.75:
                p=1
            else:
                p=2
print(p)
```

2. a) D'après l'énoncé, $P(A_1) = \dfrac{1}{3}$.

b) $P_{B_1}(A_2) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{C_1}(A_2) = \dfrac{3}{4}$.

c) Arbre de probabilités :

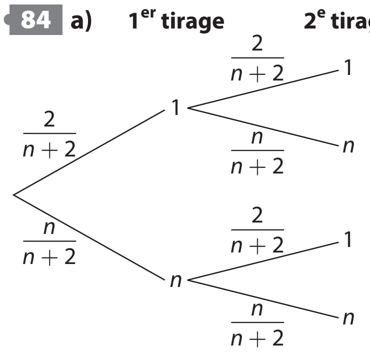


d) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

e) De même, $P(B_2) = \dfrac{1}{3}$ et $P(C_2) = \dfrac{1}{3}$.

84 **a)** **1er tirage** **2^{e} tirage** **Produit** **Somme**



Produit	Somme
1	2
n	$n+1$
n	$n+1$
n^2	$2n$

$$P(A) = \frac{2}{n+2} \times \frac{n}{n+2} + \frac{n}{n+2} \times \frac{2}{n+2} = \frac{4n}{(n+2)^2}$$

$$P(B) = \frac{2}{n+2} \times \frac{2}{n+2} = \frac{4}{(n+2)^2}$$

Ainsi, $P(A) = 10P(B)$ équivaut à $4n = 10 \times 4$ soit $n = 10$.

b) $P(C) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n}{n+2} = \dfrac{n^2}{(n+2)^2}$.

$$P(D) = \frac{2}{n+2} \times \frac{n}{n+2} + \frac{n}{n+2} \times \frac{2}{n+2} = \frac{4n}{(n+2)^2}.$$

Ainsi, $P(C) = 5P(D)$ équivaut $n^2 = 5 \times 4n$ soit $n = 0$ ou $n = 20$ (mais $n \neq 0$) donc l'unique solution est $n = 20$.

85 $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\overline{A}}(C) - P_{\overline{A}}(D) = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$$

Ainsi, $0{,}4 = \dfrac{P_A(B) \times \dfrac{1}{2}}{P_A(B) \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{2}}$

ce qui est successivement équivalent à :

$0{,}4\left(P_A(B) \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{16}\right) = P_A(B) \times \dfrac{1}{2}$

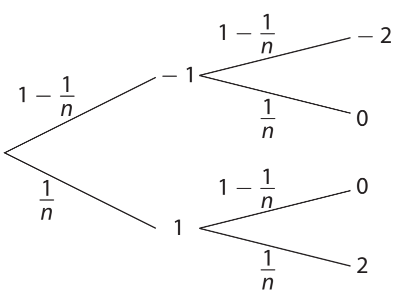
$0{,}2 \times P_A(B) + 0{,}125 = 0{,}5P_A(B)$

$0{,}125 = 0{,}3P_A(B)$

$P_A(B) = \dfrac{5}{12}$.

86 **a)** On peut conjecturer que Lauriane a raison, sauf de $n = 1$ à $n = 2$.

b) On peut représenter la situation par un arbre pondéré, où on indique la position du pion, de la gauche vers la droite, par un nombre entier compris entre -2 et 2.



La probabilité que le pion soit au centre après deux déplacements est donc :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{n} \times 2 = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} = \frac{2n-2}{n^2}$$

On peut alors étudier la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2}$.

$f'(x) = \dfrac{-2x+4}{x^3}n$ donc $f'(x)$ est négatif pour $x \geqslant 2$, donc la fonction f est décroissante pour $n \geqslant 2$. Lauriane a donc raison, sauf de $n = 1$ à $n = 2$.

87 On note A l'événement « Au moins l'une des trois pommes choisies par Blanche-Neige est empoisonnée ».

Donc $\overline{A}$ est l'événement « Aucune des trois pommes n'est empoisonnée ».

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{13}{16} \times \dfrac{12}{15} \times \dfrac{11}{14}$

$P(A) \approx 0{,}49$.

La probabilité que Blanche-Neige soit réveillée bien plus tard par son Prince Charmant est environ égale à 0,49.

88 **1. a)** • $M(x\,;y)$ est situé dans le carré OABC si, et seulement si, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.

• $M(x\,;y)$ est situé dans le domaine bleu si et seulement si, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant x^2$.

b) aire $(\text{OABC}) = 1 \times 1 = 1$.

c) • ligne 6 : on choisit une valeur de x au hasard de l'intervalle $[0\,;1]$.

• ligne 7 : on choisit une valeur de y au hasard de l'intervalle $[0\,;1]$.

• ligne 10 : Le compteur s'incrémente lorsque le point $M(x\,;y)$ est situé dans l'aire bleue et A donne la fréquence obtenue pour la simulation de 10 000 expériences.

d) Valeur approchée de l'aire bleue affichée par le programme : $A \approx 0{,}333\,4$.

2. a) Voici le programme en langage Python.

```
from random import *
n=0
for i in range(0,100000):
    x=random()
    y=random()
    if x**2+y**2<=1:
        n=n+1
A=n/100000
print("Aire(bleue) ",A)
```

b) Valeur approchée de l'aire bleue affichée par le programme : 0,784 73

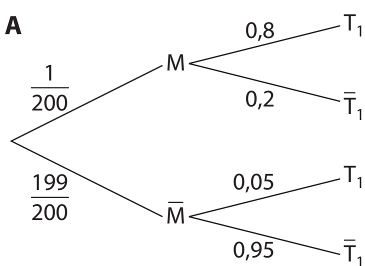
(pour la simulation de 100 000 expériences).

c) Le disque bleu a pour rayon $\dfrac{1}{2}$, donc :

$\text{Aire (bleue)} = \pi \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \approx 0{,}784\,73$

Ainsi, $\pi \approx 4 \times 0{,}784\,73 \approx 3{,}138\,92$.

89 **Test A**



$$P_{T_1}(M) = \frac{P(T_1 \cap M)}{P(T_1)} = \frac{P(T_1 \cap M)}{P(T_1 \cap M) + P(T_1 \cap \overline{M})}$$

$$P_{T_1}(M) = \frac{0{,}8 \times \dfrac{1}{200}}{0{,}8 \times \dfrac{1}{200} + 0{,}05 \times \dfrac{199}{200}} \approx 0{,}074.$$

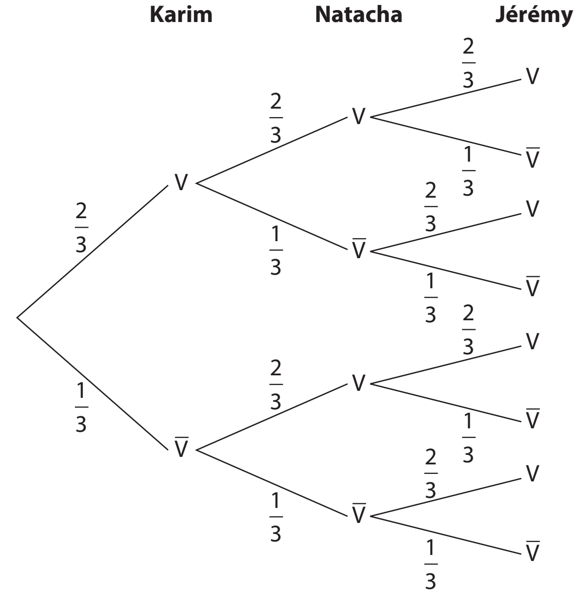
Test B

On procède de la même façon et on obtient :

$$P_{T_2}(M) = \frac{0{,}95 \times \dfrac{1}{200}}{0{,}95 \times \dfrac{1}{200} + 0{,}1 \times \dfrac{199}{200}} \approx 0{,}046.$$

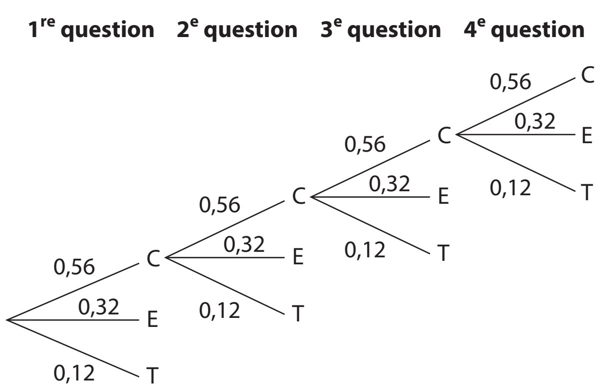
La valeur prédictive positive du test B est donc inférieure à celle du test A.

90 On schématise la situation par un arbre pondéré où V est l'événement « La personne dit la vérité ».



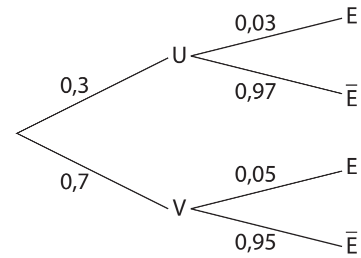
La probabilité qu'Assma ait réellement gagné au loto est $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

91 Pour chaque question, la probabilité :
- qu'Enzo et Théo répondent correctement est :
$$0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$$
- qu'Enzo et Théo se trompent est :
$$0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$$
- que le jeu continue est donc :
$$0{,}48 + 0{,}08 = 0{,}56.$$
- qu'Enzo gagne est :
$$0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$$
- que Théo gagne est :
$$0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12.$$



La probabilité qu'Enzo soit gagnant à la 4e question est $0{,}56^3 \times 0{,}32$ soit environ 0,056.

92 **1. a)** On représente la situation par un arbre pondéré.



Les événements U et V forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(E) = P(U \cap E) + P(V \cap E)$
$P(E) = 0{,}03 \times 0{,}3 + 0{,}05 \times 0{,}7$
$P(E) = 0{,}044.$
La probabilité que le paquet prélevé porte le label « extrafin » est égale à 0,044.
b) $P_E(U) = \dfrac{P(U \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}03 \times 0{,}3}{0{,}044} \approx 0{,}205.$
Sachant qu'un paquet porte le label « extrafin », la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U est environ égale à 0,205.
2. On note p la probabilité de U.
$$P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}03 \times p}{0{,}03 \times p + 0{,}05(1-p)} = 0{,}3$$
ce qui est successivement équivalent à
$0{,}03p = 0{,}3(0{,}03p + 0{,}05(1-p))$
$0{,}03p = 0{,}009p + 0{,}015 - 0{,}015p$
$0{,}036p = 0{,}015$
$p = \dfrac{5}{12}.$
$\dfrac{5}{12}$ de son approvisionnement doit provenir de l'exploitation U et $\dfrac{7}{12}$ de l'exploitation V.

Exploiter ses compétences

93 Lorsque le joueur choisit, il a une chance sur 3 de désigner la bonne porte. Il avait donc 2 chances sur 3 de désigner une mauvaise porte.

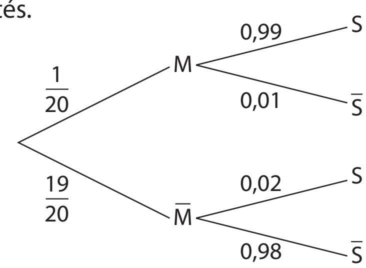
S'il garde son choix, la probabilité de gagner est $\frac{1}{3}$.

S'il modifie son choix, il gagne si son choix initial était perdant, donc avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Il a donc intérêt à changer.

94 On note :
M l'événement « Le voyageur passe le portique avec un objet métallique ».

S l'événement « Le portique de sécurité sonne »,
T l'événement « L'agent de sécurité trouve un objet métallique sur le voyageur ».
On représente la situation par un arbre pondéré de probabilités.



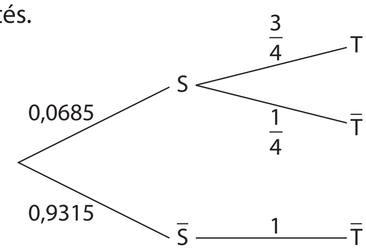
D'après la formule des probabilités totales :

$P(S) = P(M) \times P_M(S) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(S)$

$P(S) = \dfrac{1}{20} \times 0{,}99 + \dfrac{19}{20} \times 0{,}02$

$P(S) = 0{,}068\,5.$

On peut construire alors un autre arbre pondéré de probabilités.

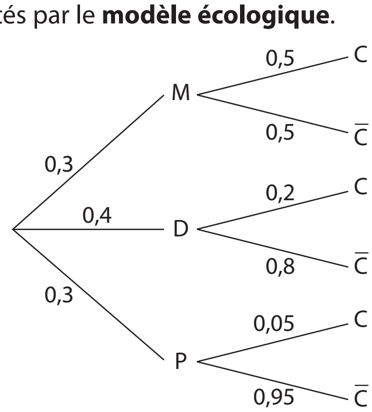


Ainsi, $P(T) = P(S) \times P_S(T) = 0{,}068\,5 \times \dfrac{3}{4}$

$P(T) = 0{,}051375.$

La probabilité que l'agent de sécurité trouve un objet métallique sur ce voyageur est $0{,}051375$.

95 On note :
M l'événement « L'espèce animale choisie est menacée »,
D l'événement « L'espèce animale choisie est en danger »,
P l'événement « L'espèce animale choisie est peu menacée »,
C l'événement « L'espèce animale choisie va disparaître d'ici cinquante ans ».
On représente la situation par un arbre pondéré de probabilités par le **modèle écologique**.



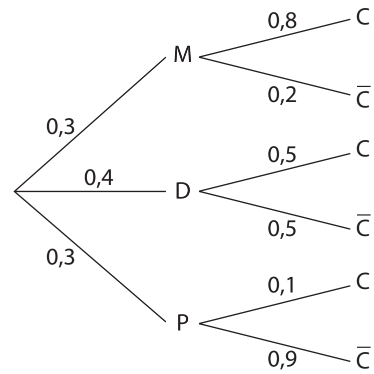
D'après la formule des probabilités totales :

$P(C) = P(M) \times P_M(C) + P(D) \times P_D(C) + P(P) \times P_P(C)$

$P(C) = 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}05$

$P(C) = 0{,}245.$

On représente à nouveau la situation par un arbre pondéré pour le **modèle actuel**.



D'après la formule des probabilités totales :

$P(C) = P(M) \times P_M(C) + P(D) \times P_D(C) + P(P) \times P_P(C)$

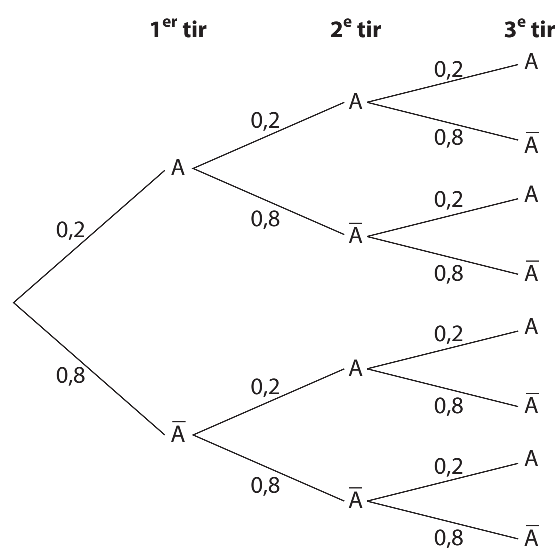
$P(C) = 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}3 \times 0{,}1$

$P(C) = 0{,}47.$

Finalement, la probabilité pour qu'une espèce animale choisie au hasard ait disparu d'ici 50 ans est de 0,245 selon le modèle écologique et de 0,47 selon le modèle actuel.

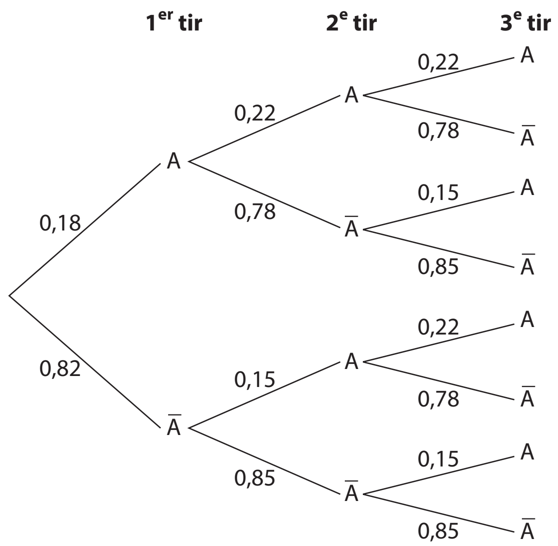
96 On note :
A l'événement « La gardienne a arrêté le tir au but »
T l'événement « La gardienne a arrêté au moins l'un des trois premiers tirs au but ».
Donc $\overline{T}$ est l'événement « La gardienne n'a arrêté aucun des trois premiers tirs au but ».
On représente la situation pour chaque gardienne par un arbre pondéré de probabilités.

Gardienne de l'équipe rouge.



$\overline{T}$ correspond au dernier chemin sur l'arbre, donc $P(\overline{T}) = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}512$.
Ainsi, $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 0{,}488$.
La probabilité que la gardienne de l'équipe rouge arrête au moins l'un des trois premiers tirs au but est 0,488.

Gardienne de l'équipe bleue.



$\overline{T}$ correspond au dernier chemin sur l'arbre, donc $P(\overline{T}) = 0{,}82 \times 0{,}85 \times 0{,}85 = 0{,}592\,45$.
Ainsi, $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 0{,}407\,55$.
La probabilité que la gardienne de l'équipe bleue arrête l'un des trois premiers tirs au but est 0,407 55.

12 Variables aléatoires

Découvrir

1 Définir une variable aléatoire

1 **a)**

1re pièce	**2^{e} pièce**	**Issues**	**Valeurs de X**
P	P	PP	2
	F	PF	1
F	P	FP	1
	F	FF	0

b) X prend les valeurs 0, 1 et 2.

2

a	0	1	2
P(X = *a*)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2 Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

1 **a)** G peut prendre les valeurs 1 000, 1 250 et 1 500.

b)

a	1 000	1 250	1 500
P(G = *a*)	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2 **a)** $E(G) = \frac{3}{5} \times 1\,000 + \frac{1}{5} \times 1\,250 + \frac{1}{5} \times 1\,500$

c'est-à-dire $E(G) = 1\,150$.

b) $E(G)$ est exprimée en euros.

c) Un candidat ne peut pas gagner la somme $E(G)$, car les seuls gains possibles sont 1 000 €, 1 250 € et 1 500 €.

d) La candidate peut espérer gagner en moyenne 1 150 € par jour, soit un total de 115 000 € en 100 jours.

Acquérir des automatismes

3 Le dé est équilibré donc on modélise cette expérience aléatoire par une loi équirépartie.
Les valeurs prises par X sont 0, 2, 10 et 20.
Voici la loi de probabilité de X :

a	0	2	10	20
P(X = *a*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

4 Les valeurs prises par X sont 2, 5, 10 et 50.
Voici la loi de probabilité de X :

a	2	5	10	50
P(X = *a*)	$\frac{25}{41}$	$\frac{10}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{1}{41}$

5 On utilise la loi de probabilité de X, qui a été déterminée à l'exercice **3**.

a) $P(X < 10) = P(X = 0) + P(X = 2)$

donc $P(X < 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

b) $P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 10) + P(X = 20)$

donc $P(X \geqslant 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

c) $P(X > 5) = P(X = 10) + P(X = 20)$

donc $P(X > 5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

d) $P(X \leqslant 10) = P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 10)$

donc $P(X \leqslant 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

6 On utilise la loi de probabilité de X, qui a été déterminée à l'exercice 4.

a) $P(X < 10) = P(X = 2) + P(X = 5)$

donc $P(X < 10) = \frac{25}{41} + \frac{10}{41} = \frac{35}{41}$.

b) $P(X \leqslant 5) = P(X = 2) + P(X = 5)$

donc $P(X \leqslant 5) = \frac{25}{41} + \frac{10}{41} = \frac{35}{41}$.

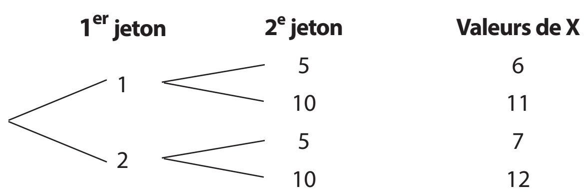
c) $P(X \leqslant 6) = P(X = 2) + P(X = 5)$

donc $P(X \leqslant 6) = \frac{35}{41}$.

d) $P(X > 2) = P(X = 10) + P(X = 50)$

donc $P(X > 2) = \frac{5}{41} + \frac{1}{41} = \frac{6}{41}$.

9 On peut représenter la situation par un arbre :



On peut alors établir la loi de probabilité de X :

a	6	7	11	12
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = \frac{1}{4} \times 6 + \frac{1}{4} \times 7 + \frac{1}{4} \times 11 + \frac{1}{4} \times 12 = \frac{36}{4} = 9.$$

10 **a)** L'espérance de X est :

$E(X) = 0{,}2 \times 10 + 0{,}3 \times 20 + 0{,}4 \times 40 + 0{,}1 \times 50 = 29.$

b) Pour calculer la variance de X, on complète le tableau ci-dessous.

a	10	20	40	50
$a - 29$	-19	-9	11	21
$(a - 29)^2$	361	81	121	441
$P(X = a)$	0,2	0,2	0,4	0,1

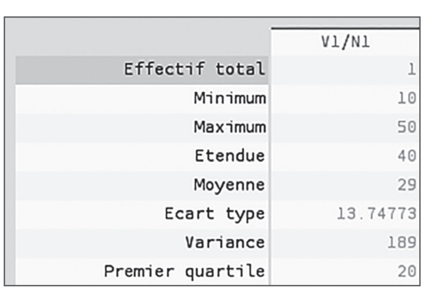
La variance de X est donc :

$V(X) = 0{,}2 \times 361 + 0{,}3 \times 81 + 0{,}4 \times 121 + 0{,}1 \times 441 = 189.$

L'écart-type de X est donc $\sigma(X) = \sqrt{189}$,

soit $\sigma(X) \simeq 13{,}7$.

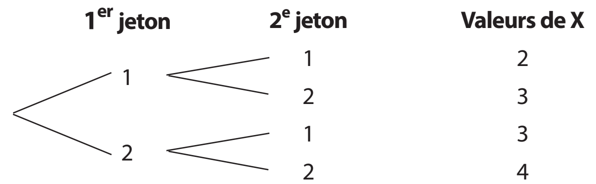
c) On vérifie ces résultats à l'aide de la calculatrice.



	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	10
Maximum	50
Etendue	40
Moyenne	29
Ecart type	13.74773
Variance	189
Premier quartile	20

11 X peut prendre les valeurs : 0,5 ; 2 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3. L'affirmation d'Alicia est donc fausse.

12 On peut représenter la situation par un arbre :



Olmo a donc tort, X peut prendre les valeurs 2, 3 et 4.

13 $\{X = 2\}$

14 L'événement $\{X = 2\}$ signifie que le chiffre des dizaines de la date du jour est 2. Il est réalisé pour tous les jours du 20 au 29. La réponse d'Alyah est donc fausse.

15 **a)** $\{X = 1\}$ **b)** $\{X \geqslant 2\}$

16 **a)** $\{X = 1\}$ **b)** $\{X \leqslant 1{,}50\}$

17 **a)** « On obtient le numéro 6 deux fois. »

b) « On obtient le numéro 6 cinq fois. »

c) « On obtient le numéro 6 une fois ou moins. »

d) « On obtient le numéro 6 strictement plus de trois fois. »

18 **a)** « Exactement un billet sort de l'appareil. »

b) « Exactement trois billets sortent de l'appareil. »

c) « Strictement moins de trois billets sortent de l'appareil. »

d) « Deux billets ou plus sortent de l'appareil. »

19 Voici la loi de probabilité de X :

a	-2	10
$P(X = a)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

20 **a)** Les valeurs prises par G sont : 98, 48, 8 et -2.

b) Il y a 111 billets gagnants, donc 889 billets perdants. Par conséquent, $P(G = -12) = \frac{889}{1\,000} = 0{,}889$.

c) Voici la loi de probabilité de G :

a	-2	8	48	98
$P(X = a)$	0,889	0,1	0,01	0,001

21 **a)**

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

172909_Chap12_000-000.indd 202 26/07/2019 15:38:11

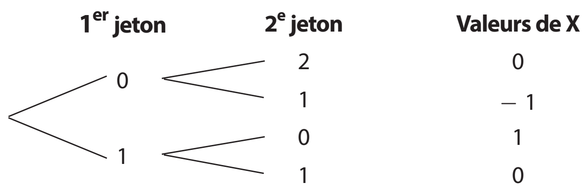
b) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4	5	6	8
P(X = *a*)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

a	9	10	12	15	16	18	20
P(X = *a*)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

a	24	25	30	36
P(X = *a*)	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

22 **a)** On peut représenter la situation par un arbre :



b) Voici la loi de probabilité de X :

a	– 1	0	1
P(X = *a*)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

23 **a)** X prend les valeurs 0, 1 et 4.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	4
P(X = *a*)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

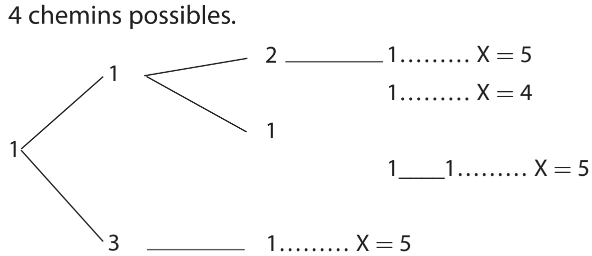
24 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	1	5	10
P(X = *a*)	$\frac{19}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{1}{32}$

b) $P(X \leqslant 5) = P(X = 1) + P(X = 5) = \frac{19}{32} + \frac{12}{32} = \frac{31}{32}$

La probabilité de gagner 5 points ou moins est égale à $\frac{31}{32}$.

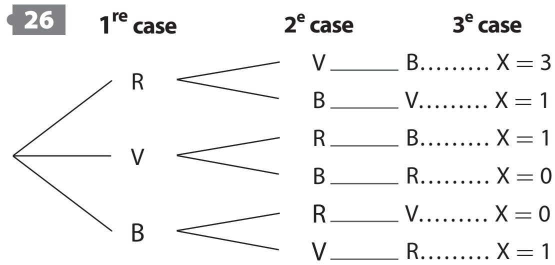
25 **a)** On peut utiliser un arbre pour déterminer les 4 chemins possibles.



b) Voici la loi de probabilité de X :

a	4	5
P(X = *a*)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

26



a) Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 3.

b) La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau.

a	0	1	3
P(X = *a*)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c) $P(X \geqslant 2) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$

27 **a)** $(X \leqslant 2)$: « Le standard a reçu moins de 2 appels durant une minute ».

$P(X \leqslant 2) = 0,1 + 0,15 + 0,25 = 0,5.$

$(1 \leqslant X \leqslant 4)$: « Le standard a reçu entre 1 et 4 appels durant une minute ».

$P(1 \leqslant X \leqslant 4) = 0,15 + 0,25 + 0,3 + 0,15 = 0,85.$

b) $P(X \geqslant 3) = 0,3 + 0,15 + 0,05 = 0,5$

28 **a)** La somme des probabilités est égale à 1 donc la valeur manquante est $P(X = 3) = 1 - 0,3 - 0,5 = 0,2.$

b) $P(X \geqslant 10) = P(X = 2) + P(X = 3)$
$= 0,5 + 0,2 = 0,7$

29 **a)** $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

donc $p_1 + p_1 + p_1 + 3p_1 = 1$, ce qui donne $6p_1 = 1$

puis $p_1 = \frac{1}{6}$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

a	5	10	15	20
P(X = *a*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

b) $P(X \geqslant 10) = P(X = 10) + P(X = 15) + P(X = 20)$

$P(X \geqslant 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

30 **a)** $p_1 = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4}$

donc $p_2 = 2p_1$, $p_3 = 3p_1$ et $p_4 = 4p_1$.

Or $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

donc $p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 = 1$

ce qui donne $10p_1 = 1$ et donc $p_1 = 0,1$.

Par conséquent, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,3$ et $p_4 = 0,4$.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4
P(X = *a*)	0,1	0,2	0,3	0,4

c) $P(X \leqslant 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,6.$

31 **a)** Voici les différentes façons de rendre les clés et les valeurs de X correspondantes.

Locataire 1	Locataire 2	Locataire 3	Valeur de X
Clé 1	Clé 2	Clé 3	3
Clé 1	Clé 3	Clé 2	1
Clé 2	Clé 1	Clé 3	1
Clé 2	Clé 3	Clé 1	0
Clé 3	Clé 1	Clé 2	0
Clé 3	Clé 2	Clé 1	1

On en déduit la loi de probabilité de X :

a	0	1	3
$P(X = a)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) $P(X \geqslant 1) = P(X = 1) + P(X = 3)$

$$P(X \geqslant 1) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

32 Les points indiqués sur les lettres sont toujours positifs, donc l'espérance de X est un nombre positif. L'affirmation d'Eddy est donc fausse.

33 $E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

34 $E(X) = 0 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,1 + 5 \times 0,2 = 2,1$
L'affirmation de Marinella est vraie.

35 Voici la loi de probabilité de X :

a	1	5	10	20
$P(X = a)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$E(X) = \frac{3}{9} \times 1 + \frac{4}{9} \times 5 + \frac{1}{9} \times 10 + \frac{1}{9} \times 20$$

$E(X) = \frac{53}{9}$, soit $E(X) \approx 5,89$.

36 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	2	5	10	20	50
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

b) $E(X) = \frac{1}{4} \times 2 + \ldots + \frac{1}{20} \times 50 = 9,75$

Sur un grand nombre de bons choisis au hasard, la réduction est, en moyenne, de 9,757 € par bon.

37 Voici la loi de probabilité de X :

a	1	5	20	100
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{6} \times 100 \approx 27,66.$$

Sur un grand nombre de parties, un joueur gagnera, en moyenne, environ 27,66 $ par partie.

38 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	0	5	10
$P(X = a)$	0,8	0,15	0,05

b) L'espérance de X est :
$E(X) = 0,8 \times 0 + 0,15 \times 5 + 0,05 \times 10$
soit $E(X) = 1,25$.

39 **a) Dé 1**

Voici la loi de probabilité de X :

a	0,5	1	2	3
$P(X_1 = a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Dé 2

Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3
$P(X_2 = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Dé 3

Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	4
$P(X_3 = a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b) $E(X_1) = \frac{5}{3} \approx 1,66$

$E(X_2) = \frac{5}{3} \approx 1,66$

$E(X_3) = \frac{5}{3} \approx 1,66$

c) Peu importe puisque ces trois dés correspondent à la même espérance.

40 On calcule l'espérance de chacun de ces jeux grâce à la calculatrice.
Jeu 1 : $E(X) = 0$ donc ce jeu est équitable.
Jeu 2 : $E(X) = -0,125 \neq 0$ donc ce jeu n'est pas équitable.
Olivier s'est donc trompé.

41 X est la variable aléatoire qui donne le gain d'un joueur. L'espérance de X est :

$$E(X) = 0,97 \times 0 + 0,01 \times 100 + 0,01 \times 200 + 0,005 \times 300 + 0,005 \times 400$$

ce qui donne $E(X) = 6,5$.
Pour que le jeu soit équitable, l'opérateur doit donc fixer la mise à 6,5 €.

42 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	-4	-3	-2	1	m	4
$P(X = a)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

b) $E(X) = \frac{2}{9} \times (-4) + \frac{1}{3} \times (-3) + \frac{1}{9} \times (-2) + \frac{1}{9} \times 1 + \frac{1}{9} \times m + \frac{1}{9} \times 4$

$E(X) = -\frac{14}{9} + \frac{1}{9}m$

c) Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$,

c'est-à-dire $-\frac{14}{9} + \frac{1}{9}m = 0$, d'où $m = 14$.

43 a) On note X la variable aléatoire qui donne le gain de ce jeu.

Voici la loi de probabilité de X :

a	-1	4	9
$P(X = a)$	$\frac{n-4}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$

$E(X) = \frac{n-4}{n} \times (-1) + \frac{3}{n} \times 4 + \frac{3}{n} \times 9$

$E(X) = \frac{25-n}{n}$

Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$, c'est-à-dire pour $n = 25$.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	$0 - m$	$5 - m$	$10 - m$
$P(X = a)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

$E(X) = \frac{4}{5} \times (-m) + \frac{3}{20} \times (5 - m) + \frac{1}{20} \times (10 - m)$

$= \frac{25 - 20m}{20}$

Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$, c'est-à-dire lorsque $25 - 20m = 0$, donc $m = 1{,}25$.

La mise doit donc être de 1,25 €.

44 On note m le nombre de billes portant le numéro 2 ajoutée(s) dans le sac.

X est la variable aléatoire qui indique le numéro de la bille prélevée.

Voici la loi de probabilité de X :

a	-2	1	2	4
$P(X_1 = a)$	$\frac{5}{m+8}$	$\frac{2}{m+8}$	$\frac{m}{m+8}$	$\frac{1}{m+8}$

$E(X) = \frac{5}{m+8} \times (-2) + \frac{2}{m+8} \times 1 + \frac{m}{m+8} \times 2 + \frac{1}{m+8} \times 4$

$E(X) = \frac{-4 + 2m}{m+8}$

Le jeu est équitable à condition que $E(X) = 0$, donc il faut que $-4 + 2m = 0$, c'est-à-dire $m = 2$. Il faut donc ajouter deux billes portant le numéro 2.

45 Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	80
Maximum	150
Etendue	70
Moyenne	102.5
Ecart type	17.85357
Variance	318.75
Premier quartile	90

46 **a)** X prend les valeurs -2, 0, 3, 8 et 48.

Voici la loi de probabilité de X.

x_i	-2	0	3	8	48
$P(X = a)$	$\frac{14}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

b) Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	-2
Maximum	48
Etendue	50
Moyenne	1.55
Ecart type	10.92005
Variance	119.2475
Premier quartile	-2

47 Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	500
Minimum	480
Maximum	5510
Etendue	5030
Moyenne	1520.42
Ecart type	2019.736
Variance	4079332
Premier quartile	490

48 **a)** Le tableau ci-dessous indique la valeur de X pour chaque tirage possible.

Dé 2 \ Dé1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	-1	0	1	2	3	4
3	-2	-1	0	1	2	3
4	-3	-2	-1	0	1	2
5	-4	-3	-2	-1	0	1
6	-5	-4	-3	-2	-1	0

On en déduit la loi de probabilité de X :

a	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X = a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	-5
Maximum	5
Etendue	10
Moyenne	-1.665335E-16
Ecart type	2.415229
Variance	5.833333
Premier quartile	-2

c) Voici la loi de probabilité de Y :

a	0	1	4	9	16	25
$P(Y = a)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

d) Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	0
Maximum	25
Etendue	25
Moyenne	5.833333
Ecart type	6.817054
Variance	46.47222
Premier quartile	1

49 Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4	5	6			
$P(X = a)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

On obtient alors les paramètres ci-dessous à la calculatrice.

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	1
Maximum	10
Etendue	9
Moyenne	5.5
Ecart type	2.872281
Variance	8.25
Premier quartile	3

Voici la loi de probabilité de Y :

a	1	3	5	6	8	10
$P(X = a)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

On obtient alors les paramètres ci-dessous à la calculatrice.

	V1/N1
Effectif total	0.9
Minimum	1
Maximum	10
Etendue	9
Moyenne	6
Ecart type	2.828427
Variance	8
Premier quartile	5

L'affirmation de Jean-Baptiste est donc fausse. X et Y ont des espérances différentes et des écarts-types différents.

50 **1.** B. **2.** C. **3.** C. **4.** A. **5.** B

51 **1.** C, D. **2.** C. **3.** B, D. **4.** A, B.

52 **1. Faux.** En effet, les secteurs ne sont pas superposables, donc les probabilités des événements $\{X = 10\}$, $\{X = 20\}$ et $\{X = 30\}$ ne sont pas égales.
2. Vrai. En effet, voici la loi de probabilité de X :

a	10	20	30
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Ainsi,

$$P(X = 10) + P(X = 20) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = P(X = 30).$$

3. Faux. En effet,

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 10 + \frac{1}{3} \times 20 + \frac{1}{2} \times 30 = \frac{70}{3}.$$

4. Vrai. En effet, on vérifie à la calculatrice que

$$V(X) = \frac{500}{9} \simeq 55{,}56.$$

5. Vrai. En effet, $V(X) = \frac{500}{9}$ et donc

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{500}{9}} = \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}\sqrt{5}.$$

53 **a)** L'issue qui réalise l'événement $\{X = 1\}$ est PP.
b) Les issues qui réalisent l'événement $\{X = 0\}$ sont PF et FP.
c) Les issues qui réalisent l'événement $\{X \geqslant 0\}$ sont PP, PF et FP.

54 **a)** $\{X = 20\}$ **b)** $\{X \geqslant 10\}$

55 **a)** X prend les valeurs $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ et $10^3 = 1\,000$.
b) L'événement $\{X = 10\}$ est réalisé quand on tire une boule numérotée 1. Or, il y a trois boules numérotées 1 sur les dix boules de l'urne. Par conséquent, $P(X = 10) = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
c) Voici la loi de probabilité de X :

a	10	100	1 000
$P(X = a)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$

56 **a)** $E(X) = 0{,}71 \times 0 + 0{,}2 \times 5 + 0{,}05 \times 20 + 0{,}03 \times 100 + 0{,}01 \times 1\,000$
ce qui donne $E(X) = 15$. Cela signifie qu'en jouant un grand nombre de parties, le joueur peut espérer gagner 15 euros par partie.

b) Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	0
Maximum	1000
Etendue	1000
Moyenne	15
Ecart type	100.4988
Variance	10100
Premier quartile	0

S'entraîner

58 **a)** La première partie de l'algorithme permet de calculer l'espérance : $E(X) = 15{,}5$. Voici le suivi des valeurs lors de l'exécution de l'algorithme à partir de l'instruction $V \leftarrow 0$. On a arrondi les valeurs décimales au centième.

n	4	4	4	4	4
i		0	1	2	3
$A[i]$		5	10	25	50
$A[i] - E$		$-10{,}5$	$-5{,}5$	9,5	34,5
$(A[i] - E)^2$		110,25	30,25	90,25	1190,25
$P[i]$		0,3	0,4	0,2	0,1
$((A[i] - E)^2 \times P[i]$		33,08	12,10	18,05	119,03
V	0	33,08	45,18	63,23	182,25

La valeur obtenue à la fin de l'algorithme est 182,25.

b) La valeur V obtenir à la fin de l'algorithme est la variance de la variable aléatoire X.

c) On ajoute à la fin de l'algorithme l'instruction $s \leftarrow \sqrt{V}$.

59 **a)** On obtient 15,5, qui est bien l'espérance de la variable aléatoire X.

b) La commande len(A) donne la longueur de la liste A, c'est-à-dire son nombre de termes.

c) Voici le programme complet

```
import math

def Esperance(A,P):
    n=len(A)
    E=0
    for i in range(0,n):
        E=E+A[i]*P[i]
    return(E)

def VarianceEcarttype(A,P):
    n=len(A)
    E=Esperance(A,P)
    V=0
    for i in range(0,n):
        V=V+(A[i]-E)**2*P[i]
    s=math.sqrt(V)
    print(V)
    print(s)
```

61 Voici la feuille de calcul adaptée :

	A	B	C	D	E	F
1	a	P(X=a)	a*P(X=a)	a-E(X)	(a-E(X))^2	(a-E(X))^2*P(X=a)
2	0	0.817991	0	-0.82614	0.682504	0.5582821254
3	1	0.068766	0.068766	0.17386	0.030228	0.0020786583
4	2	0.073351	0.146702	1.17386	1.377952	0.1010741568
5	3	0.02445	0.07335	2.17386	4.725676	0.1155427781
6	10	0.011003	0.11003	9.17386	84.159744	0.9260096632
7	30	0.003668	0.11004	29.1739	851.11422	3.1218869736
8	50	0.000572	0.0286	49.1739	2418.0687	1.3831352987
9	150	0.000191	0.02865	149.174	22252.841	4.2502926509
10	1000	0.00006	0.06	999.174	998348.41	59.9009043902
11	10000	0.00002	0.2	9999.17	99983478	1999.6695584501
12						
13	E(X)	0.826138				
14	V(X)	2070.0288				
15	σ(X)	45.497569				

62 Voici la feuille de calcul adaptée :

	A	B	C	D	E	F
1	a	P(X=a)	a*P(X=a)	a-E(X)	(a-E(X))^2	(a-E(X))^2*P(X=a)
2	1	0.05	0.05	0.02475	0.0006126	3.0628125E-05
3	2	0.25	0.5	1.02475	1.0501126	0.2625281406
4	3	0.123	0.369	2.02475	4.0996126	0.5042523452
5	4	0.00625	0.025	3.02475	9.1491126	0.0571819535
6	5	0.00625	0.03125	4.02475	16.198613	0.1012413285
7						
8	E(X)	0.97525				
9	V(X)	0.9252344				
10	σ(X)	0.9618911				

63 **1. a)**

$$\sum_{(i=1)}^{5} 10i = 10\times1 + 10\times2 + 10\times3 + 10\times4 + 10\times5$$

donc $\sum_{(i=1)}^{5} 10i = 150.$

b) $\sum_{(i=1)}^{5} ki = k\times1 + k\times2 + k\times3 + k\times4 + k\times5$

donc $\sum_{(i=1)}^{5} ki = 15k.$

2. a) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \times a_1 + k \times a_2 + ... + k \times a_n$

$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \times (a_1 + a_2 + ... + a_n)$

$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \times \sum_{i=1}^{n} a_i$

b) $\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + ... + k}_{n \text{ fois}} = n \times k$

c) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \times a_1 + k \times a_2 + ... + k \times a_n$

$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_n + b_n$

$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$

64 **a)** Par définition de l'espérance et d'après les propriétés de la notation Σ démontrée dans l'exercice **63**, $\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$

et $\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (a_i - \mathrm{E(X)})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - \mathrm{E(X)})^2$

b) $(a_i - \mathrm{E(X)})^2 = a_i^2 - 2a_i\mathrm{E(X)} + \mathrm{E(X)}^2$

c) $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - 2a_i\mathrm{E(X)} + \mathrm{E(X)}^2)$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2a_i\mathrm{E(X)} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E(X)}^2 \right)$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\mathrm{E(X)} \sum_{i=1}^{n} a_i + n\mathrm{E(X)}^2 \right)$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2\mathrm{E(X)}}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i + \mathrm{E(X)}^2$$

d) $\frac{2\mathrm{E(X)}}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = 2\mathrm{E(X)} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$ or on sait que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = \mathrm{E(X)}$ donc $\frac{2\mathrm{E(X)}}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = 2\mathrm{E(X)}^2$.

Par conséquent, $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\mathrm{E(X)}^2 + \mathrm{E(X)}^2$

et donc $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \mathrm{E(X)}^2$.

e) Avec la formule du cours, on doit effectuer *n* soustractions, alors qu'avec la formule de König-Huygens, on n'en effectue qu'une.

65 X peut prendre les valeurs : $85 + 235 = 320$; $170 + 1\,340 = 1\,510$; $845 + 5\,475 = 6\,320$.

a	320	1 510	6 320
P(X = *a*)	0,34	0,48	0,18

66 **a)** Le tableau ci-dessous indique la valeur de X pour chaque tirage possible.

Dé 2 \ Dé1	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	1	1	2	2
3	3	3	3	3	1	1
4	4	4	2	2	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	3	3	2	2

Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4	5	6
P(X = *a*)	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$

67 **a)** Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

$\mathrm{P(X = 0)} = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{6}{20} = 0{,}3$

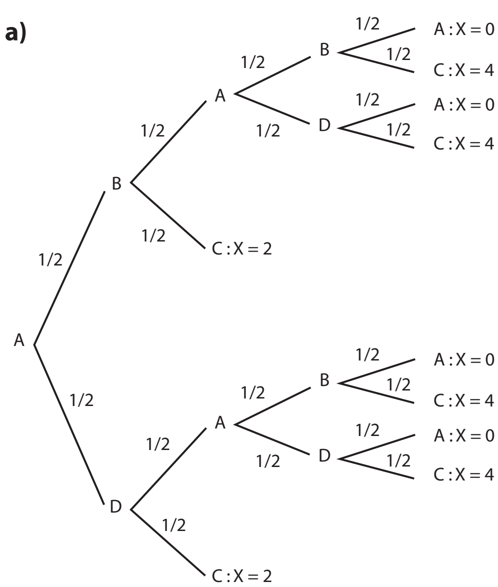
b) La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau.

a	0	1	2
P(X = *a*)	0,3	0,6	0,1

$\mathrm{P(X = 1)} = \frac{3 \times 2 + 2 \times 3}{20} = 0{,}6$

$\mathrm{P(X = 2)} = \frac{2}{20} = 0{,}1$

68 **a)**



La loi de probabilité de X est donc :

$\mathrm{P(X = 0)} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

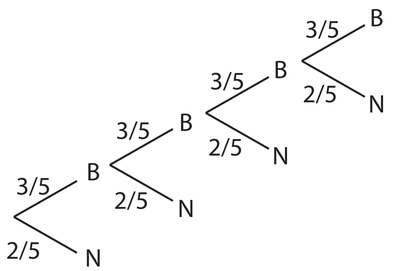
$\mathrm{P(X = 2)} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$P(X = 4) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

b) La probabilité que la fourmi ait traversé le carré pendant le temps imparti est :

$P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{3}{4}$.

69 **a)**



b) La loi de probabilité de X est :

$P(X = 1) = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

$P(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$

$P(X = 3) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} = \frac{18}{125} = 0{,}144$

$P(X = 4) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \frac{2}{5} = \frac{54}{625} = 0{,}086\,4$

$P(X = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625} = 0{,}129\,6$

c) On obtient $E(X) = 1{,}657\,6$.

70 On numérote les cases de l'échiquier

1	2	3
4	5	6
7	8	9

On peut représenter une issue de la façon suivante : $(2 ; 5 ; 7)$ signifie que le jeton rouge est sur la case 2, le vert sur la case 5 et le bleu sur la case 7.

Il y a $9 \times 8 \times 7 = 504$ triplets différents, donc 504 placements distincts de trois jetons sur l'échiquier.

X donne le nombre de jetons sur la diagonale en pointillés.

$(X = 3)$ est réalisé par les triplets $(1 ; 5 ; 9)$, $(1 ; 9 ; 5)$, $(5 ; 1, 9)$, $(5 ; 9 ; 1)$, $(9 ; 1 ; 5)$ et $(9 ; 5 ; 1)$

donc $P(X = 3) = \frac{6}{504}$.

On obtient par dénombrement des issues :

$P(X = 2) = \frac{108}{504}$

$P(X = 1) = \frac{270}{504}$

$P(X = 0) = \frac{120}{504}$

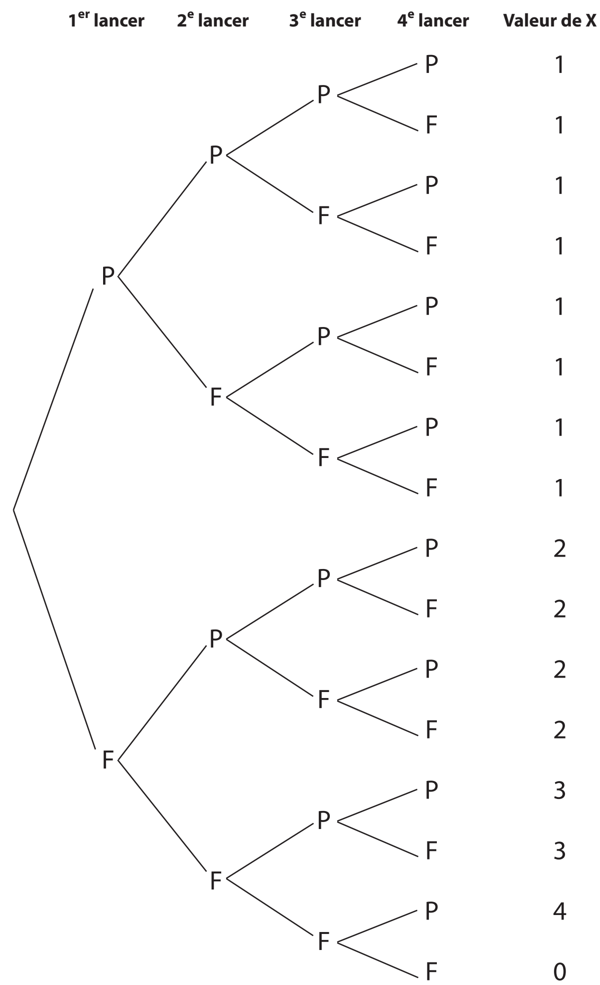
71 **a)** On sait que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ donc $4p_4 + 4p_4 + p_4 + p_4 = 1$ c'est-à-dire $10p_4 = 1$ et donc $p_4 = 0{,}1$.

b) La variable aléatoire X donne le nombre de points obtenus lors d'un lancer, donc elle prend les valeurs 1, 3, 4, 6. Voici la loi de probabilité de X :

a	1	3	4	6
$P(X = a)$	0,1	0,4	0,4	0,1

c) $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 6) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$

72 **a)**

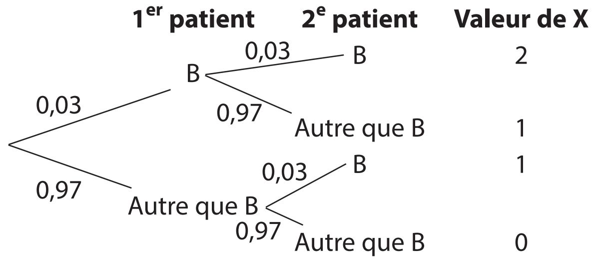


b) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2	3	4
$P(X = a)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

73 **1.** On note b le pourcentage de donneurs du groupe B et c le pourcentage de donneurs du groupe AB. Alors, d'après l'énoncé, $43 + 45 + b + c = 100$ et $b = 3c$. Par conséquent, $88 + 4c = 100$, c'est-à-dire $4c = 12$ et donc $c = 3$. Il y a donc 3 % de donneurs du type AB et 9 % de donneurs du type B.

2. On peut représenter la situation par un arbre.



On calcule, par exemple :
$P(X=2)=0{,}03\times 0{,}03=0{,}0009$.
On obtient ainsi la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
$P(X=a)$	0,000 9	0,058 2	0,940 9

74 **a)** La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau.

a	-3	-2	1	5	9
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) $E(X)=\frac{1}{6}\times(-3)+\frac{1}{3}\times(-2)+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 5+\frac{1}{6}\times 9$

$E(X)=\frac{4}{3}\approx 1{,}33$

Sur un grand nombre de parties, un joueur gagnera, en moyenne, environ 1,33 € par partie.

75 X est la variable aléatoire qui donne la somme gagnée par le joueur, en euros, sans tenir compte du prix d'une partie. Voici la loi de probabilité de X :

a	0	10	20	50
$P(X=a)$	$\frac{40}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{3}{48}$	$\frac{1}{48}$

L'espérance de X est :

$$E(X)=\frac{40}{48}\times 0+\frac{4}{48}\times 10+\frac{3}{48}\times 20+\frac{1}{48}\times 50$$

ce qui donne $E(X)=\frac{150}{48}$ c'est-à-dire $E(X)=3{,}125$.

L'espérance du gain est inférieure à la mise, donc le jeu n'est pas équitable.

76 **a)** $E(G)=0{,}5\times(-5)+0{,}2\times 0+0{,}2\times 10$
$+0{,}05\times 20+0{,}05\times 50$

ce qui donne $E(G)=3$.

b) Pour que le jeu soit équitable, il faut soustraire 3 à chaque valeur possible du gain. On obtient alors une espérance égale à 0.

77 On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le gain, en euros, au jeu 1 (resp. au jeu 2).

Jeu 1

a	0	1	2	3	4	5	6	7	10
$P(X=a)$	$\frac{9}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{49}$

$$E(X)=\frac{9}{49}\times 0+\ldots+\frac{1}{49}\times 10=\frac{156}{49}\approx 2{,}57$$

Jeu 2

a	0	1	2	4	5	10	25
$P(Y=a)$	$\frac{33}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{49}$

$$E(X)=\frac{33}{49}\times 0+\ldots+\frac{1}{49}\times 25=\frac{81}{49}\approx 1{,}65$$

$E(X)>E(Y)$ donc le jeu 1 est plus intéressant pour le joueur.

78 On note X la variable aléatoire qui donne le gain de Monsieur X.

Voici la loi de probabilité de X :

a	-8	2
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$$E(X)=\frac{1}{6}\times(-8)+\frac{5}{6}\times 2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$$

Ainsi, sur un grand nombre de parties, Monsieur X gagnera, en moyenne, environ 0,33 € par partie.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	$k-10$	k
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$$E(X)=\frac{1}{6}\times(k-10)+\frac{5}{6}\times k=k-\frac{5}{3}$$

Ainsi, sur un grand nombre de parties, Monsieur X gagnera, en moyenne, $k-\frac{5}{3}$ € par partie pour une mise de k €.

79 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	4	7	8	10
$P(X=a)$	0,03	0,27	0,14	0,56

b) $E(X)=8{,}73$

Sur un grand nombre de spectateurs choisi au hasard, le prix moyen pour un spectateur est 8,73 €.

c) $3\ 000\times 8{,}73=26\ 190$

Or $26\ 190>20\ 000$, donc ce théâtre est rentable.

80 **a)** Voici la probabilité de X :

a	0	1	2
$P(X=a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b) En calculant à la main ou avec la calculatrice, on trouve $E(X)=1$ et $V(X)=\frac{2}{3}$.

81 **a)** Voici la probabilité de X :

a	2	3	4
$P(X=a)$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$

$$E(X) = \frac{4}{12} \times 2 + \frac{4}{12} \times 3 + \frac{4}{12} \times 4 = 3$$

Sur un grand nombre de déplacements, le temps moyen de déplacement est de 3 s.

82 **a)** Les valeurs prises par X sont les nombres entiers de 1 à 12, alors que les valeurs prises par Y sont les nombres entiers de 2 à 12. L'affirmation de Selma est donc fausse. À la calculatrice, on obtient que $E(X) = 6{,}5$ et $E(Y) = 7$. L'affirmation d'Ari est donc fausse.

b) C'est Y qui a la plus grande espérance.

c) $V(X) \simeq 11{,}92$ et $V(Y) \simeq 5{,}83$ donc c'est X qui a la plus grande variance.

83 **a)** L'espérance de X est :

$$E(X) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 \times a_4$$

En ajoutant 10 à chaque valeur, on définit une nouvelle variable aléatoire Y dont l'espérance est :

$$E(y) = p_1 \times (a_1 + 10) + p_2 \times (a_2 + 10) + p_3 \times (a_3 + 10) + p_4 \times (a_4 + 10)$$

$$E(Y) = p_1 \times a_1 + 10p_1 + p_2 \times a_2 + 10p_2 + p_3 \times a_3 + 10p_3 + p_4 \times a_4 + 10p_4$$

$$E(Y) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 \times a_4 + 10(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$$

$$E(Y) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 + 10 \times 1$$

$$E(Y) = E(Y) + 10$$

b) En ajoutant un nombre k à chaque valeur, on définit une nouvelle variable aléatoire Z dont l'espérance est :

$$E(y) = p_1 \times (a_1 + k) + p_2 \times (a_2 + k) + p_3 \times (a_3 + k) + p_4 \times (a_4 + k)$$

$$E(Z) = p_1 \times a_1 + kp_1 + p_2 \times a_2 + kp_2 + p_3 \times a_3 + kp_3 + p_4 \times a_4 + kp_4$$

$$E(Z) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 \times a_4 + k(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$$

$$E(Z) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 + a_3 + p_4 \times a_4 + k \times 1$$

$$E(Z) = E(X) + k$$

84 **1. a)** À la calculatrice, on obtient $E(X) = 1{,}4$ et $V(X) = 0{,}24$.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	4
$P(X^2 = a)$	0,6	0,4

c) $E(X^2) = 0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times 4 = 0{,}6 + 1{,}6 = 2{,}2$

d) $E(X^2) - (E(X))^2 = 2{,}2 - (1{,}4)^2 = 0{,}24$

On retrouve la valeur de $V(X)$.

2. a) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	5	10
$P(X = a)$	0,1	0,2	0,3	0,4

L'espérance de X est :

$$E(X) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}2 \times 2 + 0{,}3 \times 5 + 0{,}4 \times 10$$

ce qui donne $E(X) = 6$.

b) Voici la loi de probabilité de X^2 :

a	1	4	25	100
$P(X^2 = a)$	0,1	0,2	0,3	0,4

L'espérance de X^2 est :

$$E(X^2) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}3 \times 25 + 0{,}4 \times 100$$

ce qui donne $E(X^2) = 48{,}4$.

En utilisant la formule de la question **1.d)**, on trouve $V(X) = E(X^2) - (E(X^2)) = 48{,}4 - (6)^2 = 12{,}4$.

85 **1. a) Faux.** En effet, $\{X \leqslant 0\}$) est réalisé lorsque $\{X = -1\}$ ou $\{X = 0\}$.

b) Vrai. En effet, $\{X > 2\}$ est réalisé par le seul événement $\{X = 3\}$.

2. a) Faux. En effet, si $\left\{X = \frac{1}{n}\right\}$ est réalisé, alors $\{X \leqslant 0\}$ est réalisé $\frac{1}{n}$.

b) Vrai. En effet, si $\{X = 3\}$ est réalisée, alors $\{X > 2\}$ est réalisé.

86 **1. a)** $\{X < 1\}$ **b)** $\{X > 3\}$

c) $\{X \geqslant 1\}$ **d)** $\{X < 3\}$

2. $\bar{A}$: « Il pleuvra au moins un jour le mois prochain. »

$\bar{B}$: « Au moins un des élèves ne réussira pas l'examen du code de la route avant d'avoir 18 ans. »

Organiser son raisonnement

87 **a)** Voici la loi de probabilité de $X - x$:

Valeur	$a_1 - x$	$a_2 - x$	…	$a_n - x$
Probabilité	p_1	p_2	…	p_n

b) Voici la loi de probabilité de $(X - x)^2$:

Valeur	$(a_1 - x)^2$	$(a_2 - x)^2$	…	$(a_n - x)^3$
Probabilité	p_1	p_2	…	p_n

2. a) Pour tout nombre entier i compris entre 1 et n, $(a_i - x)^2 = a_i^2 - 2\,a_i x + x^2$.

Par conséquent,

$$f(x) = p_1 \times (a_1 - x)^2 + p_2 \times (a_2 - x)^2 + \dots + p_n \times (a_n - x)^2$$

$$f(x) = p_1 \times (a_1^2 - 2a_1 x + x^2) + \dots + p_n \times (a_n^2 - 2a_n x + x^2)$$

$$f(x) = p_1 \times (a_1^2 - 2a_1 x + x^2) + p_2 \times (a_2^2 - 2a_2 x + x^2) + \dots + p_n \times (a_n^2 - 2a_n x + x^2)$$

$$f(x) = (p_1 + \ldots + p_n)x^2 - 2x(p_1a_1 + \ldots + p_na_n) + (p_1a_1^2 + \ldots + p_na_n^2)$$

$$f(x) = (p_1 + \ldots + p_n)x^2 - 2x(p_1a_1 + \ldots + p_na_n^2)$$

b) $f'(x) = 2x - 2\text{E(X)} = 2(x - \text{E(X)})$

c) La fonction dérivée f' s'annule pour $x = \text{E(X)}$. Elle est négative pour $x < \text{E(X)}$ et positive pour $x > \text{E(X)}$. La fonction *f* admet donc un minimum atteint pour $x = \text{E(X)}$.

88 **a)** • P(A) = P(3 ; 0) + P(4 ; 0) + P(5 ; 0)

$$\text{P(A)} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$\text{P(A)} = \frac{1}{3}$$

• P(B) = P(5 ; 1) + P(3 ; 2) + P(4; 2) + P(5 ; 2)

$$\text{P(B)} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$\text{P(B)} = \frac{4}{9}$$

Or $\frac{4}{9} \neq \frac{1}{3}$ donc A et B ne sont pas équiprobables.

b) On note X la variable aléatoire qui donne le gain, en £, du jeu.

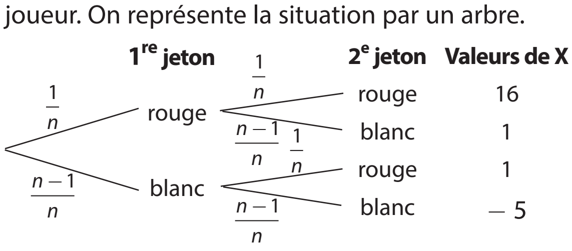
Voici la loi de probabilité de X :

a	-1	2	3	4	5	7	9
P(X = *a*)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\text{E(X)} = \frac{1}{3}\times(-1) + \ldots + \frac{1}{9}\times 9 = 3$$

Ce jeu n'est pas équitable, il est favorable au joueur car $\text{E(X)} > 0$.

89 On note X la valeur du gain algébrique du joueur. On représente la situation par un arbre.



On en déduit la loi de probabilité de X :

a	16	1	-5
P(X = *a*)	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{2(n-1)}{n^2}$	$\frac{(n-1)^2}{n^2}$

L'espérance de X est donc, en fonction de *n*,

$$\text{E(X)} = \frac{1}{n^2}\times 16 + \frac{2(n-1)}{n^2}\times 1 + \frac{(n-1)^2}{n^2}\times(-5)$$

$$\text{E(X)} = \frac{16 + 2n - 2 - 5n^2 + 10n - 5}{n^2}$$

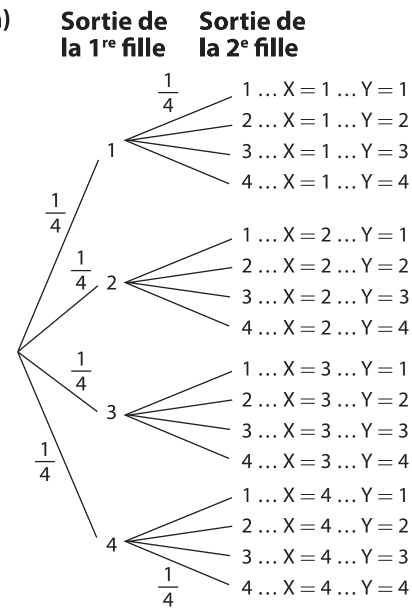
$$\text{E(X)} = \frac{-5n^2 + 12n + 9}{n^2}$$

Le discriminant du polynôme du second degré $-5n^2 + 12n + 9$ est $\Delta = 12^2 - 4\times(-5)\times 9 = 324$.

Il y a donc deux valeurs qui annulent E(X), $n_1 = 3$ et $n_2 = -0{,}6$ qui est impossible dans ce contexte.

Le jeu est donc équitable pour $n = 3$.

90 **1. a)**



b) • $\text{P}(\text{X} = 1) = \frac{1}{4}$

La probabilité que la première fille sorte au 1er étage est $\frac{1}{4}$.

• $\text{P}(\text{Y} = 1) = \frac{1}{4}$

La probabilité que la seconde fille sorte au 1er étage est $\frac{1}{4}$.

• $\text{E(X)} = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4 = 2{,}5$

Sur un grand nombre de répétitions, la première fille sera montée avec l'ascenseur de, en moyenne, 2,5 étages par trajet.

• $\text{E(Y)} = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4 = 2{,}5$

Sur un grand nombre de répétitions, la deuxième fille sera montée avec l'ascenseur de, en moyenne, 2,5 étages par trajet.

2. a) $p = \text{P}(\text{X} \geqslant 2)\times p(\text{X} \geqslant 2)$

$$\begin{aligned} p = {} & \text{P(X = 2)}\times\text{P(Y = 2)} + \text{P(X = 2)}\times\text{P(Y = 3)} \\ & + \text{P(X = 2)}\times\text{P(Y = 4)} + \text{P(X = 3)}\times\text{P(Y = 2)} \\ & + \text{P(X = 3)}\times\text{P(Y = 3)} + \text{P(X = 3)}\times\text{P(Y = 4)} \\ & + \text{P(X = 4)}\times\text{P(Y = 2)} + \text{P(X = 4)}\times\text{P(Y = 3)} \\ & + \text{P(X = 4)}\times\text{P(Y = 4)} \end{aligned}$$

$p = 9 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$

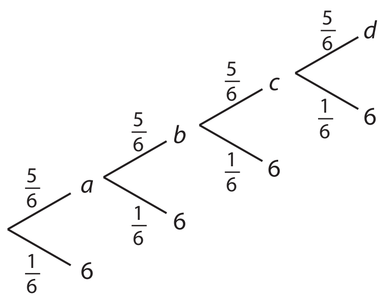
b) $p' = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y} \geqslant 2) + \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)$

$$p' = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=2) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=3) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=4) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=4) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)$$

$p' = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

c) $p'' = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) = \frac{1}{16}$

91 On schématise la situation à l'aide d'un arbre.



a, b, c, d sont des nombres entiers naturels distincts de 6.

La probabilité que la tortue gagne est :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48.$$

On peut calculer de deux façons la probabilité que le lièvre gagne :

Soit : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}52.$

Soit : $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} \approx 0{,}52.$

La situation la plus enviable est celle du lièvre.

92 Si on lance 1 fois la pièce, la loi de probabilité de X est :

a	0	1
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Donc l'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}$.

Si on lance 2 fois la pièce, la loi de probabilité de X est :

a	0	1	2
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Donc l'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1$.

Si on lance 3 fois la pièce, la loi de probabilité de X est :

a	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Donc l'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{3}{2}$.

On peut alors conjecturer que si on lance n fois la pièce, l'espérance de X est $\frac{n}{2}$.

93 On note X la variable aléatoire qui donne le gain d'un joueur sur une partie (mise comprise). Voici la loi de probabilité de X :

a	-5	-3	5	45	95	245	995
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)$	0,703	0,243	0,027	0,012	0,008	0,006	0,001

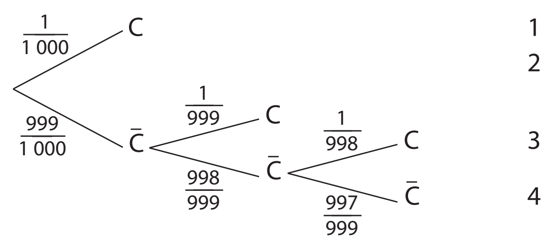
$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = -0{,}344$

Sur 5 années, $5 \times 250 \times 300 = 375\,000$ parties sont jouées, soit un gain pour le casino de $375\,000 \times 0{,}344 = 129\,000$ €. Ainsi, la rentabilité de la machine sera de :

$$129\,000 - 5 \times 2\,000 - 40\,000 = 79\,000 \text{ €}.$$

94 On peut représenter la situation par un arbre. C représente le fait de saisir le bon code.

1re essai **2e essai** **3e essai** **Valeur de X**



On en déduit la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{997}{1\,000}$

L'espérance de X est donc :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{1\,000} \times 1 + \frac{1}{1\,000} \times 2 + \frac{1}{1\,000} \times 3 + \frac{997}{1\,000} \times 4$$

ce qui donne

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{1\,000} \times 1 + \frac{1}{1\,000} \times 2 + \frac{1}{1\,000} \times 3 + \frac{997}{1\,000} \times 4$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{3\,994}{1\,000} = 3{,}994$$

Ainsi, le voleur peut espérer ne pas trouver le bon code au cours des trois essais.

95 Yasmine effectue n tirs.

X donne le nombre de tirs où elle touche la cible.

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = 1 - (0{,}5)^n$.

$1 - (0{,}5)^n \geqslant 0{,}99$ équivaut à $(0{,}5)^n \leqslant 0{,}01$.

Avec la calculatrice, on obtient $n \geqslant 7$.

Yasmine doit tirer au moins sept fois.

96 X donne la somme des trois nombres obtenus.

$(\mathrm{X}=9)$ est réalisé par les issues:

(1, 2, 6) (1, 6, 2) (2, 1, 6) (2, 6, 1) (6, 1, 2) (6, 2, 1)

(1, 3, 5) (1, 5, 3) (3, 1, 5) (3, 5, 1) (5, 1, 3) (5, 3, 1)
(2, 3, 4) (2, 4, 3) (3, 2, 4) (3, 4, 2) (4, 2, 3) (4, 3, 2)
(2, 3, 4) (2, 4, 3) (3, 2, 4)
(2, 3, 4) (2, 4, 3) (3, 2, 4)
(2, 3, 4)

$P(X = 9) = \frac{25}{6^3}$

$(X = 10)$ est réalisé par les issues:
(1, 3, 6) (1, 6, 3) (3, 1, 6) (3, 6, 1) (6, 1, 3) (6, 3, 1)
(1, 4, 5) (1, 5, 4) (4, 1, 5) (4, 5, 1) (5, 1, 4) (5, 4, 1)
(2, 3, 5) (2, 5, 3) (3, 2, 5) (3, 5, 2) (5, 2, 3) (5, 3, 2)
(2, 2, 6) (2, 6, 2) (6, 2, 2)
(4, 4, 2) (4, 2, 4) (2, 4, 4)
(3, 3, 4) (3, 4, 3) (4, 3, 3)

$P(X = 10) = \frac{27}{6^3}$

Donc $P(X = 10) \geqslant P(X = 9)$.

97 On note x le prix de vente d'un billet de tombola et X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

X prend les valeurs $-x$, $2 - x$, $10 - x$ et $50 - x$.

Voici la loi de probabilité de X :

a	$-x$	$2-x$	$10-x$	$50-x$
P(X = *a*)	0,5	0,2	0,2	0,1

L'espérance de X est donc :

$E(X) = 0{,}5(-x) + 0{,}2(2 - x) + 0{,}2(10 - x) + 0{,}1(50 - x)$

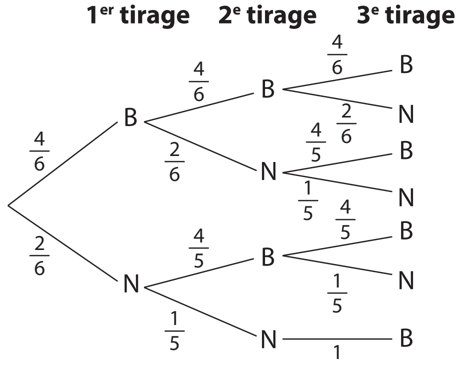
$E(X) = -0{,}5x + 0{,}4 - 0{,}2x + 2 - 0{,}2x + 5 - 0{,}1x$

$E(X) = -x + 7{,}4$

Pour que l'espérance soit comprise entre 4 et 6, il faut que $-x + 7{,}4 \geqslant 4$ et $-x + 7{,}4 \leqslant 6$, ce qui donne $x \leqslant 3{,}4$ et $x \geqslant 1{,}4$. Il faut donc que le prix du billet soit compris entre 1,4 et 3,4 euros.

98 **1.** Voici l'arbre pondéré :

1er tirage **2e tirage** **3e tirage**



2. a) X prend les valeurs 0, 1 et 2.

b) $P(X = 0) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$

c) La probabilité demandée est égale à :

$\frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{32}{180} = \frac{8}{45}$.

d) La probabilité que la seule boule noire soit tirée au premier tirage est : $\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{75}$

On a vu que la probabilité qu'elle soit tirée au deuxième tirage est $\frac{8}{45}$.

Enfin, la probabilité que la seule boule noire soit tirée au troisième tirage est $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{32}{216} = \frac{4}{27}$.

On en déduit que $P(X = 2) = \frac{16}{75} + \frac{8}{45} + \frac{4}{27} = \frac{89}{135}$.

e) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
P(X = *a*)	$\frac{8}{27}$	$\frac{364}{675}$	$\frac{37}{225}$

f) $E(X) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{364}{675} \times 1 + \frac{37}{225} \times 2 = \frac{586}{675}$

c'est-à-dire $E(X) \simeq 0{,}868$.

Cela signifie que si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience, on peut espérer tirer en moyenne 0,868 boules noires par expérience.

Exploiter ses compétences

99 Dans chaque cas, on note X le gain algébrique du joueur.

Cas 1 : Si le joueur mise sur un unique secteur, il paye 1,5 € et il peut gagner un lot ou ne rien gagner. Voici alors la loi de probabilité de X.

a	− 1,5	0,5	3,5	8,5
P(X = *a*)	$\frac{9}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{1}{12}$.

Cas 2 : Si le joueur mise sur deux secteurs consécutifs, il paye 3 € et il peut gagner un lot ou ne rien gagner. Voici alors la loi de probabilité de X.

a	− 3	− 1	2	7
P(X = *a*)	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{1}{6} = -\frac{2}{12}$.

Cas 3 : Si le joueur mise sur trois secteurs consécutifs, il paye 4,5 € et il peut gagner un lot ou ne rien gagner. Voici alors la loi de probabilité de X.

a	$-4{,}5$	$-2{,}5$	$0{,}5$	$5{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{1}{4}=-\frac{3}{12}$.

Cas 4 : Si le joueur mise sur quatre secteurs consécutifs, il paye 6 € et il gagne forcément l'un des lots. Voici alors la loi de probabilité de X.

a	-4	-1	4
$P(X=a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{1}{3}=-\frac{4}{12}$.

Cas 5 : Si le joueur mise sur cinq secteurs consécutifs, il paye 7,5 € et il peut gagner un ou deux lots.
Les valeurs possibles pour X sont donc :
$2-7{,}5=-5{,}5$; $5-7{,}5=-2{,}5$;
$10-7{,}5=2{,}5$; $2+5-7{,}5=-0{,}5$;
$2+10-7{,}5=4{,}5$ et $5+10-7{,}5$.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	$-5{,}5$	$-2{,}5$	$-0{,}5$	$2{,}5$	$4{,}5$	$7{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{5}{12}$.

Cas 6 : Si le joueur mise sur six secteurs consécutifs, il paye 9 € et il peut gagner un ou deux lots. Les valeurs possibles pour X sont donc :
$2-9=-7$; $5-9=-4$; $10-9=1$;
$2+5-9=-2$; $2+10-9=3$ et $5+10-9=6$.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	-7	-4	-2	1	3	$7{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{1}{2}=-\frac{8}{12}$.

Cas 7 : Si le joueur mise sur sept secteurs consécutifs, il paye 10,5 € et il peut gagner un ou deux lots.
Les valeurs possibles pour X sont donc :

$2-10{,}5=-8{,}5$; $5-10{,}5=-5{,}5$;
$10-10{,}5=-0{,}5$; $2+5-10{,}5=-3{,}5$;
$2+10-10{,}5=1{,}5$ et $5+10-10{,}5=4{,}5$.
Voici alors la loi de probabilité de X :

a	$-8{,}5$	$-5{,}5$	$-3{,}5$	$-0{,}5$	$1{,}5$	$4{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{7}{12}$.

Cas 8 : Si le joueur mise sur huit secteurs consécutifs, il paye 12 € et il gagne forcément deux des lots.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	-5	0	3
$P(X=a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{2}{3}=-\frac{8}{12}$.

Cas 9 : Si le joueur mise sur neuf secteurs consécutifs, il paye 13,5 € et il peut gagner deux ou trois lots.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	$-6{,}5$	$-1{,}5$	$1{,}5$	$3{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{3}{4}=-\frac{9}{12}$.

Cas 10 : Si le joueur mise sur dix secteurs consécutifs, il paye 15 € et il peut gagner deux ou trois lots.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	-8	-3	0	2
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{5}{6}=-\frac{10}{12}$.

Cas 11 : Si le joueur mise sur onze secteurs consécutifs, il paye 16,5 € et il peut gagner deux ou trois lots.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	$-9{,}5$	$-4{,}5$	$-1{,}5$	$0{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{9}{12}$

On obtient alors $E(X)=-\frac{11}{12}$.

Cas 12 : Si le joueur mise sur les douze secteurs, il paye 18 € et gagne les trois lots, c'est-à-dire un total de 17 €, soit une perte de 1 €.

Conclusion : la stratégie qui permet d'espérer la perte moyenne la moins élevée est de miser sur un seul secteur.

100 On note X le montant des frais de réparation pour une location prise au hasard, en choisissant le forfait 1.
Voici la loi de probabilité de X :

a	0	200	500	1 000	2 000	5 000
$P(X=a)$	0,8	0,1	0,04	0,03	0,02	0,01

L'espérance des frais de réparation est alors $E(X)=250$.
En ajoutant le prix du forfait, on obtient un total de 389 €, qui est l'espérance du coût réel de location, incluant le forfait et les frais de réparation.
On note Y le montant des frais de réparation pour une location prise au hasard, en choisissant le forfait 2.
Voici la loi de probabilité de Y :

172909_Chap12_000-000.indd 215 26/07/2019 15:45:40

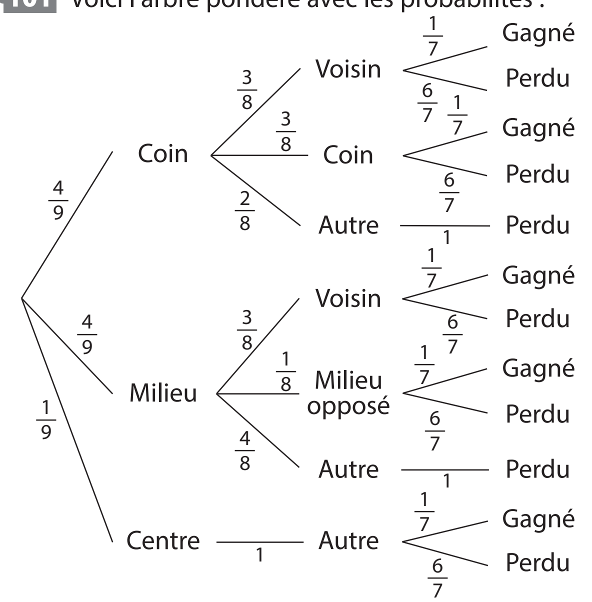
a	0	200	500	1 000
P(Y = a)	0,8	0,1	0,04	0,06

L'espérance des frais de réparation est alors $E(Y) \approx 205{,}88$.
En ajoutant le prix du forfait, on obtient un total d'environ 384,88 €.
On note Z le montant des frais de réparation pour une location prise au hasard, en choisissant le forfait 3.
Voici la loi de probabilité de Z :

a	0	200	500
P(Z = a)	0,8	0,1	0,1

L'espérance des frais de réparation est alors $E(Y) \approx 183{,}82$.
En ajoutant le prix du forfait, on obtient un total d'environ 402,82 €.
Dans ces conditions, pour un grand nombre de locations, le forfait le plus intéressant est le forfait 3.

101 Voici l'arbre pondéré avec les probabilités :



On note X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur. X peut prendre les valeurs -1 et 9.
À l'aide de l'arbre, on calcule que $P(X=-1)=\dfrac{19}{21}$ et $P(X=9)=\dfrac{2}{21}$.
L'espérance de X est donc :

$$E(X)=\frac{19}{21}\times(-1)+\frac{2}{21}\times 9=-\frac{1}{21}.$$

Puisque l'espérance est négative, ce jeu n'est pas équitable.

102 Le tableau cI-dessous indique les bénéfices possibles et les probabilités correspondantes si la compagnie met en vente 152 billets.

Nombre de passagers	147	148	149	150	151	152
Recette	24 900	25 160	25 330	25 500	25 670	25 840
Remboursement					300	600
Bénéfice	24 990	25 160	25 330	25 500	25 370	25 240
Probabilité	0,07	0,15	0,25	0,35	0,12	0,06

Dans ce cas, l'espérance du bénéfice de la compagnie s'élève à 25 339,60 €.
Si la compagnie met en vente 151 billets, alors on doit exclure la possibilité que 152 personnes se présentent. On se limite alors à 94 % des cas, et on doit donc diviser chaque probabilité par 0,94. On obtient le tableau ci-dessous.

Nombre de réservations	147	148	149	150	151
Recette	24 990	25 160	25 330	25 500	25 670
Remboursement					300
Bénéfice	24 990	25 160	25 330	25 500	25 370
Probabilité	0,074	0,160	0,266	0,372	0,128

Dans ce cas, l'espérance du bénéfice de la compagnie s'élève à 25 346,96 €.
Si la compagnie met en vente 150 billets, alors on doit exclure les possibilités que 151 ou 152 personnes se présentent. On se limite alors à 82 % des cas, et on doit donc diviser chaque probabilité par 0,82. On obtient le tableau ci-dessous.

Nombre de réservations	147	148	149	150
Recette	24 990	25 160	25 330	25 500
Probabilité	0,085	0,183	0,305	0,427
Espérance gain	2 133,292 68	4 602,439 02	7 722,560 98	10 884,146 3

Dans ce cas, l'espérance du bénéfice de la compagnie s'élève à 25 342,44 €.
Pour espérer obtenir une recette maximale, la compagnie doit donc mettre en vente 151 billets.

13 Simulation d'échantillons

Découvrir

1 Simuler une variable aléatoire

1

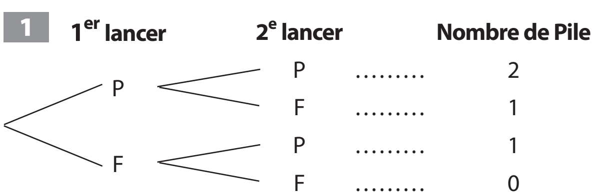
x	1	5	10	20
$\mathbf{P}(\mathbf{X}=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

2 **a)** a est un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 9.
x est la valeur prise par la variable aléatoire X.
On convient que si $a \leqslant 3$, la boule tirée est verte ainsi $x=1$.
Si $4 \leqslant a \leqslant 7$, la boule tirée est rouge alors $x=5$.
Si $a=8$, la boule tirée est bleue alors $x=10$ et enfin si $a=9$, la boule tirée est noire et $x=20$.
b) On saisit et on teste cette fonction, par exemple :

```
>>> X()
5
```

2 Simuler un échantillon d'une variable aléatoire

1



x	0	1	2
$\mathbf{P}(\mathbf{X}=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2 **a)** a est un nombre aléatoire égal à 0 ou 1.
Si $a=0$, on convient que le 1er lancer est Face et Pile si $a=1$.
De même, si $b=0$, le 2e lancer est Face et Pile si $b=1$.
x représente alors le nombre de Pile obtenu.
b) On saisit et on teste cette fonction, par exemple :

```
>>> Nb_Pile()
1
```

3 **a)** On écrit :

11 print(Nb_Pile())

b) On saisit et on teste le programme complété.

Acquérir des automatismes

2 **1. a)** $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{1}{10}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}=-1)=\frac{9}{10}$.

b) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{1}{10}\times 1+\frac{9}{10}\times(-1)=-0{,}8$.

2. a) Voici les fonctions X et Moyenne écrites dans le langage Python.

```
from random import *

def X():
    a=randint(1,10)
    if a==10:
        x=1
    else:
        x=-1
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for i in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

b) On obtient par exemple :

```
>>> X()
-1
>>> Moyenne(20)
-0.5
```

3. a) Voici ce programme :

```

Nbr=int(input("Taille de l'échantillon :"))
e=-0.8
d=abs(Moyenne(Nbr)-e)
print("Distance=",d)
```

b) Lorsque la taille de l'échantillon augmente, on observe que la distance tend à se réduire.

3 **1. a)** $P(X = 10) = \dfrac{1}{3}$ et $P(X = -5) = \dfrac{2}{3}$.

b) $E(X) = \dfrac{1}{3} \times 10 + \dfrac{2}{3} \times (-5) = 0$.

2. a) Voici les fonctions X et Moyenne écrites dans le langage Python.

```python
from random import *

def X():
    a=randint(1,6)
    if a>=5:
        x=10
    else:
        x=-5
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for i in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

b) On obtient par exemple :

```
>>> X()
-5
>>> Moyenne(20)
1.0
```

3. a) Voici ce programme :

```

Nbr=int(input("Taille de l'échantillon :"))
e=0
d=abs(Moyenne(Nbr)-e)
print("Distance=",d)
```

b) Lorsque la taille de l'échantillon augmente, on observe que la distance tend à se réduire.

5 **1. a)** $P(X = -6) = P(X = -3) = P(X = 0)$

$= P(X = 3) = P(X = 6) = \dfrac{1}{5}$.

b) $E(X) = \dfrac{1}{5}((-6) + (-3) + 0 + 3 + 6) = 0$

$V(X) = \dfrac{1}{5}((-6)^2 + (-3)^2 + 0^2 + 3^2 + 6^2) = 18$

Donc $\mu = 0$ et $\sigma = 3\sqrt{2}$.

Le programme devient :

```python
from math import *
from random import *

def Distance(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        a=randint(-2,2)
        x=3*a
        somme=somme+x
    m=somme/n
    d=abs(m)
    return d

def Répétition(N,n):
    s=sqrt(18)
    r=0
    for j in range(N):
        if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
            r=r+1
    p=r/N
    return p
```

2. La fonction Distance renvoie pour résultat l'écart entre la moyenne *m* de l'échantillon et l'espérance $\mu = 0$ de la variable aléatoire X.

3. La fonction Répétition renvoie la proportion d'échantillons tels que l'écart entre *m* et *e* soit inférieur ou égal à $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. b) On obtient des proportions proches de 95 %.

Pour environ 95 % d'échantillons, on a $|m - \mu| \leqslant \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

```
>>> Répétition(100,10000)
0.95
```

```
>>> Répétition(100,10000)
0.98
```

```
>>> Répétition(100,10000)
0.95
```

6 **1. a)** $P(X = 0) = \dfrac{1}{7}$, $P(X = 1) = \dfrac{2}{7}$,

$P(X = 4) = \dfrac{2}{7}$ et $P(X = 9) = \dfrac{2}{7}$.

b) $E(X) = \dfrac{1}{7} \times 0 + \dfrac{2}{7} \times (1 + 4 + 9) = 4$

$V(X) = \dfrac{1}{7} \times (0 - 4)^2 + \dfrac{2}{7} \times ((1 - 4)^2 + (4 - 4)^2 + (9 - 4)^2)$

$V(X) = 12$

Donc $\mu = 4$ et $\sigma = 2\sqrt{3}$.

Le programme devient :

```python
from math import *
from random import *

def Distance(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        a=randint(-3,3)
        x=a**2
        somme=somme+x
    m=somme/n
    d=abs(m-4)
    return d

def Répétition(N,n):
    s=sqrt(12)
    r=0
    for j in range(N):
        if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
            r=r+1
    p=r/N
    return p
```

2. La fonction Distance renvoie pour résultat l'écart entre la moyenne m de l'échantillon et l'espérance $\mu = 4$ de la variable aléatoire X.

3. La fonction Répétition renvoie la proportion d'échantillons tels que l'écart entre m et e soit inférieur ou égal à $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. b) On obtient des proportions proches de 95 %.
Pour environ 95 % des échantillons, on a :

$$|m - \mu| \leqslant \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}.$$

```
>>> Répétition(100,10000)
0.96
```

```
>>> Répétition(100,10000)
0.93
```

```
>>> Répétition(100,10000)
0.96
```

7 **a)**

x	$+3$	$+5$	-2
P(X = x)	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{10}$

b)

```
from random import *

def X():
    a=random()
    if a<=0.5:
        x=3
    if a>0.5 and a<=0.7:
        x=5
    if a>0.7:
        x=-2
    return x
```

c) On saisit et on teste cette fonction.

8 **a)** La variable a prend pour valeur un nombre entier aléatoire de 1 à 32, elle représente la 1re carte tirée.
La variable b prend pour valeur un nombre entier aléatoire de 1 à 32, elle représente la 2e carte tirée.

b) On convient que si $a \leqslant 4$, la 1re carte tirée est un as et que si $b \leqslant 4$, la 2e carte tirée est un as.

c) On saisit le programme et on exécute plusieurs fois la fonction.

d) En effet, la probabilité de tirer deux as est :

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \approx 0{,}016.$$

9 **1.** Entre 1 et 100, on compte 14 multiples de 7 donc $P(X = 1) = 0{,}14$ et $P(X = 0) = 0{,}86$.

2.

Saisir *n*
Pour *k* allant de 1 à *n*
  |Afficher Aléa ()
Fin Pour

3. a)

```
from random import *

def Aléa():
    nbr=randint(1,100)
    if nbr%7==0:
        x=1
    else:
        x=0
    return x

n=int(input("Donner la valeur de n:"))
for k in range(1,n+1):
    print(Aléa())
```

b) On saisit et on teste ces programmes.

10 **1.** et **2.**

```
from random import *

def Lancer():
    a=random()
    if a<=0.8:
        x=1
    else:
        x=0
    return x

def Réussis(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+Lancer()
    return s
```

3. a) On saisit et on teste ces deux fonctions.

b) Par exemple :

```
>>> Réussis(100)
82
>>>
>>> Réussis(1000)
803
>>> Réussis(10000)
7979
```

Avec des valeurs assez grandes de n, le pourcentage de paniers réussis est proche de 80 %.

11 **1.**

```
from random import *

def Gain():
    a=randint(1,6)
    if a==6:
        x=10
    if a==4 or a==5:
        x=5
    if a<=3:
        x=-2
    return x
```

2. On complète la ligne 17 :

m = somme/n

3. On saisit et on teste les fonctions obtenues.

12 **1. a)** $P(X = 0) = \dfrac{3}{5}$ et $P(X = 1) = \dfrac{2}{5}$.

b) $E(X) = \dfrac{3}{5} \times 0 + \dfrac{2}{5} \times 1 = 0{,}4.$

172909_Chap13_000-000.indd 219 25/07/2019 19:21:08

2. et **3.**

```
from random import *

def X():
    a=random()
    if a<=0.6:
        x=0
    else:
        x=1
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

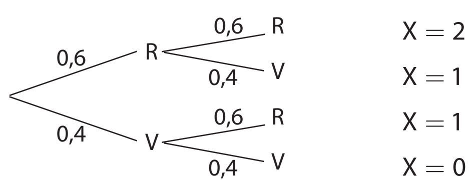
4. a) On saisit et on teste ces fonctions.

b) Par exemple :

```
>>> Moyenne(100)
0.32
>>> Moyenne(1000)
0.42
>>> Moyenne(10000)
0.3922
```

Avec de grandes valeurs de n, la fonction Moyenne renvoie des valeurs proches de l'espérance de X.

13 **1. a)**



$P(X = 2) = (0{,}6)^2 = 0{,}36$

$P(X = 1) = 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}48$

$P(X = 0) = (0{,}4)^2 = 0{,}16$

b) $E(X) = 0{,}36 \times 2 + 0{,}48 \times 1 + 0{,}16 \times 0 = 1{,}2$

2. La variable a prend pour valeur un nombre aléatoire dans $[0\,;1[$. On convient que $a \leqslant 0{,}6$ correspond au 1er tirage d'une boule rouge. De même, b prend pour valeur un nombre aléatoire dans $[0\,;1[$ et $b \leqslant 0{,}6$ correspond au 2^{e} tirage d'une boule rouge.

3.

```
def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

4. a) On saisit et on teste ces deux fonctions.

b) Par exemple :

```
>>> Moyenne(100)
1.22
>>> Moyenne(1000)
1.224
>>> Moyenne(10000)
1.1988
```

Avec de grandes valeurs de n, la fonction Moyenne renvoie des valeurs proches de l'espérance de X.

14 **a)**

$P(X = 2) = (0{,}75)^2 = 0{,}562\,5$

$P(X = 1) = 0{,}75 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}375$

$P(X = 0) = (0{,}25)^2 = 0{,}062\,5$

b) $E(X) = 0{,}562\,5 \times 2 + 0{,}375 \times 1 + 0{,}062\,5 \times 0 = 1{,}5$

c) et **a)**

```
from random import *

def X():
    x=0
    a=random()
    b=random()
    if a<=0.75:
        x=x+1
    if b<=0.75:
        x=x+1
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

On saisit et on teste ces fonctions.

15 **1. a)** $P(X = 1) = 0{,}05$ et $P(X = 0) = 0{,}95$.

b) $E(X) = 0{,}05 \times 1 + 0{,}95 \times 0 = 0{,}05$, $\mu = 0{,}05$.

2. La variable a prend pour valeur un nombre aléatoire dans $[0\,;1[$. On convient que la condition $a \leqslant 0{,}05$ correspond à la livraison d'un colis abîmé.

3. Pour un échantillon de taille n, la fonction Somme renvoie le nombre de colis abîmés de l'échantillon.

4. Pour un échantillon de taille n, la fonction Distance renvoie à l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance μ de la variable aléatoire X.

5. a) On saisit et on teste ces fonctions.

b) Par exemple :

```
>>> Distance(100)
0.020000000000000004
>>> Distance(1000)
0.0050000000000000044
>>> Distance(10000)
0.0017999999999999996
```

Lorsqu'on donne à n des valeurs de plus en plus grandes, la fonction Distance renvoie des valeurs de plus en plus proches de 0.

16 **1. a)** $E(X) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}4 \times 3 + 0{,}4 \times 4 + 0{,}1 \times 6$
$= 3{,}5$

$\mu = 3{,}5$.

b) $V(X) = 0{,}1 \times (1 - 3{,}5)^2 + 0{,}4 \times (3 - 3{,}5)^2$
$+ 0{,}4 \times (4 - 3{,}5)^2 + 0{,}1 \times (6 - 3{,}5)^2 = 1{,}45.$

$\sigma = \sqrt{1{,}45} \approx 1{,}2$

2. a) b) et **c)**

```
from math import *
from random import *

def X():
    a=random()
    if a<=0.1:
        x=1
    if a>0.1 and a<=0.5:
        x=3
    if a>0.5 and a<=0.9:
        x=4
    if a>0.9:
        x=6
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m

def Distance(n):
    e=3.5
    m=Moyenne(n)
    d=abs(m-e)
    return d
```

3. a) Pour chacun des N échantillons de taille *n*, la fonction calcule la distance *d* entre la moyenne de cet échantillon et *e*.

Elle renvoie pour résultat la proportion d'échantillons telle que $d < \frac{2\mu}{\sqrt{\sigma}}.$

b) Par exemple :

```
>>> Répétition(100,1000)
0.98
>>> Répétition(100,1000)
0.96
>>> Répétition(100,1000)
0.95
```

Lorsqu'on exécute Répétition(100,1000), on constate qu'on obtient des proportions proches de 95 %.

17 **1.** C **2.** B **3.** C

18 **1.** A, B, C, D **2.** A, D

19 **1. L'affirmation est fausse.**

En effet, dans la boucle l'affectation s=X() ne convient pas. On devrait écrire s=s+X().

2. L'affirmation est vraie.

En effet, la moyenne d'un échantillon de taille *n* assez grande est proche de l'espérance de X.

20 **a)**

```
from random import *

def X():
    a=randint(1,10)
    if a<=3:
        x=1
    if a>=4 and a<=8:
        x=2
    if a>=9:
        x=3
    return x
```

b) On saisit et on teste le programme obtenu.

21 **a)**

y	10	5	1
$\mathbf{P}(\mathbf{Y} = y)$	0,2	0,3	0,5

b) La roue compte $0{,}2 \times 20 = 4$ secteurs rouges, $0{,}3 \times 20 = 6$ secteurs bleus et $0{,}5 \times 20 = 10$ secteurs verts.

22 **a)** La variable *s* cumule les *n* valeurs obtenues de la variable aléatoire X.

La variable *m* a pour valeur la moyenne des *n* valeurs de X de l'échantillon.

b) La ligne 18 s'écrit : d=abs(m-e)

S'entraîner

24

```
from random import *

def Rang():
    a=randint(1,25)
    x=1
    while a<=15:
        a=randint(1,25)
        x=x+1
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+Rang()
    m=somme/n
    return m
```

2. a) On saisit et on teste ces fonctions.

b) On exécute plusieurs fois Moyenne(10000).

```
>>> Moyenne(10000)
2.4901
>>> Moyenne(10000)
2.4912
>>> Moyenne(10000)
2.5276
```

On propose alors 2,5 pour estimation de l'espérance de X.

172909_Chap13_000-000.indd 221 25/07/2019 19:22:20

25 **1.**

```
from random import *

def Rang():
    a=randint(0,17)
    x=1
    while a!=0:
        a=randint(0,17)
        x=x+1
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+Rang()
    m=somme/n
    return m
```

2. a) On saisit et on teste ces fonctions.

b) On exécute plusieurs fois Moyenne(10000).

```
>>> Moyenne(10000)
18.0235
>>> Moyenne(10000)
17.9689
>>> Moyenne(10000)
18.0267
```

On propose alors 18 pour estimation de l'espérance de X.

27 **1.** $P(X=1)=0{,}7$ et $P(X=0)=0{,}3$.

$E(X)=0{,}3\times 0+0{,}7\times 1=0{,}7$

$V(X)=0{,}3\times(-0{,}7)^2+0{,}7\times(-0{,}3)^2=0{,}21$

$\sigma(X)=\sqrt{0{,}21}\approx 0{,}46$.

2. Chaque cellule du domaine B2:CW2 contient la formule :

$\boxed{=\text{SI(ALEA()}<=0{,}7;1;0)}$

On corrige le contenu de la cellule CZ2 :

$\boxed{=\text{ABS(CY2}-0{,}7)}$.

$\dfrac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}}\approx 0{,}092$, on corrige la formule de la cellule DA2 : $\boxed{=\text{SI(CZ2}<=0{,}092;1;0)}$

Le reste de la feuille convient.

28 On adapte la feuille afin de simuler $N=100$ échantillons de taille $n=500$ de X.

On obtient une proportion proche de 0,95.

29 **1. a)** $P(X=10)=\dfrac{1}{8}$, $P(X=2)=\dfrac{3}{8}$ et $P(X=-1)=\dfrac{1}{2}$.

b) $E(X)=\dfrac{1}{8}\times 10+\dfrac{3}{8}\times 2+\dfrac{1}{2}\times(-1)=1{,}5$

2. a)

```
from random import *

def X():
    a=randint(1,8)
    if a==1:
        x=10
    if 2<=a and a<=4:
        x=2
    if a>=5:
        x=-1
    return x
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

3. a)

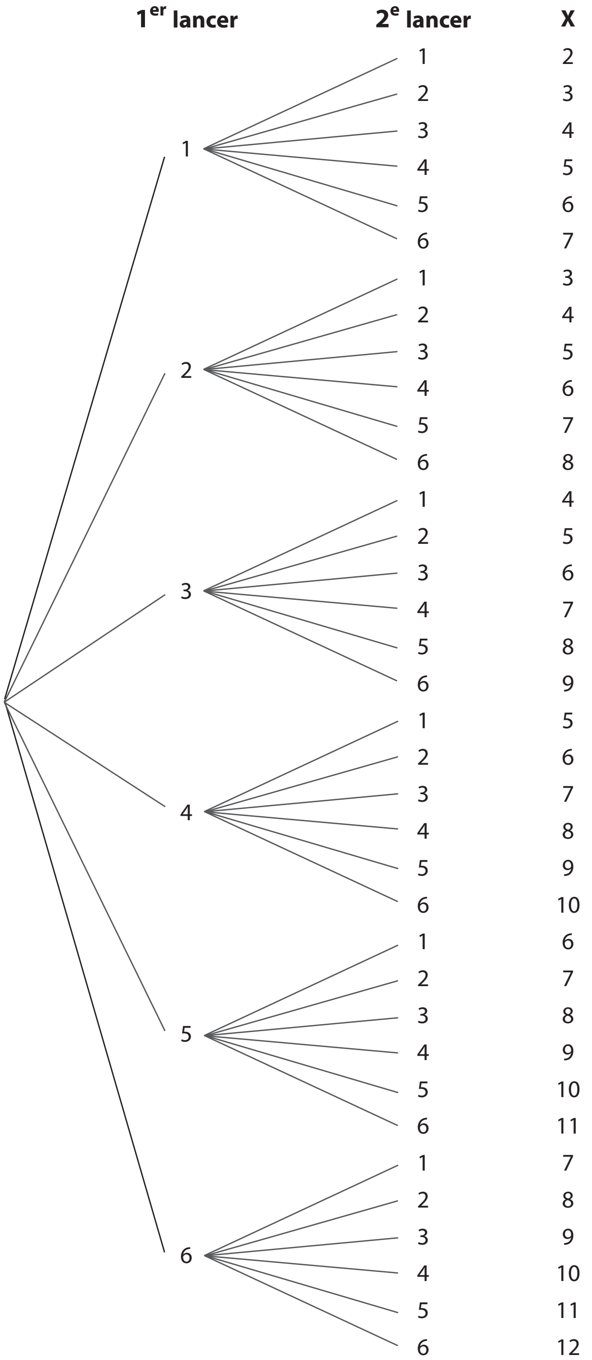
```

def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

b) On saisit et on teste ces fonctions.

Par exemple ; Moyenne(10000) renvoie une valeur proche de l'espérance $E(X)=1{,}5$.

```
>>> Moyenne(10000)
1.4906
>>> Moyenne(10000)
1.51
>>> Moyenne(10000)
1.5311
```

30 **1.**



x	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{P}(\mathbf{X}=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$

x	10	11	12
$\mathbf{P}(\mathbf{X}=x)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. a)
```
from random import *

def Somme():
    a=randint(1,6)
    b=randint(1,6)
    s=a+b
    return s
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

3. a)
```

n=int(input("n ="))
for i in range(n):
    print(Somme())
```

b) On saisit et on teste ce programme.

31 **1. a)**
```
from random import *

def Y():
    a=randint(0,1)
    b=randint(0,1)
    c=randint(0,1)
    s=a+b+c
    return s
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

2. a)
```

n=int(input("n ="))
for i in range(n):
    print(Y())
```

b) On saisit et on teste ce programme.

32 **1.** $P(X=1)=0{,}4$ et $P(X=0)=0{,}6$

2. a)
```
from random import *

def Appel():
    a=random()
    if a<=0.4:
        x=1
    else:
        x=0
    return x
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

3. a)
```

def Total(n):
    T=0
    for i in range(n):
        T=T+Appel()
    return T
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

33 **1.** $P(X=5)=0{,}2$, $P(X=4)=0{,}5$, et $P(X=3)=0{,}3$.

$E(X)=0{,}2\times 5+0{,}5\times 4+0{,}3\times 3=3{,}9$.

2. a)
```
from random import *

def Buts():
    a=random()
    if a<=0.2:
        x=5
    if 0.2<a and a<0.7:
        x=4
    if a>=0.7:
        x=3
    return x
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

3. a)
```

def Moyenne(n):
    somme=0
    for i in range(n):
        somme=somme+Buts()
    m=somme/n
    return m
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

34 **1. a)**

```
from random import *

def Y():
    a=randint(1,10)
    b=randint(1,10)
    if a<=b:
        y=a
    else:
        y=b
    return y
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

2. a)

```
def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+Y()
    m=somme/n
    return m
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

35 **1. a)** et **b)**

```
from random import *

def X():
    a=random()
    if a<=0.8:
        x=1
    else:
        x=0
    return x
```

```

def Réussis(n):
    somme=0
    for k in range(n):
            somme=somme+X()
    return somme
```

c) On saisit et on teste ces fonctions.

2. a) et **b)**

```

def Moyenne(n):
    m=Réussis(n)/n
    return m

def Distance(n):
    d=abs(Moyenne(n)-0.8)
    return d
```

c) On saisit et on teste ces fonctions.

3. a) La fonction Proportion réalise une simulation de N échantillons de taille *n*.

Elle renvoie la proportion d'échantillons tels que Distance(n)<=alpha.

b) On saisit et on exécute cette fonction.

4. a) On exécute plusieurs fois :

Proportion(100,1000,0.025), on obtient des proportions proches de 0,95.

Par exemple :

```
>>> Proportion(100,1000,0.025)
0.98
>>> Proportion(100,1000,0.025)
0.93
>>> Proportion(100,1000,0.025)
0.94
```

On peut remarquer que $E(X) = 0{,}8$, $\sigma(X) = 0{,}4$ et $\dfrac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}} \approx 0{,}025$

b) et **c)** On peut noter que les proportions sont très sensibles aux variations de alpha.

36 **1. a)**

```
from random import *

def X():
    a=randint(1,6)
    b=randint(1,6)
    x=abs(a-b)
    return x
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

2. a)

```

def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
            somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

3. On obtient par exemple :

```
>>> Moyenne(10000)
1.941
>>> Moyenne(10000)
1.9289
>>> Moyenne(10000)
1.9765
```

On propose 1,95 pour estimation de l'espérance de la variable aléatoire X.

4. a)

```

def Distance(n):
    d=abs(Moyenne(n)-1.95)
    return d
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

Pour de grandes valeurs de *n*, la fonction Distance renvoie des valeurs proches de 0.

37 **1. a)**

```
from random import *

def Y():
    y=randint(1,6)
    for i in range(4):
        a=randint(1,6)
        if y<a:
            y=a
    return y
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

2. On écrit une fonction Moyenne qui simule un échantillon de taille *n* de Y et renvoie la moyenne des *n* valeurs de Y obtenues.

```
def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+Y()
    m=somme/n
    return m
```

On exécute Moyenne(n) avec de grandes valeurs de *n* afin d'obtenir une estimation *e* de l'espérance de Y.

3. a) Par exemple, avec $e = 5{,}43$.

```
def Distance(n):
    e=5.43
    d=abs(Moyenne(n)-e)
    return d
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

38 **a)** $a = 1,\ b = 5,\ c = 7$

$a < b$ est vrai et $b < c$ est vrai, donc le booléen $a < b$ and $b < c$ est vrai.

Alors $X(1, 5, 7)$ renvoie 1.

b) $a = 1,\ b = 6,\ c = 4$

$a < b$ est vrai, $b < c$ est faux donc $a < b$ and $b < c$ est faux.

Alors $X(1, 6, 4)$ renvoie 0.

c) $a = 8,\ b = 3,\ c = 5$

$a < b$ est faux, $b < c$ est vrai donc $a < b$ and $b < c$ est faux.

Alors $X(8, 3, 5)$ renvoie 0.

d) $a = 4,\ b = 6,\ c = 5$

$a < b$ est vrai, $b < c$ est faux donc $a < b$ or $b < c$ est vrai.

Alors $Y(4, 6, 5)$ renvoie 1.

e) $a = 9,\ b = 3,\ c = 4$

$a < b$ est faux, $b < c$ est vrai donc $a < b$ or $b < c$ est vrai.

Alors $Y(9, 3, 4)$ renvoie 1.

f) $a = 9,\ b = 4,\ c = 2$

$a < b$ et $b < c$ sont faux donc $a < b$ or $b < c$ est faux.

Alors $Y(9, 4, 2)$ renvoie 0.

Organiser son raisonnement

39 **1. a)** $P(X = 1) = \dfrac{2}{5},\ P(X = 5) = \dfrac{2}{5}$ et $P(X = 10) = \dfrac{1}{5}$.

b) $E(X) = \dfrac{2}{5} \times 1 + \dfrac{2}{5} \times 5 + \dfrac{1}{5} \times 10,\ \mu = 4{,}4$

$V(X) = \dfrac{2}{5}(1 - 4{,}4)^2 + \dfrac{2}{5}(5 - 4{,}4)^2 + \dfrac{1}{5}(10 - 4{,}4)^2$

$V(X) = 11{,}04$ et $\sigma = \sqrt{11{,}04} \approx 3{,}32$

2. a) Dans chaque cellule du domaine B2:CW2, on saisit la formule :

=SI(ALEA()<=0,4;1;SI(ALEA()<=2/3;5;10))

b) Dans la cellule CY2, on saisit la formule :

=MOYENNE(B2:CW2))

Dans la celluleCZ2, on saisit la formule :

=ABS(CY2−4,4)

3. a) Afin de réaliser une simulation de $N = 100$ échantillons de taille $n = 100$ de X, on recopie les formules jusqu'à la ligne 101.

b) Dans la cellule DA2, on saisit la formule :

=SI(CZ2<=0,664;1;0)

On recopie la formule jusqu'à la ligne 101.

Enfin dans la cellule DA103, on saisit la formule :

=NB.SI(DA2:DA101;1)/100

40

```python
from random import *

def X(n):
    s=0
    for i in range(n):
        a=random()
        if a<0.2:
            s=s+1
    return s
```

41 **a)**

```python
from random import *

def X():
    a=randint(1,100)
    n=1
    while a!=1:
        a=randint(1,100)
        n=n+1
    return n
```

b) On saisit et on teste plusieurs fois cette fonction.

42

```python
from random import *

def K():
    x=0
    y=0
    k=0
    while -4<x<4 and -4<y<4:
        a=randint(1,4)
        if a==1:
            x=x-1
        if a==2:
            x=x+1
        if a==3:
            y=y-1
        if a==4:
            y=y+1
        k=k+1
    return k

def Moyenne(n):
    t=0
    for i in range(n):
        t=t+K()
    m=t/n
    return m
```

43 **a)**

```python
from random import *

def X():
    x=1
    a=randint(1,6)
    b=randint(1,6)
    while a!=b:
        a=b
        b=randint(1,6)
        x=x+1
    return x
```

b) On écrit une fonction Moyenne qui simule un échantillon de taille n de X et renvoie pour résultat la moyenne des n valeurs obtenues.

```
def Moyenne(n):
    s=0
    for i in range(n):
        s=s+X()
    m=s/n
    return m
```

On exécute alors Moyenne(n) pour de grandes valeurs de *n*. Les résultats obtenus nous donnent une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X.

44 **a)** L'aire du carré en cm^2 est : $20^2 = 400$.
Celle du cercle est : $\pi \times 10^2 = 100\pi$.

Donc $P(X = 1) = \dfrac{100\pi}{400} = \dfrac{\pi}{4}$ et $P(X = 0) = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

```
from random import *
from math import *

def X():
    a=random()
    if a<=pi/4:
        x=1
    else:
        x=0
    return x
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

45

```
from random import *

def Max(n):
    x=0
    for i in range(n):
        a=randint(1,100)
        if x<a:
            x=a
    return x
```

46

```
from random import *

def X():
    a=randint(1,32)
    n=1
    while a<=24:
        a=randint(1,32)
        n=n+1
    return n

def Moyenne(n):
    s=0
    for i in range(n):
        s=s+X()
    m=s/n
    return m
```

Pour de grandes valeurs de *n*, Moyenne(n) renvoie des valeurs qui nous donnent une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X.

47

```
from random import *

def X():
    n=0
    s=0
    while s<6:
        a=randint(1,6)
        if a==6:
            s=s+1
        n=n+1
    return n
```

48 **1. a)** La fonction X renvoie la valeur de N qui représente le nombre de personnes vaccinées parmi les 180 personnes interrogées.

b) *a* est un nombre aléatoire dans $[0\,;1[$.

On convient que si $a \leqslant 0{,}4$, la personne interrogée est vaccinée contre la grippe.

2. La ligne 14 s'écrit : som=som+X(), la ligne 15 s'écrit : m=som/n.

3.

```
17
18 def Distance(n):
19     d=abs(Moyenne(n)-72)
20     return d
```

Exploiter ses compétences

49 La fonction X simule les *n* réponses au hasard du candidat et renvoie le nombre de réponses justes qu'il obtient.

```
from random import *

def X(n):
    x=0
    for i in range(n):
        a=randint(1,4)
        if a==1:
            x=x+1
    return x
```

50 Dans le programme suivant, on note $p = 0$ lorsque la fourmi est en A, $p = 1$ lorsqu'elle est en B ou D et $p = 2$ lorsqu'elle est en C.

La variable x a pour valeur la durée en min du parcours.

```python
from random import *

def X():
    x=0
    p=0
    while p!=2:
        if p==0:
            p=1
            x=x+1
        if p==1:
            a=random()
            if a<0.5:
                p=0
            else:
                p=2
            x=x+1
    return x
```

51

```python
from random import *

def X():
    x=0
    for i in range(350):
        a=random()
        if a<0.15:
            x=x+1
    return x
```

52

```python
from math import *
from random import *

def X():
    if random()<=2/3:
        rep=1
    else:
        rep=0
    return rep

def Moyenne():
    somme=0
    for k in range(100):
        somme=somme+X()
    m=somme/100
    return m

def Distance():
    e=2/3
    m=Moyenne()
    d=abs(m-e)
    return d

def Répétition():
    s=0.47
    r=0
    for j in range (100):
        d=Distance()
        if d<2*s/10:
            r=r+1
    p=r/100
    return p
```

Édition : Julien Lionnet
Composition : DESK (www.desk53.com.fr)
Schémas : DESK
Adaptation graphique : Simon Géliot