Mathématiques

Hyperbole

2de

NOUVEAU PROGRAMME 2019

Livre du professeur

Sous la direction de Joël Malaval

Michel Bachimont
Jean-Luc Bousseyroux
Bernard Chrétien
Pierre-Antoine Desrousseaux
Fabrice Destruhaut
Anne Keller
Jean-Marc Lécole
Isabelle Lericque
Annie Plantiveau
Frédéric Puigredo
Joël Ternoy
Mickaël Védrine
Myriam Vialaneix

Nathan

Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs.
Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son avenir économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération.
En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. »

© Nathan 2019
25 avenue Pierre de Coubertin, 75211 PARIS Cedex 13
ISBN : 978-209-172907-7

Sommaire

NOMBRES ET CALCULS

1 Manipuler les nombres réels 5

2 Utiliser le calcul littéral 21

3 Divisibilité. Nombres premiers 35

4 Équations et inéquations 49

GÉOMÉTRIE

5 Vecteurs et opérations 67

6 Configurations du plan 83

7 Équations de droites 99

FONCTIONS

8 Fonctions de référence 121

9 Fonctions : courbes représentatives 135

10 Variations et extremums 147

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

11 Information chiffrée 163

12 Statistique descriptive 179

13 Probabilités 191

14 Échantillonnage 205

1 Manipuler les nombres réels

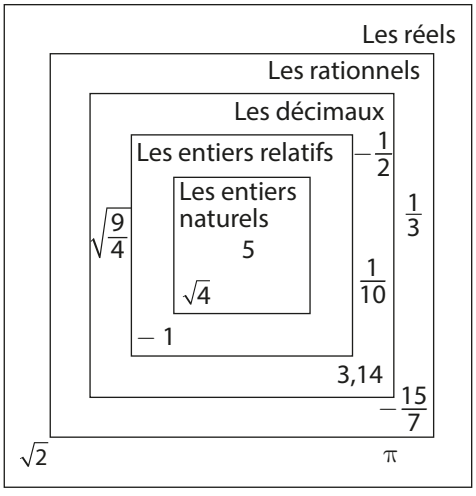
Découvrir

1 Les nombres réels

1 **a)** $-\frac{1}{2}$ est un nombre décimal : $-\frac{1}{2} = -0{,}5$

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal car il n'admet pas une écriture avec un nombre fini de chiffres.

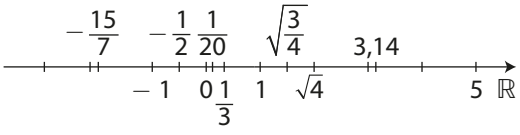
b)



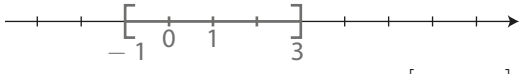
2 **a)** Pour les nombres irrationnels, il n'y a pas de séquence de chiffres qui se répètent dans la partie décimale.

b) Voir schéma ci-dessus.

3 **a)**



b)



c) Tout intervalle contenant l'intervalle $\left[-\frac{15}{7}\ ;\ 5\right]$ convient.

2 Distance entre deux nombres réels

1 **a)** La distance entre les cerises et la pièce d'or est 6.

b) La distance entre -8 et 0 est 8.

2 **a)** **1er cas :** $x \geqslant 0$

La distance entre x et 0 est $x - 0$ c'est-à-dire x.

2e cas : $x \leqslant 0$

La distance entre x et 0 est $0 - x$ c'est-à-dire $-x$.

b) Cela correspond à la distance entre le personnage et l'arbre.

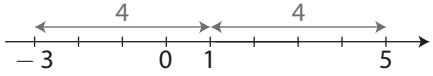
1er cas : $x \geqslant 5$

La distance entre x et 5 est $x - 5$.

2e cas : $x \leqslant 5$

La distance entre x et 5 est $5 - x$.

3 **a)** Le personnage est au milieu de l'intervalle $[-3\,;5]$.



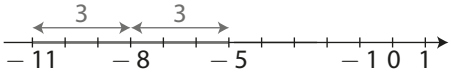
La distance entre -3 et 5 est 8 (car $5-(-3) = 8$).

L'abscisse de la position du personnage est donc :

$$-3 + \frac{8}{2} = -3 + 4 = 1.$$

Donc $x = 1$.

4 **a)**



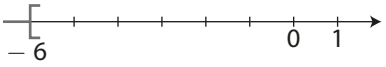
b) L'abscisse x de la position du personnage appartient à l'intervalle $[-11\,;\,-5]$.

Acquérir des automatismes

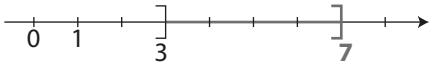
3 On suppose que $\frac{1}{9}$ est un nombre décimal ; il existe un nombre a de $\mathbb{N}$ et un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{9} = \frac{a}{10^n}$.
Cette égalité équivaut à $9a = 10^n$. Ainsi, il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que 10^n soit un multiple de 9.
Or, 10^n est 1 suivi de n zéros. La somme de ses chiffres est donc 1.
Ainsi 10^n n'est pas un multiple de 9 ce qui contredit l'hypothèse de départ.
On en conclut que $\frac{1}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

4 **a)** $\frac{11}{50} = \frac{11}{2 \times 5^2}$. Donc $\frac{11}{50} \in \mathbb{D}$.
b) $\frac{85}{1500} = \frac{17}{300} = \frac{17}{3 \times 2^2 \times 5^2}$.
Donc $\frac{85}{1500} \in \mathbb{Q}$.
c) π est un nombre irrationnel, donc $\frac{\pi}{2}$ est un nombre irrationnel. Donc $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$.
d) $1 - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1$. Donc $1 - \sqrt{4} \in \mathbb{Z}$.
e) $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel donc $-\sqrt{5}$ est aussi irrationnel. On en déduit que $1 - \sqrt{5}$ est un nombre irrationnel. Donc $1 - \sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

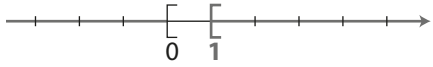
7 $t = 3$ h 45 min $= 3{,}75$ h
$E = 0{,}25 \times 10^{-2} \times 3{,}75$ h. $E \approx 0{,}01$ kWh.

8 **a)**


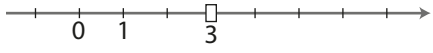
$]\infty\,;\,-6[$

b)


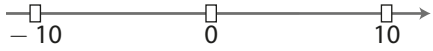
$]3\,;\,7]$

c)


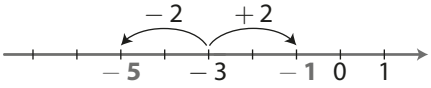
$]-\infty\,;\,0[\ \cup\ [1\,;\,+\infty[$

d)


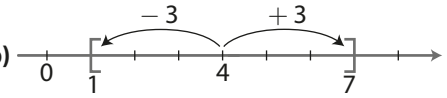
$]-\infty\,;\,3[\ \cup\ ]3\,;\,+\infty[$

e)


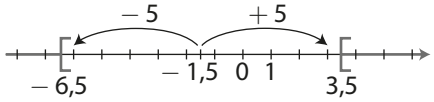
$]-\infty\,;\,-10[\ \cup\ ]-10\,;\,0[\ \cup\ ]0\,;\,10[\ \cup\ ]10\,;\,+\infty[$

11 **a)**


$x \in \{-5\,;\,-1\}$

b)


$x \in [1\,;\,7]$

c)


$x \in\ ]-\infty\,;\,-6{,}5[\ \cup\ ]3{,}5\,;\,+\infty[$

12 **a)** $\frac{-5+6}{2} = \frac{1}{2}$ et $6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$
donc $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{11}{2}$.
b) $\frac{-5+0}{2} = -\frac{5}{2}$ et $0 - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$
donc $\left|x + \frac{5}{2}\right| > \frac{5}{2}$.

13 $\frac{1}{10} = 0{,}1$ et $-\frac{6}{3} = -2$. Donc $-0{,}33$, $\frac{1}{10}$ et $-\frac{6}{3}$ sont des nombres décimaux.

14 $\frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{5}{20}$.

15 **(3)** $\frac{4}{3}$. En effet, $\frac{4}{3} = 1{,}333...$

16 Sofian a tort. Par exemple $\frac{1}{3}$ est rationnel mais pas décimal.

17 Louane a tort. $\frac{1}{7} < \frac{1}{3}$ donc ne peut pas être égal à 0,777… De plus, le premier chiffre de la partie décimale de $\frac{1}{7}$ est le quotient de 10 par 7, c'est-à-dire 1.

18 $\frac{25}{45} = \frac{5 \times 5}{5 \times 9} = \frac{5}{9}$ $\qquad \frac{30}{36} = \frac{5 \times 6}{6 \times 6} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$ $\qquad \frac{-10}{-18} = \frac{5 \times 2}{9 \times 2} = \frac{5}{9}$
$\frac{30}{36}$ ne désigne pas le même nombre rationnel.

19 **a)** $\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{25}{30}$ $\qquad$ **b)** $\frac{30}{54} = \frac{5}{9} = \frac{10}{18}$
c) $-\frac{5}{17} = -\frac{10}{34} = -\frac{15}{51}$

20 **a)** • $\frac{1}{2} = 0{,}5$ • $\frac{1}{4} = 0{,}25$ • $\frac{3}{4} = 0{,}75$
• $\frac{7}{5} = 1{,}4$ • $\frac{36}{12} = 3$ • $\frac{143}{110} = 1{,}3$
b) Ces nombres sont décimaux car leur développement décimal a un nombre fini de chiffres.

21 **a)** • $\frac{1}{5} = 0{,}2$ • $\frac{2}{5} = 0{,}4$ • $\frac{3}{5} = 0{,}6$ • $\frac{4}{5} = 0{,}8$.

b) Ces nombres sont décimaux car leur écriture décimale a un nombre fini de chiffres ou bien ces nombres sont décimaux car leur dénominateur est 5.

22 • $\frac{1}{2} = 0{,}5$ • $-\frac{7}{3} = -2{,}333...$ • $-\frac{4}{5} = 0{,}8$

• $\frac{16}{2} = 8$ • $\frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3} = 1{,}333...$

• $2 \times 10^{-3} = 0{,}002$ • $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

Donc $0{,}526$ $\frac{1}{2}$; $-\frac{4}{5}$; $\frac{16}{2}$; 2×10^{-3} et $\sqrt{\frac{49}{25}}$ sont des nombres décimaux.

23 • $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ • $\frac{16}{240} = \frac{1}{15} = 0{,}066\,6\ldots$

• Le dénominateur de $\frac{54}{31}$ n'est pas un produit de 2 et de 5.

• $\frac{156\,250}{1\,128} = \frac{78\,125}{564}$

Or, 564 est divisible par $3(5+6+4=15)$, donc 564 n'est pas un produit de 2 et de 5.

• Le dénominateur de $-\frac{31}{1\,700}$ est divisible par 17, donc 1 700 n'est pas un produit de 2 et de 5.

• $\frac{13\,230}{14\,000} = 0{,}945$ • $-\sqrt{81} = -9$ • $\frac{123}{500} = 0{,}246$

Donc $\frac{13\,230}{14\,000}$, $-\sqrt{81}$ et $\frac{123}{500}$ sont des nombres décimaux.

24 • $\frac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8$; $0{,}133\,3$; $\frac{35}{7} = 5$; $\frac{14{,}7}{2} = 7{,}35$;

$3 \times 10^{-4} = 0{,}003$ sont des nombres décimaux.

• $-\frac{7}{3}$; $\frac{76}{600}$; $\frac{36}{7}$ sont des nombres rationnels non décimaux.

25 • $\frac{81}{4}$ est un nombre décimal car $4 = 2^2$.

• $\frac{4}{81}$ est un nombre rationnel non décimal car 81 est divisible par 3.

• $\frac{15}{5} = 3$ est un nombre entier naturel.

• $\frac{7}{40} = 0{,}175$ est un nombre décimal car 7 n'est pas un produit de 2 et de 5.

26 • $\frac{4+5}{2+5} = \frac{9}{7}$ est un nombre rationnel non décimal car 7 n'est pas un produit de 2 et de 5.

• $10^{-5} = 0{,}000\,001$ est un nombre décimal.

• $-1{,}78$ est un nombre décimal.

• $-\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel non décimal.

27 • $\frac{31}{3200} = \frac{31}{2^5 \times 10^2} = \frac{31}{2^7 \times 5^2}$ est un nombre décimal.

• $\frac{13}{11}$ est un nombre rationnel

• $-\frac{14}{3}$ est un nombre rationnel

• $-\frac{42}{6} = -7$ est un nombre entier relatif

28 • 3,65 ; 0,345 243 sont des nombres décimaux.

• 3,656 5 … ; 0,345 45 … sont des nombres rationnels non décimaux.

29 • $-\frac{1}{5} = 0{,}2$ est un nombre décimal.

• $\frac{1\,001}{56} = 17{,}875$ est un nombre décimal.

• $\frac{1}{6} = 0{,}166\,6\ldots$ est un nombre rationnel.

30 Adama a tort. En soustrayant la partie entière, Marine a fait apparaître un chiffre de plus de la partie décimale.

43 n'est pas un produit de 2 et de 5 donc $\frac{101}{4}$ est un nombre rationnel non décimal et son développement décimal a une infinité de chiffres.

31 • $2\sqrt{2}$ est irrationnel • $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$ est rationnel

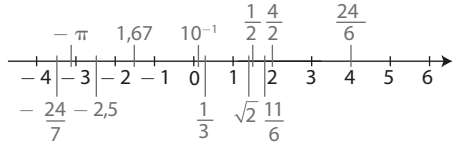
• $-\frac{15}{7}$ est rationnel • $\frac{3\pi}{4}$ est irrationnel

32 Lima a tort car π n'est pas entier, c'est un nombre irrationnel.

33 Emmanuel a tort : tous les nombres décimaux sont aussi des nombres réels.

34 **a) (1)** **b) (1)** **c) (3)**

35



36 $-15{,}4 \in \mathbb{Q}$ $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$ $-\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$

$\frac{9}{11} \notin \mathbb{D}$ $\frac{12}{6} \in \mathbb{N}$ $\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$

37 Rachel a tort car π est un nombre irrationnel donc il ne peut pas être égal à un quotient de deux nombres entiers. Ces deux nombres sont les 9 premiers chiffres de leurs parties décimales égaux.

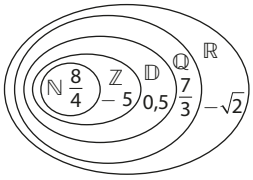
38 • $\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont des nombres irrationnels.
• $-\frac{5}{4}$ est un nombre décimal.
• 5×10^4 est un nombre entier naturel.
• $\frac{8}{7}$ est un nombre rationnel non décimal.

39 • 1,414, $\frac{5\pi}{8\pi}$ et $\sqrt{0{,}81}$ sont des nombres décimaux.
• $\frac{7}{6}$ est un nombre rationnel non décimal.
• $\sqrt{5}+4$ est un nombre irrationnel.

40 • $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = 3-1 = 2$ est un nombre entier naturel.
• $\sqrt{54{,}76} = 7{,}4$ est un nombre décimal.
• $3-\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

41 **a)** $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right) = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 7$ est un nombre entier naturel.
b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}^2}{2^2} = \frac{2}{4} = 0{,}5$ est un nombre décimal.

42



43 **a)**

	ℕ	ℤ	𝔻	ℚ	ℝ
$-\frac{5}{2}$			X	X	X
$-\frac{6}{2}$		X	X	X	X
$-\sqrt{121}$		X	X	X	X
$\sqrt{7}$					X
2π					X
$4{,}5 \times 10^{-4}$			X	X	X
$-\frac{7}{9}$				X	X
$\frac{617}{8}$			X	X	X

b) $-\frac{5}{2}$ est un nombre décimal.
$-\frac{6}{2}$ est un nombre entier relatif.
$-\sqrt{121}$ est un nombre entier relatif.
$\sqrt{7}$ est un nombre réel (irrationnel).
2π est un nombre réel (irrationnel).
$4{,}5 \times 10^{-4}$ est un nombre décimal.
$-\frac{7}{9}$ est un nombre rationnel non décimal.
$\frac{617}{8}$ est un nombre décimal.

44 **a)** $2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$.
Arrondi au millième : 2,646 car $\sqrt{7} = 2{,}645\,7\ldots$
b) $-2{,}334 < -\frac{7}{3} < -2{,}333$.
Arrondi au millième : $-2{,}333$ car $-\frac{7}{3} = -2{,}333\,3\ldots$
c) $31{,}006 < \pi^3 < 31{,}007$
Arrondi au millième : 31,006 car $\pi^3 = 31{,}006\,2\ldots$

45 **a)** $2{,}58 < 4-\sqrt{2} < 2{,}59$
Arrondi au centième : car $4-\sqrt{2} = 2{,}585\ldots$
b) $13{,}40 < 3\sqrt{15} + 5 \times \frac{\pi-1}{6} < 13{,}41$
Arrondi au centième : 13,40 car le développement décimal de ce nombre est 13,403…
c) $0{,}37 < \sqrt{\pi-3} < 0{,}38$
Arrondi au centième : 0,38 car $\sqrt{\pi-3} = 0{,}376\ldots$

46 **a)** Non car les fractions qui encadrent π ne sont pas des nombres décimaux.
b) $\frac{22}{7} - \frac{223}{71} \approx 0{,}002$
C'est un encadrement d'amplitude environ 0,002.

47 **a)** Cette valeur est l'arrondi de π à 10^{-4}.
b) Cette valeur permet de connaître l'arrondi de π jusqu'à 10^{-6}.

48 **a)** $\sqrt{3}-3 \approx -1{,}3$
b) $\sqrt{\pi} \approx 1{,}77$
c) $3\pi \approx 9{,}425$
d) $4\sqrt{2} \approx 5{,}66$

49 **a)** Dans le triangle ABH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = AH^2 + BH^2$
$AH^2 = 2^2 - 1^2 = 3$
$AH = \sqrt{3}$ cm
$\sqrt{3}$ est un nombre réel, irrationnel.
b) AH $\approx$ 1,7 cm

50 **a)** $\mathcal{P} = 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$
π est un nombre irrationnel donc 6π est aussi un nombre irrationnel.
b) $\mathcal{P} \approx 18{,}85$ cm.

51 **a)** • Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en C et les droites (AB) et (DE) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

De $\frac{2}{8} = \frac{DE}{5}$, on déduit que $DE = \frac{5}{4}$.

$\frac{5}{4}$ est un nombre décimal.

• Les droites (AF) et (BG) sont sécantes en C et les droites. (AB) et (FG) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CF}{CA} = \frac{CG}{CB} = \frac{FG}{AB}$$

De $\frac{4}{8} = \frac{FG}{5}$, on déduit que $FG = \frac{5}{2}$.

$\frac{5}{2}$ est un nombre décimal.

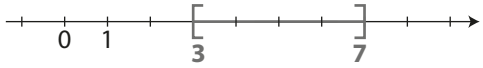
b) L'arrondi au dix-millième de ED est 1,250 0.

52 **(3)** $]2\,;6]$

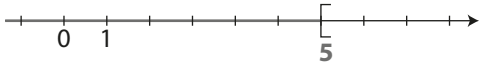
53 **a) (3)** **b) (2)** **c (1)** **d) (1)**

54 **a)** Vraie **b)** Fausse **c)** Vraie **d)** Fausse

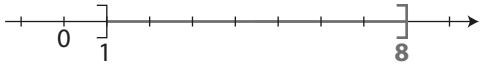
55 **a)** $x \in [3\,;7]$



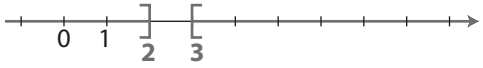
b) $x \in]-\infty\,;5[$



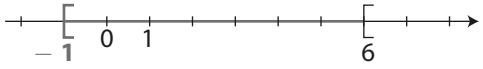
c) $x \in]1\,;8]$



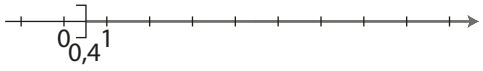
d) $x \in]-\infty\,;2] \cup [3\,;+\infty[$



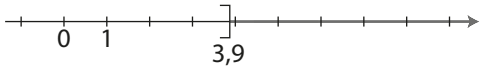
56 **a)** $x \in [-1\,;6[$



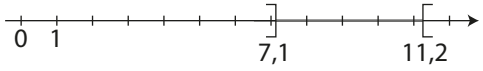
b) $x \in]0{,}4\,;+\infty[$



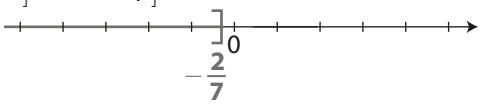
c) $x \in]3{,}9\,;+\infty[$



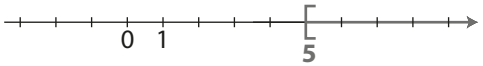
d) $x \in]7{,}1\,;11{,}2[$



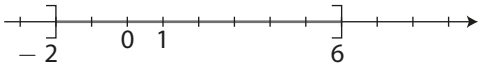
e) $x \in \left]-\infty\,;-\frac{2}{7}\right]$



f) $x \in [5\,;+\infty[$

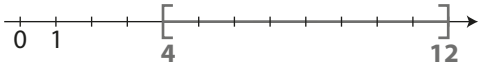


57 **a)** $-2 < x \leqslant 6$

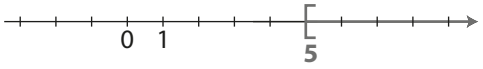


b) $x \leqslant 3$

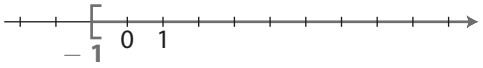
c) $4 \leqslant x \leqslant 12$



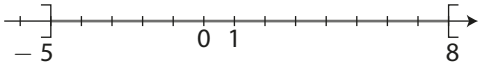
d) $x \geqslant 5$



58 **a)** $x \geqslant -1$

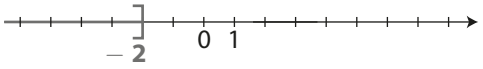


b) $-5 < x < 8$

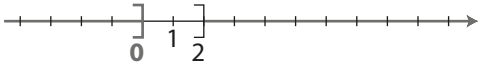


c) $4 < x \leqslant 10{,}5$

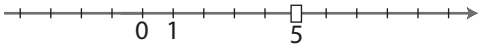
d) $x \leqslant -2$



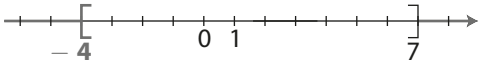
59 **a)** $x \leqslant 0$ ou $x > 2$



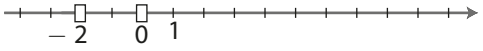
b) $x < 5$ ou $x > 5$



c) $x < -4$ ou $x > 7$



d) $x < -2$ ou $-2 < x < 0$ ou $x > 0$



60 **a)** $]2\,;6[$ **b)** $]3\,;+\infty[$
c) $]-\infty\,;17]$ **d)** $]-\infty\,;-1] \cup [2\,;+\infty[$

61 **a)** $-2{,}5 \in [-3\,;5]$ **b)** $\frac{\pi}{2} \in [-3\,;3[$

c) $7 \notin\,]-6\,;\,-3[$ **d)** $1 \in [1\,;6]$

e) $0 \notin\,]0\,;\,+\infty[$ **f)** $10^1 \notin\,]+\infty\,;0]$

g) $1{,}3 \notin [-5\,;0[\ \cup\ ]2\,;\,+\infty[$

h) $-4 \notin [-3\,;\,+\infty[$

62 **a)** $[8\,;\,+\infty[$ **b)** $[0\,;\,+\infty[$

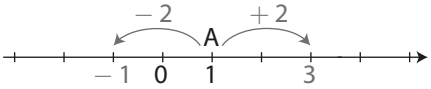
c) $]+\infty\,;\,-4[$ **d)** $]-\pi\,;2\pi[$

e) $]-\infty\,;5[\ \cup\ ]10\,;\,+\infty[$

63 **a)** $\text{OM} = 12$ **b)** $\text{OM} = 2$

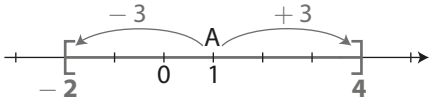
c) $\text{OM} = \sqrt{3} - 1$ (car $1 - \sqrt{3} < 0$)

64 **a)**



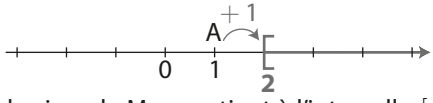
M a pour abscisse -1 ou 3.

b)



L'abscisse de M appartient à l'intervalle $[2\,;4]$.

c)



L'abscisse de M appartient à l'intervalle $[\text{A}\,;\,+\infty[$.

65 **a)** $8{,}3 - 6 = 2{,}3$

b) $0{,}25 - (-0{,}25) = 0{,}5$

c) $-1 - (-3{,}7) = 2{,}7$

66 Maya a tort, la réponse exacte est :

$$\left[\sqrt{2} - (-1) = \sqrt{2} + 1\right]$$

67 **a)** $10 - (-5) = 15$

b) $-\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ donc $-2\sqrt{3} < -2\sqrt{2}$.

La distance cherchée est :

$$-2\sqrt{2} - \left(-\sqrt{12}\right) = \sqrt{12} - 2\sqrt{2}$$

c) $4\pi - (-\pi) = 5\pi$

68 **a)** C'est la distance entre x et 3.

b) C'est la distance entre x et -6.

c) C'est la distance entre 7 et x.

d) C'est la distance entre $-x$ et -9 ou entre x et 9 car $|-9 + x| = |x - 9|$.

69 $\text{AB} = -\frac{1}{2} - (-14) = 13{,}5$

$\text{BD} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$

$\text{BC} = 7 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 7{,}5$

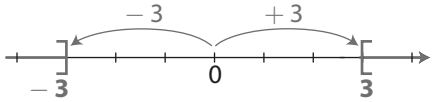
$\text{CD} = 7 - \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$

70 **a)** $|2 + \pi| = 2 + \pi$ car $2 + \pi > 0$.

b) $\left|1 - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - 1$ car $1 - \sqrt{3} < 0$.

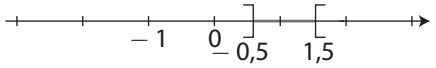
c) $|\pi - 4| = 4 - \pi$ car $\pi - 4 < 0$.

71 **a)**



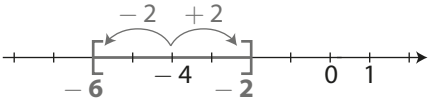
$x \in\,]-\infty\,;\,-3] \cup [3\,;\,+\infty[$

b)



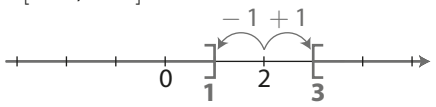
$x \in\,]-0{,}5\,;1{,}5[$

c)



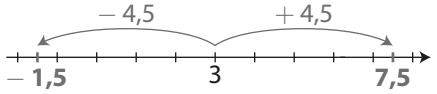
$x \in [-6\,;\,-2]$

d)



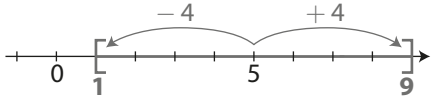
$x \in\,]-\infty\,;1] \cup [3\,;\,+\infty[$

72 **a)**



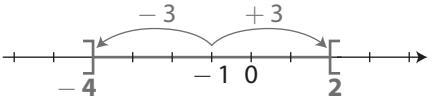
$x \in \{-1{,}5\,;7{,}5\}$

b)



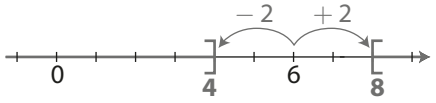
$x \in [1\,;9]$

c)



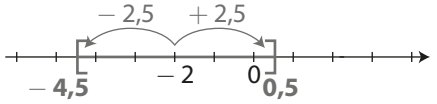
$x \in\,]-4\,;2[$

d)



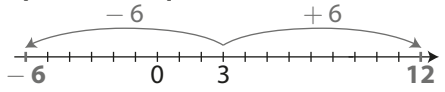
$x \in\,]-\infty\,;4] \cup [8\,;\,+\infty[$

73 **a)**



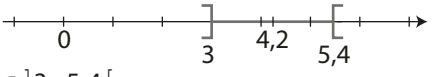
$x \in [-4{,}5\,;\,-0{,}5]$

b)



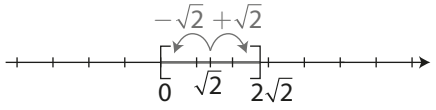
$x \in \{-6\,;\,-12{,}6\}$

c)



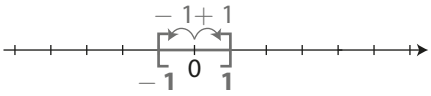
$x \in\,]3\,;5{,}4[$

d)



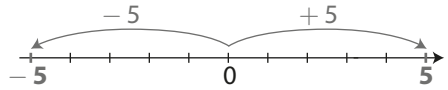
$x \in\,]-\infty\,;0[\ \cup\ \left]2\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$

74 **a)**



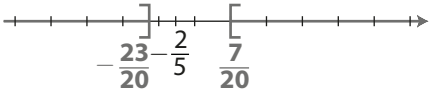
$x \in [-1\,;1]$

b)



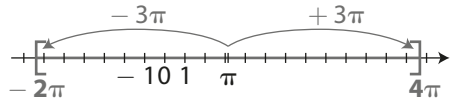
$x \in \{-5\,;5\}$

c)



$x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{23}{20}\right] \cup \left[\dfrac{7}{20}\,;+\infty\right[$

d)



$x \in [-2\pi\,;4\pi]$

75 **a)** $x \in \,]-2\,;4[$ signifie que $|x-\mathbf{1}| < \mathbf{3}$.
b) $x \in [-\mathbf{2}\,;\mathbf{6}]$ signifie que $|x-2| \leqslant 4$.
c) $x \in [-5\,;1]$ signifie que $|x+\mathbf{2}| \leqslant 3$.
d) $x \in \,]-3\,;3[$ signifie que $|x+3| < 6$.
e) $x \in \,]-\infty\,;0{,}5[\ \cup\ ]2\,;+\infty[$ signifie que : $|\boldsymbol{x-1{,}25}| > \mathbf{0{,}75}$
f) $x \in \,]-\infty\,;3] \cup [\mathbf{7}\,;+\infty[$ signifie que : $|x+\mathbf{5}| \geqslant \mathbf{2}$.

76 **a)** $|x-3| \leqslant 4$ **b)** $|x+1| \geqslant 2$
c) $\left|x+\dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{21}{2}$ **d)** $\left|x+\dfrac{13}{2}\right| \geqslant \dfrac{7}{2}$

77 **1.** D **2.** B **3.** C **4.** C **5.** C **6.** C **7.** B

78 **1.** C, D **2.** B, C **3.** B, C **4.** A, B, C, D

79 **1. Vrai.** En effet, $\dfrac{63}{25} = \dfrac{252}{100} = 2{,}52$.
2. Faux. En effet, l'amplitude de cet encadrement est : $3{,}62 - 3{,}60 = 2 \times 10^{-2}$.
3. Faux. En effet, E est l'ensemble $]-\infty\,;4] \cup [4\,;+\infty[$.
4. Vrai. En effet, $-3-2=-5$ et $-3+2=-1$.

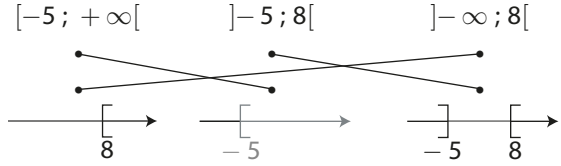
80 $-16{,}75$, $\dfrac{67}{10^3}$ et $\dfrac{7}{40} = \dfrac{7}{2^3 \times 5}$ sont des nombres décimaux.

81 $\dfrac{\pi}{12}$ et $\sqrt{\dfrac{7}{25}} = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$ sont des nombres irrationnels.

82

Amplitude	Encadrement
10^{-1}	$\mathbf{3{,}6} < \sqrt{13} < \mathbf{3{,}7}$
10^{-2}	$\mathbf{3{,}60} < \sqrt{13} < \mathbf{3{,}61}$
10^{-3}	$\mathbf{3{,}605} < \sqrt{13} < \mathbf{3{,}606}$

83



84

La distance entre x et 1 est égale à 3.	La distance entre x et 1 est inférieure ou égale à 3.	La distance entre x et 0 est inférieure ou égale à 3.	La distance entre x et -1 est supérieure ou égale à 3.
$\|x+1\| \geqslant 3$	$\|x-1\| \leqslant 3$	$\|x\| \leqslant 3$	$\|x-1\| = 3$

S'entraîner

86 $\sqrt{43}$ est la solution positive de l'équation $x^2 - 43 = 0$.

```
x ← 6
Tant que x² − 43 < 0
  | x ← x + 0,000 01
Fin Tant que
Afficher x − 0,000 01 et x
```

87 $\sqrt{79}$ est la solution positive de l'équation $x^2 - 79 = 0$.

```
x ← 8
Tant que x² − 79 < 0
  | x ← x + 0,000 001
Fin Tant que
Afficher x − 0,000 001 et x
```

89 **a)** Les 16 premiers chiffres de la partie décimale de π et du nombre rationnel p sont identiques.
b) p et π ont le même arrondi à 10^{-16}, à savoir 3,141 592 653 589 793 2.

90 **a)** En utilisant l'algorithme de l'exercice **88** on obtient : $\dfrac{18\,817}{10\,864} \approx 1{,}732\,050\,810\,014\,727$

b) À la calculatrice, on obtient : $\sqrt{3} \approx 1{,}732\,050\,808$

$\frac{18\,817}{10\,864}$ et $\sqrt{3}$ ont le même arrondi à 10^{-7}, à savoir 1,732 050 8.

91 $82\,589\,933 \approx 30 \times 2\,753\,000$, donc :

$M \approx (2^{30})^{2\,753\,000}$

$M \approx (10^{9})^{2\,753\,000}$

$M \approx (10)^{9\times 2\,753\,000}$

$M \approx 10^{24\,777\,000}$

Un ordre de grandeur de M est donc $10^{24\,777\,000}$

92 $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel non décimal. Son écriture décimale est donc illimitée. On s'intéresse à la partie décimale de $\frac{a}{b}$, elle est obtenue par divisions successives par b.

Comme $\frac{a}{b}$ n'est pas décimal, les restes possibles sont les nombres entiers compris entre 1 et $b-1$.

Après avoir effectué b divisions, d'après le principe de Dirichlet, le reste sera nécessairement un reste déjà rencontré. On peut donc en conclure que la longueur maximum de la période est $b-1$.

93 **1. a)** $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)$ soit $2\frac{p^2}{q^2}$.

Ainsi, $p^2 = 2q^2$.

b) p^2 est un nombre pair.

2. a)

p	0	1	2	3	4
p^2	0	1	4	9	6

p	5	6	7	8	9
p^2	5	6	9	4	1

b) p^2 étant pair, les derniers chiffres possibles pour p sont à 0, 2, 4, 6 et 8.

3.

q	0	1	2	3	4
$2q^2$	0	2	8	8	2

q	5	6	7	8	9
$2q^2$	0	2	8	8	2

4. a) Par lecture des tableaux précédents, on constate que le chiffre des unités de p^2 et $2q^2$ ne peut être que 0.

On en déduit que le dernier chiffre de p est 0 et les derniers chiffres possibles pour q sont 0 ou 5.

b) Si le dernier chiffre de p est 0 et le dernier chiffre de q est 0 ou 5, alors p et q sont divisibles tous les deux par 5 donc, $\frac{p}{q}$ n'est donc pas irréductible. D'où la contradiction avec l'hypothèse de départ.

On en déduit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

94 **1.** $\frac{946\,758}{34\,621} \approx 27{,}344\,350\,489\,2$

2. a) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$\frac{8\,712\,870}{48\,506\,557} \approx 0{,}179\,622\,519\,9$

$\frac{505\,149}{2\,812\,281} \approx 0{,}179\,622\,519\,9$

b) Ces deux nombres ne sont pas égaux. En effet, deux fractions sont égales, alors les produits en croix sont égaux. Or, le chiffre des unités du produit $8\,712\,870 \times 2\,812\,281$ est 0 alors que le chiffre des unités du produit $48\,506\,557 \times 505\,149$ est 3.

95 **a)**

15	11
40	1,36…
70	
4	
…	

$\frac{15}{11} = 1{,}\mathbf{36}3\,6\mathbf{36}\ldots$

b)

22	11
10	3,142 857…
30	
20	
60	
40	
50	
1	
…	

$\frac{22}{7} = 3{,}\mathbf{142\,857}\,142\,857\ldots$

c)

155	198
1550	0,782
1640	
560	
164	
…	

$\frac{155}{198} = 0{,}7\mathbf{82}\,82\mathbf{8\,2}82\ldots$

96 **a)** $100 \times A = 87{,}878\,787\ldots$

b) $100 \times A - 87 = 87{,}878\,787\ldots - 87$

$100 \times A - 87 = 0{,}878\,787$

$100 \times A - 87 = A$

c) On résout l'équation précédente :

$100A - A = 87$

$A = \frac{87}{99}$

Une écriture fractionnaire du nombre A est $\frac{87}{99}$.

d)

```
87÷99
                0.8787878788
```

97 **a)** D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{4} \text{ donc } x = \frac{4}{3}$$

b) • Pour placer $\frac{8}{3}$, on trace à partir de la règle, deux parallèles : une entre le 1 de notre droite et la graduation 3 de la règle ; la seconde partant de la graduation 8 de la règle. Son intersection avec la droite graduée est $\frac{8}{3}$.

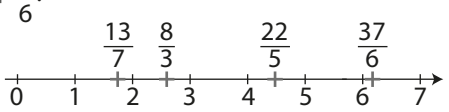
• Pour placer $\frac{13}{7}$, on trace à partir de la règle, deux parallèles : une entre le 1 de notre droite et la graduation 7 de la règle ; la seconde partant de la graduation 13 de la règle. Son intersection avec la droite graduée est $\frac{13}{7}$.

• Pour placer $\frac{22}{5}$, on trace à partir de la règle, deux parallèles : une entre le 1 de notre droite et la graduation 5 de la règle ; la seconde partant de la graduation 22 de la règle. Son intersection avec la droite graduée est $\frac{22}{5}$.

• $\frac{37}{6} = \frac{36+1}{6} = 6 + \frac{1}{6}$

On fait coïncider le 6 de la droite graduée et le 0 de la règle.

Pour obtenir $\frac{1}{6}$, on trace à partir de la règle, deux parallèles : une entre le 7 de notre droite et la graduation 6 de la règle ; la seconde partant de la graduation 1 de la règle. Son intersection avec la droite graduée est $6 + \frac{1}{6}$.



c) $\frac{8}{3}$; $\frac{13}{7}$ et $\frac{37}{6}$ sont des nombres rationnels et $\frac{22}{5}$ est un nombre décimal.

d) $\frac{22}{5}$ est égal à 4,4 aurait pu être placé uniquement avec la règle graduée.

98 **a)** $A \times B = 2 \times 6 \times 10^3 \times 10^{-5}$

$A \times B = 12 \times 10^{-2} = 0{,}12$

Donc $A \times B \in \mathbb{D}$.

b) $\frac{A}{C} = \frac{2}{11} \times \frac{10^3}{10^{-2}} = -\frac{2}{11} \times 10^5$

$\frac{A}{C} = \frac{200\,000}{11}$

Donc $\frac{A}{C} \in \mathbb{Q}$.

c) $\frac{A \times B}{C} = \frac{12 \times 10^{-2}}{-11 \times 10^{-2}} \times \frac{12}{11}$

Donc $\frac{A \times B}{C} \in \mathbb{Q}$.

99 **a)** $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi \times 1{,}74^2 \times 2{,}45$

$\mathcal{V} = 2{,}472\,54\pi \text{ cm}^3$

b) π est irrationnel donc $2{,}472\,54\,\pi$ est un nombre irrationnel.

c) $\mathcal{V} \approx 7{,}8 \text{ cm}^3$

100 **a)** $\mathcal{A} = \pi \times 13^2$

$\mathcal{A} = 169\,\pi \text{ cm}^2$

b) $a = \frac{\mathcal{A}}{6} = \frac{169}{6}\pi \text{ cm}^2$

c) $88 < a < 89$

d) $88{,}4 < a < 88{,}5$ et $88{,}488 < a < 88{,}489$

e) • Arrondi à l'unité : 88.

• Arrondi au dixième : 88,5.

• Arrondi au centième : 88,49.

101 **1.** $4{,}49 \leqslant L \leqslant 4{,}51$ et $2{,}29 \leqslant \ell \leqslant 2{,}31$

2. a) $4{,}49 \times 2{,}29 \leqslant S \leqslant 4{,}51 \times 2{,}31$

soit : $10{,}2821 \leqslant S \leqslant 10{,}4181$

b) On en déduit l'encadrement suivant :

$10{,}28 \text{ cm}^2 \leqslant S \leqslant 10{,}42 \text{ cm}^2$

Cet encadrement décimal a une amplitude de $14 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$.

102 **a)** Dans 60 jours, il y a 1 440 h.

$V = \frac{d}{t}$, soit $d = V \times t$ donc :

$d = 160 \times 10^{-7} \times 1440 = 0{,}023\,04$

Ainsi, un cheveu aura poussé de 2,304 cm au bout de 1 440 h.

Il mesurera alors :

$3{,}7 \text{ cm} + 2{,}304 \text{ cm} = 6{,}004 \text{ cm}$.

b) $6{,}0 \text{ cm} < L < 6{,}1 \text{cm}$

103 **a)** Aire de $\mathcal{D}_2$, en cm^2 : $3 \times \pi \times 4^2 = 48\pi$.

On en déduit que son rayon vérifie :

$\pi r^2 = 48\pi$ soit $r^2 = 48$, c'est-à-dire $r^2 = \sqrt{48}$.

Ainsi, $r = 4\sqrt{3}$ cm.

D'où : $6{,}92 < r < 6{,}93$

b) $r \approx 6{,}9$ cm.

104 **a)** Dans le triangle isocèle, d'après le théorème de Pythagore :

$$OA^2 = 1^2 + 1^2$$

$$OA = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Dans le triangle OAB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$OB^2 = AO^2 + AB^2$$

$$OB^2 = 2 + 1^2$$

$$OB = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Dans le triangle OBC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$OC^2 = BO^2 + CB^2$$
$$OC^2 = 3 + 1^2$$
$$OC = \sqrt{4} \text{ cm}$$

Dans le triangle OCD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$OD^2 = CO^2 + CD^2$$
$$OD^2 = 4 + 1^2$$
$$OD = \sqrt{5} \text{ cm}$$

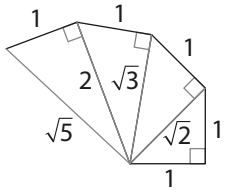
Dans le triangle OED rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$OE^2 = DO^2 + ED^2$$
$$OE^2 = 5 + 1^2$$
$$OE = \sqrt{6} \text{ cm}$$

Dans le triangle OEF rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore :

$$OF^2 = EO^2 + EF^2$$
$$OF^2 = 6 + 1^2$$
$$OF = \sqrt{7} \text{ cm}$$

b)
Avec le compas, on reporte sur la droite graduée $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$. Voir la droite graduée en bas de la page.



105 **a)** $3x + 7 = 2$
$$3x = 2 - 7$$
$$3x = -5$$
$$x = -\frac{5}{3}$$

La solution dans $\mathbb{R}$ est $-\frac{5}{3}$.

b) $-\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ donc la solution dans $\mathbb{Q}$ est $-\frac{5}{3}$.

c) $-\frac{5}{3} \notin \mathbb{D}$ donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{D}$.

106 **a)** • Il n'existe pas de nombre entier entre $\frac{99}{101}$ et $\frac{100}{101}$ car $0 < \frac{99}{101} < 1$ et $0 < \frac{100}{101} < 1$

• $\frac{99}{101} < 0{,}99 < \frac{100}{101}$: 0,99 est un nombre décimal non entier.

• $\frac{99}{101} < \frac{95\pi}{303} < \frac{100}{101}$: $\frac{95\pi}{303}$ est un nombre irrationnel.

b) $-\sqrt{17} < -4 < -\sqrt{15}$: -4 est un nombre relatif.

$-\sqrt{17} < -3{,}9 < -\sqrt{15}$: $-3{,}9$ est un nombre décimal, non entier.

• $-\sqrt{17} < -\sqrt{15{,}8} < -\sqrt{15}$: $-\sqrt{15{,}8}$ est un nombre irrationnel.

107

Inégalités	Ensembles	Valeur absolue
$3 \leqslant x \leqslant 7$	$[\mathbf{3\,;\,7}]$	$\lvert x - \mathbf{5} \rvert \leqslant \mathbf{2}$
$x < \mathbf{1}$ **ou** $x > \mathbf{5}$	$]-\infty\,;1[\ \cup\ ]5\,;+\infty[$	$\lvert x - 3 \rvert > 2$
$-\mathbf{9} < x < -\mathbf{5}$	$]-\mathbf{9}\,;-\mathbf{5}[$	$\lvert x + 7 \rvert < 2$
$x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 4$	$]-\infty\,;\mathbf{2}[\ \cup\ [\mathbf{4}\,;+\infty[$	$\lvert x - \mathbf{3} \rvert \geqslant \mathbf{1}$

108 **a)** $\frac{4{,}35 + 4 + 4{,}05 + 4{,}30 + 4{,}1 + 4{,}1}{6} = \frac{24{,}9}{6}$

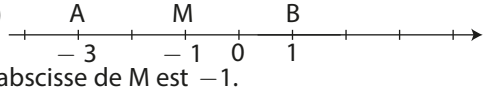
Ainsi $D_m = 4{,}15 \times 10^{-2}$ mm

b) $D \in [4{,}1 \times 10^{-2}\,;\,4{,}2 \times 10^{-2}]$.

109 **1. a)** L'égalité se traduit par $AM = BM$.

b) M est donc le milieu du segment [AB].

c)



L'abscisse de M est -1.

On peut aussi écrire : $x_M = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$.

2. a) C'est le point d'abscisse -7, l'égalité se traduit par $OM = CM$.

M est le milieu de [OC], son abscisse est $-\frac{7}{2}$.

b) D est le point d'abscisse -1, l'égalité se traduit par $BM = DM$.

M est le milieu de [BD], son abscisse est 0.

110 **a)** Entre le père et Rafaël :

$$1{,}77 \text{ m} - 1{,}4 \text{ m} = 0{,}37 \text{ m}$$

Entre le père et Allison :

$$1{,}81 \text{ m} - 1{,}77 \text{ m} = 0{,}04 \text{ m}$$

b) Le point d'abscisse x est à égale distance du point A d'abscisse 1,4 et du point B d'abscisse 1,81.

Ainsi x est l'abscisse du milieu de [AB].

Soit on écrit : $x = \frac{1{,}4 + 1{,}81}{2} = 1{,}605$

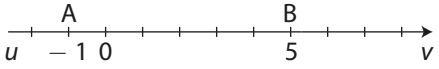
Soit, on écrit :

$$\frac{1{,}81 - 1{,}4}{2} = 0{,}205 \quad \text{et} \quad x = 1{,}4 + 0{,}205 = 1{,}605.$$

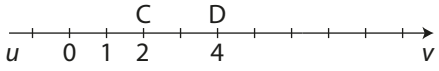
La mère mesure 1,605 m.

111 **a)** $|x + 1| = AM$ et $|x - 3| = BM$

b) On cherche les points M tels que la somme $AM = BM$ soit minimum.

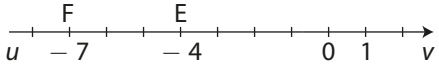


• M appartient au segment $[AB]$.
Alors, $AM + BM = AB = 6$.
• M appartient à la demi-droite $]Au)$.
Alors, $AM + BM = AM + BA + AM = 2AM + AB$,
$AM + BM > AB$.
• M appartient à la demi-droite $]Bv)$.
Alors, $AM + BM = AB + BM + BM = AB + 2BM$,
donc $AM + BM > AB$.
Conclusion : $AM + BM$ est minimum lorsque M appartient au segment $[AB]$, c'est-à-dire lorsque x appartient à l'intervalle $[-1 ; 5]$.
2. a) C'est le point d'abscisse 2 et D est le point d'abscisse 4.
$|x-2| - |x-4| = 1$ s'écrit $CM - DM = 1$.



• M appartient au segment $[CD]$.
$DM = CD - CM$ et l'égalité $CM - DM = 1$ s'écrit alors $2CM - CD = 1$, ce qui est équivalent à $CM = \frac{3}{2}$.
Ainsi, M est le point d'abscisse $2 + \frac{3}{2}$ c'est-à-dire $\frac{7}{2}$.
• M appartient à la demi-droite $]Cu)$.
Alors, $CM < DM$ et donc $CM - DM < 0$.
Donc, il n'existe pas de point M de cette demi-droite tel que $CM - DM = 1$.
• M appartient à la demi-droite $[Dv)$.
$CM - DM = CD = 2$, donc il n'existe pas de point M de cette demi-droite tel que $CM - DM = 1$.
Conclusion : $|x-2| - |x-4| = 1$ équivaut à $x = \frac{7}{2}$.
b) E est le point d'abscisse -4 et F est le point d'abscisse -7.
$|x+4| - |x+7| = 2$ s'écrit :

$$EM - FM = 2.$$



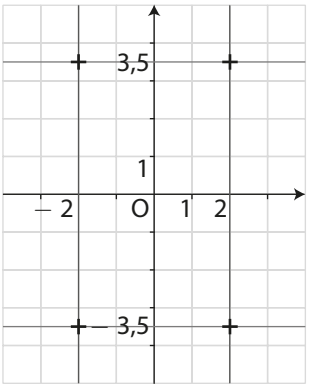
• M appartient au segment $[FE]$.
$FM = FE - EM$, et l'égalité $EM - FM = 2$ s'écrit $2EM - EM = 2$, ce qui est équivalent à $EM = \frac{5}{2}$. Ainsi M est le point d'abscisse $-4 - \frac{5}{2}$ c'est-à-dire $-\frac{13}{2}$.
• M appartient à la demi-droite $]Fu)$.
$EM - FM = EF = 3$, donc il n'existe pas de point de cette demi-droite tel que :

$$EM - FM = 2.$$

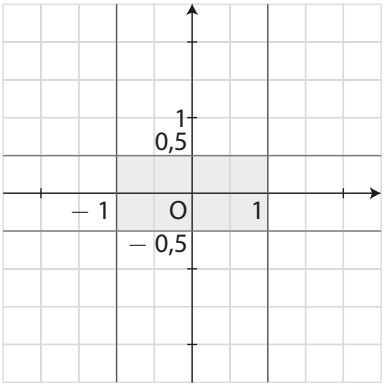
• M appartient à la demi-droite $]Ev)$.
$EM < FM$ donc $EM - FM < 0$ et il n'existe pas de point M de cette demi-droite tel que :

$$EM - FM = 2.$$

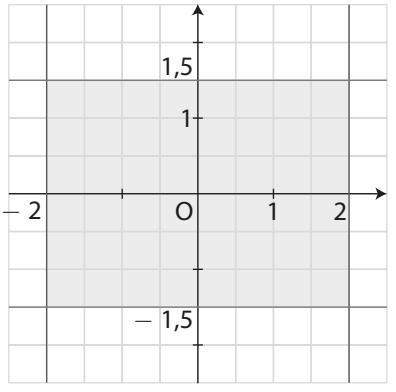
112 **a)** $|x| = 2$ est équivalent à $x = 2$ ou $x = -2$



b) $|y| = 3{,}5$ est équivalent à $y = 3{,}5$ ou $y = -3{,}5$
c) Les points tels que $|x| = 2$ et $|y| = 3{,}5$ sont les quatre points d'intersection des droites tracées précédemment. Ils ont pour coordonnées $(2 ; 3{,}5)$, $(-2 ; 3{,}5)$, $(2 ; -3{,}5)$, $(-2 ; -3{,}5)$.
2. a) L'ensemble des points M cherchés est le rectangle coloré en jaune (frontières comprises).



b) L'ensemble des points M cherchés est le rectangle coloré en jaune (frontières comprises).



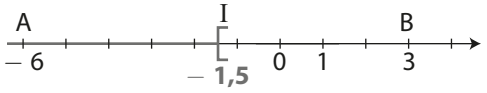
113 La partie colorée est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tel que

$$-1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } -2 \leqslant y \leqslant 2$$

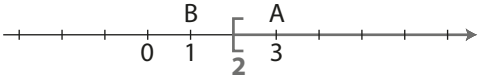
c'est-à-dire tels que :

$$|x-1| \leqslant 2 \text{ et } |y| \leqslant 2.$$

114 **a)** MA $<$ MB s'écrit $|x+6| < |x-3|$.
On note I le milieu du segment [AB] ; l'abscisse de I est $-\frac{3}{2}$.
MA $<$ MB équivaut à M appartient à la demi-droite d'origine I qui contient le point A, origine I exclue.

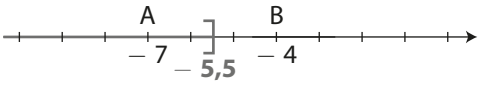


115 **a)**



On cherche les points M d'abscisse x tels que AM $\leqslant$ BM. Ainsi, $x \in [2\,;\,+\infty[$.

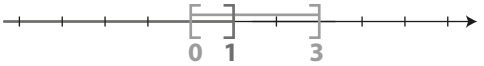
b)



On cherche les points M d'abscisse x tels que AM $\leqslant$ BM. Ainsi, $x \in]-\infty\,;\,-5{,}5]$.

116 **1.** Dans cette phrase, « ou » signifie qu'il faut choisir entre le fromage et le dessert. On ne peut pas prendre les deux.

2. a)



b) $I_1 \cup I_2 =]-\infty\,;3]$,
c) Meï a raison puisque $I_1 \cup I_2 =]-\infty\,;3]$, c'est-à-dire $x \leqslant 3$.
d) Le sens n'est pas le même, puisque x peut être à la fois dans I_1 et I_2 lorsqu'on dit qu'il est dans l'intersection de ces deux ensembles.
3. a) $I_1 \cup I_2 = [-3\,;3[$
b) $I_1 \cup I_2 =]-2\,;\,+\infty[$
c) $I_1 \cup I_2 =]-10\,;8[$

117 **1.**

2. $I_1 \cap I_2 = [-5\,;4]$
3. a) $I_1 \cap I_2 =]-2\,;0[$
b) $I_1 \cap I_2 = \{8\}$
c) $I_1 \cap I_2 = \varnothing$

118 **a)** Vrai. En effet, $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$ avec p, p' entiers relatifs et q, q' entiers naturels non nuls.

$a + b = \frac{pq' + p'q}{qq'}$ donc $a + b \in \mathbb{Q}$.

b) Vrai. En effet, avec $a = 1{,}1$ et $b = -0{,}9$.
$a + b = -2$ et $a + b \in \mathbb{Z}$.

Organiser son raisonnement

119 **a)** $10c - 9 = 9{,}999\,9\ldots - 9$
$10c - 9 = 0{,}999\,9\ldots$
$10c - 9 = c$

b) On résout l'équation précédente :
$10c - c = 9$
$9c = 9$
$c = 1$

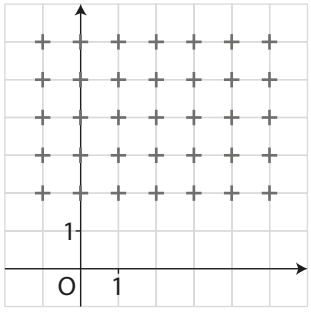
On a ainsi démontré l'égalité $1 = 9{,}999\,9\ldots$

120 On note $a = 0{,}491919\,1\ldots$
$10a = 4{,}919\,191\ldots$
$10a - 4 = 0{,}919\,191\ldots$
$100(10a - 4) = 91{,}919\,191\ldots$
$100(10a - 4) - 91 = 0{,}919\,191\ldots$
$100(10a - 4) - 91 = 10a - 4$
On résout cette équation :
$1000a - 400 - 91 = 10a - 4$
$990a = 487$
$a = \frac{487}{990}$

121 **a)** $x \in [3\,;7]$
$1 \leqslant |y - 1| \leqslant 3$ is like :
$1 \leqslant y - 1 \leqslant 3$ or $-3 \leqslant y - 1 \leqslant -1$
We can write :
$y \in [-2\,;0] \cup [2\,;4]$

b) $\left|a - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{2}$

122 $x \in \mathbb{Z}$ et $|x - 2| \leqslant 3$ équivaut à $x \in \mathbb{Z}$ et $-1 \leqslant x \leqslant 5$ soit $x \in \{-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$
$y \in \mathbb{N}$ et $|y + 0{,}5| > 2$ équivaut à $y \in \mathbb{N}$ et ($y < -2{,}5$ ou $y > 1{,}5$)
Soit $y \in \mathbb{N}$ et $y \geqslant 2$.
Cela donne l'ensemble de points représentés ci-dessous :



123 **a)** L'équation est équivalente à :

$$AM + BM = 8$$

b) Si M est un point de [AB], alors la somme $AM + BM$ est constante et égale à AB. Or $AB = 6$ donc M n'est pas un point de [AB].

c) Si M appartient à la demi-droite d'origine A ne contenant pas B :

$$BM = AB + AM$$

L'équation s'écrit alors :

$$2AM + AB = 8$$

Ce qui est équivalent à : $AM = \dfrac{8-6}{2}$

$$AM = 1$$
$$x = 1 + 4$$
$$x = 5$$

Si M appartient à la demi-droite d'origine B ne contenant pas A :

$$AM = AB + BM$$

L'équation s'écrit alors :

$$2BM + AB = 8$$

Ce qui est équivalent à : $BM = \dfrac{8-6}{2}$

$BM = 1$

$x = -2 - 1$

$x = -3$

• L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\,;5\}$.

124 **a)** On complète le cadre rouge par :

$$u = (u + a / u) / 2.$$

b)

```
>>> Racine(7,10)
2.6457513110645907
```

c)

```
1 from math import *
2
3 def Racine(a,p):
4     u=1
5     v=(u+a/u)/2
6     while abs(u-v)>=p:
7         u=v
8         v=(v+a/v)/2
9     return v
```

125 **a)** Dans le triangle ABC : $AC \leqslant AB + BC$.

Dans le triangle ACD : $AC \leqslant AD + DC$.

Dans le triangle ABD : $BD \leqslant AB + AD$.

Dans le triangle BCD : $BD \leqslant BC + CD$.

Par addition membre à membre, on obtient :

$$2AC + 2BD \leqslant 2(AB + BC + AD + CD)$$

Or le périmètre $\mathcal{P}$ du quadrilatère ABCD est :

$$AB + BC + AD + CD.$$

Après simplification par 2, on obtient :

$$AC + BD \leqslant \mathcal{P}$$

b) $|x + y| = |x - (-y)| = MN$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$MN \leqslant OM + ON$$

Or $OM = |x|$ et $ON = |-y| = |y|$

On en déduit que : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

126 **1er cas :** $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

$|x| + |y| = 1$ s'écrit $x + y = 1$

Équation réduite de la droite : $y = 1 - x$

2e cas : $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$

$|x| + |y| = 1$ s'écrit $x - y = 1$

Équation réduite de la droite : $y = x - 1$

3e cas : $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$

$|x| + |y| = 1$ s'écrit $-x + y = 1$

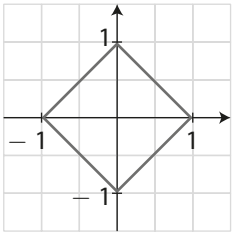
Équation réduite de la droite : $y = 1 + x$

4e cas : $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$

$|x| + |y| = 1$ s'écrit $-x - y = 1$

Équation réduite de la droite : $y = -x - 1$

Conclusion : l'ensemble cherché est représenté ci-dessous en rouge.



127 On affiche la valeur approchée de $\sqrt{351}$ fournie par la calculatrice : 18,734 994.

On saisit ensuite : Ans – 18,734 994 pour afficher la différence entre la valeur de $\sqrt{351}$ avec laquelle travaille la calculatrice et le nombre affiché.

```
√351
                18.734994
Ans-18.734994
               -4.8048×10⁻⁰⁹
```

Ainsi, $\sqrt{351} \approx 18{,}734\,994 - 4{,}804\,8 \times 10^{-9}$.

On effectue cette opération à la main et on obtient :

$$\sqrt{351} \approx 18{,}734\,993\,995\,195\,2$$

Un encadrement d'amplitude 10^{-9} de $\sqrt{351}$ est :

$$18{,}734\,993\,995 < \sqrt{351} < 18{,}734\,993\,996$$

128 **1. a)** $MT = |x|$ et $CT = |x - 30|$.

b) Le message indique que :

$2MT + 3CT = 65$ c'est-à-dire :

$2|x| + 3|x - 30| = 65$

2. Si $x \leqslant 0$, alors $MT = -x$ et $CT = 30 - x$

On en déduit que :

$2|x| + 3|x - 30| = 65$ s'écrit

$2(-x) + 3(30 - x) = 65$

	$\lvert x\rvert$	$\lvert x-30\rvert$	$2\lvert x\rvert + 3\lvert x-30\rvert = 65$
$x \leqslant 0$	$-x$	$30 - x$	$2(-x) + 3(30 - x) = 65$
$0 \leqslant x \leqslant 30$	x	$30 - x$	$2x + 3(30 - x) = 65$
$x \geqslant 30$	x	$x - 30$	$2x + 3(x - 30) = 65$

3. a) $2(-x)+3(30-x)=65$

$$-2x+90-3x=65$$
$$-5x=65-90$$
$$x=\frac{-25}{-5}$$
$$x=5$$

b) La solution trouvée est positive alors que x est négatif : donc l'emplacement du trésor n'a pas une abscisse négative.

4. • $2x+3(30-x)=65$

$$2x+90-3x=65$$
$$-x=65-90$$
$$x=25$$

$0 \leqslant 25 \leqslant 30$ donc 25 peut être l'abscisse de l'emplacement du trésor.

• $2x+3(x-30)=65$

$$2x+3x-90=65$$
$$5x=65+90$$
$$x=\frac{155}{5}$$
$$x=31$$

$31 \geqslant 30$ donc 31 peut être l'abscisse de l'emplacement du trésor.

Le trésor se situe à l'abscisse 25 ou à l'abscisse 31.

129 Pour illustrer ces propriétés, il suffit de choisir deux nombres quelconques (réels pour la première et rationnels pour la seconde) et de trouver un nombre compris entre ces nombres vérifiant la propriété demandée.

a) On prend deux nombres réels quelconques par exemple π et 3,15.

3,145 est un nombre rationnel et $\pi < 3{,}145 < 3{,}15$.

b) On prend deux nombres rationnels, par exemple $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{7}$, le nombre réel $\frac{\pi}{8}$ vérifie : $\frac{1}{3} < \frac{\pi}{8} < \frac{3}{7}$

c) $x=\sqrt{2}$ et $y=5\pi$

Pour $n=12$, on a : $nx > y$

130 On peut simplifier le tapis roulé en cylindre à des cercles concentriques de rayons augmentant de 1 cm à chaque fois (épaisseur du tapis).

La longueur du tapis peut donc être approché par la somme des périmètres de ces cercles.

Le premier cercle a pour rayon 1 cm soit 10^{-2}m, et le dernier a pour rayon 0,5 m soit 50×10^{-2}m.

La longueur L du tapis, en m, est donc environ :

$$L=2\pi\times10^{2}+2\pi\times2\times10^{-2}+2\pi\times3\times10^{-2}+\ldots+2\pi\times50\times10^{-2}$$
$$=2\pi\times10^{-2}(1+2+3+\ldots+50)$$

Pour calculer la somme entre parenthèses, on utilise la fonction ci-dessous écrite en langage Python :

```
def Somme(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        s=s+i
    return s
```

```
>>> Somme(50)
1275
```

Ainsi la longueur approchée du tapis est $2\pi\times10^{-2}\times1275$ m soit environ 80 m.

Remarque : pour calculer $S=1+2+\ldots+80$ on peut aussi procéder ainsi :

$$S=1+2+\ldots+50$$
$$S=50+49+\ldots+1$$
$$2S=\underbrace{51+51+\ldots+51}_{50\text{ fois}}$$

Soit $S=\frac{50\times51}{2}=1\,275$.

131 L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\left]\frac{-\sqrt{485}-1}{2};\frac{-\sqrt{401}-1}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{401}-1}{2};\frac{\sqrt{485}-1}{2}\right[.$$

Les nombres du premier intervalle sont tous négatifs.

$\frac{\sqrt{401}-1}{2}\approx9{,}51$ et $\frac{\sqrt{485}-1}{2}\approx10{,}51$

Il n'y a qu'une seule solution entière positive, donc $\mathcal{S}=\{10\}$.

132 $\frac{2\,020}{2\,019}=\frac{2\,019+1}{2\,019}=1+\frac{1}{2\,019}$

D'après les règles :

$\frac{1}{2\,019}$ et $1+\frac{1}{2\,019}$ sont de couleurs différentes ;

$\frac{1}{2\,019}$ et 2 019 sont de la même couleur.

Or comme x et $x+1$ sont de couleurs différentes et que 1 est colorié en rouge :

– tous les nombres pairs sont coloriés en noir

– tous les nombres impairs sont coloriés en rouge.

2 019 est impair, donc il est en rouge, de même pour $\frac{1}{2\,019}$ et donc $\frac{2\,020}{2\,019}$ est colorié en noir.

133 **D.** En effet, $\frac{2-5\times8}{5+5\times2}=\frac{-38}{15}$; ce nombre est un rationnel non décimal.

2. B. En effet,

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=-4.$$

3. D. En effet, $\frac{223}{71}\approx3{,}140\,8$.

4. A. En effet, $2\pi x+5\pi=0$ équivaut à $x=-\frac{5}{2}$.

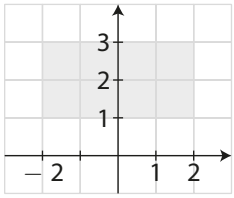
5. C. En effet, $I\cap J=[-1\,;0[$ et $(I\cap J)\cap K=]0{,}5\,;0[$.

6. C. En effet, $I\cap K=[-15\,;2]$

et $(I\cap K)\cup J=[-0{,}5\,;+\infty[$.

7. B. En effet, $|x-1| \geqslant 3$ équivaut à $x \leqslant 1-3$ ou $x \geqslant 1+3$ c'est-à-dire $x \in]-\infty\,;\,-2]$ ou $x \in [4\,;\,+\infty[$.

8. D. En effet, voici l'ensemble représenté.



9. D. En effet, $1000a = 238{,}238\,238\ldots$ et $1000a - 238 = a$.

Ainsi $999a = 238$ et $\dfrac{238}{999}$.

10. D. En effet, on cherche les points M d'abscisse x tels que MA $\leqslant$ MB.

Ainsi, $x \in]-\infty\,;\,2]$.

Exploiter ses compétences

134 Le Doc. 2 permet de connaître le rayon de son orbite :

$$r = 35\,786 \text{ km} + \frac{1{,}275 \times 10^4}{2} \text{ km}$$

$$r = 42\,161 \text{km} = 4{,}216\,1 \times 10^7 \text{m}$$

D'après le Doc. 2 :

$$v = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}98 \times 10^{24}}{4{,}216\,1 \times 10^7}}$$

$$v = \sqrt{\frac{39{,}886\,6}{4{,}216\,1} \times 10^6}$$

$$v \approx 3\,075{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le temps que met la Terre pour tourner sur elle-même est :

$$23 \times 3\,600 \text{ s} + 56 \times 60 \text{ s} + 4 = 86\,164 \text{ s}$$

On garde le nombre de chiffres significatifs des données.

Pendant que la Terre fait un tour sur elle-même, le satellite parcourt environ :

$$3\,075{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \times 86\,164 \text{ s} \approx 2{,}65 \times 10^8 \text{m}$$

La longueur de l'équateur correspond à :

$$1{,}275\pi \times 10^7 \text{m} \approx 4{,}01 \times 10^7 \text{m}$$

Le satellite a donc fait un tour complet de la Terre.

135 Un globule rouge a la forme d'un cylindre, son aire totale $\mathscr{A}$ est la somme de l'aire des deux disques et de l'aire de la surface latérale qui est un rectangle.

$$\mathscr{A} = 2 \times \pi r^2 + d\pi \times h$$

$$\mathscr{A} = 2 \times \pi \left(\frac{7 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 + 7 \times 10^{-3} \times \pi \times 3 \times 10^{-3}$$

$$\mathscr{A} = 24{,}5\pi \times 10^{-6} + 21\pi \times 10^{-6}$$

$$\mathscr{A} = 45{,}5\pi \times 10^{-6} \text{mm}^2$$

Nombre de globules rouges approximatifs dans le corps humain :

$5{,}5 \text{ L} = 5{,}5 \text{ dm}^3 = 5{,}5 \times 10^6 \text{mm}^3$

$5{,}5 \times 10^6 \times 4{,}5 \times 10^6 = 24{,}75 \times 10^{12}$

Le corps humain contient donc environ $24{,}75 \times 10^{12}$ globules rouges.

L'aire totale $\mathscr{A}$ des globules rouges du corps humain est environ :

$\mathscr{A}' = 45{,}5\pi \times 10^{-6} \times 24{,}75 \times 10^{12}$

$\mathscr{A}' \approx 1126{,}125\pi \times 10^6$

$\mathscr{A}' \approx 3{,}537\,8 \times 10^9 \text{mm}^2$

$\mathscr{A}' \approx 3{,}5 \times 10^3 \text{ m}^2$

Avec le nombre des chiffres significatifs des données, l'aire totale de tous les globules rouges contenus dans le corps humain est environ $3\,500 \text{ m}^2$.

136 On note $\bar{v}$ la moyenne des volumes mesurés.

La condition 1 se traduit par $|\bar{v} - 200| \leqslant 2$.

Avec le menu Statistiques de la calculatrice, on obtient :

```
1 variable
x̄      =199.685
Σx     =39937
Σx²    =7.9753×10^06
σx     =1.61578928
sx     =1.61984396
n      =200
```

Ainsi $\bar{v} = 199{,}685$ mL

Et $|200 - 199{,}685| = 0{,}315$

La condition 1 est bien vérifiée.

La condition 2 est $|v - 200| \leqslant 2$ pour au moins 70 % des bouteilles du lot.

$|v - 200| \leqslant 2$ est équivalent à $v \in [198\,;\,202]$.

Nombre de bouteilles du lot vérifiant cette condition :

$n = 16 + 10 + 18 + 35 + 45 + 10 + 16 + 10 + 6$

$n = 166$

Proportion de bouteilles vérifiant la seconde condition :

$\dfrac{166}{200} = 83\ \%$

La condition 2 est vérifiée.

Les deux conditions de la charte qualité étant vérifiée, le contrôle qualité est positif.

137 **1re condition :** $d \geqslant 5 \times 10^{11}$

À partir du Doc. 1, on écrit les distances sous la forme $a \times 10^{11}$.

Jupiter : $7{,}783 \times 10^{11}$.

Mars : $2{,}279\,4 \times 10^{11}$.

Mercure : $0{,}579\,1 \times 10^{11}$.

Neptune : $45{,}05 \times 10^{11}$.

Terre : $1{,}496 \times 10^{11}$.

Saturne : $14{,}236 \times 10^{11}$.

Uranus : $28{,}67 \times 10^{11}$.

Vénus : $1{,}082 \times 10^{11}$.

On en conclut que la planète cherchée se trouve parmi : Jupiter, Neptune, Saturne ou Uranus.

2e condition : $|D - 30\,000| \leqslant 2{,}5 \times 10^4$

Cette condition est équivalente à

$D \in [5\,000 ; 55\,000]$, ou $D \in [0{,}5 \times 10^4 ; 5{,}5 \times 10^4]$

On cherche pour les 4 planètes vérifiant la 1re condition, celles qui vérifient la 2e condition.

Jupiter : $14{,}3 \times 10^4 > 5{,}5 \times 10^4$

Neptune : $49 \times 10^3 = 4{,}9 \times 10^4$

Saturne : $12 \times 10^4 > 5{,}5 \times 10^4$

Uranus : $51 \times 10^3 > 5{,}1 \times 10^4$

Parmi les 4 planètes, la 2e condition est vérifiée par Neptune et Uranus.

On cherche maintenant laquelle de ces deux planètes vérifie aussi la 3e condition.

$m \leqslant 10^{26}$.

Neptune a pour masse, kg :

$102{,}43 \times 10^{24} = 1{,}024\,3 \times 10^{26}$

Or $1{,}024\,3 \times 10^{26} > 10^{26}$

Uranus a pour masse, en kg :

$86{,}810 \times 10^{24} = 0{,}868\,1 \times 10^{26}$

Et $0{,}868\,1 \times 10^{26} < 10^{26}$

On peut donc conclure que la planète répondant à l'énigme d'Aïcha est Uranus.

2 Utiliser le calcul littéral

Découvrir

1 Calculs avec les racines carrées

1 **a)** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{8}{9{,}81}}$ soit $T \approx 5{,}7$ s

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{67}{9{,}81}}$ soit $T \approx 16{,}4$ s

La période du pendule de Foucault est près de trois fois plus longue.

2 **a)** $L = \dfrac{T^2 g}{4\pi^2}$

b) $L = \dfrac{10^2 \times 9{,}81}{4\pi^2}$ soit $L \approx 24$ m

2 Différentes écritures d'une expression

1 Le disque comprenant le bassin et le couloir extérieur a pour rayon $r + x$; son aire $\pi(r+x)^2$.
Le bassin a pour rayon r ; son aire est donc πr^2.
L'aire du bassin est donc $\mathscr{A} = \pi(r+x)^2 - \pi r^2$.

2 **a)** $\mathscr{A} = \pi(r+x)^2 - \pi r^2$
$\mathscr{A} = \pi r^2 + 2\pi r x + \pi x^2 - \pi r^2 = 2\pi r x + \pi x^2$
b) Pour $x = 10$, $\mathscr{A} = 20\pi r + 100\pi$.
Ainsi, $\mathscr{A} > 100\pi$ et par conséquent $\mathscr{A} > 314$.

3 **a)** $\mathscr{A} = 2\pi r x + \pi x^2 = \pi x(2r + x)$
b) Pour $x = r$, $\mathscr{A} = \pi r(2r + r) = 3\pi r^2$
L'aire du couloir de marche est trois fois l'aire du bassin.
c) Pour $x = (\sqrt{2} - 1)r$,
$\mathscr{A} = \pi(\sqrt{2} - 1)r(2r + (\sqrt{2} - 1)r)$
soit $\mathscr{A} = \pi(\sqrt{2} - 1)r \times r(1 + \sqrt{2}) = \pi r^2$.
L'aire du couloir de marche est égale à l'aire du bassin.

Acquérir des automatismes

3 **a)** $A = \dfrac{5^8 \times 5^{-6}}{5^3 \times 5^{-10}} = \dfrac{5^2}{5^{-7}} = 5^9$.
b) $B = (2 \times 5)^2 \times (5^2)^{-3} \times (2^2 \times 5)^4$
$B = 2^2 \times 5^2 \times 5^{-6} \times 2^8 \times 5^4 = 2^{10}$
c) $C = 75 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = 75 \times 2^2 = 300 = 3 \times 10^2$
d) $D = 10^3 \times 5^{-6} \times 2^{-15} = 10^3 \times (5 \times 2)^{-6} \times 2^{-9}$
$D = 10^{-3} \times 0{,}001953125$
$D = 10^{-3} \times 10^{-3} \times 1{,}953125$
$D = 1{,}953125 \times 10^{-6}$

4 **a)** $A = \sqrt{4} \times \sqrt{10} \times \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{4 \times 10 \times 14}{5}}$
$A = \sqrt{4 \times 2 \times 14} = \sqrt{112}$
b) $B = \sqrt{162} = \sqrt{2 \times 81} = \sqrt{2}\sqrt{81} = 9\sqrt{2}$
$C = \sqrt{1250} = \sqrt{2 \times 625} = 25\sqrt{2}$

5 $D = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{20}$
$D = \sqrt{14\,400} = 120$

8 **a)** • $6y = 1 + 4x$, c'est-à-dire $y = \dfrac{1 + 4x}{6}$.
On peut aussi écrire $y = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3}x$.
• $4x = 6y - 1$, c'est-à-dire $x = \dfrac{6y - 1}{4}$.
On peut aussi écrire $x = \dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{4}$.
b) $V = c^2 h$, c'est-à-dire $c^2 = \dfrac{V}{h}$, $c = \sqrt{\dfrac{V}{h}}$ car V et h sont positifs $(h \neq 0)$.

9 **a)** $V = x^2 + 6x + 9 - 4x^2 - 4x - 1$
$V = -3x^2 + 2x + 8$
b) $V = [(x + 3) + (2x + 1)][(x + 3) - (2x + 1)]$
$V = (3x + 4)(-x + 2)$

c) $C = 25x^2 + 10x + 1 - 4x^2 - 4x - 1$
$C = 21x^2 + 6x$
d) $C = 3x(7x + 2)$

12 **a)** L'aire C correspond à l'aire du disque de rayon $r + 3$, c'est-à-dire $\pi(r+3)^2$, à laquelle on enlève l'aire du disque de rayon r. On retrouve donc bien la formule donnée.
b) $C = \pi[(r+3)^2 - r^2]$
$C = \pi(r + 3 + r)(r + 3 - r)$
$C = 3\pi(2r + 3)$
Pour $r = 1{,}5$, $C = 3\pi(2 \times 1{,}5 + 3)$
$C = 3\pi \times 6 = 18\pi$

13 **1.** $R = \dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{6}{x} = \dfrac{x(5x-2)}{3x} - \dfrac{18}{3x}$
$R = \dfrac{5x^2 - 2x - 18}{3x}$
2. a) $2k + 2$ est le nombre pair qui suit $2k$.
b) $\dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2k+2} = \dfrac{2k+2}{2k(2k+2)} - \dfrac{2k}{2k(2k+2)}$
$\dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2k+2} = \dfrac{2k+2-2k}{2k(2k+2)} = \dfrac{2}{2k(2k+2)}$
Donc cette différence est bien le double de l'inverse du produit de $2k$ et $2k + 2$.

14 **a)** 10^8 **b)** 10^{15} **c)** 10^2 **d)** 10^8

15 Julia a raison. En effet, pour tout nombre entier relatif n, $(7^{n+1})^2 \times 7^{-2n} = 7^{2n+2} \times 7^{-2n} = 7^2 = 49$

16 Mathias a tort. En effet, $10^6 + 10^3 = 1001000$. Le résultat est compris strictement entre 10^6 et 10^7.

17 **a) (2)** car c'est la seule puissance de 10 supérieure à 10 000. En effet, $10^6 \times 10^3 = 10^9$.
b) (1) car c'est la seule puissance de 4 supérieure à10. En effet, 2^2 : $2^{-2} = 4^2 = 16$.

18 **a)** Pour $x = 5$, $A = 2 \times 5^2 - 5 \times 5 + 2 = 27$.
$x = -5$, $A = 2 \times (-5)^2 - 5 \times (-5) + 2 = 77$.
b) 27 est une puissance de $3 : 27 = 3^3$.
77 n'est pas une puissance de 3 puisque $3^4 = 81$.

19 **a)** Pour $x = 2$, $B = -5 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = -17$
Pour $x = -\dfrac{8}{5}$, $B = -5\left(-\dfrac{8}{5}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{8}{5}\right) - 1 = -17$
b) On remarque que B prend la même valeur pour $x = 2$ et $x = -\dfrac{8}{5}$.

20 $C = \dfrac{3^{-10} \times 9^2}{3^5} = 3^{-10} \times 3^4 \times 3^{-5} = 3^{-11}$

21 $D = 22^6 \times \dfrac{33^3}{8 \times 6^3} = (2 \times 11)^6 \times \dfrac{(3 \times 11)^3}{2^3 \times (2 \times 3)^3}$
$D = 2^6 \times 11^6 \times 3^3 \times 11^3 \times 2^{-3} \times 2^{-3} \times 3^{-3} = 11^9$

22 $E = 12^2 \times 9^7 \times 18^{-5} = (2^2 \times 3)^2 \times (3^2)^7 \times (2 \times 3^2)^{-5}$
$E = 2^4 \times 3^2 \times 3^{14} \times 2^{-5} \times 3^{-10} = 2^{-1} \times 3^6$

23 $F = 15^3 \times \dfrac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2} = (3 \times 5)^3 \times \dfrac{3^{-2}}{5^2} \times (3^2 \times 5)^{-2}$
$F = 3^3 \times 5^3 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times 3^{-4} \times 5^{-2} = 3^{-3} \times 5^{-1}$

24 **a)** $G = 4^3 \times 9^{-2} = 2^6 \times 3^{-4}$
$H = 6^3 \times 18^{-2} = 2^3 \times 3^3 \times 2^{-2} \times 3^{-4} = 2^1 \times 3^{-1}$
b) $\dfrac{G}{H} = 2^6 \times 3^{-4} \times 2^{-1} \times 3^1 = 2^5 \times 3^{-3}$

25 **a)** 382 millions de mètres.
b) $3{,}82 \times 10^8$

26 **a)** 3×10^5 km · s^{-1}
b) $d = 3 \times 10^5 \times 3\,600 \times 24 \times 365{,}25$
$d = 9{,}467\,28 \times 10^{12}$ km
c) $d' = 9{,}467\,28 \times 10^{12} \times 4{,}2$ km
$d' = 3{,}976\,257\,6 \times 10^{13}$ km

27 $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$

28 A = 4 B = 3 C = 4 D = 7
B et le plus petit et D le plus grand des quatre nombres.

29 $E = \sqrt{100} - (-10)^2 = 10 - 100 = -90$
Nadim a raison en affirmant que E est négatif.

30 **a)** $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Réponse **(1)**
b) $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$. Réponse **(2)**

31 $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ est un nombre entier
$\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$ est un nombre entier
$\sqrt{6} \times \sqrt{13} = \sqrt{78}$ n'est pas un nombre entier
$\sqrt{0{,}2} \times \sqrt{500} = \sqrt{100} = 10$ est un nombre entier

32 **a)** Vrai. En effet, le triple de $\sqrt{5}$ est :
$3 \times \sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$.
b) Faux. En effet, la moitié de $\sqrt{18}$ est :
$\dfrac{\sqrt{18}}{2} = \sqrt{\dfrac{18}{4}} = \sqrt{4{,}5}$ (et non $\sqrt{9}$).

c) Vrai. En effet, le double du produit de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ est : $2\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{4\times2\times7}=\sqrt{56}$

33 **a)** $7\sqrt{5}=\sqrt{49\times5}=\sqrt{245}$
b) $2\sqrt{3}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{12}$
c) $\dfrac{\sqrt{50}}{5}=\sqrt{\dfrac{50}{25}}=\sqrt{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2}=\sqrt{\dfrac{12}{4}}=\sqrt{3}$

34 **a)** $\sqrt{32}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
b) $\sqrt{50}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$
$\sqrt{72}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$
c) On en déduit :
$3\sqrt{32}-12\sqrt{50}+8\sqrt{72}=12\sqrt{2}-60\sqrt{2}+48\sqrt{2}=0$

35 **a)** $\sqrt{300}=\sqrt{100}\times\sqrt{3}=10\sqrt{3}$
$\sqrt{108}=\sqrt{36}\times\sqrt{3}=6\sqrt{3}$
$\sqrt{192}=\sqrt{64}\times\sqrt{3}=8\sqrt{3}$
b) $B=\sqrt{300}-\sqrt{108}-\sqrt{192}$
$B=10\sqrt{3}-6\sqrt{3}-8\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$

36 $\sqrt{288}=\sqrt{144}\times\sqrt{2}=12\sqrt{2}$
$\sqrt{720}=\sqrt{144}\times\sqrt{5}=12\sqrt{5}$
donc $\sqrt{288}+\sqrt{720}=12(\sqrt{5}+\sqrt{5})$

37 **a)** $\dfrac{40}{\sqrt{8}}=\dfrac{40\times\sqrt{\mathbf{8}}}{\sqrt{8}\times\sqrt{\mathbf{8}}}=\dfrac{40\times\sqrt{\mathbf{8}}}{8}=5\sqrt{\mathbf{8}}$
b) $\dfrac{42}{\sqrt{6}}=\dfrac{42\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{42\times\sqrt{6}}{6}=7\sqrt{6}$
$\dfrac{35}{\sqrt{7}}=\dfrac{35\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{35\times\sqrt{7}}{7}=5\sqrt{7}$
$\dfrac{300}{\sqrt{10}}=\dfrac{300\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\dfrac{300\times\sqrt{10}}{10}=30\sqrt{10}$

38 $A=(5+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$
$A=\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{5}(5-3)$
$A=\sqrt{5}\times2=2\sqrt{5}$
$B=(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-1)$
$B=\sqrt{50}-\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{2}$
$B=5\sqrt{2}-\sqrt{5}+4\sqrt{5}-\sqrt{2}$
$B=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

39 $AB=\sqrt{200}-\sqrt{98}=10\sqrt{2}-7\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
$BC=\dfrac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}}-\sqrt{8}=\sqrt{50}-2\sqrt{2}=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$
ABCD est un rectangle dont deux côtés consécutifs sont de même longueur, donc c'est un carré.
Son aire est : $AB^2=3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=18.$

40 **a)** Dans le triangle HTC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
$TC^2=a^2+(2a)^2=5a^2$
donc $TC=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}\times\sqrt{a^2}=a\sqrt{5}$ car $a>0$.
b) Si $a=\sqrt{5}$, la longueur TC est égale à 5.

41 **a)** Si $2x+3y=6$, alors $2x=6-3y$ et $x=3-1{,}5y$. Réponse **(2)**.
b) Si $2x+3y=6$, alors $3y=6-2x$ et $y=2-\dfrac{2}{3}x$.
Réponse **(1)**.

42 On sait que le périmètre est 12 mais aussi $2L+2\ell$. Ainsi, $L+\ell=6$ c'est-à-dire $L=6-\ell$ soit $\ell=6-L$.

43 Le côté du carré d'aire A mesure $\sqrt{A}$. On double cette longueur : le côté du nouveau carré mesure $2\sqrt{A}$. Le nouveau carré a pour aire $(2\sqrt{A})^2=4A$

44 Si $8x+y=10$, alors $y=10-8x$.
De même, $x=\dfrac{10-x}{8}$, c'est-à-dire $x=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{8}y$.

45 Si $y=-0{,}5x+0{,}25$, alors $0{,}5x=0{,}25-y$, c'est-à-dire, $x=0{,}5-2y$

46 **a)** Si $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$, alors $3V=\pi r^2h$ soit $\dfrac{3V}{\pi r^2}=h$.
b) Si $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$, alors $3V=\pi r^2h$ et $\dfrac{3V}{\pi h}=r^2$
Donc $r=\sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ car $r>0$.

47 **a)** $V=c^3$
b) On double la longueur c ; le nouveau cube a un volume de : $(2c)^3=8c^3=8V$.

48 **a)** Si $F=G\dfrac{m_Am_B}{d^2}$, alors $\dfrac{Fd^2}{m_Am_B}=G$: c'est une constante.
b) $d^2=\dfrac{Gm_Am_B}{F}$ donc $d=\sqrt{\dfrac{Gm_Am_B}{F}}$ car $d>0$.

49 **a)** Pour tout nombre réel
$$x,\ 4(-3+2x)=-12+8x.$$
Réponse **(3)**.
b) Pour tout nombre réel x, $(1+x)(1-x)=1-x^2$.
Réponse **(2)**.

50 **a)** Pour tout nombre réel x,
$$9x+30=3(3x+10)$$
Réponse **(2)**.
b) Pour tout nombre réel x, $x^2-16=(x+4)(x-4)$
Réponse **(3)**.

51 Laura a tort. En effet, pour $x = 2$:
$(2x-3)(x-1) = (4-3)\times(2-1) = 1$
alors que $2x^2 + 3 = 2\times 2^2 + 3 = 11$.

52 Pour tout nombre réel x,
$A = (x+2)x - 5(x+2) = (x+2)(x-5)$.
Bastien a donc raison.
Ilyès a tort puisque A s'annule pour $x = 5$ ce qui n'est pas le cas de l'expression $2(x-3)$ qu'il propose.

53 Pour tout nombre réel x,
a) $A = 8(-2x+9) = -16x + 72$
b) $B = (x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6$
$B = x^2 - x - 6$
c) $C = (-3x+7)(4x-1) = -12x^2 + 3x + 28x - 7$
$C = -12x^2 + 31x - 7$
d) $D = (-3x+1)(-5x+2) = 15x^2 - 6x - 5x + 2$
$D = 15x^2 - 11x + 2$

54 **a)** On obtient tour à tour,
$5x$; $5x+2$; $(5x+2)\times x$; $(5x+2)\times x - 2x$.
En développant et en réduisant,
$(5x+2)\times x - 2x = 5x^2 + 2x - 2x = 5x^2$
b) $5x^2 = 80$, c'est-à-dire $x^2 = 16$: les deux nombres sont -4 et 4.

55 **a)** Pour tout nombre réel x,
$A = (2x+5)(x-2) + 4(2{,}5x - 10x)$
$A = 2x^2 - 4x + 5x - 10 + 10 - 40x$
$A = 2x^2 - 39x$
Pour tout nombre réel x,
b) $B = (-x+5)(-6x+1) - 3x(2x-10)$
$B = 6x^2 - x - 30x + 5 - 6x^2 + 30x$
$B = -x + 5$

56 Pour tout nombre réel x,
$A = -2(3x-4)(-5+7x)$
$A = -2(-15x + 21x^2 + 20 - 28x)$
$A = -2(21x^2 - 43x + 20)$
$A = -42x^2 + 86x - 40$

57 Pour tout nombre réel x,
a) $A = 28x - 21 = 7\times 4x - 7\times 3 = 7(4x-3)$
b) $B = -4x^2 + 18x$
$B = 2x\times(-2x) + 2x\times 9 = 2x(-2x+9)$
c) $C = x(x-1) + 2(x-1)$
$C = (x+2)(x-1)$
d) $D = -x(x+3) + 4(x+3)$
$D = (-x+4)(x+3)$

58 Pour tout nombre réel x,
a) $-6x - 9 = -3\times 2x + (-3)\times 3 = -3(2x+3)$
b) $A = (2x+3)^2 + (-6x-9)$
$A = (2x+3)\times(2x+3) + (2x+3)\times(-3)$
$A = (2x+3)\times(2x+3-3)$
$A = (2x+3)\times 2x$

59 **a)** Pour tout nombre réel x,
$T(x) = (2x+5)^2 + 2x + 5$
$2x + 5 = (2x+5)\times 1$, donc
$T(x) = (2x+5)\times(2x+5) + (2x+5)\times 1$
b) Pour tout nombre réel x,
$T(x) = (2x+5)\times(2x+5) + (2x+5)\times 1$
$T(x) = (2x+5)\times(2x+5+1)$
$T(x) = (2x+5)\times(2x+6)$
$T(x) = (2x+5)\times 2(x+3)$
$T(x) = 2(2x+5)(x+3)$

60 **a)** Pour tout nombre réel x,
$S(x) = 2(4x-1)^2 - 4x + 1$
$S(x) = 2\times(4x-1)\times(4x-1) + (-1)\times(4x-1)$
$S(x) = (4x-1)(8x-2) + (4x-1)\times(-1)$
b) Pour tout nombre réel x,
$S(x) = (4x-1)(8x-2) + (4x-1)\times(-1)$
$S(x) = (4x-1)(8x-2-1)$
$S(x) = (4x-1)(8x-3)$

61 **a)** L'aire de AEFG est donnée par $AE\times AG$. Pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 8$,
$AE = AB - EB = 16 - 2x$ et $AG = AD - GD = 8 - x$
Donc $\mathscr{A}(x) = (16-2x)(8-x)$
b) Pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 8$,
$\mathscr{A}(x) = 128 - 16x - 16x + 2x^2$
$\mathscr{A}(x) = 2x^2 - 32x + 128$
c) Pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 8$,
$2(x-8)^2 = 2(x^2 - 16x + 64)$
$2(x-8)^2 = 2x^2 - 32x + 128$
$2(x-8)^2 = \mathscr{A}(x)$
d) Avec la forme factorisée, pour
$x = 4$, $\mathscr{A}(x) = 2(4-8)^2 = 2\times 16 = 32$

62 Pour tout nombre réel x,
a) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$
b) $(-2x+4)^2 = 4x^2 + 2x\times(-2x)\times 4 + 16$
$(-2x+4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$
c) $(x-10)^2 = x^2 - 20x + 100$
d) $(2x-10)^2 = 4x^2 - 40x + 100$
e) $(-10x-2)^2 = 100x^2 - 2\times(-10x)\times 2 + 4$
$(-10x-2)^2 = 100x^2 + 40x + 4$
f) $(10x-2)(10x+2) = 100x^2 - 4$

63 **a)** Pour tout nombre réel x,

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

b) Pour calculer 99^2, on utilise la forme développée précédente pour $x = 100$.

$99^2 = 100^2 - 2 \times 100 + 1$

$99^2 = 10\,000 - 200 + 1$

$99^2 = 9\,801$

64 **a)** Pour tout nombre réel x,

$$(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1.$$

b) Pour calculer 301^2, on utilise la forme développée précédente pour $x = 100$.

$301^2 = 9 \times 100^2 + 6 \times 100 + 1$

$301^2 = 90\,000 + 600 + 1$

$301^2 = 90\,601$

65 Pour tout nombre réel x,

$(3x-2)^2 + (x+6)^2 = 9x^2 - 12x + 4 + x^2 + 12x + 36$

$(3x-2)^2 + (x+6)^2 = 10x^2 + 40$

66 **a)** $y^2 - 10y + 25 = (y-5)^2$

b) $y^2 + 10y + 25 = (y+5)^2$

c) $y^2 - 49 = (y+7)(y-7)$

d) $4x^2 - 36 = (2x+6)(2x-6) = 4(x+3)(x-3)$

e) $36x^2 - 12x + 1 = (6x-1)^2$

f) $20 - 5x^2 = 5(4 - x^2) = 5(2+x)(2-x)$

67 **a)** On obtient tour à tour :

$$x+3\,;(x+3)^2;(x+3)^2 - 9.$$

Pour tout nombre réel x,

$(x+3)^2 - 9 = x^2 + 6x + 9 - 9 = x^2 + 6x = x(x+6)$

b) On calcule avec la forme factorisée.

Pour $x = 4$, $x(x+6) = 4 \times 10 = 40$.

68 $A = (3x-4)^2 - (8-2x)^2$

$A = [(3x-4) + (8-2x)][(3x-4) - (8-2x)]$

$A = (3x - 4 + 8 - 2x)(3x - 4 - 8 - 2x)$

$A = (x+4)(5x-12)$

69 **a)** L'aire de AEFD est la somme des aires du carré ABCD et du rectangle BEFC.

Pour tout nombre réel $x > 0$, $\mathcal{A} = x^2 + 2x$.

b) Pour tout nombre réel $x > 0$,

$(x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$

c) On cherche un réel positif x tel que $(x+1)^2 - 1 = 48$.

$x+1$ est donc un nombre réel positif de carré 49.

On trouve donc $x + 1 = 7$ soit $x = 6$.

On en déduit que le rectangle AEFD a pour dimensions AE = 8 cm et AD = 6 cm.

70 **a)** Tableau d'évolution de y si $x = 3$

Ligne	y
1	26
2	676
3	100
4	4

À la fin de l'exécution de l'algorithme, on obtient $y = 4$.

b) Tableau d'évolution de y si $x = -5$

Ligne	y
1	-38
2	1 444
3	-156
4	4

À la fin de l'exécution de l'algorithme, on obtient $y = 4$.

c) Tableau d'évolution de y pour tout nombre réel x.

Ligne	y
1	$2 + 8x$
2	$(2+8x)^2 = 4 + 32x + 64x^2$
3	$4 + 32x + 64x^2 - 64x^2 = 4 + 32x$
4	$4 + 32x - 32x = 4$

L'affirmation de Clémence est exacte.

71 **a)** $11^2 - 10^2 = 21$

$12^2 - 11^2 = 23$

$38^2 - 37^2 = 75$

$100^2 - 99^2 = 199$

b) n désigne un nombre entier naturel quelconque.

L'entier immédiatement supérieur est $n + 1$.

La différence de leurs carrés est :

$(n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n)$

$(n+1)^2 - n^2 = 1 \times (n+1+n) = n+1+n$

Cynthia a raison : on obtient toujours la somme des deux nombres.

c) La somme $n+1+n$ est nécessairement impaire pour tout nombre entier naturel n. L'équation $2n+1 = 2\,018$ n'a donc pas de solution entière (la seule solution réelle est 1008,5).

72 Pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

Réponse **(2)**.

73 Pour tout nombre réel $x \neq 4$,

$$\frac{2}{x-4} - \frac{x}{2x-8} = \frac{2 \times 2}{2x-8} - \frac{x}{2x-8}$$

$$\frac{2}{x-4} - \frac{x}{2x-8} = \frac{4-x}{2x-8} = \frac{4-x}{-2(4-x)} = -\frac{1}{2}$$

L'affirmation est donc vraie.

74 Pour tout nombre réel $x \neq -1$,

$$5 - \frac{4}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x+1} - \frac{4}{x+1} = \frac{5x+1}{x+1}$$

Judith a donc raison.

En revanche, Vincent a tort : en effet pour $x = 9$, $\frac{5x+1}{x+1} - \frac{46}{10} = 4{,}6$ ce qui est différent de 6.

75 **a)** Pour tout nombre réel x,

$$\frac{x}{7} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{21} + \frac{7x}{21} = \frac{10x}{21}$$

b) Pour tout nombre réel x,

$$\frac{4x}{7} + \frac{2x+1}{3} = \frac{12x}{21} + \frac{7(2x+1)}{21} = \frac{26x+7}{21}$$

c) Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$\frac{4}{x} + \frac{2x+1}{3} = \frac{12}{3x} + \frac{x(2x+1)}{3x} = \frac{2x^2+x+12}{3x}$$

d) Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

76 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$\frac{4}{x} + \frac{2x+1}{3x} = \frac{12}{3x} + \frac{2x+1}{3x} = \frac{2x+13}{3x}$$

b) Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$3x - \frac{2x+1}{3x} = \frac{9x^2}{3x} - \frac{2x+1}{3x}$$

$$3x - \frac{2x+1}{3x} = \frac{9x^2-(2x+1)}{3x}$$

$$3x - \frac{2x+1}{3x} = \frac{9x^2-2x-1}{3x}$$

77 **a)** L'aire de ABCD est $\text{AB} \times \text{CD}$.

Ainsi, $x \times \text{BC} = 1$, soit $\text{BC} = \frac{1}{x}$.

b) Le périmètre de ABCD est $2\text{AB} \times 2\text{BC}$. On obtient ainsi $p(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2x^2+2}{x}$.

c) Si $x = 10^4$, alors :

$$p(x) = 2 \times 10^4 + 2 \times \frac{1}{10^4} = 2 \times 10^4 + 2 \times 10^{-4}.$$

On obtient donc 2×10^4 avec une erreur inférieure au millième.

d) Pour obtenir un rectangle d'aire 1 et de périmètre 200,02, il suffit de choisir $x = 100$.

Les dimensions du rectangle sont alors 100 et 0,01.

78 **1.** D **2.** C **3.** C **4.** B **5.** C

79 **1.** C, D **2.** A, D **3.** A, B **4.** C, D **5.** A, C, D

80 **1. Faux.** En effet, si l'on triple les dimensions L et ℓ d'un rectangle, alors son aire $\mathcal{A}$ devient :

$\mathcal{A}' = (3\text{L}) \times (3\ell) = 9\text{L} \times \ell = 9\mathcal{A}$

2. Faux. En effet, $2^0 + 2^0 = 1 + 1 = 2$ et $2^{0+0} = 2^0 = 1$.

3. Vrai. En effet,

$9^{5-n} \times 3^{2n-6} = 9^5 \times 9^{-n} \times (3^2)^n \times 3^{-6}$

$9^{5-n} \times 3^{2n-6} = 9^5 \times 9^{-n} \times 9^n \times 3^{-6} = 81$

4. Faux. En effet, pour $x = 0$,

$(3x-2)^2 = 4$ et $(2x-3)^2 = 9$.

5. Vrai. En effet,

$$\frac{4x+10}{2x} = \frac{2(2x+5)}{2x} = \frac{2x+5}{x}$$

et $2 + \frac{5}{x} = \frac{2x+5}{x}$.

81 **a)** Tableau complété

a	$\sqrt{a^2}$	$-a$	L'égalité qui convient est …
8	$\sqrt{8^2} = 8$	-8	$\sqrt{a^2} = -a$
-6	$\sqrt{(-6)^2} = \mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	$\sqrt{\boldsymbol{a^2}} = -\boldsymbol{a}$
1,44	$\sqrt{1{,}44^2} = \mathbf{1{,}44}$	$\mathbf{-1{,}44}$	$\sqrt{\boldsymbol{a^2}} = -\boldsymbol{a}$
$-\frac{1}{4}$	$\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\boldsymbol{a^2}} = -\boldsymbol{a}$

b) Si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$

Si $a \leqslant 0$, alors $\sqrt{a^2} = -a$

82 **a)** $v = \frac{d}{t}$: on multiplie chaque membre de l'égalité par t et on obtient $v \times \boldsymbol{t} = d$.

$v \times t = d$: on divise chaque membre de l'égalité par v et on obtient $t = \boldsymbol{\frac{d}{v}}$.

b) $\text{P} = \text{RI}^2$: on divise chaque membre de l'égalité par $\mathbf{R}$ et on obtient $\text{I}^2 = \mathbf{\frac{P}{R}}$.

$\text{I}^2 = \frac{\text{P}}{\text{R}}$ avec $\frac{\text{P}}{\text{R}}$ et I positifs : on prend la racine carrée de chaque membre et on obtient $\text{I} = \sqrt{\frac{\text{P}}{\text{R}}}$.

83 Pour tout nombre réel x,

a) $\text{S}(x) = (16x^2 - \mathbf{40}x + 25) - (\mathbf{9}x^2 - \mathbf{24}x + 16)$

b) $\text{S}(x) = 16x^2 - 40x + 25 - 9x^2 + 24x - 16$

c) $\text{S}(x) = 7x^2 - 16x + 9$

84 Pour tout nombre réel x,

a) $\text{R}(x) = (5x-2)(x+3) + x(5x-2)$

$\text{R}(x) = (5x-2)[(x+3)+x]$

$\text{R}(x) = (5x-2)(2x+3)$

b) Pour tout nombre réel x,

$\text{S}(x) = (8x-1)(2x+3) + 8x - 1$

$\text{S}(x) = (8x-1)(2x+3) + (8x-1) \times 1$

$\text{S}(x) = (8x-1)(2x+4)$

S'entraîner

86 **a)**

$n \leftarrow 0$
$Ep \leftarrow 0{,}2$
Tant que $Ep \leqslant 3{,}81 \times 10^{11}$
  $n \leftarrow n+1$
  $Ep \leftarrow Ep \times 2$
Fin Tant que
Afficher n

b)

```
def Plis(hauteur):
    n=0
    Ep=0.2
    while Ep<=hauteur:
        n=n+1
        Ep=Ep*2
    return n
```

Cette fonction renvoie $n = 41$.

87 **a)**

$t \leftarrow 0$
NbCell $\leftarrow 1$
Tant que NbCell $\leqslant 10^9$
  $t \leftarrow t+1$
  NbCell $\leftarrow$ NbCell $\times 2$
Fin Tant que

b)

```
def MultiCell(seuil):
    NbCell=1
    t=0
    while NbCell<=seuil:
        t=t+1
        NbCell=NbCell*2
    return t
```

```
>>> MultiCell(10**9)
30
```

On trouve que 30 min sont nécessaires pour que le nombre de cellules dépasse un milliard.

89 **1. b)** On conjecture que le triangle AEF est rectangle en E lorsque $x = 16$.

2. a) D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABF rectangle en B :

$$AF^2 = BA^2 + BF^2 = 20^2 + 16{,}8^2 = 682{,}24$$

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ECF rectangle en C :

$$EF^2 = CE^2 + CF^2 = x^2 + 3{,}2^2 = x^2 + 10{,}24$$

b) D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ADE rectangle en D :

$$EA^2 = DE^2 + DA^2 = (20 - x)^2 + 20^2$$

c) Si $x = 16$,
alors $EF^2 = 16^2 + 10{,}24 = 266{,}24$
et $EA^2 = (20 - 16) + 20^2 = 416$.

On constate que $AF^2 = EF^2 + AE^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en E.

Remarque : ce triangle est aussi rectangle en E lorsque $x = 4$.

90 **1. b)** On conjecture que le triangle AEF est équilatéral si $EC = 0{,}73$.

2. a) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CEF rectangle en C :

$$EF^2 = CE^2 + CF^2 = 2x^2.$$

b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BEA rectangle en B :

$$EA^2 = AB^2 + BE^2 = 1^2 + (1 - x)^2 = x^2 - 2x + 2.$$

c) Les côtés [EA] et [AF] ont la même longueur. Ainsi AEF est équilatéral si, et seulement si, $EA = EF$.
Si $x = \sqrt{3} - 1$, alors
$EF^2 = 2(\sqrt{3} - 1)^2 = 2(3 - 2\sqrt{3} + 1) = 8 - 4\sqrt{3}$
$EA^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 - 2(\sqrt{3} + 1) + 2$
$EA^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} + 2 + 2 = 8 - 4\sqrt{3}$
On constate que $EA^2 = EF^2$ et comme les longueurs EA et EF sont positives, $EA = EF$. Le triangle AEF est équilatéral.

d) Ce résultat est cohérent avec la conjecture car $\sqrt{3} - 1 \approx 0{,}73$.

91 Pour tous nombres réels a, b et c,
$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2$
$(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \times c + c^2$
$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

92 **a)** Pour tous nombres réels a et b,
$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$
$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$
$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b) En remplaçant b par $-b$, il vient :
$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2 \times (-b) + 3a \times (-b)^2 + (-b)^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

93 **a)** Pour tous nombres réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$,
$a + b \geqslant 0$ et par définition de la racine carrée, $\sqrt{a + b}$ est le nombre réel positif carrée $a + b$.
Donc $(\sqrt{a + b})^2 = a + b$.

b) Pour tous nombres réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$,
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a} \times \sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

c) Si $a > 0$ et $b > 0$, alors $ab > 0$ et $2\sqrt{ab} > 0$.
Ainsi $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a + b})^2$.

On en déduit que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ car si ces deux nombres positifs étaient égaux, ils auraient alors le même carré.

94 **a)** $(a+b)^2-(a-b)^2$ est égal à
$a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$
c'est-à-dire $a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$
Ainsi, $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$
b) $(a+b)^2=(a-b)^2$ équivaut à :
$(a+b)^2-(a-b)^2=0$ c'est-à-dire $4ab=0$
Autrement dit, $(a+b)^2=(a-b)^2$ si, et seulement si, $a=0$ *ou* $b=0$.

95 **a)** $S=\dfrac{2^2\times3^3\times4^4\times5^5\times6^6}{60''}$
$S=\dfrac{2^2\times3^3\times(2^2)^4\times5^5\times(2\times3)^6}{(2^2\times3\times5)''}$
$S=2^{2+6+8-2n}\times3^{3+6-n}\times5^{5-n}$
$S=2^{16-2n}\times3^{9-n}\times5^{5-n}$
b) S serait une puissance de 2 si, et seulement si, les deux exposants $9-n$ et $5-n$ étaient tous les deux nuls, ce qui est impossible puisque les deux équations $9-n=0$ et $5-n=0$ ont des solutions différentes.

96 **a)** La face ABCD est un carré. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B,
$AC^2=AB^2+BC^2=2x^2$.
Donc $AC=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\sqrt{x^2}=x\sqrt{2}$ car $x>0$.
b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACG rectangle en C,
$AG^2=AC^2+CG^2=2x^2+x^2=3x^2$.
Donc $AG=\sqrt{3x^2}=\sqrt{3}\sqrt{x^2}=x\sqrt{3}$ car $x>0$.
c) Si $AG=3$, alors $x\sqrt{3}=3$ et $x=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.
Le volume en cube, en cm^3, est donné par :
$x^3=\sqrt{3}^3=\sqrt{3}^2\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
L'aire de la surface extérieure, cm^3, est donné par :
$6x^2=6\sqrt{3}^2=6\times3=18$.

97 **a)** $FP^2=(\sqrt{a}-1)^2=\sqrt{a}^2-2\sqrt{a}+1$
$=a-2\sqrt{a}+1$
$PS^2=(\sqrt{a}+1)^2=\sqrt{a}^2+2\sqrt{a}+1=a+2\sqrt{a}+1$
Donc $FP^2+PS^2=2a+2$
$FS^2=\sqrt{2a+2}^2=2a+2$
On constate que $FP^2+PS^2=FS^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle FPS est rectangle en P.
b) L'aire de FPS est donnée par :
$\dfrac{1}{2}FP\times PS=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}$.
c) Si $a=49$, alors l'aire de FPS vaut $\dfrac{49}{2}-\dfrac{1}{2}=24$.
L'aire est aussi donnée par :
$\dfrac{1}{2}FS\times PH=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\times49+2}\times PH=5\times PH$.
Donc $5PH=24$ et $PH=\dfrac{24}{5}=4{,}8$.

98 **a)** Pour tout nombre réel x,
$A=3x+3+(10x+10)(x-2)$
$A=3(x+1)+10(x+1)(x-2)$
b) Pour tout nombre réel x,
$A=(x+1)[3+10(x-2)]$
$A=(x+1)(3+10x-20)$
$A=(x+1)(10x-17)$

99 **a)** Pour tout nombre réel x,
$B=8x-6-(4x-3)^2$
$B=2(4x-3)-(4x-3)(4x-3)$
$B=(4x-3)[2-(4x-3)]$
$B=(4x-3)(2-4x+3)$
$B=(4x-3)(5-4x)$

100 **a)** Pour tout nombre réel x,
$(15x-6)^2=[3(5x-2)]^2=9(5x-2)^2$.
b) Pour tout nombre réel x,
$C=(15x-6)^2+(10x-4)(3x+2)$
$C=9(5x-2)(5x-2)+2(5x-2)(3x+2)$
$C=(5x-2)[9(5x-2)+2(3x+2)]$
$C=(5x-2)(45x-18+6x+4)$
$C=(5x-2)(51x-14)$

101 Pour tout nombre réel x,
$E=(x-3)^2-16+(x+1)(x+2)$
$E=(x-3-4)(x-3+4)+(x+1)(x+2)$
$E=(x-7)(x+1)+(x+1)(x+2)$
$E=(x+1)(x-7+x+2)$
$E=(x+1)(2x-5)$

102 Pour tout nombre réel x,
$A=x-1+(x-1)^2+x^2-1$
$A=(x-1)\times1+(x-1)(x-1)+(x-1)(x+1)$
$A=(x-1)(1+x-1+x+1)$
$A=(x-1)(2x-1)$

103 **a)** Pour tout nombre réel x,
$F=(30x-5)(3x+1)+(2x-8)^2+6x^2-3x-58$
$F=90x^2+30x-15x-5+4x^2-32x+64+6x^2-3x-58$
$F=100x^2-20x+1$

b) Pour tout nombre réel x, $F = (10x-1)^2$

104 On saisit dans le cadre rouge :
a) Tant que $5^n \leqslant 10^6$
b) Tant que $0{,}8^n \geqslant 0{,}001$
2. Cas du 1. a)

```
def Seuil(s):
    n=0
    while 5**n<=s:
        n=n+1
    return n
```

```
>>> Seuil(10**6)
9
```

Cas du 1. b)

```
def Seuil2(s):
    n=0
    while 0.8**n>=s:
        n=n+1
    return n
```

```
>>> Seuil2(0.001)
31
```

105 Par lecture dans le tableau,
a) $0{,}9'' \leqslant 0{,}01$ si, et seulement si, $n \geqslant 44$.
Donc la plus petite valeur de n telle que $0{,}9^{2n} \leqslant 0{,}01$ est $n = 22$.
b) $0{,}9'' < 0{,}012$ si, et seulement si, $n \geqslant 42$.
Donc la plus petite valeur de n telle que $0{,}9^{5n-1} < 0{,}012$ est la plus petite solution entière de l'inéquation
$5n - 1 \geqslant 42$, c'est-à-dire $n = 9$.
c) $0{,}9^{-n} \geqslant 100$ si, et seulement si, $0{,}9^{12} \leqslant 0{,}01$.
Donc la plus petite valeur de n telle que $0{,}9^{-n} \geqslant 100$ est $n = 44$.

106 **a)** Pour $x = -10$:
• algorithme 1 :
$A = -32, B = 12$ et $y = 880$;
• algorithme 2 :
$C = -80, D = -11$ et $y = 880$.
b) Pour tout nombre réel x,
• algorithme 1 : $y = (3x-2)^2 - (2-x)^2$;
• algorithme 2 : $y = 8x(x-1)$.
Or, pour tout nombre réel x,
$(3x-2)^2 - (2-x)^2$ est égal à
$9x^2 - 12x + 4 - 4 + 4x - x^2$
$(3x-2)^2 - (2-x)^2 = 8x^2 - 8x = 8x(x-1)$
Donc la conjecture est vraie.

107 **a)** $5F - 9C = 160$ donc $5F = 160 + 9C$ et $F = 32 + 1{,}8C$.
b) Si $C = 0$, alors $F = 32$. L'eau gèle à 32°F.
c) Si $C = 9$, alors $F = 32 + 1{,}8 \times 9 = 48{,}2$. La température maximum à Carcassonne était donc supérieure à celle de Sacramento.
Il a fait plus froid à Sacramento.

108 **a)** Dans le triangle équilatéral SVN, la médiane [SI] et la hauteur issue de S sont confondues. Donc le triangle VIS est rectangle en I.
b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle VIS rectangle en I,

$$SI^2 = SV^2 - VI^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4}$$

Donc $SI = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ car $x > 0$.
c) L'aire SVN est donnée par $\frac{1}{2}SI \times VN$,
c'est-à-dire $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \times x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
d) $\mathscr{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ donc $\frac{4\mathscr{A}}{\sqrt{3}} = x^2$. Comme $\mathscr{A}$ et x sont deux nombre positifs, $x = \sqrt{\frac{4\mathscr{A}}{\sqrt{3}}}$.

109 **a)** $V = \pi r^2 h$
b) En augmentant le rayon de 20 %, on obtient un nouveau rayon de 1,2r. Le volume est alors :

$$V = (1{,}2r)^2 h = \pi \times 1{,}44r^2 h = 1{,}44V,$$

En divisant la hauteur h par 1,44, il retrouvera alors le même volume.
c) $\frac{1}{1{,}44} \approx 0{,}694$ et $0{,}694 = 1 - 0{,}306$.
Donc l'exploitant doit réduire la hauteur de la canette d'environ 30,6 % pour conserver le même volume.

110 **a)** **Faux.** En effet, si l'écartement x est triplé, alors l'énergie est : $0{,}5k \times (3x)^2 = 0{,}5k \times 9x^2 = 9E$ et donc l'énergie est multipliée par 9.
b) **Faux.** En effet, si la raideur k est divisée par 2 et que l'écartement x est doublé, alors l'énergie est :

$$0{,}5\frac{k}{2}(2x)^2 = 0{,}5\frac{k}{2} \times 4x^2 = 2E$$

et elle est doublée.
c) **Vrai.** En effet, à l'écartement x fixe, l'énergie est bien proportionnelle à la raideur et un coefficient de proportionnalité est la valeur fixe $0{,}5x^2$.

111 **a)** Pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 4$, $CE = 4 - x$ et $CG = x$. L'aire de EFCG est donc donnée par :

$$\mathscr{A}(x) = x(4-x).$$

b) Pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 4$,

$\mathcal{A}(x) - 4 = x(4-x) - 4.$

$\mathcal{A}(x) - 4 = 4x - x^2 - 4$

$\mathcal{A}(x) - 4 = -(x^2 - 4x + 4)$

$\mathcal{A}(x) - 4 = -(x-2)^2$

c) Pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 4$,

$$\mathcal{A}(x) = 4 - (x-2)^2$$

Comme un carré est toujours positif ou nul, on en déduit que $(x-2)^2 \leqslant 0$ puis que $\mathcal{A}(x) \leqslant 4$.

La conjecture d'Anita est vraie.

112 **a)** $AC = BC - 4 = h - 4$

b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A,

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = h^2 - (h-4)^2$

$AB^2 = h^2 - (h^2 - 8h + 16)$

$AB^2 = 8h - 16$

c) $AB^2 = 8h - 16$

$8h = AB^2 + 16$

$h = \frac{1}{8}AB^2 + 2 = 0{,}125 \times AB^2 + 2$

d) Si $AB = 2{,}5$ cm, alors

$BC = h = 0{,}125 \times 2{,}5^2 + 2 = 8{,}78125$

et $AC = h - 4 = 4{,}78125$.

Le triangle rectangle ABC a pour dimension :

$$AB = 2{,}5 \text{ cm},\ AC \approx 4{,}8 \text{ cm},\ BC \approx 8{,}8 \text{ cm}$$

113 **a)** Si x négatif, alors l'algorithme ne renvoie pas un y positif.

On recherche donc $x \geqslant 0$ tel que $(x+1)^2 + 4 = 13$, c'est-à-dire tel que $(x+1)^2 = 9$. Vu que $x+1$ est positif, on en déduit que $x = 2$.

Si x positif, alors l'algorithme ne renvoie pas un y négatif car $(x+1)^2 + 4 > 0$. On cherche donc $x < 0$. Mais comme $y = x$ lorsque x est négatif, il faut que $x = -4$.

b)

```
Si y < 0 alors
  | x ← y
  | sinon
  | si y ⩾ 4 alors
  |   | x ← √(y − 4) − 1
  |   | sinon
  |   | Afficher "Impossible"
  | Fin Si
Fin Si
```

114 **a)** • On note I le milieu du segment [CD].

• D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle OIC rectangle en I : $OC^2 = IO^2 + IC^2 = h^2 + (0{,}5x)^2$ soit $r^2 = h^2 + 0{,}25x^2$.

• D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle OIB rectangle en I : $OB^2 = IO^2 + IB^2 = h^2 + (1{,}5x)^2$ soit $R^2 = h^2 + 2{,}25x^2$.

b) L'aire de la couronne colorée est $\mathcal{A} = \pi R^2 + \pi r^2$.

$\mathcal{A} = \pi(h^2 + 2{,}25x^2) - \pi(h^2 + 0{,}25x^2)$

$\mathcal{A} = 2\pi x^2$

c) $x = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}}$

Pour $\mathcal{A} = 24{,}5\pi$, on obtient $x = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5$.

115 **a) Vrai.**

En effet, si $x = \sqrt{10y}$, alors $x^2 = \pi\left(\sqrt{10y}\right)^2 = 10y$ et donc $y = \frac{1}{10}x^2$.

b) • Implication réciproque

Si $y = 0{,}1x^2$, alors $x = \sqrt{10y}$.

• Cette implication est vraie aussi. En effet, $x^2 = 10y$ et comme x et y sont positifs, $x = \sqrt{10y}$.

116 Pour tous nombres réels x et y,

a) Si $x = 4y - 8$, alors $4y = x + 8$

et $y = \frac{1}{4}x + \frac{8}{4}$, soit $y = 0{,}25x + 2$.

b) Si $y = 0{,}25x + 2$, alors $4y = x + 8$ et $x = 4y - 8$

c) On a démontré :

$x = 4y - 8$ si, et seulement si, $y = 0{,}25x + 2$.

117 **a) Faux.** En effet, pour $x = 1$:

$(2x-3)^2 = (-1)^2 = 1$ et $4x^2 + 9 = 4 + 9 = 13$.

b) Vrai. En effet, pour $x = 0$:

$(2x-3)^2 = (-3)^2 = 9$ et $4x^2 + 9 = 0 + 9 = 9$.

c) Vrai. En effet, pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^4} = |x^2|$.

Or pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $|x^2| = x^2$.

Ainsi, pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^4} = x^2$.

d) Vrai. En effet, pour $n = m = 1$,

$3^1 - 2^1 = 1$ et $6^{1-1} = 6^\circ = 1$.

Organiser son raisonnement

118 **a)** **(1)** $19 \times 21 = 399$ **(2)** $199 \times 201 = 39\,999$

(3) $1999 \times 2\,001 = 3\,999\,999$

b) On prévoit que $19\,999 \times 20\,001 = 399\,999\,999$

On conjecture que pour tout n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$\underbrace{19\ldots9}_{n \text{ chiffres}} \times \underbrace{20\ldots01}_{n \text{ chiffres}} = \underbrace{39\ldots9}_{2n \text{ chiffres}}$$

Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$,

$(2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1) = 4 \times 10^{2n} - 1$

119 **a)**

n	0	1	2	4
$n+1$	1	2	3	5
$n+2$	2	3	4	6
$n+3$	3	4	5	7
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$	1	25	121	841
n^2+3n+1	1	5	11	29

b) Ambre conjecture que pour tout nombre entier naturel n, $n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n+1)^2$

c) Pour tout nombre entier naturel n,

- $n(n+1)=n^2+n$
- $(n+2)(n+3)=n^2+5n+6$
- $A=(n^2+n)(n^2+5n+6)$
- $A=n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n$
- $A=n^4+6n^3+11n^2+6n$
- $B=(n^2+3n+1)(n^2+3n+1)$
- $B=n^4+3n^3+n^2+3n^3+9n^2+3n+n^2+3n+1$
- $B=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

d) On en déduit pour tout nombre entier naturel n, $(n^2+3n+1)(n^2+3n+1)=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.

e) $10\times11\times12\times13+1$ est le carré de $(10^2+3\times10+1)$, c'est-à-dire de 131.

120 L'épaisseur obtenue, en mm, par Adel après n secondes est $2''\times0{,}1$. L'épaisseur obtenue, en mm, par Mara après 22 secondes est $3''\times0{,}1$.

À l'aide d'un tableur, on recherche la plus petite valeur de n telle que $2''\times0{,}1\geqslant10\,000$: on trouve $n=17$.

À l'aide d'un tableur, on recherche la plus petite valeur de n telle que $3''\times0{,}1\geqslant10\,000$: on trouve $n=11$.

Il faut donc 17 s à Adel pour avoir une épaisseur de plus 10 m, alors qu'il faut 11 s à Mara pour dépasser ces 10 m.

C'est Adel qui remporte la course.

	A	B	C
1	***n***	**0,1 x 2ⁿ**	**0,1 x 3ⁿ**
2	0	0	0
3	1	0	0
4	2	0	1
5	3	1	3
6	4	2	8
7	5	3	24
8	6	6	73
9	7	13	219
10	8	26	656
11	9	51	1 968
12	10	102	5 905
13	11	205	17 715
14	12	410	53 144
15	13	819	159 432
16	14	1 638	478 297
17	15	3 277	1 434 891
18	16	6 554	4 304 672
19	17	13 107	12 914 016
20	18	26 214	38 742 049

121 L'aire du demi disque de diamètre [AB] est $\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2$.

L'aire du demi disque de diamètre [AC] est $\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{AC}{2}\right)^2$ et celle du demi disque de diamètre [CB] est $\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{CB}{2}\right)^2$.

L'aire de l'arbelos est donc donnée par :

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{AC}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{CB}{2}\right)^2.$$

$$\mathcal{A}=\frac{\pi}{8}\times(AB^2-AC^2-CB^2)$$

On note D le point d'intersection du grand demi-cercle avec le segment vertical.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACD rectangle en C, $AC^2+CD^2=AD^2$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BCD rectangle en C, $BC^2+CD^2=BD^2$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB rectangle en D, $AD^2+DB^2=AB^2$.

La dernière égalité s'écrit donc :

$$AB^2=AC^2+CD^2+BC^2+CD^2,$$

c'est-à-dire

$$AB^2-AC^2-BC^2=CD^2+CD^2=2^2+2^2=8$$

Ainsi, $\mathcal{A}=\frac{\pi}{8}\times8=\pi$

L'aire de l'arbelos est donc π cm^2.

122 **a)** Les dimensions du nouveau rectangle sont $L-\ell$ et ℓ.

b) Si $L\geqslant2\ell$, alors $L-\ell$ est la longueur du nouveau rectangle. Le nouveau format est donc :

$$F'=\frac{L-\ell}{\ell}=F-1.$$

Il est impossible que F et $F-1$ soit égaux donc si $L\geqslant2\ell$, alors les formats des deux rectangles sont différents.

c) Si $2\ell>L>\ell$, alors $L-\ell<\ell$: le nouveau rectangle a pour longueur ℓ et pour largeur $L-\ell$.

Le format du nouveau rectangle est :

$$F'=\frac{\ell}{L-\ell}=\frac{1}{\frac{L}{\ell}-1}=\frac{1}{F-1}.$$

d) Pour un rectangle de largeur $\ell=2$ et de longueur $L=1+\sqrt{5}$, le format est $F=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On ôte un carré de côté 2 (avec $2\ell>L>\ell$) : le nouveau format est :

$$F'=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$F'=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=F$$

Le format est conservé.

123 Si n est un nombre entier naturel pair, alors pour tout nombre réel a, a^n est positif.

On en déduit que $\sqrt{a^{2n}}=\sqrt{(a^n)^2}=a^n$.

Si n est un nombre entier naturel impair, alors il faut examiner le signe de a.
Pour tout nombre réel $a \geqslant 0, a^n$ est positif.
On en déduit que $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = a^n$.
Pour tout nombre réel $a < 0, a^n$ est négatif et $-a^n$ est positif.
On en déduit que $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(-a^n)^2} = -a^n$.

124 Let N be an integer such as $N + 29$ and $N - 60$ are both squares.
Let's label A^2 and B^2 those both squares: their difference $A^2 - B^2$ equals 89.
So $(A - B)(A + B) = 89$.
89 is a prime number so $A - B = 1$ and $A + B = 89$ (the reverse way can't occur because $A + B > A - B$).
Adding both equalities term to term; we find out the values of A and then B.
$2A = 90$ so $A = 45$ and $B = 44$.
The integer N equals: $A^2 - 29 = 1996$
Let's check with B: $B^2 - 60 = 1996$

125 Le carré hachuré a pour côté $a - b$; son aire est $(a - b)^2$.
Mais cette aire est aussi l'aire du carré de côté a à laquelle on soustrait les aires du carré de côté b et celles des deux rectangles de dimension $a - b$ et b.
On obtient donc :

$$a^2 + 2b(a - b) - b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

On retrouve donc la seconde identité remarquable :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

126 L'aire du grand rectangle hachuré (sans déplacer le dernier rectangle) est $(a + b)(a - b)$.
Si on déplace le dernier rectangle, la partie hachurée a pour aire $a^2 - b^2$.
On retrouve donc la troisième identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

127 **a)** À chaque étape, on colore un quart de l'aire de la partie blanche (en coupant chaque carré en 4). On conserve donc en blanc trois quarts de l'aire de la partie blanche.

b)

	B	C	n
Initialisation	1	0	0
1re itération	0,75	0,25	1
2e itération	0,562 5	0,437 5	2
3e itération	0,421 875	0,578 125	3

c) À la fin de l'exécution de l'algorithme, on obtient $n = 3$: en trois étapes l'aire de la partie coloriée est supérieure à l'aire de la partie blanche.

d) e)

```
def Etapes(aireblanche):
    B=1
    C=0
    n=0
    while B>=aireblanche:
        n=n+1
        B=0.75*B
    return n
```

```
>>> Etapes(0.01)
17
```

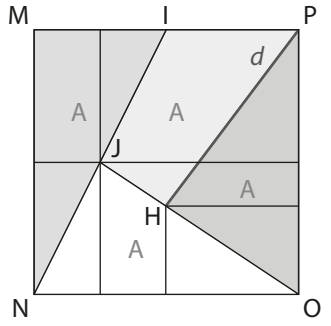
En 17 étapes l'aire de la partie blanche est inférieure à 0,01.

128 Chaque année, le nombre de feuilles est simplement multiplié par 2.
n années après 2019, on a donc 2^{n+1} feuilles.
On cherche donc (avec un tableur) le plus petit nombre entier n tel que $2^{n+1} \geqslant 1000\,000$.
On trouve $n = 19$ ($2^{20} = 1048\,576$). L'arbre aura plus d'un million de feuilles en 2038.

129 Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 3$,
$A(n) = 10^1 \times 10^2 \times 10^3 \times \ldots \times 10^n = 10^{1+2+3+\ldots+n}$
$A(n)$ s'écrit avec au moins mille chiffres si, et seulement si, la somme $1 + 2 + \ldots + n \geqslant 999$.
À l'aide d'un tableur, on détermine que pour $n = 44$, la somme est égale à 990 et que pour $n = 45$, elle dépasse pour la première fois 1000.
45 est donc la plus petite valeur de n telle que $A(n)$ s'écrive avec au moins 1000 chiffres.

130 Pour tout nombre entier naturel n,
$A = n^2 + (n + 3)^2 - (n + 1)^2 - (n + 2)^2$
$A = n^2 + n^2 + 6n + 9 - (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 4n + 4)$
$A = n^2 + n^2 + 6n + 9 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4$
$A = 4$

131



On note x le côté du carré MNOP.
L'aire de IMN est le quart de l'aire du carré MNOP : le point I est donc le milieu de [MP] L'aire de JNO est le quart de l'aire du carré, donc la distance de J à (NO) vaut $0{,}5x$, comme celle de J à (IM).

D'après le théorème de Thalès, J est le milieu du segment $[IN]$. On en déduit alors que la distance de J à (MN) est la moitié de IM, c'est-à-dire $0{,}25x$. La distance de J à (OP) est donc $0{,}75x$.
L'aire de HOP est le quart de l'aire du carré, donc la distance H à (OP) est $0{,}5x$.
D'après le théorème de Thalès, $\frac{HO}{JO} = \frac{0{,}5x}{0{,}75x} = \frac{2}{3}$.
Alors la distance de H à (ON) est égale aux deux tiers de celle de J à (ON), c'est-à-dire $\frac{1}{3}x$.
La distance de H à (MP) est donc $\frac{2}{3}x$.
On utilise le théorème de Pythagore :
$d^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{25}{36}x^2$, donc $d = \frac{5}{6}x$.
On sait enfin que $A = \frac{1}{4}x^2$ ce qui donne $2\sqrt{A} = x$.
Donc $d = \frac{5}{3}\sqrt{A}$.

132 **1. B.** En effet, $4^{2+6n} = 4^2 \times (4^6)^n$
$4^{2+6n} = 16 \times (2^{12})^n$
2. A. En effet,
$12^{100} \times 1{,}5^{50} \times 6^{-149} = 2^{100} \times 6^{100} \times \frac{6^{50}}{4^{50}} \times 6^{-149}$
$12^{100} \times 1{,}5^{50} \times 6^{-149} = 2^{100} \times \frac{1}{2^{100}} \times 6 = 6$
3. C. En effet, $0{,}8^7 = 0{,}209\,715\,52$ donc $0{,}8^7 \geqslant 0{,}209$ et l'algorithme renvoie $n = 8$.
4. C. En effet, $\sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{7-4\sqrt{7}+4}$, c'est-à-dire
$\sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{(7)^2 - 2\times 2\sqrt{7} + 2^2}$
$\sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{(7-2)^2}$
Or, $\sqrt{7}-2 > 0$ donc $\sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{7}-2$.
Remarque : On peut aussi développer $(\sqrt{7}-2)^2$.
5. B. En effet, le carré de l'hypoténuse du triangle rectangle est $12+18$ soit 30, c'est l'aire du carré hachuré en rouge.
De plus, l'aire du triangle rectangle est :
$$\frac{1}{2}\sqrt{12}\times\sqrt{18} = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}.$$
Donc l'aire du domaine hachuré est $30+3\sqrt{6}$.
6. D. En effet, $V' = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{2}r)^2 \times 0{,}5\,h$ soit
$V' = \frac{1}{3}\pi \times 2r^2 \times 0{,}5\,h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = V$.
7. C. En effet, pour tout nombre réel x,
$(2x-3)^2 - 4(x+1)^2$ est égale à
$4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 - 8x - 4$
$(2x-3)^2 - 4(x+1)^2 = 4x+5$.
8. D. En effet, pour tout nombre réel x,
$A = (6x-3)(2x+1) - (10x-5)^2$
$A = 3(2x-1)(2x+1) - [5(2x-1)]^2$
$A = 3(2x-1)(2x+1) - 25(2x-1)^2$
$A = (2x-1)[3(2x+1) - 25(2x-1)]$
$A = (2x-1)(6x+3+50x+25)$
$A = (2x-1)(-44x+28)$.
9. D. En effet, pour tout nombre réel x,
$\frac{x^2}{4} + \frac{25}{9} - \frac{5x}{3} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{3}\right)^2$
$\frac{x^2}{4} + \frac{25}{9} - \frac{5x}{3} = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{3}\right)^2$
10. B. En effet, pour tout nombre réel $x > 0$,
$\frac{5}{(x+1)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{5x^2 - 3(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$
$\frac{5}{(x+1)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{5x^2 - 3x^2 - 6x - 3}{x^2(x^2+2x+1)^2}$
$\frac{5}{(x+1)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{2x^2 - 6x - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2}$

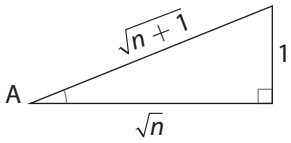
Exploiter ses compétences

133 • On note x la longueur, en m, du côté du carré contenant des tulipes dans l'angle en haut à gauche (Doc. 1) de l'aménagement avec $0 \leqslant x \leqslant 8$.
L'aire, en m^2, dédiée aux tulipes est donnée par :
$$x^2 + (8-x)(10-x) = 2x^2 - 18x + 80.$$
• Sachant que la parcelle a une aire de 80 m^2, les aires seront équilibrées si $2x^2 - 18x + 80 = 40$, c'est-à-dire si $2x^2 - 18x + 40 = 0$.
Avec la forme factorisée proposée au Doc. 2, l'équation s'écrit $2(x-5)(x-4) = 0$.
• Un produit de facteur est nul si, et seulement si, un de ses facteurs au moins est nul.
Donc $x = 4$ et $x = 5$ sont les deux solutions de cette équation.
• Deux aménagements sont possibles pour les tulipes :
– Un carré de 4 m sur 4 m et un rectangle de 4 m sur 6 m ou
– un carré de 5 m sur 5 m et un rectangle de 3 m sur 5 m

Dans les deux cas, l'aire de la parcelle de tulipes sera 40 m^2 et celle de la parcelle de gazon sera 40 m^2 aussi.
D'après le Doc. 3, le prix de l'aménagement sera donc :

$$3\,€ \times 40 + 10\,€ \times 40 = 520\,€.$$

134 Les dimensions du $n^{\text{-ième}}$ triangle rectangle tracé sont $\sqrt{n}$, 1 et $\sqrt{n+1}$.
Le cosinus de l'angle de sommet A dans ce $n^{\text{-ième}}$ triangle est $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$.



Il s'agit alors de savoir si la somme des mesures des angles de sommet A finit par être égale exactement à 360°.
Pour cela, on réalise et on complète la feuille de calcul proposée au Doc. 3.

	A	B	C	D	N	O	P	Q	R
1	**Étape**	1	2	3	13	14	15	16	17
2	**Côté 1**	1	1,414	1,732	3,606	3,742	3,873	4,000	4,123
3	**Côté 2**	1,414	1,732	2,000	3,742	3,873	4,000	4,123	4,243
4	**cos(α)**	0,707	0,816	0,866	0,964	0,966	0,968	0,970	0,972
5	**α (en °)**	45,000	35,264	30,000	15,501	14,963	14,478	14,036	13,633
6	**Somme des α**	45,000	80,264	110,264	307,673	322,637	337,114	351,150	364,783

Après 16 étapes, la somme des angles est inférieure à 352° (avec une erreur inférieure à 1°).
Après 17 étapes, la somme des angles est supérieure à 364° (avec une erreur inférieure à 1°).
La spirale ne se referme donc pas exactement.

135 • D'après le théorème de Pythagore, la distance de course, en m, sur la plage est $\sqrt{200^2 + h^2}$.
La vitesse de course, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ sur la plage, est $\dfrac{18\,000}{3\,600} = 5$.
Le temps de course est donc, en s,

$$\frac{\sqrt{200^2 + h^2}}{5} = 0{,}2\sqrt{200^2 + h^2}.$$

• La distance à vol d'oiseau est d'après le théorème de Thalès un tiers au-dessus du sable et deux tiers au-dessus de l'eau. D'après le théorème de Pythagore, la distance en m en bord de mer entre les deux projetés orthogonaux des deux bouées sur le bord de mer est :

$$\sqrt{\left(\frac{1000}{3}\right)^2 - 200^2} + \sqrt{\left(\frac{2\,000}{3}\right)^2 - 400^2} = 800$$

• D'après le théorème de Pythagore la distance de nage, en m, est : $\sqrt{(800 - h^2) + 400^2}$.
La vitesse de nage, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, est $\dfrac{3\,600}{3\,600} = 1$.
Le temps de nage, en A, est donc :

$$\frac{\sqrt{(800 - h^2) + 400^2}}{1} = \sqrt{(800 - h^2) + 400^2}.$$

• On veut donc savoir si le temps de course, en s, $0{,}2\sqrt{200^2 + h^2} + \sqrt{(800 - h)^2 + 400^2}$ peut prendre des valeurs inférieures à 9 min 20 s, c'est-à-dire à 560 s, qui constitue le record de l'épreuve.
On réalise cette feuille de calcul.

	A	B
1	**Distance h (en m)**	**Temps de l'épreuve (en s)**
2	200	777,68
3	300	712,42
4	400	655,13
5	500	607,70
6	600	573,70
7	700	557,91
8	800	564,92

On montre par exemple qu'en choisissant $h = 700$, on peut battre le record de l'épreuve de près de 2 s.
En effet, $558\text{ s} = 9\text{ min}\,18\text{ s}$.

136 • Avec la ligne polygonale au-dessous la courbe :
$i = 14$ et $b = 21$.
$14 + \dfrac{21}{2} - 1 = 23{,}5$ donc l'aire sous cette ligne polygonale est 23,5 carreaux.
c'est-à-dire $23{,}5 \times 0{,}25\text{ m}^2 = 5{,}875\text{ m}^2$
Par symétrie autour de l'axe des ordonnées, une valeur minorant l'aire sous l'arc de la serre est donc 11,75 m^2.
• Avec la ligne polygonale au-dessus de la courbe :
$i = 21$ et $b = 21$.
$21 + \dfrac{21}{2} - 1 = 30{,}5$ donc l'aire sous cette ligne polygonale est 30,5 carreaux.
c'est-à-dire $30{,}5 \times 0{,}25\text{ m}^2 = 7{,}625\text{ m}^2$
Par symétrie autour de l'axe des ordonnées, une valeur majorant l'aire sous l'arc de la serre est donc 15,25 m^2.
Le volume d'air sous la serre sera donc compris entre :
$11{,}75\text{ m}^2 \times 12\text{ m} = 141\text{m}^3$ et $15{,}25\text{ m}^2 \times 12\text{ m} = 183\text{ m}^3$.

3 Divisibilité. Nombres premiers

Découvrir

1 La somme des diviseurs d'un nombre

1 **a)** 1, 2, 4, 71, 142, 284
b) 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220

2 **a)** $1+2+4+71+142=220$
b) $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$ est égal à 284.
c) On remarque que la somme des diviseurs de 284, autres que 284, est 220 et que la somme des diviseurs de 220, autre que 220, est 284.

2 Nombres premiers et fractions irréductibles

1 **a)** Dire qu'un nombre entier naturel est premier signifie qu'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
2. a) $p=\dfrac{117}{442}$
b) 117 est divisible par 9 car $1+1+7=9$ et 9 est divisible par 9.
$117=9\times13=3\times3\times13$
c)

$$\begin{array}{r|l} 442 & 13 \\ \cline{2-2} -39 & 34 \\ \cline{1-1} 52 & \\ -52 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$442=13\times34=13\times2\times17=2\times13\times17$
d) $p=\dfrac{3\times3\times13}{2\times13\times17}=\dfrac{9}{34}$

Acquérir des automatismes

3 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315

4 L'affirmation est vraie ; les diviseurs sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

5 L'affirmation est fausse ; les nombres 12 et 18 ont le même nombre de diviseurs (6).
Diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12
Diviseurs de 18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18

6 **a)** n est pair signifie qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $n=2k$.
$B=2k(2\times2k-3)=2k(4k-3)=2K$
avec $K=k(4k-3)$.
$K\in\mathbb{Z}$ donc B est un nombre pair.
b) n est impair signifie qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $n=2k+1$.
$B=(2k+1)[2(2k+1)-3]=(2k+1)(4k-1)$
$B=8k^2-2k+4k-1=2(4k^2+k)-1=2K-1$
avec $K=4k^2+k$.
$K\in\mathbb{Z}$ donc B est un nombre impair.

7 **a)** p est pair signifie qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $p=2k$.
$C=(2k)^2-1=4k^2-1=2(2k^2)-1=2K-1$ avec $K=2k^2$.
$K\in\mathbb{Z}$ donc C est un nombre impair.
b) p est impair signifie qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $p=2k+1$.
$C=(2k+1)^2-1=(2k+1-1)(2k+1+1)$
$C=2k(2k+2)=2K$ avec $K=k(2k+2)$.
$K\in\mathbb{Z}$ donc C est un nombre pair.

10 **a)** $63 \times 23 = 9 \times 7 \times 23 = 3^2 \times 7 \times 23$
b) $21^2 \times 35^4 = 3^2 \times 7^2 \times 7^4 \times 5^4 = 3^2 \times 5^4 \times 7^6$

11 $5\,096 = 2^3 \times 7^2 \times 13$
et $4\,004 = 2^2 \times 7 \times 11 \times 13$.
Donc $M = \dfrac{2^3 \times 7^2 \times 13}{2^2 \times 7 \times 11 \times 13} = \dfrac{2 \times 7}{11} = \dfrac{14}{11}$.
M est un nombre rationnel non décimal parce que le dénominateur, 11, n'est pas de la forme $2^n \times 5^m$.

12 77 est le multiple de 7 compris entre 75 et 80.
En effet, $77 = 7 \times 11$.

13 Loris a raison. En effet, $-121 = -11 \times 11$.

14 L'affirmation **(2)** est exacte. En effet, le chiffre des unités de 185 est 5 et donc, 185 est divisible par 5.

15 **a)** -28 **est divisible par** 4.
b) 9 **est un diviseur de** 72.
c) 3 561 **est divisible par** 3 car la somme de ses chiffres **est divisible par** 3.
d) 0 **est divisible par** tout nombre entier non nul.
e) **1est un diviseur de** tous les nombres entiers.

16 **a)** 120 ou 150.
b) 105 ou 120 ou 135 ou 150.
c) 108 ou 126 ou 144.

17 **a)** 3 ou 9.
b) 3 ou 5 ou 9 ou 15 ou 45.
c) 11

18 **a)** $144 = 24 \times 6$ donc 24 est un diviseur de 144.
b) $\dfrac{84}{7} = 12$ donc 84 est **divisible par** 7 et par **12**.
c) $295 = 59 \times 5$ donc 295 est un **multiple** de 59 et **5**.

19 **a)** $-132 = 11 \times (-12)$
b) $-270 = -15 \times 18$
c) $32\,058 = 3\,562 \times 9$
d) $406 = 14 \times 29$

20 **a)** 216 est un multiple de 2. En effet, le chiffre des unités est 6 ou bien $216 = 2 \times 12 \times 9$.
b) $216 = 8 \times 3 \times 9$
c) $216 = 2 \times 12 \times 9 = 18 \times 12$
d) $216 = 8 \times 3 \times 9 = 8 \times 27$
e) $216 = 3 \times 8 \times 9 = 3 \times 72$

21 **a)** $280 = 5 \times 56$ et $448 = 8 \times 56$. Donc 56 est un diviseur commun à 280 et 448.
b) $518 = 14 \times 37$ mais 714 n'est pas divisible par 37. Donc 37 n'est pas un diviseur commun à 518 et 714.

22 Le ticket de Jade porte le numéro 4 845. En effet, $4\,845 = 15 \times 323$ et $4\,845 = 19 \times 255$.

23 **a)** 18 est le plus petit nombre entier naturel divisible à la fois par 2 et par 9.
b) 16 est le plus petit nombre entier naturel divisible à la fois par 4 et par 8.
c) 18 est le plus petit nombre entier naturel divisible à la fois par 6 et par 9.
d) 48 est le plus petit nombre entier naturel divisible à la fois par 12 et par 16.

24 Celui de ces nombres qui a le plus grand nombre de diviseurs est 60 ; ce nombre admet 12 diviseurs (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60).
En effet, 24 a 8 diviseurs, 35, 58 et 85 ont 4 diviseurs, 42 a 8 diviseurs.

25 **a)** 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195.
b) 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192.
c) 120 est le plus petit multiple commun à 15 et 24.

26 **a)** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.
b) 1, 2, 3, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.
c) 12 est le petit diviseur commun à 72 et 84.

27 **a)** 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135.
b) 1, 3, 5, 15, 25, 75.
c) 1, 3, 5, 15.

28 **a)** *q* représente le quotient et *r* le reste de la division euclidienne de *a* par *b*.
b) Afficher "*a* est un **diviseur** de *b*"
Afficher "*a* **n'est pas un diviseur** de *b*"
c)

```
from math import *

a=int(input("Enter a ="))
b=int(input("Entrer b ="))
q=floor(a/b)
if a%b==0:
    print("",a,"est un diviseur de","",b)
else:
    print("",a,"n'est pas un diviseur de","",b)
```

29 **(1)**, **(2)** et **(4)** désignent des nombres pairs. En effet, $4n = 2(2n)$ et $2n - 2 = 2(n-1)$. Par contre **(3)** désigne un nombre impair car $2n + 3 = 2(n+1) + 1$.

30 **(1)**, **(2)** et **(3)** désignent des nombres impairs. En effet, $4n + 3 = 2(2n+1)+1$. Par contre **(4)** désigne un nombre pair car $2n + 4 = 2(n+2)$.

31 **1. a)** $5k$ **b)** $5k+1$ **c)** $5(2k)$
2. $5k-1$ désigne le précédent d'un multiple de 5.

32 2, 3, 4 sont trois nombres consécutifs mais $2+3+4=9$ et 9 n'est pas un nombre pair. L'affirmation de Sam est fausse.

33 ka et $k'a$ désignent deux multiples de a (avec k et k' nombres de $\mathbb{Z}$).
a) $ka-k'a=(k-k')a=\mathrm{K}a$ avec $\mathrm{K}=k-k'$.
Or, $k-k'\in\mathbb{Z}$ donc la différence de deux multiples de a est un multiple de a.
b) $ka\times k'a=(kk'a)a=\mathrm{K}a$ avec $\mathrm{K}=kk'a$.
Or, $kk'a\in\mathbb{Z}$ donc le produit de deux multiples de a est un multiple de a.

34 L'affirmation de Mariam est fausse. En effet, 20 et 10 sont des multiples de 5, mais $\frac{20}{10}=2$ et 2 n'est pas un multiple de 5.

35 **a)** $n-1$ désigne le précédent de n, et $n+1$ le suivant de n.
b) $n-1+n+n+1=3n$; cette somme est un multiple de 3.
La somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de 3.

36 **a)** $n-2+n-1+n+n+1+n+2=5n$.
b) Cette somme est un multiple de 5.
c) La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.

37 **a)** $2k$ et $2k'$ désignent deux nombres pairs (avec k et k' nombres de $\mathbb{Z}$).
b) $2k\times 2k'=2(2kk')=2\mathrm{K}$ avec $\mathrm{K}=2kk'$.
Or, $2kk'\in\mathbb{Z}$ donc le produit est un nombre pair.
c) Le produit de deux nombres pairs est un nombre pair.

38 $2k+1$ et $2k'+1$ sont deux nombres impairs (avec k et k' nombres de $\mathbb{Z}$).
$(2k+1)(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1$
$(2k+1)(2k'+1)=2(2kk'+k+k')+1$
Or, $2kk'+k+k'\in\mathbb{Z}$ donc le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

39 $n^3=n^2\times n$.
• Si n est pair, on sait que n^2 est aussi un nombre pair. Ainsi, n^3 est le produit du nombre pair n^2 par le nombre pair n, donc n^3 est un nombre pair (voir exercice 37).
• Si n est impair, on sait que n^2 est aussi un nombre impair. Ainsi, n^3 est le produit du nombre impair n^2 et du nombre impair n, donc n^3 est un nombre impair (voir exercice 38).

40 **a)** $2k+3$ est le nombre impair qui suit $2k+1$.
b) $2k+1+2k+3=4k+4=4(k+1)$
Donc cette somme est un multiple de 4.
c) La somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.

41 **a)** 39 est divisible par 3 donc il n'est pas premier.
b) 72 est divisible par 2 et différent de 2 donc il n'est pas premier.
c) 145 est divisible par 5 donc il n'est pas premier.
d) 153 est divisible par 9 donc il n'est pas premier.

42 Claire a raison.
En effet, $2+3=5$ et 2, 3, 5 sont des nombres premiers.

43 Luka se trompe. En effet, $5+7=12$ et 5, 7 sont impairs mais 12 n'est pas premier.

44 **(3)** est l'affirmation exacte.
En effet, 13 et 17 sont des nombres premiers et $13+17=30$.
(1) est fausse car 2 est un nombre premier.
(2) est fausse car 21 n'est pas premier.

45 **a)** 13 est un nombre premier.
b) 24 est divisible par 2 et différent de 2 donc il n'est pas premier.
c) 29 est un nombre premier.
d) 92 est divisible par 2 et différent de 2 donc il n'est pas premier.
e) 53 est un nombre premier.

46 **a)** 77 est divisible par 7 donc il n'est pas premier.
b) 31 est un nombre premier.
c) 1384 945 est divisible par 5 donc il n'est pas premier.
d) 41 est un nombre premier.

47 **a)** $2\times 9\times 5+3=3(2\times 3\times 5+1)$,
donc ce nombre est divisible par 3 et il n'est pas premier.
b) $36\times 5\times 7+27=9(4\times 5\times 7+3)$,
donc ce nombre est divisible par 9 et il n'est pas premier.

48

a) $3 = 4 \times 1 - 1$ $\quad 5 = 4 \times 1 + 1$ $\quad 7 = 4 \times 2 - 1$

$11 = 4 \times 3 - 1$ $\quad 13 = 4 \times 3 + 1$ $\quad 17 = 4 \times 4 + 1$

$19 = 4 \times 5 - 1$ $\quad 23 = 4 \times 6 - 1$ $\quad 29 = 4 \times 7 + 1$

$31 = 4 \times 8 - 1$ $\quad 37 = 4 \times 9 + 1$ $\quad 41 = 4 \times 10 + 1$

$43 = 4 \times 11 - 1$ $\quad 47 = 4 \times 12 - 1$ $\quad 53 = 4 \times 13 + 1$

$59 = 4 \times 15 - 1$ $\quad 61 = 4 \times 15 + 1$

b) Pour $n = 2$, $4n + 1 = 9$ et 9 n'est pas premier donc Romain se trompe.

49 Voici la feuille de calcul obtenue.

	A	B
1	***n***	***6n + 1***
2	1	7
3	2	13
4	3	19
5	4	25
6	5	31
7	6	37
8	7	43
9	8	49
10	9	55
11	10	61

On constate que pour $n = 4$, $6n + 1 = 25$ et que 25 n'est pas un nombre premier.
Donc Mélanie se trompe.

50 Priscilla se trompe. En effet, $-1 + 1 + 3 = 3$ et 3 est un nombre premier.
Par contre, dans tous les autres cas, elle a raison.

51 **a)** et **b)** $\sqrt{200} \approx 14{,}1$ donc on s'arrête après avoir barré les multiples de 13.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	~~169~~	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~
191	~~192~~	193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

c) Les nombres premiers jumeaux inférieurs à 200 sont : 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, 29 et 31, 41 et 43, 59 et 61, 71 et 73, 101 et 103, 107 et 109, 137 et 139, 149 et 151, 179 et 181, 191 et 193, 197 et 199.

52 $1024 = 2^6 \times 2^4 = 2^{10}$ Donc Lilian a tort.

53 $132 = 4 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3 \times 11$.

54 **a)** $15 = 3 \times 5$ $\quad$ **b)** $8 = 2^3$

c) $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$ $\quad$ **d)** $36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$

55 L'affirmation **(2)** est fausse.
En effet, $1455 = 3 \times 5 \times 97$.

56 $224 = 2^3 \times 2^2 \times 7 = 2^5 \times 7$

57 **a)** $54 = 2 \times 3^3$ **b)** $82 = 2 \times 41$ **c)** $72 = 2^3 \times 3^2$

d) $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ **e)** $48 = 2^4 \times 3$

58 **a)** $56 = 2^3 \times 7$ **b)** $93 = 3 \times 31$ **c)** $121 = 11^2$

d) $256 = 2^8$ $\quad$ **e)** $400 = 2^4 \times 5^2$

59 **a)** $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$ $\quad$ **b)** $475 = 5^2 \times 19$

c) $1000 = 2^3 \times 5^3$ $\quad$ **d)** $260 = 2^2 \times 5 \times 13$

e) $5\,967 = 3^3 \times 13 \times 17$

60 **a)** $10^2 = (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$ $\quad$ **b)** $10^3 = 2^3 \times 5^3$

c) $10^4 = 2^4 \times 5^4$ $\quad$ **d)** $10^7 = 2^7 \times 5^7$

61 **a)** $81 \times 12 = 3^4 \times 3 \times 2^2 = 2^2 \times 3^5$

b) $38 \times 14 = 2 \times 19 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7 \times 19$

c) $72 \times 15 = 2^3 \times 3^2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

d) $64 \times 36 = 2^6 \times 2^2 \times 3^2 = 2^8 \times 3^2$

e) $A = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

$A = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5$

$A = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

62 $792^5 = (2^3 \times 3^2 \times 11)^5 = 2^{15} \times 3^{10} \times 11^5$

63 **a)** $36^3 \times 38^2 = (2^2 \times 3^2)^3 \times (2 \times 19)^2$

$36^3 \times 38^2 = 2^6 \times 3^6 \times 2^2 \times 19^2 = 2^8 \times 3^6 \times 19^2$

b) $(2 \times 15 \times 7^2)^2 = (2 \times 3 \times 5 \times 7^2)^2$

$(2 \times 15 \times 7^2)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^4$

c) $(25 \times 24)^4 = (5^2 \times 3 \times 2^3)^4 = 2^{12} \times 3^4 \times 5^8$

64 • $1400 = 2 \times 7 \times 100 = 2 \times 7 \times 2^2 \times 5^2$

$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$

• $1323 = 9 \times 147 = 9 \times 3 \times 49 = 3^3 \times 7^2$

• 7 est le diviseur premier commun à 1 400 et 1 323.

65 **a)** $3136 = 2^6 \times 7^2 = (2^3 \times 7)^2$

3136 est le carré de $2^3 \times 7$ c'est-à-dire 56.
Rachid a raison.

b) On peut vérifier avec la calculatrice que $\sqrt{3136} = 56$.

66 **a)** $1728 = 2^6 \times 3^3$

b) $1728 = (2^2 \times 3)^3 = 12^3$

Donc 1728 est le cube de 12.

67 **a)** $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

b) $\sqrt{252} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7} = 2 \times 3 \times \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

68 **a)** $\sqrt{756} = \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 7} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3 \times 7}$

donc $\sqrt{756} = 6\sqrt{21}$.

b) $\sqrt{5\,850} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5^2 \times 13}$

donc $\sqrt{5\,850} = 15\sqrt{26}$.

69 $1482 = 2 \times 3 \times 13 \times 19$

Donc Inès dispose de 19 paires de chaussures.

70 228 et 144 sont divisibles par 2 (et aussi par 3), donc $\frac{228}{144}$ n'est pas une fraction irréductible.

Timéo se trompe.

71 105 et 147 sont par exemple divisibles par 3 donc la fraction $\frac{105}{147}$ n'est pas irréductible.

72 $A = \frac{12}{5} - \frac{3 \times 7}{5 \times 3 \times 3} = \frac{12}{5} - \frac{7}{15}$

$A = \frac{36}{15} - \frac{7}{15} = \frac{29}{15}$

29 est un nombre premier et 15 n'est pas divisible par 29, donc $\frac{29}{15}$ est une fraction irréductible.

73 $B = \frac{9 \times 13}{9 \times 5} = \frac{13}{5}$

13 et 5 n'ont pas de diviseur commun autre que 1, donc $\frac{13}{5}$ et une fraction irréductible.

B est un nombre décimal car $B = \frac{260}{10}$ ou $B = 2{,}6$.

74 **a)** $\frac{3}{16} + \frac{7}{12} = \frac{3}{2^4} + \frac{7}{2^2 \times 3}$

$\frac{3}{16} + \frac{7}{12} = \frac{9 + 28}{2^4 \times 3} = \frac{37}{48}$

37 est un nombre premier et 48 n'est pas divisible par 37, donc $\frac{37}{48}$ est une fraction irréductible.

b) $\frac{4}{15} - \frac{7}{20} = \frac{4}{3 \times 5} - \frac{7}{2^2 \times 5}$

$\frac{4}{15} - \frac{7}{20} = \frac{16 - 21}{2^2 \times 3 \times 5} = -\frac{5}{60} = -\frac{1}{12}$

c) $\frac{3}{10} + \frac{11}{14} = \frac{3}{2 \times 5} + \frac{11}{2 \times 7}$

$\frac{3}{10} + \frac{11}{14} = \frac{21 + 55}{2 \times 5 \times 7} = \frac{76}{70}$

$\frac{3}{10} + \frac{11}{14} = \frac{38 \times 2}{35 \times 2} = \frac{38}{35}$

$38 (= 2 \times 19)$ et $35 (= 5 \times 7)$ n'ont pas de diviseur commun autre que 1, donc $\frac{38}{35}$ est une fraction irréductible.

75 $C = \frac{2^2 \times 11}{3 \times 5} = \frac{44}{15}$

$D = \frac{3^2}{2^2 \times 7} = \frac{9}{28}$

76 **a)** $\frac{224}{280} = \frac{2^5 \times 7}{2^3 \times 5 \times 7} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{420}{882} = \frac{2^2 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7^2} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

c) $\frac{8\,800}{3\,775} = \frac{2^5 \times 5^2 \times 11}{5^2 \times 151} = \frac{2^5 \times 11}{151} = \frac{352}{151}$

d) $\frac{1056}{1596} = \frac{2^5 \times 3 \times 11}{2^2 \times 3 \times 7 \times 19} = \frac{2^3 \times 11}{7 \times 19} = \frac{88}{133}$

77 **a)** $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $294 = 2 \times 3 \times 7^2$.

Donc un dénominateur commun à a et b est par exemple $2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 2\,940$.

b) $a - b = \frac{1}{420} - \frac{1}{294} = \frac{7 - 10}{2\,940} = -\frac{3}{2\,940}$

$a - b = -\frac{3}{3 \times 980} = -\frac{1}{980}$

78 $186 + 264 = 450$: le sac contient 450 jetons.

$\frac{264}{450} = \frac{2^3 \times 3 \times 11}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{2^2 \times 11}{3 \times 5^2} = \frac{44}{75}$

La proportion de jetons blancs dans le sac est $\frac{44}{75}$.

79 **1.** D **2.** C **3.** A **4.** C **5.** B **6.** C

80 **1.** A, D **2.** A, D **3.** A, D **4.** B, C, D **5.** A, C, D

81 **1. Vrai.** En effet, $132 = 2^2 \times 3 \times 11$.

2. Faux. En effet, A admet 18 diviseurs :

1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 63, 84, 126, 252.

3. Vrai. En effet, $3^3 \times 5^3 \times 11 = 3 \times 11 \times A$ et $3^3 \times 5^3 \times 11 = 5 \times 11 \times B$.

4. Faux. En effet, $A = \frac{5^3 \times 7^2}{5^2 \times 7 \times 11} = \frac{5 \times 7}{11}$ soit $A = \frac{35}{11}$. Or, le dénominateur, 11, n'est pas de la forme $2^m \times 5^p$, donc A n'est pas un nombre décimal.

82 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180

83 **a)** $0 = 0 \times 16$; $192 = 12 \times 16$; $224 = 14 \times 16$; $400 = 25 \times 16$.
b) $25 = 1 \times 25$; $75 = 3 \times 25$; $200 = 8 \times 25$; $325 = 13 \times 25$; $500 = 20 \times 25$.

84

Nombre	Divisible par 2	Divisible par 3	Divisible par 5	Divisible par 9
37 245	**NON**	**OUI**	**OUI**	**NON**
5 520	**OUI**	**OUI**	**OUI**	**NON**
7 631	**NON**	**NON**	**NON**	**NON**
11 628	**OUI**	**OUI**	**NON**	**OUI**

85 **a)** 2, 3, 5, 7, 11, 13.
b) $12 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3}$
c) $48 = 8 \times 6 = 2^3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$
d)

168	2
84	**2**
42	**2**
21	**3**
7	**7**
1	

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

86 • $168 = 2 \times 84 = 2 \times 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 2 \times 21$
$168 = 2^3 \times 3 \times 7$
• $48 = 16 \times 3 = 2^4 \times 3$
• $\dfrac{168}{48} = \dfrac{2^3 \times 3 \times 7}{2^4 \times 3} = \dfrac{7}{2^{4-3}} = \dfrac{7}{2}$

S'entraîner

88 Ce programme affiche en plus les diviseurs d'un nombre non premier.
Pour $n = 1001$, on obtient :

```
>>> Premier(1001)
d = 7
d = 11
d = 13
d = 77
d = 91
d = 143
"Ce nombre n'est pas premier"
```

89 **b)** Pour chaque nombre entier de 2 à 100, le programme affiche la primalité ou non de ce nombre. Il reconnaît donc les nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
c) On saisit en entrée $n = 200$ et le programme affiche la primalité ou non de chaque nombre de 2 à 200.
En particulier, il reconnaît les nombres premiers : 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.
d) On saisit en entrée $n = 1000$ et on repère les nombres premiers jumeaux : 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, 29 et 31, 41 et 43, 59 et 61, 71 et 73, 101 et 103, 107 et 109, 137 et 139, 149 et 151, 179 et 181, 191 et 193, 197 et 199, 227 et 229, 239 et 241, 269 et 271, 281 et 283, 311 et 313, 347 et 349, 419 et 421, 431 et 433, 461 et 463, 521 et 523, 569 et 571, 599 et 601, 617 et 619, 641 et 643, 659 et 661, 809 et 811, 821 et 823, 827 et 829, 857 et 859, 881 et 883.

91 Les nombres premiers sont 11 587, 10 331, 16 661.

92 **a)** $2\,730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$
$5\,236 = 2^2 \times 7 \times 11 \times 17$
$10\,604 = 2^2 \times 11 \times 241$
$20\,240 = 2^4 \times 5 \times 11 \times 23$
b) $\dfrac{2\,730}{5\,236} = \dfrac{3 \times 5 \times 13}{2 \times 11 \times 17} = \dfrac{195}{374}$
$\dfrac{5\,236}{10\,604} = \dfrac{7 \times 17}{241} = \dfrac{119}{241}$
$\dfrac{20\,240}{10\,604} = \dfrac{2^2 \times 5 \times 23}{241} = \dfrac{460}{241}$

93 **a)** 9 973 est le plus grand nombre premier inférieur à 10 000.
b) Premier Suivant (100 000) renvoie 100 003 ; c'est le plus petit nombre premier supérieur à 100 000.

94 **1er cas :** *n* pair
Il existe un nombre k de $\mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
Alors, $A = 3(2k)^2 + 2(2k) + 1 = 12k^2 + 4k + 1$
c'est-à-dire $A = 2(6k^2 + 2k) + 1$
soit $A = 2K + 1$ avec $K = 6k^2 + 2k$. Or, $K \in \mathbb{N}$ donc A est un nombre impair.
2e cas : *n* impair
Il existe un nombre k de $\mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors $A = 3(2k+1)^2 + 2(2k+1) + 1$
Or, $(2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1)$
soit $(2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 2k + 1$
$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
Donc, $A = 3(4k^2 + 4k + 1) + 2(2k+1) + 1$
$A = 12k^2 + 12k + 3 + 4k + 2 + 1$
$A = 12k^2 + 16k + 6$
$A = 2(6k^2 + 8k + 3)$
$A = 2K'$ avec $K' = 6k^2 + 8k + 3$

Or $K' \in \mathbb{N}$, donc A est un nombre pair.
Conclusion : A est pair lorsque n est impair et A est impair lorsque n est pair.

95 $A = (2n+1)(n+1)$ est un nombre premier lorsque l'un des facteurs est 1, c'est-à-dire lorsque $2n+3=1$ ou $n+1=1$ soit $n=-1$ ou $n=0$.
Or, $n \in \mathbb{N}$, donc A est premier dans le seul cas où $n=0$. Dans ce cas, $A=3$.

96 $361361 = 361 \times 1000 + 361$
$361361 = 361(1000+1) = 361 \times 1001$
361361 est le produit de 361 et 1001 donc 361361 n'est pas un nombre premier.

97 **a)** Le nombre impair suivant $2n-1$ est $2n+1$.
b) $A = 2n-1+2n+1+(2n-1)(2n+1)$
$A = 4n+4n^2-1$
$A = 4n^2+4n-1$
c)

n	1	2	3	4	5	6
A	7	23	47	79	119	167

L'affirmation de Marcel Pagnol est fausse parce que pour $n=5$, $A = 119 = 7 \times 17$ et A n'est pas premier.

98 **a)** 210 est le premier nombre commun aux listes obtenues par Léna, Adam et Zoé : $210 = 5 \times 6 \times 7$.
b) 90 est le premier nombre commun aux nouvelles listes obtenues par Léna, Adam et Zoé : $90 = 2 \times 9 \times 5$.

99 $72 = 1 \times 72$: 1 rangée de 72 jetons
$72 = 2 \times 36$: 2 rangées de 36 jetons
$72 = 3 \times 24$: 3 rangées de 24 jetons
$72 = 4 \times 18$: 4 rangées de 18 jetons
$72 = 6 \times 12$: 6 rangées de 12 jetons
$72 = 8 \times 9$: 8 rangées de 9 jetons
$72 = 9 \times 8$: 9 rangées de 8 jetons
$72 = 12 \times 6$: 12 rangées de 6 jetons
$72 = 18 \times 4$: 18 rangées de 4 jetons
$72 = 24 \times 3$: 24 rangées de 3 jetons
$72 = 36 \times 2$: 36 rangées de 2 jetons
$72 = 72 \times 1$: 72 rangées de 1 jeton

100 $-19 \times 53 = -1007$ et $20 \times 53 = 1060$.
Les multiples de 53 compris entre -1027 et 1112 sont les nombres de la forme $53k$ avec k nombre de $\mathbb{Z}$ tel que $-19 \leqslant k \leqslant 20$.
$20-(-19)+1 = 40$ donc il y a 40 multiples de 53 compris entre -1027 et 1112.
Remarque : on peut aussi tabuler la fonction $x \mapsto 53x$ avec le pas 1 et compter le nombre de multiples qui conviennent.

101 On cherche d'abord le nombre de multiples positifs de 37 inférieurs à 1000.
Ils sont de la forme $37k$ avec k nombre de $\mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant 27$ (car $27 \times 37 = 999$).
Il y a donc 28 multiples positifs de 37 inférieurs à 1000.
$1000 - 28 = 972$, donc il y a 972 nombres entiers naturels strictement inférieurs à 1000 non divisibles par 37.

102 Par exemple, avec $a=6$, $b=3$, $c=4$:
6 divise 3×4, mais 6 ne divise ni 3 ni 4.

103 n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$. Sept nombres consécutifs sont $n-3$, $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$.
Leur somme est $7n$, donc cette somme est divisible par 7.

104 Les nombres parfaits inférieurs à 30 sont 6 et 28.
• Diviseurs positifs de 6 : 1, 2, 3, 6.
Or, $1+2+3=6$ et 6 est un nombre parfait.
• Diviseurs positifs de 28 : 1, 2, 4, 7, 14, 28.
Or, $1+2+4+7+14=28$ et 28 est un nombre parfait.

105 **a)** On suppose que $a-2b$ est divisible par 7, c'est-à-dire qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $a-2b=7k$.
Alors $a = 2b+7k$,
et $n = 10(2b+7k)+b = 21b+70k$
soit $n = 7(3b+10k)$.
Ainsi, n est divisible par 7.
b) On suppose que n est divisible par 7 c'est-à-dire qu'il existe un nombre k' de $\mathbb{N}$ tel que $10a+b=7k'$.
Alors, $b = 7k'-10a$, et $a-2b = a-2(7k'-10a)$,
soit $a-2b = 21a-14k' = 7(3a-2k')$.
Ainsi, $a-2b$ est divisible par 7.
c) $574 = 10a+b$ avec $a=57$ et $b=4$.
$a-2b = 57-2\times4 = 49$
Or, 49 est divisible par 7, donc 574 est divisible par 7.

106 Les diviseurs de 56 sont :
$-56, -28, -14, -8, -7, -2, -1$, 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56
Ainsi : $56 = -56 \times (-1)$ ou $56 = -28 \times (-2)$
ou $56 = -14 \times (-4)$ ou $56 = -8 \times (-7)$
ou $56 = -1 \times (-56)$ ou $56 = -2 \times (-28)$
ou $56 = -4 \times (-14)$ ou $56 = -7 \times (-8)$
ou $56 = 1 \times 56$ ou $56 = 2 \times 28$ ou $56 = 4 \times 14$
ou $56 = 7 \times 8$ ou $56 = 56 \times 1$ ou $56 = 28 \times 2$
ou $56 = 14 \times 4$ ou $56 = 8 \times 7$.
Il y a 16 couples $(a\,;b)$ avec a et b nombres de $\mathbb{Z}$, qui conviennent.

107 **a)** Oui, $2+3=5$ et 2, 3, 5 sont des nombres premiers.

b) Non, car la somme de trois nombres impairs consécutifs est divisible par 3.

En effet, avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 1$,

$2k-1+2k+1+2k+3=6k+3=3(2k+1)$.

108 **1.** $\mathrm{N}=2^3\times 3\times 19$

2. a) n n'est pas un diviseur positif de $\mathbb{N}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{N}=n\times k$.

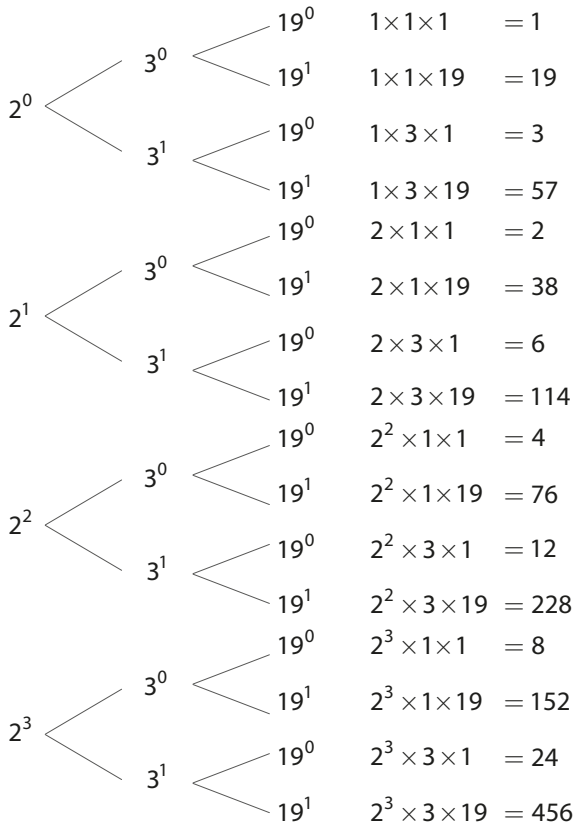
Si p est un diviseur premier de n, alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{N}=p\times k'\times k$.

La décomposition en produit de facteurs premiers de $p\times k'\times k$ contiendra le facteur p. Or, cette décomposition est $2^3\times 3\times 19$ donc cela n'est possible que si $p=2$ ou $p=3$ ou $p=19$.

b) Les nombres a, b, c, vérifient :

$0\leqslant a\leqslant 3$, $0\leqslant b\leqslant 1$ et $0\leqslant c\leqslant 1$.

3.



Les diviseurs positifs de 456 sont :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 19, 24, 38, 57, 76, 114, 152, 228, 456.

109 **1.** $3388=44\times 77=2^2\times 11\times 7\times 11$
$=2^2\times 7\times 11^2$

2. a) Non

b) Oui car $3388=22\times(2\times 7\times 11)$

c) Oui car $3388=28\times 11^2$

d) Oui car $3388=2\times 7\times 11\times(2\times 11)$

e) Oui car $3388=7\times 11^2\times 2^2$

f) Oui car $3388=(2\times 11)^2\times 7$

110 **1.** $126=2\times 3^2\times 7$

$180=2^2\times 3^2\times 5$

2. a) 2×3^2 divise 126 et 180.

b) $3^3\times 5$ ne divise ni 126 ni 180.

c) $2^2\times 11$ ne divise ni 126 ni 180.

d) $2^2\times 3$ divise 180 mais pas 126.

3. Le plus grand diviseur commun à 126 et 180 est 2×3^2 c'est-à-dire 18.

111 **1.** $220=2^2\times 5\times 11$

$90=2\times 3^2\times 5$

2. a) $2^3\times 5\times 11$ est un multiple de 220 mais pas de 90.

b) $2\times 3^3\times 5\times 11$ est un multiple de 90 mais pas de 220.

c) $2^2\times 11$ n'est ni un multiple de 220 ni un multiple de 90.

d) $2\times 3\times 5\times 11\times 13$ n'est ni un multiple de 220 ni un multiple de 90.

e) $2^2\times 3^3\times 5^2\times 11^2$ est un multiple de 220 mais pas de 90.

3. Le plus petit commun multiple à 220 et 90 est $2^2\times 3^3\times 5\times 11$ c'est-à-dire 1 980.

112 **a)** $18=2\times 3^2$ et $24=2^3\times 3$.

b) Le plus petit multiple commun à 18 et 24 est $2^3\times 3^2$ c'est-à-dire 72.

$72=4\times 18$ et $72=3\times 24$, donc après 4 tours de la roue A et 3 tours de la roue B, elles se retrouveront pour la première fois dans la même position.

113 Le côté c d'un carré formé avec ces rectangles doit être un multiple de 48 et de 72.

$48=16\times 3=2^4\times 3$ et $72=8\times 9=2^3\times 3^2$.

Le plus petit multiple commun à 48 et 72 est $2^4\times 3^2$ c'est-à-dire 144.

Donc le côté du plus petit carré ainsi formé est 144 cm.

$144=3\times 48$ et $144=2\times 72$, donc ce carré est formé par 2×3 c'est-à-dire 6 de ces rectangles.

114 **a)** $324=2^2\times 3^4=(2\times 3^2)^2=18^2$

Donc 324 est le carré de 18.

b) $216=2^3\times 3^3=(2\times 3)^3=6^3$

Donc 216 est le cube de 6.

115 **a)** $A = \frac{24}{60} + \frac{12}{60} = \frac{36}{60}$

Donc $A = \frac{6 \times 6}{6 \times 10} = \frac{6}{10} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$.

b) $A = \frac{2}{5} + \frac{3}{15} = \frac{6}{15} + \frac{3}{15} = \frac{9}{15}$.

Donc $A = \frac{3 \times 3}{3 \times 5} = \frac{3}{5}$.

116 **a)** $35 = 5 \times 7$ et $27 = 3^3$.

b) $\frac{14}{35} + \frac{18}{27} = \frac{2 \times 7}{5 \times 7} + \frac{2 \times 3^2}{3^3} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}$

$\frac{14}{35} + \frac{18}{27} = \frac{6}{15} + \frac{10}{15} = \frac{16}{15}$

117 **1.** $B = \frac{15}{90} - \frac{6}{90} = \frac{9}{90} = \frac{9}{9 \times 10} = \frac{1}{10}$

2. a) $6 = 2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$.

b) Le plus petit multiple commun à 6 et 15 est $2 \times 3 \times 5$ c'est-à-dire 30.

c) $B = \frac{5}{30} - \frac{2}{30} = \frac{3}{30} = \frac{3}{3 \times 10} = \frac{1}{10}$.

118 • $C = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{4}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$

• $D = \frac{8}{5^2} + \frac{1}{5 \times 12} = \frac{96}{25 \times 12} + \frac{5}{25 \times 12}$

$D = \frac{101}{300}$

• $E = \frac{1}{3} + \frac{3}{56} = \frac{56}{3 \times 56} + \frac{9}{3 \times 56} = \frac{65}{168}$

119 • $8 = 2^3$; $15 = 3 \times 5$; $6 = 2 \times 3$

On peut choisir $2^3 \times 3 \times 5$ c'est-à-dire 120 pour dénominateur commun.

$F = \frac{3 \times 15}{120} + \frac{2 \times 8}{120} + \frac{7 \times 20}{120} = \frac{201}{120}$

$F = \frac{3 \times 67}{3 \times 40} = \frac{67}{40}$

• $15 = 3 \times 5$; $18 = 2 \times 3^2$; $10 = 2 \times 5$

On peut choisir $2 \times 3^2 \times 5$ c'est-à-dire 90 pour dénominateur commun.

$G = \frac{13 \times 6}{90} - \frac{5}{90} + \frac{9 \times 9}{90} = \frac{154}{90}$

$G = \frac{2 \times 77}{2 \times 45} = \frac{77}{45}$

120 $H = \frac{7}{15} - \frac{5}{18} + \frac{9}{40}$

$15 = 3 \times 5$; $18 = 2 \times 3^2$; $40 = 2^3 \times 5$.

On peut choisir $2^3 \times 3^2 \times 5$ c'est-à-dire 360 pour dénominateur commun.

$H = \frac{7 \times 24}{360} - \frac{5 \times 20}{360} + \frac{9 \times 9}{360} = \frac{149}{360}$

121 **1. a)** $\frac{a}{10^n} = \frac{a}{(2 \times 5)^n} = \frac{a}{2^n \times 5^n}$

Ici, $p = q = n$.

b) 1er cas : $p > q$

$\frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a \times 5^{p-q'}}{2^p \times 5^q \times 5^{p-q}} = \frac{a \times 5^{p-q}}{2^p \times 5^p}$

$\frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a \times 5^{p-q}}{10^p}$

2^e^ cas : $p = q$

$\frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a}{2^p \times 5^p} = \frac{a}{10^p}$

3^e^ cas : $p < q$

$\frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a \times 2^{q-p}}{2^{q-p} \times 2^p \times 5^q} = \frac{a \times 2^{q-p}}{2^q \times 5^q}$

$\frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a \times 2^{q-p}}{10^q}$

2. a) $75 = 3 \times 5^2$ donc 75 n'est pas de la forme $2^p \times 5^q$ et $\frac{17}{75}$ n'est pas un nombre décimal.

b) $150 = 2 \times 75 = 2 \times 3 \times 5^2$ donc $\frac{11}{150}$ n'est pas un nombre décimal.

c) $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{7}{20}$ est un nombre décimal.

d) $12 = 2^2 \times 3$ donc $\frac{5}{12}$ n'est pas un nombre décimal.

e) $25 = 5^2$ donc $\frac{3}{25}$ est un nombre décimal.

f) $80 = 8 \times 10 = 2^3 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5$ donc $\frac{51}{80}$ est un nombre décimal.

g) $256 = 2^8$ donc $\frac{13}{256}$ est un nombre décimal.

h) $350 = 5 \times 7 \times 2 \times 5 = 2 \times 5^2 \times 7$ donc $\frac{17}{350}$ n'est pas un nombre décimal.

122 **1. a)** $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ce nombre est décimal.

b) $\frac{7}{3} + \frac{1}{6} = \frac{14}{6} + \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

Ce nombre est décimal.

c) $\frac{1}{3} + \frac{7}{6} = \frac{2}{6} + \frac{7}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Ce nombre est décimal.

2. $\frac{a}{3} + \frac{b}{6} = \frac{2a}{6} + \frac{b}{6} = \frac{2a + b}{6}$

Ce nombre est décimal dans le seul cas où elle est égale à $\frac{k}{2}$ (avec $k \in \mathbb{N}$) c'est-à-dire dans le seul cas où $2a + b = 3k$.

123 $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

Une fraction égale à $\frac{15}{21}$ est de la forme $\frac{5k}{7k}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

La somme des numérateur et dénominateur est $5k + 7k = 12k$.

$12k = 132$ lorsque $k = \frac{132}{12} = 11$.

La fraction égale à $\frac{15}{21}$ et dont la somme des numérateur et dénominateur est 132 est donc $\frac{55}{77}$.

124 $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

Une fraction égale à $\frac{15}{21}$ est de la forme $\frac{5k}{7k}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

La différence entre le numérateur et le dénominateur est $5k - 7k = -2k$.

$-2k = 30$ lorsque $k = \frac{30}{-2} = -15$.

La fraction égale à $\frac{15}{21}$ dont la différence entre le numérateur et le dénominateur est 30 est donc $\frac{-75}{-105}$.

125 $\frac{40}{56} = \frac{5}{7}$

Une fraction égale à $\frac{40}{56}$ est de la forme $\frac{5k}{7k}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

La somme du numérateur et du dénominateur est $5k + 7k = 12k$.

$12k = 125$ lorsque $k = \frac{125}{12}$, mais $\frac{125}{12} \notin \mathbb{Z}$.

Donc il n'existe pas de fraction égale à $\frac{40}{56}$ dont la somme des numérateur et dénominateur est égale à 125.

126 $\frac{168}{315} = \frac{8}{15}$

Une fraction égale à $\frac{168}{315}$ est de la forme $\frac{8k}{15k}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

La somme du numérateur et du dénominateur est $8k + 15k = 23k$.

$23k = 8\,303$ lorsque $k = \frac{8\,303}{23} = 361$.

La fraction égale à $\frac{168}{315}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est $8\,303$ est $\frac{8 \times 361}{15 \times 361}$ c'est-à-dire $\frac{2\,888}{5\,415}$.

127 On suppose que le plus petit diviseur p de n n'est pas premier.

Donc il existe des nombres a et b de $\mathbb{N}$ tels que $p = a \times b$ avec $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$.

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = kp = kab$.

Donc n est divisible par un nombre (a ou b) plus petit que p.

D'où la contradiction avec le fait que p est le plus petit diviseur de n.

Donc l'hypothèse supplémentaire « p n'est pas premier » est fausse et sa négation « p est premier » est vraie.

128 **a) Vrai.** En effet, 2 et 3 sont des nombres premiers consécutifs.

b) Faux. En effet, il existe un nombre impair non premier, par exemple 9.

c) Faux. En effet, il existe un nombre premier pair, à savoir 2.

d) Vrai. En effet, 12 est divisible par 4 et par 6, mais n'est pas divisible par 24.

129 La réciproque est « Si a divise 23, alors pour tout nombre n de $\mathbb{Z}$, a divise $5n + 4$ et $2n - 3$. »

Cette réciproque est fausse. En effet, on suppose que a divise 23 ; alors, pour $n = 2$, 23 ne divise pas 14 (et ne divise pas 1).

Organiser son raisonnement

130 On décompose 168 et 315 en produits de facteurs premiers.

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$ $\qquad$ $315 = 3^2 \times 5 \times 7$

$$\frac{168}{315} = \frac{2^3 \times 3 \times 7}{3^2 \times 5 \times 7} = \frac{2^3 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{2^3 \times 3}{3^2 \times 5} = \frac{2^3}{3 \times 5}$$

Il y a donc trois fractions égales à $\frac{168}{315}$ avec $a < 168$ et $b < 315$.

Ces fractions sont : $\frac{56}{105}, \frac{24}{45}, \frac{8}{15}$.

131 **1.** Le reste de la division de a par 6 semble être 0, donc on peut conjecter que a est divisible par 6.

2. a) • Si n est pair, alors a est divisible par 2.

• Si n est impair, alors $n+1$ est pair donc a est divisible par 2.

Dans tous les cas, a est divisible par 2.

b) Lorsque l'on effectue la division euclidienne de n par 3, les restes possibles sont 0, 1 et 2 donc n s'écrit $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ (avec $k \in \mathbb{N}$).

• Si $n=3k$, alors n est divisible par 3 donc a est divisible par 3.

• Si $n=3k+1$, alors $2n+1=2(3k+1)+1=3(2k+1)$ est divisible par 3 donc a est divisible par 3.

• Si $n=3k+2$, alors $n+1=3k+3=3(k+1)$ est divisible par 3 donc a est divisible par 3.

c) 2 divise a et 3 divise a. De plus 2 et 3 ont pour seul diviseur commun 1, donc 2×3 divise a c'est-à-dire 6 divise a.

132 **1. a)**

7 744	2
3 872	2
1 936	2
968	2
484	2
242	2
121	11
11	11
1	

17 424	2
8 712	2
4 356	2
2 178	2
1 089	3
363	3
121	11
11	11
1	

$7\,744 = 2^6\times 11^2$ et $17\,424 = 2^4\times 3^2\times 11^2$

b) $7\,744 = 2^2\times(2^2)^2\times 11^2 = 2^2\times(4\times 11)^2 = 2^2\times 44^2$

$17\,424 = (2^2)^2\times 3^2\times 11^2 = 3^2\times(4\times 11)^2 = 3^2\times 44^2$

44^2 divise donc ces deux nombres.

2. a) $\sqrt{7\,744} = \sqrt{2^2\times 44^2} = \sqrt{2^2}\times\sqrt{44^2}$

$= 2\times 44 = 88$

b) $\sqrt{17\,424} = \sqrt{3^2\times 44^2} = \sqrt{3^2}\times\sqrt{44^2}$

$= 3\times 44 = 132$

c) $\dfrac{7\,744}{17\,424} = \dfrac{2^2\times 44^2}{3^2\times 44^2} = \dfrac{4}{9}$

133 **a)** On cherche la décomposition en produit de facteurs premiers de 2020.

2 020	2
1 010	2
505	5
101	101
1	

$2\,020 = 2^2\times 5\times 101$

Ainsi $5\times 101\times 2\,020 = 2^2\times 5^2\times 101^2 = (2\times 5\times 101)^2$

505 est donc le plus petit nombre entier naturel qui, multiplié par $2\,020$ donne un carré parfait.

b) $2\times 5^2\times 101^2\times 2\,020 = 2^3\times 5^3\times 101^3$

$= (2\times 5\times 101)^3$

Ainsi, $2\times 5^2\times 101^2$ est le petit nombre entier naturel qui, multiplié par $2\,020$ donne un cube parfait :

$$510\,050\times 2\,020 = 1010^3.$$

134 **1.** $n = \overline{mcdu} = m\times 10^3 + c\times 10^2 + d\times 10 + u$.

• Si n est divisible par 4, alors il existe un nombre entier naturel k tel $n=4k$.

$10^3 = 4\times 250$ et $10^2 = 4\times 25$.

On déduit que :

$$n - m\times 10^3 - c\times 10^2 = 4(k-250m-25c)$$

c'est-à-dire $d\times 10 + u = 4\text{K}$

avec $\text{K} = k - 250m - 25c$.

Or $\text{K}\in\mathbb{Z}$, donc $d\times 10+u$ c'est-à-dire $\overline{du}$ est divisible par 4.

• Réciproquement, si $\overline{du}$ est divisible par 4, alors $m\times 10^3 + c\times 10^2 + d\times 10 + u$ est divisible par 4 car 10^3 et 10^2 sont divisibles par 4. On déduit que n est divisible par 4.

2. a) $24 = 4\times 6$ donc 24 est divisible par 4. Par conséquent 324 est divisible par 4.

b) $46 = 4\times 11 + 2$ donc 46 n'est pas divisible par 4. Par conséquent 546 n'est pas divisible par 4.

c) $36 = 4\times 9$ donc 36 est divisible par 4. Par conséquent 1436 est divisible par 4.

d) $52 = 4\times 13$ donc 52 est divisible par 4. Par conséquent $548\,752$ est divisible par 4.

135 Le résultat du programme est p^2-4 pour un nombre premier $p\neq 2$ choisi en entrée.

p est un nombre premier différent de 2 donc p est un nombre impair. Il existe donc $k\in\mathbb{N}$ tel que $p=2k+1$.

$p^2-1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2+4k+1-1$

$= 4\left(k^2+k\right) = 4\text{K}$

avec $\text{K} = k^2+k$

$\text{K}\in\mathbb{N}$ donc 4 divise p^2-1. Par conséquent p^2-1 est un multiple de 4.

136 La longueur des morceaux est un diviseur commun à 875 et 1 375.

La longueur devant être la plus grande possible, on cherche le plus grand diviseur commun à 875 et 1 375.

On cherche la décomposition en produits de facteurs premiers de 875 et 1 375.

$875 = 5^3\times 7$ et $1378 = 5^3\times 11$.

Le plus grand diviseur commun est 5^3 c'est-à-dire 125.

Les morceaux ont pour longueur 125 cm.

La poutre de 875 cm sera partagée en 7 morceaux de longueur 125 cm chacun et la poutre de 1 375 cm sera partagée en 11 morceaux de longueur 125 cm chacun.

137 On note n un nombre entier naturel. Le reste de la division euclidienne de n par 5 est 1 donc $n-1$ est divisible par 5.
De même $n-1$ est divisible par 7, 10 et 15.
$n-1$ étant divisible par 10 est donc divisible par 2 $(n-1=10k=2\times 5k)$.
$n-1$ étant divisible par 15 est donc divisible par 3 $(n-1=15k=3\times 5k)$.
Par conséquent $n-1$ est divisible par 2, 3, 5 et 7 donc par $2\times 3\times 5\times 7$ c'est-à-dire 210.
Il existe donc $\mathrm{K}\in\mathbb{N}$ tel que $n-1=210\mathrm{K}$.
On cherche K tel que $1200\leqslant 210\mathrm{K}+1\leqslant 1700$
$1199\leqslant 210\mathrm{K}\leqslant 1699$
$\dfrac{1199}{210}\leqslant \mathrm{K}\leqslant \dfrac{1699}{210}$
Les seules valeurs de K possibles sont 6,7 et 8.
Donc les dividendes possibles sont :
- $n=6\times 210+1=1261$
- $n=7\times 210+1=1471$
- $n=8\times 210+1=1681$

138 **a)** $a=7$ et $b=50$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
m	1	7	14	21	28	35	42	49	56
$m <= b$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

On obtient l'affichage $7\times 7=49$.
b) Le programme permet d'obtenir le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b.
Avec $a=7$ et $b=50$ on obtient l'écran

```
>>>
7 x 7 = 49
```

c) À l'aide du programme on obtient :

```
>>>
18518 x 54 = 999972
```

On effectue la division euclidienne de 1 000 000 par 54.
$1000\,000=18\,518\times 54+28$.
Donc le plus grand multiple de 54 inférieur ou égal à 1 000 000 est bien 18 518.

139 • Le nombre de tableaux utilisés est un diviseur commun aux nombres 224 et 288.
• Ce nombre doit être maximum, donc on cherche le plus grand diviseur commun à 224 et 288.
• On décompose 224 et 288 en produits de facteurs premiers.

224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$224=2^5\times 7$ et $288=2^5\times 3^2$.
Le plus grand commun diviseur est 2^5, c'est-à-dire 32.
• Le photographe utilisera 32 panneaux qui contiendront chacun 7 paysages et 9 portraits.

140 Le premier motard met 1 min 6 s pour un tour c'est-à-dire 66 s.
Le deuxième premier motard met 1 min 10 s pour un tour c'est-à-dire 70 s.
Le troisième premier motard met 1 min 17 s pour un tour c'est-à-dire 77 s.
On note T le temps mis par les motards pour être à nouveau ensemble sur la ligne de départ.
T est le plus petit multiple commun à 66, 70 et 77.
Or $66=2\times 3\times 11$, $70=2\times 5\times 7$ et $77=7\times 11$
Donc $\mathrm{T}=2\times 3\times 5\times 7\times 11=2\,310$.
C'est au bout de $2\,310$ s, c'est-à-dire 38 min 30 s que les trois motards seront à nouveau ensemble sur la ligne de départ.

141 **a)** The volume of a side cube a is a^3.
The volume of the box is $\ell\times \mathrm{L}^2$.
So a^3 is a divisor of $\ell\times \mathrm{L}^2$.
The decomposition into products of prime factors of:
- 882 is $2\times 3^2\times 7^2$;
- 945 is $3^3\times 5\times 7$.

So that of 882×945 is $2\times 3^5\times 5\times 7^3$.
So all possible values for a are 3, 7 and $3\times 7=21$.
b) $\mathrm{V}=77\,760$, $a=12$, $a^3=1728$ and $\dfrac{\mathrm{V}}{13}=45$.
So we need 45 cubes of side 12 to fill the box.
$45=9\times 5=3^2\times 5$ and the box have a square base so $\ell=3\times 12=36$ and $\mathrm{L}=5\times 12=60$

142 Pour tout nombre entier naturel p,

$$1-\frac{4}{(2p+1)^2}=\left(1-\frac{2}{2p+1}\right)\left(1+\frac{2}{2p+1}\right)$$
$$=\frac{2p-1}{2p+1}\times\frac{2p+3}{2p+1}$$
$$1-\frac{4}{(2p+1)^2}=\frac{(2p-1)(2p+3)}{(2p+1)^2}.$$
$$\mathrm{A}=\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4}{199^2}\right)$$

$$A = \frac{-1\times 3}{1}\times\frac{1\times 5}{3^2}\times\frac{3\times 7}{5^2}\times\ldots\times\frac{197\times 201}{199^2}$$
$$A = -\frac{201}{199}$$

143 Pour tout nombre entier naturel n,
$n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$
$n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2n)$
$n^4+4=[(n-1)^2+1][(n+1)^2+1]$.
$n^4+4>5$ implique $n^4>1$ donc $n>1$.
Or, pour $n>1$, $(n-1)^2+1>1$ et $(n+1)^2+1>1$ donc n^4+4 est le produit de deux nombres entiers strictement plus grand que 1 donc n^4+4 n'est pas premier.
Ainsi, pour $n>1$, n^4+4 n'est pas premier.
Pour $n=0$, $n^4+4=4$ et 4 n'est pas premier.
Pour $n=1$, $n^4+4=5$ et 5 est premier.
Donc, n^4+4 ne désigne un nombre premier que dans le cas où $n=1$.

144 $2\,021^4+64=2\,021^4+8^2$
$=(2\,021^2+8)^2-2\times 8\times 2\,021^2$
$2\,021^4+64=(2\,021^2+8)^2-(4\times 2\,021)^2$
$2\,021^4+64=(2\,021^2+8-4\times 2\,021)$
$(2\,021^2+8+4\times 2\,021)$
$2\,021^4+64=4\,076\,365\times 4\,092\,533$
$2\,021^4+64=5\times 815\,273\times 37\times 110\,609$.

145 **1. C.** En effet, 441 a 9 diviseurs : 1, 3, 7, 9, 21, 49, 63, 147, 441.
Et 48 a 10 diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24.
2. D. En effet, pour tout nombre k de $\mathbb{Z}$, $(2k+1)^2-(2k-1)^2$ est égale à
$(2k+1+2k-1)(2k+1-2k+1)$
$(2k+1)^2-(2k-1)^2=4k\times 2=8k$
3. A. En effet, pour tout nombre k de $\mathbb{Z}$,
$M=(2k-2)^2+(2k)^2+(2k+2)^2$
$M=4k^2-8k+4+4k^2+4k^2+8k+4$
$M=12k^2+8=4(3k^2+2)$
4. C. En effet, pour un nombre n à quatre chiffres m (milliers, non nul), c (centaines), d (dizaines), u (unités) :
$n=1000\,m+100\,c+10\,d+u$
$n=25(40\,m+4\,c)+10\,d+u$.
n est divisible par 25 si, et seulement si, le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25. Ainsi, n divisible par 25 si, et seulement si, il se termine par 00, 25, 50, 75.
Remarque : on procéderait de même pour un nombre à 5 chiffres, 6 chiffres, …

5. B. En effet, il y a 25 nombres premiers compris entre 1 et 100, donc la probabilité de choisir au hasard un nombre premier entre 1 et 100 est $\frac{25}{100}$ c'est-à-dire $\frac{1}{4}$.
6. C. En effet, $2^{12}\times 3^6=(2^4\times 3^2)^3$.
7. D. En effet, le plus grand diviseur commun à :
• 12 et 124 est 4 ; • 28 et 94 est 2 ;
• 35 et 60 est 5 ; • 48 et 72 est 24.
8. D. En effet, $286=2\times 11\times 13$ et $6\,873=3\times 29\times 79$ donc 286 et 6 873 n'ont pas de diviseur commun autre que 1.
9. B. En effet, 1 h 12 min = 72 min et on cherche le plus petit multiple commun à 72 et 54.
$72=2^3\times 3^2$ et $54=2\times 3^3$, donc ce plus petit multiple commun est $2^3\times 3^3$ soit 216.
Les bus reviennent en même temps à la station 216 min plus tard, c'est-à-dire 3 h 36 min plus tard, soit à 9 h 36.
10. D. En effet, les diviseurs de 496 sont :
1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496.
Somme : $992=2\times 496$.

Exploiter ses compétences

146 On note T le temps, en s, mis par les trois feux pour émettre à nouveau simultanément.
T est le plus petit multiple commun à 16 s, 45 s et 120 s.
Or $16=2^4$, $45=3^2\times 5$ et $120=2^3\times 3\times 5$ donc $T=2^4\times 3^2\times 5=720$ c'est-à-dire $T=720$ s.
Or, 720 s = 12 min. Donc les trois phares émettront ensemble à nouveau à 0 h 12 min.
Entre aujourd'hui minuit et demain minuit il y a 24 h soit 1440 min.
Or, 1440 est un multiple de 12 donc demain à minuit les trois phares émettront simultanément.

147 Avec l'écran de calcul formel ci-dessous, on obtient la décomposition en produit de facteurs premiers suivante :

1	FacteursPremiers(198490572007)
	→ {7, 13, 29, 29, 1373, 1889}

$198\,490\,572\,007=7\times 13\times 29^2\times 1373\times 1889$
• L'Exposition universelle est celle de 1889 à Paris.

Les fouilles se sont donc déroulées un an avant c'est-à-dire en 1888.

• En 1373, il s'agit de la bataille de Chizé (le 21 mars), actuellement dans le département des Deux-Sèvres. Il s'agit d'une bataille de la guerre de Cent Ans. Elle a été remportée par Bertrand du Guesclin (53 ans), Connétable de France, sur les Anglais et elle a mis fin à la domination anglaise dans le Poitou.

• Lors de ces fouilles, ont été découvertes une lance de 7 pieds (environ un peu plus de 2 m de long), un boulet de 13 livres (environ 6 kg) et un carreau d'arbalète de 29 cm.

• Enfin, le mois de la découverte comptait 29 jours. Il s'agirait en fait du mois de février 1888.

148 On note d la distance d'un arbuste au suivant.
d divise 1 484 (cm) et 1 060 (cm). Donc d est un diviseur commun à 1 484 et 1 060.
On cherche les décompositions en produits de facteurs premiers de ces deux nombres.

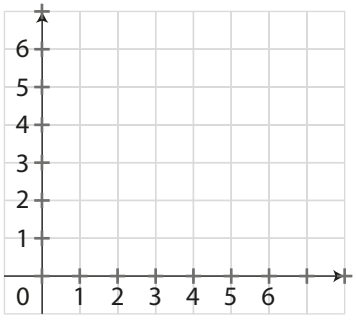
1 484	2		1 060	1	
742	2		530	2	
371	7		265	5	
53	53		53	53	
1			1		

Donc $1484 = 2^2 \times 7 \times 53$
$1060 = 2^2 \times 5 \times 53$.
Diviseurs positifs de 1 484 : 1, 2, 4, 7, 14, 28, 53, 106, 212, 371, 742, 1 484
Diviseurs positifs de 1 060 : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 53, 106, 212, 265, 530, 1 060
D'après le Doc. 1, $100 \leqslant d \leqslant 200$ donc $d = 106$.
Les arbustes sont donc à planter tous les 106 cm soit 1,06 m
Sur la longueur il faut 14 espaces de 1,06 m donc 15 arbres.
Sur la largeur il faut 10 espaces de 1,06 m donc 11 arbustes.
Dans chaque coin il y a un arbuste :

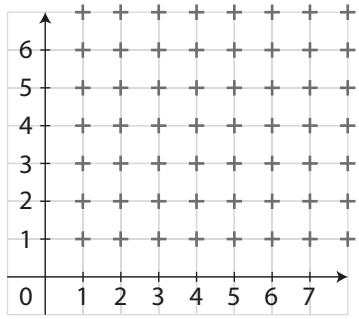
$$2 \times 15 + 2 \times 11 - 4 = 48$$

Donc le paysagiste devra facturer 48 arbustes.

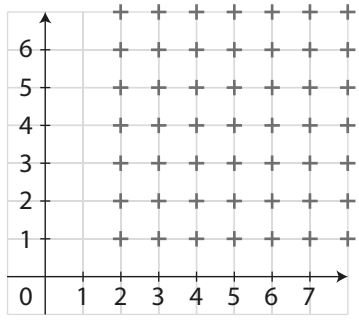
147 **Doc. 1**



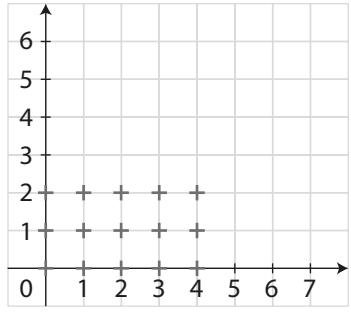
Doc. 2



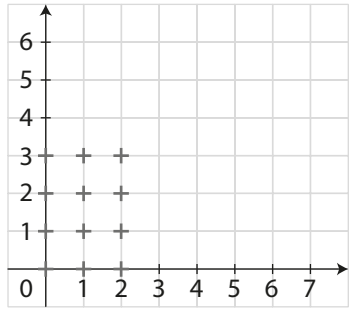
Doc. 3



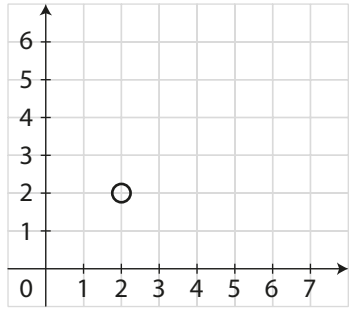
Doc. 4



Doc. 5



Doc. 6



4 Équations et inéquations

Découvrir

1 Solution d'une équation

1 **a)** On retranche l'aire du carré de côté 6, à l'aire du grand carré de côté $x+6$, pour obtenir l'aire du rectangle AEFD.
Par ailleurs, l'aire de AEFD s'exprime par x^2+12x.
D'où $x^2+12x=(x+6)^2-36$.
b) $x^2+12x=45$ équivaut à $(x+6)^2-36=45$, soit $(x+6)^2=81$.
c) $x+6=9$ (car $x+6$ positif), soit $x=3$.

2 On considère un grand carré de côté $x+5$ et on procède comme au **a)** pour obtenir :
$x^2+10x=(x+5)^2-25$.
$x^2+10x=75$ équivaut à $(x+5)^2=100$ soit $x+5=10$ (car $x+5$ positif). Ainsi, $x=5$ est une solution de l'équation $x^2+10x=75$.

2 Inéquations

1 **a)** $312+3\times2\times12=384$. Donc Lamia paiera 384 € avec le pack A.
b) $216+5\times2\times12=336$. Donc Lamia paiera 336 € avec le pack B.

2 **a)** $\mathrm{A}(x)=312+3x$.
b) $\mathrm{B}(x)=216+5x$.
c) $x=60$ ou $x=72$ ou $x=84$ vérifient $312+3x<216+5x$.
Maxence paiera moins cher avec le pack A si il prend 60, 72 ou 84 leçons.
d) En tabulant à l'aide d'une calculatrice les fonctions $x\mapsto312+3x$ et $x\mapsto216+5x$, avec les nombres entiers naturels, on conjecture que pour $x>48$, $312+3x<216+5x$.

Acquérir des automatismes

3 $5(x-2)(2x+4)-(x^2-4)=0$
équivaut à $(x-2)[5(2x+4)-(x+2)]=0$
c'est-à-dire $(x-2)(9x+18)=0$,
soit $x=2$ ou $x=-2$.
$\mathcal{S}=\{-2\ ;\ 2\}$.

4 $(3x-1)^2-4(3x-1)=0$ équivaut à
$(3x-1)(3x-1-4)=0$, c'est-à-dire
$(3x-1)(3x-5)=0$, soit $x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{5}{3}$.
$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right\}$.

5 **a)** En factorisant on obtient : pour tout nombre réel x,
$(2x-1)(x+5)-3x(2x-1)=(2x-1)(x+5-3x)$
$(2x-1)(x+5)-3x(2x-1)=4x^2-1$
équivaut à $(2x-1)(-2x+5)-(4x^2-1)=0$.
b) $4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$.
$(2x-1)(-2x+5)-(4x^2-1)=0$,
équivaut à $(2x-1)(-2x+5)-(2x+1)(2x-1)=0$,
soit $(2x-1)(-2x+5-(2x+1))=0$,
c'est-à-dire
$(2x-1)(-4x+4)=0$. Ainsi, $x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=1$.
$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{2}\ ;1\right\}$.

6 $x+2=0$ équivaut à $x=-2$.
On résout l'équation dans $\mathbb{R}-\{-2\}$.
Pour $x\neq-2$, $\dfrac{2x-1}{x+2}=5$
équivaut à $2x-1=5(x+2)$,
c'est-à-dire $2x-1=5x+10$, soit $-3x-11=0$.
Ainsi, $x=-\dfrac{11}{3}$ et $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{11}{3}\right\}$.

7 $x-1=0$ équivaut à $x=1$. On résout l'équation dans $\mathbb{R}-\{1\}$.

Méthode d'Abdel

Pour $x \neq 1$, $\dfrac{2x^2+1}{x-1}-2x=0$

équivaut à $\dfrac{2x^2+1}{x-1}-\dfrac{2x(x-1)}{x-1}=0$,

soit $\dfrac{2x+1}{x-1}=0$, c'est-à-dire $2x+1=0$.

Ainsi, $x=-\dfrac{1}{2}$.

$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Méthode de Célia

Pour $x \neq 1$, $\dfrac{2x^2+1}{x-1}-2x=0$

équivaut à $\dfrac{2x^2+1}{x-1}=2x$,

c'est-à-dire $(2x^2+1)=2x(x-1)$,

soit $2x^2+1=2x^2-2x$. Ainsi, $x=-\dfrac{1}{2}$.

$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

10 **a)** Pour tout nombre réel x,

$A-B=x^2-2x+1=(x-1)^2$.

$(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $A \geqslant B$.

b) Pour tout nombre entier naturel n, les puissances de 3 et 5 sont strictement positives donc $C>0$ et $D>0$.

$\dfrac{C}{D}=\dfrac{5^{n+1}}{3^{n+2}}\times\dfrac{3^{n+1}}{5^n}=\dfrac{5}{3}$.

Or, $\dfrac{5}{3}>1$ donc $C>D$.

11 $-x-2=0$ équivaut à $x=-2$ donc on résout l'inéquation dans $\mathbb{R}-\{-2\}$.

De plus $3x+1=0$ équivaut à $x=-\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{3x+1}{-x-2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S}=]-\infty\,;-2[\cup\left[-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

12 $-x-5=0$ équivaut à $x=-5$ donc on résout l'inéquation dans $\mathbb{R}-\{-5\}$.

$-4x+1=0$ équivaut à $x=\dfrac{1}{4}$.

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-4x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{-4x+1}{-x-5}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=\left]-5\,;\dfrac{1}{4}\right]$

15 $\dfrac{4}{x}$ n'existe que si $x \neq 0$. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \neq 0$, l'inéquation est équivalente à $x-\dfrac{4}{x} \leqslant 0$,

soit $\dfrac{x^2-4}{x} \leqslant 0$, c'est-à-dire $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x} \leqslant 0$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x-2)(x+2)}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=]-\infty\,;-2]\cup]0\,;2]$.

16 **a)** $\dfrac{(x+1)^2}{x}$ n'existe que si $x \neq 0$. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \neq 0$, l'inéquation est équivalente à $\dfrac{(x+1)^2}{x}-x<0$, soit $\dfrac{x^2+2x+1}{x}-\dfrac{x^2}{x}<0$ c'est-à-dire $\dfrac{2x+1}{x}<0$.

$2x+1=0$ équivaut à $x=-\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x+1}{x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\mathcal{S}=\left]-\dfrac{1}{2}\,;0\right[$.

17 On note x la longueur AE avec $0 \leqslant x \leqslant 8$.

$\mathcal{A}=\dfrac{3}{2}x$ et $\mathcal{A}'=\dfrac{1}{2}\times 6(8-x)=3(8-x)$.

$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}'$ équivaut à $\dfrac{3}{2}x \leqslant 3(8-x)$,

c'est-à-dire $\dfrac{3}{2}x+3x \leqslant 24$, soit $\dfrac{9}{2}x \leqslant 24$.

Ainsi $x \leqslant \dfrac{16}{3}$ et $\dfrac{16}{3}<8$.

$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}'$ si, et seulement si, E occupe une position sur $[AB]$ telle que $AE \leqslant \dfrac{16}{3}$.

18 Ⓐ ①, Ⓑ ④ ou ②, Ⓒ ③, Ⓓ ②

19 $-6\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{12}{3}=4$ et $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ donc $-\frac{2}{3}$ est solution des équations $-6x=4$ et $x^2=9$.
$\frac{3}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$ donc $-\frac{2}{3}$ n'est pas solution de l'équation $\frac{3}{2}x=1$.

20 L'équation $(x^2-7)(x-1)=0$ convient : elle admet $-\sqrt{7}$, 1 et $\sqrt{7}$ comme solutions.

21 **a)** $4x=\frac{1}{3}$ équivaut à $x=\frac{1}{12}$. $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{12}\right\}$.
b) $\frac{2}{5}x=3$ équivaut à $x=\frac{15}{2}$. $\mathcal{S}=\left\{\frac{15}{2}\right\}$.
c) $\frac{3}{7}x=\frac{2}{9}$ équivaut à $x=\frac{14}{27}$. $\mathcal{S}=\left\{\frac{14}{27}\right\}$.

22 **a)** $8x-3=-5x-4$ équivaut à $13x=-1$ (par transformation d'écritures).
b) L'ensemble des solutions de $2x-1=0$ est $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ et $\frac{1}{2}$ n'est pas solution de $\frac{x-3}{2x-1}=0$.
Donc les deux équations ne sont pas équivalentes.
c) L'ensemble des solutions de $x^2=16$ est $\mathcal{S}=\{-4\,;4\}$ et -4 n'est pas solution de $x=4$.
Donc les deux équations ne sont pas équivalentes.

23 **a)** $\mathcal{S}=\{-3\,;-2\}$ **b)** $\mathcal{S}=\{-4\,;4\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right\}$ **d)** $\mathcal{S}=\left\{-1\,;0\,;\frac{1}{2}\right\}$

24 $\frac{2x-1}{3}=\frac{3x+5}{4}$
équivaut à $4(2x-1)=3(3x+5)$,
c'est-à-dire à $8x-4=9x+15$, soit à $x=-19$.

25 **a)** Pour $x\neq 2$, $\frac{2x+1}{x-2}=0$ équivaut à
$2x+1=0$ c'est-à-dire $x=-\frac{1}{2}$. $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
$x-2=0$ équivaut à $x=2$. On résout donc chaque équation dans $\mathbb{R}-\{2\}$.
b) Pour $x\neq 2$, $\frac{(4x-5)^2}{x-2}=0$
équivaut à $(4x-5)^2=0$,
c'est-à-dire $4x-5=0$, soit $\frac{5}{4}$. $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{4}\right\}$.
c) Pour $x\neq 2$, $\frac{(x-5)(x+6)}{x-2}=0$
équivaut à $(x-5)(x+6)=0$, c'est-à-dire $x-5=0$ ou $x+6=0$, soit $x=5$ ou $x=-6$. $\mathcal{S}=\{-6\,;5\}$
d) Pour $x\neq 2$, $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=0$ équivaut à $x+2=0$, c'est-à-dire $x=-2$. $\mathcal{S}=\{-2\}$.

26 **a)** $1^3-1=0$ et $(-1)^3+1=0$ donc -1 et 1 sont des solutions de l'équation $x^3-x=0$.
b) L'équation peut a priori admettre d'autres solutions : il convient donc de la résoudre.
$x^3-x=0$ équivaut à $x(x^2-1)=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $x^2-1=0$, soit $x=0$ ou $x=-1$ ou $x=1$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S}=\{-1\,;0\,;1\}$.

27 L'affirmation de Hanna est correcte et permet d'invalider l'affirmation de Victor.
$x^2-5x=0$ équivaut à $x(x-5)=0$, soit $x=0$ ou $x=5$.

28 **a) (1)** **b) (3)**

29 $f(x)=0$ équivaut à $(x-12)(3x+2)=0$, c'est-à-dire $x=12$ ou $x=-\frac{2}{3}$.
Donc l'affirmation d'Alban est fausse.

30 **a)** Pour tout nombre réel x,
$\mathrm{E}(x)=(3x-7)(1+2x-4)$
$\mathrm{E}(x)=(3x-7)(2x-3)$.
b) $\mathrm{E}(x)=0$ équivaut à $3x-7=0$ ou $2x-3=0$, soit $x=\frac{7}{3}$ ou $x=\frac{3}{2}$.
$\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\,;\frac{7}{3}\right\}$.

31 **a)** $(2x-1)(x+3)-(2x-1)(3x-1)=0$ équivaut à $(2x-1)(x+3-(3x-1))=0$, c'est-à-dire $(2x-1)(-2x+4)=0$, soit $x=\frac{1}{2}$ ou $x=2$.
$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\,;2\right\}$.
b) $(x-2)(x+3)=(x-5)(x+1)$ équivaut à $x^2+x-6=x^2-4x-5$, c'est-à-dire $5x=1$, soit $x=\frac{1}{5}$. $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{5}\right\}$.
c) $5x^2=3x$ équivaut à $5x^2-3x=0$, c'est-à-dire $x(5x-3)=0$, soit $x=0$ ou $x=\frac{3}{5}$. $\mathcal{S}=\left\{0\,;\frac{3}{5}\right\}$.
d) $(x-1)^2-(x-2)^2=0$
équivaut à $x^2-2x+1-x^2+4x-4=0$
c'est-à-dire $2x-3=0$ soit $x=\frac{3}{2}$.
$\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

32 • Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{2}$,

$$\frac{4x-7}{2x-1} - 9 = \frac{4x-7-9(2x-1)}{2x-1}$$

$$\frac{4x-7}{2x-1} - 9 = \frac{4x-7-18x+9}{2x-1}$$

$$\frac{4x-7}{2x-1} - 9 = \frac{-14x+2}{2x-1} = -\frac{14x-2}{2x-1}$$

• Pour $x \neq \frac{1}{2}$, $\frac{4x-7}{2x-1} = 9$ équivaut à $\frac{4x-7}{2x-1} - 9 = 0$ c'est-à-dire $-\frac{14x-2}{2x-1} = 0$ soit $14x - 2 = 0$. Ainsi $x = \frac{1}{7}$.

$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{7}\right\}$.

33 **a)** $x - 5 = 0$ équivaut à $x = 5$. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R} - \{5\}$.

Pour $x \neq 5$, $\frac{-3x+1}{x-5} = 1$ équivaut à $-3x + 1 = x - 5$, c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$.

$\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

b) $x + 7 = 0$ équivaut à $x = -7$. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R} - \{-7\}$.

Pour $x \neq -7$, $\frac{3-x}{x+7} = 2$ équivaut à $3 - x = 2(x+7)$, c'est-à-dire $x = -\frac{11}{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{11}{3}\right\}$.

34 $x - 1 = 0$ équivaut à $x = 1$ et $x - 2 = 0$ équivaut à $x = 2$. On résout l'équation dans $\mathbb{R} - \{1\,;2\}$.

Méthode de Yann :

Pour $x \neq 1$ et $x \neq 2$, $\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-5}{x-2} = 0$

équivaut à $\frac{(x-3)(x-2)-(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$

soit $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = 0$, c'est-à-dire $x + 1 = 0$.

Ainsi, $x = -1$.

$\mathcal{S} = \{-1\}$.

Méthode de Gaëlle :

Pour $x \neq 1$ et $x \neq 2$, $\frac{x-3}{x-1} = \frac{x-5}{x-2}$ équivaut à $(x-3)(x-2) = (x-5)(x-1)$, soit $x + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = -1$.

$\mathcal{S} = \{-1\}$.

35 **1. a)** $(x-2)^2 = 9$ équivaut à $x - 2 = \sqrt{9}$ ou $x - 2 = -\sqrt{9}$, c'est-à-dire $x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$.

b) $x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$ équivaut à $x = 5$ ou $x = -1$.

$\mathcal{S} = \{-1\,;5\}$.

2. a) Pour tout nombre réel x,

$(x-2)^2 - 9 = (x-2)^2 - 3^2 = (x+1)(x-5)$.

b) $(x-2)^2 = 9$ équivaut à $(x-2)^2 - 9 = 0$, c'est-à-dire $(x+1)(x-5) = 0$, soit $x = -1$ ou $x = 5$.

$\mathcal{S} = \{-1\,;5\}$.

36 On résout l'équation $f(x) = 0$, soit $(x-3)^2 - 49 = 0$. $(x-3)^2 - 49 = 0$ équivaut à $(x-3)^2 - 7^2 = 0$, c'est-à-dire $(x+4)(x-10) = 0$, soit $x = -4$ ou $x = 10$.

$\mathcal{S} = \{-4\,;10\}$.

Il n'y a que les nombres -4 ou 10 qui peuvent être saisis pour valeur du paramètre x afin que la fonction renvoie 0.

37 **1. a)** Pour tout nombre réel x,

$f(x) = (x-5)^2 - 36 = x^2 - 10x + 25 - 36$

$f(x) = x^2 - 10x - 11$.

b) Pour tout nombre réel x,

$f(x) = (x-5)^2 - 36 = (x-5)^2 - 6^2$,

$f(x) = (x+1)(x-11)$.

2. a) $f(x) = 0$ équivaut à $(x+1)(x-11) = 0$, soit $x = -1$ ou $x = 11$. $\mathcal{S} = \{-1\,;11\}$.

b) $f(x) = -36$ équivaut à $(x-5)^2 - 36 = -36$, c'est-à-dire $(x-5)^2 = 0$, soit $x = 5$. $\mathcal{S} = \{5\}$.

c) $f(x) = -11$ équivaut à $x^2 - 10x - 11 = -11$, c'est-à-dire $x(x-10) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 10$. $\mathcal{S} = \{0\,;10\}$.

d) $f(x) = -10x$ équivaut à $x^2 - 10x - 11 = -10x$, c'est-à-dire $x^2 - 11 = 0$ soit $x = \sqrt{11}$ ou $x = -\sqrt{11}$.

$\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{11}\,;\sqrt{11}\right\}$.

38 **a)** $\mathrm{A}(x) = 0$ équivaut à $4(x-3)(x+1) = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -1$. $\mathcal{S} = \{-1\,;3\}$.

b) $\mathrm{A}(x) = -12$ équivaut à $\mathrm{A}(x) + 12 = 0$ soit $4x^2 - 8x = 0$, c'est-à-dire $4x(x-2) = 0$. Ainsi, $x = 0$ ou $x = 2$. $\mathcal{S} = \{0\,;2\}$.

c) $\mathrm{A}(x) = 4x^2$ équivaut à $4x^2 - 8x - 12 = 4x^2$, soit $-8x - 12 = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{3}{2}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

39 **a)** $-3x \geqslant -3y$ **b)** $x + 3 \leqslant y + 3$ **c)** $\frac{x}{3} \leqslant \frac{y}{3}$

40 Le nombre de facteurs négatifs est égal à 1010 qui est pair, donc P est positif.

41 **(1) Vrai.** En effet, $a^2 \geqslant 0$ donc $a^2 + 7 > 0$, $b^2 \geqslant 0$ donc $b^2 + 7 > 0$. Donc $(a^2+2)(b^2+7) > 0$.

(2) Faux. En effet $a < b$ donc $a - b < 0$. Or, $a^2 + 4 > 0$, d'où $\dfrac{a-b}{a^2+4} < 0$.

(3) Faux. En effet, voici un contre-exemple : $a = b = 0$ conduit à $(a-2)^2(b^2-8) = -32$ et $-32 < 0$.

(4) Vrai. En effet, $(a-b)^2 \geqslant 0$, $a^2 + b^2 + 2 > 0$ et le quotient de nombres positifs est positif.

42 **a)** $a \leqslant b$ donc $6a \leqslant 6b$ (6 est positif) et $6a - 12 \leqslant 6b - 12$.

b) $a \leqslant b$ donc $-a \geqslant -b$ (-1 est négatif).

c) $a \leqslant b$ donc $-3a \geqslant -3b$ (-3 est négatif) et $-3a + 1 \geqslant -3b + 1$. Comme 5 est positif, il vient $\dfrac{-3a+1}{5} \geqslant \dfrac{-3b+1}{5}$.

43 **a)** $-2 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$, par addition membre à membre, il vient $-1 \leqslant x + y \leqslant 10$.

b) $-2 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$, donc $-4 \leqslant 2x \leqslant 12$ et $3 \leqslant 3y \leqslant 12$. Par addition membre à membre, il vient $-1 \leqslant 2x + 3y \leqslant 24$.

c) $1 \leqslant y \leqslant 4$ d'où $-4 \leqslant -y \leqslant -1$.

d) $-2 \leqslant x \leqslant 6$ et $-4 \leqslant -y \leqslant -1$, par addition membre à membre, il vient $-6 \leqslant x - y \leqslant 5$.

44 **a)** $2 \leqslant x \leqslant 5$ donc $2x \leqslant x^2 \leqslant 5x$ (x est positif),
$4 \leqslant 2x \leqslant 10$ $(2 > 0)$ et $10 \leqslant 5x \leqslant 25$ $(5 > 0)$.
Par conséquent, $4 \leqslant x^2 \leqslant 25$.
De plus, $-14 \leqslant -3x + 1 \leqslant -5$ (-3 est négatif).
Par addition membre à membre, il vient :
$-10 \leqslant x^2 - 3x + 1 \leqslant 20$.

b) $-3 \leqslant x \leqslant -1$ donc $-x \leqslant x^2 \leqslant -3x$ (x est négatif).
$1 \leqslant -x \leqslant 3$ et $3 \leqslant -3x \leqslant 9$.
Par conséquent, $1 \leqslant x^2 \leqslant 9$. De plus $0 \leqslant x + 3 \leqslant 2$.
Par addition membre à membre, il vient :
$1 \leqslant x^2 + x + 3 \leqslant 11$.

45 **a)** $0 \leqslant x \leqslant 1$ d'où x est positif.
Donc, $0 \times x \leqslant x \times x \leqslant 1 \times x$ soit $0 \leqslant x^2 \leqslant x$.

b) De $x^2 \leqslant x$, on en déduit $x \times x^2 \leqslant x \times x$ (x positif).
Donc $x^3 \leqslant x^2$.
Mais $x^2 \leqslant x$ d'après **b)**, d'où $x^3 \leqslant x$.

46 **a)** Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1[$,
$$1 + x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)-1}{1-x} = \frac{-x^2}{1-x} = \frac{x^2}{x-1}.$$

b) $0 \leqslant x < 1$ d'où $x - 1 < 0$.
De plus $x^2 \geqslant 0$.
La règle des signes d'un quotient conduit à $\dfrac{x^2}{x-1} \leqslant 0$.
D'où $1 + x - \dfrac{1}{1-x} \leqslant 0$, soit $1 + x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

47 Pour tout nombre réel a strictement positif, $\sqrt{a} > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}} > 0$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

a) Si $a \leqslant 1$, alors $\sqrt{a} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

b) Si $a > 1$, alors $\sqrt{a} > \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

48 **a)** Pour tout nombre entier naturel n non nul,
$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{\frac{0{,}9^{n+1}}{n+1}}{\frac{0{,}9^{n}}{n}} = \frac{0{,}9^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{0{,}9^{n}} = 0{,}9 \times \frac{n}{n+1}.$$

b) $n \leqslant n + 1$, ce qui conduit à :
$\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n+1}$ $(n + 1 > 0)$, soit $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$.

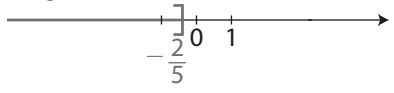
c) D'après **a)** et **b)**, $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} \leqslant 0{,}9$. Comme $\mathrm{A} > 0$ et $\mathrm{B} > 0$ et $0{,}9 \leqslant 1$, on en déduit que $\mathrm{B} \leqslant \mathrm{A}$.

49 **a)** $\dfrac{-1-1}{-2+1} = 2$ et $2 \geqslant 0$, donc -1 est solution de l'inéquation $\dfrac{x-1}{2x+1} \geqslant 0$.

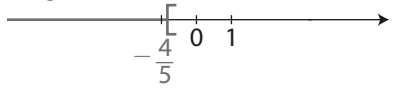
b) $(-1)^2 = 1$ et $1 < 4$, donc -1 n'est pas solution de l'inéquation $x^2 \geqslant 4$.

50 $-2x + 1 \geqslant 0$ équivaut à $x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x + 1 \geqslant 0$ est $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$.
La représentation de Romane n'est donc pas correcte.

51 **a)** $2x - 8 \leqslant -3x - 10$ équivaut à $5x \leqslant -2$ soit $x \leqslant -\dfrac{2}{5}$.
Représentation de l'ensemble des solutions à l'aide d'une droite graduée :



b) $-6x + 1 > 4x + 9$ équivaut à $-10x > 8$ soit $x < -\dfrac{4}{5}$.
Représentation de l'ensemble des solutions à l'aide d'une droite graduée :



52 **a) Vrai.** En effet $f(x) < 0$ équivaut à $x \in]-\infty\,;\,-4[\cup]1\,;\,+\infty[$ et $8{,}5 \in]-\infty\,;-4[\cup]1\,;\,+\infty[$.

b) Faux. En effet, $f(x) > 0$ équivaut à $x \in]-4\,;1[$ et $2 \notin]-4\,;1[$.

c) Faux. En effet $0 \in]-4\,;1[$ donc $f(0) > 0$ $5 \in]1\,;\,+\infty[$ et donc $f(5) < 0$.

d) Vrai. En effet $f(x) < 0$ équivaut à $x \in]-\infty\,;\,-4[\cup]1\,;\,+\infty[$.

53 **a)**

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-5)(-x+1)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

b) Grâce au tableau de signes précédent, on peut résoudre par exemple l'inéquation

$(2x-5)(-x+1) < 0$. $\mathcal{S} =]-\infty\,;1[\cup\left]\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

54 **a)**

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$x+\mathbf{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathbf{-4}x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+\mathbf{3})(\mathbf{-4}x+1)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

b) Grâce au tableau de signes précédent, on peut résoudre par exemple l'inéquation :

$(x+3)(-4x+1) \geqslant 0$. $\mathcal{S} = \left[-3\,;\,\frac{1}{4}\right]$.

55 $4+x=0$ équivaut à $x=-4$ et $x+2=0$ équivaut à $x=-2$.

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$4+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(4+x)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-4\,;\,-2[$.

56 **a)** $2x-6=0$ équivaut à $x=3$ et $-x+1=0$ équivaut à $x=1$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-6)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;1]\cup[3\,;\,+\infty[$.

b) $-3x-4=0$ équivaut à $x=-\frac{4}{3}$ et $-x-5=0$ équivaut à $x=-5$.

x	$-\infty$		-5		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x-4$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$(-3x-4)(-x-5)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-5[\cup\left]-\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$.

57 **a)**

x	$-\infty$		$-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$		$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{5x+2}{1-3x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

b) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{2}{5}\right]\cup\left]\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$

58 **a)** $-2x-5=0$ équivaut à $x=-\frac{5}{2}$ et $x+2=0$ équivaut à $x=-2$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
$-2x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x-5}{x+2}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

b) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{5}{2}\right[\cup]-2\,;\,+\infty[$.

59 **a)** $-4x-1=0$ équivaut à $x=-\frac{1}{4}$ et $-x+1=0$ équivaut à $x=1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$-4x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-4x-1}{-x+1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{4}\right]\cup]1\,;\,+\infty[$.

b) $x-1=0$ équivaut à $x=1$ et $-6x+1=0$ équivaut à $x=\frac{1}{6}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-6x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x-1}{-6x+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = \left]\frac{1}{6}\,;1\right]$.

60 L'affirmation de Noah est fausse. En effet, le signe x peut être négatif et il convient dans ce cas, d'inverser le sens de l'inégalité.

61 $0 \in]-2\,;2[$ et pour $x=0$, on a $\dfrac{x+2}{x-2}=-1$ et $-1<0$. Donc ce tableau est incorrect.

62 **1.** Pour tout nombre réel x,

a) $2x^2+3x=x(2x+3)$

b) $3(x-1)+(x-1)(x+2)=(x-1)(x+5)$.

2. a) $2x^2+3x<0$ équivaut à $x(2x+3)<0$.

$x(2x+3)=0$ équivaut à $x=-\dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=\left]-\dfrac{3}{2}\,;0\right[$.

b) $3(x-1)+(x-1)(x+2)>0$

équivaut à $(x-1)(x+5)>0$.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=]-\infty\,;-5[\cup]1\,;+\infty[$.

63 $x^2>49$ équivaut à $x^2-7^2>0$, soit $(x-7)(x+7)>0$.

$x-7=0$ équivaut à $x=7$ et $x+7=0$ équivaut à $x=-7$.

x	$-\infty$		-7		7		$+\infty$
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-7)(x+7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=]-\infty\,;-7[\cup]7\,;+\infty[$.

64 **a)** Pour tout nombre réel $x\neq-1$,

$\dfrac{2x-1}{x+1}+2=\dfrac{2x-1+2(x+1)}{x+1}=\dfrac{4x+1}{x+1}$.

b) Pour $x\neq1$, $\dfrac{2x-1}{x+1}+2\geqslant0$ équivaut à $\dfrac{4x+1}{x+1}\geqslant0$.

$4x+1=0$ équivaut à $x=-\dfrac{1}{4}$ et $x+1=0$ équivaut à $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4x+1}{x+1}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=]-\infty\,;-1[\cup\left[-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$.

65 Pour tout nombre réel $x\neq-1$,

$\dfrac{x^2-25}{x+1}\geqslant0$ équivaut à $\dfrac{(x-5)(x+5)}{x+1}\geqslant0$.

$x-5=0$ équivaut à $x=5$, $x+5=0$ équivaut à $x=-5$.

x	$-\infty$		-5		-1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x-5)(x+5)}{x+1}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=[-5\,;-1[\cup[5\,;+\infty[$.

66 **a)** $x\in[0\,;8]$

b) $\text{BM}=8-x$

67

	Âge du fils	Âge de la mère
Aujourd'hui	x	$x+30$
Dans 5 ans	$x+5$	$x+35$

La situation peut être modélisée par l'équation $x+35=2(x+5)$.

Donc l'équation $x+30=2(x+5)$ n'est pas correcte.

68 **a)** On note x, $x+1$ et $x+2$ les trois nombres entiers naturels consécutifs cherchés.

Le problème posé se traduit par l'équation :

$x+x+1+x+2=2\,019$.

b) $3x+3=2\,019$ équivaut à $x=672$.

672 673 et 674 sont les seuls nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 2 019.

69 On note x la longueur du carré étudié avec $x\geqslant0$.

Le problème posé se traduit par l'équation :

$(x+2)^2=x^2+20$.

$(x+2)^2=x^2+20$

équivaut à $x^2+4x+4-x^2=20$,

c'est-à-dire $4x+4=20$, soit $x=4$.

L'aire du carré étudié est 16 m^2.

70 On note x le nombre d'années (avec $x \geqslant 0$) avant que l'âge du père soit égal à la somme des âges des trois enfants.
Le problème posé se traduit par l'équation :

$$41 + x = 6 + x + 9 + x + 21 + x.$$

L'équation est équivalente à $x = 7$.
Dans 7 ans l'âge du père sera égal à la somme des âges des trois enfants.

71 **a)** Le problème posé se traduit par l'équation :
$\dfrac{3 \times 14 + 2 \times 17 + 1 \times 18 + 2 \times 16 + 2 \times x}{3 + 2 + 1 + 2 + 2} = 16,$
c'est-à-dire $\dfrac{126 + 2x}{10} = 16.$
b) $\dfrac{126 + 2x}{10} = 16$ équivaut à $126 + 2x = 160$, soit $x = 17$.
Laure doit donc obtenir 17 au dernier contrôle pour avoir une moyenne trimestrielle de 16 en SVT.

72 **a)** L'aire du triangle ABM est égale à $\dfrac{\text{AB} \times \text{AM}}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{6x}{2}$.
L'aire du triangle MCD est égale à $\dfrac{\text{CD} \times \text{DM}}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{3(4 - x)}{2}$. Le problème peut donc se traduire par l'équation : $\dfrac{6x}{2} = \dfrac{3(4 - x)}{2}$.
b) $\dfrac{6x}{2} = \dfrac{3(4 - x)}{2}$ équivaut à $6x = 3(4 - x)$, soit $x = \dfrac{4}{3}$.
Lorsque M est situé à une distance $\dfrac{4}{3}$ du point A, sur $[\text{AD}]$, les aires des triangles ABM et MCD sont égales et c'est la seule possibilité.

73 On note x la longueur AM, avec $0 \leqslant x \leqslant 8$.
L'aire du trapèze AMCD est égale à $\dfrac{5(8 + x)}{2}$.
L'aire du triangle BCD est égale à $\dfrac{5(8 - x)}{2}$.
Le problème posé se traduit par l'inéquation :

$$\frac{5(8 + x)}{2} \geqslant 3 \times \frac{5(8 - x)}{2}.$$

$\dfrac{5(8 + x)}{2} \geqslant 3 \times \dfrac{5(8 - x)}{2}$
équivaut à $40 + 5x \geqslant 120 - 15x$, soit $x \geqslant 4$.
L'aire de AMCD est supérieure ou égale au triple de l'aire de BCM si, et seulement si, le point M situé sur $[\text{AB}]$ est tel que $\text{AM} \geqslant 4$.

74 **1.** C **2.** D **3.** B **4.** D

75 **1.** B, C, D **2.** A, C, D **3.** C **4.** A, B

76 **1. Faux**. En effet, résoudre l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ nécessite des transformations d'écritures tandis que la forme factorisée permet de résoudre simplement une équation produit nul.
2. Vrai. En effet, $\text{E}(x) = 0$ équivaut à $(x - 3)(x + 1) = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -1$.
3. Vrai. En effet, $\text{E}(x) = -4$ équivaut à $(x - 1)^2 - 4 = -4$, soit $(x - 1)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$.
4. Faux. En effet, $\text{E}(x) = -3$ équivaut à $x^2 - 2x - 3 = -3$, soit $x(x - 2) = 0$.
Ainsi, l'équation admet deux solutions 0 et 2.

77 **a)** Yanis a raisonné comme s'il s'agissait d'une équation produit nul.
b) $(x + 1)(x + 3) = 3$ équivaut à $x^2 + 4x + 3 = 3$, c'est-à-dire $x^2 + 4x = 0$, soit $x(x + 4) = 0$. Ainsi, $x = 0$ ou $x = -4$.
$\mathcal{S} = \{-4 ; 0\}$.

78 **a)** L'inégalité doit être inversée car chaque membre de l'inéquation $-6x \leqslant -2$ est divisé par -6 qui est négatif. De plus le dénominateur de la fraction est -6. D'où $x \geqslant \dfrac{-2}{-6}$,
C'est-à-dire $x \geqslant \dfrac{1}{3}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \left[\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$.
b) $-6x + 3 \geqslant -3x + 1$ équivaut à $x \leqslant \dfrac{2}{3}$.
$\mathcal{S} = \left]-\infty ; \dfrac{2}{3}\right]$.

79 **a)** $x - 1 = 0$ équivaut à $x = 1$. Comme $a = 1$ est positif, les signes sont dans l'ordre $-$ puis $+$, séparés par 0.
b)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - 1)(x + 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Ce tableau permet de résoudre par exemple l'inéquation $(x - 1)(x + 2) > 0$.

80 **a)**

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x + 3}{2 - x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

b) La double barre signifie que 2 est une valeur interdite, c'est-à-dire que l'expression $\frac{x+3}{2-x}$ n'a pas de sens pour $x = 2$.
c) $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-3] \cup]2\,;\,+\infty[$.

S'entraîner

82 **a)** Case rouge : $212{,}44 + 0{,}061x$.
Case bleue : $a = b$. Case verte : $a < b$.
Case noire : Le fournisseur B est plus avantageux.
b) On résout l'inéquation :
$268{,}36 + 0{,}059x < 212{,}44 + 0{,}061x$,
c'est-à-dire $55{,}92 < 0{,}002x$ soit $x > 27\,960$.
Le fournisseur A est plus avantageux à partir de 27 960 kWh consommés.

84 **1. b)** On conjecture que lorsque a varie, la valeur maximum de l'aire du rectangle CEFG est égale à 4.
2. On note x la longueur EB avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.
L'aire de CEFG est $\mathcal{A} = (4-x) \times x$.
La conjecture se traduit par $\mathcal{A} \leqslant 4$.
$(4-x) \times x \leqslant 4$ équivaut à
$-x^2 + 4x - 4 \leqslant 0$, c'est-à-dire $(x-2)^2 \geqslant 0$. Cette inégalité est vraie pour tout nombre réel x de $[0\,;\,4]$ donc la conjecture est démontrée.

85 **1. a)** La somme des deux nombres cherchés est égale à 60 et le produit est égal à 836. D'où $x + y = 60$ et $xy = 836$.
b) $y = 60 - x$ d'où $xy = 836$ conduit à $x(60-x) = 836$, donc x est solution de l'équation $-z^2 + 60z - 836 = 0$.
2. a) Le problème posé se traduit par l'équation $(30-z)(30+z) = 836$, c'est-à-dire $900 - z^2 = 836$ soit $z^2 = 64$.
a est une solution de l'équation $z^2 = 64$.
b) $z^2 = 64$ équivaut à $z = -8$ ou $z = 8$.
Finalement, les nombres cherchés sont 22 et 38.

86 **1. a)** $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $2(x+y) = 2$ c'est-à-dire $x + y = 1$.
Ainsi, $y = 1 - x$ et $x = 1 - y$.
De $-x \leqslant 0$, on déduit $1 - x \leqslant 1$ soit $y \leqslant 1$.
De $-y \leqslant 0$, on déduit $1 - y \leqslant 1$ soit $x \leqslant 1$.
b) $\mathcal{A} = xy = x(1-x)$.
2. a) $x(1-x) - \frac{1}{4} \leqslant 0$ équivaut à $-x^2 + x - \frac{1}{4} \leqslant 0$, soit $x^2 - x + \frac{1}{4} \geqslant 0$, c'est-à-dire $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$.
Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
b) Quelles que soient les longueurs x et y des côtés d'un rectangle de périmètre 2, l'aire de ce rectangle est toujours inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.

87 **b)** On conjecture que lorsque x varie, le rectangle ABCD d'aire 36 et de périmètre minimum est un carré de côté 6.
c) On note x et y les dimensions (avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$) d'un rectangle d'aire $\mathcal{A} = 36$ et on note $\mathcal{P}$ le périmètre de ce rectangle.
L'identité $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, valable pour tous nombres réels x et y, conduit à
$(2x+2y)^2 - (2x-2y)^2 = 16xy$,
c'est-à-dire $\mathcal{P}^2 = 16\mathcal{A} + (2x-2y)^2$ donc la valeur minimum de $\mathcal{P}^2$ est $16\mathcal{A} = 576$. Ainsi, la valeur minimum de $\mathcal{P}$ est égale à $\sqrt{576} = 24$ et elle est atteinte pour $(2x-2y)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = y$.
Comme $\mathcal{A} = 36$, il vient $x = 6$.
Les rectangles d'aire 36 et de périmètre minimum sont les carrés de côté 6.

88 **a)** $(6x+1)x = (3x+2)(6x+1)$
équivaut à $(6x+1)(x-3x-2) = 0$, c'est-à-dire
$(6x+1)(-2x-2) = 0$, soit $x = -\frac{1}{6}$ ou $x = -1$.
$\mathcal{S} = \left\{-1\,;\,-\frac{1}{6}\right\}$.
b) $(2x-1)^2 = (x+2)^2$
équivaut à $(2x-1)^2 - (x+2)^2 = 0$, c'est-à-dire
$(x-3)(3x+1) = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -\frac{1}{3}$.
$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\,;\,0\right\}$.
c) $3x(x^2+1) = x^2(x^2+1)$
équivaut à $(x^2+1)(3x-x^2) = 0$ c'est-à-dire
$x(x^2+1)(3-x) = 0$, soit $x = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$ ou $x = 3$. L'équation $x^2 + 1 = 0$, n'ayant pas de solution dans $\mathbb{R}$, il vient $\mathcal{S} = \{0\,;\,3\}$.

89 **a)** $(x+3)(x+2) + x^2 + 4x + 4 = 0$
équivaut à $(x+2)(x+3+x+2) = 0$, c'est-à-dire
$(x+2)(2x+5) = 0$ soit à $x = -2$ ou $x = -\frac{5}{2}$
$\mathcal{S} = \left\{-2\,;\,-\frac{5}{2}\right\}$.
b) $x^2 + 6x + 9 = x(x-4)$ équivaut à $10x + 9 = 0$ soit à $x = -\frac{9}{10}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{9}{10}\right\}$.

c) $(2x-1)(x+5)=4x^2-1$
équivaut à $(2x-1)(x+5-(2x+1))=0$,
c'est-à-dire $(2x-1)(-x+4)=0$ soit à $x=\frac{1}{2}$ ou $x=4$. $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\,;4\right\}$.

90 • $A(x)=0$ équivaut à $(x-3)(x^2+2)=0$, soit $x-3=0$ ou $x^2+2=0$.
L'équation $x^2+2=0$ n'ayant pas de solution dans $\mathbb{R}$, il vient $\mathcal{S}=\{3\}$.
• $A(x)=-6$ équivaut à $x^3-3x^2+2x-6=-6$, soit $x^3-3x^2+2x=0$. Ainsi, $A(x)=-6$ équivaut à $x(x^2-3x+2)=0$, soit (d'après la ligne 3 de l'écran) $x(x-2)(x-1)=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $x=2$ ou $x=1$. $\mathcal{S}=\{0\,;1\,;2\}$.

91 Pour déterminer l'abscisse du point d'intersection des deux courbes, on résout l'équation $f(x)=g(x)$.
$f(x)=g(x)$ équivaut à $1-(2x-1)^2=4x-\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $1-4x^2+4x-1=4x-\frac{3}{2}$, soit $4x^2=\frac{3}{2}$.
Ainsi, $f(x)=g(x)$ équivaut à $x^2=\frac{3}{8}$, soit $x=\sqrt{\frac{3}{8}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{3}{8}}$.
Comme $x\in[0\,;1]$, on conclut que l'abscisse du point A est $\sqrt{\frac{3}{8}}$, soit encore $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Son ordonnée est :

$$4\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{3}{2}=\sqrt{6}-\frac{3}{2}$$

92 **a)** Pour tout nombre réel $x\neq-2$,

$$x-2-\frac{5}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)-5}{x+2}=\frac{x^2-4-5}{x+2}$$
$$=\frac{x^2-9}{x+2}.$$

b) $x+2=0$ équivaut à $x=-2$, donc on résout l'équation dans $\mathbb{R}-\{-2\}$.
Pour $x\neq-2$, $x-2=\frac{5}{x+2}$
équivaut à $x-2-\frac{5}{x+2}=0$,
c'est-à-dire $\frac{x^2-9}{x+2}=0$, soit $x^2-9=0$.
Ainsi, $x=3$ ou $x=-3$. $\mathcal{S}=\{-3\,;3\}$.

93 **a)** Pour tout nombre réel x,
$(x-2)(x^2-1)=x^3-x-2x^2+2$
$(x-2)(x^2-1)=x^3-2x^2-x+2$
b) $x^3-2x^2-x+2=(x-2)(x+1)(x-1)$.
$x^3-2x^2-x+2=0$ équivaut à $x=2$ ou $x=-1$ ou $x=1$. $\mathcal{S}=\{-1\,;1\,;2\}$.

94 **a)** $V(x)=\frac{1}{3}\times\frac{x^2}{2}\times(8-x)=\frac{x^2}{6}(8-x)$.
b) • $(x-1)^2-13=x^2-2x+1-13=x^2-2x-12$
• $A=-(x-6)\times\frac{x^2-2x-12}{6}$

$A=-\frac{1}{6}(x^3-2x^2-12x-6x^2+12x+72)$
$A=-\frac{1}{6}(x^3-8x^2+72)$
$A=-\frac{1}{6}(x^3-8x^2)-\frac{1}{6}\times72$
$A=-\frac{1}{6}(x^2(x-8))-12=\frac{x^2}{6}(8-x)-12$

c) On résout $V(x)=12$ dans $[0\,;8]$.
$V(x)=12$ équivaut à $\frac{x^2}{6}(8-x)=12$, c'est-à-dire $\frac{x^2}{6}(8-x)-12=0$.
D'après **b)**, $V(x)=12$
équivaut à $-(x-6)\frac{x^2-2x-12}{6}=0$,
c'est-à-dire $-(x-6)\frac{(x-1)^2-13}{6}=0$
soit $x-6=0$ ou $(x-1)^2=13$.
Ainsi, $V(x)=12$ équivaut à $x=6$ ou $x=1+\sqrt{13}$ ou $x=1-\sqrt{13}$.
Or $x\in[0\,;8]$, donc le volume du tétraèdre CIJK est égal à 12 cm^2 si, et seulement si, $CI=6$ cm ou lorsque $CI=1+\sqrt{13}$ cm.

95 **a)** Les dénominateurs $2x-1$ et $x+1$ s'annulent respectivement pour $x=\frac{1}{2}$ et $x=-1$.
On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}-\left\{-1\,;\frac{1}{2}\right\}$.
b) Pour $x\neq\frac{1}{2}$ et $x\neq-1$, l'équation (E) équivaut à $(2x+1)(x+1)=(2x-1)(x+3)$: on utilise l'égalité des produits en croix.
c) L'équation (E) est équivalente à
$(2x+1)(x+1)-(x+3)(2x-1)=0$,
soit $2x^2+3x+1-(2x^2+5x-3)=0$,
c'est-à-dire $-2x+4=0$, ce qui équivaut à $x=2$.
$\mathcal{S}=\{2\}$.

96 **a)** $x^2\leqslant3x$ équivaut à $x^2-3x\leqslant0$, c'est-à-dire $x(x-3)\leqslant0$. $x-3=0$ équivaut à $x=3$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=[0\,;3]$.

b) $(3x+1)x \leqslant (3x+1)(6x+1)$

équivaut à $(3x+1)(x-6x-1) \leqslant 0$, c'est-à-dire $(3x+1)(-5x-1) \leqslant 0$.

$3x+1=0$ équivaut à $x=-\frac{1}{3}$ et $-5x-1=0$ équivaut à $x=-\frac{1}{5}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-5x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+1)(-5x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$.

c) $(x-1)(2x+4) \leqslant x^2-1$

équivaut à $(x-1)(2x+4)-(x-1)(x+1) \leqslant 0$

c'est-à-dire $(x-1)(x+3) \leqslant 0$.

$x-1=0$ équivaut à $x=1$ et $x+3=0$ équivaut à $x=-3$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = [-3\,;\,1]$.

97 **a)** Pour tout nombre réel x,

$A(x) = (1+x)^2 - (3x+2)(x+1)$

$A(x) = 1+2x+x^2-3x^2-3x-2x-2$

$A(x) = -2x^2-3x-1$.

b) Pour tout nombre réel x,

$A(x) = (1+x)(1+x-3x-2) = (1+x)(-2x-1)$

c) $A(x) \leqslant 0$ équivaut à $(1+x)(-2x-1) \leqslant 0$.

$1+x=0$ équivaut à $x-1$ et $-2x-1=0$ équivaut à $x=-\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(-2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-1] \cup \left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

• $A(x) \geqslant -1$ équivaut à $-2x^2-3x-1 \geqslant -1$, c'est-à-dire $-2x^2-3x \geqslant 0$, soit $x(-2x-3) \geqslant 0$.

$-2x-3=0$ équivaut à $x=-\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$x(-2x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{2}\,;\,0\right]$.

98 Pour tout nombre réel $x \neq -4$,

$$\frac{x-3}{x+4}-3 = \frac{(x-3)-3(x+4)}{x+4} = \frac{-2x-15}{x+4}$$
$$= -\frac{2x+15}{x+4}$$

On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}-\{-4\}$.

$\frac{x-3}{x+4} < 3$ équivaut à $\frac{-2x-15}{x+4} < 0$.

$-2x-15=0$ équivaut à $x=-\frac{15}{2}$ et $x+4=0$ équivaut à $x=-4$.

x	$-\infty$		$-\frac{15}{2}$		-4		$+\infty$
$-2x-15$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x-15}{x+4}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{15}{2}\right[\cup]-4\,;\,+\infty[$.

99 **a)** Pour tout nombre réel x différent de 0 et de 1,

$\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1} = \frac{x-1+3x}{x(x-1)} = \frac{4x-1}{x(x-1)}$.

b) Pour tout nombre réel $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1} \geqslant 0$ équivaut à $\frac{4x-1}{x(x-1)} \geqslant 0$.

$4x-1=0$ équivaut à $x=\frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x-1}{x(x-1)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\mathcal{S} = \left]0\,;\,\frac{1}{4}\right] \cup]1\,;\,+\infty[$.

100 Cadre rouge : $a > 0$

Cadre vert : « Les solutions sont les réels $x <$ »

101

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$(x-1)(x-3)$		+	0	−		−	0	+		+	
$(x-2)(x-4)$		+		+	0	−		−	0	+	
$\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$		+	0	−	‖	+	0	−	‖	+	

b) $\mathcal{S} = [1\,;2[\cup[3\,;4[$

102 On note x et y les deux nombres entiers cherchés.

Le problème posé se traduit par les équations

$x - y = 90$ et $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2}$.

$\begin{cases} x - y = 90 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 90 + y \\ x = \dfrac{5}{2}y \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = 90 + y \\ 90 + y = \dfrac{5}{2}y \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} x = 90 + y \\ \dfrac{3}{2}y = 90 \end{cases}$. Ainsi $\begin{cases} x = 150 \\ y = 60 \end{cases}$.

Les deux nombres cherchés sont 150 et 60 et il n'y a pas d'autres possibilités.

103 **a)** N et M appartiennent respectivement aux segments [AB] et [AC] et les droites (BC) et (NM) sont parallèles. En appliquant le théorème de Thalès, dans les triangles ABC et ANM, il vient $\dfrac{\text{AN}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AC}}$.

Ainsi, $\dfrac{x}{x+9} = \dfrac{4}{14}$, soit $\dfrac{x}{x+9} = \dfrac{2}{7}$.

b) Pour $x > 0$, $\dfrac{x}{x+9} = \dfrac{2}{7}$ équivaut à $7x = 2x + 18$, soit $x = \dfrac{18}{5}$.

$\text{AN} = \dfrac{18}{5}$ cm.

104 On note x le nombre entier cherché.

Le problème posé se traduit par l'équation $\dfrac{3+x}{7+x} = \dfrac{7}{3}$.

$\dfrac{3+x}{7+x} = \dfrac{7}{3}$ équivaut à $9 + 3x = 49 + 7x$, soit $x = -10$.

Il n'y a qu'un seul entier qui répond au problème posé : -10. On peut vérifier que $\dfrac{3-10}{7-10} = \dfrac{-7}{-3} = \dfrac{7}{3}$.

105 On note V_B, V_C et V_E les volumes respectifs de la boule, du cylindre et de l'eau dans le cylindre.

$\text{V}_\text{B} = \dfrac{4}{3}\pi \times 5^3$, $\text{V}_\text{C} = \pi \times 5^2 \times 14$ et $\text{V}_\text{E} = \pi \times 5^2 \times h$.

Le problème posé se traduit par l'inéquation :

$\text{V}_\text{B} + \text{V}_\text{E} \leqslant \text{V}_\text{C}$, c'est-à-dire

$\dfrac{4}{3}\pi \times 5^3 + \pi \times 5^2 \times h \leqslant \pi \times 5^2 \times 14$,

soit $\dfrac{4}{3} \times 5 + h \leqslant 4$, ce qui équivaut à $h \leqslant \dfrac{22}{3}$.

Finalement la hauteur d'eau maximum afin que celle-ci ne déborde pas lorsqu'on plonge la boule dans le cylindre est $\dfrac{22}{3}$ cm.

106 **1. a)** D appartient au segment [AB] qui a pour longueur 10 et D est distinct de A et B. Donc $0 < x < 10$.

Comme $\text{BD} = \text{DE}$ et E est un point de [AB] distinct de A et B, D ne peut ni atteindre ni dépasser le milieu de [AB].

Finalement, $0 < x < 5$.

b) • D et F sont respectivement situés sur les segments [AB] et [BC], les droites (DF) et (AC) sont perpendiculaires à la droite (AB) donc (DF) et (AC) sont parallèles. En appliquant le théorème de Thalès, dans les triangles ABC et DBF ; il vient $\dfrac{\text{BD}}{\text{BA}} = \dfrac{\text{DF}}{\text{AC}}$.

Ainsi, $\dfrac{x}{10} = \dfrac{\text{DF}}{5}$, soit $\text{DF} = \dfrac{1}{2}x$.

• Le théorème de Thalès appliqué dans les triangles ABC et EBH, conduit à $\dfrac{\text{BE}}{\text{BA}} = \dfrac{\text{EH}}{\text{AC}}$. Ainsi, $\dfrac{2x}{10} = \dfrac{\text{EH}}{5}$, soit $\text{EH} = x$.

Remarque : on peut aussi appliquer le théorème de Thalès dans les triangles BEH et BDF.

c) • $\mathcal{A}_1 = \text{DE} \times \text{DF} = x \times \dfrac{1}{2}x = \dfrac{1}{2}x^2$.

• $\mathcal{A}_2 = \text{AE} \times \text{EH} = (10 - 2x) \times x = -2x^2 + 10x$.

2. Le problème posé se traduit par l'inéquation

$\dfrac{1}{2}x^2 > -2x^2 + 10x$ c'est-à-dire $\dfrac{5}{2}x^2 - 10x > 0$.

$\dfrac{5}{2}x^2 - 10x > 0$ équivaut à $5x\left(\dfrac{1}{2}x - 2\right) > 0$.

$\dfrac{1}{2}x - 2 = 0$ équivaut à $x = 4$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$5x$		−	0	+		+	
$\dfrac{1}{2}x - 2$		−		−	0	+	
$5x\left(\dfrac{1}{2}x - 2\right)$		+	0	−	0	+	

Comme $x \in]0\,;5[$, on peut conclure que l'aire $\mathcal{A}_1$ est strictement supérieure à l'aire $\mathcal{A}_2$ si, et seulement si, le point D, situé sur [AB], est tel que $4 < \text{BD} < 5$.

107 On note x le côté, en cm, d'un petit triangle équilatéral (avec $x \geqslant 0$).
La somme des périmètres des trois petits triangles équilatéraux est égale à $3 \times (3x)$ c'est-à-dire $9x$.
Le périmètre de l'hexagone orange est $3x + 3(6 - 2x)$.
Or $3x + 3(6 - 2x) = 3x + 18 - 6x$
$3x + 3(6 - 2x) = 18 - 3x$.
Donc la conjecture de Loan est fausse. Loan n'a raison que dans le cas où les petits triangles ont 1,5 cm de côté.
En effet, $18 - 3x = 9x$ équivaut à $x = 1{,}5$.

108 **1. a)** $100 \times a = 123{,}232\,323\ldots$
Or, $100a = 122 + 1{,}232\,323\,23\ldots$
Soit $100a = 122 + a$.
a est donc solution de l'équation $100x = 122 + x$.
b) $100x = 122 + x$ équivaut à $x = \dfrac{122}{99}$.
Une écriture fractionnaire de a est donc $\dfrac{122}{99}$.
2. $1000b = 12\,345{,}345\,345\,345\ldots$
Or, $1000b = 12\,333 + 12{,}345\,345\ldots$
D'où b est solution de l'équation $1000x = 12\,333 + x$.
Finalement $b = \dfrac{12\,333}{999} = \dfrac{4\,111}{333}$.

109 On note $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$ et $n + 2$ les cinq nombres entiers naturels consécutifs cherchés avec $n \geqslant 2$.
Le problème posé se traduit par l'équation :
$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$, qui est équivalente à $n^2 - 12n = 0$, soit $n(n - 12) = 0$, c'est-à-dire $n = 0$ ou $n = 12$.
Comme $n \geqslant 2$, les cinq nombres entiers naturels sont 10, 11, 12, 13 et 14 et il n'y a que ces cinq possibilités.

110 **a) Faux.** En effet, on peut considérer le contre-exemple :
$4 \leqslant 5$ et $1 \leqslant 9$; or, $4 - 1 > 5 - 9$.
b) Vrai. En effet $2a - 2 \leqslant 2$ donc $a \leqslant 2$.
$11 - 3b \leqslant 2$ donc $b \geqslant 3$.
D'où : $a \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant b$.

111 **a) Faux.** En effet, on peut considérer le contre-exemple :
pour $x = 5$, $(x - 5)(-2x + 10) = 0$ et $0 \geqslant 0$.
b) Vrai. En effet, pour $x = 1{,}2$,
$\dfrac{x-1}{x-1{,}5} = -\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{2}{3} < 0$.
c) Faux. En effet, on peut considérer le contre-exemple :
pour $x = 3$, $x^2 - 6x + 9 = 0$ et $0 < 1$.

112 **a)** L'implication est vraie car :
$$0^3 - 9 \times 0 = 0 \text{ et } 3^3 - 9 \times 3 = 0$$
Réciproque : si $x^3 - 9x = 0$, alors $x = 0$ ou $x = 3$.
Cette implication est fausse.
Contre-exemple : -3 est aussi solution de l'équation $x^3 - 9x = 0$.
b) L'implication est fausse.
Contre-exemple : $x = -4$.
Réciproque : si $x \geqslant 1$, alors $x^2 \geqslant 1$.
Cette implication est vraie. Il suffit de multiplier chaque membre de l'inégalité $x \geqslant 1$ par x qui est positif, on obtient $x^2 \geqslant x$ et donc $x^2 \geqslant 1$.
c) L'implication est fausse.
Contre-exemple : $x = 0{,}5$.
Réciproque : si $\dfrac{x-1}{-x+6} \geqslant 0$, alors $x \in [0\,;\,8]$.
Cette implication est vraie car l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x-1}{-x+6} \geqslant 0$ est $[1\,;\,6[$ et l'intervalle $[1\,;\,6[$ est inclus dans l'intervalle $[0\,;\,8[$.

Organiser son raisonnement

113 On note x la longueur AC avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.
• L'aire $\mathscr{A}$ du domaine coloré est égale à
$\dfrac{1}{2}\pi \times \dfrac{AB^2}{4} - \dfrac{1}{2}\pi \times \dfrac{AC^2}{4} - \dfrac{1}{2}\pi \times \dfrac{BC^2}{4}$,
soit $\mathscr{A} = \dfrac{1}{8}\pi(AB^2 - AC^2 - BC^2)$.
Or, $AB^2 - AC^2 - BC^2 = AB^2 - x^2 - (AB - x)^2$.
Ainsi, $AB^2 - AC^2 - BC^2 = -2x^2 + 2x\text{AB}$.
• L'aire du carré est égale à x^2.
• Le problème posé se traduit par l'équation :
$\dfrac{1}{4}\pi(-x^2 + x\text{AB}) = x^2$,
c'est-à-dire $x\left(\left(-1 - \dfrac{1}{4}\pi\right)x + \dfrac{\pi\text{AB}}{4}\right) = 0$
soit $x = 0$ ou $x = \dfrac{\pi\text{AB}}{4 + \pi}$.
$x = 0$ est impossible car C est distinct de A.
$0 < \dfrac{\pi}{4 + \pi} < 1$ donc l'aire du domaine coloré est égale à l'aire du carré AECD si, et seulement si, C est le point du segment $[\text{AB}]$ tel que $\text{AC} = \dfrac{\pi\text{AB}}{4 + \pi}$.

Avec AB $= 6$ cm, il vient AC $= \dfrac{6\pi}{4+\pi}$ cm (environ 2,6 cm).

114 **1. b)** On conjecture que l'aire du triangle EFG est supérieure ou égale à 8 lorsque E, point de [AB], est soit à une distance de A inférieure ou égale à 6, soit en B.

2. a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;8]$,

$\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}(\text{ABCD}) - \mathscr{A}(\text{AEFD}) - \mathscr{A}(\text{EBG}) - \mathscr{A}(\text{FCG})$,

donc $\mathscr{A}(x) = 8^2 - \dfrac{8(x+6)}{2} - \dfrac{x(8-x)}{2} - \dfrac{2(8-x)}{2}$,

soit $\mathscr{A}(x) = 64 + \dfrac{1}{2}x^2 - 7x - 32 = \dfrac{1}{2}x^2 - 7x + 32$.

b) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;8]$,

$\mathscr{A}(x) - 8 = \dfrac{1}{2}x^2 - 7x + 24$.

Par ailleurs, $\dfrac{1}{2}(x-8)(x-6) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 14x + 48)$,

soit $\dfrac{1}{2}(x-8)(x-6) = \dfrac{1}{2}x^2 - 7x + 24$.

Finalement, $\mathscr{A}(x) - 8 = \dfrac{1}{2}(x-8)(x-6)$.

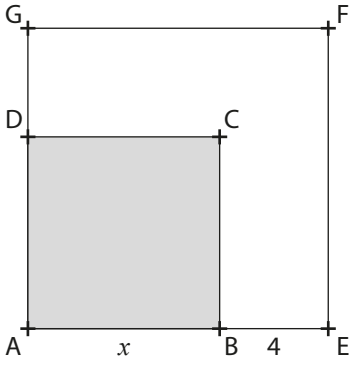
c) $\mathscr{A}(x) \geqslant 8$ équivaut à $\dfrac{1}{2}(x-8)(x-6) \geqslant 0$,

$x - 8 = 0$ équivaut à $x = 8$ et $x - 6 = 0$ équivaut à $x = 6$.

x	$-\infty$		6		8		$+\infty$
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{2}(x-6)(x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme $0 \leqslant x \leqslant 8$, il vient : l'aire du triangle EFG est supérieure ou égale à 8 si, et seulement si ; $x \in [0\,;6] \cup \{8\}$, c'est-à-dire E est un point de [AB] tel que AE $\leqslant 6$ ou E est en B.

115 Let x be the length of the square, $x > 0$.



We have : $(x+4)^2 = x^2 + 40$

Let's solve the equation $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 40$

This is equivalent to $8x + 16 = 40$, therefore $x = \dfrac{24}{8} = 3$.

Hence Peter is right.

Such a square does exist and $x = 3$ cm.

116 **a)** Cadre rouge : $x \leqslant 1{,}5$.

Cadre vert : $x = x + 0{,}25$.

b) Ce programme permet de trouver les solutions $-0{,}5$ et $0{,}5$ mais l'équation peut admettre d'autres solutions parmi les nombres non testés par le programme.

c) En développant le membre de gauche, on obtient un polynôme de degré 3.

Son terme constant est $8 \times (-0{,}25) \times c$.

On doit donc avoir $-2c = -3{,}5$ soit $c = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$.

On vérifie que le développement de $8(x^2 - 0{,}25)(x + 1{,}75)$ est $8x^3 + 14x^2 - 2x - 3{,}5$.

d) (E) est équivalente à $8(x^2 - 0{,}25)(x + 1{,}75) = 0$, c'est-à-dire $x^2 - 0{,}25 = 0$ ou $x + 1{,}75 = 0$, soit $x = -0{,}5$ ou $x = 0{,}5$ ou $x = -1{,}75$.

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathscr{S} = \{-1{,}75\,;\ -0{,}5\,;\ 0{,}5\}.$$

117 **a)**

```
def S(x):
    s=1.3*x
    return s

def A(x):
    a=29+x
    return a

x=0
while A(x)>=S(x):
    x=x+1
print(x)
```

On obtient :

```
>>>
97
```

b) On note x le nombre de trajets effectués (avec x un nombre entier naturel).

Le problème posé se traduit par l'inéquation $29 + x < 1{,}3x$.

$29 + x < 1{,}3x$ équivaut à $x > \dfrac{290}{3}$, soit $x \geqslant 97$ puisque x est un nombre entier naturel.

L'abonnement est intéressant à partir de 97 trajets.

118 L'aire du disque s'exprime par πx^2.

• L'aire de la partie verte s'exprime par $8 \times 2x - \pi x^2$, soit $16x - \pi x^2$.

• Le problème posé se traduit par l'équation $\pi x^2 = 16x - \pi x^2$.

$\pi x^2 = 16x - \pi x^2$ équivaut à $\pi x^2 - 8x = 0$, c'est-à-dire $x(\pi x - 8) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = \frac{8}{\pi}$.

Or $x > 0$, donc il y a une seule valeur de x pour laquelle le disque et la partie verte ont la même aire : $x = \frac{8}{\pi}$.

119 **1. a)** D et E sont des points respectifs de [AB] et [BC] ; les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (AB) donc (AC) et (DE) sont parallèles.

En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles ABC et DBE ; il vient $\frac{\text{BD}}{\text{BA}} = \frac{\text{DE}}{\text{AC}}$, soit $\frac{x}{4} = \frac{\text{DE}}{1{,}5}$. Ainsi, $\text{ED} = \frac{3}{8}x$.

b) $\mathcal{A}(x) = \frac{3}{8}x(4 - x)$.

2. a) $\mathcal{A}(2) = 2 \times \frac{3}{8}(4 - 2) = \frac{3}{2}$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$,

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(2) = \frac{3}{8}x(4 - x) - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}(4x - x^2 - 4)$$

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(2) = -\frac{3}{8}x(x - 2)^2.$$

b) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, $-\frac{3}{8}(x - 2)^2 \leqslant 0$, donc $\mathcal{A}(x) \leqslant \mathcal{A}(2)$.

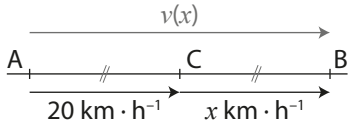
La valeur maximum de $\mathcal{A}(x)$ est $\mathcal{A}(2)$.

Donc on peut en déduire des dimensions de la baie vitrée rendant la luminosité maximum :

$\text{AD} = 4 \text{ m} - 2 \text{ m} = 2 \text{ m}$ et $\text{AF} = \frac{3}{8} \times 2 \text{ m} = \frac{3}{4} \text{ m}$.

Remarque : on se contente de justifier que le maximum de $\mathcal{A}$ est atteint au moins en $x = 2$.

120



On note C le milieu de [AB] donc $\text{AC} = \text{CB} = \frac{\text{AB}}{2}$.

On note t_{AB}, t_{AC} et t_{CB} les durées, en h, respectivement des trajets de A à B, de A à C et de C à B.

$$t_{\text{AC}} = \frac{\text{AC}}{20} = \frac{\text{AB}}{40} \text{ et } t_{\text{CB}} = \frac{\text{CB}}{x} = \frac{\text{AB}}{2x}.$$

a) $v(x) = \frac{\text{AB}}{t_{\text{AB}}} = \frac{\text{AB}}{t_{\text{AC}} + t_{\text{CB}}} = \frac{\text{AB}}{\frac{\text{AB}}{40} + \frac{\text{AB}}{2x}} = \frac{40x}{x + 20}$.

b) On résout dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $v(x) > 40$, c'est-à-dire $\frac{40x}{x + 20} > 40$, soit $\frac{-800}{x + 20} > 0$.

Or $-800 < 0$ et $x + 20 > 0$ $(x > 0)$

donc $-\frac{800}{x + 20} < 0$.

D'où l'inéquation n'a pas de solution dans $]0 ; +\infty[$.

La vitesse moyenne du cycliste ne peut donc pas dépasser $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

121 L'aire $\mathcal{A}_1$ du rectangle est égale à $\text{L} \times \ell$.

Si on procède aux modifications proposées, l'aire $\mathcal{A}_2$ du rectangle transformé est égale à $(\text{L} - 1) \times (\ell + 1)$.

On compare les deux aires par différence.

$\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = \text{L} \times \ell - \text{L} \times \ell - \text{L} + \ell + 1 = -\text{L} + \ell + 1$.

Donc, si $\ell + 1 < \text{L}$, alors $\mathcal{A}_1 < \mathcal{A}_2$,

si $\ell + 1 = \text{L}$, alors $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$,

si $\ell + 1 > \text{L}$, alors $\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_2$.

Finalement l'aire augmente uniquement dans le cas où $\ell + 1 < \text{L}$.

122 On note x la longueur DE avec $0 \leqslant x < 8$ ($x \neq 8$, sinon F n'existe pas).

D et E sont des points respectifs de [FC] et [AF] ; les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (CD), donc (AC) et (DE) sont parallèles.

En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles FCA et FDE, on obtient : $\frac{\text{FD}}{\text{FC}} = \frac{\text{DE}}{\text{AC}}$

c'est-à-dire $\frac{\text{DF}}{\text{DF} + 8} = \frac{x}{8}$ soit $\text{DF} = \frac{8x}{8 - x}$.

Le problème posé se traduit par l'inéquation :

$$\frac{8x}{8 - x} \leqslant 4.$$

$\frac{8x}{8 - x} \leqslant 4$ équivaut à $\frac{-12x + 32}{x - 8} \leqslant 0$.

Comme $x < 8$, $x - 8 < 0$, donc l'inéquation $\frac{-12x + 32}{x - 8} \leqslant 0$ équivaut à $-12x + 32 \geqslant 0$, soit $x \leqslant \frac{8}{3}$.

Finalement, $\text{DF} \leqslant 4$ si, et seulement si, le point E du segment [BD] est tel que $\text{DE} \leqslant \frac{8}{3}$.

123 **1. a)** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$.

b) Un carré est toujours positif ou nul dans $\mathbb{R}$ donc $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$. D'où $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geqslant 0$.

c) Pour tous nombres réels positifs a et b, on déduit de $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geqslant 0$ que $a + b \geqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b}$.

D'où $\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{a}\sqrt{b}$.

2. Pour tous nombres réels x et y, $x^2 \geqslant 0$ et $y^2 \geqslant 0$.

D'après **1. c)** $\frac{x^2 + y^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2}\sqrt{y^2}$, soit $\frac{x^2 + y^2}{2} \geqslant xy$.

De même, pour tous nombres réels positifs x, y et z

$\frac{x^2 + z^2}{2} \geqslant xz$ et $\frac{y^2 + z^2}{2} \geqslant yz$.

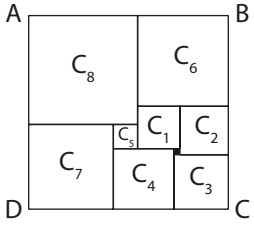
D'où par addition membre à membre, il vient :

$$\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{x^2+z^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2} \geqslant xy+xz+yz,$$

soit $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$.

124 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'où $2\alpha = 1+\sqrt{5}$, ce qui conduit à $2\alpha - 1 = \sqrt{5}$. Donc $(2\alpha-1)^2 = 5$, c'est-à-dire $4\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$, soit $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$.
Donc α est solution d'une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ à coefficients entiers.

125 On note C_1 le plus petit carré adjacent au petit carré noir et on note c le côté du carré C_1. On nomme ensuite les différents carrés comme indiqué sur la figure ci-contre.



• Comme le carré noir a pour côté 1, le carré C_2 a pour côté $c+1$ (côté carré noir + côté carré C_1)
• De même, le carré C_3 a pour côté $c+1+1 = c+2$ et le carré C_4 a pour côté $c+3$.
• Le carré C_5 a pour côté 4. En effet $c+3-(c-1) = 4$ (côté de C_4 − (côté de $C_1 - 1$)).
• Le carré C_6 a pour côté $c+c+1$, soit $2c+1$.
D'où $BC = 2c+1+c+1+c+2 = 4c+4$.
• Le carré C_7 a pour côté $c+3+4$, soit $c+7$.
• Le carré C_8 a pour côté $c+7+4$, soit $c+11$.
D'où $AD = c+11+c+7 = 2c+18$.
• De $AD = BC$, on déduit $2c+18 = 4c+4$, soit $c = 7$.
De plus, $AB = c+11+2c+1 = 3c+12$.
Finalement, $AD = 32$ et $AB = 33$.

126 1111111122 222 222 est un nombre à 16 chiffres composé de huit chiffres 1 et huit chiffres 2.

On observe que : $11 = \frac{100-1}{9} = \frac{10^2-1}{9}$,

$111 = \frac{1000-1}{9} = \frac{10^3-1}{9}$, $1111 = \frac{10^4-1}{9}$, etc.

On peut écrire :

1111111122 222 222 = 1111111111111111 + 11111111.

D'où : $1111111122\,222\,222 = \frac{10^{16}-1}{9} + \frac{10^8-1}{9}$.

Or $\frac{10^{16}-1}{9} + \frac{10^8-1}{9} = \frac{(10^8-1)(10^8+1)+10^8-1}{9}$,

$$\frac{10^{16}-1}{9} + \frac{10^8-1}{9} = \frac{(10^8-1)(10^8+2)}{9}$$

$$= \frac{10^8-1}{3} \times \frac{10^8+2}{3}.$$

L'équation s'écrit donc $x^2+x = \frac{10^8-1}{3} \times \frac{10^8+2}{3}$,

c'est-à-dire $x(x+1) = \frac{10^8-1}{3} \times \frac{10^8+2}{3}$.

Or, $\frac{10^8-1}{3} \times \frac{10^8+2}{3} = 33\,333\,333 \times 33\,333\,334$,

donc une solution de l'équation est 33 333 333.

127 **1. C.** En effet, l'équation $x(x-3) = x(4x-1)$ est équivalente à $x(-3x-2) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

2. B. En effet, l'inéquation $(x-4)^2 \leqslant (2x+1)^2$ est équivalente à $(x-4)^2 - (2x+1)^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire à $(3x-3)(-x-5) \leqslant 0$.
À l'aide d'un tableau de signes, on obtient $\mathcal{S} =]-\infty\,;-5] \cup [1\,;+\infty[$.

3. C. En effet, on résout l'équation dans $\mathbb{R} - \{3\}$ et l'équation $x + \frac{3x-8}{x-3} = 0$ est équivalente à $\frac{x^2-8}{x-3} = 0$, soit $x^2 = 8$, ce qui équivaut à $x = -2\sqrt{2}$ ou $x = 2\sqrt{2}$.

4. A. En effet, pour tout nombre réel x :

$$(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5$$

5. B. En effet, l'inéquation $\frac{1}{x-2} < \frac{1}{2x-1}$ est équivalente à $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2x-1} < 0$, soit $\frac{x+1}{(x-2)(2x-1)} < 0$.

6. B. En effet, l'équation :
$(x-3)(x+5) + x^2 - 6x + 9 = 0$ est équivalente à $(x-3)(2x+2) = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -1$.

7. A. En effet, un carré est toujours strictement positif ou nul.
$(x-7)^2 = 0$ équivaut à $x = 7$.

8. D. En effet, l'équation $(x+1)^2 - 8 = k$ est équivalente à $(x+1)^2 = 8+k$.
$k > -8$ équivaut à $8+k > 0$ donc l'équation admet exactement deux solutions.

9. C. En effet, $3 \leqslant x \leqslant 8$ et $-5 \leqslant -y \leqslant -1$, donc $3-5 \leqslant x-y \leqslant 8-1$, c'est-à-dire $-2 \leqslant x-y \leqslant 7$.

10. C. En effet, pour $x \neq -1$, $\frac{x^2-4}{-3x-3} = \frac{(x-2)(x+2)}{-3x-3}$ et le tableau de signes de $\frac{(x-2)(x+2)}{-3x-3}$ correspond à celui de $A(x)$.

Exploiter ses compétences

128 On note v la vitesse, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, du véhicule à l'instant du début du freinage et on note d la distance de freinage, en m, avec $v \geqslant 0$ et $d \geqslant 0$.
On a $d = 148{,}5$.

D'après le Doc. 1 : $148{,}5 = \dfrac{v}{5} + \dfrac{v^2}{150}$, soit

$$\frac{v^2}{150} + \frac{v}{5} - 148{,}5 = 0.$$

D'après le Doc. 2,

$$\frac{v^2}{150} + \frac{v}{5} - 148{,}5 = (v - 135)\frac{v + 165}{150}.$$

D'où, $\dfrac{v^2}{150} + \dfrac{v}{5} - 148{,}5 = 0$ équivaut à $v - 135 = 0$ ou $\dfrac{v + 165}{150} = 0$, soit $v = 135$ ou $v = -165$ (valeur impossible puisque $v > 0$).
$135 > 130$, donc d'après le Doc. 3, le conducteur était en infraction par rapport au code de la route à l'instant où il a commencé à freiner.

129 On note V_C et V_P les volumes, en cm^3, respectivement du cube et du parallélépipède rectangle.
On note S_C et S_P les surfaces totales en cm^2, respectivement du cube et du parallélépipède rectangle.
Pour tout nombre réel x, strictement positif,
$V_C = x^3$, $V_P = 84x$, $S_C = 6x^2$ et $S_P = 38x + 168$.
Le problème se traduit par $V_C \geqslant V_P$ et $S_C < S_P$.
• Pour $x > 0$, $V_C \geqslant V_P$ équivaut à $x^3 \geqslant 84x$ soit $x(x^2 - 84) \geqslant 0$.
Comme $x > 0$, l'inéquation est équivalente à $x^2 - 84 \geqslant 0$ **(1)**.
Sachant que $x > 0$, on obtient $x^2 - 84 \geqslant 0$ équivaut à $x \geqslant \sqrt{84}$, c'est-à-dire $x \geqslant 2\sqrt{21}$.
• Pour $x > 0$, $S_C < S_P$ équivaut à $6x^2 < 38x + 168$, c'est-à-dire $6x^2 - 38x - 168 < 0$ **(2)**.
D'après le Doc. 2, cette inéquation est équivalente à $2(x + 3)(3x - 28) < 0$.
Sachant que $x > 0$, on obtient $x \in \left]0\,;\dfrac{28}{3}\right[$.
• En croisant les solutions de **(1)** et **(2)**, on obtient que pour $x \in \left[2\sqrt{21}\,;\dfrac{28}{3}\right[$, l'entreprise pourra accroitre le volume de l'emballage tout en réduisant la surface de carton en privilégiant la fabrication du cube de côté x.

130 On note V_T et V_P les volumes, en cm^3, respectivement du tétraèdre IFGH et de la pyramide ABCDI.
On note x la longueur IC, en cm, avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.
D'après le Doc. 3, $V_T = \dfrac{1}{3}\dfrac{\text{GH} \times \text{GF}}{2} \times (10 - x)$ et $V_P = \dfrac{1}{3} \times \text{BA} \times \text{BC} \times x$.
D'après le Doc. 1, le problème posé se traduit par l'équation : $\dfrac{1}{3}\dfrac{\text{GH} \times \text{GF}}{2} \times (10 - x) = \dfrac{1}{3} \times \text{AB} \times \text{BC} \times x$.
Or $\text{GH} = \text{BA}$ et $\text{GF} = \text{BC}$ donc l'équation est équivalente à $\dfrac{10 - x}{2} = x$, soit $x = \dfrac{10}{3}$.
Il y a donc une seule position possible du point I sur le côté [CG] : c'est celle qui vérifie $\text{CI} = \dfrac{10}{3}$ cm.

Remarque : la position de I est indépendante de la longueur AB.

131 On note x la vitesse, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, de chaque véhicule avec $30 \leqslant x \leqslant 140$.
D'après le Doc. 1, $f(x) - a(x) = \dfrac{0{,}01x^2 - 64}{x}$.
D'après le Doc. 2, on résout l'inéquation :

$$\frac{0{,}01x^2 - 64}{x} > 0,$$

soit $\dfrac{0{,}01(x - 80)(x + 80)}{x} > 0$.
Comme $x > 0$, cette inéquation équivaut à $x - 80 > 0$, soit $x > 80$.
Finalement,
$30 \leqslant x < 80$ équivaut à $f(x) < a(x)$,
$x = 80$ équivaut à $f(x) = a(x)$,
$80 < x \leqslant 140$ équivaut à $f(x) > a(x)$.
Tableau comparatif des consommations :

	Futur A conseillé	**Avenir A conseillé**
Agglomération		
Route à double sens sans séparateur central		
Route à deux chaussées séparées par un terre-plein	Si vitesse $\leqslant 80$	Si vitesse $\geqslant 80$
Autoroute		

5 Vecteurs et opérations

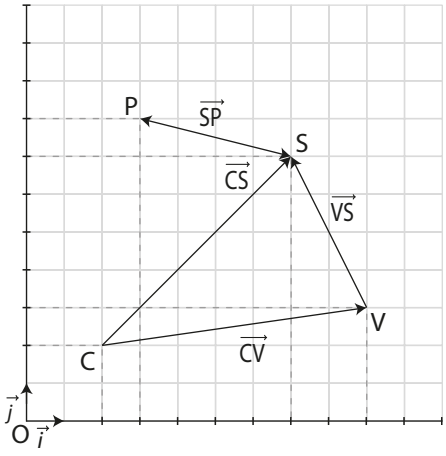
Découvrir

1 Vecteurs et translations

1 **1.** K est l'image du point C pour la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.
L est l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.
2. a) Par la translation de vecteur $\overrightarrow{EM}$, la figure ① glisse vers la figure ②.
b) Les côtés $[AI]$ et $[EM]$ du quadrilatère AEMI sont parallèles et de même longueur donc ce quadrilatère est un parallélogramme.
c) Par exemple $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{EM}$.

2 Coordonnées de vecteurs

1 **a)** et **b)**



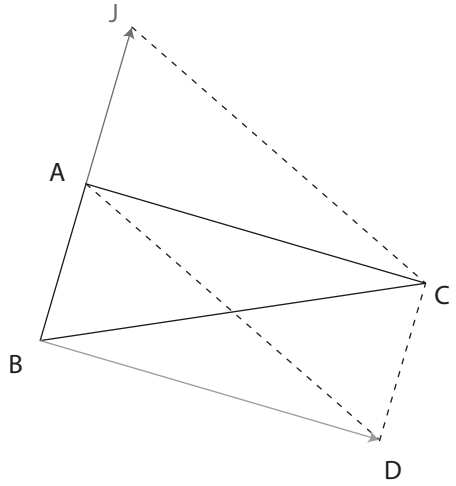
c) Le vecteur $\overrightarrow{VS}$ a pour coordonnées $(-2\,;4)$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

2 **a)** Le vecteur $\overrightarrow{CS}$ a pour coordonnées $(5\,;5)$.
b) On obtient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CS}$ en effectuant les sommes respectives des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CV}$ et $\overrightarrow{VS}$: $5 = 7 + (-2)$ et $5 = 1 + 4$.

3 **a)** Le vecteur $\overrightarrow{SP}$ a pour coordonnées $(-4\,;1)$.
b) Le vecteur $\overrightarrow{PS}$ a pour coordonnées $(4\,;-1)$.

Acquérir des automatismes

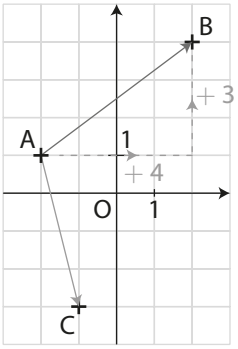
3 **a)** On trace un triangle ABC puis on construit le point D tel que BDCA soit un parallélogramme. Ainsi, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.



b) Le vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$. On construit le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA}$.
c) BDCA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$. Or, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AJ}$ donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AJ}$ et DCJA est un parallélogramme.

4 **a)** $\overrightarrow{AB}\,(4\,;3)$

b)



c) ABCD est un parallélogramme si, et seulement, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. On note $D(x\,;y)$, alors $\overrightarrow{BD}(x-2\,;y-4)$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ équivaut à $x-2\ =1$ et $y-4=-4$, soit $x=3$ et $y=0$.

Les coordonnées de D sont $(3\,;0)$.

7 **1. a)** $KA = \sqrt{(6-5)^2+(6{,}8-4)^2}$

$KA = \sqrt{1^2+2{,}8^2}$

$KA = \sqrt{8{,}84}$

b) Γ est le cercle de centre K, de rayon 3 et $KA \neq 3$ donc le point A n'appartient pas au cercle Γ.

2. • $KB = \sqrt{0^2+3^2}$ donc $KB = 3$ et $B \in \Gamma$.

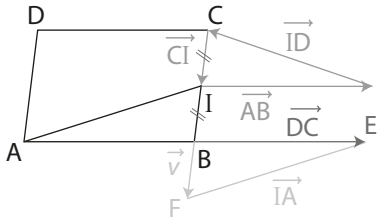
• $KC = \sqrt{2^2+5} = \sqrt{9} = 3$ donc $C \in \Gamma$.

• $KD = \sqrt{(-7)^2+0^2} = 7$ donc $D \notin \Gamma$.

3. $KE = \sqrt{0^2+(-3)^2} = 3$ donc $E \in \Gamma$.

$BE = \sqrt{0^2+6^2} = 6 = 2\times 3$ donc [BE] est un diamètre de Γ.

8 **1. a)**



On construit le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ puis le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IA}$.

Alors $\vec{v} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}$, donc d'après la relation de Chasles $\vec{v} = \overrightarrow{BF}$.

b) Il semble sur la figure que $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$.

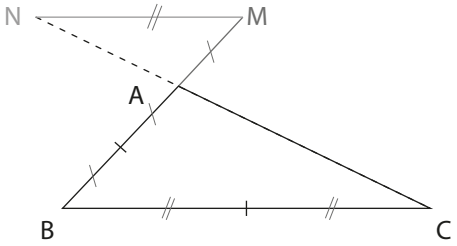
En effet, $\vec{v} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IA}$, or ABDC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, alors $\vec{v} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$ et d'après la relation de Chasles, $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$.

2. Voir la figure précédente. Il semble que $\vec{w} = \vec{0}$.

En effet, $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD}$

et donc $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

11 **a)**



b) D'après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires donc les points A, C, N sont alignés.

12 **a)** $\overrightarrow{AB}\,(2-(-2)\,;4-2)$, soit $(4\,;2)$.

$\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $\left(7\,;\frac{7}{2}\right)$.

Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{OD}$ est :

$4\times\frac{7}{2} - 7\times 2 = 14 - 14 = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (OD) sont parallèles.

b) $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(1-3\,;0-1)$, soit $(-2\,;-1)$.

Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est : $4\times(-1)-(-2)\times 2 = -4+4 = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

13 **a)** $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$.

b) $\overrightarrow{CB}$ est opposé à $\overrightarrow{EG}$.

c) $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{IF}$

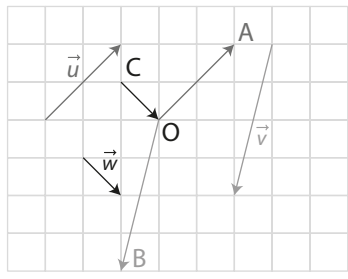
d) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IG}$

14 **a) Faux.** En effet, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.

b) Vrai. En effet, il s'agit d'un résultat du cours.

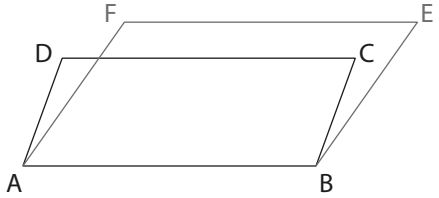
c) Vrai. En effet, $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK}$ donc ILKJ est parallélogramme et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

15



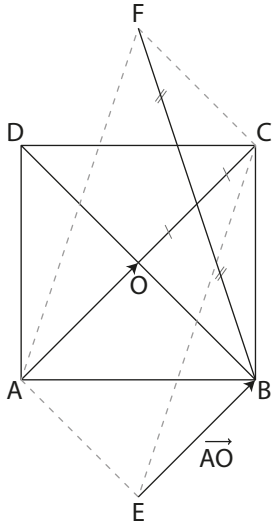
16 **a) Vrai.**
b) Faux.
c) Vrai.
d) Faux.

17 **a)**



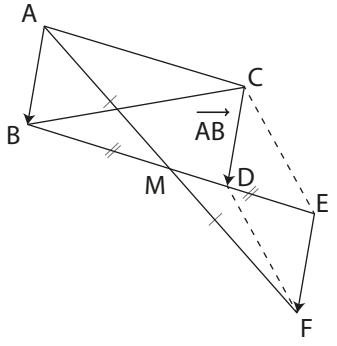
b) Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, D a pour image C et F a pour image E.
c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB}$ donc CDFE est un parallélogramme.

18 **a)** et **b)**



c) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{EB}$ donc AOBE est un parallélogramme et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$.
OBCF est un parallélogramme car ses diagonales $[OC]$ et $[BF]$ ont même milieu, alors $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FC}$.
d) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FC}$ donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ et le quadrilatère AECF est un parallélogramme.
e) Les diagonales du parallélogramme AECF se coupent en leur milieu. O est le milieu de $[AC]$ donc O est le milieu de $[EF]$.

19 **a)**



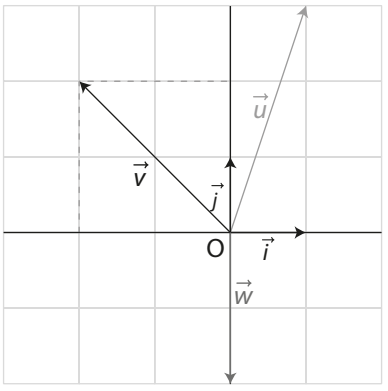
b) Les diagonales $[BE]$ et $[AF]$ du quadrilatère ABFE se coupent en leur milieu M donc ABFE est un parallélogramme et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.
Or, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ et le quadrilatère CDFE est un parallélogramme.

20 $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3\,;2)$
$\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(1\,;-2)$
$\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(0\,;-4)$
$\overrightarrow{GH}$ a pour coordonnées $(-7\,;-1)$
$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(-3\,;0)$

21 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :
a) $(3\,;-1)$ **b)** $(11\,;-3)$
c) $(0\,;5)$ **d)** $(1\,;0)$

22 Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :
a) $(1\,;4)$ **b)** $(0\,;4)$ **c)** $(1\,;5)$ **d)** $\left(\frac{5}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$

23



24 **a)** $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(5\,;2)$, $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(5\,;2)$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
b) Le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$; ses coordonnées sont $\left(\frac{-2+1}{2}\,;\frac{-1+3}{2}\right)$, soit $\left(-\frac{1}{2}\,;1\right)$

25 On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point B.
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x+2\,;y-3)$.
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ c'est-à-dire $x+2=4$ et $y-3=-2$, soit $x=2$ et $y=1$.
B a pour coordonnées $(2\,;1)$.

26 **a)** $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2\,;-4)$.
b) On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point D.
$\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(5-x\,;4-y)$.
ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $5-x=-2$ et $4-y=-4$, c'est-à-dire $x=7$ et $y=8$.

D a pour coordonnées $(7\,;8)$.

c) Le centre du parallélogramme est le milieu de $[AC]$ (et de $[BD]$) ; il a pour coordonnées $\left(\frac{0+5}{2}\,;\frac{5+4}{2}\right)$, soit $\left(\frac{5}{2}\,;\frac{9}{2}\right)$

27 • On note $(x\,;y)$ les coordonnées de C, I est le milieu de $[AC]$ donc :

$\frac{-2+x}{2}=0$ et $\frac{-1+y}{2}=1$, soit $x=2$ et $y=3$.

C a pour coordonnées $(2\,;3)$.

• On note $(u\,;v)$ les coordonnées de D, I est le milieu de $[BD]$ donc :

$\frac{4+u}{2}=0$ et $\frac{1+v}{2}=1$, soit $u=-4$ et $v=1$.

D a pour coordonnées $(-4\,;1)$.

28 $\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=\sqrt{4}=2.$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2.$

$\|\vec{\ell}\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}.$

29 $OA=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $OB=5$, les résultats de Paul sont justes. Mais $AB=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}\neq 3{,}1$ donc Paul a tort pour ce dernier résultat.

30 **a)** $IM=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}$

$=\sqrt{25}=5$

b) $IM=5$ et $\mathscr{C}$ a pour rayon 5 donc le point M appartient à $\mathscr{C}$.

31 $r=IA=\sqrt{(-1{,}8-1{,}8)^2+(1{,}3-(-3{,}5))^2}$

$r=\sqrt{12{,}96+23{,}04}=\sqrt{36}=6$

32 **a)**

$MA=\sqrt{(-1-(-5))^2+(5-(-3))^2}=\sqrt{16+64}$

$MA=\sqrt{80}=4\sqrt{5}.$

$MB=\sqrt{(3-(-5))^2+(1-(-3))^2}=\sqrt{64+16}$

$MB=\sqrt{80}=4\sqrt{5}.$

b) $MA=MB$ donc le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

33 **a)**

$AB=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1-2)^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$AC=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$BC=\sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(-1-(-1))^2}=\sqrt{12}=\sqrt{12}$

$BC=2\sqrt{3}$

b) $AB=AC=BC$ donc le triangle ABC est équilatéral.

34 **a)** $\overrightarrow{AB}(2\,;-5)$ et $\overrightarrow{BC}(-5\,;2)$

b) $AB=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

$BC=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

$AB=BC$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

35 **a)**

$AB=\sqrt{(2-6)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$

$AB=4\sqrt{5}$

$AC=\sqrt{(-4-6)^2+(0-5)^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}$

$AC=5\sqrt{5}$

$BC=\sqrt{(-4-2)^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$

$BC=3\sqrt{5}$

b) $AC^2=AB^2+BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

c) L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}=30.$$

36 **a)**

$AB=\sqrt{(5-(-1))^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$

$AB=2\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{(8-5)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$AC=\sqrt{(8-(-1))^2+(5-2)^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}$

$AC=3\sqrt{10}$

b) $AB+BC=AC$ donc le point B appartient au segment $[AC]$.

37 • $AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(2-1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

$AC=\sqrt{(-2-(-1))^2+(5-1)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

$BC=\sqrt{(-2-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$

$BC^2=AB^2+AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A. Or, $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

• Le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{3-2}{2}\,;\frac{2+5}{2}\right)$ soit $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{7}{2}\right)$.

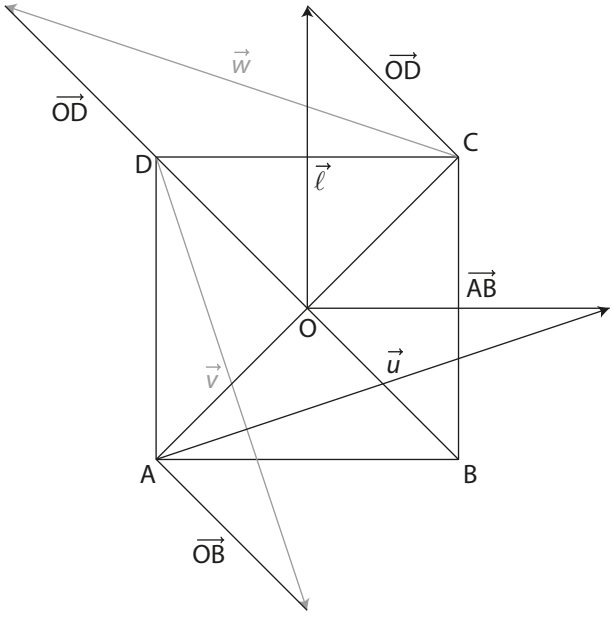
Le milieu de $[AD]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-1+2}{2}\,;\frac{1+6}{2}\right)$ soit $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{7}{2}\right)$.

Les diagonales [BC] et [AD] du quadrilatère ABDC ont le même milieu est un parallélogramme. Or, ce parallélogramme a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur, donc ABDC est un carré.

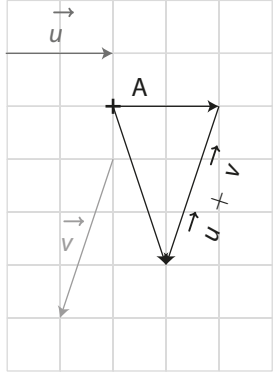
38 **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DC}$
c) $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$
d) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
e) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BI}$

39 **a) Vrai.** En effet, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$.
b) Faux. En effet, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$.
c) Vrai. En effet, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC}$
d) Vrai. En effet, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

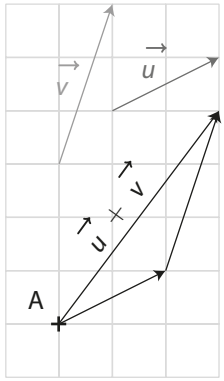
40 **a)**



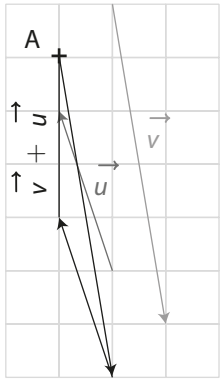
41 **a)**



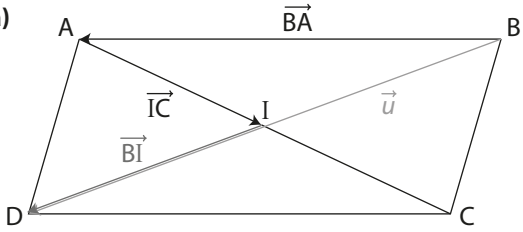
b)



c)



42 **a)**

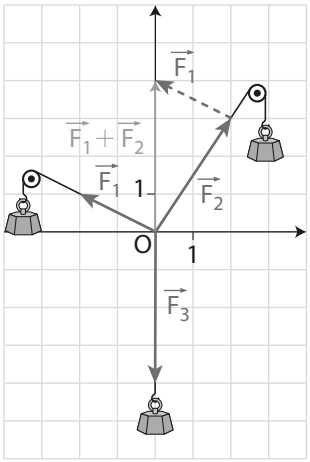


b) Il semble que $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$.
$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID}$,
donc $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BD}$

43 • $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$ car AEFD est un parallélogramme.
• DEBF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BF}$.
$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.
• $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FB}$ (relation de Chasles).
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ car DEFC est un parallélogramme donc $\vec{w} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$.
$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$ car DEBF est un parallélogramme donc $\vec{w} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF}$.
Finalement $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w}$.

44 **a)** $\vec{F}_1(-2\,;1)$, $\vec{F}_2(2\,;3)$ et $\vec{F}_3(0\,;-4)$
donc $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ a pour coordonnées $(-2+2+0\,;1+3-4)$, soit $(0\,;0)$.
Ainsi $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ et le système est équilibré.

b)



Donc $\vec{F_1}+\vec{F_2}=-\vec{F_3}$ et $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$

45 **a)** $2\vec{u}(2\,;-4)$ **b)** $-3\vec{v}(-12\,;-9)$
c) $\vec{u}-\vec{v}(-3\,;-5)$ **d)** $\vec{u}+2\vec{v}(9\,;4)$

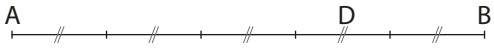
46 **a)** $\overrightarrow{AB}(4\,;1)$ **b)** $2\overrightarrow{AB}(8\,;2)$
c) $\overrightarrow{BC}(-2\,;-2)$ **d)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(-1\,;-1)$
e) $2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(7\,;1)$

47 **a)** On note $(x\,;y)$ les coordonnées de D.
$\overrightarrow{AB}(-4\,;-1)$ et $3\overrightarrow{AB}(-12\,;-3)$
$\overrightarrow{AD}(x-3\,;y-5)$
$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$ si, et seulement si, $x-3=-12$ et $y-5=-3$ c'est-à-dire $x=-9$ et $y=2$.
Donc D$(-9\,;2)$.
b) On note $(u\,;v)$ les coordonnées de E.
$\overrightarrow{AC}(-3\,;-3)$ et $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}(-1\,;-1)$
$\overrightarrow{BC}(1\,;-2)$ et $2\overrightarrow{BC}(2\,;-4)$
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}(1\,;-5)$
$\overrightarrow{AE}(u-3\,;v-5)$
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$ si, et seulement si,
$u-3=1$ et $v-5=-5$
c'est-à-dire $u=4$ et $v=0$.
Donc E$(4\,;0)$.

48 **a)** $\overrightarrow{AB}(-6\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-7\,;3)$
b) $2\overrightarrow{AB}(-12\,;-2)$ et $-3\overrightarrow{AC}(21\,;-9)$
donc $\overrightarrow{AM}(9\,;-11)$.
c) On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point M.
$\overrightarrow{AM}(x-4\,;y-2)$ donc $x-4=9$ et $y-2=-11$,
soit $x=13$ et $y=-9$.
M a pour coordonnées $(13\,;-9)$.

49 **a)** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
b) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

50 **a)** $\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DB}=\vec{0}$
équivaut à $\overrightarrow{DA}+4(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$
soit $5\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.
b)



51 **a)** $\vec{u}(1\,;2)$, $\frac{1}{2}\vec{u}\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$ et $\vec{v}(2\,;3)$.
Alors $\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}\left(\frac{5}{2}\,;4\right)$.
b)
$$\left\|\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+4^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+16}=\sqrt{\frac{89}{4}}=\frac{\sqrt{89}}{2}$$

52 **a)** $\vec{u}(-3\,;4)$ donc $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}$
soit $\|\vec{u}\|=5$.
b) $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}$ donc $\|\vec{v}\|=\left|\frac{1}{2}\right|\times\|\vec{u}\|=\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$

53 Jade et Walid ont raison.

54 $\vec{v}=-\frac{1}{4}\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

55 **a)** $\vec{v}=-3\vec{u}$ **b)** $\vec{b}=-\frac{3}{2}\vec{a}$ **c)** $\vec{n}=3\vec{m}$
d) $\vec{p}=-2\vec{m}$ **e)** $\vec{w}=-\frac{4}{3}\vec{v}$ **f)** $\vec{n}=-\frac{3}{2}\vec{p}$

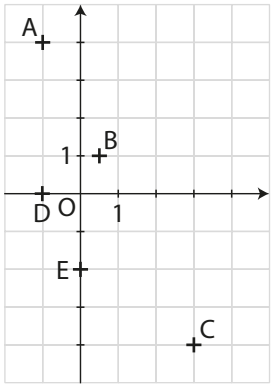
56 $\vec{u}(3\,;-2)$ et $\vec{v}(7\,;2)$.
a) Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est égal à : $3\times 2-7\times(-2)=6+14=20$.
b) Le déterminant du vecteur $\vec{v}$ et du vecteur $\vec{u}$ est : $7\times(-2)-3\times 2=-14-6=-20$.

57 **a)** $\vec{u}(2\,;1-\sqrt{5})$ et $\vec{v}(\sqrt{5}+1\,;-2)$.
Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est égal à :
$2\times(-2)-\left(\sqrt{5}+1\right)\left(1-\sqrt{5}\right)=-4-(1-5)=0$.
b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

58 **a)** Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est égal à : $3\times m-4\times(-1)=3m+4$.
b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $3m+4=0$, soit $m=-\frac{4}{3}$.

59 $\overrightarrow{AB}(3\,;4)$ et $\overrightarrow{AC}(-9\,;\,-12)$.
$\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les points A, B et C sont alignés.

60 **a)**

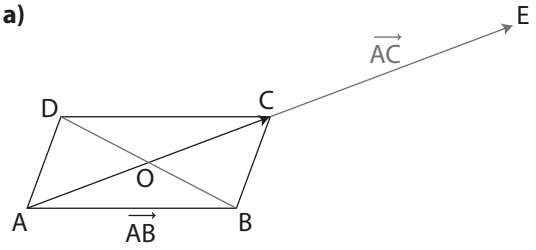


b) $\overrightarrow{AB}\left(\frac{3}{2}\,;\,-3\right)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;\,-8)$.
Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal à : $\frac{3}{2}\times(-8)-4\times(-3)=-12+12=0$.
Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les points A, B et C sont alignés.
c) $\overrightarrow{DE}(1\,;\,-2)$ donc $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

61 **a)** On complète le cadre rouge par : $a*d-c*b$.
b) On obtient par exemple :

```
>>> Det(-4,7,9,-14)
-7
```

62 **a)**



b) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$.
Alors $\overrightarrow{AE}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=2\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AO}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires donc les points A, O et E sont alignés.

63 **a)** $\overrightarrow{BJ}=2\overrightarrow{BI}$ donc I est le milieu du segment [BJ]. I est aussi milieu du côté [CD] donc le quadrilatère DBCJ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.
Alors $\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{BC}$, or $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DJ}$.
$\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont colinéaires donc les points A, D et J sont alignés.
b) $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les droites (AJ) et (BC) sont parallèles.

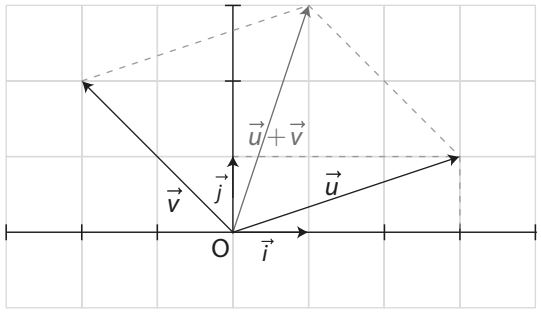
64 $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}$
c'est-à-dire $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}$
soit $\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$.
Alors $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{AC}$, et les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires. Donc les points A, C, D sont alignés et le point D appartient à la droite (AC).

65 **1.** B **2.** C **3.** A **4.** C **5.** C

66 **1.** A, C **2.** B, C **3.** A, C **4.** C, D

67 **1. Vrai.** En effet, $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ donc $2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC}$ et $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.
2. Faux. En effet, $\overrightarrow{AB}(5\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(15\,;7)$.
Or, $5\times7-15\times2\neq0$.
3. Faux. En effet, $\left\|\frac{1}{2}\vec{u}\right\|=\left|\frac{1}{2}\right|\times\|\vec{u}\|=\frac{1}{2}\|\vec{u}\|$
et $\left\|-\frac{1}{2}\vec{u}\right\|=\left|-\frac{1}{2}\right|\times\|\vec{u}\|=\frac{1}{2}\|\vec{u}\|$.
4. Vrai. En effet, $\overrightarrow{BC}=-5\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AC}$ soit $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}=-4\overrightarrow{AC}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

68 **a)**



b) On lit sur la figure : $\vec{u}+\vec{v}(1\,;3)$.
c) $\vec{u}(3\,;1)$ et $\vec{v}(-2\,;2)$ donc $\vec{u}+\vec{v}$ ont pour coordonnées $(3+(-2)\,;1+2)$, soit $(1\,;3)$.

69 **a)** $\overrightarrow{AB}(2-4\,;2-(-1))$, soit $\overrightarrow{AB}(-2\,;3)$.
$\overrightarrow{AC}(-1-4\,;\,-3-(-1))$, soit $\overrightarrow{AC}(-5\,;\,-2)$.
b) • $2\overrightarrow{AB}(2\times(-2)\,;2\times3)$, soit $2\overrightarrow{AB}(-4\,;6)$.
• $3\overrightarrow{AC}(3\times(-5)\,;3\times(-2))$, soit $3\overrightarrow{AC}(-15\,;\,-6)$.
• $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}(-4-15\,;6-6)$,
soit $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}(-19\,;0)$.

70 **1. a)** Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est égal à :
$3\times(-6)-(-2)\times 9=-18+18=0$
b) On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{w}$ est égal à $3\times 6-1\times 9=18-9=9$.
Ce déterminant est non nul donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

71 **a)** $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$,
c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$,
soit $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
Ainsi, $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les points B, C et M sont alignés.

S'entraîner

73 **a)** L'algorithme calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}(a\,;b)$ et $\overrightarrow{CD}(c\,;d)$.
Le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est égal à $ad-bc$.
On complète l'algorithme ainsi :

```
Si ad = bc alors
  | Afficher " AB et CD sont colinéaires"
  | Sinon
  | Afficher " AB et CD ne sont pas colinéaires"
Fin Si
```

Cet algorithme teste si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ou non.
b) $a=-8$, $b=-2$, $c=4$, $d=1$
$ad=-8$ et $bc=-8$ donc $ad=bc$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

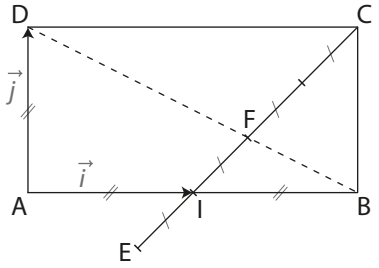
74 **a)** Dans le cadre rouge, on complète par : « A, B, C sont alignés ». Dans le cadre vert, on complète par : « A, B, C ne sont pas alignés ».
b) Dans ce cas, $a=3$, $b=-3{,}5$, $c=2$ et $d=10{,}5$.
Donc $ad=31{,}5$ et $bc=-7$. L'algorithme affiche : « A, B, C ne sont pas alignés ».

76 **a)** $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}$
$\overrightarrow{MQ}=k\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}-k\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{MQ}=k\overrightarrow{BA}+(1-k)\overrightarrow{AD}$
b) $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=-k\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{NP}=(1-k)\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CD}$
c) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Alors $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$ et on retrouve le fait que MNPQ est un parallélogramme.

77 **1. b)** On fait varier k, on conjecture que MNPQ est un parallélogramme.
2. a) • $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{MN}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=k\overrightarrow{AB}$
• $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OD}-k\overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{PQ}=k(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=k\overrightarrow{CD}$
b) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Alors $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ et MNPQ est un parallélogramme.

78 **1. a)** et **b)** D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$
2. a) $\vec{u}-\vec{v}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$
$\vec{u}-\vec{v}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})+(\mathbf{\overrightarrow{CD}}-\mathbf{\overrightarrow{AD}})$
$\vec{u}-\vec{v}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\mathbf{\overrightarrow{CD}}+\mathbf{\overrightarrow{DA}})$
$\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\mathbf{\overrightarrow{CA}}$
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ donc $\vec{u}-\vec{v}=\vec{0}$ et $\vec{u}=\vec{v}$.
3. a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$
équivaut à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$
soit $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.
b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$
c) Avec l'équivalence de la question **a)**, on obtient :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

79 **1. a)** et **b)**



c) On conjecture que les points B, D et F sont alignés.
2. a) On pose $\vec{i}=\overrightarrow{AI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{AD}$, $(A\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
b) $A(0\,;0)$, $B(2\,;0)$, $C(2\,;1)$, $D(0\,;1)$, $I(1\,;0)$.

$\overrightarrow{IE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC}(1\,;1)$ donc $\overrightarrow{IE}\left(-\frac{1}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$ et $E\left(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{IE}$ donc $\overrightarrow{IF}\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ et $F\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$

c) On a alors :

$\overrightarrow{BD}(-2\,;1)$ et $\overrightarrow{BF}\left(-\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires donc les points B, D et F sont alignés.

80 **1.** Pour tout point M,

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.

Or, I est le milieu du segment [AB], donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

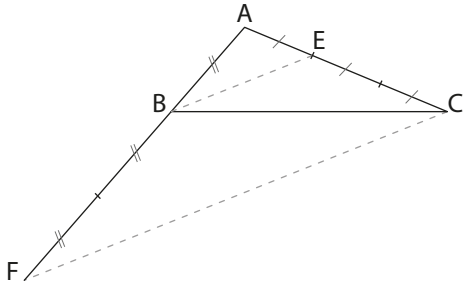
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD}$.

Or, P est le milieu du segment [AC] donc $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Q est le milieu du segment [BD] donc $\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD} = \vec{0}$.

Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$.

81 **a)**

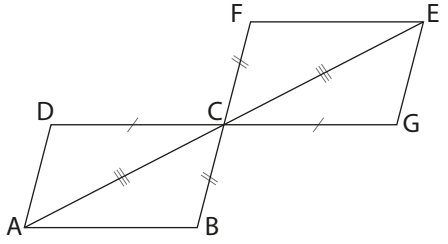


b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Alors $\overrightarrow{FC} = 3\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires donc les droites (BE) et (FC) sont parallèles.

82 **a)**



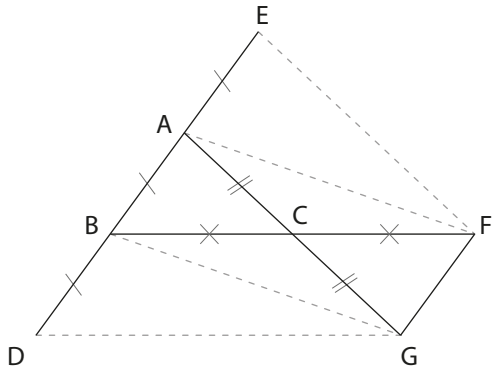
b) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE}$.

Or, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$, donc :

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.$$

D'autre part $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DC}$, ABCD étant un parallélogramme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CG}$ et CGEF est aussi un parallélogramme.

83 **a)**



b) ABGF est un parallélogramme car les diagonales [AG] et [BF] se coupent en leur milieu C.

Ainsi $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB}$, or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA}$ donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EA}$.

Alors EAGF est un parallélogramme et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF}$.

On en déduit que les droites (AG) et (EF) sont parallèles.

c) • $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BD}$ et FBDG est un parallélogramme. D'où, les droites (BF) et (DG) sont parallèles.

• ABGF est un parallélogramme donc les droites (AF) et (BG) sont parallèles.

84 Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$

$\overrightarrow{JI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ donc :

$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

85 **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

86 $\overrightarrow{AB}(-6\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-7\,;3)$

donc $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}(-32\,;3)$.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M.

$\overrightarrow{AM}(x-4\,;y-2)$, d'où $x-4=-32$ et $y-2=3$, soit $x=-28$ et $y=5$. Donc $M(-28\,;5)$.

87 On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M.

$\overrightarrow{MA}(7-x\,;\,-1-y)$, $\overrightarrow{MB}(-4-x\,;10-y)$

et $\overrightarrow{MC}(-4-x\,;5-y)$.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ si, et seulement si,

$7-x+(-4-x)+(-4-x)=0$

et $-1-y+10-y+5-y=0$

c'est-à-dire $-1-3x=0$ et $14-3y=0$,

soit $x=-\frac{1}{3}$ et $y=\frac{14}{3}$. Donc $M\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{14}{3}\right)$.

88 **a)** $I\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right)$, $J(-1\,;\,2)$ et $K\left(\frac{3}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\right)$

b) • $\overrightarrow{AI}\left(\frac{9}{2}\,;\,\frac{13}{2}\right)$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\left(3\,;\,\frac{13}{3}\right)$.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de G.

$\overrightarrow{AG}(x+2\,;y+3)$.

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ équivaut à $x+2=3$ et $y+3=\frac{13}{3}$, soit $x=1$ et $y=\frac{4}{3}$. Donc $G\left(1\,;\,\frac{4}{3}\right)$.

• $\overrightarrow{BJ}(-6\,;\,2)$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}\left(-4\,;\,\frac{4}{3}\right)$.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de H.

$\overrightarrow{BH}(x-5\,;y)$

$\overrightarrow{BH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ équivaut à $x-5=-4$ et $y=\frac{4}{3}$, soit $x=1$ et $y=\frac{4}{3}$. Donc $H\left(1\,;\,\frac{4}{3}\right)$.

• $\overrightarrow{CK}\left(\frac{3}{2}\,;\,-\frac{17}{2}\right)$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}\left(1\,;\,-\frac{17}{3}\right)$.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de L.

$\overrightarrow{CL}(x\,;y-7)$.

$\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$ équivaut à $x=1$ et $y-7=-\frac{17}{3}$, soit $x=1$ et $y=\frac{4}{3}$. Donc $L\left(1\,;\,\frac{4}{3}\right)$.

c) On remarque que les points G, H, L ont les mêmes coordonnées donc $G=H=L$.

89 **a)** $\overrightarrow{AB}(6\,;\,-2)$ donc $AB^2=6^2+(-2)^2=40$.

$\overrightarrow{AC}(5\,;\,-5)$ donc $AC^2=5^2+(-5)^2=50$.

$\overrightarrow{BC}(-1\,;\,-3)$ donc $BC^2=(-1)^2+(-3)^2=10$.

$AC^2=AB^2+BC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

b) $I\left(\frac{-2+3}{2}\,;\,\frac{3-2}{2}\right)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

c) Le rayon $\mathscr{C}$ est

$$IA=\sqrt{\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}}$$

d) $$IB=\sqrt{\left(4-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}}$$

donc le point B appartient au cercle $\mathscr{C}$.

$$IC=\sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}}$$

donc le point C appartient au cercle $\mathscr{C}$.

90 **a)** $MA=\sqrt{(-3-x)^2+1^2}=\sqrt{x^2+6x+10}$

$MB=\sqrt{(1-x)^2+4^2}=\sqrt{x^2-2x+17}$

b) $MA^2=MB^2$ équivaut à

$x^2+6x+10=x^2-2x+17$, soit $8x=7$ c'est-à-dire $x=\frac{7}{8}$.

Le point M de l'axe des abscisses qui se trouve à égale distance de A et B a pour abscisse $\frac{7}{8}$.

91 **a)** $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$, $D(0\,;1)$,

$E\left(\frac{3}{2}\,;0\right)$, $F\left(\frac{3}{2}\,;2\right)$, $G(1\,;2)$, $I\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

b) $$IJ=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$JF=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

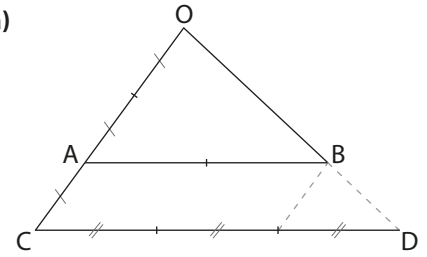
$$JF=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$IF=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$IF=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

c) On remarque que $IJ+JF=IF$ donc le point J appartient au segment $[IF]$. Les points I, J, F sont alignés.

92 **a)**



b) $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ donc $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ soit $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$.

Ainsi, $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})$,

donc $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires donc les points O, B et D sont alignés.

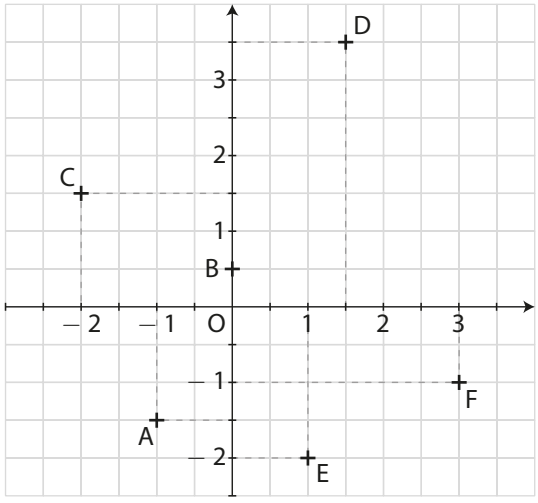
93 **1.** $\overrightarrow{AB}(-3\,;1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y-3)$.

Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AM}$ et du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à $(x-2)\times 1-(-3)\times(y-3)$, soit $x+3y-11$.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si, et seulement si, $x+3y-11=0$.

2. a) Son ordonnée y est telle que $-4+3y-11=0$, soit $y=5$.
b) Son abscisse x est telle que $x+21-11=0$, soit $x=-10$.

94 **a)**



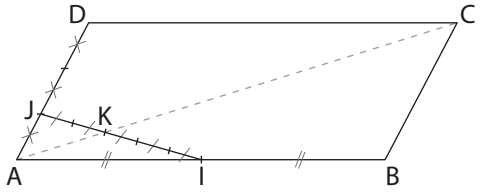
b) On conjecture que A, B, D sont alignés ainsi que C, B, F.

c) • $\overrightarrow{AB}(1\,;2)$ et $\overrightarrow{AD}\left(\frac{5}{2}\,;5\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et les points A, B, D sont alignés.

• $\overrightarrow{CB}(2\,;-1)$ et $\overrightarrow{CF}\left(5\,;-\frac{5}{2}\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{CF}=\frac{5}{2}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires et les points C, B, F sont alignés.

95 $\overrightarrow{PQ}(3\,;-1)$ et $\overrightarrow{RP}(x\,;2)$.
Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et du vecteur $\overrightarrow{RP}$ est égal à $6-(-x)=6+x$.
$\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RP}$ sont colinéaires si, et seulement si, $6+x=0$, soit $x=-6$.
Donc P, Q et R sont alignés si, et seulement si, $x=-6$.

96 **a)**



b) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ})$

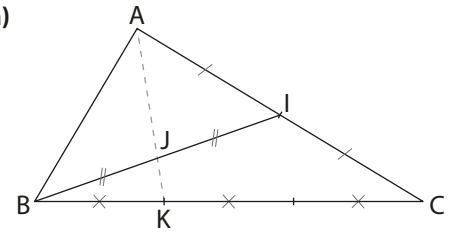
$\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AJ}$

c) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

donc $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

d) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Alors $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A, K, C sont alignés.

97 **a)**



b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JI}=2\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}$
J est le milieu de $[BI]$ donc $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}=\vec{0}$.
Alors $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$, or $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
donc $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

d) Alors $\overrightarrow{AK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AJ}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires donc les points A, J et K sont alignés.

98 **a)** $A(0\,;0)$, $B(2\,;0)$, $C(2\,;1)$, $D(0\,;1)$, $I(1\,;1)$, $J(1\,;0)$. $\overrightarrow{DB}(2\,;-1)$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)$.

• On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M.
$\overrightarrow{DM}(x\,;y-1)$
$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ équivaut à $x=\frac{2}{3}$ et $y-1=-\frac{1}{3}$.
D'où $M\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

• On note $(u\,;v)$ les coordonnées de N.
$\overrightarrow{NB}(2-u\,;-v)$
$\overrightarrow{NB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ équivaut à $2-u=\frac{2}{3}$ et $-v=-\frac{1}{3}$.
D'où $N\left(\frac{4}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

b) • $\overrightarrow{AM}\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AI}(1\,;1)$ donc $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et A, M, I sont alignés.

• $\overrightarrow{JN}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{JC}\,(1\,;1)$ donc $\overrightarrow{JN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{JC}$.
$\overrightarrow{JN}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont colinéaires et J, N, C sont alignés.

c) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{JC}$ dont les droites (AI) et (CJ) sont parallèles.

99 **a)** Les points R, S, T sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont colinéaires.

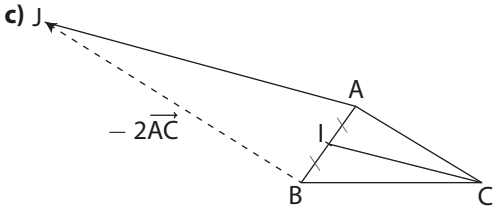
b) $\overrightarrow{RS}(2\,;5)$ et $\overrightarrow{RT}(t+2\,;1)$, le déterminant du vecteur $\overrightarrow{RS}$ et du vecteur $\overrightarrow{RT}$ est égal à : $2-5(t+2)=-5t-8$.
$\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont colinéaires donc $-5t-8=0$ et $t=-\dfrac{8}{5}$.

c) $\overrightarrow{RS}(2\,;5)$ et $\overrightarrow{RT}\left(\dfrac{2}{5}\,;1\right)$ donc $\overrightarrow{RS}=5\overrightarrow{RT}$.

100 **a)** $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{BJ}=k\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires donc les droites (AC) et (BJ) sont parallèles.
Ainsi, J appartient à la droite passant par B et parallèle à la droite (AC).

b) $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$,
donc $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AI}+k(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})=(2+k)\overrightarrow{AI}+k\overrightarrow{IC}$
Pour $k=-2$, $\overrightarrow{AJ}=-2\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires donc les droites (AJ) et (IC) sont parallèles.

c)

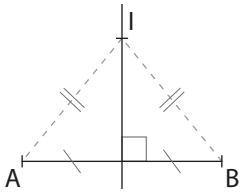


101 **a)** P et Q sont équivalentes. Il s'agit d'une propriété du cours.

b) P et Q sont équivalentes. Il s'agit d'un résultat du cours.

c) P implique Q.
Deux vecteurs égaux ont même norme $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$.
La réciproque est fausse.

d) Q implique P.
Si I est milieu de $[AB]$, alors I est à égale distance de A et B.
La réciproque est fausse.



e) P et Q sont équivalentes.
Il s'agit d'une propriété des distances.

102 **a) Vrai.** En effet, M est l'extrémité du représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour origine le point A.

b) Faux. En effet, par exemple pour $k=-2$,
$\|-2\vec{u}\|=|-2|\times\|\vec{u}\|=2\|\vec{u}\|$,
donc $\|-2\vec{u}\|\neq-2\|\vec{u}\|$.

c) Vrai. En effet, $\|-2\vec{v}\|=|-2|\|\vec{v}\|=2\|\vec{v}\|=-(-2)\|\vec{v}\|$.

d) Vrai. En effet, il s'agit de l'inégalité triangulaire sur les distances.

Organiser son raisonnement

103 ABHF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{BA}$.
ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.
Alors $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{CD}$, donc CDFH est un parallélogramme et $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{DF}$.
De même, ABGE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{BA}$, puis $\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{CD}$.
Donc CDEG est un parallélogramme et $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DE}$.
Or $\overrightarrow{DE}=-2\overrightarrow{DF}$ donc $\overrightarrow{CG}=-2\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires et les points G, C et H sont alignés.

104 **1. a)** $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{AN'}-\overrightarrow{AM'}=k\overrightarrow{AN}-k\overrightarrow{AM}$
$\overrightarrow{M'N'}=k\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)=k\overrightarrow{MN}$.

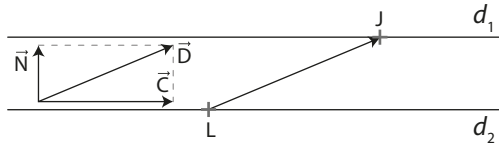
b) Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

c) $\left\|\overrightarrow{M'N'}\right\|=\left\|k\overrightarrow{MN}\right\|=|k|\times\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$, soit $M'N'=|k|\times MN$.

2. a) Pour $k<-1$ et $k>1$, l'homothétie est un agrandissement.

b) Pour $-1<k<1$ et $k\neq0$, l'homothétie est une réduction.

105 Le vecteur $\vec{D}=\vec{C}+\vec{N}$ définit la direction et le sens du déplacement de Lise. On représente les bords de la rivière par les droites d_1 et d_2 et la position de Julie par le point J.



On construit le point L sur d_2 tel que $\overrightarrow{LJ}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{D}$.
L définit le point de départ de Lise.

106 On munit le plan du repère orthonormé $(I\,;\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{IJ}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{IE}$.
On donne les coordonnées des points :
$M\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$, $L\left(\dfrac{3}{2}\,;2\right)$, $N\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $D(3\,;2)$.

Alors $\overrightarrow{ML}\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{ND}\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$, ainsi $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{ND}$ et les droites (ML) et (DN) sont parallèles.

107 • $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\ (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\ \overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\ \overrightarrow{AC}$

• $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK})$

$\overrightarrow{AM}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}.$

• Alors $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires donc A, M et L sont alignés.

108 **a)** $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KM}.$

$\overrightarrow{IM}=\frac{5}{8}\overrightarrow{IK}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KM}=\frac{5}{8}\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{KM}=-\frac{3}{8}\overrightarrow{IK}.$

Alors $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{3}{8}\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$

• $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{JL}$

$\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

• Donc $\overrightarrow{CN}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CM}$ et les vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires donc les points C, M et N sont alignés.

b) • $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$

• $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{JL}$

$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}.$

Donc $\overrightarrow{BN}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{DM}$ et les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires donc les droites (BN) et (DM) sont parallèles.

109 M est un point de la droite (AC) donc il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{AM}=\lambda(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$

M est un point de la droite (BD) donc il existe un nombre réel μ tel que $\overrightarrow{BM}=\mu\overrightarrow{BD}.$ Cette égalité s'écrit $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\mu(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$ soit

$\overrightarrow{AM}=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}.$

Alors $\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD},$

$\left(\frac{\lambda}{3}-1+\mu\right)\overrightarrow{AB}=(-\lambda+\mu)\overrightarrow{AD}.$

Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\begin{cases}-\lambda+\mu=0\\ \frac{\lambda}{3}-1+\mu=0\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda=\mu\\ \frac{4\lambda}{3}=1\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda=\frac{3}{4}\\ \mu=\frac{3}{4}\end{cases}$$

Ainsi $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}.$

• $\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

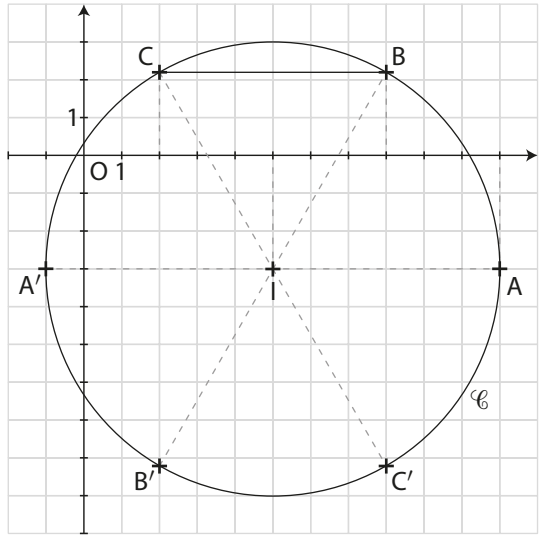
$\overrightarrow{IM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

• $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

• Alors $\overrightarrow{IK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires donc les points I, K et M sont alignés.

110 **1. a)**



b) $BA^2=3^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2=9+27=36$ et $BA=6.$

$BC^2=(-6)^2=36$ et $BC=6.$

Donc le triangle ABC est isocèle en B

2. a) On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point I.

$\overrightarrow{CB}(6\,;0)$ et $\overrightarrow{IA}(11-x\,;\,-3-y).$

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{IA}$ équivaut à $11-x=6$ et $-3-y=0$, soit $x=5$ et $y=-3$. Alors $I(5\,;\,-3)$ et ABCI est un parallélogramme.

b) $IA^2=6^2=36,$

$IB^2=3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2=9+27=36,$

$IC^2=(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2=9+27=36.$

$IA = IB = IC = 6$ donc les points A, B, C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 6.

3. a) et **b)** $\overrightarrow{IA}(6\,;0)$ donc $\overrightarrow{IA'}(-6\,;0)$ et $A'(-1\,;\,-3)$.

$CA' = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}^2\right)} = \sqrt{36} = 6.$

Donc $AB = BC = CA'$. La symétrie de centre I conserve les distances donc les six côtés du polygone $ABCA'B'C'$ ont même longueur. Il s'agit d'un hexagone régulier de centre I.

111 **a)** On conjecture que les droites (AI) et (DE) sont parallèles lorsque $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

b) On suppose que M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Alors d'après le théorème de Thalès dans CAI et CDE :

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

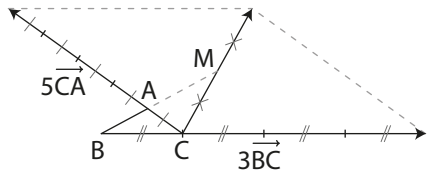
$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D'autre part I est milieu de [BC] donc

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Alors $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$, et les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires donc les droites (AI) et (DE) sont parallèles.

112 **a)**



b) We can guess that A, B, M are aligned points.

$2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$,

hence $2\overrightarrow{AM} = 3(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$, that is $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{AM}$ and $\overrightarrow{BA}$ are colinar vector. We have proved our conjecture.

113 $E \in [AB]$ donc il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Les droites (EF) et (AG) sont parallèles car AEFG est un parallélogramme.

Les droites (AD) et (BC) sont parallèles car ABCD est un parallélogramme.

Alors les droites (EF) et (BC) sont parallèles et avec le théorème de Thalès, on obtient $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AC}$.

On prouve de même que les droites (FG) et (CD) sont parallèles et on obtient $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AD} - \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$,

$\overrightarrow{EG} = \lambda\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires donc les droites (EG) et (BD) sont parallèles.

114 $K \in [AC]$ donc il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AC}$.

$K \in [BJ]$ donc il existe un nombre réel μ tel que $\overrightarrow{BK} = \mu\overrightarrow{BJ}$.

Alors $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} = \mu\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}\right)$

$\overrightarrow{AK} = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{\mu}{4}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AK} = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{\mu}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AK} = \left(1 - \frac{3\mu}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{\mu}{4}\overrightarrow{AC}$

On obtient alors :

$\lambda\overrightarrow{AC} = \left(1 - \frac{3\mu}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{\mu}{4}\overrightarrow{AC}$

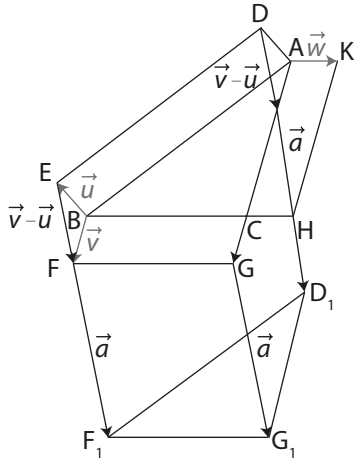
$\left(\lambda - \frac{\mu}{4}\right)\overrightarrow{AC} = \left(1 - \frac{3\mu}{4}\right)\overrightarrow{AB}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

donc $\begin{cases} \lambda - \frac{\mu}{4} = 0 \\ 1 - \frac{3\mu}{4} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = \frac{4}{3} \end{cases}$

Finalement, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

115



$\vec{a}$ est un vecteur quelconque. On note la $t_{\vec{a}}$ la translation de vecteur $\vec{a}$;

$t_{\vec{a}} : F \mapsto F_1$ et $t_{\vec{a}} : G \mapsto G_1$,

alors $\overrightarrow{F_1G_1} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$

$t_{\vec{a}+(\vec{v}-\vec{u})} : E \mapsto F \mapsto F_1$ et on note $t_{\vec{a}+(\vec{v}-\vec{u})} : D \mapsto D_1$

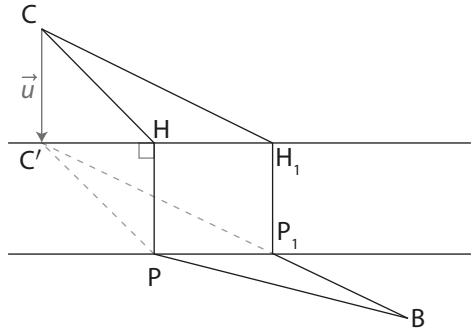
$\overrightarrow{F_1D_1} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BA}$.

D'autre part :
$\overrightarrow{G_1D_1} = \overrightarrow{G_1F_1} + \overrightarrow{F_1D_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HK}$
On peut donc construire un triangle $F_1G_1D_1$ en translatant convenablement [DE], [FG], et [HK].

116 **1. A.** En effet,
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,
soit $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.
Donc $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{DE}$.
$\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires donc D, E, F sont alignés.
2. B. En effet, on note $N(x\,;y)$, alors $\overrightarrow{AN}(x-3\,;y)$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\left(-\frac{4}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
donc $x-3 = -\frac{4}{3}$ et $y = \frac{4}{3}$, soit $N\left(\frac{5}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.
$\overrightarrow{OM}(5\,;4)$ donc $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{ON}$.
$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires donc O, M, N sont alignés.
3. D. En effet, le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est égal à
$9 - \lambda^2 = (3-\lambda)(3+\lambda)$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $(3-\lambda)(3+\lambda) = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$.
4. C. En effet, $\overrightarrow{AB}(5\,;1)$ et $\overrightarrow{CD}(4\,;y-2)$.
Le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est égal à :
$5(y-2) - 4 = 5y - 14$.
(AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $5y - 14 = 0$, soit $y = \frac{14}{5}$.
5. C. En effet, on note $K(0\,;y)$, alors $\overrightarrow{MK}(4\,;y)$.
$\overrightarrow{MN}(7\,;2)$, le déterminant de $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{MN}$ est égal à $8 - 7y$. $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires donc $8 - 7y = 0$ et $K\left(0\,;\frac{8}{7}\right)$.
6. B. En effet, $\|\vec{u}\|^2 = 9 + \lambda^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = 4\lambda^2$.
$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ équivaut à $9 + \lambda^2 = 4\lambda^2$, soit $\lambda^2 = 3$, c'est-à-dire $\lambda = -\sqrt{3}$ ou $\lambda = \sqrt{3}$.
7. A. En effet, on note $A(2\,;y)$, alors $OA^2 = 4 + y^2$.
A appartient à $\mathscr{C}$ donc $4 + y^2 = 16$ soit $y^2 = 12$.
8. D. En effet,
$CA^2 = (-7)^2 + (-4)^2 = 49 + 16 = 65$
$CB^2 = 1^2 + (-8)^2 = 1 + 64 = 65$.
Alors $CA = CB$ et C appartient à la médiatrice de [AB].
Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\,;2\right)$
9. B. En effet, $\overrightarrow{AB}(6\,;0{,}5)$ et $\overrightarrow{DC}(6\,;0{,}5)$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
$\overrightarrow{BC}(4\,;-4{,}5)$, alors $AB^2 = 6^2 + 0{,}5^2 = 36 + 0{,}25$
$AB^2 = 36{,}25$
et $BC^2 = 4^2 + (-4{,}5)^2 = 16 + 20{,}25$
$BC^2 = 36{,}25$.
Donc $AB = BC$ et ABCD est un losange.
10. B. En effet, $OI_1 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ donc O appartient à $\mathscr{C}_1$.
$OI_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ donc O appartient à $\mathscr{C}_2$.
$I_1I_2 = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$, $\sqrt{26} < \sqrt{5} + 5$
c'est-à-dire $I_1I_2 =< \sqrt{5} + 5$ (somme des rayons de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$), ainsi $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont deux points communs.

Exploiter ses compétences

117



• Avec le logiciel, il semble que le chemin soit le plus court lorsque les droites (BP) et (CH) sont parallèles.
• La longueur du chemin est $BP + PH + HC$, soit $BP + HC + 3$. Cette longueur est minimale lorsque la somme $BP + HC$ est minimale.
On note $\vec{u} = \overrightarrow{HP}$, ce vecteur est constant, C′ est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}$.
CC′PH est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{C'P}$ et les longueurs CH et C′P sont égales. Alors $PB + HC = C'P + PB$; cette somme de longueurs est minimale lorsque le point P appartient au segment [C′B]. On obtient alors sur la figure la position $[P_1H_1]$ du pont qui répond au problème.

118 Voici un chemin qui convient :

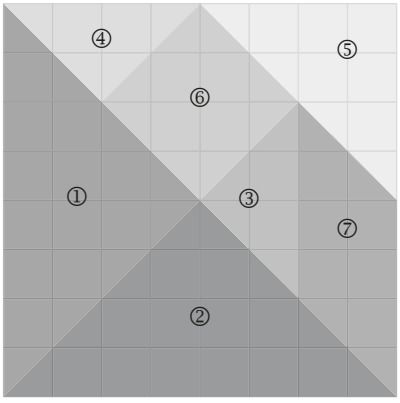
$F \xrightarrow{\vec{b}} A \xrightarrow{\vec{j}} G \xrightarrow{\vec{e}} K \xrightarrow{\vec{i}} I$

$I \xrightarrow{\vec{c}} E \xrightarrow{\vec{h}} H \xrightarrow{\vec{a}} B \xrightarrow{\vec{d}} C$

$C \xrightarrow{\vec{k}} J \xrightarrow{\vec{f}} M \xrightarrow{\vec{\ell}} D \xrightarrow{\vec{g}} L$

119 Dans le repère orthonormé d'origine B :
$E(-25\,;\,-10)$, $A(27\,;\,-49)$ et $T(87\,;y)$.
$AE^2 = (-52)^2 + 39^2 = 4\,225$ et $AE = 65$.
$AT^2 = 60^2 + (y+49)^2 = 3\,600 + (y+49)^2$.
Les distances AT et AE sont égales, donc $3\,600 + (y+49)^2 = 4\,225$, soit $(y+49)^2 = 625$.
Le trésor est à une plus faible profondeur que les amphores donc $y > -49$.
Alors $y + 49 = 25$ et $y = -24$.
Le trésor est à une profondeur de 24 m.

120



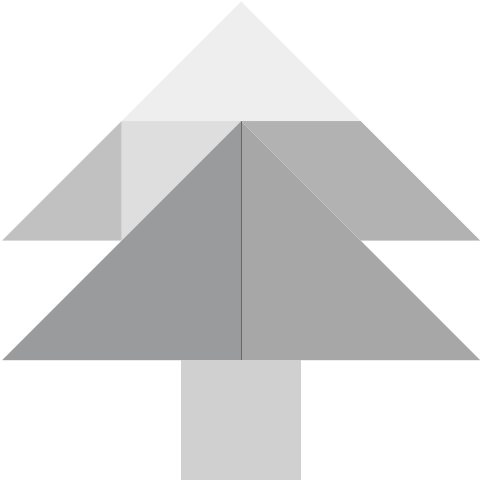
• Les pièces ① et ② sont des triangles isocèles rectangles dont les côtés ont pour longueurs 8, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$.
Le périmètre est $8 + 8\sqrt{2}$ et l'aire est 16.

• Les pièces ③ et ④ sont des triangles isocèles rectangles dont les côtés ont pour longueurs 4, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$. Le périmètre est $4 + 4\sqrt{2}$ et l'aire est 4.

• La pièce ⑤ est un triangle rectangle isocèle dont les côtés ont pour longueurs 4, 4, $4\sqrt{2}$. Le périmètre est $8 + 4\sqrt{2}$ et l'aire est 8.

• La pièce ⑥ est un carré de côté $2\sqrt{2}$. Le périmètre est $8\sqrt{2}$ et l'aire 8.

• La pièce ⑦ est un parallélogramme dont les côtés ont pour longueurs 4 et $2\sqrt{2}$. Le périmètre est $8 + 4\sqrt{2}$ et l'aire est 8.

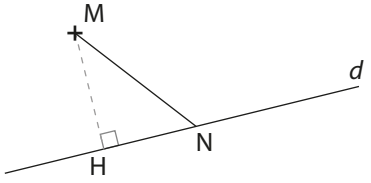


6 Configurations du plan

Découvrir

1 Projeté orthogonal

1 On conjecture que MN est minimal lorsque (MN) et *d* sont perpendiculaires.



2 **a)** Le triangle MHN est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$MN^2 = HM^2 + HN^2.$$

b) Puisque $HN^2 \geqslant 0$, MN^2 est minimum lorsque $HN^2 = 0$ c'est-à-dire lorsque $N = H$.

Or $MN > 0$, donc MN est minimum lorsque MN^2 est minimum (on admet ici cette propriété sans démonstration).

Ainsi, la longueur MN est minimum lorsque $N = H$.

2 Trigonométrie dans le triangle rectangle

1 Les rayons de soleil (AD) et (BC) sont perpendiculaires au panneau, donc ils sont parallèles entre eux. Ainsi, le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle en A et B.

De plus, puisque (AD) et (AB) sont perpendiculaires, on en déduit que le triangle AID est rectangle en A.

2 **a)** Dans le triangle AID rectangle en A, $\cos(\widehat{AID}) = \dfrac{IA}{ID}$.

Donc $IA = ID \times \cos(\widehat{AID}) = 3 \times \cos 48°$ soit $IA \approx 2{,}007$ m.

De $AB = 2 \times IA$, on déduit que $AB \approx 4$ m.

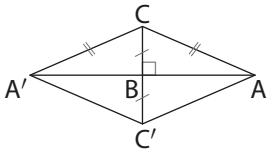
b) Aire d'un panneau : $AB \times 6 \approx 24$ m^2.

Aire des soixante panneaux : $60 \times 24 = 1440$ donc environ 1440 m^2.

Production annuelle du champ de panneaux solaires : $140 \times 1440 = 201600$ donc environ 201600 kW.

Acquérir des automatismes

3 **a)** et **b)** Par construction, B est le milieu de $[AA']$ et $[CC']$.



a) Ainsi, les diagonales du quadrilatère $ACA'C'$ se coupent en leur milieu, donc $ACA'C'$ est un parallélogramme.

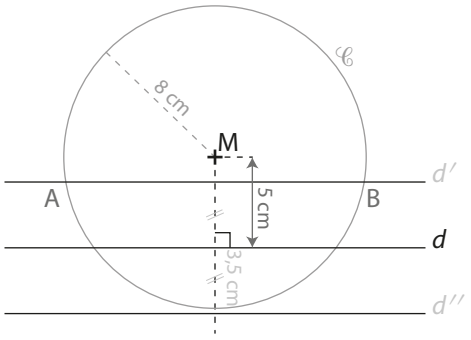
De plus, ses diagonales sont perpendiculaires, donc $ACA'C'$ est un losange.

c) Lorsque $BA = BC$, les diagonales ont la même longueur, donc le losange $ACA'C'$ est un carré.

4 **a)** et **b)** Échelle : 1/4

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre M et de rayon 8 cm est l'ensemble des points à 8 cm de M. Les droites d' et d'' parallèles à *d* et à 3,5 cm de *d* sont l'ensemble des points à 3,5 cm de *d*.

d' coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B.



7 **a)** Dans le triangle MPN rectangle en M :

$$\cos(\widehat{MPN}) = \frac{PM}{PN} \text{ c'est-à-dire } \cos(28°) = \frac{PM}{12}.$$

Ainsi $PM = 12\cos(28°)$ et $PM \approx 10{,}6$ cm.

b) Dans le triangle PNR rectangle en R :

$$\cos(\widehat{PNR}) = \frac{RN}{PN} = \frac{11{,}6}{12}$$

Avec la calculatrice, $\widehat{PNR} \approx 15°$.

8 $\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = 1$

$\sin^2(\widehat{ABC}) = 1 - \cos^2(\widehat{ABC}) = 1 - 0{,}4^2 = 0{,}84.$

Or $\sin(\widehat{ABC}) > 0$, ainsi, $\sin(\widehat{ABC}) = \sqrt{0{,}84}$

soit $\sin(\widehat{ABC}) \approx 0{,}9$.

9 $\cos^2(\widehat{FEG}) + \sin^2(\widehat{FEG}) = 1.$

$\cos^2(\widehat{FEG}) = 1 - \sin^2(\widehat{FEG}) = 1 - 0{,}1^2 = 0{,}99.$

Or, $\cos(\widehat{FEG}) > 0$, donc $\cos(\widehat{FEG}) = \sqrt{0{,}99}$, soit $\cos(\widehat{FEG}) \approx 0{,}99$.

10 • $\widehat{BAC} = 60°$ • $\widehat{CAB'} = 30°$ • $\widehat{CB'A} = 60°$
• $\widehat{BCB'} = 150°$ • $\widehat{BC'A} = 60°$ • $\widehat{CA'B'} = 0°$.

11 **a) Vrai.** En effet, $\widehat{IJK} = 180° - 63° - 27° = 90°$.
b) Faux. En effet, (JK) est la tangente à $\mathscr{C}$ en J.

12 • ICDE est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.
• ABJF est un losange car ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

13 **(1)**, **(3)**, **(4)** sont vraies.

14 Dans le triangle MNP rectangle en N, d'après le théorème de Pythagore :

$MP^2 = MN^2 + NP^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

Donc $MP = \sqrt{169}$ et $MP = 13$ cm.

15 Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Donc $AC^2 = 2AB^2$ soit $2AB^2 = 100$ et $AB^2 = 50$.

Ainsi, $AB = \sqrt{50}$ et $AB = 5\sqrt{2}$ cm.

16 $AB^2 = 7{,}5 = 56{,}25$

$BC^2 + AC^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25.$

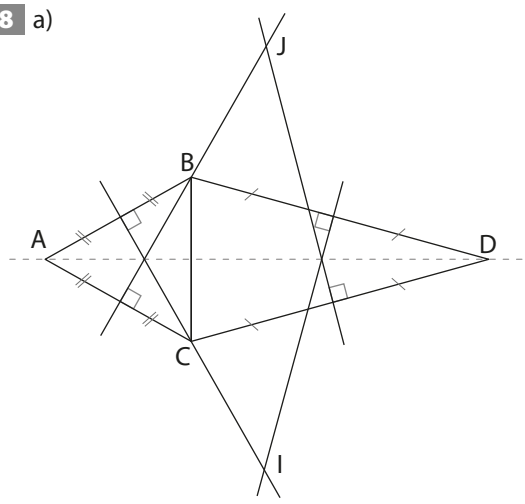
Ainsi, $AB^2 = BC^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

17 **a)** ABCD est un parallélogramme de centre O, donc O est le milieu de [AC] et $OA = OC$.

Or, $OM = \frac{OA}{2}$ et $ON = \frac{OC}{2}$, donc $OM = ON$.

b) O est à la fois le milieu de la diagonale [BD] (puisque ABCD est un parallélogramme) et celui de [MN] d'après le **a)**, donc MBND est un parallélogramme.

18 a)



b) • I appartient à la médiatrice de [AB], donc $IA = IB$, et I appartient à la médiatrice de [BD], donc $IB = ID$.
Ainsi, $IA = ID$.
• On montre de même que $JA = JC$ et que $JC = JD$, donc que $JA = JD$.
• La figure est symétrique par rapport à la droite (AD), donc $IA = JA$.
• $IA = ID = JA = JD$, donc le quadrilatère AIDJ est un losange.

19 On utilise les différentes configurations de Thalès présentes.

• $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$ d'où $AE = 2{,}6 \times \frac{6}{2{,}4} = 6{,}5.$

Ainsi, $DE = 6{,}5 - 2{,}6 = 3{,}9.$

• $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$ d'où $\frac{AM}{AM + 3{,}2} = \frac{2{,}4}{6}.$

D'où $6 \times AM = 2{,}4 \times (AM + 3{,}2).$

$3{,}6 \times AM = 2{,}4 \times 3{,}2$

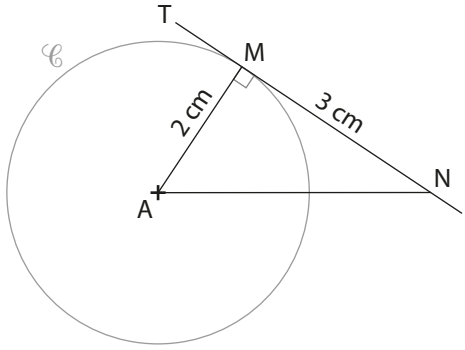
$AM = \frac{2{,}4 \times 3{,}2}{3{,}6}$

$AM = \frac{6{,}4}{3}$

• $\frac{CN}{BM} = \frac{AC}{AB}$ d'où $CN = 1{,}2 \times \frac{6}{2{,}4}$.

Ainsi, $CN = 3$.

20 **a)**

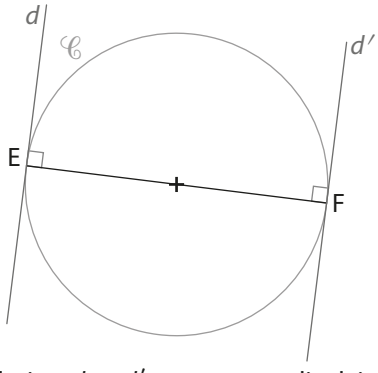


b) Dans le triangle AMN rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore :

$AN^2 = AM^2 + MN^2 = 2^2 + 3^2 = 13$,

Donc $AN = \sqrt{13}$ soit $AN \approx 3{,}6$ cm.

21 **a)**



b) Les droites d et d' sont perpendiculaires à la droite (EF), donc les droites d et d' sont parallèles.

22 **a)** $\widehat{KIJ} = 52°$.

Or, $\widehat{KIJ} + \widehat{IJK} + \widehat{JKI} = 180°$, donc $\widehat{IJK} = 90°$.

Ainsi, la droite (KJ) est tangente en J au cercle $\mathscr{C}$.

b) Dans le triangle IJK rectangle en J, d'après le théorème de Pythagore,

$IK^2 = IJ^2 + JK^2$, donc $IJ^2 = 10^2 - 7{,}5^2 = 43{,}75$.

D'où $IJ = \sqrt{43{,}75}$ soit $IJ \approx 6{,}6$ cm.

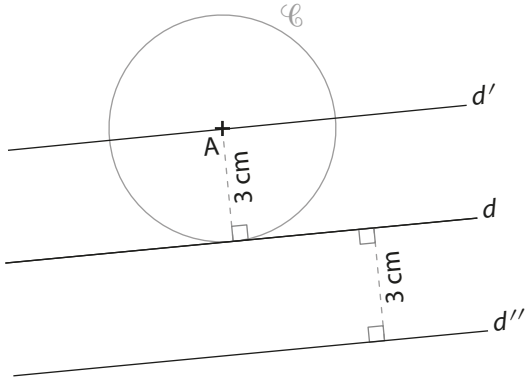
23 **a) (1)** **b) (3)** **c) (2)**

24 I est le projeté orthogonal de :

S sur (MN) ; T sur (MN) ; M sur (TS) ; N sur (TS).

25 Sofia se trompe : M est le projeté orthogonal de A sur d.

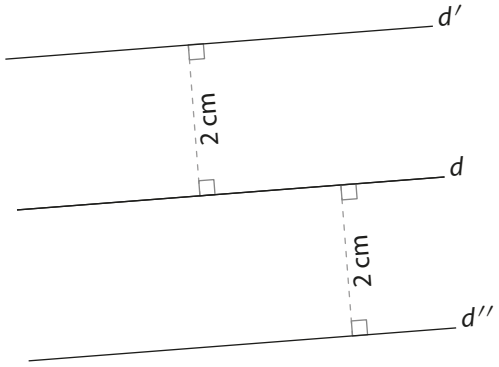
26 **a), b), c)** Échelle : 1/2



b) L'ensemble des points situés à 3 cm du point A est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 3 cm.

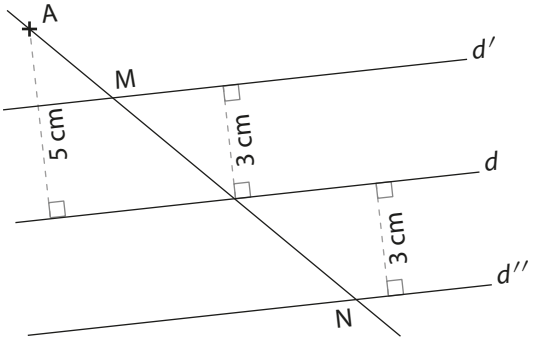
c) L'ensemble des points situés à 3 cm de la droite d est formé des deux droites d' et d'' situées à 3 cm de d.

27 **a), b)**



L'ensemble des points situés à 2 cm de d est formé des droites d' et d''.

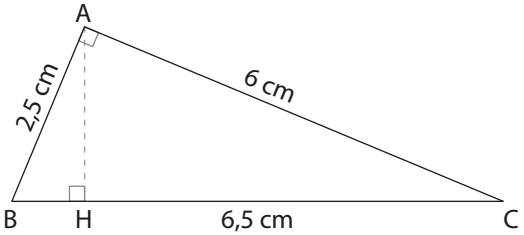
28 **a)** Échelle : 1/2



b) On construit les droites d' et d'' qui constituent l'ensemble des points situés à 3 cm de d.

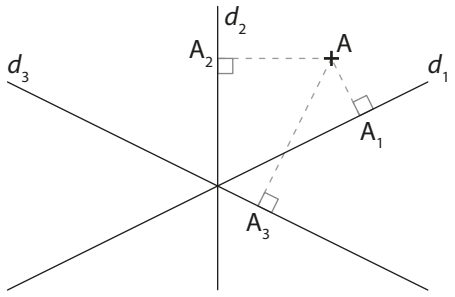
On trouve une sécante à d' et d'' passant par A ; elle coupe d' en M et d'' en N.

29 **a), b)**



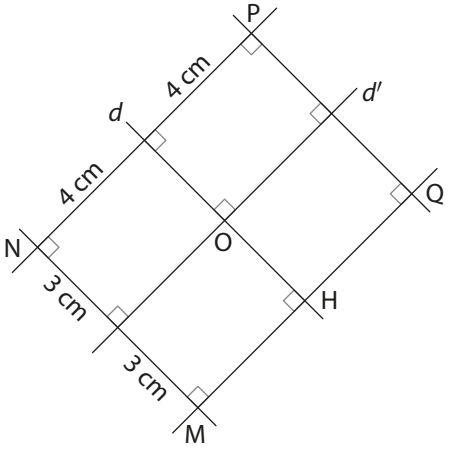
c) H est le projeté orthogonal de :
A sur (BC) ; B sur (AH) ; C sur (AH).

30



31 **a)** $AB^2 = 20{,}4^2 = 416{,}16$
$AH^2 + HB^2 = 9{,}6^2 + 18^2 = 416{,}16$.
Ainsi, $AB^2 = AH^2 + HB^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABH est rectangle en H.
Donc, H est le projeté orthogonal de B sur (AC).
b) Les points A, H, C sont alignés donc le triangle BCH est rectangle en H, ainsi la distance de C à (BH) est CH.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BHC, $BC^2 = BH^2 + CH^2$
donc $CH^2 = BC^2 - BH^2 = 19{,}5^2 - 18^2 = 56{,}25$.
Ainsi, $CH = 7{,}5$ cm.

32 **a), b)** Échelle : 1/2



c) Dans le triangle OHM rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
$OM^2 = OH^2 + HM^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ donc
$OM = 5$ cm.

33 L'unité de longueur est donnée par le carreau du quadrillage.
$RB = 2$.
D'après le théorème de Pythagore,
$RC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ donc $RC = \sqrt{5}$.
Ainsi, le robot se trouve plus proche de la droite (AB) que de la droite (AC).

34 **a) (1)** **b) (3)** **c) (2)**

35 **a)** $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{AC}$.
b) $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{CH}{AC}$.
c) $\tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CH}{AH}$.

36 **a) (2)** **b) (2)** **c) (1)** **d) (3)**

37 $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$
$\sin^2(x) = 1 - 0{,}6^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$
Or, $\sin(x) > 0$ donc $\sin(x) = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

38 **a)** Dans le triangle ABC rectangle en C,
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AC}{AB}$ donc $AB = \dfrac{AC}{\cos(\widehat{BAC})} = \dfrac{7{,}2}{\cos(28°)}$
soit $AB \approx 8{,}2$ cm.
b) Dans le triangle DEF rectangle en F,
$\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{EF}{ED}$ donc $EF = ED\sin(\widehat{DEF}) = 10\sin(53°)$
soit $EF \approx 8$ cm.

39 **a)** Dans le triangle JKL rectangle en K,
$\sin(\widehat{KJL}) = \dfrac{KL}{JL}$ donc $JL = \dfrac{KL}{\sin(\widehat{KJL})} = \dfrac{5}{\sin(48°)}$
soit $JL \approx 6{,}7$ cm.
b) Dans le triangle GHI rectangle en I,
$\tan(\widehat{HGI}) = \dfrac{HI}{GI}$ donc $HI = HI\tan(\widehat{HGI}) = 2{,}5\tan(64°)$
soit $HI \approx 5{,}1$ cm.

40 **a)** Dans le triangle ABC rectangle en R,
$\tan(\widehat{RBC}) = \dfrac{RC}{BR}$ donc $BR = \dfrac{RC}{\tan(\widehat{RBC})} = \dfrac{200}{\tan(40°)}$
Le randonneur B se trouve à environ 238 m du refuge.
b) En tenant le même raisonnement qu'au **a)**, on obtient $AR = \dfrac{200}{\tan(29°)}$ soit $AR \approx 361$ m.
Or $361 - 238 = 123$.
Donc les deux randonneurs sont distants environ de 123 m.

41 **a)** Dans le triangle ASS' rectangle en S',
$\sin(\widehat{SAS'}) = \dfrac{SS'}{AS}$

donc $SS' = AS\sin(\widehat{SAS'}) = 15\sin(28°)$
soit $SS' \approx 7$ m.
La hauteur de la statue est d'environ 7 m.

b) Dans le triangle BSS′ rectangle en S′,
$\tan(\widehat{SBS'}) = \dfrac{SS'}{BS'}$

donc $BS' = \dfrac{SS'}{\tan(\widehat{SBS'})}$ soit $BS' = \dfrac{7}{\tan(39°)}$

et $BS' \approx 8{,}6$ m.
En procédant de même, dans le triangle ASS′, on obtient :
$AS' = 15\cos(28°)$ soit $AS' \approx 13{,}2$ m.
Donc $AB = AS' + S'B$ soit $AB \approx 21{,}8$ m.
Les deux projecteurs sont donc séparés d'environ 21,8 m.

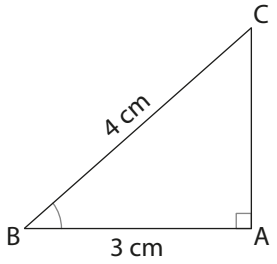
42 **a)** Dans le triangle ABC rectangle en C,
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8{,}9}{10} = 0{,}89.$
Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC} \approx 27°$.

b) Dans le triangle DEF rectangle en D,
$\sin(\widehat{DEF}) = \dfrac{FD}{FE} = \dfrac{6}{7}.$
Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{DEF} \approx 59°$.

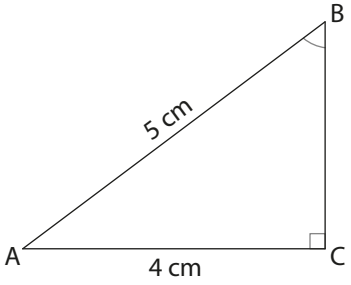
43 **a)** Dans le triangle GHI rectangle en I,
$\tan(\widehat{HGI}) = \dfrac{HI}{GI} = \dfrac{2{,}1}{1} = 2{,}1.$
Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{HGI} \approx 65°$.

b) Dans le triangle JKL rectangle en K,
$\sin(\widehat{KJL}) = \dfrac{KL}{JL} = \dfrac{2{,}4}{3{,}2} = 0{,}75.$
Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{KJL} = 49°$.

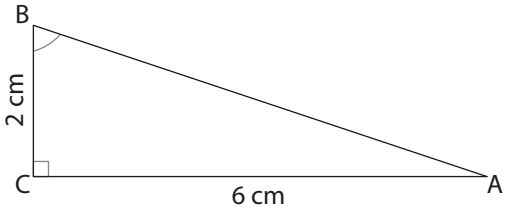
44 **a)**



b)



c)



45 Dans chaque cas, $\sin(\hat{r}) = \dfrac{\sin(\hat{i})}{I}$.

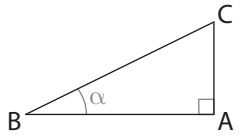
• Pour l'eau :
$\sin(\hat{r}) = \dfrac{\sin(34°)}{\frac{4}{3}}$ soit $\sin(\hat{r}) \approx 0{,}42$ donc $\hat{r} \approx 25°$.

• Pour le verre :
$\sin(\hat{r}) = \dfrac{\sin(34°)}{1{,}46}$ soit $\sin(\hat{r}) \approx 0{,}383$ donc $\hat{r} \approx 23°$.

• Pour le diamant :
$\sin(\hat{r}) = \dfrac{\sin(34°)}{2{,}42}$ soit $\sin(\hat{r}) \approx 0{,}231$ donc $\hat{r} \approx 13°$.

46 **1. a)** $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$,
donc $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - 0{,}7^2 = 0{,}51$
Or, $\sin(\alpha) > 0$, donc $\sin(\alpha) = \sqrt{0{,}51}$ soit $\sin(\alpha) \approx 0{,}71$.

b. Avec les notations ci-contre :
$\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{BC}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{AC}{BC}$.



Donc $\tan(\alpha) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$

Donc, ici, $\tan(\alpha) = \dfrac{\sqrt{0{,}51}}{0{,}7}$ soit $\tan(\alpha) \approx 1{,}02$.

2. a) $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$,
donc $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = 1 - 0{,}3^2 = 0{,}91$
Or, $\cos(\alpha) > 0$, donc $\cos(\alpha) = \sqrt{0{,}91}$ soit $\cos(\alpha) \approx 0{,}95$.

b) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{0{,}3}{\sqrt{0{,}91}}$ soit $\tan(\alpha) \approx 0{,}31$.

47 **a)** $\cos^2(60°) + \sin^2(60°) = 1$, donc
$\sin^2(60°) = 1 - \cos^2(60°) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}.$

Or, $\sin(60°) > 0$, donc $\sin(60°) = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

b) $\cos^2(45°) + \sin^2(45°) = 1$, donc
$\cos^2(45°) = 1 - \sin^2(45°) = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}.$

Or, $\cos(45°) > 0$, donc $\cos(45°) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

48 $\cos^2(54°) + \sin^2(54°) = 1$,

donc $\cos^2(54°) = 1 - \sin^2(54°) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$\cos^2(54°) = 1 - \frac{1^2 + 2\times1\times\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{4^2}$

$\cos^2(54°) = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}$

$\cos^2(54°) = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$

Or, $\cos(54°) > 0$, donc $\cos(54°) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

49 **Première méthode**

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ (voir exercice 46)

donc $\sin(\alpha) = \tan(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{35}{12}\times\frac{12}{37} = \frac{35}{37}$.

Deuxième méthode

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$,

donc $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{12}{37}\right)^2 = \frac{1225}{1369}$.

Or, $\sin(\alpha) > 0$, donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1225}{1369}} = \frac{35}{37}$.

50 On peut calculer AB grâce aux trois outils.

51 **a)** $\sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$

Donc le segment rouge a pour longueur 6 cm.

b) $\frac{OB}{OA} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ donc d'après le théorème de Thalès,

$BD = \frac{5}{4}AC = \frac{5}{4}\times 5 \text{ cm} = 6{,}25 \text{ cm}$.

52 **1.** Cône de révolution

a) Dans le triangle SOA rectangle en O,

$\tan(40°) = \frac{OA}{OS}$

donc $OS = \frac{OA}{\tan(40°)} = \frac{5}{\tan(40°)}$ soit $OS \approx 6$ cm.

b) $V = \frac{1}{3}\times\pi\times OA^2\times OS$ soit $V \approx \frac{1}{3}\times\pi\times 5^2\times 6$ et $V \approx 157 \text{ cm}^3$.

2. Pyramide régulière

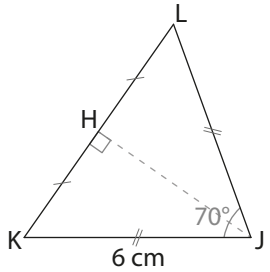
a) Dans le triangle OIS rectangle en O,

$\tan(\widehat{ISO}) = \frac{OI}{OS}$

donc $OS = \frac{4}{\tan(20°)}$ soit $OS \approx 11$ cm.

b) $V = \frac{1}{3}\times AB^2\times OS$ soit $V \approx \frac{1}{3}\times 8^2\times 11$ et $V \approx 235 \text{ cm}^3$.

53 **a)** Échelle : 1/2



b) On note H le milieu du côté [KL].

Le triangle JKL est isocèle en J, donc (JH) est à la fois la médiatrice de [LK] et la bissectrice de l'angle $\widehat{LJK}$.

Dans le triangle JKH rectangle en H,

$\cos(\widehat{KJH}) = \frac{JH}{JK}$

donc $JH = JK\cos(\widehat{KJH}) = 6\cos(35°)$

soit $JH \approx 4{,}91$ cm.

De plus, $\sin(\widehat{KJH}) = \frac{KH}{JK}$ donc

$KH = JK\cos(\widehat{KJH}) = 6\sin(35°)$ soit $KH \approx 3{,}44$ cm.

Ainsi, l'aire $\mathscr{A}$ du triangle JKL est $\mathscr{A} = \frac{JH\times KL}{2}$.

soit $\mathscr{A} \approx \frac{4{,}91\times 2\times 3{,}44}{2}$ soit $\mathscr{A} \approx 17 \text{ cm}^2$.

54 **a)** • $\widehat{ABC} = 180° - 20° - 40° = 120°$.

• $\widehat{CBH} = 180° - 120° = 60°$.

• $\widehat{HCB} = 180° - 90° - 60° = 30°$.

b) Dans le triangle BCH rectangle en H,

• $\tan(\widehat{CBH}) = \frac{CH}{BH}$

donc $BH = \frac{CH}{\tan(\widehat{CBH})} = \frac{2{,}5}{\tan(60°)}$ soit $BH \approx 1{,}4$ cm.

• $\sin(\widehat{CBH}) = \frac{CH}{BC}$

donc $BC = \frac{CH}{\sin(\widehat{CBH})} = \frac{2{,}5}{\sin(60°)}$ soit $BC \approx 2{,}9$ cm.

• Dans le triangle ACH rectangle en H,

$\sin(\widehat{HAC}) = \frac{CH}{AC}$

donc $AC = \frac{CH}{\sin(HAC)} = \frac{2{,}5}{\sin(40°)}$ soit $AC \approx 3{,}9$ cm.

c) On note H′ le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Dans le triangle BH′C rectangle en H′, $\sin(\widehat{BCA}) = \frac{BH'}{BC}$

donc $BH' = BC\sin(\widehat{BCA})$ soit $BH' \approx 2{,}9\sin(20°)$ et $BH' \approx 1$.

Ainsi, l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est $\mathscr{A} = \frac{AC\times BH'}{2}$

soit $\mathscr{A} \approx \frac{3{,}9\times 1}{2}$ et $\mathscr{A} \approx 2 \text{ cm}^2$.

55 **1.** C **2.** B **3.** C **4.** A

56 **1.** A, B, D **2.** A, B, C, D **3.** A

57 **1. Faux.** En effet, dans le triangle SIA rectangle en I, $\tan(\widehat{ISA}) = \frac{IA}{IS}$.

2. Vrai. En effet, dans le triangle SIA rectangle en I, $\sin(\widehat{ISA}) = \frac{IA}{SA}$ c'est-à-dire $\sin(32°) = \frac{IA}{12}$.

Ainsi, $IA = 12\sin(32°)$ et $IA \approx 6{,}36$ cm.

3. Vrai. En effet, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle IAB rectangle en I, $AB^2 = IA^2 + IB^2$ soit $AB^2 = 2IA^2$.

Ainsi, l'aire AB^2 du carré de base vaut environ $2 \times 6{,}36^2$ soit $80{,}9\ cm^2$, environ $81\ cm^2$.

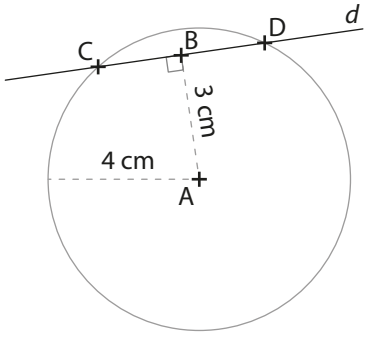
4. Faux. En effet, dans le triangle SIA rectangle en I, $\cos(\widehat{ISA}) = \frac{SI}{SA}$ soit $\cos(32°) = \frac{SI}{12}$.

Ainsi, $SI = 12\cos(32°)$ et $SI \approx 10{,}18$ cm.

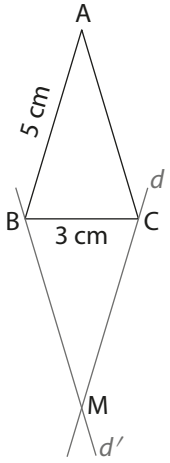
$$V \approx \frac{1}{3} \times 81\ cm^2 \times 10{,}18\ cm$$

soit $V \approx 275\ cm^3$.

58 Échelle : 1/2



59 **a) b)** Échelle : 1/2



c) Les droites (CM) et (AB) sont parallèles, ainsi que les droites (BM) et (AC) donc le quadrilatère ABMC est un parallélogramme.

De plus, il a deux côtés consécutifs de même longueur (AB = AC), donc c'est un losange.

60 Les droites (BB′) et (CC′) sont perpendiculaires à (AC′) donc elles sont parallèles entre elles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'}$.

Donc $\frac{BC + 4{,}6}{4{,}6} = \frac{6}{4}$ soit $BC + 4{,}6 = 4{,}6 \times \frac{6}{4} = 6{,}9$.

Ainsi, $BC = 2{,}3$ cm.

61 **a)** Dans le triangle OAB rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore,

$OA^2 = OB^2 + AB^2 = 10^2 + 24^2 = 676$ donc

$OA = \sqrt{676}$ soit $OA = 26$ cm.

b) Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (BC), donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès : $\frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB}$

donc $\frac{15}{10} = \frac{CD}{24}$.

Ainsi, $CD = \frac{15}{10} \times 24$ et $CD = 36$ cm.

c) 1re méthode

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OCD rectangle en C,

$OD^2 = CO^2 + CD^2 = 15^2 + 36^2 = 1521$ donc

$OD = 39$ cm.

2e méthode

D'après le théorème de Thalès, $\frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA}$ soit $\frac{15}{10} = \frac{OD}{26}$.

Ainsi, $OD = 26 \times \frac{15}{10} = 39$ et $OD = 39$ cm.

62 **a)** Dans le triangle PMN rectangle en M,

$\cos(\widehat{PNM}) = \frac{MN}{PN}$ donc $PN = \frac{4{,}6}{\cos(25°)}$

soit $PN \approx 5{,}1$ cm.

b) Dans le triangle PNL rectangle en L,

$\cos(\widehat{NPL}) = \frac{PL}{PN}$ soit $\cos(\widehat{NPL}) = \frac{4}{5{,}1}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{NPL} \approx 38°$.

Donc $\widehat{PNL} = 90° - \widehat{NPL}$ et $\widehat{PNL} \approx 52°$.

S'entraîner

64 **a)** $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AB}$ c'est-à-dire $0{,}56 = \dfrac{80}{AB}$ soit $AB = \dfrac{80}{0{,}56}$. Ainsi, $AB \approx 142{,}9$ cm.

b) La variable *h* représente la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

c) Voici l'affichage obtenu.

```
>>> H(0.56,80)
142.85714285714283
```

65 **a)** La variable *c* représente le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$; la variable *s* représente le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$; la variable *t* représente la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$.

b)

```
>>> T(10,7.5,12.5)
(0.8, 0.6, 0.75)
```

67 **1.** Il semble que $\widehat{ABE} = \widehat{BCI}$.

2. a) ABI et BIC sont deux triangles isocèles en I. En effet, I est le centre du rectangle ABCD et $IA = IB = IC = ID$.

b) Dans le triangle isocèle BIC, $\widehat{BCI} = \widehat{IBC}$.

$\widehat{IBC} + \widehat{ABI} = 90°$ et $\widehat{ABI} + \widehat{ABE} = 90°$ donc $\widehat{IBC} = \widehat{ABE}$ et par conséquent $\widehat{ABE} = \widehat{BCI}$.

68 **1.** Il semble que la mesure de l'angle rouge soit le double de la mesure de l'angle vert.

2. a) • I est le milieu du segment [MN], donc $IM = IN$; O est le centre du cercle, donc $OM = ON$.

Ainsi, les points O et I sont équidistants de M et N donc (OI) est la médiatrice de [MN].

• Le triangle MOO′ est rectangle en M, donc $\widehat{MO'I} + \widehat{MOI} = 90°$.

Le triangle MIO′ est rectangle en I, donc $\widehat{O'MI} + \widehat{MO'I} = 90°$.

b) D'après ce qui précède, $\widehat{MOI} = \widehat{O'MI}$.

Ou $\widehat{MOI} = \widehat{NOI}$ donc $\widehat{MON} = 2\widehat{MOI}$.

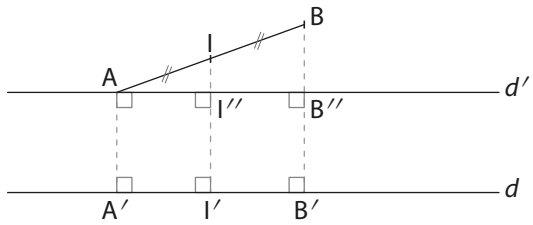
Par conséquent, $\widehat{MON} = 2\widehat{O'MI}$.

69 *d* est la médiatrice du segment [PM], donc $OM = OP$.

d′ est la médiatrice du segment [MN], donc $OM = ON$.

Ainsi, $OM = ON = OP$ donc les points M, N, P sont situés sur le même cercle de centre O et de rayon OM.

70

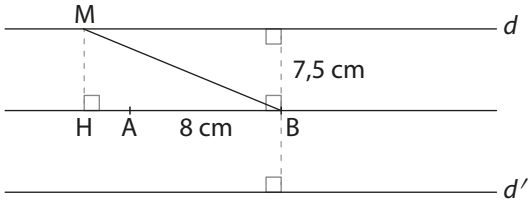


On note d' la droite parallèle à *d* passant par A.

Dans le triangle ABB″, d'après le théorème de Thalès, puisque I est le milieu de [AB] et que (II″) et (BB″) sont parallèles, on en déduit que I″ est le milieu de [AB″].

Ainsi, $AI'' = I''B$, or AI″I′A′ et I″B″B′I′ sont des rectangles, donc $A'I' = I'B'$ ce qui prouve que I′ est le milieu du segment [A′B′].

71 **a)** Échelle : 1/4



b) On note H le projeté orthogonal d'un point M sur la droite (AB).

L'aire $\mathscr{A}$ du triangle AMB est $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times MH}{2}$.

De $\dfrac{8 \times MH}{2} = 30$, on déduit que $MH = 7{,}5$ cm.

L'ensemble des points M cherché est constitué des droites *d* et d' situées à 7,5 cm de la droite (AB).

72 *d* est une tangente à un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

On suppose que *d* coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B distincts.

En particulier, la droite (OA) est perpendiculaire à *d* en A, donc la distance de O à *d* est OA.

B est un point de *d* distinct de A, donc $OA < OB$.

Or, ceci est en contradiction avec le fait que A et B appartiennent à $\mathscr{C}$ c'est-à-dire que $OA = OB$.

Donc A et B sont confondus et *d* coupe $\mathscr{C}$ en un seul point.

73 Les triangles ACD et ADE sont équilatéraux donc $CA = CD$ et $EA = ED$. Donc la droite (EC) est la médiatrice du côté [AD].

Cette droite est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{ACD}$, donc $\widehat{ACE} = 30°$.

$\widehat{BCE} = \widehat{BCA} + \widehat{ACE} = 60° + 30° = 90°$, donc le triangle BCE est rectangle en C.

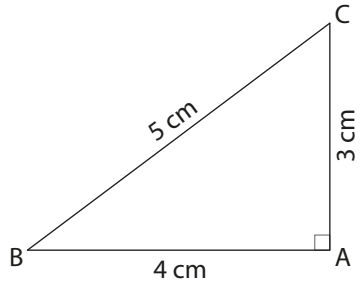
74 **1. a)** • Dans les triangles BIJ et BAC, les points B, I, D et B, J, C sont alignés dans cet ordre et $\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC}$.
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (AC) sont parallèles. En procédant de même dans les triangles DLK et DAC, on démontre que (LK) et (AC) sont parallèles. Donc les droites (IJ) et (LK) sont parallèles.
• On montre de la même manière que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.
b) Ainsi, dans le quadrilatère IJKL, les côtés opposés sont parallèles, donc IJKL est un parallélogramme.
2. Si ABCD est un rectangle, alors $AC = BD$.
Or d'après le théorème de Thalès :
$IJ = \frac{AC}{2}$; $LK = \frac{AC}{2}$; $KJ = \frac{DB}{2}$; $LI = \frac{DB}{2}$.
Donc $IJ = JK = KL = LI$.
Donc IJKL est un losange.
3. Si ABCD est un losange, alors les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Or, les droites (IJ) et (AC) sont parallèles, ainsi que les droites (JK) et (BD). Donc les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.
IJKL est un parallélogramme donc deux côtés consécutifs sont perpendiculaires, donc IJKL est un rectangle.

75 Par la symétrie de centre I, l'image du cercle $\mathscr{C}$ est $\mathscr{C}'$, l'image de Δ est Δ et l'image de *d* est *d*.
A appartient à $\mathscr{C}$ et à *d*, donc son image par la symétrie de centre I appartient donc à $\mathscr{C}'$ et à *d*, c'est donc A'.
De façon analogue, l'image de B est B'.
Donc les segments $[AA']$ et $[BB']$ se coupent en leur milieu I et le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme.

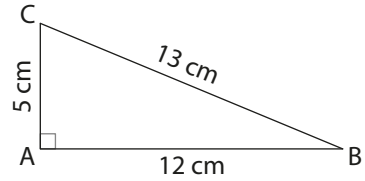
76 **a)** Dans le triangle ABD rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :
$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 35{,}4^2 + 35{,}4^2 = 2506{,}32$
donc $BD = \sqrt{2506{,}32}$ soit $BD \approx 50$ m.
b) Dans le triangle SBO rectangle en O,
$\tan(\widehat{SBO}) = \frac{OS}{OB}$. Or, $OB = \frac{1}{2}BD$ et $OB \approx 25$ cm.
Ainsi $\tan(\widehat{SBO}) \approx \frac{21{,}6}{25}$ soit $\tan(\widehat{SBO}) \approx 0{,}86$.
Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{SBO} \approx 41°$.
c) Le triangle BSD est isocèle en S, donc $\widehat{BSD} + \widehat{BDS} + \widehat{SBD} = 180°$, soit
$\widehat{BSD} \approx 180° - 2 \times 41°$ et $\widehat{BSD} \approx 98°$.

77 • $AC^2 = 10^2 = 100$.
$AB^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$.
Ainsi, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est $\mathscr{A} = \frac{AB \times BC}{2}$.
Donc $\mathscr{A} \approx \frac{8 \times 6}{2}$ et $\mathscr{A} \approx 24$ cm^2.
Or, on a aussi $\mathscr{A} = \frac{AC \times BH}{2}$.
Donc $\frac{10 \times BH}{2} = 24$ soit $BH = 4{,}8$ cm.

78 **a)** Les triplets (5 ; 3 ; 4) et (13 ; 5 ; 12) répondent à ces conditions.
b) Avec le triplet (5 ; 3 ; 4).



Avec le triplet (13 ; 5 ; 12). Échelle : 1/3



79 **a)** Puisque MNP est un triangle rectangle en N, pour que MNPQ soit un rectangle, il suffit que MNPQ soit un parallélogramme, c'est-à-dire que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point Q.
$\overrightarrow{MN}(9\,;3)$ et $\overrightarrow{QP}(4+x\,;\,-1-y)$.
Ainsi, $4 - x = 9$ et $-1 - y = 3$ soit $x = -5$ et $y = -4$. Finalement, $Q(-5\,;-4)$.
b) $\overrightarrow{MN}(9\,;3)$ donc $MN = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.
$\overrightarrow{NP}(1\,;\,-3)$ donc $NP = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$.
Dans le triangle MNP rectangle en N :
$$\tan(\widehat{NMP}) = \frac{NP}{MN} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{3}.$$
Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{NMP} \approx 18°$.
c) Les coordonnées de I sont $\left(\frac{-6+4}{2}\,;\,\frac{-1+(-1)}{2}\right)$ soit $(-1\,;-1)$.
$IM = \sqrt{(-6+1)^2 + (-1+1)^2} = 5$
$IN = \sqrt{(3+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$
$IP = \sqrt{(4+1)^2 + (-1+1)^2} = 5$

$IQ = \sqrt{(-5+1)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

Donc I est le centre d'un cercle qui passe par les points M, N, P, Q.

80 $\widehat{ABC} \leqslant 45°$ équivaut à $\tan(\widehat{ABC}) \leqslant 1$ c'est-à-dire $\frac{AC}{AB} \leqslant 1$ soit $AC \leqslant AB$ d'où $b \leqslant a$.

La loi de probabilité de l'expérience aléatoire est donnée par le tableau suivant :

Issue	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(2 ; 2)	(2 ; 3)
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
Issue	(2 ; 4)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	

La probabilité d'avoir $b \leqslant a$ est donc égale à $\frac{3}{9}$, soit $\frac{1}{3}$.

81 **a)** Dans le triangle AIK rectangle en I,

$\cos(\widehat{IAK}) = \frac{AI}{AK}$ donc

$AI = AK\cos(\widehat{IAK}) = 20\cos(64°)$ et $AI \approx 8{,}77$ m.

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire du plafond ABCD.

$\mathscr{A} = AB^2 = (3AI)^2$ soit $\mathscr{A} \approx 692{,}22$ m^2.

82 **a)** G(0 ; 0), I(1 ; 0), C(0 ; 1), B(0 ; −1), F(2 ; 0), E(2 ; −1), A(−1 ; −1), D(−1 ; 1), H(2 ; 1), L(0 ; 2), K(2 ; 2), $J\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$, $M\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$, $N\left(1 ; -\frac{1}{2}\right)$.

b) $MN^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

$MJ^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

$JN^2 = 1^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = 5$

$MN^2 + MJ^2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5 = JN^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle JMN est rectangle en M.

De plus $MN = MJ$, donc JMN est un triangle rectangle isocèle en M.

c) Aire de JMN : $\frac{1}{2} \times MN \times MJ = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$.

Périmètre de JMN :

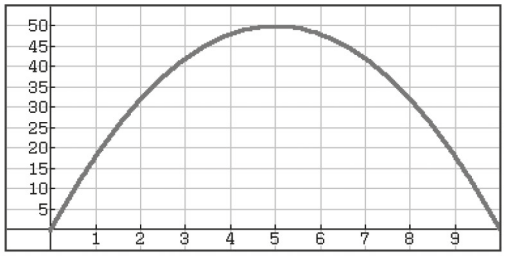
$\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{5} = 2\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{5}$.

83 Il faut que M (resp. N) soit le projeté orthogonal de A (resp. de B) sur *d*.

84 **1. a)** $BC = 20 - 2x$.

b) $\mathscr{A}(x) = AB \times BC = x(20-2x)$.

2. a) Avec la calculatrice, on affiche la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x(20-2x)$ et on conjecture que l'aire est maximum pour $x = 5$.



b) Pour tout x de l'intervalle $[0 ; 10]$,

$50 - 2(x-5)^2 = 50 - 2(x^2 - 10x + 25)$

$50 - 2(x-5)^2 = 50 - 2x^2 + 20x - 50$

$50 - 2(x-5)^2 = 20x - 2x^2$

$50 - 2(x-5)^2 = x(20-2x) = \mathscr{A}(x)$

c) Pour tout x de l'intervalle $[0 ; 10]$,

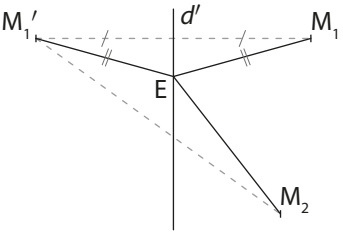
$(x-5)^2 \geqslant 0$ donc $-2(x-5)^2 \leqslant 0$

d'où $50 - 2(x-5)^2 \leqslant 50$. Ainsi $\mathscr{A}(x) \leqslant 50$.

Or $\mathscr{A}(5) = 50$.

On a donc démontré que l'aire maximum est de 50 m^2 et qu'elle est atteinte pour $x = 5$ m.

85 **a)**



b) On note M_1' le symétrique de M_1 par rapport à *d*.

$M_1E + EM_2 = M_1'E + EM_2$.

La somme $M_1'E + EM_2$ est minimum lorsque les points M_1', E et M_2 sont alignés.

Il faut donc positionner l'éolienne à l'intersection des droites *d* et $(M_1'M_2)$.

86 Dans le triangle ATU rectangle en T :

$\tan(\widehat{TAU}) = \frac{UT}{AT} = \frac{8}{13}$.

Dans le triangle FEU rectangle en E :

$\tan(\widehat{FUE}) = \frac{FE}{EU} = \frac{5}{8}$.

Or, avec la calculatrice, on obtient :

$\widehat{TAU} \approx 31{,}6°$ et $\widehat{FUE} \approx 32°$.

Donc $\widehat{TAU} \neq \widehat{FUE}$ et les points A, U, F ne sont pas alignés.

Donc le trajet $F - U - A$ n'est pas le plus court, c'est en fait le trajet en ligne droite $F - A$.

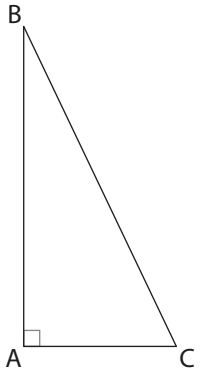
87 **a) Vrai.** En effet, pour tout angle aigu $\widehat{BAC}$, $\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1$, donc :

$$\cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \sin^2(\widehat{BAC}).$$

b) Vrai. En effet, si $\widehat{BAC} = 45°$, alors :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BAC})\left(= \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

c) Vrai. En effet,



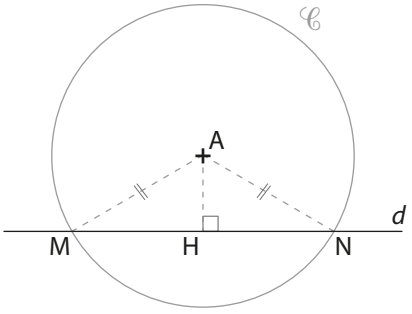
- $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$ $\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{BC}$

d'où l'égalité.

- $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{AC}{BC}$ $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$

d'où l'égalité.

d) Vrai. En effet, les points M et N sont les points d'intersection de la droite d et du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $2AH$.



88 **1. a)** La contraposée est :
« Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A. »

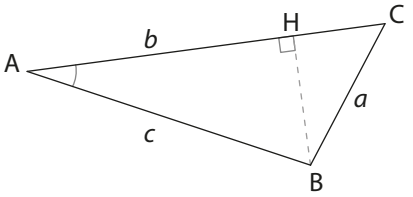
b) Cette contraposée peut être utilisée pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

2. a) La contraposée est : « Si $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles. »

b) Cette contraposée peut être utilisée pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

Organiser son raisonnement

89 **1. a)** On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).



Dans le triangle ABH rectangle en H,

$\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BH}{AB}$, donc $BH = AB\sin(\widehat{BAC})$.

Ainsi, $\mathscr{A} = \dfrac{AC \times BH}{2} = \dfrac{b \times c\sin(\widehat{BAC})}{2}$

soit $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$.

b) $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}ab\sin(\widehat{ACB})$.

$\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin(\widehat{ABC})$.

c) D'après les questions précédentes,

$\dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{2}ab\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{1}{2}ac\sin(\widehat{ABC})$

d'où $bc\sin(\widehat{BAC}) = ab\sin(\widehat{ACB}) = ac\sin(\widehat{ABC})$.

En divisant chaque membre par abc, il vient :

$\dfrac{\sin(\widehat{BAC})}{a} = \dfrac{\sin(\widehat{ACB})}{c} = \dfrac{\sin(\widehat{ABC})}{b}$

soit $\dfrac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$.

2. $\widehat{ACB} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 108°$.

$\dfrac{12}{\sin(40°)} = \dfrac{AC}{\sin(32°)} = \dfrac{AB}{\sin(108°)}$.

D'où $AC = \dfrac{12}{\sin(40°)} \times \sin(32°)$ soit $AC \approx 9{,}9$ cm,

et $AB = \dfrac{12}{\sin(40°)} \times \sin(108°)$ soit $AB \approx 17{,}8$ cm.

Donc le périmètre p du triangle ABC est :

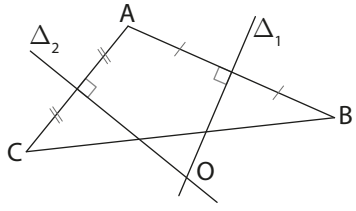
$p \approx 12 + 17{,}8 + 9{,}9$ soit $p \approx 39{,}7$ cm.

L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est :

$\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \times AC \times BC\sin(\widehat{ACB})$

$\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}9 \times 12\sin(108°)$ soit $\mathscr{A} \approx 56{,}5$ cm^2.

90 **1. a)** et **b)**



2. O appartient à la médiatrice Δ_1 de $[AB]$, donc $OA = OB$.

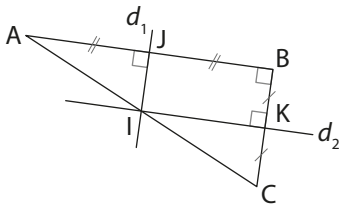
O appartient à la médiatrice Δ_2 de $[AC]$, donc $OA = OC$.

Ainsi, $OA = OB = OC$ ce qui prouve que O est équidistant des sommets A, B, C du triangle.

3. $OB = OC$ dont le point O appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

Ainsi, les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en le centre O du cercle circonscrit à ce triangle puisque $OA = OB = OC$.

91



On note J le milieu de $[AB]$.

Le triangle ABC est rectangle en B, donc la médiatrice d_1 de $[AB]$ est parallèle à (BC).

Or, d_1 passe par le milieu de $[AB]$, donc, d'après le théorème des milieux, elle coupe $[AC]$ en son milieu I.

On montre de la même façon que la médiatrice d_2 de $[BC]$ coupe $[AC]$ en son milieu I.

Comme I appartient à la médiatrice de $[AC]$, les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes en le milieu de son hypoténuse $[AC]$.

92 Les triangles OAD et OBC forment une configuration de Thalès puisque (AD) est parallèle à (BC) et que O, A, B ainsi que O, D, C alignés.

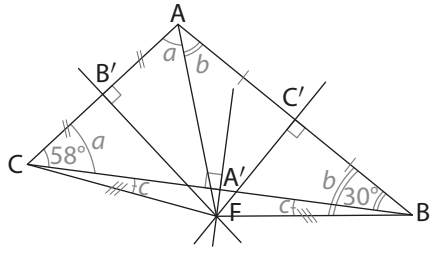
Donc $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{AD}{BC}$. Or $AD = r$, $BC = 2r$ et $CD = 2r$

D'où $\frac{OD}{OD + DC} = \frac{AD}{BC}$ donc $\frac{OD}{OD + 2r} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$

d'où $OD \times 2 = OD + 2r$ et $OD = 2r$.

93 **1. a)** et **b)** Le forage F doit être situé à égale distance des points A, B, C, il est donc à l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$ (et donc de la médiatrice de $[BC]$).

Échelle : 1/20 000



2. a) Le triangle AFC est isocèle en F (car $FA = FC$), donc $a = \widehat{FAB'} = \widehat{B'CF}$. De même, on a $b = \widehat{FAC'} = \widehat{C'BF}$ et $c = \widehat{FBA'} = \widehat{FCA'}$.

Ainsi, $a + b = 180° - 50° - 30° = 100°$.

Or, $a = 50° + c$ et $b = 30° + c$,

donc $c = a - 50° = b - 30°$ soit $a - 50° = b - 30°$.

Comme de plus, on a $a + b = 100°$, on en déduit, après calculs que $a = 60°$, $b = 40°$, $c = 10°$.

b) • Dans le triangle $A'FB$ rectangle en A',

$\tan(c) = \frac{FA'}{A'B}$ donc

$FA' = A'B\tan(c) = 600\tan(10°)$ soit $FA' \approx 106$ m.

• Dans le triangle $A'FB$ rectangle en A',

$\cos(c) = \frac{A'B}{FB}$ donc

$FB = \frac{A'B}{\cos(c)} = \frac{600}{\cos(10°)}$ soit $FB \approx 609$ m.

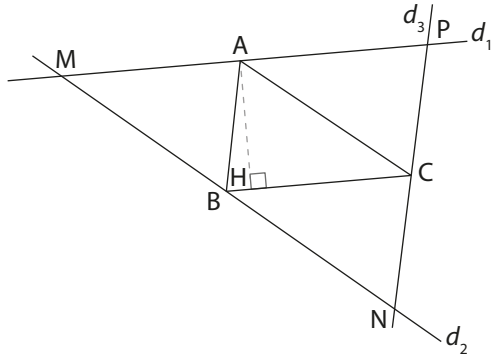
• Dans le triangle AFC' rectangle en C',

$\sin(b) = \frac{FC'}{AF}$, or $AF = FB$, donc

$FC' = FB\sin(b)$ soit $FC' \approx 609\sin(40°)$ et $FC' \approx 391$ m.

• En procédant de même dans le triangle $FB'C$ rectangle en B', on trouve $FB' \approx 609\sin(60°)$ soit $FB' \approx 527$ m.

94 **1. a)** et **b)**



2. a) Les quadrilatères APCB et ACBM sont des parallélogrammes car leurs côtés opposés sont parallèles deux à deux.

b) Les points M, A, P sont alignés, de plus, d'après le **2. a)**, $AM = BC$ et $AP = BC$ donc $AM = AP$. On en déduit que A est le milieu de $[MP]$.

c) Les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (AH) et (MP). De plus A est le milieu de $[MP]$, donc la droite (AH) est la médiatrice du segment $[MP]$.

d) On montrerait de la même façon que la hauteur (BH') issue de B dans le triangle ABC est la médiatrice de $[MN]$ et que la hauteur (CH'') issue de C dans le triangle ABC est la médiatrice de $[NP]$.

Or les trois médiatrices du triangle MNP sont concourantes (voir exercice 90), donc les trois hauteurs du triangle ABC sont courantes.

95 **1. a)** Dans le triangle BCH rectangle en H,

$\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{CH}{BC}$ donc $CH = a\cos(\widehat{ACB})$

et $\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{BH}{BC}$ donc $BH = a\sin(\widehat{ACB})$

b) $AH = AC - CH = b - a\cos(\widehat{ACB})$.

c) Dans le triangle ABH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ donc

$c^2 = (b - a\cos(\widehat{ACB}))^2 + (a\sin(\widehat{ACB}))^2$.

$c^2 = b^2 - 2ab\cos(\widehat{ACB}) + a^2\cos^2(\widehat{ACB}) + a^2\sin^2(\widehat{ACB})$

$c^2 = b^2 - 2ab\cos(\widehat{ACB}) + a^2(\cos^2(\widehat{ACB}) + \sin^2(\widehat{ACB}))$

d) Puisque $\cos^2(\widehat{ACB}) + \sin^2(\widehat{ACB}) = 1$, on obtient :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{ACB})$.

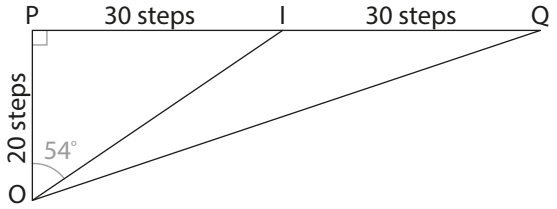
2. D'après la formule qui précède :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC\cos(\widehat{ACB})$

$AB^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5\cos(42°)$

$AB^2 \approx 11{,}7$ d'où $AB \approx \sqrt{11{,}7}$ et $AB \approx 3{,}4$ cm.

96



OPQ is a right-angled triangle in P, tence

$\tan(\widehat{QOP}) = \dfrac{QP}{PO}$

$= \dfrac{60}{20} = 3.$

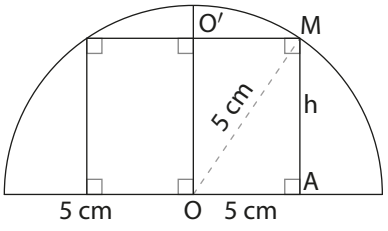
With the calculator we obtain $\widehat{QOP} \approx 72°$.

Hence $\widehat{IOQ} = \widehat{QOP} - \widehat{IOP}$

$= 72° - 54°$

$= 18°$

97 Un plan de coupe de la situation donne le schéma suivant où h est la hauteur du cylindre.



Dans le triangle OAM rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$OM^2 = OA^2 + AM^2$

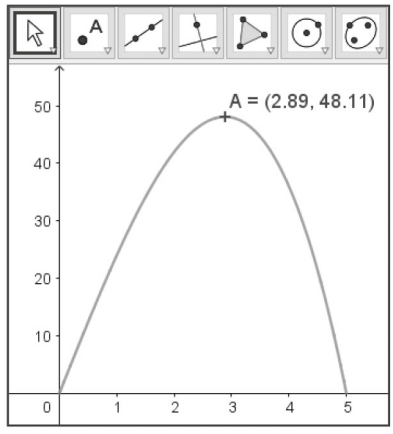
donc $OA^2 = OM^2 - AM^2 = 5^2 - h^2 = 25 - h^2$.

Or, le volume du cylindre est :

$V = \pi \times OA^2 \times h = \pi(25 - h^2)h$.

Avec GeoGebra, on affiche la courbe représentative de la fonction $x \mapsto (25 - x^2)x$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ (on saisit Fonction$(25x - x^3, 0{,}5)$).

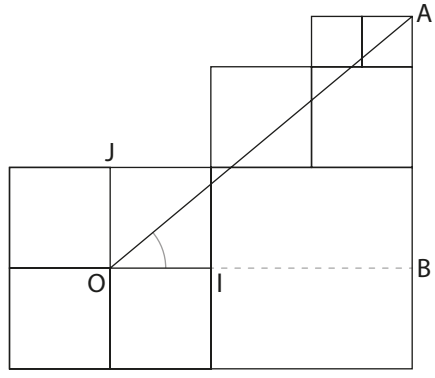
Ensuite, on saisit Max$(f(x), 0{,}5)$ et le sommet de la courbe s'affiche avec ses coordonnées.



Le volume du cylindre contenu dans la demi-sphère est maximum lorsque son rayon est d'environ 2,9 cm. Le volume est alors d'environ 48 cm3.

Remarque : en classe de Première, la notion de dérivée permettra d'établir que le rayon exact du cylindre est $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ cm.

98 On nomme certains points de la figure.



Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$,

$O(0\ ;\ 0)$; $A(3\ ;\ 2{,}5)$, $B(3\ ;\ 0)$.

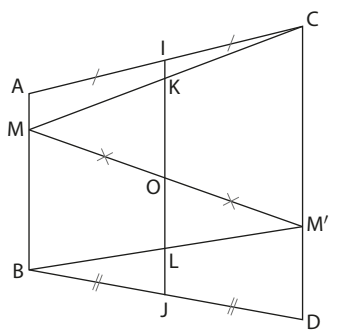
Ainsi, $OB = 3$ et $AB = 2{,}5$.

Dans le triangle OAB rectangle en B,

$\tan(\widehat{AOB}) = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{2{,}5}{3}$.

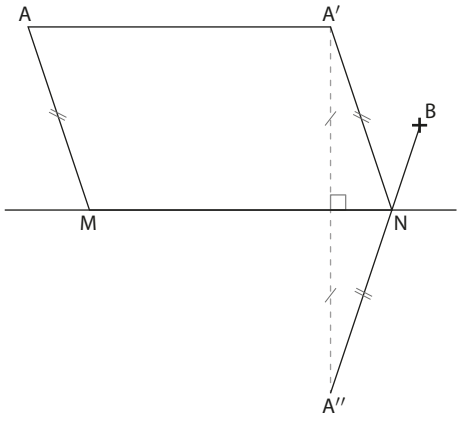
Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{AOB} \approx 40°$.

99



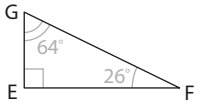
On note I le milieu du segment [AC] et J le milieu du segment [BD].
M est un point du segment [AB], M′ un point du segment [CD] et O le milieu du segment [MM′].
On note K le milieu de [MC] et L le milieu de [BM′].
Avec la réciproque du théorème de Thalès, on montre que :
• (OK) // (CM′) c'est-à-dire (OK) // (CD).
• (IK) // (AM) c'est-à-dire (IK) // (AB)
soit (IK) // (CD).
Donc les droites (OK) et (IK) sont confondues et les points I, K, O alignés.
• De façon analogue, on montre que les points K, O, L sont alignés, ainsi que les points O, L, J.
• Donc les points I, K, O, L, J sont alignés.
Donc le milieu O décrit le segment [IJ] lorsque le point M décrit le segment [AB] et le point M′ le segment [CD].

100



On place l'image A′ de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ (donc $AM + MN = AA' + A'N$).
On place l'image A″ de A′ par la symétrie d'axe *d* (donc $A'N = A''N$).
Ainsi, le chemin $AM + MN + NB$ (qui est de même longueur que le chemin $AA' + A''N + NB$) est le plus court possible.
L'emplacement de A″ permet, en traçant le segment [A″B], de trouver l'emplacement exact du point N et donc du point M.

101 **1.** B. En effet, dans le rectangle MNPQ, les diagonales ont même longueur, donc en particulier $JN = JP$. De plus, O est le milieu de [PN] donc (JO) est la médiatrice du côté [PN].
2. D. En effet, les diagonales [AB] et [PN] se coupent en leur milieu O donc ANBP est un parallélogramme.
3. C. En effet, dans le triangle MNP rectangle en N, $\tan(\widehat{MPN}) = \frac{MN}{PN} = \frac{2}{5}$.
Avec la calculatrice, $\widehat{MPN} \approx 22°$.
4. C. En effet, 64° et 26° sont les mesures de deux angles complémentaires. Dans le triangle rectangle ci-contre :



$\cos(26°) = \cos(\widehat{EFG}) = \frac{EF}{FG}$
et $\sin(64°) = \sin(\widehat{EGF}) = \frac{EF}{FG}$.
Donc $\cos(26°) = \sin(64°)$.
5. D. En effet, $\sin^2(\widehat{EFG}) = 1 - \cos^2(\widehat{EFG})$
soit $\sin^2(\widehat{EFG}) = 1 - 0{,}3^2 = 0{,}91$.
Donc $\sin(\widehat{EFG}) = \sqrt{0{,}91}$.
6. A. En effet, $\tan(\widehat{EFG}) = \frac{EG}{EF} = \frac{\frac{EG}{FG}}{\frac{EF}{FG}}$
donc $\tan(\widehat{EFG}) = \frac{\sin(\widehat{EFG})}{\cos(\widehat{EFG})} = \frac{\sqrt{0{,}91}}{0{,}3}$
soit $\tan(\widehat{EFG}) = \frac{\sqrt{0{,}01 \times 91}}{3 \times 0{,}1} = \frac{0{,}1\sqrt{91}}{3 \times 0{,}1} = \frac{\sqrt{91}}{3}$.
7. B. En effet, $\cos(\widehat{EFG}) = \frac{EF}{FG}$ c'est-à-dire $0{,}3 = \frac{EF}{a}$
soit $EF = 0{,}3a$.
8. B. En effet, $\frac{AM}{AC} = \frac{3{,}6}{4{,}8} = 0{,}75$ et $\frac{AN}{AB} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.
De plus, les points A, M, C d'une part et les points A, N, B sont alignés dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Ainsi, les droites (MN) et (AB) sont perpendiculaires et le triangle AMN est rectangle en N.
9. C. En effet, $\widehat{HNM}$ est le complémentaire de l'angle $\widehat{ANH}$. Or, il en est de même de $\widehat{MAN}$, donc $\widehat{HNM} = \widehat{MAN}$.
Dans le triangle AMN rectangle en N,
$\cos(\widehat{MAN}) = \frac{AN}{AM} = \frac{3}{3{,}6}$ et avec la calculatrice $\widehat{MAN} \approx 33{,}6°$. Donc $\widehat{HNM} \approx 33{,}6°$.

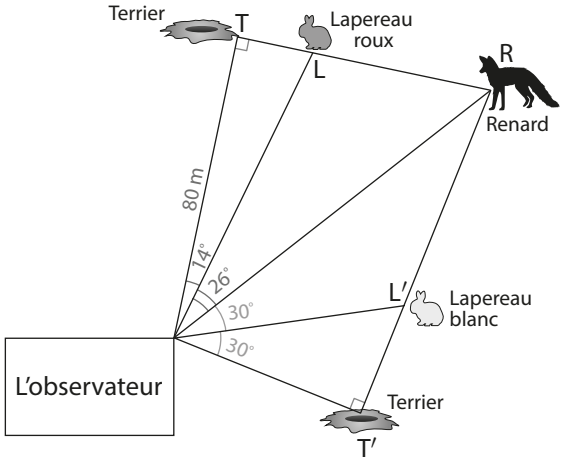
10. B. En effet, puisque le triangle AMN est rectangle en N (voir réponse à la question 8), d'après le théorème de Pythagore :

$AM^2 = AN^2 + MN^2$ donc $MN^2 = AM^2 - AN^2$

soit $MN^2 = 3{,}6^2 - 3^2 = 3{,}96$ et $MN \approx 2$ cm.

Exploiter ses compétences

102



• Dans le triangle OTL rectangle en T,

$\tan(\widehat{TOL}) = \dfrac{TL}{TO}$ donc

$TL = TO\ \tan(\widehat{TOL}) = 80\tan(14°)$ soit $TL \approx 19{,}9$ m.

• Dans le triangle TOR rectangle en T,

$\tan(\widehat{TOR}) = \dfrac{TR}{TO}$ donc

$TR = TO\ \tan(\widehat{TOR}) = 80\tan(40°)$ soit $TR \approx 67{,}1$

$\dfrac{67{,}1}{14} \approx 4{,}8$. Le renard va mettre environ 4,8 s pour arriver au terrier du lapin roux.

$\dfrac{19{,}9}{5{,}5} \approx 3{,}6$. Et $0{,}5 + 3{,}6 = 4{,}1$.

Le lapin roux va mettre environ 4,1 s pour rejoindre son terrier, donc le renard ne l'attrapera pas.

• Dans le triangle TOR rectangle en R,

$\cos(\widehat{TOR}) = \dfrac{OT}{OR}$ donc

$OR = \dfrac{OT}{\cos(\widehat{TOR})} = \dfrac{80}{\cos(40°)}$ soit $OR \approx 104{,}4$ m.

• Dans le triangle $T'OR$ rectangle en T',

$\sin(\widehat{ROT'}) = \dfrac{RT'}{OR}$ donc $RT' = OR\sin(\widehat{ROT'})$

soit $RT' \approx 104{,}4\sin(60°)$ et $RT' \approx 90{,}4$ m

$\cos(\widehat{ROT'}) = \dfrac{OT'}{OR}$ donc $OT' = OR\cos(\widehat{ROT'})$

soit $OT' \approx 104{,}4\cos(60°)$ et $OT' \approx 52{,}2$ m.

• Dans le triangle $L'OT'$ rectangle en T',

$\tan(\widehat{L'OT'}) = \dfrac{L'T'}{OT'}$ donc $L'T' = OT'\tan(\widehat{L'OT'})$

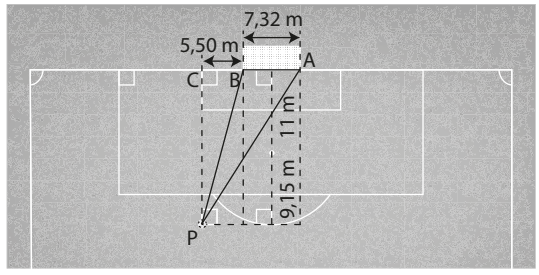
soit $L'T' \approx 52{,}2\tan(30°)$ et $L'T' \approx 30{,}1$ m

$\dfrac{90{,}4}{14} \approx 6{,}5$. Le renard va mettre environ 6,5 s pour arriver au terrier du lapereau blanc.

$\dfrac{30{,}1}{5{,}5} \approx 5{,}5$. Et $0{,}5 + 5{,}5 = 6$.

Le lapereau blanc va mettre environ 6 s pour rejoindre son terrier, donc le renard ne l'attrapera pas non plus. Il n'a intérêt à chasser aucun des deux lapereaux.

103 On peut schématiser la situation ainsi.



• Dans le triangle PCB rectangle en C,

$\tan(\widehat{CPB}) = \dfrac{BC}{PC} = \dfrac{5{,}5}{20{,}15}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{CPB} \approx 15{,}27°$.

• Dans le triangle PCA rectangle en C,

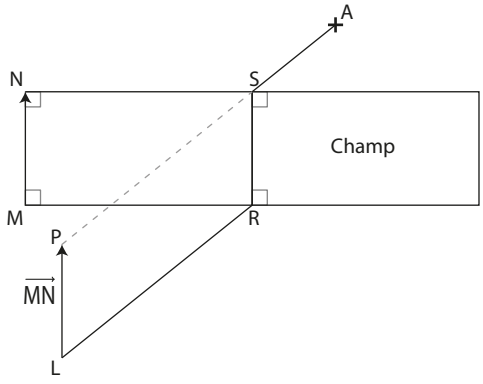
$\tan(\widehat{CPA}) = \dfrac{AC}{PC} = \dfrac{12{,}82}{20{,}15}$.

À la calculatrice, on obtient $\widehat{CPA} \approx 32{,}47°$.

Ainsi, $\widehat{BPA} = \widehat{CPA} - \widehat{CPB}$ et $\widehat{BPA} \approx 17{,}2°$.

Donc le commentateur avait raison.

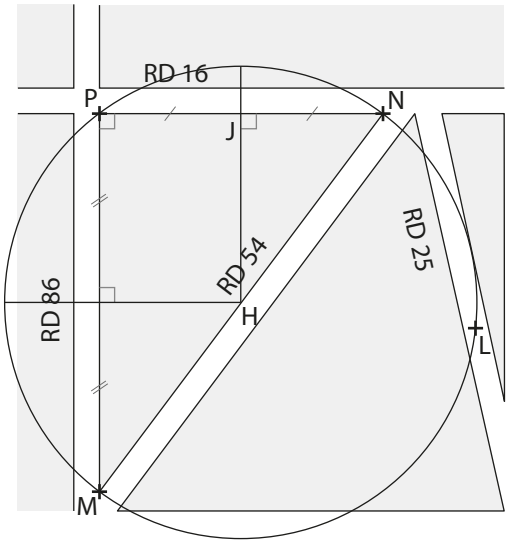
104



On place le point P image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ (donc $MN = RS = LP$).

Le trajet $PS + SA$ est minimum et il est de même longueur que le trajet $LR + SA$.
Donc le trajet minimum de Lila est le trajet $L - R - S - A$.

105



L'hélicoptère se situe au point d'intersection des médiatrices de $[PN]$ et $[PM]$ (car il faut que $HM = HN = HP$).
De plus, le lieu d'intervention L est situé à l'intersection de la RD 25 et du cercle de centre H et de rayon HM (car il faut que $HL = HM$).
Pour calculer la durée du trajet jusqu'au lieu d'intervention, il faut calculer HL.
Or $HL = HP$.
Dans le triangle PIH rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore :

$$HP^2 = HI^2 + IP^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 9 + 16 = 25$$

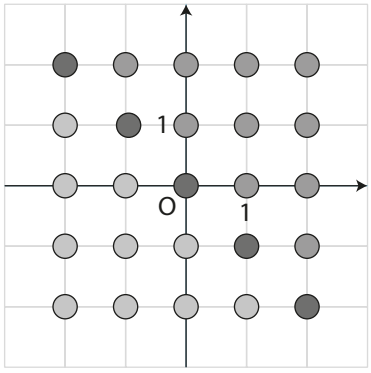
donc $HP = 5$. Ainsi $HL = 5$ km.
Or $\frac{5}{250} = 0{,}02$ donc l'hélicoptère se trouve 0,02 h du lieu d'intervention c'est-à-dire à 72 s de ce lieu $(0{,}02 \times 3600 = 72)$.

7 Équations de droites

Découvrir

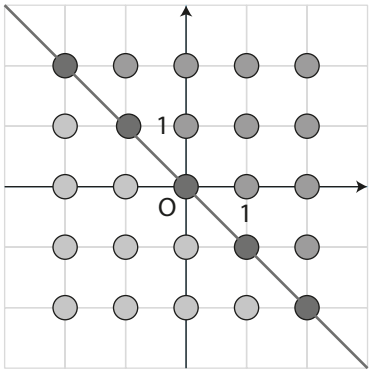
1 Équation cartésienne d'une droite

1 **a)** Voici la figure obtenue :



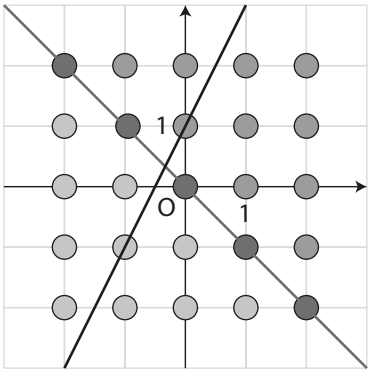
b) On observe que les points rouges sont alignés.

2 **a)** L'ensemble E est la droite tracée en rouge ci-dessous.



b) $-2x-2y=0$ et $y=-x$ sont d'autres équations cartésiennes de E.

c) On a tracé en noir l'ensemble d'équation cartésienne $2x-y+1=0$.



2 Système de deux équations à deux inconnues

1 **a)** La condition **(1)** se traduit par l'équation $x+y=6$.

La condition **(2)** se traduit par l'équation $5x-3y=2$.

b) Les dimensions du rectangle de Jade doivent vérifier l'équation :

- $x+y=6$, qui équivaut à $y=6-x$.
- $5x-3y=2$ qui équivaut à $3y=5x-2$, c'est-à-dire $y=\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$.

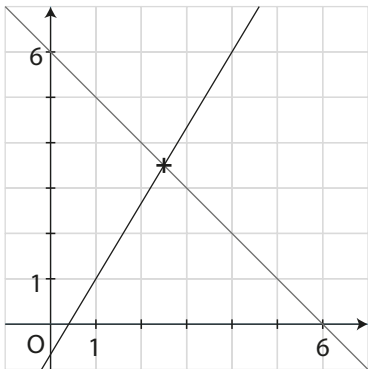
Elles sont donc bien solutions du système annoncé.

c) On remplace y par $6-x$ dans la 2e équation, on obtient $6-x=\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$ c'est-à-dire $\frac{8}{3}x=\frac{20}{3}$ soit $x=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$.

Donc $y=6-x=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$.

On peut vérifier que $x=\frac{5}{2}$ et $y=\frac{7}{2}$ vérifient bien les deux équations du système. Donc Jade doit construire un rectangle de largeur 2,5 cm et de longueur 3,5 cm.

2 **a)**



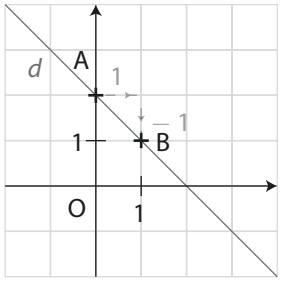
b) Graphiquement, il faut lire les coordonnées du point d'intersection des deux droites. On retrouve $x = 2{,}5$ et $y = 3{,}5$.

Acquérir des automatismes

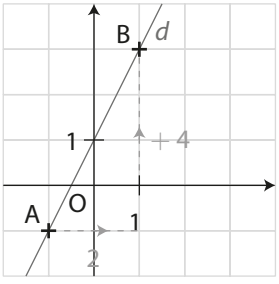
3 **a)** $\vec{u}(-3\,;2)$ est un vecteur directeur de la droite d_1.
$\vec{u}_1\left(1\,;-\dfrac{2}{3}\right)$ est un autre vecteur directeur de la droite d_1 et la pente de d_1 est donc $-\dfrac{2}{3}$.
b) $\vec{u}(1\,;3)$ est un vecteur directeur de d_2.
La pente de d_2 est 3.

4 **a)** Un vecteur directeur de la droite d_1 est $\vec{u}(-2\,;-6)$. Un autre vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1(1\,;3)$ et la pente de d_1 est donc 3.
b) La pente de d_2 est $m = \dfrac{1}{2}$. Donc un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u} = \left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

5 **a)**



$\vec{u}(1\,;-1)$ est un vecteur directeur de d.
La pente de d est -1.
b)



$\vec{u}(2\,;4)$ ou $\vec{u}_1(1\,;2)$ est un vecteur directeur de d.
La pente de d est 2.

8 $\vec{u}(3\,;7)$ est un vecteur directeur de d donc une équation cartésienne de d est de la forme $7x - 3y + c = 0$.
Or, $A(-2\,;-4)$ appartient à d,
donc $7(-1) - 3(-4) + c = 0$ soit $c = 2$.
Une équation cartésienne de d est $7x - 3y + 2 = 0$.

9 $\vec{u}(5\,;-8)$ est un vecteur de d donc une équation cartésienne de d est de la forme :
$$-8x - 5y + c = 0.$$
Or, $A(-6\,;14)$ appartient à d,
donc $-8 \times (-6) - 5 \times 14 + c = 0$ soit $c = 22$.
Une équation cartésienne de d est :
$-8x - 5y + 22 = 0$ (ou $8x + 5y - 22 = 0$).

10 $\vec{u}(13\,;6)$ est un vecteur directeur de d donc une équation cartésienne de d est de la forme :
$$6x - 13y + c = 0.$$
Or $A(-9\,;-12)$ appartient à d,
donc $6 \times (-9) - 13 \times (-12) + c = 0$. soit $c = -102$.
Une équation cartésienne de d et $6x - 13y - 102 = 0$.

11 L'équation réduite de d est de la forme :
$$y = \frac{3}{2}x + p.$$
Or, $A(-2\,;-4)$ appartient à d, donc $-4 = \dfrac{3}{2}(-2) + p$ soit $p = -1$.
L'équation réduite de d est $y = \dfrac{3}{2}x - 1$.

12 L'équation réduite de d est de la forme :
$$y = -6x + p.$$
Or, $A(3\,;1)$ appartient à d, donc $1 = -6 \times 3 + p$ soit $p = 19$.
L'équation réduite de d est $y = -6 \times 3 + 19$.

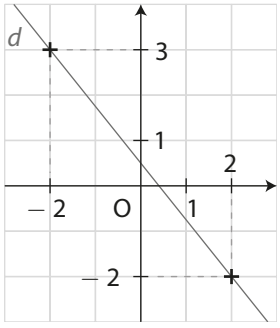
13 L'équation réduite de d est de la forme :
$$y = -0{,}4x + p.$$
Or, $A(-8\,;1)$ appartient à d, donc $1 = -0{,}4 \times (-8) + p$ soit $p = -2{,}2$.
L'équation réduite de d est $y = -0{,}4x - 2{,}2$.

16 Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(4\,;3)$, donc une équation cartésienne de la droite (AB) est $3x - 4y + c = 0$.
Or, $B(1\,;1)$ appartient à la droite (AB), donc $3 \times 1 - 4 \times 1 + c = 0$ soit $c = 1$.
Une équation de la droite (AB) est $3x - 4y + 1 = 0$.

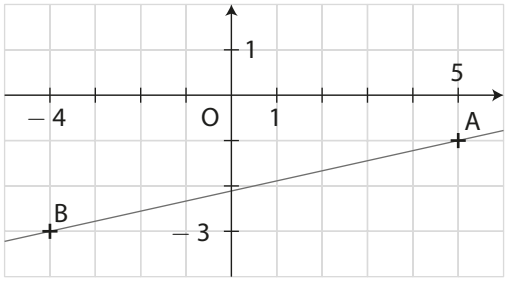
17 Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-3\,;\,-2)$, donc une équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme $-2x+3y+c=0$.
Or, A(4,5 ; 2,5) appartient à la droite (AB), donc $-2\times 4{,}5+3\times 2{,}5+c=0$ soit $c=1{,}5$.
Une équation cartésienne de la droite (AB) est $-2x+3y+1{,}5=0$.

18 Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-2\,;5)$, donc une équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme $5x+2y+c=0$.
Or, $A\left(\frac{4}{5}\,;\,-\frac{6}{5}\right)$ appartient à la droite (AB) donc $5\times\frac{4}{5}+2\times\left(-\frac{6}{5}\right)+c=0$ soit $c=-\frac{8}{5}$.
Une équation cartésienne de la droite (AB) est $5x+2y-\frac{8}{5}=0$.

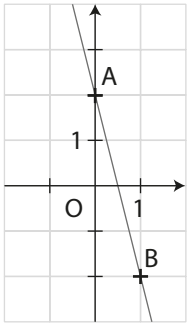
19



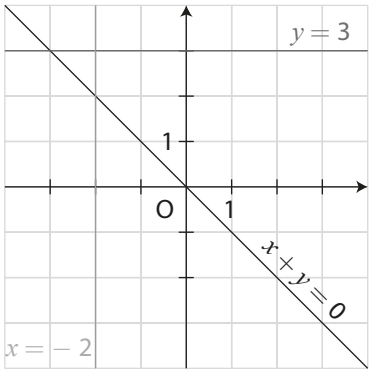
20 Si $x=5$, alors $10-9y-19=0$ soit $y=-1$, donc la droite *d* passe par le point $A(5\,;\,-1)$.
Si $x=-4$, alors $-8-9y-19=0$ soit $y=-3$, donc la droite *d* passe par le point $B(-4\,;\,-3)$.
Voici le tracé de la droite *d*.



21 Si $x=0$, alors $y=2$ donc la droite *d* passe par le point $A(0\,;2)$.
Si $x=1$, alors $y=-2$ donc la droite *d* passe par le point $B(1\,;\,-2)$.
Voici le tracé de la droite *d* ci-après.



22



25 **a)** Les pentes de d_1 et d_2 sont respectivement $m_1=\frac{3}{4}$ et $m_2=\frac{4}{3}$.
$m_1\neq m_2$ donc d_1 et d_2 sont sécantes.
b) Des vecteurs directeurs de d_3 et d_4 sont respectivement $\vec{u}_3(-6\,;3)$ et $\vec{u}_4(-8\,;-4)$.
Le déterminant du vecteur $\vec{u}_3$ et du vecteur $\vec{u}_4$ est non nul : $-6(-4)-(-8)\times 3=48$, donc les droites d_3 et d_4 sont sécantes.
c) Des vecteurs directeurs de d_5 et d_6 sont respectivement $\vec{u}_5\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\right)$ et $\vec{u}_6(-6\,;8)$.
Le déterminant du vecteur $\vec{u}_5$ et du vecteur $\vec{u}_6$ est nul $\left(-\frac{1}{2}\times 8-(-6)\times\frac{2}{3}=0\right)$ donc les droites d_5 et d_6 sont parallèles.

26 Le couple de coordonnées $(x\,;y)$ du point d'intersection de d_1 et d_2 est solution du système :

$$(\mathbf{S})\ \begin{cases}2x-2y=0\\-4x+9y+15=0\end{cases}$$

D'après la 1re équation, $y=x$.
En substituant y par x dans la 2e équation, on obtient $-4x+9x+15=0$ c'est-à-dire $x=-3$.
On remplace x par -3 dans l'équation $y=x$ et on obtient $y=-3$.
Le point d'intersection de d_1 et d_2 est donc le point $M(-3\,;-3)$.

27 Le couple de coordonnées $(x\,;y)$ du point d'intersection de d_1 et d_2 est la solution du système .

$$(\mathbf{S})\begin{cases} x+6y+17=0 \\ -7x+4y-27=0 \end{cases}$$

D'après la 1re équation, $x=-6y-17$.
En substituant x par $-6y-17$ dans la 2e équation, on obtient $-7(-6y-17)+4y-27=0$, c'est-à-dire $46y+92=0$ et donc $y=-2$.
On remplace y par -2 dans l'équation $x=-6y-17$. Ainsi $x=12-17=-5$. Le point d'intersection des droites d_1 et d_2 a donc pour coordonnées $(-5\,;\,-2)$.

28 Les vecteurs directeurs de la droite d sont $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$.

29 **a)** Oui car $\vec{u}_1=-\vec{u}$.
b) Non $(6=2\times 3$ mais $4\neq 2\times(-2))$.
c) Non $\left(-10=-\dfrac{10}{3}\times 3\right.$ mais $\left.5\neq -\dfrac{10}{3}\times(-2)\right)$.
d) Oui car $\vec{u}_4=4\vec{u}$.

30 Erika a raison.

31 Trois vecteurs directeurs de la droite d sont, par exemple $\overrightarrow{AB}(1\,;\,-1)$, $\overrightarrow{BC}(2\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;\,-3)$.

32 Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1(4\,;1)$.
Un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u}_2(1\,;0)$.
Un vecteur directeur de d_3 est $\vec{u}_3(0\,;1)$.
Un vecteur directeur de d_4 est $\vec{u}_4(3\,;\,-2)$.

33 **a)** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, vecteur directeur de (AB), sont $(-5\,;3)$.
b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, vecteur directeur de (AB), sont $(9\,;\,-7)$.
c) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, vecteur directeur de (AB), sont $(0{,}7\,;\,-1{,}3)$.

34 **a)** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, vecteur directeur de (AB), sont $(-18\,;3)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont $(6\,;\,-1)$.
Le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$ est $(-18)\times(-1)-6\times 3$, qui est égal à 0. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$, vecteur directeur de (BC), sont $(10\,;\,-4)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ sont $(-2\,;\,-2)$.
Le déterminant de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{AD}$ est :

$$10\times(-2)-(-2)\times(-4),$$

qui est égal à -28. Donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{AD}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite (BC).

35 **a)** Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est :

$$12\times 40-(-30)\times(-16),$$

qui est égal à 0. Les vecteurs sont donc colinéaires et sont bien des vecteurs directeurs d'une même droite.
b) Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est $7\times 5-6\times 6$, qui est égal à -1. Les vecteurs ne sont donc pas colinéaires et ne sont pas des vecteurs directeurs d'une même droite.
c) Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est :

$$3{,}5\times(-6)-(-10{,}5)\times 2,$$

qui est égal à 0. Les vecteurs sont donc colinéaires et sont bien des vecteurs directeurs d'une même droite.
d) Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est :

$$\frac{1}{4}\times\frac{5}{9}-\left(-\frac{1}{6}\right)\times\left(-\frac{5}{6}\right),$$

qui est égal à 0. Les vecteurs sont donc colinéaires et sont bien des vecteurs directeurs d'une même droite.

36 Un vecteur directeur de la droite d est $\overrightarrow{AB}$, dont les coordonnées sont $(-4\,;11)$.
a) Les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont $(-8\,;\,-22)$. Le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$ est :

$$(-4)\times(-22)-(-8)\times(-11),$$

qui est égal à 0. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{CD}$ est bien un vecteur directeur de d.
b) Les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont $(4\,;12)$. Le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$ est $(-4)\times 12-4\times(-11)$, qui est égal à -4. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{CD}$ n'est pas un vecteur directeur de de d.
c) Les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont $(-0{,}2\,;\,-0{,}55)$. Le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$ est :

$$(-4)\times(-0{,}55)-(-0{,}2)\times(-11),$$

qui est égal à 0. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{CD}$ est bien un vecteur directeur de d.
d) Les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont $(-48\,;132)$. Le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$ est :

$$(-4)\times(132)-(-48)\times(-11),$$

qui est égal à -1056.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{CD}$ n'est pas un vecteur directeur de d.

37 **a)** Les coordonnées de $\vec{v}$ sont de la forme $(4\,;k)$ et sont telles que le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est nul.

Le nombre k doit donc vérifier $3 \times k - 4 \times (-1{,}5) = 0$, c'est-à-dire $3k + 6 = 0$ et donc $k = -2$. Les coordonnées de $\vec{v}$ sont donc $(4\,;\,-2)$.

b) Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(7\,;\,-3{,}5)$. Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{u} + \vec{v}$ est :

$$3 \times (-3{,}5) - 7 \times (-1{,}5),$$

qui est égal à 0. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ sont colinéaires et $\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur directeur de d.

38 **a)** Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_1$ est $(-1) \times 1 - 5 \times 5$, qui est égal à -26. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_1$ ne sont pas colinéaires et les droites d et d_1 ne sont pas parallèles.

b) Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_2$ est $(-1) \times (-10) - 2 \times 5$, qui est égal à 0. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires et les droites d et d_2 sont parallèles.

c) Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{u}_3$ est :

$$(-1) \times 2{,}5 - (-0{,}5) \times 5,$$

qui est égal à 0. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_3$ sont colinéaires et les droites d et d_3 sont parallèles.

d) Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{u}_4$ est $(-1) \times 5 - 0 \times 5$, qui est égal à -5. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_4$ ne sont pas colinéaires et les droites d et d_4 ne sont pas parallèles.

39 • Le déterminant de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_4$ est :

$$(-3) \times (-1) - \frac{3}{4} \times 4,$$

qui est égal à 0. Donc ces vecteurs sont colinéaires et les droites d_1 et d_4 sont parallèles.

• Le déterminant de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_2$ est $(-3) \times 2 - 5 \times 4$, qui est égal à -26. Donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

• Le déterminant de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_3$ est :

$$(-3) \times (-0{,}4) - (-2) \times 4,$$

qui est égal à 9,2. Donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites d_1 et d_3 ne sont pas parallèles.

• Le déterminant de $\vec{u}_2$ de $\vec{u}_3$ est $5 \times (-0{,}4) - (-2) \times 2$, qui est égal à 2. Donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites d_2 et d_3 ne sont pas parallèles.

40 **a)** On cherche la valeur de b telle que le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ soit égal à 0, c'est-à-dire $1 \times b - (-2) \times (-1) = 0$, soit $b = 2$.

b) On cherche les valeurs de k telles que le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{w}$ ne soit pas égal à 0. Or $1 \times (-5) - k \times (-1) = 0$ pour $k = 5$. Le nombre de k doit donc être différent de 5.

c) On doit déterminer si elle existe une valeur de m telle que le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{z}$ soit égal à 0, c'est-à-dire $1 \times m - 0 \times (-1) = 0$. La seule valeur possible est $m = 0$, mais dans ce cas $\vec{z}$ est le vecteur nul, qui n'est le vecteur directeur d'aucune droite. Il n'existe donc pas de telle valeur de m.

41 $\vec{i} + \vec{j}(1\,;1)$ et $\vec{i} + x\vec{j}(1\,;x)$.

Les vecteurs $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} + x\vec{j}$ sont colinéaires si, et seulement si, $1 \times x - 1 \times 1 = 0$ c'est-à-dire $x = 1$. Dans ce cas les deux vecteurs sont égaux.

42 d_1 et d_2 sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, c'est-à-dire $x \times 2 - (-x) \times 2 = 0$, soit $4x = 0$. Ainsi, d_1 et d_2 sont parallèles si, et seulement si, $x = 0$.

43 d_1 et d_2 sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, c'est-à-dire $t \times t - 4 \times 9 = 0$, soit $t^2 = 36$. Ainsi, d_1 et d_2 sont parallèles si, et seulement si, $t = 6$ ou $t = -6$.

44 L'équation $x^2 + y^2 = 0$ n'est pas de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b, c nombres réels constants. L'affirmation d'Edwyn est donc fausse.

45 L'équation $y + 2 = 0$ équivaut à $y = 2$, donc les points qui appartiennent à cette droite sont ceux dont l'ordonnée est 2 : C et D.

46 • $1 + 1$ n'est pas égal à 0, donc A n'appartient pas à la droite.

• $3{,}7 + (-3{,}7)$ est égal à 0, donc B appartient à la droite.

• $0 + 0$ est égal à 0, donc C appartient à la droite.

• $1{,}5 + (-0{,}5)$ n'est pas égal à 0, donc D n'appartient pas à la droite.

47 Le point de coordonnées $(1\,;1)$ appartient à la droite d'équation $x + y - 2 = 0$ car $1 + 1 - 2 = 0$. Mais ce point n'appartient pas à la droite d'équation $3x + 3y + 6 = 0$ car $3 \times 1 + 3 \times 1 + 6 = 12$. Donc ces équations ne sont pas des équations cartésiennes d'une même droite.

48 Un vecteur de la droite d'équation $7x + 3y - 5 = 0$ est $\vec{u}(-3\,;7)$. Un vecteur directeur de la droite d'équation $-7x - 3y + 5 = 0$ est $\vec{v}(3\,;\,-7)$.

On observe que ces deux vecteurs sont colinéaires car $\vec{v} = -\vec{u}$, donc ces deux droites sont parallèles. Le point de coordonnées $(2\,;\,-3)$ appartient à ces deux droites, donc elles sont confondues.

49 Les équations de droites sont :

$(E_2),(E_3),(E_4),(E_5),(E_7)$ et (E_8).

50 • $2\times4-3\times3+1=0$, donc le point A appartient à la droite d.

• $2\times(-2)-3\times(-1)+1=0$, donc le point B appartient à la droite d.

• $2\times(-4)-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)+1=0$, donc le point C appartient à la droite d.

51 • $2\times(-3)+5+1=0$ donc le point A appartient bien à la droite d_1.

• $5\times(-3)+3\times5=0$ donc le point A appartient bien à la droite d_2.

• $-6\times(-3)-4\times5+2=0$ donc le point A appartient bien à la droite d_3.

• $\frac{1}{3}\times(-3)-5+6=0$ donc le point A appartient bien à la droite d_4.

52 • $2+2\times0{,}5-3=0$ donc le point B appartient à la droite d_1.

• $2\times2-6\times0{,}5+1=2$ donc le point B n'appartient pas à la droite d_2.

• $-\frac{3}{2}\times2-2\times0{,}5+4=0$ donc le point B appartient à la droite d_3.

• $0{,}5\times2-4\times0{,}5+2=1$ donc le point B n'appartient pas à la droite d_4.

53 d_1 : $\vec{u}_1(5\ ;\ 3)$ et $A\left(0\ ;\ \frac{2}{5}\right)$

d_2 : $\vec{u}_2(-4\ ;\ -1)$ et $A(3\ ;\ 0)$

d_3 : $\vec{u}_3(0\ ;\ -2)$ et $A\left(\frac{1}{2}\ ;\ 5\right)$

d_4 : $\vec{u}_4\left(-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $A\left(0\ ;\ \frac{4}{3}\right)$

d_5 : $\vec{u}_5(1\ ;\ 6)$ et $A(0\ ;\ -2)$

d_6 : $\vec{u}_6\left(1\ ;\ \frac{9}{4}\right)$ et $A\left(0\ ;\ -\frac{3}{4}\right)$

54 d_1 : la pente est 2 et un point est $A(0\ ;\ 5)$.

d_2 : la pente est 4 et un point est $B(0\ ;\ 7)$.

d_3 : l'équation réduite de d_3 est $y=-5x+2$ donc la pente est -5 et un point est $C(0\ ;\ 2)$.

d_4 : l'équation réduite de d_4 est $y=-4{,}5x+2$ donc la pente est $-4{,}5$ et un point est $C(0\ ;\ 2)$.

55 • La pente de d_1 est $\frac{1}{4}$.

• La pente de d_2 est 0.

• d_3 n'a pas de pente.

• La pente de d_4 est $-\frac{2}{3}$.

56 Un vecteur directeur de la droite d'équation $x=0$ est $\vec{v}(0\ ;\ 1)$, qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}(1\ ;\ 0)$. Donc l'affirmation d'Anthony est fausse.

57 **a)** Une équation cartésienne de la droite est de la forme $-5x-2y+c=0$. Puisque cette droite passe par l'origine du repère, $c=0$ et donc une équation est $-5x-2y=0$.

b) Une équation cartésienne de la droite est de la forme $3x-4y+c=0$. Puisque cette droite passe par l'origine du repère, $c=0$ et donc une équation est $3x-4y=0$.

c) Une équation cartésienne de la droite est de la forme $x+5y=0$. Puisque cette droite passe par l'origine du repère, $c=0$ et donc une équation est $x+5y=0$.

58 Cette droite a une équation cartésienne de la forme $x=k$.

Le point $A(2\ ;\ 3)$ appartient à cette droite donc une équation cartésienne est $x=2$.

59 **a)** Une équation cartésienne de d est de la forme $3x-y+c=0$.

Or, $A(-2\ ;\ 4)$ appartient à d donc :

$3\times(-2)-4+c=0$ soit $c=10$.

Une équation cartésienne de d est $3x-y+10=0$.

b) $3\times5-5+10=20$ donc $B(5\ ;\ 5)$ n'appartient pas à d.

60 **a)** Une équation cartésienne de la droite d est de la forme $5x+3y+c=0$. Le point $A(5\ ;\ 0)$ appartient à la droite donc $5\times5+3\times0+c=0$, soit $c=-25$. Donc une équation cartésienne de la droite d est $5x+3y-25=0$.

b) B est le point de la droite d d'abscisse $x=-7$, alors son ordonnée y vérifie $5\times(-7)+3y-25=0$, ce qui donne $y=20$. Les coordonnées de B sont donc $(-7\ ;\ 20)$.

61 **a)** Une équation cartésienne de la droite d est de la forme $-11x-8y+c=0$. Le point $A(-2\ ;\ 3)$ appartient à la droite donc :

$(-11)\times(-2)-8\times3+c=0$, soit $c=2$.

Donc une équation cartésienne de la droite d est $-11x-8y+2=0$.

b) B est le point de la droite d d'ordonnée $y=0$, alors son abscisse x vérifie $-11x+2=0$, ce qui

donne $x = \frac{2}{11}$. Les coordonnées de ce point B sont donc $\left(\frac{2}{11} ; 0\right)$.

62 **a)** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-3 ; -1)$, donc une équation cartésienne de cette droite est de la forme $-x + 3y + c = 0$. Le point A(2 ; 4) appartient à la droite, donc $-2 + 3 \times 4 + c = 0$, soit $c = 10$. Ainsi une équation cartésienne de (AB) est $-x + 3y - 10 = 0$.
b) $-10 + 3 \times 7 - 10 = 1$ donc le point C(10 ; 7) n'appartient pas à la droite (AB).

63 **a)** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{2}{5} ; \frac{2}{5}\right)$ donc une équation de cette droite est de la forme $\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y + c = 0$. Le point $A\left(\frac{6}{5} ; \frac{1}{5}\right)$ appartient à la droite, donc $\frac{2}{5} \times \frac{6}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + c = 0$, soit $c = -\frac{14}{25}$.
Ainsi une équation cartésienne de (AB) est $\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{14}{25} = 0$ ou encore $x + y - \frac{7}{5} = 0$
b) C est le point de la droite *d* d'abscisse $x = 0$, alors son ordonnée y vérifie $y - \frac{7}{5} = 0$, ce qui donne $y = \frac{7}{5}$. Les coordonnées de ce point C sont donc $\left(0 ; \frac{7}{5}\right)$.

64 **a)** L'équation réduite de *d* est de la forme $y = 2x + p$. Le point A(3 ; 1) appartient à la droite donc $1 = 2 \times 3 + p$, soit $p = -5$. L'équation réduite de *d* est donc $y = 2x - 5$.
b) Un vecteur directeur de la droite *d* est $\vec{u}(1 ; 2)$.

65 **a)** L'équation réduite de *d* est de la forme $y = \frac{1}{2}x + p$. Le point A(4 ; −3) appartient à la droite donc $-3 = \frac{1}{2} \times 4 + p$, ce qui donne $p = -5$. L'équation réduite de *d* est donc $y = \frac{1}{2}x - 5$. Une équation cartésienne de *d* est par exemple $\frac{1}{2}x - y - 5 = 0$.
b) B est le point de *d* dont l'abscisse est égale à l'ordonnée. Alors ses coordonnées $(x ; x)$ vérifient l'équation $x = \frac{1}{2}x - 5$.
Ainsi, $\frac{1}{2}x = -5$ c'est-à-dire : $x = -10$.
Les coordonnées du point B sont donc $(-10 ; -10)$.

66 **a)** L'équation réduite de *d* est de la forme $y = -\frac{6}{5}x + p$. Le point A(2 ; 1) appartient à la droite donc $1 = -\frac{6}{5} \times 2 + p$, soit $p = \frac{17}{5}$.
L'équation réduite de *d* est donc $y = -\frac{6}{5}x + \frac{17}{5}$.
b) B est le point de *d* d'abscisse −10. Alors son ordonnée y vérifie $y = -\frac{6}{5} \times (-10) + \frac{17}{5}$, ce qui donne $y = \frac{77}{5}$.
Les coordonnées de B sont donc $\left(-10 ; \frac{77}{5}\right)$.

67 $3x + y - 1 = 0$ équivaut à $y = -3x + 1$. La bonne réponse est donc la réponse **(3)**.

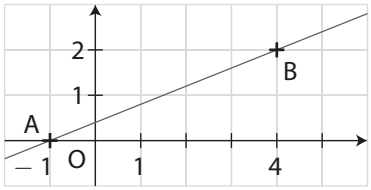
68 **a)** $-6x + 2y - 8 = 0$ équivaut à $2y = 6x + 8$, soit $y = 3x + 4$.
b) $3x + 2y + 4 = 0$ équivaut à $2y = -3x - 4$, soit $y = -1{,}5x - 2$.
c) $-12x - 3y + 9 = 0$ équivaut à $-3y = 12x - 9$, soit $y = -4x + 3$.
d) $-5x + 4y - 7 = 0$ équivaut à $4y = 5x + 7$, soit $y = \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$.
e) $3x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ équivaut à $\frac{1}{2}y = -3x + 1$, soit $y = -6x + 2$.
f) $\frac{4}{3}y - \frac{1}{6}x + 2 = 0$ équivaut à $\frac{4}{3}y = \frac{1}{6}x - 2$, soit $y = \frac{1}{8}x - \frac{3}{2}$.

69 **a)** Ce programme détermine ceux des points de coordonnées $(i ; j)$ avec $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant i \leqslant 100$ et $0 \leqslant j \leqslant 100$ qui appartiennent à la droite *d*.
b) Le programme affiche les couples (1 ; 1), (4 ; 3), (7 ; 5), (10 ; 7), (13 ; 9), (16 ; 11), (19 ; 13), (22 ; 15), (25 ; 17), (28 ; 19), (31 ; 21), (34 ; 23), (37 ; 25), (40 ; 27), (43 ; 29), (46 ; 31), (49 ; 33), (52 ; 35), (55 ; 37), (58 ; 39), (61 ; 41), (64 ; 43), (67 ; 45), (70 ; 47), (73 ; 49), (76 ; 51), (79 ; 53), (82 ; 55), (85 ; 57), (88 ; 59), (91 ; 61), (94 ; 63), (97 ; 65), (100 ; 67)

70 Selon le tracé, le point A(0 ; 1) appartient à la droite.
Cependant, $0 + 3 \times 1 - 1 = 2$, donc le point A n'appartient pas à la droite d'équation $x + 3y - 1 = 0$. Le tracé est donc incorrect.

71 Pour $x = 0$, $y = 5 \times 0 - 1 = -1$ donc le point A n'appartient pas à cette droite. On peut choisir les points $B\left(\frac{1}{5} ; 0\right)$ et $C(0 ; -1)$.

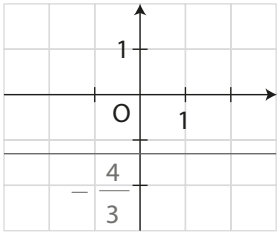
72 **a)** Si $x = -1$, alors $2 \times (-1) - 5y + 2 = 0$ soit $y = 0$, donc la droite *d* passe par le point $A(-1 ; 0)$.
Si $x = 4$, alors $2 \times 4 - 5y + 2 = 0$ soit $y = 2$, donc la droite *d* passe par le point $B(4 ; 2)$.
Voici ci-dessous le tracé de la droite *d*.



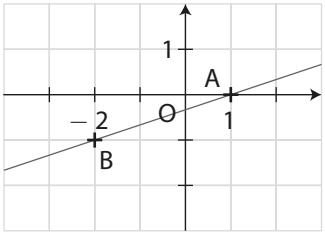
b) Quelle que soit la valeur de x, on a

$$y = -\frac{4}{3}.$$

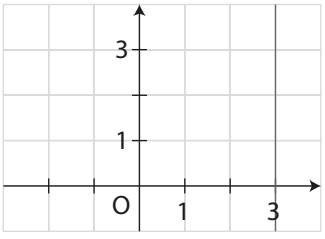
Voici ci-dessous le tracé de la droite *d*.



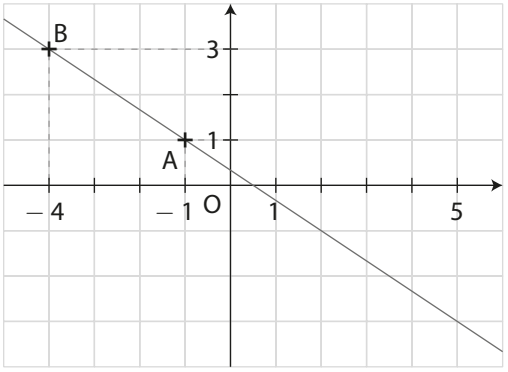
73 **a)** Si $x = 1$, alors $-1 + 3y + 1 = 0$, soit $y = 0$, donc la droite *d* passe par le point $A(1 ; 0)$.
Si $x = -2$, alors $2 + 3y + 1 = 0$, soit $y = -1$, donc la droite *d* passe par le point $B(-2 ; -1)$.
Voici le tracé de la droite *d*.



b) Quelle que soit la valeur de y, on a $x = 3$.
Voici le tracé de la droite *d*.

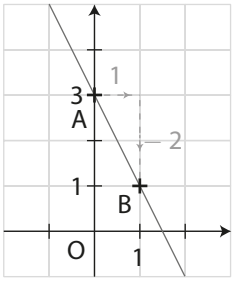


74 **a)** Si $x = -1$, $2 \times (-1) + 3y - 1 = 0$, soit $y = 1$, donc la droite *d* passe par le point $B(-1 ; 1)$.
Si $x = -4$, $2 \times (-4) + 3y - 1 = 0$ soit $y = 3$, donc la droite *d* passe par le point $C(-4 ; 3)$.
Voici le tracé de la droite *d*.

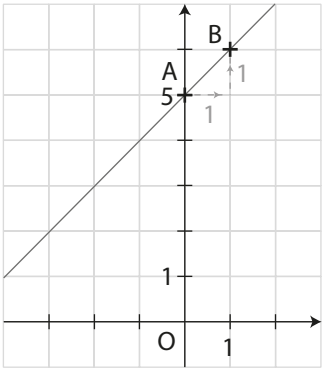


b) Graphiquement, il semble que le point $A(5 ; -3)$ appartient à la droite *d*. Par le calcul, on constate que $2 \times 5 + 3 \times (-3) - 1 = 0$, ce qui confirme la lecture graphique.

75 **a)** La droite *d* d'équation réduite $y = -2x + 3$ passe par le point $A(0 ; 3)$ et a pour pente $m = -2$.
Voici son tracé.

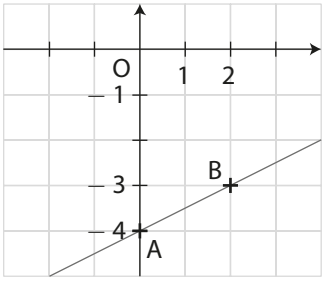


b) La droite *d* d'équation réduite $y = x + 5$ passe par le point $A(0 ; 5)$ et a pour pente $m = 1$.
Voici son tracé.

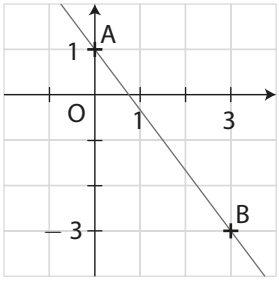


76 **a)** La droite *d* d'équation réduite $y = \frac{1}{2}x - 4$ passe par le point $A(0 ; -4)$. Si $x = 2$, alors $y = \frac{1}{2} \times 2 - 4$ soit $y = -3$. Donc la droite passe par le point $B(2 ; -3)$.

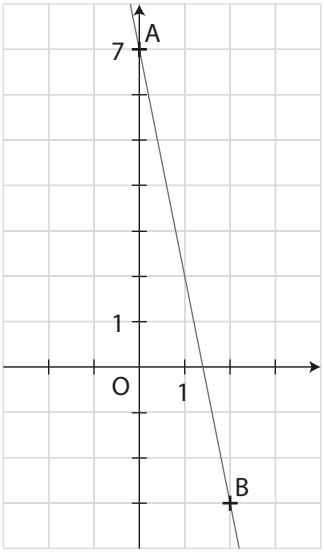
Voici son tracé.



b) La droite *d* d'équation réduite $y = -\frac{4}{3}x + 1$ passe par le point $A(0\,;1)$. Si $x = 3$, alors $y = -\frac{4}{3} \times 3 + 1$ soit $y = -3$. Donc la droite passe par le point $B(3\,;-3)$.
Voici ci-dessous son tracé.



77 **a)** La droite *d* d'équation réduite $y = -5x + 7$ passe par le point $A(0\,;7)$.
Si $x = 2$, alors $y = -5 \times 2 + 7$ ce qui donne $y = -3$.
Donc la droite passe par le point $B(2\,;-3)$.
Voici son tracé.



b) Si $x = 3$, alors $y = -5 \times 3 + 7$ ce qui donne $y = -8$. Donc la droite passe par le point $D(3\,;-8)$ mais pas par le point $C(3\,;-7)$.

78 Par exemple, les droites d'équations réduites $y = -5x + 1$ et $y = -5x$ sont parallèles à *d*.

79 Un vecteur directeur de la droite d'équation $x + y - 1 = 0$ est $\vec{u}(-1\,;1)$. Un vecteur directeur de la droite d'équation $2x + 2y + 7 = 0$ est $\vec{v}(-2\,;2)$. On observe que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc les deux droites sont parallèles. Éric a raison.

80 Un vecteur directeur de la droite d'équation $3x + 6y - 9 = 0$ est $\vec{u}(-6\,;3)$. Un vecteur directeur de la droite d'équation $0{,}5x - y - 1{,}5 = 0$ est $\vec{v}(1\,;0{,}5)$. On observe que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $(-6 = -6 \times 1$ mais $3 \neq -6 \times 0{,}5)$, donc les deux droites sont sécantes. L'affirmation est fausse.

81 Un vecteur directeur de la droite d_1 est $\vec{u}_1\left(2\,;\frac{8}{3}\right)$.
Un vecteur directeur de la droite d_2 est $\vec{u}_2(3\,;4)$.
Le déterminant de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_2$ est $2 \times 4 - 3 \times \frac{8}{3}$ qui est égal à 0. Donc les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles, éventuellement confondues.
Le point $O(0\,;0)$ appartient à d_2 mais pas à d_1 donc les droites sont strictement parallèles.

82 Un vecteur directeur de la droite d_1 est $\vec{u}_1(-3\,;2)$. Un vecteur directeur de la droite d_2 est $\vec{u}_2(7\,;5)$.
Le déterminant de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_2$ est $-3 \times 5 - 7 \times 2$ qui est égal à -29. Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites sont sécantes.

83 Un vecteur directeur de la droite d_1 est $\vec{u}_1(9\,;3)$.
Un vecteur directeur de la droite d_2 est $\vec{u}_2(12\,;-4)$.
Le déterminant de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_2$ est $9 \times 4 - 12 \times 3$ qui est égal à 0. Donc les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles, éventuellement confondues.
Le point $A\left(-\frac{4}{3}\,;0\right)$ appartient à d_1 et il appartient aussi à d_2, donc ces deux droites sont confondues.

84 Un vecteur directeur de la droite d_1 est $\vec{u}_1(9\,;10)$. Un vecteur directeur de la droite d_2 est $\vec{u}_2(8\,;9)$.
Le déterminant de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_2$ est $9 \times 9 - 8 \times 10$ qui est égal à 1. Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites sont sécantes. Cléa a tort.

85 **a)** Une équation cartésienne de la droite d_1 est de la forme $x + y + c = 0$. Puisque $O(0\,;0)$ appartient à la droite, $0 + 0 + c = 0$ soit $c = 0$. Ainsi une équation cartésienne de d_1 est $x + y = 0$.

b) Une équation cartésienne de la droite d_2 est de la forme $x + y + c = 0$. Puisque $A(3\,;\,-4)$ appartient à la droite, $3 - 4 + c = 0$ soit $c = 1$. Ainsi une équation cartésienne de d_2 est $x + y + 1 = 0$.

86 Une équation cartésienne de la droite d est de la forme $\frac{1}{3}x - y + c = 0$. Puisque $A(1\,;\,-4)$ appartient à la droite, $\frac{1}{3} + 4 + c = 0$ soit $c = -\frac{13}{3}$. Ainsi une équation cartésienne de d_2 est $\frac{1}{3}x - y - \frac{13}{3} = 0$.

87 Les deux droites sont parallèles donc ce système n'a pas de couple solution.

88 **a)** L'unique couple solution est $(0\,;\,2)$.

b) L'unique couple solution est $\left(-\frac{4}{5}\,;\,2\right)$.

90 Les droites d'équations cartésiennes données dans le système ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1\,;\,6)$ et $\vec{v}(2\,;\,12)$. Or, $\vec{v} = 2\vec{u}$ et les deux droites sont parallèles, éventuellement confondues.

Mais ces droites ne sont pas confondues car le point de coordonnées $(0\,;\,0)$ appartient à l'une mais pas à l'autre.

Donc les droites sont parallèles et le système n'a pas de solution.

$3 \times 2 + (-1) - 5 = 0$ mais $2 - 4 \times (-1) + 3 \neq 0$ donc $(2\,;\,-1)$ n'est pas solution du système et Jadwiga se trompe.

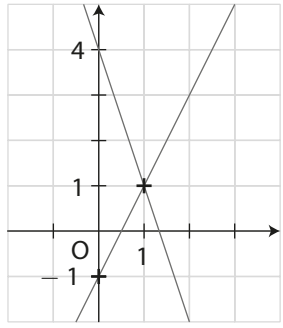
91 **a)** Un vecteur directeur de la droite d'équation $x + y - 3 = 0$ est $\vec{u}(-1\,;\,1)$. Un vecteur directeur de la droite d'équation $x - 2y + 3 = 0$ est $\vec{v}(2\,;\,1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites sont sécantes et le système a un unique couple solution.

b) Un vecteur directeur de la droite d'équation $3x + y + 2 = 0$ est $\vec{u}(-1\,;\,3)$. Un vecteur directeur de la droite d'équation $-6x - 2y - 4 = 0$ est $\vec{v}(2\,;\,-6)$. Les vecteurs sont colinéaires, donc le système n'a pas un seul couple solution.

c) Un vecteur directeur de la droite d'équation $-3x + y + 13 = 0$ est $\vec{u}(-1\,;\,-3)$. Un vecteur directeur de la droite d'équation $-x - 4y - 13 = 0$ est $\vec{v}(4\,;\,-1)$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites sont sécantes et le système a un unique couple solution.

d) Un vecteur directeur de la droite d'équation $x - 2y + 8 = 0$ est $\vec{u}(2\,;\,1)$. Un vecteur directeur de la droite d'équation $-3x + 6y - 6 = 0$ est $\vec{v}(-6\,;\,3)$. Les vecteurs sont colinéaires, donc le système n'a pas un seul couple solution.

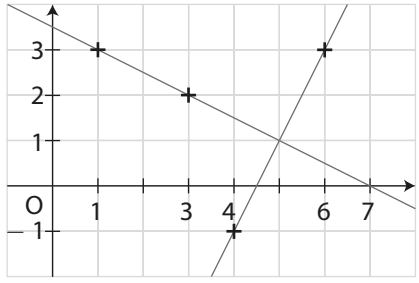
92 **a)**



b) Graphiquement, on lit que le couple $(1\,;1)$ et la seule solution du système.

c) $1 = 2 \times 1 - 1$ et $1 = -3 \times 1 + 4$ donc le couple $(1\,;1)$ vérifie bien les deux équations.

93 **a)**



b) Graphiquement, on lit que l'unique couple solution du système est $(5\,;1)$.

c) $-2 \times 5 + 1 + 9 = 0$ et $-5 - 2 \times 1 + 7 = 0$ donc le couple $(5\,;1)$ vérifie bien les deux équations.

94 **1. a)** L'unique couple solution du système est $(2\,;3)$.

b) L'unique couple solution du système est $(4\,;1)$.

c) L'unique couple solution du système est $(-2\,;\,-5)$.

2. a) $2 + 3 = 5$ et $2 \times 2 - 3 = 1$ donc le couple $(2\,;3)$ bien la solution du système du **a)**.

b) $4 + 1 = 5$ et $-4 + 1 = -3$ donc le couple $(4\,;1)$ bien la solution du système du **b)**.

c) $-(-2) + (-5) = 3$ et $2 \times (-2) - (-5) = 1$ donc le couple $(-2\,;5)$ bien la solution du système du **c)**.

95 **a)** Ces deux droites ont des pentes différentes, elles sont donc sécantes.

b) On doit résoudre le système $(\mathbf{S})\ \begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$.

On remplace y par $3x + 2$ dans la 2e équation, il vient $3x + 2 = 2x - 5$, soit $x = -7$.

En substituant x par -7 dans la 1re équation, on obtient $y = 19$. Le couple solution du système est donc $(-7\,;\,-19)$.

96 **a)** $y = 6x - 17$
b) $7x + 2(6x - 17) - 4 = 0$, c'est-à-dire $19x - 38 = 0$, soit $x = 2$. En substituant x par 2 dans l'équation $y = 6x - 17$ on obtient $y = 5$.
Le couple solution du système est donc $(2\,;\,-5)$.

97 **a)** D'après la première équation $x = 3y - 17$.
En substituant x par $3y - 17$ dans la deuxième équation on obtient $2(3y - 17) + 4y = 6$, c'est-à-dire $10y = 40$ soit $y = 4$. En remplaçant y par 4 dans l'équation $x = 3y - 17$, on obtient $x = -5$.
Le couple solution du système est donc $(-5\,;4)$.
b) D'après la deuxième équation $b = -4a + 6$.
En substituant b par $-4a + 6$ dans la première équation on obtient $2a + 3(-4a + 6) = -2$ c'est-à-dire $-10a = -20$ soit $a = 2$. En remplaçant a par 2 dans l'équation $b = -4a + 6$, on obtient $b = -2$.
Le couple solution du système est donc $(2\,;\,-2)$.

98 **a)** D'après la première équation $y = 3x - 9$.
En substituant y par $3x - 9$ dans la deuxième équation on obtient $x - 4(3x - 9) = 14$, c'est-à-dire $-11x = -22$, soit $x = 2$. En remplaçant x par 2 dans l'équation $y = 3x - 9$, on obtient $y = 3$.
Le couple solution du système est donc $(2\,;\,-3)$.
b) D'après la première équation $y = -6x$. En substituant y par $-6x$ dans la deuxième équation on obtient $4x - 3(-6x) = -11$ c'est-à-dire $22x = -11$ soit $x = -\frac{1}{2}$. En remplaçant x par $-\frac{1}{2}$ dans l'équation $y = -6x$, on obtient $y = 3$.
Le couple solution du système est donc $\left(-\frac{1}{2}\,;3\right)$.

99 **a)** D'après la première équation $q = 5p + 3$.
En substituant q par $5p + 3$ dans la deuxième équation, on obtient $2p - 3(5p + 3) = 4$ c'est-à-dire $-13p = 13$ soit $p = -1$.
En remplaçant p par -1 dans l'équation $q = 5p + 3$, on obtient $q = -2$.
Le couple solution du système est donc $(-1\,;\,-2)$.
b) D'après la deuxième équation $x = 9y - 5$.
En substituant x par $9y - 5$ dans la première équation, on obtient $0{,}2(9y - 5) + 0{,}3y = -1$ c'est-à-dire $2{,}1y = 0$ soit $y = 0$.
En remplaçant y par 0 dans l'équation $x = 9y - 5$, on obtient $x = -5$.
Le couple solution du système est donc $(-5\,;0)$.

100 **a)** $f(x) = ax + b$ et $f(4) = 7$, donc $4a + b = 7$.
De même, $f(-2) = -11$, donc $-2a + b = -11$.
b) D'après la première équation, $b = -4a + 7$.
En substituant b par $-4a + 7$ dans la deuxième équation, on obtient :

$$-2a - 4a + 7 = -11, \text{ soit } a = 3.$$

En substituant a par 3 dans la première équation, on obtient $b = -4 \times 3 + 7$, soit $b = -5$.
c) Pour tout nombre réel x, $f(x) = 3x - 5$

101 **a)** $-9x - 6y = 21$
b) $-9x - 6y + 4x + 6y = -21 + 1$
c'est-à-dire $-5x = -20$.
c) Ainsi, $x = 4$ et en substituant x par 4 dans $3x + 2y = 7$, il vient $3 \times 4 + 2y = 7$ c'est-à-dire $2y = -5$ soit $y = -\frac{5}{2}$.
L'unique couple solution du système (**S**) est donc $\left(4\,;-\frac{5}{2}\right)$.

102 **a)** En additionnant membre à membre les deux équations on obtient $7x = 14$ soit $x = 2$.
En substituant x par 2 dans la première équation, on obtient $4 \times 2 + 5y = 9$ c'est-à-dire $5y = 1$ soit $y = \frac{1}{5}$.
Le couple solution du système est donc $\left(2\,;\frac{1}{5}\right)$.
b) En soustrayant membre à membre la deuxième équation de la première, on obtient $-10y = -15$, soit $y = 1{,}5$.
En substituant y par 1,5 dans la première équation on obtient $2x - 4 \times 1{,}5 = -6$, soit $x = 0$.
Le couple solution du système est donc $(0\,;1{,}5)$.

103 **a)** En multipliant chaque membre de la deuxième équation par 2, on obtient $6x - 8y = 2$.
En additionnant membre à membre cette nouvelle équation à la première équation du système, on obtient $8x = 8$ soit $x = 1$.
En substituant x par 1 dans la première équation du système, on obtient $2 \times 1 + 8y = 6$ soit $y = 0{,}5$.
Le couple solution du système est donc $(1\,;0{,}5)$.
b) En multipliant chaque membre de la première équation par 5, on obtient $15a + 10b = -40$.
En multipliant chaque membre de la deuxième équation par -2, on obtient $-8a - 10b = -2$.
En additionnant membre à membre les deux nouvelles équations, on obtient $7a = -42$, soit $a = -6$.
En substituant a par -6 dans la première équation du système, on obtient $3 \times (-6) + 2b = -8$, soit $b = 5$.
Le couple solution du système est donc $(-6\,;5)$.

104 **a)** Un vecteur directeur de la droite d'équation $12x+16y=8$ est $\vec{u}(-16\,;12)$.
Un vecteur directeur de la droite d'équation $15x+20y=5$ est $\vec{v}(-20\,;15)$.
Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est :

$$(-16)\times 15-(-20)\times 12$$

qui est égal à 0. Donc les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles, éventuellement confondues. Ainsi, le système n'a pas d'unique couple solution.

b) En divisant chaque membre de la première équation par 4, il vient $3x+4y=2$.
En divisant chaque membre de la deuxième équation par 5, il vient $3x+4y=1$. On obtient ainsi le système équivalent :

$$\begin{cases}3x+4y=2\\3x+4y=1\end{cases}$$

c) Les deux équations obtenues sont incompatibles, il n'est pas possible de trouver un couple $(x\,;y)$ tel que à la fois $3x+y$ soit égal à 2 et à 1.
Donc le système n'a pas de solution.

105 **a)** Un vecteur directeur de la droite d'équation $7x-3y=5$ est $\vec{u}(3\,;7)$.
Un vecteur directeur de la droite d'équation $28x-12y=20$ est $\vec{v}(12\,;28)$.
Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est $3\times 28-12\times 7$, qui est égal à 0.
Donc les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles, éventuellement confondues. Ainsi, le système n'a pas un unique couple solution.
En divisant chaque membre de la deuxième équation par 4, il vient $7x-3y=5$. On obtient ainsi le système équivalent :

$$\begin{cases}7x-3y=5\\7x-3y=5\end{cases}$$

b) Les deux équations sont les mêmes, donc le système a une infinité de couples solutions. Ce sont tous les couples $(x\,;y)$ qui vérifient l'équation $7x-3y=5$, c'est-à-dire tous les couples de la forme $\left(x\,;\dfrac{7}{3}x-\dfrac{5}{3}\right)$ avec $x\in\mathbb{R}$.

106 **a)** Un vecteur directeur de la droite d'équation $-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}y=1$ est $\vec{u}\left(-\dfrac{1}{4}\,;-\dfrac{3}{2}\right)$.
Un vecteur directeur de la droite d'équation $12x-2y=8$ est $\vec{v}(2\,;12)$.
Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est $-\dfrac{1}{4}\times 12-2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, qui est égal à 0.
Donc les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles, éventuellement confondues. Ainsi, le système n'a pas un unique couple solution.
En multipliant chaque membre de la première équation par -8, il vient $12x-2y=-8$.
On obtient ainsi le système équivalent :

$$\begin{cases}12x-2y=-8\\12x-2y=8\end{cases}$$

Ces deux équations sont incompatibles, donc le système n'a pas de couple de solution.

b) Un vecteur de la droite d'équation $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{6}y=\dfrac{3}{4}$ est $\vec{u}\left(\dfrac{5}{6}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.
Un vecteur directeur de la droite d'équation $-4x+10y=-9$ est $\vec{v}(-10\,;-4)$.
Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est $\dfrac{5}{6}\times(-4)-(-10)\times\dfrac{1}{3}$, qui est égal à 0.
Donc les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles, éventuellement confondues. Ainsi, le système n'a pas un unique couple solution.
En multipliant chaque membre de la première équation par -12, il vient $-4x+10y=-9$. On obtient ainsi le système équivalent :

$$\begin{cases}-4x+10y=-9\\-4x+10y=-9\end{cases}$$

Les deux équations sont les mêmes, donc le système a une infinité de couples solutions. Ce sont tous les couples $(x\,;y)$ qui vérifient l'équation :

$$-4x+10y=-9,$$

c'est-à-dire tous les couples de la forme $\left(x\,;\dfrac{2}{5}x-\dfrac{9}{10}\right)$ (avec $x\in\mathbb{R}$).

107 **a)** Un vecteur directeur de la droite d'équation $5x-3y=0{,}5$ est $\vec{u}(3\,;5)$.
Un vecteur directeur de la droite d'équation $-10x+6y=-1$ est $\vec{v}(-6\,;-10)$.
Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est $3\times(-10-(-6))\times 5$, qui est égal à 0.
Donc les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles, éventuellement confondues. Ainsi le système n'a pas un unique couple solution.
En multipliant chaque membre de la première équation par -2, il vient $-10x+6y=-1$.
On obtient ainsi le système équivalent :

$$\begin{cases}-10x+6y=-1\\-10x+6y=-1\end{cases}$$

Les deux équations sont les mêmes, donc le système a une infinité de couples solutions. Ce sont tous les couples $(x\,;y)$ qui vérifient l'équation

$-10x+6y=-1$, c'est-à-dire tous les couples de la forme $\left(x\,;\,\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}\right)$ (avec $x\in\mathbb{R}$).

b) Un vecteur directeur de la droite d'équation $3x+2y=4$ est $\vec{u}(-2\,;3)$.

Un vecteur directeur de la droite d'équation $12x+8y=1$ est $\vec{v}(-8\,;12)$.

Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est $(-2)\times 12-(-8)\times 3$, qui est égal à 0.

Donc les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles, éventuellement confondues. Ainsi, le système n'a pas un unique couple solution.

En multipliant chaque membre de la première équation par 4, il vient $12x+8y=16$.

On obtient ainsi le système équivalent :

$$\begin{cases}12x+8y=16\\12x+8y=1\end{cases}$$

Les deux équations sont incompatibles, donc le système n'a pas de couple solution.

108 **1.** D **2.** C **3.** B **4.** C **5.** B

109 **1.** A, B, D **2.** A, B, D **3.** A **4.** B

110 **1. Vrai**.

En effet, $3\times 10-2\times 9-12=0$.

2. Faux.

En effet, $(10\,;\,9)$ n'est pas solution de la 2e équation de $(\mathbf{S})$: $2\times 10-7\times 9+26=-17$.

3. Faux.

En effet, $3(-7)-2(-2)=-17$ et $-17\neq 0$.

4. Vrai.

En effet, pour $x=8$, la 1re équation permet d'obtenir $y=6$. On constate que le couple $(8\,;\,6)$ est solution de la 2e équation : $2\times 8-7\times 6+26=0$. Or, $(\mathbf{S})$ a un seul couple solution, c'est donc le couple $(8\,;\,6)$.

5. Vrai.

En effet, ces droites sont sécantes au point $\mathrm{M}(8\,;\,6)$ dont les coordonnées sont la solution de $(\mathbf{S})$.

111 **a)** Les coordonnées d'un vecteur directeur sont $(-b\,;a)$, donc ici $-b=-5$, donc $b=5$, et $a=2$.

b) On obtient $2x+5y+c=0$,

puis $2\times(-1)+5\times 1+c=0$, soit $c=-3$.

c) Une équation cartésienne de d est donc :

$$2x+5y-3=0.$$

112 **a)** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont $(1+2\,;2+2)$, c'est-à-dire $(3\,;4)$.

b) Une équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme $4x-3y+c=0$.

Le point $\mathrm{B}(1\,;2)$ appartient à la droite donc $4\times 1-3\times 2+c=0$, soit $c=2$.

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc $4x-3y+2=0$.

113 **a)** La pente de la droite (AB) est $m=\frac{5-4}{4+2}$, c'est-à-dire $m=\frac{1}{6}$.

b) L'équation réduite de la droite (AB) est donc de la forme $y=\frac{1}{6}x+p$. Le point $\mathrm{A}(-2\,;4)$ appartient à la droite donc $4=\frac{1}{6}\times(-2)+p$. On en déduit que l'ordonnée à l'origine de cette droite est $p=\frac{13}{3}$.

c) L'équation réduite de la droite (AB) est donc $y=\frac{1}{6}x+\frac{13}{3}$.

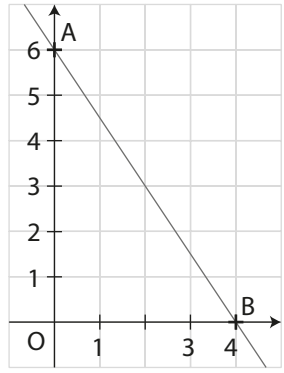
114 **a)** • Si $x=0$; alors $3\times 0+2y-12=0$, ce qui donne $y=6$.

Le point $\mathrm{A}(0\,;6)$ appartient donc à la droite.

• Si $y=0$, alors $3x+2\times 0-12=0$, ce qui donne $x=4$.

Le point $\mathrm{B}(4\,;0)$ appartient donc à la droite.

b) On place les points A et B et on trace la droite.



115 **a)** $\vec{u}_1(-4\,;3)$ et $\vec{u}_2(2\,;5)$

b) Le déterminant de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ est $-4\times 5-2\times 3$, qui est égal à -26. Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites sont sécantes.

c) Le double de la deuxième équation est $10x-4y+28=0$. En additionnant membre à membre avec la première équation on obtient $13x+52=0$, soit $x=-4$.

En substituant x par -4 dans la première équation, on obtient $3\times(-4)+4y+24=0$, soit $y=-3$.

L'unique solution du système est donc le couple $(4\,;\,-3)$.

d) Les droites d_1 et d_2 sont sécantes au point de coordonnées $(4\,;\,-3)$.

S'entraîner

117 **a)** Case rouge : $A[0] \times B[1] - B[0] \times A[1]$
Case verte : "Les vecteurs ne sont pas colinéaires"

b)
```
1 def Colineaire(A,B):
2     d=A[0]*B[1]-B[0]*A[1]
3     if d==0:
4         a="Les vecteurs sont colinéaires"
5     else:
6         a="Les vecteurs ne sont pas colinéaires"
7     return a
```

On obtient successivement les affichages :
- "Les vecteurs ne sont pas colinéaires"
- "Les vecteurs sont colinéaires"

118 **a)** $y = 9 - 3 = -12$
$x = 2 - 6 = -4$
$m = \dfrac{-12}{-4} = 3$
$p = 3 - 3 \times 6 = -15.$
L'algorithme affiche 3 et -15.
b) Le rôle de cet algorithme est de calculer et d'afficher la pente *m* et l'ordonnée à l'origine *p* de la droite qui passe par les points dont les coordonnées sont données par les listes A et B.
c) On peut aussi effectuer l'affectation :
$p \leftarrow B[1] - m * B[0]$.
d) Si on échange l'ordre de saisie des listes A et B, on obtient les mêmes résultats affichés. En effet, on obtient $y = 12$ et $x = 4$, puis on retrouve la même valeur pour m et l'affectation de *p* revient à celle proposée au **c)**, qui donne le même résultat.

120 **a)** $(\mathbf{S})\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ -5x + 7{,}5y = 12{,}5 \end{cases}$
b) $ab' - a'b = 2 \times 7{,}5 - (-5)(-3) = 15 - 15 = 0$
b) $ab' - a'b = 15 - 15 = 0$
Donc le système a une infinité de couples solutions ou aucun couple solution.
c) On vérifie que les couples $\left(\dfrac{3}{2}y - \dfrac{5}{2}\,;y\right)$ sont solutions de $(\mathbf{S})$ pour tout nombre réel y.
- $2\left(\dfrac{3}{2}y - \dfrac{5}{2}\right) - 3y + 5 = 3y - 5 - 3y + 5 = 0$
- $-5\left(\dfrac{3}{2}y - \dfrac{5}{2}\right) + 7{,}5y = 12{,}5$

121 **a)** $\begin{cases} 1{,}5x - 4y = 2{,}5 \\ -9x + 24y = 15 \end{cases}$
b) $ab' - a'b = 1{,}5 \times 24 - (-9) \times (-4) = 0$
Donc le système a une infinité de couples solutions ou aucun couple solution.
c) On multiplie par -6 chaque membre de la première équation, il vient $-9x + 24y = -15$.
On obtient le système équivalent :
$$\begin{cases} -9x + 24y = -15 \\ -9x + 24y = 15 \end{cases}$$
Ces deux équations sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution.
d) Le logiciel affiche l'ensemble vide, ce qui exprime que le système n'a pas de solution.

122 **a)** Pour $k = 2$, $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $3x + 3y - 3 = 0$. Cet ensemble est une droite, dont une équation cartésienne plus simple est $x + y - 1 = 0$.
b) Pour $k = 1$, $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $2x - 3 = 0$. Cet ensemble est bien une droite, dont une équation plus simple est $x = \dfrac{3}{2}$.
Donc Adèle a raison.
c) L'ensemble $\mathscr{E}$ est une droite sauf si $k - 1$ et $k^2 - 1$ sont tous les deux nuls. Cette situation se présente quand $k = -1$. Donc Charles a tort.

123 Des vecteurs directeurs de *d* et d' sont respectivement $\vec{u}(-b\,;a)$ et $\vec{u}'(-b'\,;a')$.
d et d' sont parallèles si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, c'est-à-dire :
$-b \times a' - (-b') \times a = 0$ soit $ab' = a'b$.

124 **a)** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-9 + 4\,;6 - 8)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(-5\,;2)$.
Donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme $-2x + 5y + c = 0$.
Le point $A(-4\,;8)$ appartient à la droite donc $-2 \times (-4) + 5 \times 8 + c = 0$, soit $c = -48$.
Donc une équation de (AB) est $-2x + 5y - 48 = 0$.
b) $-2 \times 20 + 5 \times 3 - 48 = -73$ donc le point c n'appartient pas à la droite (AB) et les points A, B, C ne sont pas alignés.
c) Si l'abscisse d'un point de la droite (AB) est égale à 20, alors son ordonnée y vérifie :
$-2 \times 20 + 5y - 48 = 0$, soit $y = \dfrac{88}{5}$.

125 **a)** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-4 - 5\,;-2 - 6)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(-9\,;-8)$.
Donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme $-8x + 9y + c = 0$.

Le point A(5 ; 6) appartient à la droite donc $-8\times5+9\times6+c=0$, ce qui donne $c=-14$. Donc une équation de (AB) est $-8x+9y-14=0$.

b) Si l'ordonnée d'un point de la droite (AB) est égale à 2, alors son abscisse x vérifie :

$-8x+9\times2-14=0$, soit $x=\frac{1}{2}$.

126 **a)** Une équation de d_1 est de la forme $3x-y+c=0$. Le point S(−1 ; 0) appartient à la droite donc $3\times(-1)-0+c=0$, soit $c=3$. Donc une équation de d_1 est $3x-y+3=0$.

b) Une équation de d_2 est de la forme $3x-y+c=0$. Le point de coordonnées (0 ; 4) appartient à la droite donc

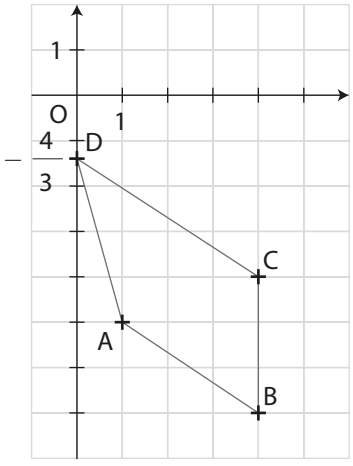
$3\times0-4+c=0$, soit $c=4$. Donc une équation de d_2 est $3x-y+4=0$.

c) Une équation de d_3 est de la forme $2x-y+c=0$. Le point T(7 ; 19) appartient à la droite donc $2\times7-19+c=0$, ce qui donne $c=5$. Donc une équation de d_3 est $2x-y+5=0$.

d) d_4 a une équation de la forme $y=k$. Le point A(0 ; k) appartient à d_0 donc $3\times0-k-2=0$ soit $k=-2$. Une équation de d_4 est donc $y=-2$.

e) d_5 est parallèle à d_0 donc une équation de d_5 est de la forme $3x-y+c=0$. Le point O(0 ; 0) appartient à la droite donc $3\times0-0+c=0$, ce qui donne $c=0$. Donc une équation de d_5 est $3x-y=0$.

127 **a)**



b) ABCD est un trapèze, avec D sur l'axe des ordonnées si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}(3\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{DC}(4\,;\,-4-y)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires équivaut à

$3\times(-4-y)-4\times(-2)=0$

c'est-à-dire $-4-y=-\frac{8}{3}$ soit $y=-\frac{4}{3}$.

128 **a)** • Si $x=0$, alors $\frac{y}{5}=1$ et donc $y=5$.

La droite d_1 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 5).

• Si $y=0$, alors $\frac{x}{2}=1$ et donc $x=2$.

La droite d_1 coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (2 ; 0).

b) On note d la droite d'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

$\frac{a}{a}+\frac{0}{b}=1$ donc le point A(a ; 0) appartient à la droite d.

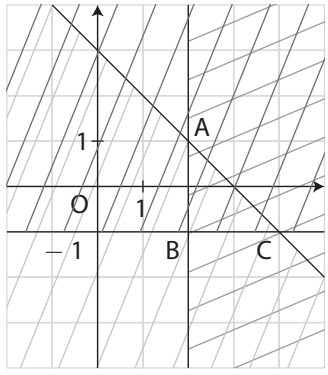
$\frac{0}{a}+\frac{b}{b}=1$ donc le point B(b ; 0) appartient à la droite d.

La droite qui passe par les points A et B a donc bien pour équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

c) D'après la question précédente, une équation de la droite d_3 est $\frac{x}{3}+\frac{y}{-7}=1$, c'est-à-dire $\frac{x}{3}-\frac{y}{7}=1$.

En multipliant les deux membres de cette équation par 7, on obtient une autre équation de la droite $\frac{7}{3}x-y=7$, puis on en déduit l'équation réduite $y=\frac{7}{3}x-7$.

129 **a) b) c) e)**



d) $0+0-3=-3$ et $-3<0$ donc les coordonnées de l'origine O du repère vérifient $x+y-3<0$.

f) L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient ces trois inéquations est l'intérieur du domaine délimité par le triangle ABC avec A(2 ; 1), B(2 ; −1) et C(4 ; −1).

130 **a)** On note x le prix payé par un enfant et y le prix payé par un adulte.

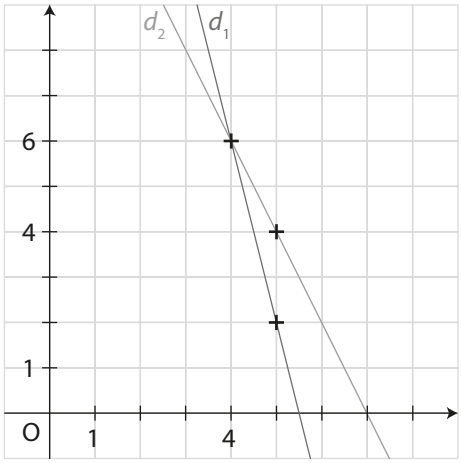
D'après la première phrase de l'énoncé, $4x+y=22$.

D'après la deuxième phrase de l'énoncé, $6x+3y=42$.

Pour trouver les valeurs de x et y, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases}4x+y=22\\6x+3y=42\end{cases}$$

C'est ce que fait Axel en traçant les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $4x + y = 22$ et $6x + 3y = 42$.



b) Graphiquement, on lit que la solution du système est le couple $(4\ ;6)$.

On vérifie que c'est bien le cas : $4 \times 4 + 6 = 22$ et $6 \times 4 + 3 \times 6 = 42$.

Donc le prix d'entrée pour un enfant est 4 € et pour un adulte 6 €.

131 **a)** La masse totale de nouveau chocolat doit être 1 kg, soit $x + y = 1$.

La masse de cacao dans le nouveau chocolat doit être 40 % de la masse totale, soit $0{,}4(x + y)$. Cette masse est égale à 70 % de la masse de chocolat noir, soit $0{,}7x$, plus 20 % de la masse de chocolat au lait, soit $0{,}2y$. Ainsi, $0{,}7x + 0{,}2y = 0{,}4(x + y)$.

b) La deuxième équation équivaut à

$0{,}7x + 0{,}2y = 0{,}4x + 0{,}4y$, c'est-à-dire $0{,}2y = 0{,}3x$ soit $y = \frac{3}{2}x$.

La première équation équivaut à $y = 1 - x$.

c) On résout le système :

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

On remplace y par $\frac{3}{2}x$ dans la première équation, il vient $\frac{3}{2}x = 1 - x$, c'est-à-dire $\frac{5}{2}x = 1$ soit $x = \frac{2}{5}$.

On substitue x par $\frac{2}{5}$ dans $y = \frac{3}{2}x$; il vient $y = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

La solution de ce système est le couple $\left(\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right)$ c'est-à-dire $(0{,}4\ ;0{,}6)$.

d) Il faut donc mélanger 400 g de chocolat noir et 600 g de chocolat au lait.

132 On note x le prix d'une minute de communication et y le prix d'un SMS. D'après l'énoncé, $30x + 50y = 19{,}5$ et $50x + 100y = 35$. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 30x + 50y = 19{,}5 \\ 50x + 100y = 35 \end{cases}$$

En multipliant chaque membre de la première équation par 2, on obtient $60x + 100y = 39$.

En soustrayant alors membre à membre avec la deuxième équation du système, on obtient $10x = 4$, soit $x = 0{,}4$.

En substituant x par 0,4 dans la deuxième équation, on obtient $50 \times 0{,}4 + 100y = 35$, soit $y = 0{,}15$.

Ainsi une minute de communication coûte 0,40 € et un SMS coûte 0,15 €.

133 On note x le nombre de pain d'épices vendus et y le nombre de pots de miel.

D'après l'énoncé,

$$4x + 4{,}5y = 215 \text{ et } 4{,}5x + 5y = 240.$$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 4x + 4{,}5y = 215 \\ 4{,}5x + 5y = 240 \end{cases}$$

En multipliant chaque membre de la première équation par 9 et chaque membre de la deuxième par 8, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} 36x + 40{,}5y = 1935 \\ 36x + 40y = 1920 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre les deux nouvelles équations, on obtient $0{,}5y = 15$, soit $y = 30$.

En substituant y par 30 dans $4x + 4{,}5y = 215$, on obtient $4x + 4{,}5 \times 30 = 215$, soit $x = 20$.

Ainsi, Louis a vendu 20 pains d'épices et 30 pots de miel.

134 On note $\frac{x}{y}$ la fraction cherchée.

D'après la première information de l'énoncé, $\frac{x+3}{y+3} = \frac{2}{5}$ c'est-à-dire $5(x + 3) = 2(y + 3)$, soit $5x - 2y = -9$.

D'après la deuxième information, $\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{7}$, ce qui donne $7(x - 3) = y - 3$, c'est-à-dire $7x - y = 18$.

On résout le système :

$$\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 7x - y = 18 \end{cases}$$

En multipliant chaque membre de la deuxième par -2, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ -14x + 2y = -36 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux équations de ce système, on obtient $-9x = -45$, soit $x = 5$. En substituant x par 5 dans la première équation, on obtient $5 \times 5 - 2y + 9 = 0$, soit $y = 17$.

La fraction cherchée est donc $\frac{5}{17}$.

135 On note x le nombre de dromadaires et y le nombre de chameaux.
Chaque animal a une tête, donc $x + y = 28$.
Chaque dromadaire a une bosse et chaque chameau a 2 bosses, donc $x + 2y = 45$.
On résout le système :

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x + 2y = 45 \end{cases}$$

La première équation s'écrit $y = 28 - x$, on remplace y par cette expression dans la deuxième équation, il vient $x + 2(28 - x) = 45$ c'est-à-dire $-x = -11$ soit $x = 11$.
On remplace x par 11 dans $y = 28 - x$, il vient $y = 28 - 11 = 17$.
Il y a donc 11 dromadaires et 17 chameaux.

136 **a)** On note x le nombre de lots A et y le nombre de lots B. Pour épuiser le stock de torchons, il faut que $9x + 2y = 3\,200$. Pour épuiser le stock de serviettes, il faut que $6x + 12y = 4\,800$. Le couple $(x\,;y)$ doit être solution du système :

$$\begin{cases} 9x + 2y = 3\,200 \\ 6x + 12y = 4\,800 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 6, on obtient $54x + 12y = 19\,200$. En soustrayant alors la deuxième équation, on obtient $48x = 14\,400$, soit $x = 300$.
En substituant x par 300 dans la première équation, on obtient $9 \times 300 + 2y = 3\,200$, soit $y = 250$. Il faut donc vendre 300 lots A et 250 lots B.
b) 300×20 € $+ 250 \times 15$ € $= 9\,750$ €
Le chiffre d'affaires total est 9 750 €.

137 **a) Vrai**.
En effet, il s'agit du point de coordonnées $(0\,;\,-1)$.
b) Faux.
En effet, le point de coordonnées $(2;\,-0{,}5)$ appartient à *d*.
c) Vrai.
En effet, supposons qu'il existe un point $M(x\,;y)$ de *d* tel que $x = y$. Alors $-\frac{1}{4}x + x + 1 = 0$, ce qui donne $x = -\frac{4}{3}$ et donc $y = -\frac{4}{3}$.
Il existe donc bien un tel point.

d) Vrai.
En effet, pour tout point $M(x\,;y)$ de *d*, $-x + 4y + 4 = 0$ donc $x = 4y + 4$, ce qui implique que $x > 4y$.

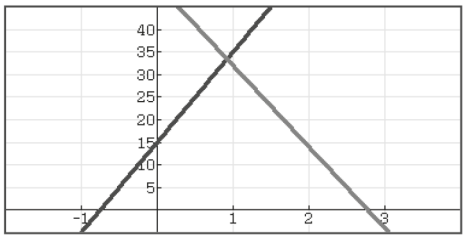
138 **a)** • L'implication est vraie.
En effet, l'équation $y = 3x + 0{,}5$ équivaut à l'équation $6x - 2y + 1 = 0$.
• Réciproque : si $(a\,;b)$ vérifie l'équation $6x - 2y + 1 = 0$, alors $A(a\,;b)$ appartient à la droite d'équation $y = 3x + 0{,}5$.
Cette réciproque est vraie. En effet, si $6a - 2b + 1 = 0$, alors $b = \frac{6a+1}{2} = 3a + 0{,}5$
donc $A(a\,;b)$ appartient à la droite d'équation $y = 3x + 0{,}5$.
b) • L'implication est vraie. En effet, si un point $M(a\,;b)$ appartient à la droite d'équation $x + y = 0$, alors $2(a + b) = 0$, et donc $2a + 2b = 0$, ce qui signifie que le point $N(2a\,;2b)$ appartient aussi à la droite.
• Réciproque : si $N(2a\,;2b)$ appartient à la droite d'équation $x + y = 0$, alors $M(a\,;b)$ appartient aussi à cette droite.
Cette réciproque est vraie. En effet, si $2a + 2b = 0$, alors $a + b = 0$ et le point $M(a\,;b)$ appartient à la droite d'équation $x + y = 0$.
c) • L'implication est vraie. En effet, si un point $M(a\,;b)$ appartient à la droite d'équation $x - y + 2 = 0$, alors $(x + 1) - (y + 1) + 2 = 0$, ce qui signifie que le point $N(a + 1\,;b + 1)$ appartient aussi à la droite.
• Réciproque : si $N(a + 1\,;b + 1)$ appartient à la droite d'équation $x - y + 2 = 0$, alors le point $M(a\,;b)$ appartient à cette droite.
Cette réciproque est vraie. En effet, si $a + 1 - (b + 1) + 2 = 0$ alors $a - b + 2 = 0$ et le point $M(a\,;b)$ appartient à la droite d'équation $x - y + 2 = 0$.
d) • L'implication est vraie. En effet, quels que soient *a* et *b* tous les deux non nuls, le couple $(0\,;0)$ vérifie l'équation $ax + by = 0$.
• Réciproque : si une droite *d* passe par l'origine d'un repère orthonormé, alors *d* admet une équation de la forme $ax + by = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Cette réciproque est vraie. En effet, une équation de *d* est la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Si *d* passe par l'origine du repère, alors $a \times 0 + b \times 0 + c = 0$ c'est-à-dire $c = 0$ et donc *d* admet une équation de la forme $ax + by = 0$.

Organiser son raisonnement

139 **a)** On sait qu'Ophélie se trompe car les coefficients directeurs de ces deux droites sont différents, ce qui signifie qu'elles sont sécantes.

b) On peut prendre comme fenêtre :

$-2 \leqslant X \leqslant 4$, pas 1 et $-5 \leqslant Y \leqslant 45$, pas 1.



140 On peut, à la main ou l'aide du tableur, construire un tableau croisé pour indiquer les coefficients directeurs de chacune des 15 droites.

Par exemple, le coefficient directeur de la droite (AB) est $-0{,}5$. On précise dans le tableau les équations des droites parallèles à l'axe des ordonnées, qui n'ont pas de coefficient directeur.

	A	B	C	D	E	F
A		−0,5	2	0,75	0	$x = 7$
B			$x = 9$	2	0,5	−2
C				−0,5	−2	0,5
D					$x = 11$	0
E						−0,75

On constate ainsi que :

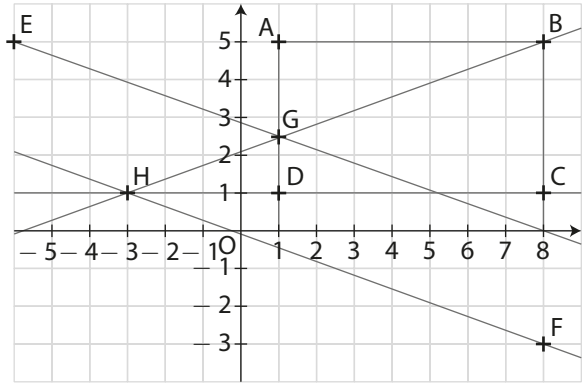
- (AB) est parallèle à (CD) ;
- (AC) est parallèle à (BD) ;
- (AE) est parallèle à (DF) ;
- (AF) est parallèle à (BC) et (DE) ;
- (BE) est parallèle à (CF) ;
- (BF) est parallèle à (CE).

141 On cherche les valeurs de x et de y entières positives telles que $40x + 60y = 960$. Cette équation équivaut à $y = -\frac{3}{2}x + 16$. Il s'agit donc de trouver les points à coordonnées entières et positives de la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 16$.

On peut utiliser GeoGebra pour tracer la droite, afficher la grille et trouver ainsi les coordonnées des points cherchés : $(0\,;16)$, $(2\,;13)$, $(4\,;10)$, $(6\,;7)$, $(8\,;4)$ et $(10\,;1)$. Les possibilités sont donc :

- 16 autocars de 60 places ;
- 2 autocars de 40 places et 13 autocars de 60 places ;
- 4 autocars de 40 places et 10 autocars de 60 places ;
- 6 autocars de 40 places et 7 autocars de 60 places ;
- 8 autocars de 40 places et 4 autocars de 60 places ;
- 10 autocars de 40 places et 1 autocar de 60 places.

142 **a)**



b) Les coordonnées de G sont $(1\,;a)$, avec $1 < a < 5$.

Les coordonnées de E et F sont respectivement $(-6\,;5)$ et $(8\,;-3)$.

• (BG) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc son équation réduite est de la forme $y = mx + p$.

Son coefficient directeur est $m = \frac{a-5}{1-8} = \frac{5-a}{7}$.

B appartient à la droite, donc $5 = \frac{5-a}{7} \times 8 + p$,

soit $p = \frac{8a-5}{7}$.

L'équation (BG) est donc $y = \frac{5-a}{7}x + \frac{8a-5}{7}$.

• Les coordonnées du point H vérifient l'équation de (BG) et celle de (CD), qui est $y = 1$.

L'abscisse de H est telle que :

$1 = \frac{5-a}{7}x + \frac{8a-5}{7}$ c'est-à-dire $\frac{5-a}{7}x = \frac{12-8a}{7}$

soit $x = \frac{12-8a}{5-a}$.

Les coordonnées de H sont donc $\left(\frac{12-8a}{5-a}\,;1\right)$.

• Le coefficient directeur de la droite (EG) est :

$m_1 = \frac{a-5}{1-(-6)} = \frac{a-5}{7}$.

Le coefficient directeur de la droite (FH) est :

$$m_2 = \frac{1-(-3)}{\frac{12-8a}{5-a} - 8} = \frac{4}{\frac{12-8a-40+8a}{5-a}} = \frac{a-5}{7}.$$

On constate que, quel que soit a compris entre 1 et 5, c'est-à-dire quelle que soit la position du point G sur [AD], les droites (EG) et (FH) ont le même coefficient directeur et sont donc parallèles.

143 **Méthode 1**

En faisant une figure, on peut conjecturer que ABCD est un rectangle. On prouve tout d'abord que c'est un parallélogramme.

Le coefficient directeur de (AB) est :

$$m_1 = \frac{3-1}{4-(-2)} = \frac{1}{3}.$$

Le coefficient directeur de (CD) est :

$$m_2 = \frac{-2-0}{-1-5} = \frac{1}{3}.$$

Le coefficient directeur de (AD) est :

$$m_3 = \frac{-2-1}{-1-(-2)} = -3.$$

Le coefficient directeur de (BC) est $m_4 = \frac{0-3}{5-4} = -3$.

$m_1 = m_2$ et $m_3 = m_4$ donc les côtés de ABCD sont parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.

On calcule ensuite les longueurs des diagonales AC et BD :

$AC = \sqrt{(5-(-2))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50}$

$BD = \sqrt{(-1-4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{50}$

$AC = BD$ donc les diagonales du parallélogramme ABCD sont de même longueur, c'est un rectangle.

Méthode 2

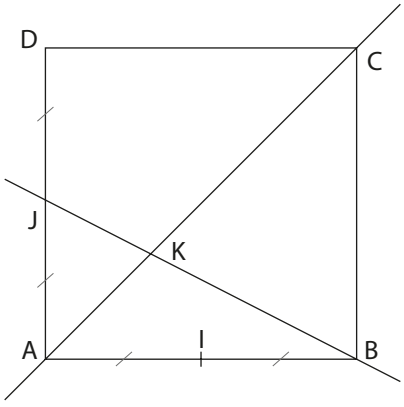
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(6\,;2)$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$ sont $(6\,;2)$

On constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ce qui prouve que ABCD est un parallélogramme. (On peut aussi démontrer cette propriété en calculant les coordonnées des milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.)

On calcule ensuite les distances AC et BD et on constate que $AC = BD$ ce qui signifie que le parallélogramme ABCD est un rectangle.

144



Dans le repère (A ; B ; D), on a $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$, $D(0\,;1)$, $I(0{,}5\,;0)$ et $J(0\,;0{,}5)$.

L'équation de la droite (AC) est $y = x$ et l'équation réduite de la droite (BJ) est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Le couple de coordonnées de K est donc solution du système :

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

On résout $x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,

soit $\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{3}$.

Donc $K\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

L'équation réduite de la droite (DI) est $y = -2x + 1$.

$-2 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3}$ donc K appartient à (DI) et les points D, K, I sont alignés.

145 **a)** The coordinates of the vector $\overrightarrow{OA}$ are $(6\,;3)$, those of $\overrightarrow{BC}$ are $(8\,;4)$.

$\text{Det}(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{BC}) = 6 \times 4 - 8 \times 3 = 0$, hence $\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{BC}$ are colinear.

Therefore $\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{BC}$ are parallel lines.

b) The coordinates of the vector $\overrightarrow{BC}$ are $(2\,;1)$. $\text{Det}(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BC}) = 2 \times 4 - 8 \times 1 = 0$, hence $\overrightarrow{BD}$ and $\overrightarrow{BC}$ are colinear.

Therefore B, C, D are colinear.

c) The coordinates of the vector $\overrightarrow{AB}$ are $(-9\,;-3)$.

An equation of line (AB) is $-3x + 9y + c = 0$.

$B(3\,;0)$ is on the line (AB),

hence $-3 \times (-3) + 9 \times 0 + c = 0$, that is $c = -9$.

Hence an equation of AB is : $-3x + 9y - 9 = 0$.

If $M(0\,;y)$ is on (AB), then y is such that $9y - 9 = 0$, hence $y = 1$.

d) The coordinates of the vector $\overrightarrow{DO}$ are $(1\,;-1)$, those of $\overrightarrow{AE}$ are $\left(-\frac{25}{3}\,;m-3\right)$.

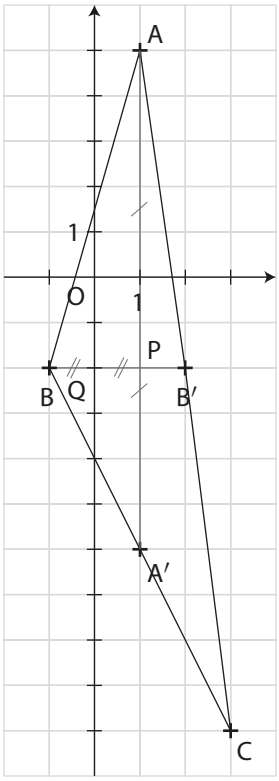
DOAE is a trapezoid if, and only if, $\overrightarrow{DO}$ and $\overrightarrow{AE}$ are colinear ; that is , if and only if, $\text{Det}(\overrightarrow{DO}\,;\overrightarrow{AE}) = 0$. Hence we must have $1 \times (m-3) - \left(-\frac{25}{3}\right) \times (-1) + 0$, that is $m = \frac{34}{3}$.

146 Les coordonnées de A' sont $\left(\frac{-1+3}{2}\,;\frac{-2-10}{2}\right)$, soit $(1\,;-6)$.

Les coordonnées de B' sont $\left(\frac{1+3}{2}\,;\frac{6-10}{2}\right)$, soit $(2\,;-2)$.

La droite (AA') est donc parallèle à l'axe des ordonnées et son équation est $x = -1$. La droite (BB') est quant à elle parallèle à l'axe des abscisses et son

équation est $y = -2$. L'axe des abscisses passe donc par le milieu de $[AA']$ et est parallèle à (BB').
On note P le point d'intersection des droites (AA') et (BB'). Les coordonnées de P sont $(1\,;\,-2)$.
On note Q le milieu de $[PB]$. Les coordonnées de Q sont $(0\,;\,-2)$. L'axe des ordonnées passe donc par Q et est parallèle à (AA').
On a ainsi retrouvé le repère effacé.



147 Un vecteur directeur de la droite d est $\vec{u}(27\,;5)$. Puisque 27 et 5 sont des nombres premiers entre eux, en partant d'un point à coordonnées entières, pour obtenir le point « suivant » à coordonnées entières, il faut ajouter 27 à l'abscisse et 5 à l'ordonnée. On sait que le premier point à coordonnées entières est $(11\,;2)$, donc le deuxième est $(11+27\,;2+5)$, c'est-à-dire $(38\,;7)$, le troisième est $(11+2\times27\,;2+2\times5)$, c'est-à-dire $(65\,;12)$, et le 2 019e est $(11+2\,018\times27\,;2+2\,018\times5)$, c'est-à-dire $(54\,497\,;10\,092)$.

148 **1. D.** En effet, $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{1}{2}\,;-3\right)$ est un vecteur directeur de la droite (AC) qui admet donc une équation de la forme $-3x+\frac{1}{2}y+c=0$.
Or, $A(1\,;2)$ appartient à (AC) donc $-3+1+c=0$ soit $c=2$.
Une équation de (AC) est donc $-3x+\frac{1}{2}y+2=0$ c'est-à-dire $y=6x-4$.

2. A. En effet, $\overrightarrow{AB}(2\,;5)$ et $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

3. D. En effet, $\overrightarrow{AD}\left(\frac{3}{2}\,;2\right)$ et $2\overrightarrow{AD}(3\,;4)$ sont des vecteurs directeurs de (AD). Or, $2\vec{u}-\vec{v}(3\,;4)$ donc $2\vec{u}-\vec{v}$ est un vecteur directeur de (AD).

4. D. En effet, $\overrightarrow{EF}(4\,;-8)$ donc une équation de (EF) est de la forme $-8x-4y+c=0$.
Or, $E(1\,;7)$ appartient à (EF) donc $-8-28+c=0$ soit $c=36$.
Une équation de (EF) est $-8x-4y+36=0$ c'est-à-dire $2x+y-9=0$.

Or, $D\in(EF)$ car $2\times\frac{5}{2}+4-9=0$.

5. B. En effet $\overrightarrow{BC}\left(-\frac{5}{2}\,;-8\right)$ donc une équation de (BC) est de la forme :

$$-8x+\frac{5}{2}y+c=0.$$

Or, $B(3\,;7)$ appartient à (BC)

donc $-24+\frac{35}{2}+c=0$ soit $c=\frac{13}{2}$.
Une équation de (BC) est :

$$-8x+\frac{5}{2}y+\frac{13}{2}=0.$$

$D\left(\frac{5}{2}\,;4\right)$ n'appartient pas à (BC)

car $-8\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\times4+\frac{13}{2}=-\frac{7}{2}$ et $-\frac{7}{2}\neq0$.

6. B. En effet, $A(1\,;2)$ et $E(1\,;7)$ donc la droite (AE) a pour équation $x=1$ et est parallèle à l'axe des ordonnées.

7. B. En effet, $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{1}{2}\,;-3\right)$ et $\overrightarrow{BD}\left(-\frac{1}{2}\,;-3\right)$ donc les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

8. A. En effet, $\overrightarrow{AB}(2\,;5)$ et $\overrightarrow{CD}(2\,;5)$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et ABDC est un parallélogramme.

9. A. En effet, (AE) est parallèle à l'axe des ordonnées et (EB) est parallèle à l'axe des abscisses, donc ces droites sont perpendiculaires.

10. C. En effet,

$$HD=\sqrt{\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-4\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{2}}$$

et $HC=\sqrt{\left(4-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{2}}$

$HD=HC$ donc H appartient à la médiatrice de $[CD]$.

Exploiter ses compétences

149 La droite tracée dans le Doc. 1 passe par les points de coordonnées $(-42\,;0{,}192)$ et $(30\,;0{,}194)$.
Sa pente est donc :

$$m = \frac{0{,}194 - 0{,}192}{-30+42} = \frac{0{,}002}{12} = \frac{1}{6\,000}.$$

L'équation réduite de cette droite est donc de la forme $y = \frac{1}{6\,000}x + p$.

En utilisant les coordonnées du premier point on en déduit $0{,}192 = \frac{-42}{6\,000} + p$ c'est-à-dire :

$$p = \frac{1152}{6\,000} + \frac{42}{6\,000} = \frac{1194}{6\,000}$$

L'équation de la droite est donc $y = \frac{1}{6\,000}x + \frac{1194}{6\,000}$

Selon le Doc. 2, il y a 20 000 ans, le pourcentage d'oxygène lourd était environ égal à 0,1915.

Pour trouver la température correspondante, on doit résoudre l'équation :

$0{,}1915 = \frac{1}{6\,000}x + \frac{1194}{6\,000}$, c'est-à-dire

$\frac{1149}{6\,000} = \frac{1}{6\,000}x + \frac{1194}{6\,000}$ soit $-\frac{45}{6\,000} = \frac{1}{6\,000}x$.

Ainsi $x = -45$.

La température des nuages était donc alors égale à environ -45 °C.

De manière analogue, il y a 100 000 ans le pourcentage d'oxygène lourd était environ égal à 0,193 5.

Pour trouver la température correspondante, on doit résoudre l'équation :

$0{,}193\,5 = \frac{1}{6\,000}x + \frac{1194}{6\,000}$,

c'est-à-dire $\frac{1161}{6\,000} = \frac{1}{6\,000}x + \frac{1194}{6\,000}$

soit $-\frac{33}{6\,000} = \frac{1}{6\,000}x$.

Ainsi $x = -33$.

La température des nuages était donc alors égale à environ -33 °C.

150 Pour respecter la décision de la communauté de communes, on doit modéliser la contribution y par une fonction affine de la variable x, la distance par rapport à la ville A. Ainsi, on cherche deux nombres réels m et p tels que $y = mx + p$.

Les informations concernant la commune A indiquent que pour $x = 0$, $y = 5\,000$. Donc $5\,000 = m \times 0 + p$, ce qui donne $p = 5\,000$.

L'expression est donc de forme $y = mx + 5\,000$.

Les informations concernant la commune E indique que pour $x = 15$, $y = 3\,000$.

Donc $3\,000 = m \times 15 + 5\,000$,

ce qui donne $m = \frac{-2\,000}{15}$, c'est-à-dire $m = -\frac{400}{3}$.

L'expression cherchée est donc $y = -\frac{400}{3}x + 5\,000$.

La contribution de la commune B est donc $y = -\frac{400}{3} \times 5 + 5\,000$ c'est-à-dire environ 4 333 €.

La contribution de la commune C est donc $y = -\frac{400}{10} \times 5 + 5\,000$ c'est-à-dire environ 3 667 €.

On peut aussi déterminer que, pour la commune D, la distance vérifie $3\,400 = -\frac{400}{3}x + 5\,000$, ce qui donne $x = 12$. Cette ville se situe donc à 12 km de la ville A.

151 On note x la durée de communication, en min.

Le coût de communication avec l'opérateur FRESCO, en €, est représenté par la droite d'équation $y = 0{,}1x$, qui est tracée en bleu.

Le coût de communication avec l'opérateur Dovaphone, en €, est représenté par la droite d'équation $y = 0{,}1x + 5{,}3$, qui est tracée en rouge.

Le coût de communication avec l'opérateur O3, en €, est représenté par la droite d'équation $y = 0{,}05x + 10$, qui est tracée en vert.

Les droites rouges et bleues sont parallèles, et la droite rouge est toujours située au-dessus de la droite bleue.

Ainsi, l'offre de FRESCO est toujours plus intéressante que celle de Dovaphone.

Pour comparer les offres de FRESCO et O3, il faut d'abord déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites correspondantes, c'est-à-dire résoudre le système :

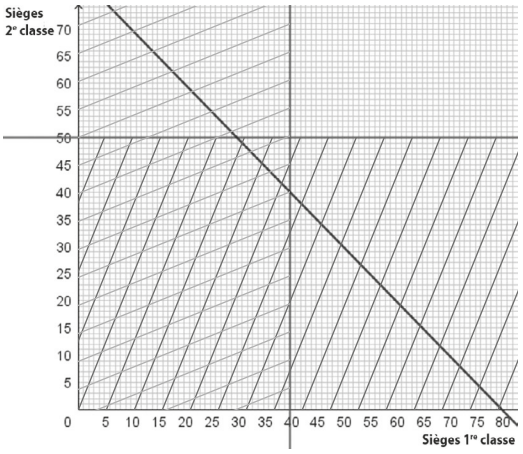
$$\begin{cases} y = 0{,}1x \\ y = 0{,}05x + 10 \end{cases}$$

On remplace y par $0{,}1x$ dans la deuxième équation ; il vient $0{,}1x = 0{,}05x + 10$, soit $x = 200$.

Ainsi, à l'aide du graphique, on peut dire que pour 200 min de communication ou moins, c'est l'offre de FRESCO la plus intéressante, et que pour 200 min ou plus, c'est l'offre de O3.

152 On note x le nombre de sièges en 1re classe et y le nombre de sièges en 2e classe.

D'après l'énoncé, x et y doivent vérifier $x \leqslant 40$, $y \leqslant 50$ et $x + y = 80$. Dans le repère ci-dessous, l'inéquation $x \leqslant 40$ est représentée par la zone hachurée en vert et l'inéquation $y \leqslant 50$ par la zone hachurée en rouge. L'équation $x + y = 80$ est représentée par la droite tracée en bleu.



Il faut trouver, parmi les points à coordonnées entières de la droite qui appartiennent à la zone hachurée en vert et en rouge, celui qui correspond à la plus grande recette.

Puisque les places en 1re classe sont vendues plus cher que les places en 2e classe, il faut que le nombre de places en 1re classe soit le plus grand possible. On lit sur le graphique que c'est le cas pour le couple $(40\ ;\ 40)$. La situation qui permettrait la recette maximale est 40 places en 1re classe et 40 en 2e classe.

8 Fonctions de référence

Découvrir

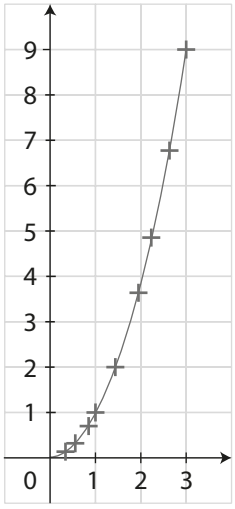
1 La fonction carré

1 **a)** $S(x) = x^2$

b)

Longueur du côté x	0,3	0,5	0,8	1	1,4	1,9	2,2	2,6	3
Superficie $S(x)$	0,09	0,25	0,64	1	1,96	3,61	4,84	6,76	9

c) et **d)**



2 Avec son budget, Antonio peut acheter 6,5 m^2 de tissu.
Sur l'intervalle $[0 ; 3]$, $x^2 = 6{,}5$ équivaut à $x = \sqrt{6{,}5}$ soit $x \approx 2{,}5$.
Antonio peut donc réaliser une nappe de côté maximum 2,5 m.

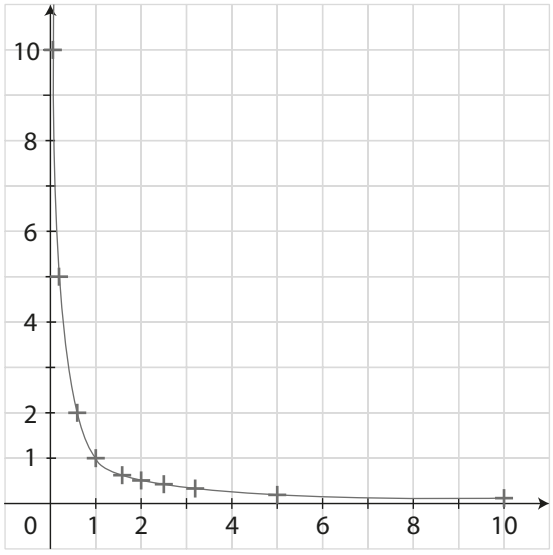
2 La fonction inverse

1 **a)** $I = \dfrac{1}{R}$

b)

Résistance (Ω)	0,1	0,2	0,5	1	1,6	2	2,5	3,2	5	10
Intensité (A)	10	5	2	1	0,625	0,5	0,4	0,312 5	0,2	0,1

c) et **d)**

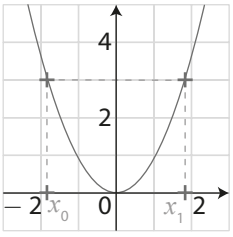


2 $4 = \dfrac{1}{R}$ soit $R = \dfrac{1}{4}$.
Manon doit donc régler la résistance sur 0,25 Ω.

Acquérir des automatismes

3 **a)** On lit graphiquement ci-contre que l'équation $x^2 = 3$ a deux solutions :

$$x_0 \approx -1{,}8 \text{ et } x_1 \approx 1{,}8.$$

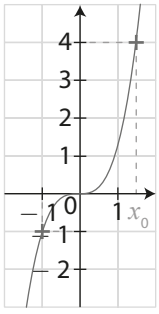


b) $x^2 = 3$ si, et seulement si, $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

4 **a)** Graphiquement : $x = 0$.
Algébriquement : $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$.
b) Graphiquement : $x_0 \approx -1{,}4$ et $x_1 \approx 1{,}4$.
Algébriquement : $x^2 = 2$ équivaut à $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

5 **a)** Graphiquement : $x_0 \approx -1{,}5$ et $x_1 \approx 1{,}5$.
Algébriquement : $x^2 = 2{,}25$ équivaut à $x = 1{,}5$ ou $x = -1{,}5$.
b) Graphiquement : $x^2 = -1$ est impossible car la courbe n'a pas de point d'ordonnée négative.

6 On lit ci-dessous que les solutions de l'inéquation :
a) $x^3 > 4$ sont les nombres de l'intervalle $]x_0\,;+\infty[$ avec $x_0 \approx 1{,}6$;
b) $x^3 \leqslant -1$ sont les nombres de l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.



7 **a)** On lit les abscisses des points d'ordonnée supérieure ou égale à 0 sur la courbe : $x \geqslant 0$.
b) On lit les abscisses des points d'ordonnée strictement inférieure à -3 sur la courbe : $x < a$ avec $a \approx -1{,}4$.

8 **a)** On lit les abscisses des points d'ordonnée strictement supérieure à 1,5 sur la courbe : $x > a$ avec $a \approx 1{,}1$.
b) On lit les abscisses des points d'ordonnée strictement inférieure à $-4{,}2$ sur la courbe : $x < a$ avec $a \approx -1{,}6$.

9 Cette affirmation est incorrecte, 3 est l'image de -2 par la fonction *f* et -2 est un antécédent de 3.

10 **a)** 7 est l'image de 2 par la fonction *f*.
b) 0,3 est un antécédent de -12 par la fonction *f*.

11 **a)** L'image de 6 par la fonction *f* est 3.
b) L'antécédent de $-0{,}5$ par la fonction *f* est -1.

12 **a)** $f(1) = 1^2 + 2 \times 1$ donc $f(1) = 3$.
b) $f(0) = 0$ donc Nolan a raison.
c) Pour tout nombre réel x, $f(x) = x^2 + 2x$

13 **a)** Pour tout nombre réel *t*, $g(t) = (t-5)^2 + 1$.
b) $g(-4) = (-4-5)^2 + 1 = (-9)^2 + 1 = 81 + 1 = 82$
c) $g(2{,}5) = (2{,}5-5)^2 + 1 = (-2{,}5)^2 + 1$
$= 6{,}25 + 1 = 7{,}25$

14 **a)** $y = 2 + \dfrac{1}{2}$ donc la fonction renvoie $y = 2{,}5$.
b) Pour obtenir le résultat 3, il faut saisir $x = 1$.
c) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

15 *g*, *h*, *m* sont de manière évidente des fonctions affines.
On peut écrire l'expression de la fonction *n* sous la forme $n(x) = \dfrac{7}{5}x - \dfrac{5}{6}$. C'est donc aussi une fonction affine.
Les fonctions *f* et *k* ne sont pas affines.

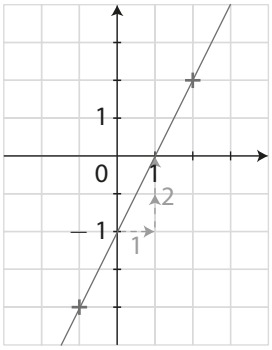
16 **a)** $f(2) = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$
b) $f(x) = 3$ équivaut à $2x - 3 = -3$, c'est-à-dire $2x = 0$ soit $x = 0$.
Ainsi, l'unique antécédent de -3 par la fonction *f* est 0.
c) L'image de $-\dfrac{1}{2}$ par la fonction *f* est :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -1 - 3 = -4.$$

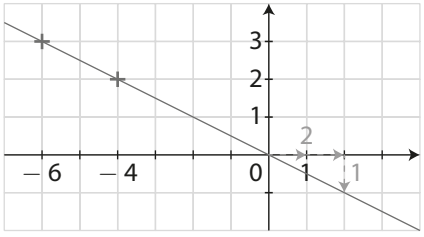
17 Voici les expressions des fonctions associées à chaque programme.
Programme 1 : $f(x) = 7x - 2$.
Programme 2 : $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 7$.
Programme 3 : $h(x) = x + 7$.

Programme 4 : $k(x) = x^2 + 2$.
Ainsi, les programmes 1, 2 et 3 correspondent à des fonctions affines.

18 **a)** $f(-1) = 2 \times (-1) - 2 = -4$ donc l'image de -1 par la fonction *f* est -4.
b) $f(x) = 2$ équivaut à $2x - 2 = 2$, c'est-à-dire $2x = 4$ soit $x = 2$.
L'antécédent de 2 par la fonction *f* est donc 2.
c) Le coefficient directeur est 2, l'ordonnée à l'origine est -2.



19 **a)** $g(-4) = -0{,}5 \times (-4) = 2$ donc l'image de -4 par la fonction *g* est -2.
b) $g(t) = 3$ équivaut à $-0{,}5t = 3$, c'est-à-dire $t = -6$.
L'antécédent de 3 par la fonction *g* est donc -6.
c) Le coefficient directeur est $-0{,}5$ et l'ordonnée à l'origine est 0.



20 **a)** $f(x) = 2$ équivaut à $-x + 5 = 2$, c'est-à-dire $x = 3$.
L'antécédent de 2 par la fonction *f* est donc 3.
b) On résout l'équation $-x + 5 = x$
c'est-à-dire $-2x = -5$ soit $x = 2{,}5$.
On observe que $f(2{,}5) = 2{,}5$, donc Simon a raison.

21 **a) Faux.** En effet, $f(4) = 4^2 = 16$.
b) Vrai. En effet, $f(-5) = (-5)^2 = 25$.

22 Le carré d'un nombre réel est toujours positif, donc l'affirmation d'Alexandre est forcément fausse.

23 **a)** 25 **b)** 10 000 **c)** 0 **d)** 0,01
e) 64 **f)** 9 **g)** 0,25 **h)** 0,81

24 **a)** 5 **b)** 245 **c)** 18 **d)** 27

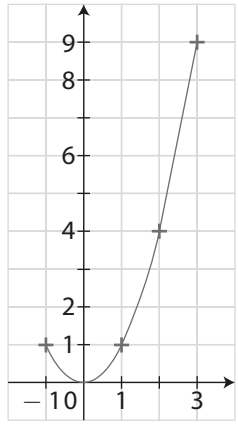
25 **a)** 10^6 **b)** 10^{-8} **c)** 54 **d)** 28

26 **a)** $\frac{9}{16}$ **b)** $\frac{81}{25}$ **c)** $\frac{225}{49}$ **d)** $\frac{1}{16}$

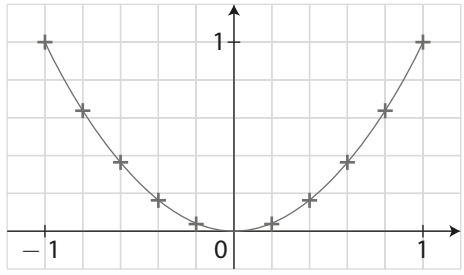
27 **a)** $x = 2$ et $x = -2$ **b)** $x = 6$ et $x = -6$
c) $x = 1$ et $x = -1$ **d)** $x = 9$ et $x = -9$

28 **a)** $x = \frac{3}{2}$ et $x = -\frac{3}{2}$ **b)** $x = \frac{1}{4}$ et $x = -\frac{1}{4}$
c) $x = \frac{10}{7}$ et $x = -\frac{10}{7}$ **d)** $x = \frac{6}{5}$ et $x = -\frac{6}{5}$

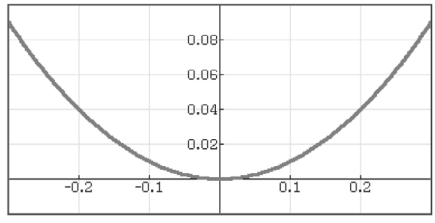
29 **a)**



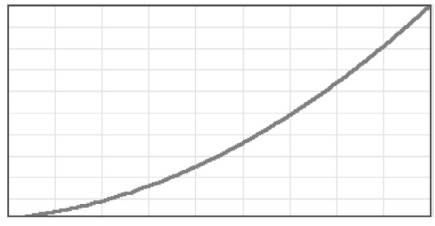
b)



30 **a)** Fenêtre : $-0{,}3 \leqslant X \leqslant 0{,}3$, pas 0,1 et $-0{,}02 \leqslant Y \leqslant 0{,}1$, pas 0,02.

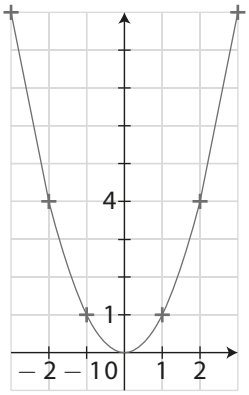


b) Fenêtre : $100 \leqslant X \leqslant 1000$, pas 100 et $10^4 \leqslant Y \leqslant 10^6$, pas 10^5.



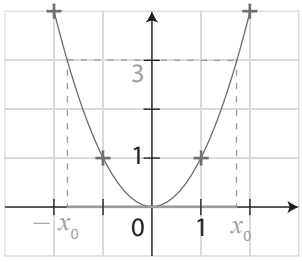
31 **a)** $3^2 = 9$ et $4^2 = 16$ donc $3^2 < 4^2$.
b) $1{,}5^2 = 2{,}25$ et $(-0{,}5)^2 = 0{,}25$ donc $1{,}5^2 > (-0{,}5)^2$.
c) $1{,}7^2 = 2{,}89$ et $1{,}5^2 = 2{,}25$ donc $1{,}7^2 > 1{,}5^2$.
d) $(-3{,}7)^2 = 13{,}69$ et $(-4{,}2)^2 = 17{,}64$.
donc $(-3{,}7)^2 < (-4{,}2)^2$

32 **1.**



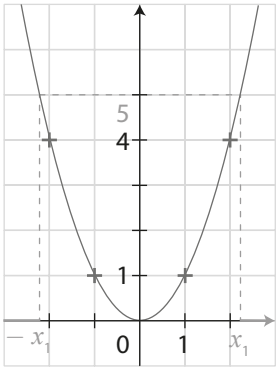
2. a) 10 a deux antécédents par la fonction carré.
b) -3 n'a pas d'antécédent par la fonction carré.
c) 0 a un unique antécédent par la fonction carré.
d) 150 a deux antécédents par la fonction carré.

33 **1.** Voir l'exercice **32**.
2. a)



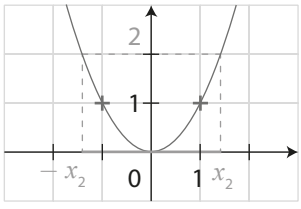
$\mathcal{S} =]-x_0\,;x_0[$ avec $x_0 \approx 1{,}7$.

b)



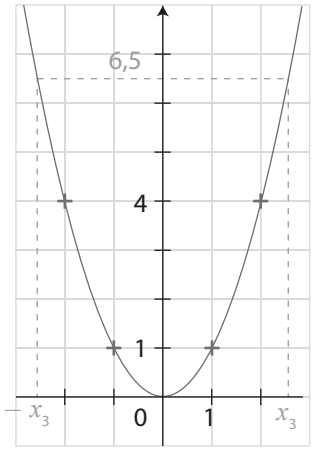
$\mathcal{S} =]-\infty\,;-x_1[\cup]x_1\,;+\infty[$ avec $x_1 \approx 2{,}2$.

c)



$\mathcal{S} = [-x_2\,;x_2]$ avec $x_2 \approx 1{,}4$.

d)

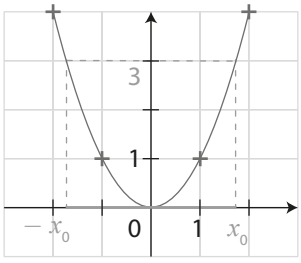


$\mathcal{S} =]-\infty\,;-x_3\,]\cup[x_3\,;+\infty[$ avec $x_3 \approx 2{,}5$.

e) $\mathcal{S} = \mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

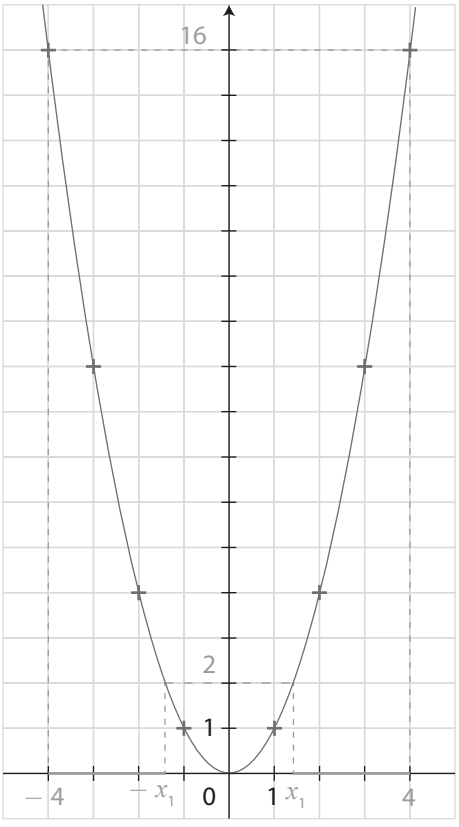
f) $\mathcal{S} = \varnothing$

34 **1.** Voir exercice **32**
2. a)



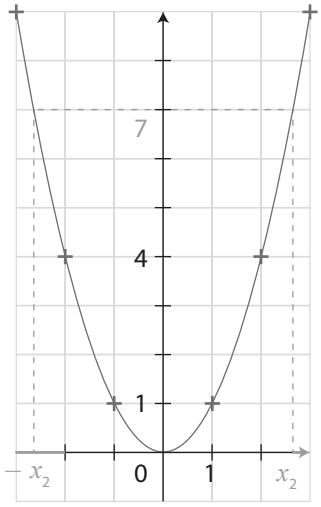
$\mathcal{S} = [-x_0\,;x_0]$ avec $x_0 \approx 1{,}7$.

b)



$\mathcal{S} =]-4\,;-x_1[\ \cup\ ]x_1\,;4[$ avec $x_1 \approx 1{,}4$.

c)



$\mathcal{S} =]-\infty\,;-x_2[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$ avec $x_2 \approx 2{,}6$.

35 Jason a probablement confondu inverse et opposé.

L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$. Donc Jason se trompe.

Le nombre 0 n'a pas d'inverse. Donc Célina se trompe.

36 **a)** 0,2 **b)** 0,1 **c)** 1 **d)** 2
e) -1 **f)** $-0{,}01$ **g)** 3 **h)** -4

37 **(2)** est l'égalité fausse.

En effet, $g(3) = \frac{1}{3}$, qui n'est pas égal à 0,3.

38 **a)** L'antécédent de -1 par la fonction inverse est -1.

b) L'antécédent de $\frac{1}{3}$ par la fonction inverse est 3.

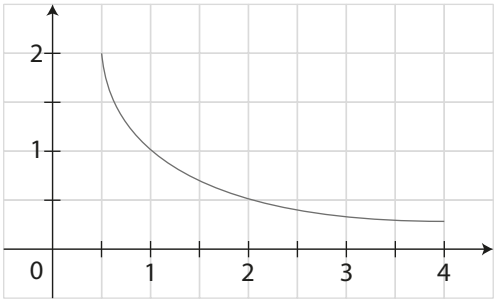
c) L'antécédent de 0,02 par la fonction inverse est 50.

d) L'antécédent de 10^{-2} par la fonction inverse est 10^2.

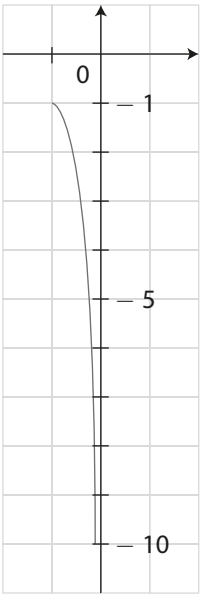
39 **a)** $\frac{4}{3}$ **b)** $-\frac{8}{5}$ **c)** -10^{-6} **d)** -10^4

40 **a)** $\frac{3}{7}$ **b)** $-\frac{9}{2}$ **c)** $-\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{2}{5}$

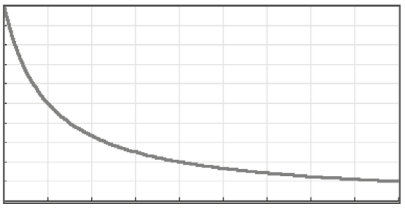
41 **a)**



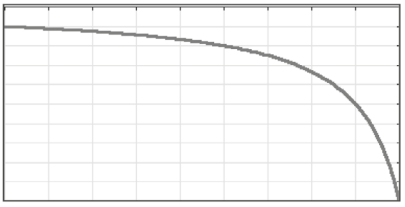
b)



42 **a)** Fenêtre : $1 \leqslant X \leqslant 10$, pas 1 et $0 \leqslant Y \leqslant 1$, pas 0,1.



b) Fenêtre : $-0{,}1 \leqslant X \leqslant -0{,}01$, pas 0,01 et $-100 \leqslant Y \leqslant 0$, pas 10.



43 **a)** Les points placés sont corrects.

b) Le tracé est incorrect. La courbe devrait aussi passer par le point $(1\,;1)$ car $\frac{1}{1} = 1$.

Mathilde n'aurait pas dû relier les points par des segments, elle aurait dû faire un tracé à main levée en connaissant l'allure de l'hyperbole.

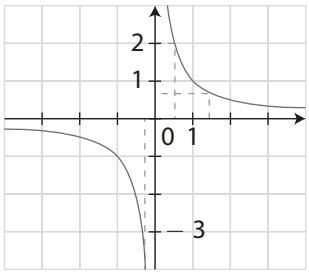
44 **a)** $\frac{1}{-4} = -0{,}25$ et $\frac{1}{-2} = -0{,}5$ donc $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-2}$.

b) $\frac{1}{0{,}5} = 2$ et $\frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$ donc $\frac{1}{0{,}5} > \frac{1}{0{,}8}$.

c) $-\frac{1}{1{,}4} \approx -0{,}71$ et $-\frac{1}{0{,}9} \approx -1{,}11$.

donc $-\frac{1}{1{,}4} > -\frac{1}{0{,}9}$.

45 **1.**



2. a) Une solution.

b) Une solution.

c) Pas de solution.

d) Une solution.

3. a) Pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x} = 2$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$.

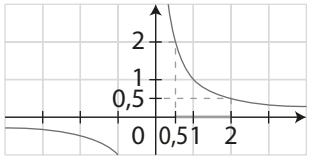
b) Pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x} = -3$ équivaut à $x = -\frac{1}{3}$.

c) $\frac{1}{x} = 0$ est impossible.

d) $\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$ équivaut à $x = \frac{4}{3}$.

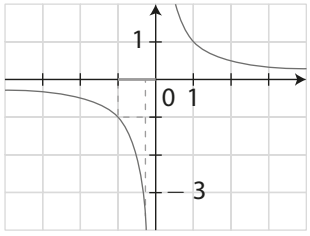
46 **1.** Tracé de la courbe : voir exercice **45**

2. a)



$0{,}5 < x < 2$

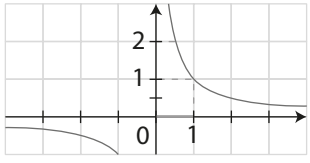
b)



$-1 < x < -\frac{1}{3}$

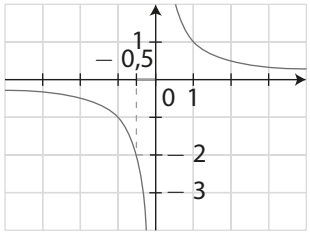
47 **1.** Tracé de la courbe : voir exercice **45**

2. a)



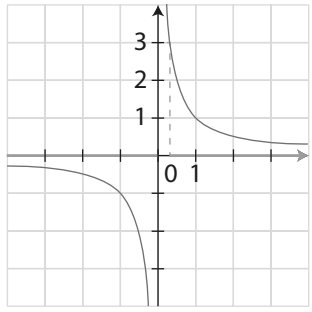
$\mathcal{S} =]0\,;1]$

b)



$\mathcal{S} = [-0{,}5\,;0[$

c)



$\mathcal{S} =]-\infty\,;0[\ \cup\ \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

48 L'affirmation **(3)** est exacte. En effet, pour tout nombre réel x non nul, $\frac{x^2}{\frac{1}{x}} = x^2 \times \frac{x}{1} = x^3$.

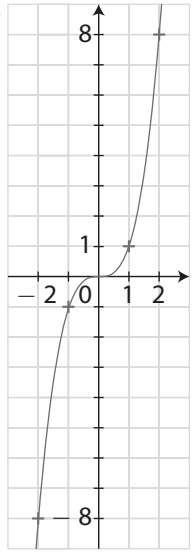
49 **a)** 27 **b)** -1 **c)** -8 **d)** -1000

50 Trois nombres sont égaux à leur cube : -1 ; 0 et 1. C'est donc Thibaut qui a raison.

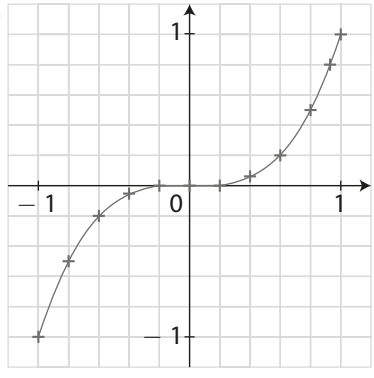
51 **a)** $\frac{8}{125}$ **b)** $-\frac{1}{64}$ **c)** $\frac{1000}{27}$ **d)** $-\frac{27}{8}$

52 **a)** -1 **b)** 2 **c)** -10 **d)** 3

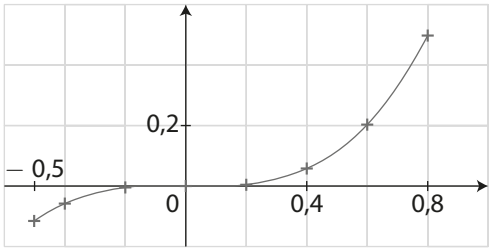
53 **a)**



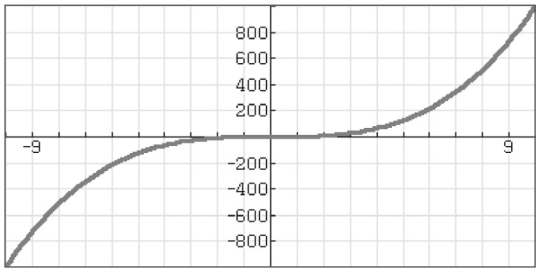
b)



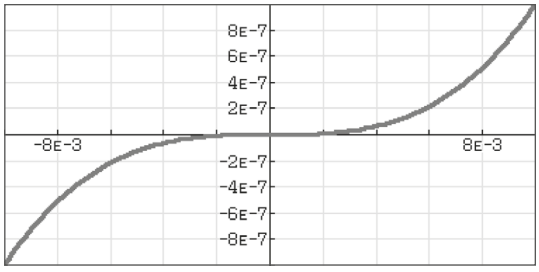
c)



54 **a)** Fenêtre : $-10 \leqslant X \leqslant 10$, pas 1 et $-1000 \leqslant Y \leqslant 1000$, pas 200.

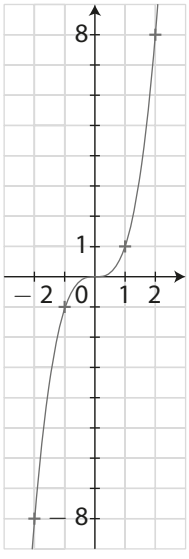


b) Fenêtre : $-10^{-2} \leqslant X \leqslant 10^{-2}$, pas 2×10^{-3} et $-10^{-6} \leqslant Y \leqslant 10^{-6}$, pas 2×10^{-7}.

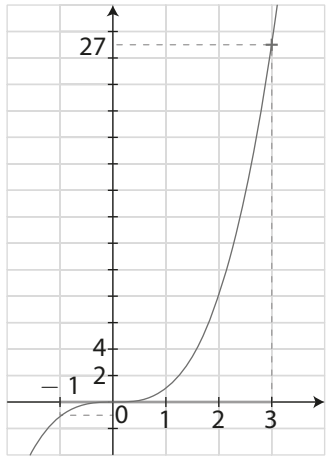


55 **a)** $2^3 = 8$ et $(-2)^3 = -8$
donc $2^3 > (-2)^3$.
b) $3{,}1^3 = 29{,}791$ et $3{,}3^3 = 35{,}937$
donc $3{,}1^3 < 3{,}3^3$.
c) $(-0{,}7)^3 = -0{,}343$ et $(-0{,}2)^3 = -0{,}008$
donc $(-0{,}7)^3 < (-0{,}2)^3$.

56 **1.**

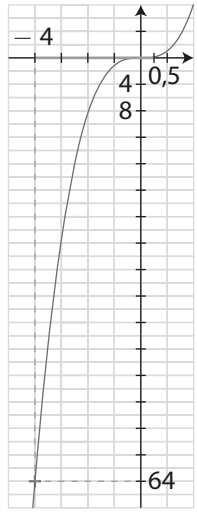


2. a)



$-1 < x < 3$

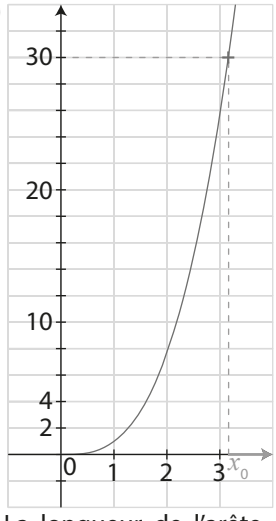
b)



$-4 < x < 0{,}5$

57 **a)** $V(x) = x^3$ $\quad V(3{,}1) = 3{,}1^3 = 29{,}791$

b)



c) La longueur de l'arête doit être supérieure à x_0 avec $x_0 \approx 3{,}1$.

58 **a) Vrai.** En effet, $\sqrt{4} = 2$.
b) Faux. En effet, $\sqrt{25} = 5$ donc c'est 25 qui est l'antécédent de 5 par la fonction carré.

59 **a)** 3 **b)** 0 **c)** 7 **d)** 10^4 **e)** 10^{-2}

60 **a)** 25 **b)** 64 **c)** 121 **d)** 2,25 **e)** 10^{-14}

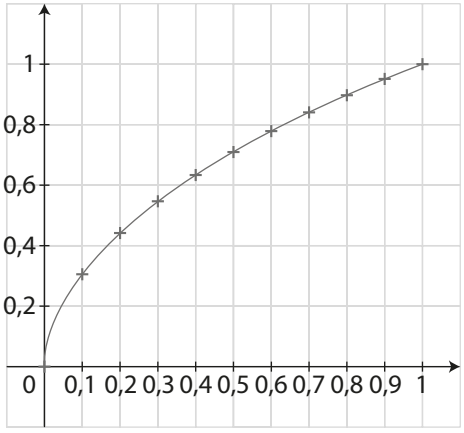
61 L'affirmation de Margaux est fausse. En effet, si k est strictement négatif, l'équation $\sqrt{x} = k$ n'admet pas de solution.

62 **a)** $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ **d)** $\frac{10}{11}$

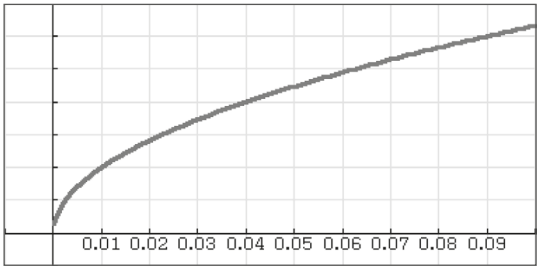
63 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (car $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$)

L'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction racine carrée est donc bien $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et Adama a raison.

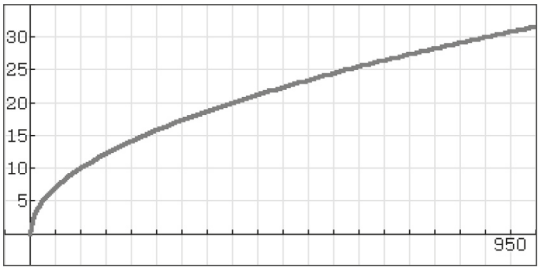
64



65 **a)** Fenêtre : $-0{,}01 \leqslant X \leqslant 1$, pas 0,01 et $-0{,}05 \leqslant Y \leqslant 0{,}35$, pas 0,05.



b) Fenêtre : $-50 \leqslant Y \leqslant 1000$, pas 50 et $-5 \leqslant Y \leqslant 35$, pas 5.

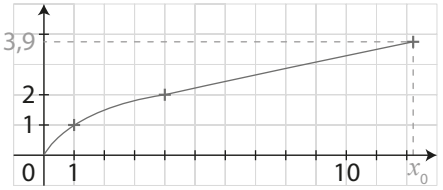


66 **a)** $\sqrt{12} \approx 3{,}46$ et $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ donc $\sqrt{12} > \sqrt{10}$.

b) $\sqrt{0{,}7} \approx 0{,}84$ et $\sqrt{1{,}3} \approx 1{,}14$ donc $\sqrt{0{,}7} < \sqrt{1{,}3}$.

c) $\sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$ et $\sqrt{1{,}6} \approx 1{,}26$ donc $1{,}5 < \sqrt{1{,}6}$.

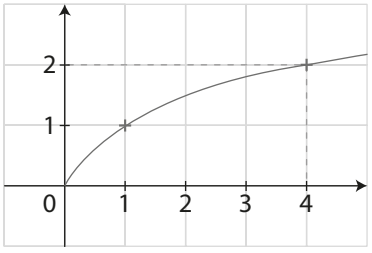
67 **a)**



Graphiquement, on lit que $x \approx 12{,}2$.

Algébriquement, $\sqrt{x} = 3{,}5$ et $x \geqslant 0$ équivaut à $x = 3{,}5^2 = 12{,}25$.

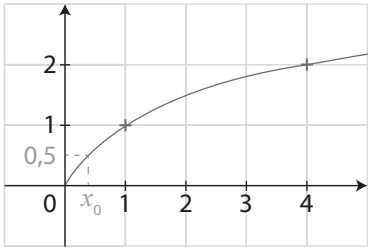
b)



Graphiquement, on lit que $x = 4$.

Algébriquement, $\sqrt{x} = 2$ et $x \geqslant 0$ équivaut à $x = 2^2 = 4$.

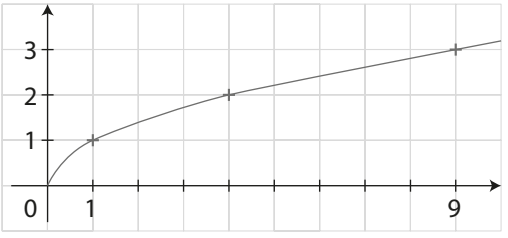
c)



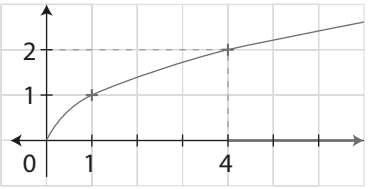
Graphiquement, on lit que $x_0 \approx 0{,}2$.

Algébriquement, $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ et $x \geqslant 0$ équivaut à $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

68 **1.**

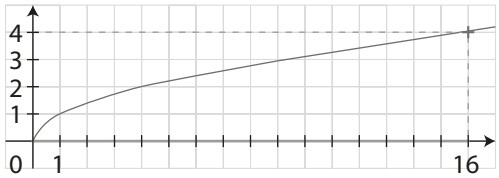


2. a)



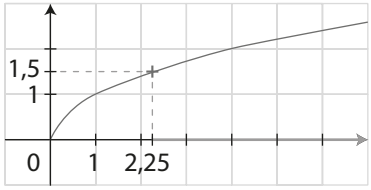
$\mathcal{S} = [4\,;\,+\infty[$

b)



$\mathcal{S} = [0\,;16[$

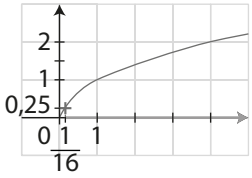
c)



$\mathcal{S} =]2{,}25\,;+\infty[$

d) $\mathcal{S} = \varnothing$ (pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$)

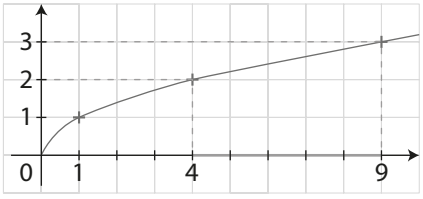
e) $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{16}; +\infty\right[$



f) $\mathcal{S} = [0\,;+\infty[$ (pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0 > -1$)

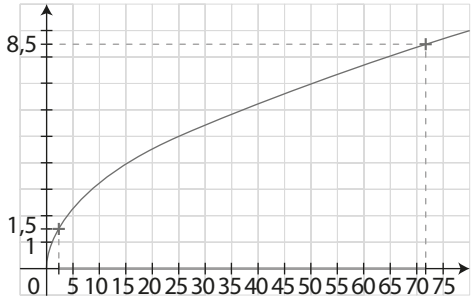
69 **1.** Tracé de la courbe : voir exercice **68**.

2. a)



$4 < x < 9$

b)



$2{,}25 \leqslant x \leqslant 72{,}25$

70 Olivia a résolu l'inéquation $\sqrt{x} > 2$.
Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'intervalle $]4\,;+\infty[$.

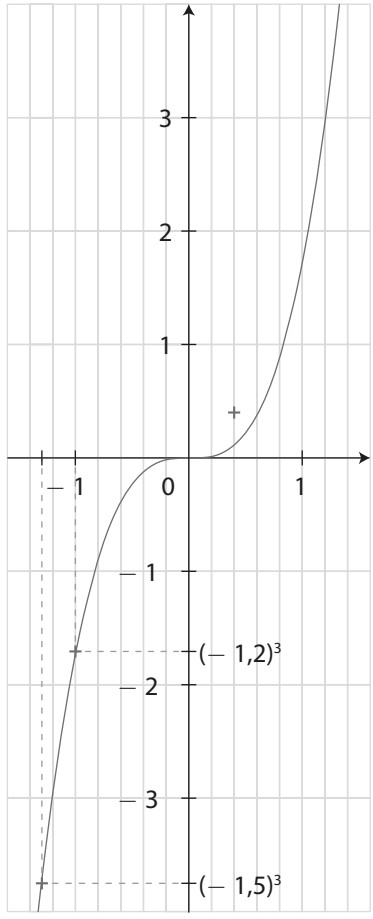
71 **1.** B **2.** C **3.** D **4.** B **5.** B **6.** C

72 **1.** B, D **2.** C, D **3.** C **4.** A, C, D

73 **1. Vrai**. En effet, $2{,}5^2 = 6{,}25$, qui est supérieur à 5.
2. Vrai. En effet, $(-3{,}5)^2 = 12{,}25$ et $(-1{,}5)^2 = 2{,}25$ et $12{,}25 > 2{,}25$.
3. Vrai.
4. Faux. Le carré d'un nombre réel est toujours positif, donc l'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution.
5. Vrai. Les solutions de l'équation $x^2 = 5$ sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
6. Faux. En effet, $0 \in [-1\,;1]$ mais $0^2 < 1$.
7. Faux. En effet, $0 \geqslant -2$ et $0^2 < 4$.

74 **a)** D a pour abscisse 2,3 et E a pour abscisse 2,7.
b) On observe que l'ordonnée de D, qui est égale à $2{,}3^2$, est inférieure à l'ordonnée de E, qui est égale à $2{,}7^2$. Par conséquent, $2{,}3^2 < 2{,}7^2$.

75 **a)** et **b)**



c) $(-1{,}2)^3 > (-1{,}5)^3$

76 **a)** Le graphique correct est le ①. Sur le graphique ②, la courbe tracée n'est pas correcte et sur le graphique ③, la droite tracée ne permet pas de résoudre l'équation.
b) La solution est $x = \frac{1}{2}$.

77 **a)** Le graphique qui permet de résoudre l'inéquation est le 1.
b) $[2{,}25\,;+\infty[$.

S'entraîner

79 **a)** On a arrondi au centième lorsque besoin.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0	0,71	1	1,22	1,41	1,58

La valeur de x à la fin de l'algorithme est 2,5.

b) Pour un nombre réel strictement positif *a* donné, la valeur de x obtenue à la fin est le plus petit nombre décimal, avec pour unique chiffre après la virgule 0 ou 5, tel que $\sqrt{x} > a$.

80 **a)**

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	8	27	64	125

La valeur de x à la fin de l'algorithme est 5.

b) Pour un nombre réel strictement positif *a* donné, la valeur obtenue est le plus petit nombre entier x tel que $x^3 > a$.

81 **a)** Avec $a = 2$, $a^2 = 4$ et $a + 1 = 3$. En suivant la méthode d'Elliot, on obtient :

$$a + a^2 + (a + 1) = 2 + 4 + 3 = 9,$$

qui est bien le carré de 3.

Avec $a = 5$, $a^2 = 25$ et $a + 1 = 6$. En suivant la méthode d'Elliot, on obtient :

$$a + a^2 + (a + 1) = 5 + 25 + 6 = 36,$$

qui est bien le carré de 6.

Cette affirmation semble donc vraie.

b) Le nombre entier suivant *a* est $a + 1$.

$(a + 1)^2 = (a + 1)(a + 1) = a^2 + a + a + 1 = a^2 + 2a + 1$.

La méthode d'Elliot donne :

$$a + a^2 + a + 1 = a^2 + 2a + 1,$$

et donc son affirmation est bien vraie.

82 **1.** Il semble que la représentation graphique de *f* est toujours au-dessus de celle de *g* et que les deux courbes ont un point commun d'abscisse -2.

2. a) $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2) = x^2 + 2x + 2x + 4$
$= x^2 + 4x + 4$

$f(x) - g(x) = x^2 - (-4x - 4) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

b) D'après l'expression précédente, $f(x) - g(x)$ est toujours positif, donc $f(x)$ est toujours supérieur à $g(x)$, avec $f(x) = g(x)$ pour $x = -2$. La conjecture émise à la question 1. est ainsi confirmée.

83 **a)** $f(2) = 11$ et $f(1) = 8$ donc $f(2) - f(1) = 3$.

b) $f(5{,}5) = 21{,}5$ et $f(4{,}5) = 18{,}5$

donc $f(5{,}5) - f(4{,}5) = 3$.

c) $f(x + 1) = 3(x + 1) + 5 = 3x + 8$

donc $f(x + 1) - f(x) = 3x + 8 - (3x + 5) = 3$.

84 **1. b)** Il semble que si $k \neq 0$, il y a deux points d'intersection et si $k = 0$, il y a un unique point d'intersection.

2. a) Pour tout nombre réel x,

$$x^2 - kx = x(x - k).$$

b) $x^2 = kx$ équivaut à $x^2 - kx = 0$, soit $x(x - k) = 0$.

Ainsi, si $k \neq 0$, il y a deux solutions, 0 et *k*, et donc deux points d'intersection, mais si $k = 0$, alors 0 est l'unique solution et il n'y a qu'un point d'intersection.

85 D'après l'allure du tremplin, l'extrémité de gauche correspond à la hauteur 2 m et l'extrémité de droite à la hauteur 0,5 m.

Comme la courbe a la forme de la parabole représentative de la fonction carré, l'abscisse de l'extrémité de gauche est l'antécédent négatif de 2, c'est-à-dire $-\sqrt{2}$ et donc environ $-1{,}4$, et l'abscisse de l'extrémité de droite est l'antécédent positif de 0,5, c'est-à-dire $\sqrt{0{,}5}$ et donc environ 0,7.

$0{,}7 - (1{,}4) = 2{,}1$ donc la largeur ℓ du tremplin est environ 2,1 m.

86 L'écran ne présente que des abscisses positives. Or, si on prend par exemple $x = -0{,}5$, on obtient $x^3 = -0{,}125$, et donc $x^3 > x$. Par conséquent, l'affirmation de Mathis est fausse sur l'intervalle $]-1\,;0[$.

87 **a)** On doit résoudre l'équation $V = 5$, qui équivaut à $\frac{4}{3}\pi r^3 = 5$, c'est-à-dire à $r^3 = 5 \times \frac{3}{4\pi}$ soit $r^3 = \frac{15}{4\pi}$.

b) $\frac{15}{4\pi} \approx 1{,}194$

c) On lit que $1 < r < 1{,}1$.

d) On lit que $1{,}06 < r < 1{,}07$.

88 **a)** La vitesse de Cassandre Beaugrand est $v = \frac{1}{t}$.

Elle est exprimée en $\text{km} \cdot \text{min}^{-1}$.

b) Pour un temps de parcours de 2 min, la vitesse est donc $v = 0{,}5\ \text{km} \cdot \text{min}^{-1}$.

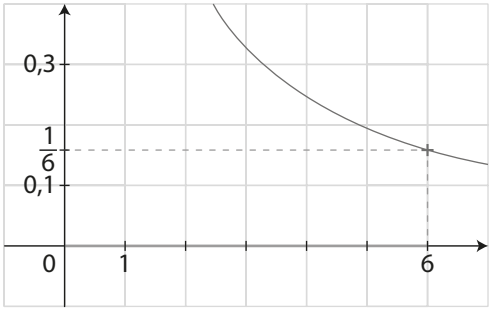
c) $60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ correspond à $1\ \text{km} \cdot \text{min}^{-1}$. Il faut donc que le temps de parcours du kilomètre soit de 1 min.

89 **1.** $y = \dfrac{60}{x}$

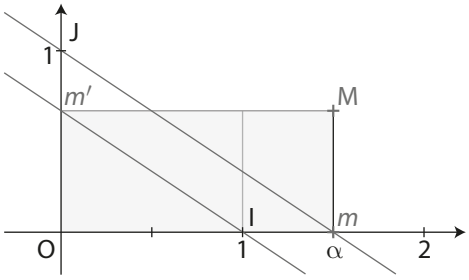
2. On doit résoudre l'équation $24 = \dfrac{60}{x}$ qui équivaut à $x = \dfrac{60}{24}$ soit $x = 2{,}5$.

3. a) La largeur x doit vérifier $\dfrac{60}{x} \geqslant 10$ qui équivaut $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{10}{60}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{6}$.

b) Graphiquement, on obtient $0 < x < 6$.



90



On note y l'ordonnée du point M.

D'après le théorème de Thalès dans le triangle O*m*J : $\dfrac{\text{O}m}{\text{OI}} = \dfrac{\text{OJ}}{\text{O}m'}$ c'est-à-dire $\dfrac{\alpha}{1} = \dfrac{1}{y}$ soit $y = \dfrac{1}{\alpha}$ car α est non nul. Les coordonnées du point M sont donc $\left(\alpha\,;\dfrac{1}{\alpha}\right)$. Le point M décrit donc la courbe représentative de la fonction inverse.

91 **1. a)** Graphiquement, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes sont $(1\,;1)$ et $(-1\,;-1)$.

b) Pour $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x} = x$ équivaut à $x^2 = 1$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -1$. On retrouve bien ainsi les résultats lus graphiquement.

2. Graphiquement, la courbe de la fonction inverse est au-dessus de la droite sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]0\,;1[$ et au-dessous sur $]-1\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

92 **a)** $v = \dfrac{60}{t}$

b) 1 h 15 min = 1,25 h et 1 h 30 = 1,5 h.

c) Sur la courbe de la fonction inverse, on lit que si t est tel que $1{,}25 < t < 1{,}5$, alors $\dfrac{1}{1{,}5} < \dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{1{,}25}$.

En multipliant chaque membre par 60, il vient $40 < v < 48$. Donc la vitesse de Lucas est comprise entre 40 et 48 km · h^{-1}.

93 **1.** $2 \curvearrowright 2^2 = 4 \curvearrowright \dfrac{1}{4}$

2. a) Pour un nombre $x \neq 0$ saisi en entrée, le programme de calcul renvoie $\dfrac{1}{x^2}$.

On cherche donc un nombre $x \neq 0$ tel que $\dfrac{1}{x^2} = x$, c'est-à-dire $x^3 = 1$ (avec l'égalité des produits en croix).

b) L'équation $x^3 = 1$ a pour unique solution $x = 1$.

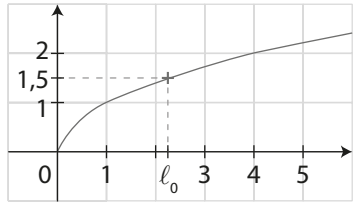
Donc Ambre doit saisir le nombre 1 en entrée.

94 **1.** $p(67) = 2\sqrt{67}$ donc $p(64) \approx 16{,}4$.

Le pendule de Foucault avait une période d'environ 16,4 s.

2. a) On doit résoudre l'équation $p(\ell) = 3$, c'est-à-dire $2\sqrt{\ell} = 3$, qui équivaut bien à $\sqrt{\ell} = 1{,}5$.

b)



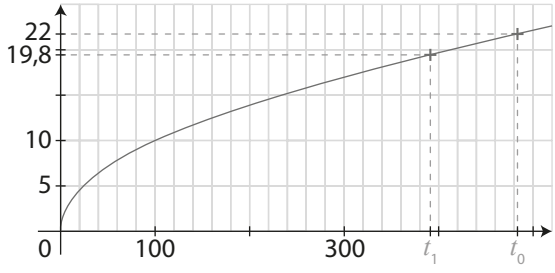
Graphiquement, on obtient $\ell \approx 2{,}25$. En fait, $\ell = 2{,}25$ car $1{,}5^2 = 2{,}25$.

La longueur d'un pendule dont la période est 3 s est donc 2,25 m.

95 **1.** $f(100) = 10\sqrt{100} = 100$

$f(400) = 10\sqrt{400} = 200$

2. a) On doit résoudre l'équation $f(t) = 220$, c'est-à-dire $10\sqrt{t} = 220$, qui équivaut bien à $\sqrt{t} = 22$.



b) Graphiquement, on lit que la solution de l'équation est $t_0 \approx 480$. Pour obtenir la note La_2, il faut donc une tension d'environ 480 newtons.

3. On doit résoudre l'inéquation $\sqrt{t} \geqslant 19{,}8$. Graphiquement, on lit qu'il faut une tension supérieure à t_1 newtons avec $t_1 \approx 390$.

96 **a)** Il semble que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ et au-dessus sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

b) D'après l'écran de calcul formel, pour tout $x>0$,

$$x^3-\sqrt{x}=\frac{x(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x^3+\sqrt{x}}.$$

Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $x\geqslant 0$,

$x^4+x^3+x^2+x+1\geqslant 0$ et $x^3+\sqrt{x}>0$.

Donc $x^3-\sqrt{x}$ est du signe de $x-1$, c'est-à-dire $x^3-\sqrt{x}\geqslant 0$ si $x\geqslant 1$ et $x^3-\sqrt{x}\leqslant 0$ si $0<x\leqslant 1$.

c) Le signe de la différence $x^3-\sqrt{x}$ donne la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Ainsi, $\mathscr{C}$ est bien au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ et au-dessus sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

97 **a)** L'implication est vraie.

L'implication réciproque est « Si $x^2=4$, alors $x=2$ ». Elle est fausse. En effet, si $x^2=4$, alors $x=2$ ou $x=-2$.

b) L'implication est vraie.

L'implication réciproque est « Si $x^3=125$, alors $x=5$ ». Elle est vraie.

c) L'implication est fausse. En effet, si $x=0{,}5$, alors $\frac{1}{x}=2$.

L'implication réciproque est « Si $\frac{1}{x}=5$, alors $x=0{,}5$ ».

Elle est fausse. En effet, si $\frac{1}{x}=5$, alors $x=\frac{1}{5}=0{,}2$.

d) L'implication est vraie.

L'implication réciproque est « Si $\sqrt{x}=3$, alors $x=9$ ».

Elle est vraie. En effet, si $\sqrt{x}=3$, alors $x=3^2=9$.

98 **1. a) Vrai**. En effet, $x^2=5$ équivaut à $x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$.

b) Faux. En effet, pour $x=1$, $x^2=1$ et $1\neq 5$.

2. a) Vrai. En effet, pour $x=1$, $\sqrt{x}=1$ et $1\geqslant 0$.

b) Faux. En effet, pour $x=0$, $\sqrt{x}=0$ et 0 n'est pas strictement positif.

3. a) Faux. En effet, ce nombre devrait vérifier $0\times x=1$.

b) Faux. En effet, pour $x=1$, $\frac{1}{x}=1$ et $1\neq 0$.

Organiser son raisonnement

99 x est un nombre réel strictement positif. Si on augmente x du quart de sa valeur, on obtient $x+\frac{x}{4}$, c'est-à-dire $\frac{5x}{4}$. L'inverse de ce nombre est $\frac{4}{5}x$, qui est égal à $\frac{1}{x}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{x}$. Donc l'inverse de x diminue d'un cinquième de sa valeur.

100 It's true. That number is 1, as $1^2=1$, $1^3=1$, $\frac{1}{1}=1$ and $\sqrt{1}=1$.

101 Pour trouver le rayon *r*, on doit résoudre l'équation $2\,640\times\frac{4}{3}\pi r^3=1840$, qui équivaut à :

$$r^3=\frac{3\times 1840}{2\,640\times 4\times\pi},$$

c'est-à-dire $r^3\approx 0{,}167$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $r\approx 0{,}55$.

Le rayon d'une sphère est donc environ 55 cm.

102 On doit résoudre l'équation $\frac{1}{0{,}5}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{2{,}5}$,

qui équivaut à $\frac{1}{r_1}=\frac{1}{0{,}5}-\frac{1}{2{,}5}$ c'est-à-dire $\frac{1}{r_1}=1{,}6$.

La solution de cette équation est $r_1=0{,}625$.

La valeur de l'autre résistance est donc 0,625 ohm.

103 **a)** $v=870$ donc $870\sqrt{\frac{h}{6}}=870$ c'est-à-dire $\sqrt{\frac{h}{6}}=1$ soit $\frac{h}{6}=1$. Ainsi $h=6$.

La hauteur d'eau est alors de 6 km.

b) $v=50$ donc $870\sqrt{\frac{h}{6}}=50$

c'est-à-dire $\sqrt{\frac{h}{6}}=\frac{50}{870}$, soit $\frac{h}{6}=\frac{25}{7\,569}$.

Ainsi, $h=\frac{50}{2\,523}$.

La hauteur d'eau est alors d'environ 0,0198 km, soit environ 20 m.

104 On doit résoudre l'équation $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{72}$ où *n* est un nombre entier naturel non réel.

Cette équation équivaut à $\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{72}$,

c'est-à-dire $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{72}$ soit $n(n+1) = 72$.

Puisque n est un nombre entier naturel, la seule solution est $n = 8$. Les entiers consécutifs 8 et 9 vérifient donc bien cette propriété.

105 L'inverse de la moyenne de a et b est $m = \frac{2}{a+b}$.

La moyenne des inverses de a et b est $n = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$, c'est-à-dire $n = \frac{b+a}{2ab}$.

Ainsi, $m - n = \frac{2}{a+b} - \frac{b+a}{2ab}$

$$m - n = \frac{4ab}{2ab(a+b)} - \frac{(b+a)(a+b)}{2ab(a+b)}$$

$$m - n = \frac{4ab - (b+a)(a+b)}{2ab(a+b)}$$

$$m - n = \frac{4ab - (ab + b^2 + a^2 + ba)}{2ab(a+b)}$$

$$m - n = \frac{4ab - ab - b^2 - a^2 - ba}{2ab(a+b)}$$

$$m - n = \frac{-a^2 + 2ab - b^2}{2ab(a+b)}$$

$$m - n = \frac{-(a^2 - 2ab + b^2)}{2ab(a+b)}$$

$$m - n = \frac{-(a-b)^2}{2ab(a+b)}$$

$a > 0$, $b > 0$ donc $2ab(a+b) > 0$.

D'autre part, $(a-b)^2$ est positif ou nul et donc $-(a-b)^2$ est négatif ou nul.

Ainsi, $m - n \leqslant 0$ et donc $m \leqslant n$.

106 D est un point du cercle de diamètre [AC] donc le triangle ACD est rectangle en D. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AD^2 + DC^2$, c'est-à-dire $(1+x)^2 = AD^2 + DC^2$.

[BD] est perpendiculaire à [AB] donc les triangles ABD et CBD sont rectangles en B. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, $AD^2 = AB^2 + BD^2$, c'est-à-dire $AD^2 = 1 + BD^2$, et $DC^2 = BC^2 + BD^2$, c'est-à-dire $DC^2 = x^2 + BD^2$.

On en déduit que $(1+x)^2 = 1 + BD^2 + x^2 + BD^2$, ce qui équivaut à $1 + 2x + x^2 = 1 + x^2 + 2BD^2$, c'est-à-dire $BD^2 = x$ et donc $BD = \sqrt{x}$.

107 On calcule les premiers termes ainsi obtenus :

- $f(2) = \frac{1}{2}$
- $f(1+f(2)) = f\left(1+\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$
- $f(1+f(1+f(2))) = f\left(1+\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5}$
- Voici les valeurs obtenues avec le tableur :

	A
1	0,5
2	0,666666667
3	0,6
4	0,625
5	0,615384615
6	0,619047619
7	0,617647059
8	0,618181818
9	0,617977528
10	0,618055556
11	0,618025751
12	0,618037135
13	0,618032787
14	0,618034448
15	0,618033813
16	0,618034056

Il semble que les valeurs se rapprochent d'un nombre environ égal à 0,618.

Remarque : ce nombre est l'inverse du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

108 **1. C.** En effet, $x^2 = 2$ équivaut à $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

2. C. En effet, lorsque $k > 0$, $x^2 = k$ équivaut à $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$.

3. D. En effet, en résolvant graphiquement cette équation, on obtient :

$$]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[.$$

4. A. En effet, $x^3 = -1$ équivaut à $x = -1$.

5. B. En effet, on remarque $(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$ puis on résout l'inéquation graphiquement.

6. B. En effet, $\frac{1}{\pi}$ est positif et $\frac{1}{-\pi}$ négatif.

7. C. En effet, $\frac{1}{x} = k$ (avec $k \neq 0$) équivaut à $1 = xk$ soit $x = \frac{1}{k}$.

8. C. En effet, on peut vérifier ce résultat graphiquement.

9. D. En effet, $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. C. En effet, on peut vérifier ce résultat graphiquement.

Exploiter ses compétences

109 D'après le **Doc. 2**, $P = \frac{1}{V}$. D'après le **Doc. 1**, $0{,}5 \leqslant V \leqslant 5$. Donc, en utilisant la courbe de la fonction inverse, $\frac{1}{5} \leqslant V \leqslant \frac{1}{0{,}5}$. La pression maximum dans ce piston est donc de 2 bars.

110 D'après le **Doc. 2**, la distance d parcourue, en dm, est donnée en fonction du temps t, en s, par la formule $d(t) = t^3$.
La thermosphère va de 85 km d'altitude à 400 km c'est-à-dire de 850 000 dm à 4 000 000 dm.
On cherche donc les valeurs de t telles que $850\,000 \leqslant t^3 \leqslant 4\,000\,000$.
En s'aidant de la représentation graphique de la fonction cube et de la calculatrice, on obtient $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ avec $t_0 \approx 44$ s et $t_1 \approx 159$ s.
$159 \text{ s} - 44 \text{ s} = 115 \text{ s} = 1 \text{ min } 55 \text{ s}$
La navette mettra environ 1 min 55 s à traverser la thermosphère.

111 D'après les informations fournies, on doit résoudre l'équation $1{,}85 - 0{,}5 \times 9{,}809\, t^2 = 0$, qui équivaut à $0{,}5 \times 9{,}809\, t^2 = 1{,}85$, c'est-à-dire $t^2 = \frac{1{,}85}{0{,}5 \times 9{,}809}$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $t \approx 0{,}61$. Ainsi, le temps de chute de la balle est environ 0,61 seconde.

112 Voici la feuille de calcul obtenue sur le conseil de Maxime.

	A	B	C
1	**Durée *x* (en h)**	**Épaisseur *y* (en mm)**	***y²/x***
2	0	0	
3	0,5	1,2	2,88
4	1	1,7	2,89
5	1,5	2,1	2,94
6	2	2,4	2,88
7	2,5	2,7	2,916
8	3	2,9	2,803333

On observe que dans chaque cas, $\frac{y^2}{x}$ est proche de 3.
On peut donc modéliser la situation par la relation $y^2 = 3x$, c'est-à-dire $y = \sqrt{3x}$. Selon le modèle, l'épaisseur blanchie au bout de 5 h est $\sqrt{15}$ mm, soit environ 3,9 mm.

9 Fonctions : courbes représentatives

Découvrir

1 Lectures graphiques

1 **a)** Le vol a duré 75 min.
b) À Toulouse : 20 °C
À Paris : 10 °C

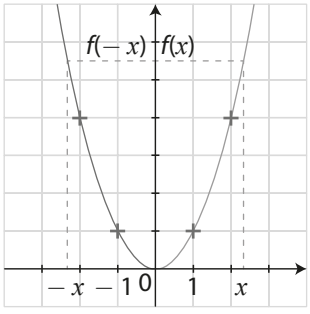
2 $\mathcal{S} = \{10 ; 60\}$
La température extérieure était de – 30° C après 10 min ou 60 min de vol.

3 $\mathcal{S} = [5 ; 65]$
La température extérieure était négative entre la 5e et la 65e minutes de vol.

2 Parité d'une fonction

1 **a)** $\mathcal{A}(x) = x^2$
b) $\mathcal{V}(x) = x^3$

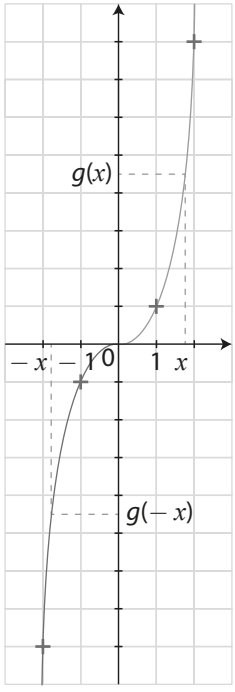
2 **a)** La courbe de $\mathcal{A}$ est représentée en gris.



b) La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées permet à partir de cette courbe d'obtenir celle de la fonction carré *f*.
La courbe de *f* est constituée des tracés en gris clair et en gris foncé ci-dessus.

c) Pour tout nombre réel x, les points de coordonnées $(x ; f(x))$ et $(-x ; f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Donc ces points ont la même ordonnée.
Ainsi, pour tout nombre réel x, $f(-x) = f(x)$.
Vérification algébrique :
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

3 **a)** La courbe de $\mathcal{V}$ est tracée en gris clair.



b) La symétrie par rapport à l'origine du repère permet à partir de cette courbe d'obtenir celle de la fonction cube *g*.
La courbe de *g* est constituée des tracés en gris clair et en gris foncé ci-dessus.
c) Pour tout nombre réel x, les points de coordonnées $(x ; g(x))$ et $(-x ; g(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
Donc ces points ont des ordonnées opposées.
Ainsi, pour tout nombre réel x, $g(-x) = -g(x)$.
Vérification algébrique :
$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Acquérir des automatismes

3 **a)** L'ordonnée de M est :

$$f(1) = \sqrt{1} - 1^2 + 2 = 2.$$

b) $f(2) = \sqrt{2} - 2^2 + 2 = \sqrt{2} - 2$ et $\sqrt{2} - 2 \neq -0{,}5$ donc le point N n'appartient pas à la courbe.

4 **a)** Les solutions sont les nombres -1 et 2.

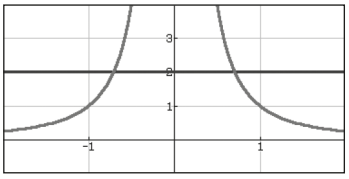
b) Les solutions sont les nombres $-\frac{1}{2}$ et 1.

c) La solution est le nombre 0.

d) Les solutions sont les nombres x_0 et x_1 tels que $x_0 \approx -0{,}2$ et $x_1 \approx 0{,}3$.

7 **a)** L'équation a deux solutions :

$$x_0 \approx -0{,}7 \text{ et } x_1 \approx 0{,}7$$

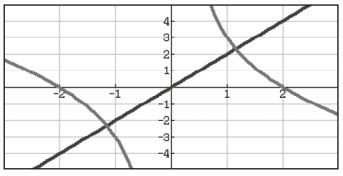


b) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{2} = 2$

On vérifie de même que $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$.

8 **a)** L'équation a deux solutions :

$$x_0 \approx -1{,}1 \text{ et } x_1 \approx 1{,}1.$$



b) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $2x = \frac{4}{x} - x$ équivaut à $3x = \frac{4}{x}$ c'est-à-dire $3x^2 = 4$ (égalité des produits en croix) soit $x^2 = \frac{4}{3}$.

Ainsi, $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ et $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ sont les deux solutions de cette équation.

11 **a)** Les solutions sont les nombres de l'intervalle $[-2\,;\,1]$.

b) Les solutions sont les nombres de l'ensemble $[-3\,;-2[\,\cup\,]1\,;\,3]$.

12 **a)** Pour tout nombre réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -(-x)^2 + 2 = -x^2 + 2$.

b) Pour tout nombre réel x, $f(-x) = f(x)$.

Donc la fonction f est paire.

c) La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

13 Kim a tort, l'ensemble de définition est $D = [-2\,;\,3]$.

14 Le nombre 3 admet deux images 0 et 2 or tout nombre de l'intervalle de définition d'une fonction admet une unique image par celle-ci.

15 $g(0) = (1-0)(2+0) = 2$

Ainsi, il s'agit de l'écran ①.

16 **1. a)** $f(-5) = 2$

b) $f(2) = 2$

c) $f(-1) = -4$

d) $f(6) = 3$

2. a) -3 admet deux antécédents par f : -2 et 0.

b) 2 admet deux antécédents par f : -5 et 2.

c) 4 n'admet pas d'antécédent par f.

17 **a)** • $f(-5) = 1$

• $f(3) = 4$

• $f(-1) = 4$

• $f(1) = 3$

• $f(4) = 2$

b) $f(2) \approx 3{,}5$

c) Le nombre d'antécédents de

• 4 est deux

• 2 est trois

• 0 est trois

• -1 est deux

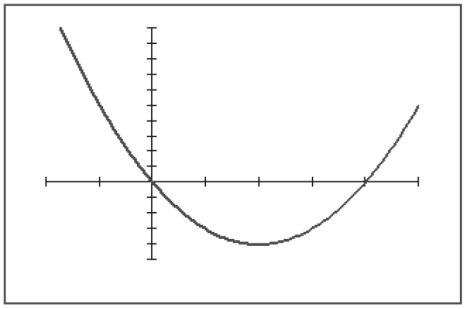
• -2 est un

• 3 est quatre

18 **a)**

X	Y1
-2	12
-1.8	10.44
-1.6	8.96
-1.4	7.56
-1.2	6.24
-1	5
-0.8	3.84
-0.6	2.76
-0.4	1.76
-0.2	0.84
0	0

b) Fenêtre : $-2 \leqslant x \leqslant 5$, pas 1 et $-5 \leqslant y \leqslant 10$, pas 1.



19 Valentin n'a tracé la courbe que sur l'intervalle $[-1 ; 2]$. En la traçant sur l'intervalle $[-4 ; 6]$, on constate que -1 a deux antécédents par *k*, -3 et 1.

20 **a)** Une fenêtre adéquate peut être $-5 \leqslant x \leqslant 2$, pas 1 et $-2 \leqslant y \leqslant 30$, pas 2.
b)

x	-5	$-1{,}8$	$-0{,}9$	1,7	10,4
$f(x)$	-1	9,368	2,321	18,363	1 664,7

21 **a)** $A(1{,}2 ; \mathbf{-0{,}6})$
b) $B\left(-\frac{1}{4} ; -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)$
c) $C(\mathbf{13} ; 23)$

22 L'affirmation correcte est (**2**).
En effet, $\frac{1}{0{,}1} = 10$.

23 Les deux ont raison puisque
$$9^2 = 81 \text{ et } (-9)^2 = 81.$$

24 $M(0 ; 0)$
$N(1 ; -3)$
$P(2 ; -2)$
$Q(-1 ; 7)$
$R(-2 ; 18)$

25 **a)** $M(2 ; 3) \in \mathscr{C}$
b) $N(0 ; -1) \in \mathscr{C}$ et $P(5 ; -1) \in \mathscr{C}$

26 $f(1{,}425\,50) = 5{,}423\,35$ et ce nombre est différent de $5{,}423\,40$.
Ainsi l'affirmation est fausse.

27 • $f(1) = 1\sqrt{1} = 1$ donc $M(1 ; 1)$ appartient à la courbe représentative de *f*.
• $f(0{,}5) = 0{,}5\sqrt{0{,}5}$ et $f(0{,}5) \approx 0{,}393\,553$
Donc le point N n'appartient pas à la courbe représentative de *f*.

28 **a)** On peut affirmer que les points $0(0 ; 0)$, $A(1 ; 1)$ et $D(4 ; 2)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$.
b) $f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(2) = \sqrt{2}$ et $f(2) \approx 1{,}4$
$f(3) = \sqrt{3}$ et $f(3) \approx 1{,}7$
$f(4) = \sqrt{4} = 2$
$f(2{,}25) = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$
Donc on peut ajouter $E(2{,}25 ; 1{,}5)$ aux points appartenant à $\mathscr{C}$.

29 • $x \in \mathbb{R}^*$ donc $A(0 ; 5) \notin \mathscr{C}$.
• $f(-2) = -1{,}5$ donc $B(-2 ; -1{,}5) \in \mathscr{C}$.
• $f(1) = 0$ donc $C(1 ; 0) \in \mathscr{C}$.
• $f(4) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ donc $D\left(4 ; \frac{15}{4}\right) \in \mathscr{C}$.
• $f(-5) = -5 - \frac{1}{-5} = -4{,}8$
donc $E(-5 ; -4{,}8) \in \mathscr{C}$.
• $f(9) = 9 - \frac{1}{9} = \frac{80}{9}$ et $f(9) \neq 9$
donc $F(9 ; 9) \notin \mathscr{C}$.

30 **a)** Oui **b)** Non **c)** Oui

31 Lily a tort, l'ensemble des solutions est
$$[-3 ; -1] \cup [2 ; 4].$$

32 **1.** $\mathscr{S} = \{3\}$
2. a) L'équation admet cinq solutions.
b) L'équation admet deux solutions.

33 **a)** $\mathscr{S} = \left[-1 ; \frac{1}{2}\right]$
b) $\mathscr{S} =]-2 ; 1[$
c) $\mathscr{S} = [-3 ; 2]$

34 **a)** $\mathscr{S} = [-2{,}5 ; -1] \cup [1{,}5 ; 4]$
b) $\mathscr{S} =]-0{,}5 ; 1[$
c) $\mathscr{S} =]2{,}5 ; 4]$

35 Jad a tort car les courbes ne se coupent qu'une seule fois.

36 Il s'agit de l'intervalle $]-1 ; 2[$

37 **a)** $\mathscr{S} = [-3 ; -2] \cup [1 ; 3]$
b) $\mathscr{S} = [-3 ; -2[\cup]1 ; 3]$
c) $\mathscr{S} = [-2 ; 1]$

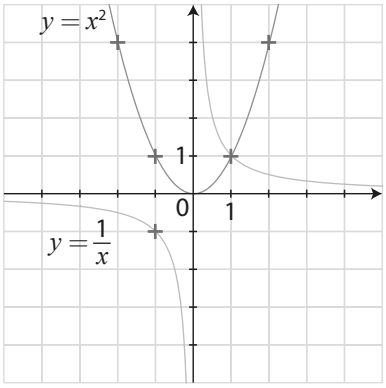
38 **a)** • $f(x) \geqslant 0$ lorsque x appartient à l'ensemble $[-4 ; -1] \cup [3 ; 6]$.

$f(x) \leqslant 0$ lorsque x appartient à l'ensemble $[-1\,;3] \cup [6\,;8]$.

• $g(x) \geqslant 0$ lorsque x appartient à l'intervalle $[-3\,;3]$.
$g(x) \leqslant 0$ lorsque x appartient à l'ensemble $[-4\,;-3] \cup [3\,;8]$.

b) $\mathcal{S} = [-4\,;-2] \cup [3\,;7]$.

39 **a)**



b) $\mathcal{S} =]-\infty\,;0[\cup [1\,;+\infty[$

40 **a)** 12 V donc **(3)**
b) 0,15 A donc **(2)**

41 **a)** La distance totale parcourue est 140 km pour une durée de course de 3 h 40 min.
b) Il a parcouru 50 km en une heure. La vitesse moyenne est donc de $50\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
c) Il a dépassé les 80 km parcourus après 2 h 20 min de course.

42 **a)** $\mathcal{S} = \{2\,;13\,;20\}$
En ce lieu, la température était de 2 °C à 2 h, 13 h et 20 h.
b) $\mathcal{S} = [0\,;6] \cup [10\,;24]$
En ce lieu, la température était supérieure ou égale à $-8°\,\text{C}$ avant 6 h et après 10 h.

43 Elisa a tort car l'axe de symétrie n'est pas l'axe des ordonnées.

44 Ahmed a tort car le centre de symétrie n'est pas l'origine du repère.

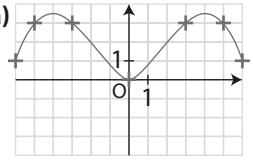
45 Laly a raison car l'intervalle n'est pas symétrique par rapport à 0.

46 ① et ③

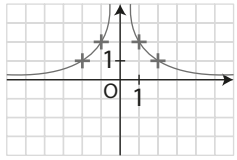
47 ② et ③

48 **a)** $\mathscr{C}_1$ **b)** $\mathscr{C}_2$ **c)** $\mathscr{C}_3$

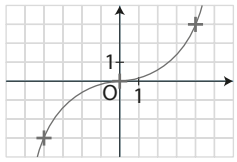
49 **a)**



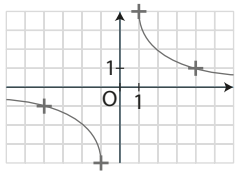
b)



50 **a)**



b)



51 Tristan a raison car
$f(-2) \neq f(2)$ et $f(-2) \neq -f(2)$.

52 Owen a tort puisque
$f(-1) = (-1)^2 - 0{,}1 \times (-1) - 0{,}9$
$f(-1) = 0{,}2$ et $f(1) = 1^2 - 0{,}1 \times 1 - 0{,}9$
$f(1) = 0$
$f(-1) \neq f(1)$ donc f n'est pas paire.

53 h est une fonction ni paire ni impaire puisque son ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.
• k est une fonction paire. En effet, pour tout nombre x de $\mathbb{R}^*$,
• $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}^*$
• $k(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = k(x)$
• f est une fonction ni paire ni impaire. En effet, $f(1) = 5$ et $f(-1) = -1$
Ainsi, $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$.
• g est une fonction impaire. En effet, pour tout nombre u de $\mathbb{R}$
• $-u$ appartient aussi à $\mathbb{R}$,
• $g(-u) = (-u)^3 - 2(-u)$
$g(-u) = -u^3 + 2u$
$g(-u) = -(u^3 - 2u)$
$g(-u) = -g(u)$

54 **a)** f est une fonction paire. En effet, pour tout nombre x de $\mathbb{R}$,
• $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$,
• $f(-x) = 3(-x)^2 - 10 = 3x^2 - 10 = f(x)$
b) f est une fonction ni paire ni impaire. En effet, $f(-1) = 8$ et $f(1) = 6$
donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$.
c) f est une fonction impaire. En effet, pour tout nombre x de $\mathbb{R}^*$,
• $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}^*$
• $f(-x) = \dfrac{4}{(-x)^3} = -\dfrac{4}{x^3} = -f(x)$

d) f est une fonction paire. En effet, pour tout nombre x de $[-1\,;1]$:

- $-x$ appartient aussi à $[-1\,;1]$.
- $f(-x) = \dfrac{3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{3}{x^2 - 4} = f(x)$.

55 **1.** B **2.** B **3.** C **4.** A **5.** C

56 **1.** C, D **2.** A, C, D **3.** C

57 **1. Faux.** En effet,

$$f(50) = \frac{1}{2}(3 \times 50 + 1)^2 = 11400{,}5.$$

Or, $11400{,}5 \neq 11401$, donc $M \notin \mathscr{C}$.

2. Vrai. En effet, pour tout nombre réel x de $[-4\ ;\ 4]$, $-x$ appartient à $[-4\ ;\ 4]$

et $g(-x) = -(-x)^3 + 3(-x) = x^3 - 3x = -g(x)$.

Donc g est impaire.

3. Faux. En effet, on peut avoir $h(-1) = 2$ et $h(1) = 3$.

58 **a)** $f(2) = 1$

b) -1 admet deux antécédents par f : -2 et 4.

59 **a)** $3^2 + 1{,}5 = 10{,}5$

Donc $M(3\,;10{,}5) \in \mathscr{C}$.

b) On cherche, s'ils existent les nombres x tels que $x^2 + 1{,}5 = 5{,}5$ c'est-à-dire $x^2 = 4$.

Ainsi, $x = 2$ ou $x = -2$.

Les abscisses des points appartenant à la courbe $\mathscr{C}$ d'ordonnée 5,5 sont -2 et 2.

60 **a)** $\mathscr{S} = \{-4\,;0\,;4\}$

b) $\mathscr{S} = [-4\,;0] \cup [3\,;4]$

61 **1.** f semble paire car sa courbe semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. a) L'intervalle $[-2\,;2]$ est bien symétrique par rapport à 0. En effet, pour tout nombre x de $[-2\,;2]$, $-x$ appartient aussi à $[-2\,;2]$.

b) Pour tout nombre x de $[-2\,;2]$,

$$f(-x) = -\frac{1}{2}(-x)^4 + (-x)^2 + 2$$

$$f(-x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 2$$

c) Pour tout nombre x de $[-2\,;2]$, $f(-x) = f(x)$.

d) On en déduit que f est paire.

S'entraîner

63 **a)**

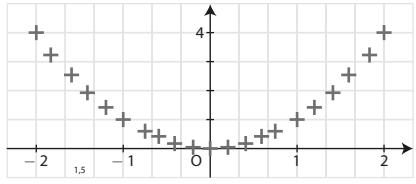
k	0	1	2	3	4	5
x	-2	$-1{,}8$	$-1{,}6$	$-1{,}4$	$-1{,}2$	-1
y	4	3,24	2,56	1,96	1,44	1

k	6	7	8	9	10
x	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0
y	0,64	0,36	0,16	0,04	0

k	11	12	13	14	15
x	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	0,04	0,16	0,36	0,64	1

k	16	17	18	19	20
x	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	1,44	1,96	2,56	3,24	4

b)



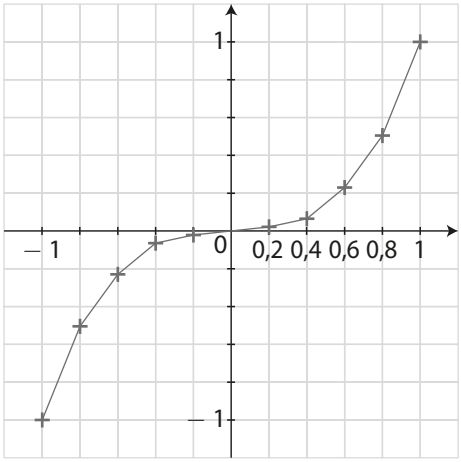
c) Les points placés appartiennent à la courbe d'équation $y = x^2$.

64 **a)**

h	0	1	2	3	4
u	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0
v	$-0{,}512$	$-0{,}216$	$-0\ 064$	$-0{,}008$	0
x	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0
y	$-0{,}512$	$-0{,}216$	$-0{,}064$	$-0{,}008$	0

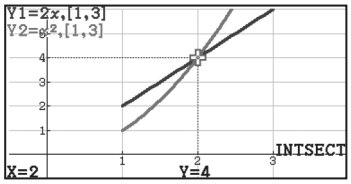
k	5	6	7	8	9
u	0,2	0,4	0,6	0,8	1
v	0,008	0,064	0,216	0,512	1
x	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	0,008	0,064	0,216	0,512	1

b)



c) La figure tracée n'est pas celle de la courbe représentative de la fonction cube puisque les points sont reliés par des segments de droites.

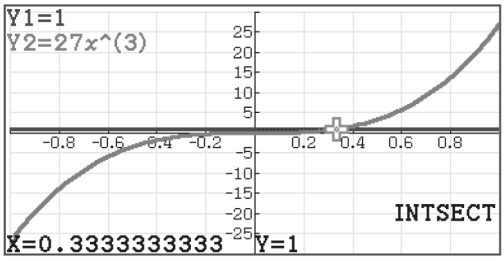
66 **a)**



Il semble que la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est $x = 2$.

b) $x^2 = 2x$ équivaut à $x^2 - 2x = 0$ c'est-à-dire $x(x-2) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 2$. Or, $0 \notin [1\,;3]$ et $2 \in [1\,;3]$, donc la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est 2.

67 **a)**



La solution de l'équation $f(x) = 1$ est $x_0 \approx 0{,}33$.

b) $27x^3 = 1$ équivaut à $x^3 = \dfrac{1}{27}$ soit $x^3 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$.

Ainsi $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

68 **a)** $\text{OM} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$

$\text{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $\text{M}(x\,;y) \in \mathscr{C}$ équivaut à $\text{OM} = 1$ c'est-à-dire $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Or, $\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$ et $1 \geqslant 0$, donc $\text{M}(x\,;y) \in \mathscr{C}$ équivaut à $x^2 + y^2 = 1$

Ainsi $y^2 = 1 - x^2$; or $x \in [-1\,;1]$, donc $x^2 \in [0\,;1]$ et $1 - x^2 \in [0\,;1]$.

$\text{M}(x\,;y) \in \mathscr{C}$ équivaut à $y = \sqrt{1-x^2}$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$.

Or, $y \geqslant 0$ et l'équation de $\mathscr{C}$ est $y = \sqrt{1-x^2}$.

69 **a)** Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $|x| = x$ et $|y| = y$.

Ainsi, $x + y = 1$ soit $y = 1 - x$

b) • $\text{M}(x\,;y)$ et $\text{M}'(x\,;-y)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Pour tout nombre réel $y, |-y| = |y|$.

$\text{M}(x\,;y) \in \mathscr{C}$ si, et seulement si, $|x| + |y| = 1$ c'est-à-dire $|x| + |-y| = 1$ soit $\text{M}'(x\,;-y) \in \mathscr{C}$.

Donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

• $\text{M}(x\,;y)$ et $\text{M}''(-x\,;y)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

$\text{M}(x\,;y) \in \mathscr{C}$ si, et seulement, $|x| + |y| = 1$ c'est-à-dire $|-x| + |y| = 1$ soit $\text{M}''(-x\,;y) \in \mathscr{C}$.

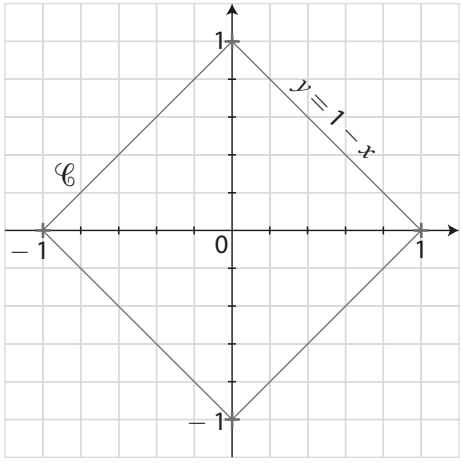
Donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• $\text{M}(x\,;y)$ et $\text{M}'''(-x\,;-y)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

$\text{M}(x\,;y) \in \mathscr{C}$ si, et seulement, $|x| + |y| = 1$ c'est-à-dire $|-x| + |-y| = 1$ soit $\text{M}'''(-x\,;-y) \in \mathscr{C}$.

Donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

• On trace le segment de l'équation $y = 1 - x$ dans le quadrant ① $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ puis on utilise les symétries précédentes.



70 **a)** $\text{N}(-x\,;y)$

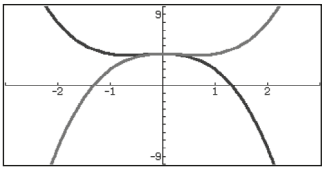
b) $\text{N}(-x\,;y) \in \mathscr{C}$ équivaut à :

$$y = (-x)^3 - (-x)^2 + 4$$

c'est-à-dire $y = -x^3 - x^2 + 4$.

c) Ainsi $M(x\,;y)$ appartient à la courbe d'équation $y=-x^3-x^2+4$.

d)



71 **a)** $\dfrac{4\times 0{,}5}{4\times 0{,}5^2+1}=\dfrac{2}{1+1}=1$ donc $M(0{,}5\,;1)\in\mathscr{C}$.

• $4\times 0{,}5^2=1$ donc $M(0{,}5\,;1)\in\mathscr{C}'$.

• Donc M est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

b) $0(0\,;0)\in\mathscr{C}$ et $0(0\,;0)\in\mathscr{C}'$.

Ainsi l'autre point d'intersection est l'origine du repère.

72 **1. d)** On conjecture que cela se produit pour $x\approx 0{,}6$.

2. a) $A(x\,;x^2)$ et $D\left(x\,;\dfrac{4}{27x}\right)$.

b) Aire de AOC : $\dfrac{1}{2}\times 2\times x^2=x^2$

Aire de DOC : $\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{4}{27x}=\dfrac{4}{27x}$

$x^2=2\times\dfrac{4}{27x}$ c'est-à-dire $x^2=\dfrac{8}{27x}$ équivaut à $x^3=\dfrac{8}{27}$ soit $x^3=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$.

Ainsi, $x=\dfrac{2}{3}$. Donc l'aire de AOC est le double de l'aire de DOC lorsque $x=\dfrac{2}{3}$.

73 **a)** $\mathscr{S}=\{3\,;7\}$

b) Nolwen peut sortir du port entre 0 h et 2 h et entre 8 h et 12 h.

74 **a)** L'entreprise doit vendre entre 250 et environ 475 objets pour réaliser un bénéfice positif.

b) Cette affirmation est vraie. En effet, on remarque que l'écart entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est plus grand lorsque $x=400$ que lorsque $x=450$.

75 **1. a)** Aucune solution

b) Trois solutions

c) Une solution

2. a) $m<-3$ ou $m>2$

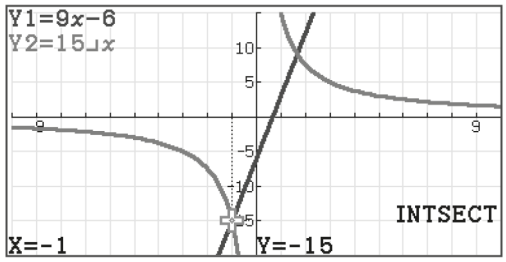
b) $m=-3$ ou $m=2$

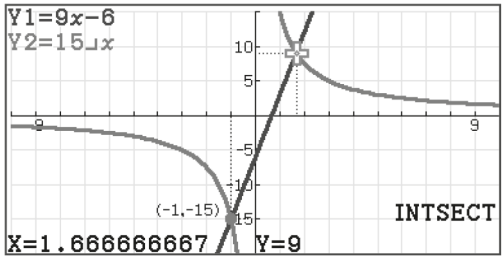
c) $m\in]-3\,;-1[\,\cup\,]1\,;2[$

d) $m\in[-1\,;0[\,\cup\,\{1\}$

e) $m\in[0\,;1[$

76 **a)**





L'équation $f(x)=g(x)$ admet pour solutions -1 et x_0 avec $x_0\approx 1{,}67$.

b) Pour $x\neq 0$, $\dfrac{15}{x}=9x-6$ équivaut à $15=9x^2-6x$ soit $9x^2-6x-15=0$.

D'après l'écran de calcul formel, ceci est équivalent à $3(x+1)(3x-5)=0$.

Ainsi, $x+1=0$ ou $3x-5=0$ soit $x=-1$ ou $x=\dfrac{5}{3}$.

Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont donc bien : -1 et $\dfrac{5}{3}$.

c) La méthode la plus adaptée pour résoudre cette équation est la méthode algébrique puisqu'elle permet d'obtenir des solutions exactes.

77 **1. b)** Il semble que l'ensemble des solutions de cette inéquation soit $]-\infty\,;0[\,\cup\,[x_0\,;+\infty[$ avec $x_0\approx 0{,}68$.

2. a) La valeur de x obtenue en fin d'exécution de l'algorithme est le plus petit nombre supérieur à 0,5 tel que $f(x)\leqslant g(x)$.

b)

```
def Sol(pas):
    x=0.5
    while 1/x > x**2+1:
        x=x+pas
    return x
```

c)

```
>>> Sol(10**-6)
0.682328000005243
```

78 La méthode d'Ali permet de donner un encadrement d'une des deux solutions de l'équation : $2{,}645<x_1<2{,}646$. Par parité de la fonction *f*, on en déduit un encadrement de l'autre solution : $-2{,}646<x_2<-2{,}645$.

• La méthode d'Oriane est plus précise. Elle trouve $x_2 \approx -2{,}645\,751\,311$ et donc $x_1 \approx 2{,}645\,751\,311$.
• La méthode de Gabriel est encore plus précise puisqu'elle permet d'obtenir une réponse exacte.
$x^2 - 2 = 5$ est équivalent à $x^2 = 7$ soit $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$.

79 **1.** On conjecture que cela se produit lorsque le point M a pour abscisse environ 2,1.
2. L'aire du triangle MOP est $\frac{1}{2} \times x \times x^2$ c'est-à-dire $\frac{1}{3}x^3$.
Ainsi l'aire de MOP est égale à 5 si, et seulement si, $\frac{1}{2}x^3 = 5$, soit $x^3 = 10$.
Le logiciel de calcul formel permet d'affirmer que la solution de cette équation est environ 2,154.

80 **a)** La fonction f est paire donc $f(-3) = f(3) = 1$
b) La fonction f est paire donc $f(-1) = f(1) = 4$ et $f(-4) = f(4) = 4$.
Donc les solutions de l'équation $f(x) = 4$ sont -4 ; -1 ; 1 et 4.

81 **1.** Le symétrique du point C par rapport à l'axe des ordonnées a pour abscisse $-x$. Ainsi l'aire de l'arbelos obtenue par cette symétrie est d'une part égale à $\mathscr{A}(-x)$ mais aussi à $\mathscr{A}(x)$ puisqu'une symétrie conserve les aires.
Ainsi $\mathscr{A}(-x) = \mathscr{A}(x)$ et la fonction $\mathscr{A}$ est paire.
2. c) L'aire de l'arbelos est égale à $\mathrm{D} - (\mathrm{D1} + \mathrm{D2})$
e) La courbe est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ainsi la fonction $\mathscr{A}$ semble bien paire.

3. a) $\mathrm{D} = \dfrac{\pi \times 1^2}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\mathrm{D}_1 = \dfrac{\pi \times \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi(x+1)^2}{8}$

$\mathrm{D}_2 = \dfrac{\pi \times \left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi(1-x)^2}{8}$

c) $\mathrm{D1} + \mathrm{D2} = \dfrac{\pi}{8}((x+1)^2 + (1-x)^2)$

$= \dfrac{\pi}{8}(x^2 + 2x + 1 + 1 - 2x + x^2)$

$= \dfrac{\pi}{8}(2x^2 + 2)$

$= \dfrac{\pi}{4}(x^2 + 1)$.

Ainsi $\mathscr{A}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}(x^2 + 1)$

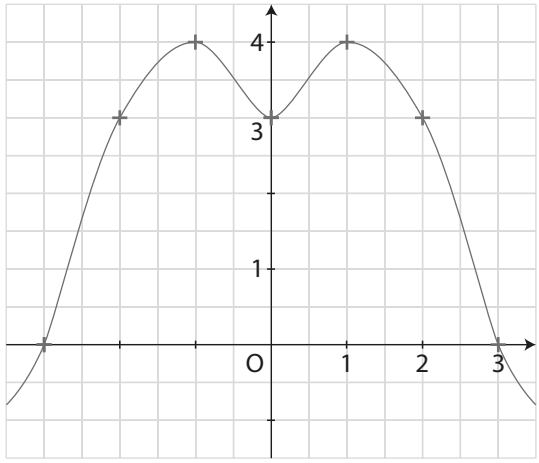
d) Pour tout nombre x de $[-1\,;1]$:
• $-x$ appartient aussi à $[-1\,;1]$,
• $\mathscr{A}(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}((-x)^2 + 1)$

$\mathscr{A}(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}(x^2 + 1)$

$\mathscr{A}(-x) = \mathscr{A}(x)$.

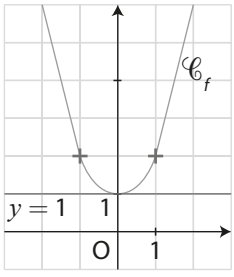
Donc la fonction $\mathscr{A}$ est paire.

82

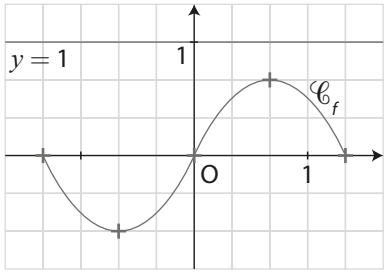


83 L'affirmation est fausse. En effet, la fonction inverse est impaire et sa courbe est une hyperbole qui ne passe pas par l'origine du repère.

84 **a) Vrai.** En effet, dans le cas où f est paire, sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Sa symétrique par rapport à cet axe est elle-même et représente donc une fonction paire.
Sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses est une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et représente donc une fonction paire.
Dans le cas où f est impaire, sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère. Sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses ou l'axe des ordonnées conserve cette symétrie par rapport à O et représente donc une fonction impaire.
b) Faux. En effet, la fonction f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ est paire mais l'équation $f(x) = 1$ n'admet qu'une solution : $x_0 = 0$.



c) Faux. En effet, la courbe ci-dessous représente une fonction impaire *f* telle que l'équation $f(x) = 1$ n'admet aucune solution.



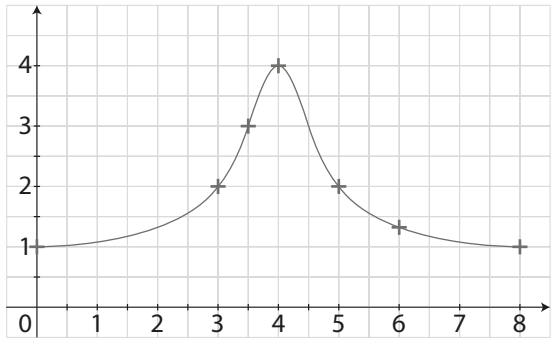
85 **1.** *k* n'est ni paire ni impaire.
ℓ est impaire et *m* est paire.
2. a) *f* est paire, si, et seulement si, pour tout nombre réel x, $f(-x) = f(x)$ c'est-à-dire $-ax + b = ax + b$ soit $2ax = 0$.
Ainsi, $a = 0$.
Les seules fonctions affines paires sont les fonctions constantes.
b) *f* est impaire si, et seulement si, pour tout nombre réel x, $f(-x) = -f(x)$ c'est-à-dire $-ax + b = -ax - b$ soit $2b = 0$.
Ainsi, $b = 0$.
Les seules fonctions affines impaires sont les fonctions linéaires.
c) Une fonction affine $x \mapsto ax + b$ n'est ni paire ni impaire si, et seulement si, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

86 **a)** La réciproque est : « Si *f* est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = f(1)$, alors *f* est paire. »
Cette réciproque est fausse.
En effet, si $f(1) = f(-1)$, alors il existe des fonctions *f* telles que $f(2) \neq f(-2)$ et qui ne sont pas paires.
b) La réciproque est « Si *f* est affine, alors *f* est paire et impaire ».
Cette réciproque est fausse.
En effet, la fonction $f : x \mapsto x + 1$ n'est ni paire ni impaire.

87 • Négation de P : *f* n'est pas paire c'est-à-dire, il existe un nombre réel x, tel que $f(-x) \neq f(x)$.
• Négation de Q : 2 n'admet aucun antécédent par *f*.

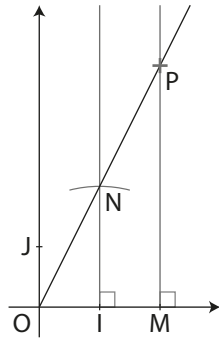
Organiser son raisonnement

88



89 **a)** $\mathscr{S} = [1 ; 2]$
b) $\mathscr{S} = [5 ; 6]$
c) $\mathscr{S} = [2 ; 3]$

90

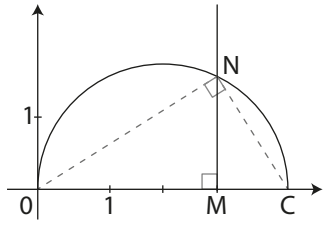


On note x l'abscisse du point P.
On a donc $\text{OM} = x$ d'où $\text{IN} = x$.
On applique le théorème de Thalès dans les triangles OMP et ONI :

$$\frac{\text{OM}}{\text{OI}} = \frac{\text{MP}}{\text{IN}}$$

Soit $\frac{x}{1} = \frac{\text{MP}}{x}$
Ainsi, $\text{MP} = x^2$.
Les coordonnées du point P sont donc $(x ; x^2)$
P appartient à la courbe représentative de la fonction carré.

91



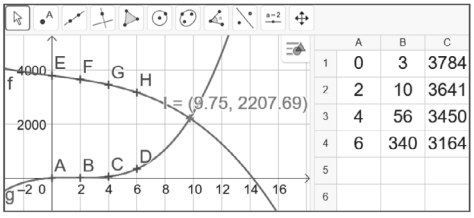
D'après le théorème de Pythagore dans :
• le triangle ONC rectangle en N : $OC^2 = ON^2 + NC^2$,
• le triangle OMN rectangle en M : $ON^2 = OM^2 + MN^2$,
• le triangle CMN rectangle en M : $NC^2 = CM^2 + MN^2$.
On en déduit que :

$$OC^2 = OM^2 + MN^2 + MC^2 + MN^2$$

c'est-à-dire $(x+1)^2 = x^2 + 2MN^2 + 1^2$
soit $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2MN^2 + 1$
Ainsi, $MN^2 = x$ et $MN = \sqrt{x}$.
Les coordonnées du point N sont donc $(x\,;\sqrt{x})$
N appartient à la courbe de la fonction racine carrée.

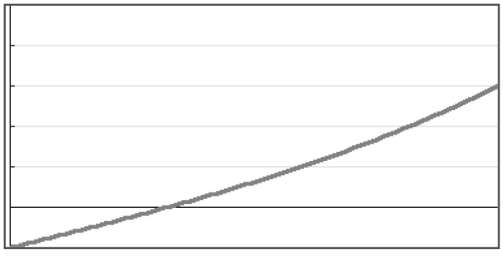
92 À l'aide de GeoGebra :
• on saisit les trois listes dans la partie tableur ;
• on crée les deux séries de points associés : A(0 ; 3), B(2 ; 10), …
• on ajuste ces deux séries par deux courbes en saisissant :

AjustPoly(A,B,C,D,3) puis AjustPoly(E,F,G,H,3)



En recherchant le point d'intersection des deux courbes, on peut estimer que le nombre de véhicules électriques sera supérieur au nombre de véhicules thermiques à partir de l'année 2022.

93 **1.**



2. a)

k	*m*	*a*	*b*
		0	1
1	0,5	0	0,5
2	0,25	0,25	0,5
3	0,375	0,25	0,375
4	0,312 5	0,25	0,312 5
5	0,281 25	0,281 25	0,312 5
6	0,296 875	0,296 875	0,312 5
7	0,304 681 5	0,296 815	0,304 631 5
8	0,300 781 25	0,307 812 5	0,304 687 5
9	0,302 734 375	0,302 734 375	0,304 687 5
10	0,303 710 937 5	0,302 734 375	0,303 710 937 5

b) Avec cet algorithme on obtient un encadrement de la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$.
Remarque : il s'agit de la méthode de dichotomie.
On obtient $a = 0{,}302\,734\,375$ et $b = 0{,}303\,710\,937\,5$
Ainsi,

$$0{,}302\,734\,375 < x_0 < 0{,}303\,710\,937\,5$$

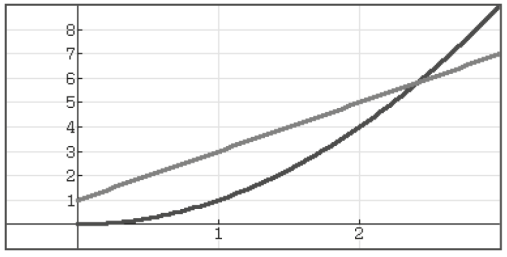
et $x_0 \approx 0{,}30$.

94 **1. a)** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Dans la case rouge :
b) $d \leftarrow sqrt((xB - xA)^{**}2 + (yB - yA)^{**}2)$
2. a) Chaque intervalle a une amplitude égale à $\dfrac{b-a}{N}$.
b) Si u est l'abscisse d'un des points choisis, le point suivant a pour abscisse $u + \dfrac{b-a}{N}$.
3. a) $v = u + \dfrac{b-a}{N}$

$$S = S + \text{Distance}(u,\ u^{**}2,\ v,\ v^{**}2)$$

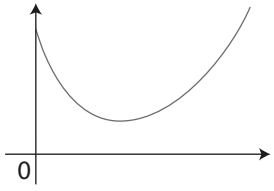
b)
```
>>> Longueur(-1,1,100)
2.957826086275915
```

95 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$,
$\mathcal{B}(x) = (x+1)^2 - x^2$
$\mathcal{B}(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2$
$\mathcal{B}(x) = 2x + 1$
b)

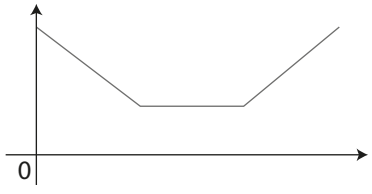


c) On en déduit que $\mathcal{A}(x) \geqslant \mathcal{B}(x)$ lorsque $x \geqslant \sqrt{2} + 1$.
$\mathcal{S} = [\sqrt{2} + 1\,;\ +\infty[$

96 **a)**



$f(0) = AC$ Pour $x = AB$, $f(x) = BC$
Le minimum est atteint lorsque M est le projeté orthogonal de C sur (AB).
b)



$f(0) = \text{AC}$ Pour $x = \text{AB}$, $f(x) = \text{BC} = \text{AB}$.
Le minimum est égal au rayon du demi-cercle ; il est atteint lorsque M appartient à ce demi-cercle.

97 Le sommet A à droite du carré est une des intersections de la parabole et de la droite d'équation $y = x$.
Or $kx^2 = x$ équivaut à $kx^2 - x = 0$ soit $x(kx - 1) = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $kx - 1 = 0$
Ainsi, $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{k}$
Les coordonnées du point A sont donc $\left(\dfrac{1}{k} ; \dfrac{1}{k}\right)$
On en déduit que :

$$\text{OA} = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$\text{OA} = \frac{\sqrt{2}}{k}$$

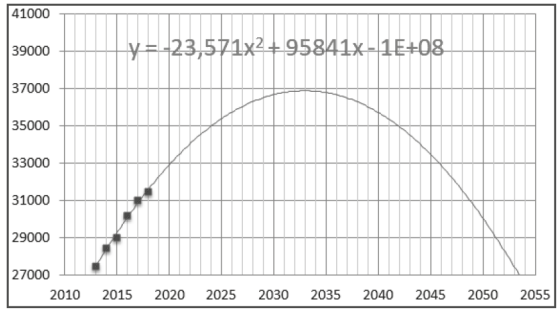
Le périmètre du carré est donc égal à $\dfrac{4\sqrt{2}}{k}$.

98 **1.** D. En effet, pour $x = 1$, $y = 7 \times 1^2 = 7$.
2. D. En effet, pour tout nombre réel x,
$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$.
f est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. B. En effet, pour tout nombre réel x, $h(x) = -f(x)$.
Alors $h(-x) = -f(-x)$; or f est impaire donc $h(-x) = -(-f(x)) = f(x)$. Par définition de h, $f(x) = -h(x)$ donc $h(-x) = -h(x)$.
4. C. En effet, on vérifie que $1{,}46^2 + 1 > 1{,}46^3$, alors que $1{,}47^2 + 1 < 1{,}47^3$.
5. B. En effet, h est paire donc si $h(4) = 3$, alors $h(-4) = h(4) = 3$.
6. A. En effet, graphiquement on ne peut avoir une telle précision de lecture.
7. C. En effet, la droite d'équation $y = m$ avec $m \in [3 ; 3{,}5[$ coupe $\mathscr{C}_f$ en quatre points.
8. A. En effet, si l'on translate d'une unité vers le bas la courbe $\mathscr{C}_g$, alors elle ne coupe pas la courbe $\mathscr{C}_f$.
9. A. En effet, sur l'intervalle $[1 ; 3]$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ donc $f(x) - g(x) \geqslant 0$.
10. C. En effet, on peut tracer la courbe symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$. On constate alors que des points de même abscisse de la courbe ont des ordonnées différentes.

Exploiter ses compétences

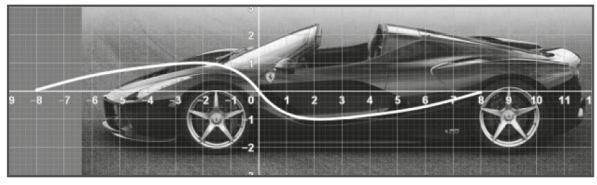
99 Les trois ralentissements correspondent à trois virages.
Il s'agit donc des circuits D ou C.
Le premier virage arrive peu de temps après le passage par la ligne de départ. On élimine le circuit C.
Enfin le deuxième virage doit être plus serré que les deux autres vu que la vitesse g est à son minimum. Le circuit est donc le B.
Le circuit a une longueur de 3 km d'après le Doc. 1.

100 On clique sur l'un des points correspondant à une donnée du tableau, puis sur Ajouter une courbe de tendance. Dans la boîte de dialogue, on coche Polynomiale, on règle Ordre sur 2, on coche Afficher l'équation sur le graphique. Voici la courbe de tendance affichée par le tableur.



On lit que l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiant dépassera 35 000 est 2025.
Avec la courbe de tendance, on peut estimer le nombre d'étudiants à environ 34 980 en 2024 et 35 380 en 2025.

101 L'allure de la courbe ci-dessous peut convenir.



Avec GeoGebra, on saisit :
$\text{A} = (8, 0)$, $\text{B} = (2, -1)$, $\text{C} = (5, -0{,}7)$, $\text{E} = (0, 0)$,
$\text{G} = (0.5, 0.5)$, $\text{H} = (6.5, -0{,}4)$
$g(x) = \text{Si}(0 \leqslant x \leqslant 8, \text{AjustPoly}(\{\text{A, B, C, E, G, H}\}, 5))$
$g(x) = \text{Symetrie}(g, \text{E})$

102 Dans l'algorithme, la variable *n* représente le nombre d'années qui s'écoulent à partir de 2015.
En fin d'exécution, l'algorithme affiche la valeur de *n* à partir de laquelle l'objectif de réduction de moitié au moins est atteint.
Voici le codage de cet algorithme en langage Python et son exécution.

```
1 u=40
2 n=0
3 while u > 20:
4     u=0.98*u+0.2
5     n=n+1
6 print(n)
```

```
>>>
55
```

Avec ce plan, la zone industrielle atteindra son objectif en 2071.

10 Variations et extremums

Découvrir

1 Sens de variation d'une fonction

1 **a)** De 0 h à 6 h, le niveau de la batterie a **augmenté**.
b) De 6 h à 12 h, le niveau de la batterie a **diminué**.

2 **a)** f est croissante sur l'intervalle $[12\,;18]$.
b) f est décroissante sur l'intervalle $[18\,;24]$.

3

t	0		6		12		18		24
$f(t)$	30	↗	90	↘	**40**	↗	**70**	↘	**40**

2 Lecture graphique d'un maximum, d'un minimum

1 **a)** $p(7) = 3$ **b)** $p(3) = -4$

2 **a)** L'ensemble des solutions de l'inéquation $p(t) \leqslant p(7)$ est l'intervalle $[0\,;10]$.
b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $p(t) \geqslant p(3)$ est l'intervalle $[0\,;10]$.

3 Le maximum de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;10]$ est **3**, il est atteint en $\boldsymbol{t = 7}$.
Le minimum de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;10]$ est **− 4**, il est atteint en $\boldsymbol{t = 3}$.

Acquérir des automatismes

3 **a)** La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;-1]$, croissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2\,;3]$.

b)

x	-2		-1		2		3
$f(x)$	2	↘	-1	↗	1	↘	0

4 **a)** -5 et -4 appartiennent à l'intervalle $[-7\,;-3]$ et g est croissante sur cet intervalle.
$-5 < -4$ donc $g(-5) < g(-4)$.
b) -1 et 0 appartiennent à l'intervalle $[-3\,;11]$ et g est décroissante sur cet intervalle.
$-1 < 0$ donc $g(-1) > g(0)$.
c) Assia a raison car $g(-7) = 1$, $g(11) = -3$ et $1 > -3$.
d) -4 appartient à l'intervalle $[-7\,;-3]$ et 5 appartient à l'intervalle $[-3\,;11]$.
Malo ne peut donc pas comparer $g(-4)$ et $g(5)$.

7 **a)** Le coefficient directeur de d est -4.
Donc $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = -4$ et $f(1)-f(0) = -4$.
b) De même $\dfrac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)} = -4$.
Ainsi, $f(4)-f(-2) = -4 \times 6 = -24$.

8 **a)** La courbe représentative de la fonction f dans un repère est une droite de coefficient directeur égal à 5.
Donc $\dfrac{f(10)-f(9)}{10-9} = 5$ et $f(10)-f(9) = 5$
b) $\dfrac{f(28)-f(8)}{28-8} = 5$
soit $f(28)-f(8) = 5 \times 20 = 100$.

9 **a)** Sur l'intervalle $[-1\,;3]$:
• le maximum de *f* est 3 ; il est atteint en $x = 1$.
• le minimum de *f* est -1 ; il est atteint en $x = 0$.
b) Sur l'intervalle $[0\,;1]$:
• le maximum de *f* est 3 ; il est atteint en $x = 1$.
• le minimum de *f* est -1 ; il est atteint en $x = 0$.

12 **a)** a et 3 sont des nombres positifs.
Or, deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
Donc si $a \geqslant 3$, alors $a^2 \geqslant 3^2$ soit $a^2 \geqslant 9$.
b) b et $-\sqrt{5}$ sont des nombres négatifs.
Or, deux nombres réels négatifs et leurs carrés sont rangés dans des ordres contraires.
Donc si $b \leqslant -\sqrt{5}$, alors $b^2 \geqslant (-\sqrt{5})^2$ soit $b^2 \geqslant 5$.

13 **a)** 2, a et 7 sont des nombres positifs. Ils sont donc rangés dans le même ordre que leurs carrés.
Donc si $2 \leqslant a \leqslant 7$, alors $2^2 \leqslant a^2 \leqslant 7^2$.
Ainsi $\mathbf{4} \leqslant a^2 \leqslant \mathbf{49}$.
b) -3, b et 0 sont des nombres négatifs. Ils sont donc rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés.
Donc si $-3 \leqslant b \leqslant 0$, alors $(-3)^2 \geqslant b^2 \geqslant 0^2$.
Ainsi $\mathbf{0} \leqslant b^2 \leqslant \mathbf{9}$.

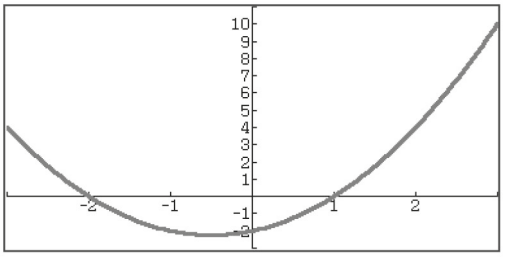
14 **a)** a et 4 sont des nombres strictement positifs. Ils sont donc rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
Donc si $a \geqslant 4$, alors $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{a} \leqslant 0{,}25$.
D'autre part $a > 0$, donc $0 < \frac{1}{a} \leqslant 0{,}25$.
b) b et -5 sont des nombres strictement négatifs. Ils sont donc rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
Donc si $b \leqslant -5$, alors $\frac{1}{b} \geqslant \frac{1}{-5}$, c'est-à-dire $\frac{1}{b} \geqslant -0{,}2$.
D'autre part $b < 0$, donc $-0{,}2 \leqslant \frac{1}{b} < 0$.

15 **a)** 0,1, a et 1,6 sont des nombres strictement positifs. Ils sont donc rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
Donc si $0{,}1 \leqslant a \leqslant 1{,}6$, alors $\frac{1}{0{,}1} \geqslant \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{1{,}6}$ c'est-à-dire $0{,}625 \leqslant \frac{1}{a} \leqslant 10$.
b) -5, b et -1 sont des nombres strictement négatifs. Ils sont donc rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
Donc si $-5 \leqslant b \leqslant -1$, alors $\frac{1}{-5} \geqslant \frac{1}{b} \geqslant \frac{1}{-1}$, c'est-à-dire $-1 \leqslant \frac{1}{b} \leqslant -0{,}2$.

16 L'affirmation de Nicolas est fausse. La fonction *f* est décroissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$.
L'affirmation de Carine est vraie.

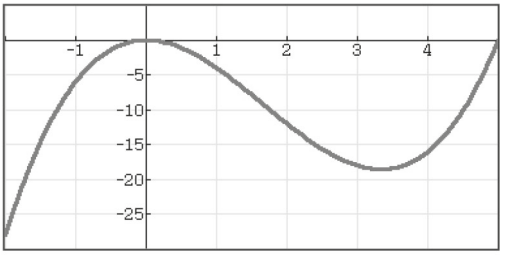
17 La fonction *f* est décroissante sur l'intervalle $[-4\,;-1]$, croissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0\,;5]$.

18 **a)**



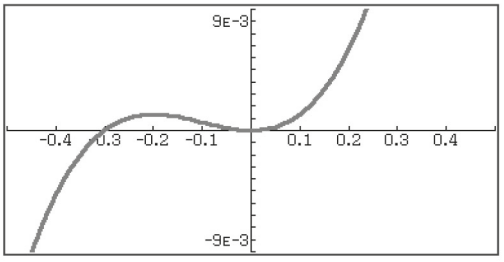
b) La fonction *f* semble décroissante sur l'intervalle $[-3\,;-0{,}5]$ et croissante sur l'intervalle $[-0{,}5\,;3]$.

19



La fonction *k* semble croissante sur l'intervalle $[-2\,;0]$, décroissante sur l'intervalle $[0\,;x_0]$ et croissante sur l'intervalle $[x_0\,;5]$ avec $x_0 \approx 3{,}3$.

20 **a)** La fonction *g* semble croissante sur l'intervalle $[-4\,;4]$.
b)



c) On remarque que la fonction *g* est décroissante sur l'intervalle $[-0{,}2\,;0]$.

21 Le tableau d'Élise n'est pas correct. Le tableau de variations de sa fonction sur l'intervalle $[-3\,;2]$ est :

x	-3		-1		2
$f(x)$	0	↗	3	↘	-1

Le tableau de Benjamin est correct.

22 Les deux fonctions représentées n'ont pas le même tableau de variations sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

Fonction f du graphique 1

x	-3		-2		0		2		4
$f(x)$	0	↘	-2	↗	1	↘	-1	↗	3

Fonction g du graphique 2

x	-3		-2		0		2		4
$g(x)$	4	↘	1	↗	2	↘	-2	↗	-1

23

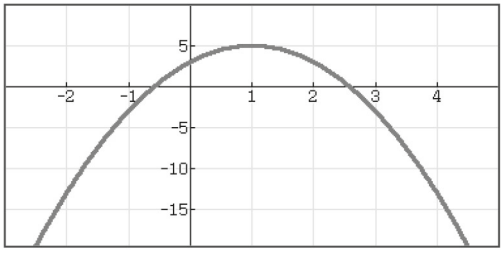
x	0		2		4
$f(x)$	5	↗	10	↘	5

24 La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$.
La fonction g est représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$.

25

x	-1		0		2		5
$f(x)$	-3	↗	1	↘	-5	↗	-3

26 **a) Fenêtre** : $-3 \leqslant x \leqslant 5$, pas 1 et $-20 \leqslant y \leqslant 10$, pas 5.



b)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	5	↘	

27

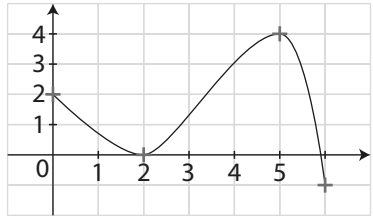
x	0		π
$f(x)$	0	↗	2

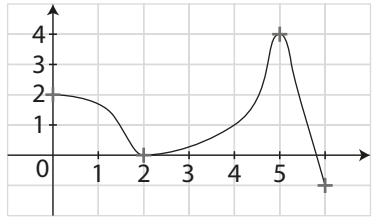
x	0		π
$g(x)$	2	↘	0

28 Yasmine a raison.
La fonction h est croissante sur l'intervalle $[1\,;6]$, donc sur l'intervalle $[2\,;4]$.

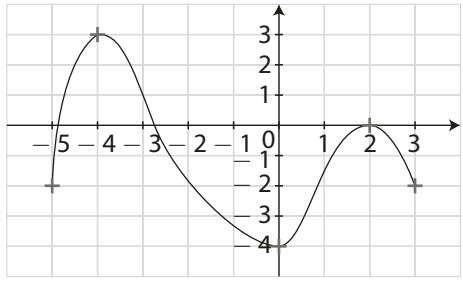
29 **a)** 3 et 4 appartiennent à l'intervalle $[2\,;8]$ et f est croissante sur cet intervalle.
$3 < 4$, donc $f(3) < f(4)$
b) 0 et 1 appartiennent à l'intervalle $[-10\,;2]$ et f est décroissante sur cet intervalle.
$0 < 1$, donc $f(0) > f(1)$
c) De la même façon qu'au b), $-7{,}8 < 2$ donc $f(-7{,}8) > f(2)$, c'est-à-dire $f(-7{,}8) > 0$.
d) De la même façon qu'au a), $3 < 8$ donc $f(3) < f(8)$, c'est-à-dire $f(-3) < 1$.

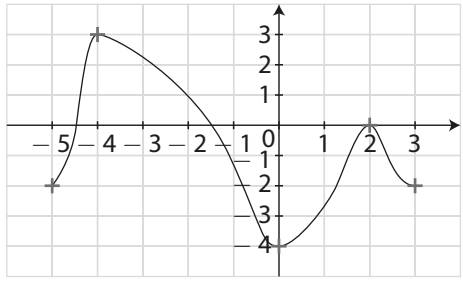
30





31





32 **1.** L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-4\,;1]$.
2. a) -2 et -3 appartiennent à l'intervalle $[-4\,;-1]$ et f est croissante sur cet intervalle.
$-2 > -3$ donc $f(-2) > f(-3)$.

b) $f(-1) = 1$ et $f(0) = -5$ donc $f(-1) > f(0)$.
c) f est croissante sur l'intervalle $[-4\ ;\ -1]$.
$-4 < -3 < -1$ donc $f(-4) < f(-3) < f(-1)$ c'est-à-dire $-2 < f(-3) < 1$.
D'autre part $f(0) = -5$, ainsi $-5 < -2 < f(-3)$ et $f(0) < f(-3)$.
d) On ne peut pas comparer $f(-0{,}5)$ et $f(0{,}5)$.

33 **a)** f est décroissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$.
$-2 < -1 < 0$ donc $f(-2) > f(-1) > f(0)$, c'est-à-dire $4 > f(-1) > 0$.
L'affirmation est donc fausse.
b) f est croissante sur l'intervalle $[-5\ ;\ -2]$.
$-5 < -4 < -2$, donc $f(-5) < f(-4) < f(-2)$.
L'affirmation est donc fausse.
c) 2 n'appartient pas à l'intervalle $[-5\ ;\ 1]$.
Le tableau ne permet pas de comparer $f(1)$ et $f(2)$.
d) $f(1) = 3$.
L'affirmation est donc fausse.
e) $f(-2) = 4$ et $4 > 1$.
L'affirmation est donc vraie.
f) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-5\ ;\ -2]$
$-5 < -4 < -2$, donc $f(-5) < f(-4) < f(-2)$, c'est-à-dire $-1 < f(-4) < 4$.
$f(0) = 0$.
Donc on ne peut pas comparer $f(-4)$ et $f(0)$.

34 **a)** La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.
$-2 < 0 < 4$, donc $f(-2) < f(0) < f(4)$.
Ainsi, $-1 < f(0) < 0$.
b) $f(-2) = -1$ et -1 est compris entre $f(4)$ et $f(6)$.
Le nombre -1 possède deux antécédents par f.
c) Le nombre 0 est compris entre $f(-6)$ et $f(-2)$. et $f(4) = 0$.
Le nombre 0 possède donc deux antécédents par f.

35 Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 2[$, $f(x) > 0$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]2\ ;\ 3]$, $f(x) < 0$.
$f(x) = 0$ pour $x = 2$.

36 La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ car 3 est un nombre positif.
La fonction g n'est pas croissante, mais décroissante sur $\mathbb{R}$ car -3 est un nombre négatif.
La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$ car le nombre 1 est positif.
La fonction j n'est pas croissante, mais décroissante sur $\mathbb{R}$ car -6 est un nombre négatif.

37 Quentin a écrit -2 sur la ligne « x » au lieu de 2.
En effet $-2x + 4 = 0$ pour $x = 2$.

38 **a)**

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

b)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g(x)$	↘	0	↘
Signe de $g(x)$	$+$	0	$-$

c) Pour tout nombre réel x, $h(x) = -12x + 8$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$h(x)$	↘	0	↘
Signe de $h(x)$	$+$	0	$-$

d) Pour tout nombre réel x, $j(x) = -22x + 3$

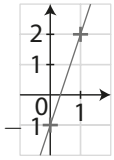
x	$-\infty$	$\frac{3}{22}$	$+\infty$
$j(x)$	↘	0	↘
Signe de $j(x)$	$+$	0	$-$

39 **a)** Le coefficient directeur de la droite représentative de la fonction f est 2. Donc $\dfrac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = 2$ et $f(10) - f(0) = 20$.
b) Le coefficient directeur de la droite représentative de la fonction g est $\dfrac{-1}{2}$.
Donc $\dfrac{g(6{,}5) - g(4{,}2)}{6{,}5 - 4{,}2} = -\dfrac{1}{2}$.
Ainsi $g(6{,}5) - g(4{,}2) = -\dfrac{1}{2} \times 2{,}3 = -1{,}15$.
c) Le coefficient directeur de la droite représentative de la fonction h est 1.
Donc $\dfrac{h(13) - h(-2)}{13 - (-2)} = 1$ soit $h(13) - h(-2) = 15$.

40 **a)** $f(2) = 5$ et $f(4) = 6$
$2 < 4$ et $f(2) < f(4)$
La fonction affine f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
b) $f(9) = 3$ et $f(3) = 9$
$3 < 9$ et $f(3) > f(9)$
La fonction affine f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

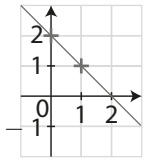
41 **a)**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	↗



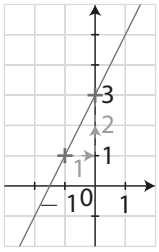
b)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	↘

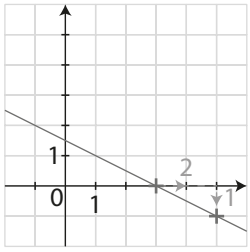


42

a)



b)



43 **a)** Le salaire journalier $s(x)$, en \$, de l'étudiant lorsqu'il cueille x kg de pommes est donné par : $s(x) = 0{,}02x + 50$.
Pour nombre réel x positif,
$\dfrac{s(x+240) - s(x)}{x + 240 - x} = 0{,}02$ soit
$s(x+240) - s(x) = 0{,}02 \times 240 = 4{,}8$.
L'étudiant gagnera donc 4,80 \$ de plus le mardi que le lundi.
b) Pour tout nombre réel x positif,
$\dfrac{s(x-50) - s(x)}{x - 50 - x} = 0{,}02$ soit
$s(x-50) - s(x) = 0{,}02 \times (-50) = -1$.
L'étudiant gagnera donc 1 \$ de moins le mercredi que le mardi.

44 **a)** Sur l'intervalle $[-3\,;4]$:
• Le maximum de *f* est 3 ; il est atteint en $x = 2$.
• Le minimum de *f* est -2 ; il est atteint en $x = -1$.
b) Sur l'intervalle $[-3\,;0]$:
• Le maximum de *f* est 1 ; il est atteint en $x = -3$.
• Le minimum de *f* est -2 ; il est atteint en $x = -1$.
c) Sur l'intervalle $[1\,;4]$:
• Le maximum de *f* est 3 ; il est atteint en $x = 2$.
• Le minimum de *f* est 1 ; il est atteint en $x = 4$.

45 **a)** Sur l'intervalle $[-10\,;3]$, le maximum de *g* est 6 et le minimum de *g* est -4.
b) Sur l'intervalle $[-10\,;0]$, le maximum de *g* est 5 et le minimum de *g* est -4.
c) Sur l'intervalle $[-7\,;3]$, le maximum de *g* est 6 et le minimum de *g* est -4.

46 **a)** Pour tout x de $[3\,;4{,}5]$, $\mathbf{-5} \leqslant h(x) \leqslant \mathbf{0}$.
b) Pour tout x de $[3\,;10{,}4]$, $\mathbf{-5} \leqslant h(x) \leqslant \mathbf{16}$.
c) Pour tout x de $[3\,;13]$, $\mathbf{-5} \leqslant h(x) \leqslant \mathbf{16}$.

47 **a)** Sur l'intervalle $[-2\,;4]$, le maximum de la fonction *f* est 6.
b) Sur l'intervalle $[-2\,;4]$, le minimum de la fonction *f* est 1.
c) Pour tout nombre réel x de $[-2\,;1]$, $\mathbf{1} \leqslant f(x) \leqslant \mathbf{6}$.
Pour tout nombre réel x de $[-1\,;4]$, $\mathbf{1} \leqslant f(x) \leqslant \mathbf{6}$.

48

x	-2 $\qquad$ 0 $\qquad$ 3
$f(x)$	3 ↘ -1 ↗ 6

a) Sur l'intervalle $[-2\,;3]$, le maximum de *f* est 6.
b) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2\,;3]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 6$.
c) Lorsque x appartient à l'intervalle $[-2\,;0]$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

49 **a)** Sur l'intervalle $[-2\,;0]$, le minimum de *f* est -1, il est atteint en $x = -1$.
Sur l'intervalle $[1\,;4]$, le minimum de *f* est -1, il est atteint en $x = 3$.
b) Sur l'intervalle $[0\,;2]$, le maximum de *f* est 2 ; il est atteint en $x = 1$.
Sur l'intervalle $[-2\,;4]$, le maximum de *f* est 2 ; il est atteint en $x = 1$.

50 Le minimum de *f* sur l'intervalle $[0\,;3]$ ne peut pas être 0.
En effet *f* prend des valeurs négatives sur l'intervalle $[0\,;3]$.

X	Y1
0	0
0.1	-0.008
0.2	-0.024
0.3	-0.034
0.4	-0.026
0.5	0.0156

51 **a)**

X	Y1
-1.4	11.256
-1.3	11.303
-1.2	11.272

X	Y1
1.2	2.728
1.3	2.697
1.4	2.744

b) $-1{,}4 \leqslant x_0 \leqslant -1{,}2$ et $1{,}2 \leqslant x_1 \leqslant 1{,}4$.

52 La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Justine a donc raison.

53 Sofia a tort. La fonction carré est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

54 **a)** 2,3 et 2,03 appartiennent à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la fonction carré est croissante sur cet intervalle.

$2{,}3 > 2{,}03$ donc $2{,}3^2 > 2{,}03^2$.

b) $-1{,}88$ et $-1{,}99$ appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et la fonction carré est décroissante sur cet intervalle.

$-1{,}88 > -1{,}99$ donc $(-1{,}88)^2 < (-1{,}99)^2$.

c) 7 et 8 appartiennent à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.

$7 < 8$ donc $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$.

d) -4 et -5 appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.

$-4 > -5$ donc $\frac{1}{-4} < \frac{1}{-5}$.

e) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

$-4{,}76 < -4{,}7$ donc $(-4{,}76)^3 < (-4{,}7)^3$.

f) 5,5 et 0,55 appartiennent à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la fonction racine carrée est croissante sur cet intervalle.

$5{,}5 > 0{,}55$ donc $\sqrt{5{,}5} > \sqrt{0{,}55}$.

55 **a)** x et 5 appartiennent à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.

$x > 5$ donc $\frac{1}{x} < \frac{1}{5}$.

D'autre part $x > 0$, donc $0 < \frac{1}{x} < 0{,}2$.

b) x et -4 appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.

$x < -4$ donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{-4}$.

D'autre part $x < 0$, donc $-0{,}25 < \frac{1}{x} < 0$

c) 6, x et 7 appartiennent à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.

$6 < x < 7$ donc $\frac{1}{6} > \frac{1}{x} > \frac{1}{7}$.

56 **a)**

x	-2		0		4
x^2	4	↘	0	↗	16

b)

x	-5		0		5
$\frac{1}{x}$	$-0{,}2$	↘	‖	↘	$0{,}2$

c)

x	-1		10
x^3	-1	↗	$1\,000$

d)

x	0		16
$\sqrt{x}$	0	↗	4

57 **a)** $\pi - 4$ et $\pi - 5$ appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et la fonction carré est décroissante sur cet intervalle.

$\pi - 4 > \pi - 5$ donc $(\pi - 4)^2 < (\pi - 5)^2$

b) -3 et -5 appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.

$-3 > 5$ donc $\frac{1}{-3} < \frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-3} < -\frac{1}{5}$.

c) 40 et 49 appartiennent à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la fonction racine carrée est croissante sur cet intervalle.

$40 < 49$ donc $\sqrt{40} < \sqrt{49}$ et $\sqrt{40} < 7$.

d) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

$-0{,}4 < 0{,}4$ donc $(-0{,}4)^3 < 0{,}4^3$.

58 **a)** -4, x et -1 appartiennent à l'intervalle $[-4\,;-1]$ sur lequel la fonction carré est décroissante.

$-4 < x < -1$ donc $(-4)^2 > x^2 > (-1)^2$

soit $1 < x^2 < 16$.

b) 2, y et 5 appartiennent à l'intervalle $[2\,;5]$ sur lequel la fonction carré est croissante.

$2 \leqslant y \leqslant 5$ donc $2^2 \leqslant y^2 \leqslant 5^2$ soit $4 \leqslant y^2 \leqslant 25$.

c) La fonction carré est décroissante sur $[-1\,;0]$.

$-1 < z \leqslant 0$ donc $(-1)^2 > z^2 \geqslant 0^2$ soit $0 \leqslant z^2 < 1$.

La fonction carré est croissante sur $[0\,;2]$.

$0 \leqslant z < 2$ donc $0^2 \leqslant z^2 < 2^2$ soit $0 \leqslant z^2 < 4$.

Ainsi, $-1 < z < 2$, alors $0 \leqslant z^2 < 4$.

d) De façon analogue au **c)**, on montre que si $-4 < t \leqslant 5$, alors $0 \leqslant t^2 \leqslant 25$.

59 **1.** B **2.** A **3.** D **4.** D **5.** A

60 **1.** B **2.** A, D **3.** A, B, D **4.** D **5.** A, B, C

61 **1. Vrai.** En effet, $-3 < 0$ et $f(-3) > f(0)$.

2. Vrai. En effet, 2, x, 7 et 10 appartiennent à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.

$2 < x < 7 < 10$ donc $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{7} > \frac{1}{10}$.

Ainsi $0{,}1 < \frac{1}{x} < 0{,}5$.

3. Faux. En effet, sur l'intervalle $[-1\,;2]$, le minimum de la fonction carré est 0 et le maximum est 4.

Donc si $-1 < x < 2$, alors $0 < x^2 < 4$.

4. Vrai. En effet,

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2{,}5\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.

5. Faux. En effet, il se peut que la fonction soit, par exemple, décroissante sur l'intervalle $[0\,;0{,}5]$ puis croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;1]$.

62 **a)** f est croissante sur l'intervalle $[-4\,;-2]$, $[0\,;1]$ et $[2\,;4]$.

b) f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;0]$ et $[1\,;2]$.

63 **a)** Sur l'intervalle $[-4\,;-4]$:

• le maximum de la fonction f est 3 ; il est atteint en $x = -2$ et $x = 4$;

• le minimum de la fonction f est -2 ; il est atteint en $x = 0$.

b) Sur l'intervalle $[1\,;3]$:

• le maximum de la fonction f est 2 ; il est atteint en $x = 1$;

• le minimum de la fonction f est 0 ; il est atteint en $x = 2$.

64

x	-4		-2		0		1		2		4
$f(x)$	0	↗	3	↘	-2	↗	2	↘	0	↗	3

65 **a)** -5 et -4 appartiennent à l'intervalle $[-5\,;-1]$ et f est croissante sur cet intervalle.

$-5 < -4$ donc $f(-5) < f(-4)$.

b) 0 et 3 appartiennent à l'intervalle $[-1\,;4]$ et f est décroissante sur cet intervalle.

$0 < 3$ donc $f(0) > f(3)$.

66 **a)** Sur l'intervalle $[4\,;6]$, le maximum de f est 1.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[4\,;6]$,

$f(x) \leqslant 1$ et $1 \leqslant 4$, donc $f(x) \leqslant 4$.

L'affirmation est donc vraie.

b) $f(-5) = -3$

-5 appartient à l'intervalle $[-8\,;6]$ et $-3 < 0$.

L'affirmation est donc fausse.

c) 0 appartient à l'intervalle $[-1\,;4]$ et le minimum de f sur cet intervalle est 0.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\,;4]$, $f(x) \geqslant 0$.

En particulier $f(0) \geqslant 0$.

L'affirmation est donc vraie.

67 **a)** 5,8 et 5,9 appartiennent à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la fonction carré est croissante sur cet intervalle $5{,}8 < 5{,}9$ donc $5{,}8^2 < 5{,}9^2$.

b) -36 et -48 appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.

$-36 > -48$ donc $\frac{1}{-36} < \frac{1}{-48}$.

c) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

$6{,}8 < 8{,}6$ donc $6{,}8^3 < 8{,}6^3$.

68 **a)**

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

S'entraîner

70 **a)**

x		5	6	7	8	9	10	11
c		0,64	0,61	0,6	0,61	0,62	0,65	0,67
$i < m$		Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Faux	Faux
m	0,71	0,64	0,61	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

b) La valeur obtenue à la fin de l'algorithme est 0,6. Elle indique que le coût unitaire minimum de production d'une tonne de peinture est de 600 €.

71 **a)**

n		3	4	5	6	7	8	9	10
y		450	600	690	720	690	600	450	240
$y > m$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Faux	Faux
m	240	450	600	690	720	720	720	720	720

b) La valeur de m obtenue à la fin de l'algorithme est 720.

Elle indique le nombre maximum de personnes touchées par la grippe, pour 100 000 habitants en France, durant l'hiver 2014-2015.

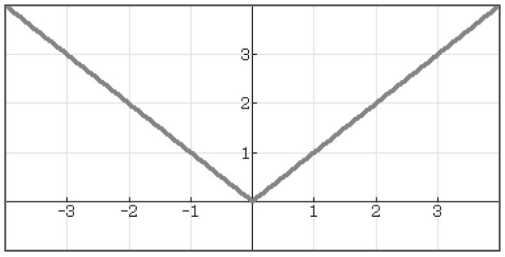
73 **a)** $\mathcal{A}(x) = x^2 + (6-x)^2$
$\mathcal{A}(x) = x^2 + 36 - 12x + x^2$
$\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 12x + 36$
b) Avec la calculatrice, on conjecture que la fonction $\mathcal{A}$ admet sur l'intervalle $[0\,;6]$ un minimum égal à 18 et atteint en $x = 3$.
c) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;6]$,
$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(3) = 2x^2 - 12x + 36 - 18$
$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(3) = 2x^2 - 12x + 18$
$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(3) = 2(x^2 - 6x + 9)$
$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(3) = 2(x-3)^2$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;6]$,
$(x-3)^2 > 0$ donc $2(x-3)^2 > 0$.
Ainsi $\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(3) > 0$ et $\mathcal{A}(x) > \mathcal{A}(3)$.
La fonction $\mathcal{A}$ admet donc sur l'intervalle $[0\,;6]$ un minimum égal à $\mathcal{A}(3) = 18$ et atteint en $x = 3$.
Lorsque M est le milieu du segment [AB], la somme des aires est minimum et est égale à 18 cm^2.

74 **a)** $\mathrm{B}(n) = 11n - \mathrm{C}(n)$
$\mathrm{B}(n) = 11n - (0{,}002n^2 + 2n + 4\,000)$
$\mathrm{B}(n) = 11n - 0{,}002n^2 - 2n - 4\,000.$
$\mathrm{B}(n) = -0{,}002n^2 + 9n - 4\,000.$
b) $\mathrm{B}(n) - \mathrm{B}(2\,250) = -0{,}002n^2 + 9n - 4\,000 - 6\,125$
$\mathrm{B}(n) - \mathrm{B}(2\,250) = -0{,}002n^2 + 9n - 10\,125$
$\mathrm{B}(n) - \mathrm{B}(2\,250) = -0{,}002\left(n^2 + \dfrac{9}{-0{,}002}n - \dfrac{10\,125}{-0{,}002}\right)$
$\mathrm{B}(n) - \mathrm{B}(2\,250) = -0{,}002(n^2 - 4\,500n + 5\,062\,500)$
$\mathrm{B}(n) - \mathrm{B}(2\,250) = -0{,}002(n - 2\,250)^2$
c) Pour tout nombre réel n de l'intervalle $[0\,;3500]$,
$(n - 2\,250)^2 \geqslant 0$ donc $-0{,}002(n - 2\,250)^2 \leqslant 0$.
Ainsi $\mathrm{B}(n) - \mathrm{B}(2\,250) \leqslant 0$.
Pour tout nombre réel n de l'intervalle $[0\,;3500]$, $\mathrm{B}(n) \leqslant \mathrm{B}(2\,250)$, ce qui prouve que la fonction B admet sur l'intervalle $[0\,;3500]$ un maximum égal à $\mathrm{B}(2\,250) = 6\,125$ et atteint en $n = 2\,250$.
L'entreprise réalise donc un bénéfice maximum égal à 6 125 € lorsqu'elle vend 2 250 maisons.

75 **a)** u et v sont deux nombres réels tels que $u < v$.
Si $a > 0$, alors $au < av$ et $au + b < av + b$
Ainsi, pour tous nombres réels u et v tels que $u < v$, $f(u) < f(v)$, ce qui prouve que la fonction $f : x \mapsto ax + b$ est croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $a > 0$.
b) u et v sont deux nombres réels tels que $u < v$.
Si $a < 0$, alors $au > av$ et $au + b > av + b$.
Ainsi, pour tous nombres réels u et v tels que $u < v$, $f(u) > f(v)$, ce qui prouve $f : x \to ax + b$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $a < 0$.
c) Pour tous nombres réels u et v, si $a = 0$, alors $f(u) = b$ et $f(v) = b$.
Ainsi pour tous nombres réels u et v, $f(u) = f(v)$, ce qui prouve que la fonction $f : x \to ax + b$ est constante sur $\mathbb{R}$ lorsque $a = 0$.

76 **a)** $\begin{cases} f(x) = \boldsymbol{x} \text{ si } x \in [0\,;+\infty[\\ f(x) = \boldsymbol{-x} \text{ si } x \in]-\infty\,;0] \end{cases}$

b)



La fonction $f : x \to |x|$ semble décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
c) Sur $[0\,;+\infty[$, $f(x) = x$.
Or, la fonction affine $x \to x$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, la fonction f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Sur $]-\infty\,;0]$, $f(x) = -x$.
Or, la fonction affine $x \to -x$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

77 **a)** Pour tous nombres réels u et v distincts de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right) \times \frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)\left(\sqrt{u} + \sqrt{v}\right)}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$$
$$= \frac{\sqrt{u}^2 - \sqrt{v}^2}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$$

b) Pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ tels que $u < v$, $\sqrt{u} - \sqrt{v} = \dfrac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$
Or, $u < v$ donc $u - v < 0$.
D'autre part $\sqrt{u} \geqslant 0$ et $\sqrt{v} > 0$, donc $\sqrt{u} + \sqrt{v} > 0$.
Ainsi $\dfrac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} < 0$.
Pour tous les nombres réels u et v de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ tels que $u < v$, $\sqrt{u} < \sqrt{v}$, ce qui prouve que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

78 En tabulant la fonction f avec la calculatrice, sur l'intervalle $[0\,;1]$ et un pas de 0,1, on constate que $f(0)=1$ et $f(0{,}1)=0{,}985$.
La fonction f n'est donc pas croissante sur l'intervalle $[0\,;10]$.

79 **a)** $g(x)\geqslant 0$ lorsque $g(x)\geqslant g(1)$
Or, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des nombres réels x tels que $g(x)\geqslant 0$ est donc l'intervalle $]-\infty\,;1]$.
b) $g(x)<1$ lorsque $g(x)<g(0)$.
Or, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des nombre réels x tels que $g(x)<1$ est donc l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

80 **a)** x appartient à l'intervalle $[0\,;4]$.
b)

x	0	4
$f(x)$	0 ↗	$\sqrt{32}-4$

Dans le triangle ABD rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,
$AB^2+AD^2=DB^2$ soit $DB^2=4^2+4^2=32$.
Ainsi, $f(4)=\sqrt{32}-4$.
c) Dans le triangle AMD rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,
$DM^2=AD^2+AM^2=4^2+3^2=25$
donc $DM=\sqrt{25}=5$ et $f(3)=5-4=1$.
d) $f(x)\geqslant 1$ lorsque $f(x)\geqslant f(3)$ donc lorsque $x\geqslant 3$ car la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;4]$.
Les valeurs de x de l'intervalle $[0\,;4]$ par lesquelles $f(x)\geqslant 1$ sont celles de l'intervalle $[3\,;4]$.

81 **a)**

x	0	4
$f(x)$	3 ↘	2

b)

x	-1	4
$g(x)$	0 ↗	2

c)

x	0	4
$f(x)-g(x)$	3 ↘	0

82 Les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[0\,;4]$.

x	0	4
$f(x)$	0 ↗	12

x	0	4
$g(x)$	12 ↘	0

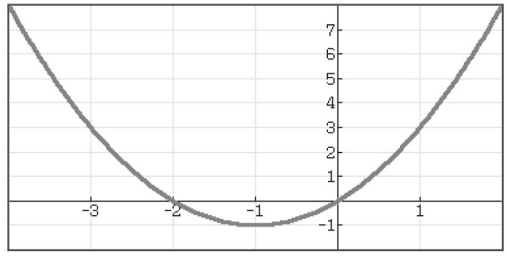
83 **1. a)** $f(0)=5-0^2=5$.
b) $f(x)-f(0)=5-x^2-5=-x^2$
Pour tout nombre réel x, $x^2\geqslant 0$ donc $-x^2\leqslant 0$ et $f(x)-f(0)\leqslant 0$.
Pour tout nombre réel x, $f(x)\leqslant f(0)$.
Le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donc $f(0)=5$.
2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=100-x^2$ admet 100 comme maximum sur $\mathbb{R}$.

84 **a)**

x	$-1{,}5$
n	0,5
y	$-0{,}75$

La valeur renvoyée par F$(-1{,}5)$ est $-0{,}75$.

b) $f(x)=x(x+2)=x^2+2x$
c)



La fonction f semble admettre un minimum égal à -1, atteint en $x=-1$.
Pour tout nombre réel x,
$f(x)-f(-1)=f(x)-(-1)=x^2+2x+1$
$f(x)-f(-1)=(x+1)^2$
Pour tout nombre réel x, $(x+1)^2\geqslant 0$, donc $f(x)-f(-1)\geqslant 0$ et $f(x)\geqslant f(-1)$.
Ceci prouve que la fonction f admet un minimum égal à $f(-1)=-1$.

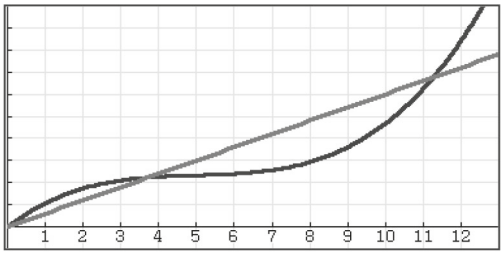
85 **1. a)** $10-3=7$ et $3\times 7=21$.
Nadège, Julien et leur petite fille vont donc payer 21 €.
b)

n	3	
p	7	21

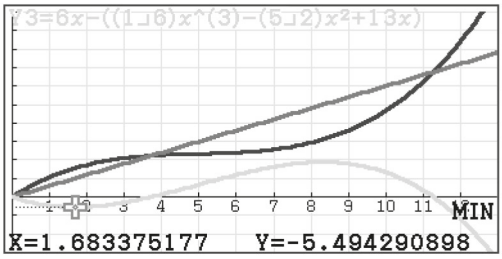
La valeur renvoyé par $p(3)$ est 21.
Cet algorithme renvoie le prix à payer, en euro, par une famille de n personnes.
2. a) $p(n)=(10-n)n$
b) Pour tout nombre réel x de $[0\,;10]$,
$f(x)-f(5)=10x-x^2-25$
$f(x)-f(5)=-(x^2-10x+25)$
$f(x)-f(5)=-(x-5)^2$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$, $(x-5)^2\geqslant 0$ donc $-(x-5)^2\leqslant 0$ et $f(x)-f(5)\leqslant 0$.

Ainsi pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$, $f(x) \leqslant f(5)$.
La fonction *f* admet donc sur cet intervalle un maximum égal à $f(5) = 25$ et atteint en $x = 5$.
c) La fonction *f* admet un maximum en 5, le cinéma gagnerait donc moins en vendant plus de 5 entrées.

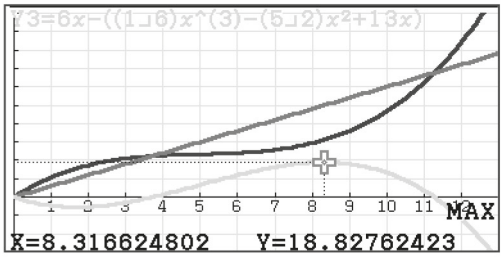
86 **1. a)** $R(x) = 6x$.
b) La courbe de R est celle tracée en rouge.



2. La courbe de C est celle tracée en bleu.
3. a) Le bénéfice est nul pour les abscisses des points d'intersection des deux courbes ci-dessus, à savoir en 0, en x_0 avec $x_0 \approx 3{,}7$ t et en x_1 avec $x_1 \approx 11{,}3$ t.
b) Le bénéfice est maximum pour l'abscisse correspondant à l'écart maximum entre les deux courbes, à savoir pour $x_2 \approx 8$ t.
c) La fonction B semble décroissante sur l'intervalle $[0\,;a]$ avec $a \approx 1{,}5$, croissante sur l'intervalle $[a\,;x_2]$ et décroissante sur l'intervalle $[x_2\,;13]$.
d) La courbe de B est tracée en vert.
On lit qu'en fait $a \approx 1{,}68$ t.



On lit qu'en fait $x_2 \approx 8{,}32$ t



87 **a)** Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;4]$,
$-(x-2)^2 + 6 = -(x^2 - 4x + 4) + 6$
$-(x-2)^2 + 6 = -x^2 + 4x - 4 + 6 = -x^2 + 4x + 2$
$-(x-2)^2 + 6 = h(x)$
b) $h(x) - h(2) = -(x-2)^2 + 6 - 6 = -(x-2)^2$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;4]$, $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc $-(x-2)^2 \leqslant 0$ et $h(x) - h(2) \leqslant 0$.
c) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;4]$, $h(x) \leqslant h(2)$.
La fonction *h* admet donc un maximum égal à $h(2) = 6$ et atteint en $x = 2$.

88 **a)** $f(x) - f(3) = x + \dfrac{9}{x} - 6$

$f(x) - f(3) = \dfrac{x^2 + 9 - 6x}{x} = \dfrac{(x-3)^2}{x}$

b) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;10]$, $(x-3)^2 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ donc $\dfrac{(x-3)^2}{x} \geqslant 0$.
Ainsi $f(x) - f(3) \geqslant 0$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;10]$, $f(x) \geqslant f(3)$.
La fonction *f* admet donc un minimum égal à $f(3) = 6$, atteint en $x = 3$.

89 **a)**
$f(x) = 3 - 4(x-2) = 3 - 4x + 8 = -4x + 11$.
$-4 < 0$, la fonction affine *f* est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
b) $g(x) = \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{4} > 0$, la fonction affine *g* est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
c) $h(x) = (3 - \pi)x - \sqrt{2}$.
$3 - \pi < 0$, la fonction affine *h* est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

90 **a)** $\dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{6 - (-6)}{-1 + 2} = 12$
Donc l'expression de *f* est de la forme $f(x) = 12x + b$ avec $b \in \mathbb{R}$.
Or, $f(-1) = 6$ donc $12 \times (-1) + b = 6$ et $b = 6 + 12 = 18$.
Ainsi pour tout nombre réel x, $f(x) = 12x + 18$.
b) $12 > 0$, la fonction *f* est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
c) $f(x) = 0$ équivaut à $12x + 18 = 0$ c'est-à-dire $x = -\dfrac{18}{12} = -1{,}5$.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

91 **a)** La fonction *f* semble décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$ et croissante sur l'intervalle $[2\,;4]$.
b) Dans le triangle ABH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore,

$HA^2 + HB^2 = AB^2$ c'est-à-dire $HA^2 = 16 - 4 = 12$.
Soit HA=$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Lorsque $x \in [0\,;2]$, $f(x) = \dfrac{(2-x)\times 2\sqrt{3}}{2}$

et $f(x) = (2-x)\sqrt{3} = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

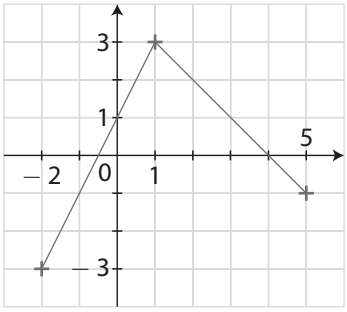
Lorsque $x \in [2\,;4]$, $f(x) = \dfrac{(x-2)\times 2\sqrt{3}}{2}$

et $f(x) = (x-2)\times\sqrt{3} = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$.

$-\sqrt{3} < 0$, la fonction affine $x \mapsto -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

$\sqrt{3} > 0$, la fonction affine $x \mapsto \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ est croissante sur l'intervalle $[2\,;4]$.

92 **a)**



b) • $2 > 0$, la fonction *f* est donc croissante sur l'intervalle $[-2\,;1]$.

• $-1 < 0$, la fonction *f* est donc décroissante sur l'intervalle $[1\,;5]$.

c) Sur l'intervalle $[-2\,;1]$, $f(x) = 0$ équivaut à $2x + 1 = 0$ c'est-à-dire $x = -0{,}5$.

Sur l'intervalle $[1\,;5]$, $f(x) = 0$ équivaut à $-x + 4 = 0$ c'est-à-dire $x = 4$.

x	-2		$-0{,}5$		4		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

93 Le prix à payer *p* pour *n* livres empruntés est donné par $p(n) = an + b$ où *a* est le prix par livre emprunté et *b* le prix de l'inscription (avec *a* et *b* nombres réels positifs).

• Avec le tableau (1) :

$\dfrac{21-20}{4-2} = \dfrac{1}{2}$ alors que $\dfrac{23-21}{6-4} = \dfrac{2}{2} = 1$

• Avec le tableau (2) :

C'est donc ce tableau qui permet de connaître les prix effacés.

$\dfrac{44-42}{4-2} = \dfrac{2}{2} = 1$ donc $a = 1$.

Or, $p(2) = 2 + b = 42$ donc $b = 40$.

Ainsi $p(n) = n + 40$.

L'inscription coûte 40 € et l'emprunt d'un livre coûte 1 €.

94 **a)** La fonction V est définie sur l'intervalle $[0\,;6]$.

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire de ABCD et $\mathscr{A}'$ l'aire de EFG.

$V(x) = \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}\times AM + \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}'\times EM$

$V(x) = \dfrac{1}{3}\times 3\times 4\times x + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\times 4}{2}\times(6-x)$

$V(x) = 4x + 2(6-x)$

$V(x) = 4x + 12 - 2x = 2x + 12$

c) $2 > 0$, la fonction V est donc croissante sur l'intervalle $[0\,;6]$.

d) $V(x) = \dfrac{1}{2}\times 4\times 3\times 6$

quand $2x + 12 = 36$ donc quand $x = 12$.

Or $12 \notin [0\,;6]$, on ne peut donc pas trouver une telle valeur de x.

95 **a) Vrai.** En effet, la fonction *f* admet un maximum égal à 1 sur l'intervalle $[0\,;7]$.

Ainsi pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;7]$, $f(x) \leqslant 1 \leqslant 7$.

b) Faux. En effet, $f(6) = -3$ et $-3 \notin [-2\,;0]$.

c) Vrai. En effet, $f(6) = -3$ et $-3 < -2{,}5$.

d) Faux. En effet, il existe trois nombres réels tels que $f(x) = 0$: un nombre dans $[0\,;3]$, un nombre dans $[3\,;6]$ et 7.

96 • Négation de P : « Il existe un nombre réel x tel que $f(x) < 3$ »

• Négation de Q : « La fonction *f* n'est pas croissante sur l'intervalle $[3\,;4]$. »

97 **a) Vrai.** En effet, *f* est croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$, 1 et 2 appartiennent à l'intervalle $[0\,;2]$:

$1 \leqslant 2$ donc $f(1) \leqslant f(2)$.

b) Faux. En effet, la fonction *f* de tableau de variations ci-dessous vérifie $f(0) < f(2)$ et n'est pas croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$

x	0		0,5		2
$f(x)$	1	↘	0	↗	3

c) Faux. En effet, pour que 4 soit le maximum de *f* sur $\mathbb{R}$, 4 doit être l'image d'un nombre réel par *f*.

d) Vrai. En effet, *f* est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Or, $0 \leqslant 1$, donc $f(0) \leqslant f(1)$.

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, donc de $f(0) \leqslant f(1)$, on déduit que $(f(0))^3 \leqslant (f(1))^3$.

Organiser son raisonnement

98 Pour un montant total des ventes de x euros, le salaire s, en euro, de l'agent est donné par :

$S(x) = ax + b$ où a est le pourcentage des ventes correspondant à sa prime et b le montant de son salaire fixe (avec a et b nombres réels positifs).

$S(700\,000) = 2\,400$ et $S(550\,000) = 2\,100$

S est une fonction affine donc :

$$\frac{S(700\,000) - S(550\,000)}{700\,000 - 550\,000} = a$$

Ainsi $a = \dfrac{2\,400 - 2\,100}{150\,000} = 0{,}002.$

$S(550\,000) = 0{,}002 \times 550\,000 + b = 2\,100$

donc $b = 2\,100 - 1100 = 1000.$

Le salaire fixe de l'agent est de 1 000 €, auquel s'ajoute 0,2 % du montant total des ventes réalisées au cours du mois.

99 **1. a)** La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2\,;10]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -2x \text{ si } x \in [-2\,;0] \\ f(x) = \sqrt{x} \text{ si } x \in]0\,;1[\\ f(x) = \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in [1\,;10] \end{cases}$$

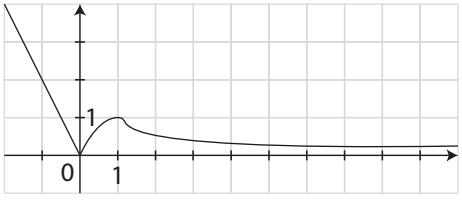
$-2 < 0$, la fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $[-2\,;0]$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc f est croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$.

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$, donc f est décroissante sur $[1\,;10]$.

x	-2		0		1		10
$f(x)$	4	↘	0	↗	1	↘	$0{,}1$

b)



2. • $g(-2) = -1$ et $g(1) = 2$

$$\frac{g(1) - g(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2 - (-1)}{3} = 1$$

$g(x) = x + b$

Or, $g(-2) = -1$ donc $-2 + b + -1$ et $b = 1$.

La fonction de g est donc définie par $g(x) = x + 1$ sur l'intervalle $[-2\,;1]$

• $g(1) = 2$ et $g(7) = -1$

$$\frac{g(7) - g(1)}{7 - 1} = \frac{-1 - 2}{6} = -0{,}5$$

$g(x) = -0{,}5x + b$

Or, $g(7) = -1$ donc $-0{,}5 \times 7 + b = -1$ et $b = 2{,}5$.

Sur l'intervalle $[1\,;7]$, la fonction g est définie par $g(x) = -0{,}5x + 2{,}5$.

• Voici le programme correspondant écrit en langage Python.

```
from math import *

def g(x):
    if x<=1:
        y=x+1
    else:
        y=-0.5*x+2.5
    return y
```

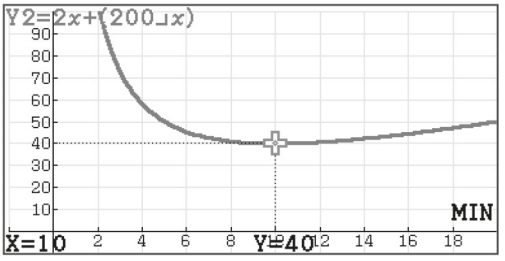
100 On note x la longueur, en cm, du rectangle (avec x nombre réel, $x > 0$).

La largeur du rectangle, en cm, est donc égal à $\dfrac{100}{x}$.

Le périmètre P du rectangle s'écrit alors, pour tout nombre réel $x > 0$:

$$P(x) = 2x + 2 \times \frac{100}{x} = \frac{2x^2 + 200}{x}$$

À l'aide de la calculatrice, on conjecture que la fonction p admet un minimum égal à 40 en $x = 10$.



Pour tout nombre réel $x > 0$,

$$P(x) - P(10) = \frac{2x^2 + 200}{x} - 40 = \frac{2x^2 + 200 - 40x}{x}$$

$$P(x) - P(10) = \frac{2(x^2 - 20x + 100)}{x} = \frac{2(x-10)^2}{x}$$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $(x-10)^2 \geqslant 0$ donc $2(x-10)^2 \geqslant 0$ et $x > 0$.

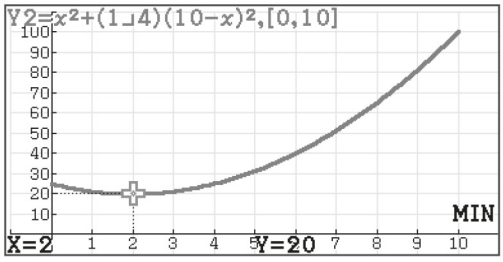
Ainsi, $P(x) - P(10) \geqslant 0$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $P(x) \geqslant P(10)$ ce qui prouve que la fonction P admet un minimum égal à $P(10) = 40$ et atteint en $x = 10$.

Le carré de côté 10 cm est donc le rectangle d'aire 100 cm^2 et de périmètre minimum.

101 g et la fonction affine définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par $g(x) = -3x + 7$.
$-3 < 0$, la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;2]$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;2]$, $1 \leqslant x \leqslant 2$ donc $g(1) \geqslant g(x) \geqslant g(2)$
soit $4 \geqslant -3x + 7 \geqslant 1$.
La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[1\,;4]$ donc $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{-3x+7} \leqslant \sqrt{4}$
et donc $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

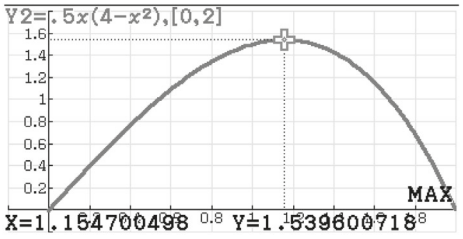
102 **a)** x appartient à l'intervalle $[0\,;10]$.
b) Dans le triangle OMB rectangle et isocèle en O, d'après le théorème de Pythagore,
$\text{OM}^2 + \text{OB}^2 = \text{MB}^2$
$2\text{OM}^2 = (10-x)^2$ et donc $\text{OM}^2 = \dfrac{1}{2}(10-x)^2$
c) $\mathscr{A}(x) = x^2 + \dfrac{\frac{1}{2}(10-x)^2}{2} = x^2 + \dfrac{1}{4}(10-x)^2$
d) À l'aide de la calculatrice, on conjecture que la fonction $\mathscr{A}$ admet sur l'intervalle $[0\,;10]$ un minimum égal à $\mathscr{A}(2)$.



Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$,
$\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(2) = x^2 + \dfrac{1}{4}(10-x)^2 - 20$
$\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(2) = x^2 + \dfrac{1}{4}(100 - 20x + x^2) - 20$
$\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(2) = x^2 + 25 - 5x + 0{,}25x^2 - 20$
$\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(2) = 1{,}25x^2 - 5x + 5$
$\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(2) = 1{,}25(x^2 - 4x + 4)$
$\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(2) = 1{,}25(x-2)^2$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$, $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc $1{,}25(x-2)^2 \geqslant 0$.
Ainsi, $\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(2) \geqslant 0$ et $\mathscr{A}(x) \geqslant \mathscr{A}(2)$.
La fonction $\mathscr{A}$ admet donc un minimum égal à $\mathscr{A}(2) = 20$ en $x = 2$.
L'aire est la plus grande lorsque $x = 10$, cette aire maximum est alors de 100 cm^2.

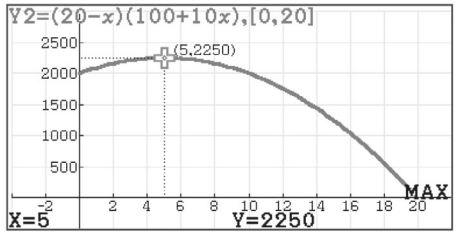
103 **1. a)** • La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ donc si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$.
$\sqrt{x} \geqslant 0$ donc $0 \leqslant \sqrt{x} \times \sqrt{x} \leqslant 1 \times \sqrt{x}$
c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$.
• La fonction carré est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Donc de $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$, on déduit $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$.
Ainsi, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.
b) • La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ donc :
si $x \geqslant 1$, alors $\sqrt{x} \geqslant 1$.
$\sqrt{x} \geqslant 0$ donc $\sqrt{x} \times \sqrt{x} \geqslant 1 \times \sqrt{x}$
c'est-à-dire $x \geqslant \sqrt{x} \geqslant 1$.
• La fonction carré est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ donc de $x \geqslant \sqrt{x} \geqslant 1$, on déduit $x^2 \geqslant x \geqslant 1$.
Ainsi, si $x \geqslant 1$, alors $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.
2. Sur l'intervalle $[0\,;1]$, la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ est au-dessous de la courbe de la fonction $x \mapsto x$ qui est elle-même située au-dessous de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est située au-dessous de la courbe de la fonction $x \mapsto x$ qui est elle-même située au-dessous de la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$.

104 On note x l'abscisse du point M ; avec $0 \leqslant x \leqslant 2$.
L'aire du triangle rectangle OMH est :
$$S(x) = \frac{1}{2}\text{OH} \times \text{MH} = \frac{1}{2}x(4 - x^2)$$



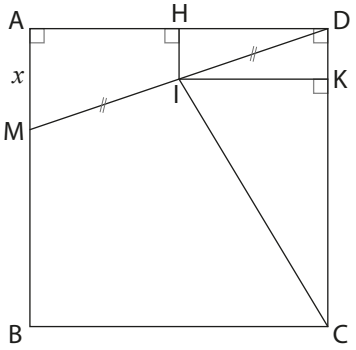
Une valeur approchée de l'abscisse de M telle que l'aire de OMH soit maximum est 1,2.
Remarque : en Première on pourra démontrer que le maximum de la fonction S est atteint en $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

105 La recette hebdomadaire, en euro, pour une réduction du prix du chemisier de x euros est donnée par : $\text{R}(x) = (20-x)(100+10x)$ avec $0 \leqslant x \leqslant 20$.
À l'aide de la calculatrice, on conjecture que la fonction R admet un maximum en $x = 5$.



Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;20]$,
$R(x) - R(5) = 2\,000 + 200x - 100x - 10x^2 - 2\,250$
$R(x) - R(5) = -10x^2 + 100x - 250$
$R(x) - R(5) = -10(x^2 - 10x + 25)$
$R(x) - R(5) = -10(x-5)^2$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;20]$, $(x-5)^2 \geqslant 0$, $-10(x-5)^2 \leqslant 0$ donc $R(x) \leqslant R(5)$.
Ce qui prouve que R admet un maximum en $x = 5$.
Le prix du chemisier assurant une recette maximum est donc de 15 €.

106 On note H le projeté orthogonal de I sur le segment [AO]. Les droites (HI) et (AM) étant parallèles, on prouve en utilisant le théorème de Thalès dans les rectangles DAM et DHI, que HD = 2,5.



Dans le triangle IDC, la hauteur issue de I coupe le segment [DC] en K.
Ainsi IK = 2,5.
Pour tout x de $[0\,;5]$,

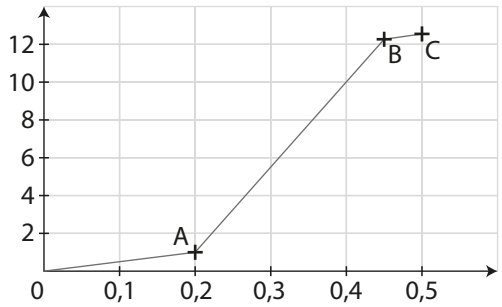
$$f(x) = \frac{DC \times IK}{2} = \frac{5 \times 2{,}5}{2} = 6{,}25.$$

La fonction *f* est donc constante et pour tout x de $[0\,;5]$, $f(x) = 6{,}25$.

107 **a)** • La vitesse est de $5\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ pendant 12 min, c'est-à-dire $0{,}2\ \text{h}\ \left(\frac{12}{60}\right)$.
Donc si $t \in [0\,;0{,}2]$, $d(t) = 5t$.
• Pendant les 0,25 h suivantes, la vitesse est de $45\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
Or à $t = 0{,}2$, Enzo a déjà parcouru 1 km.
En effet, $5 \times 0{,}2 = 1$.
Donc si $t \in [0{,}2\,;0{,}45]$, $d(t) = 45(t - 0{,}2) + 1$.
• Pendant les 0,05 h suivantes, la vitesse est de $6\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
Or à $t = 0{,}45$, Enzo a déjà parcouru 12,25 km.
En effet, $45(0{,}45 - 0{,}2) + 1 = 12{,}25$.
Donc si $t \in [0{,}45\,;0{,}5]$, $d(t) = 6(t - 0{,}45) + 12{,}25$.

b) $\begin{cases} d(t) = 5t \text{ si } t \in [0\,;0{,}2] \\ d(t) = 45t - 8 \text{ si } t \in [0{,}2\,;0{,}45] \\ d(t) = 6t + 9{,}55 \text{ si } t \in [0{,}45\,;0{,}5] \end{cases}$

A(0,2 ; 1) B(0,45 ; 12,25) C(0,5 ; 12,55)



c) 5 ; 45 et 6 sont des nombres positifs, la fonction *d* est donc croissante sur chacun des intervalles $[0\,;0{,}2]$, $[0{,}2\,;0{,}45]$ et $[0{,}45\,;0{,}5]$.

t	0	0,5
d(*t*)	0 ↗	12,55

108 **a)** The perimeter of the square ABCD is 16 cm.
f is well defined on the interval $[0\,;16]$.
b) • If $x = 0$, $f(0) = OA$.
The triangle ABC is rectangle at the point B hence we can apply Pythagore's theorem :
$AC^2 = BA^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$
and $AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
• Hence $AO = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$.
If $x = 2$, M is the middle point of [AB], then the straight lines (OM) and (BC) are parallel.
We can apply Thales's theorem in the triangles AOM and ACB : OM = 2.

x	0	2	4	6	8
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$

2. a)

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$f(x)$	$2\sqrt{2}$ ↘	2 ↗	$2\sqrt{2}$ ↘	2 ↗	$2\sqrt{2}$ ↘	2 ↗	$2\sqrt{2}$ ↘	2 ↗	$2\sqrt{2}$

b) The minimum of *f* is 2, reached at $x = 2$, $x = 6$, $x = 10$ and $x = 14$.
The maximum of *f* is $2\sqrt{2}$, reached at $x = 0$, $x = 4$, $x = 8$, $x = 12$ and $x = 16$.

109 La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
$1 \leqslant 3 \leqslant 4$ donc $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{3} \leqslant \sqrt{4}$.
Ainsi $1 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2$ et $2 \leqslant \sqrt{3} + 1 \leqslant 3$. Or, $\frac{12}{7} < 2$.
Donc $\frac{12}{7} < \sqrt{3} + 1$. La fonction carré est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, donc $\left(\frac{12}{7}\right)^2 < (\sqrt{3}+1)^2$.

110 • $1 \leqslant 2$ et $f(1) \leqslant f(2)$, on en déduit que f est donc croissante ou constante sur $\mathbb{R}$.
• $3 \leqslant 4$ et $f(3) \geqslant f(4)$, on en déduit que f est décroissante ou constante sur $\mathbb{R}$.
• La fonction affine est donc constante et pour tout nombre réel x, $f(x) = f(5) = 5$.

111 • $f(1) = 3$ et $f(-3) = 0$

$$\frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3}{4}.$$

Donc l'expression de f est de la forme $f(x) = \frac{3}{4}x + b$.

Or, $f(1) = 3$ donc $\frac{3}{4} + b = 3$ et $b = \frac{9}{4}$.

Ainsi, f est la fonction affine définie par $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

112 • On veut déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
• u et v désignent deux nombres réels de l'intervalle $]-\infty\,;0[$ tels que $u \leqslant v < 0$.
La fonction carré est décroissante sur cet intervalle donc $u^2 \geqslant v^2 > 0$.
Or sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction inverse est décroissante.
Ainsi, $\frac{1}{u^2} \leqslant \frac{1}{v^2}$ et $f(u) \leqslant f(v)$.
La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
• u et v désignent deux nombres réels de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ tels que $0 < u \leqslant v$.
La fonction carré est croissante sur cet intervalle donc $0 < u^2 \leqslant v^2$.
Or, la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\frac{1}{u^2} \geqslant \frac{1}{v^2}$ et $f(u) \geqslant f(v)$.
La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

113 **1.** C. En effet, $x_0 \approx 2{,}5$ $m \approx -2{,}8$, $M \approx 1{,}9$.

x	-3		0		x_0		4
$f(x)$	m	↗	0	↗	M	↘	0

2. D. En effet, la fonction f admet un minimum égal à -1 sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

3. B. En effet, $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 3}{1} = -2$.
Donc $f(x) = -2x + b$.
Or $f(1) = 3$ donc $-2 \times 1 + b = 3$ et $b = 5$.
Ainsi $f(x) = -2x + 5$ et $f(3) = -1$.

4. D. En effet,

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ donc sur $[-1\,;0]$.

5. D. En effet, $6x - 4 = 0$ équivaut à $x = \frac{2}{3}$.

C'est la seule fonction à s'annuler en $x = \frac{2}{3}$.

6. B. En effet, $f(x) - f(5) < 0$ donc $f(x) < f(5)$, ce qui prouve que f admet $f(5)$ pour maximum sur $\mathbb{R}$.

7. C. En effet, la droite (EF) est la courbe représentative de la fonction affine f telle que $f(0) = 3$ et $f(3) = -2$.

$$a = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{-2 - 3}{3} = -\frac{5}{3}$$

Donc la fonction f est définie par :

$$f(x) = -\frac{5}{3}x + b.$$

Or, $f(0) = 3$ donc $b = 3$.

Ainsi, $f(x) = -\frac{5}{3}x + 3$

$$-\frac{5}{3} \times \frac{1}{2} + 3 = -\frac{5}{6} + \frac{18}{6} = \frac{13}{6}$$

Les points E, F, C sont donc alignés.

8. D. En effet,

x	1		2
$\frac{1}{x}$	1	↘	0,5

9. C. En effet, les fonctions affines $x \mapsto 5 - 2x$ et $x \mapsto \frac{6}{11} - \frac{1}{11}x$, ainsi que la fonction inverse sont décroissantes sur l'intervalle $[1\,;4]$.

10. B. En effet, la fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.
Si $x < -2 < 0$ alors $x^2 > (-2)^2 > 0$ et $x^2 > 4$.

114 • Le Doc. 2 indique que le gagnant de la 11e étape est Geraint Thomas.
• D'après le Doc. 1, le supporter a attendu au Cornet de Roselend, correspondant au 70e km du parcours.
• En utilisant le Doc. 3, on lit que le nombre 70 a pour antécédent 2,4 pour la fonction distance représentée.
• On peut alors estimer que le supporter a vu arriver le vainqueur de la 11e étape du Tour de France au bout de 2 h 24 min.

115 • La fonction f représentée au Doc. 1 est une fonction affine.

• D'après le Doc. 2, $f(0) = 8{,}932\,9$ et $f(1) = 8{,}016\,2$.

$\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = -0{,}916\,7$

Donc l'expression de f est de la forme $f(x) = -0{,}916\,7x + b$.

Or, $f(10) = -0{,}234$ donc $b = 8{,}933$.

Ainsi, $f(x) = -0{,}916\,7x + 8{,}933$.

• $f(x) = 0$ lorsque $-0{,}916\,7x + 8{,}933 = 0$ c'est-à-dire $x = \dfrac{8{,}933}{0{,}916\,7}$ soit $x \approx 9{,}745$.

• Dans le repère du Doc. 1, on considère les points $O(0\,;0)$, $A(0\,;8{,}932\,9)$ et $B(9{,}745\,;0)$.

Dans le triangle OAB rectangle en O, $\tan(\widehat{OBA}) = \dfrac{OA}{OB}$ soit $\tan(\widehat{OBA}) \approx \dfrac{8{,}932\,9}{9{,}745}$.

Avec la calculatrice, on obtient, $\widehat{OBA} \approx 42{,}5°$.

La toiture a donc une pente d'environ $42{,}5°$.

116 La casserole a un volume de $2\,L$, c'est-à-dire de $2\ dm^3$.

Donc $\mathcal{V} = \pi r^2 h = 2$ et $h = \dfrac{2}{\pi r^2}$.

L'aire latérale de la casserole est alors :

$\mathcal{A} = 2\pi rh = 2\pi r \times \dfrac{2}{\pi r^2} = \dfrac{4}{r}$ et l'aire du fond de la casserole est : πr^2.

L'aire de tôle utilisée, en dm^2, en fonction du rayon r, en dm, est donnée par la fonction a définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $a(r) = \pi r^2 + \dfrac{4}{r}$.

D'après la réponse renvoyée par le logiciel de calcul formel, la fonction a admet un minimum lorsque $r \approx 0{,}860\,3$ c'est-à-dire lorsque $h \approx \dfrac{2}{\pi \times 0{,}860\,3^2}$ soit $h \approx 8{,}602$.

Pour minimiser le coût de fabrication, la casserole doit avoir une hauteur égale à environ $8{,}6$ cm et un rayon égal à environ $8{,}6$ cm.

117 • Si $0 \leqslant h \leqslant 6$, alors $V = 6 \times 6 \times h = 36h$.

Si $6 \leqslant h \leqslant 12$, alors :

$$V = 6^3 + \pi \times 2^2 \times (h - 6) = 216 + 4\pi(h - 6)$$

C'est donc le graphique de Roxane qui représente la situation.

• **Graphique de Kévin**

La fonction V représentée est linéaire et $V(12) = 216 + 24\pi$.

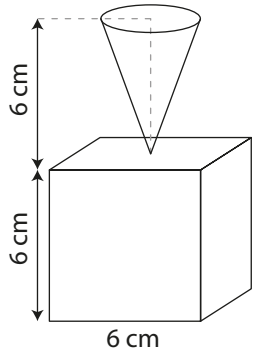
Pour tout h de $[0\,;12]$, $V(x) = ah$ avec $a = \dfrac{216 + 24\pi}{12} = 18 + 2\pi$.

Donc pour tout h de $[0\,;12]$, $V(h) = (18 + 2\pi)h$.

Un solide qui conviendrait serait un parallélépipède rectangle de hauteur 12 cm et de base un rectangle de dimensions 2 cm et $(9 + \pi)$ cm (environ 12,1 cm).

• **Graphique d'Amélie**

On considère un cube d'arête 6 cm surmonté d'un cône de révolution, disposé comme ci-contre de hauteur 6 cm et de rayon r cm.



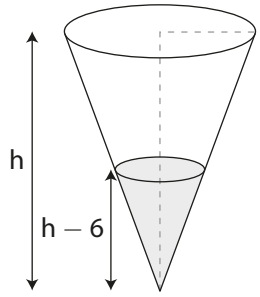
Le volume de ce cône devrait être égal au volume du cylindre du graphique de Roxane.

Ainsi, $\pi \times 2^2 \times 6 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \times 6$ c'est-à-dire $2^2 = 12$ soit $r = \sqrt{12}$ cm.

Pour une hauteur d'eau h, en cm, supérieure à 6 cm, le volume d'eau dans le cône est :

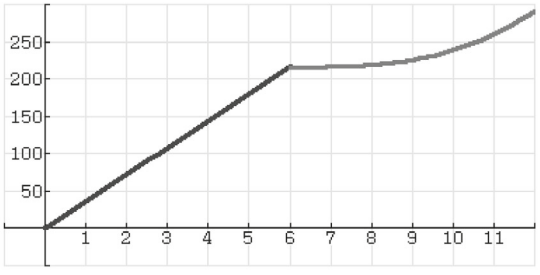
$\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{12}}{6}(h - 6)\right)^2 \times (h - 6)$

c'est-à-dire $\dfrac{1}{9}\pi(h - 6)^3$.



Donc la fonction V représentée sur le graphique d'Amélie est définie par :

$$\begin{cases} V(h) = 36h \text{ si } h \in [0\,;6] \\ V(h) = 216 + \dfrac{1}{9}\pi(h - 6)^3 \text{ si } h \in [6\,;12] \end{cases}$$



11 Information chiffrée

Découvrir

1 Pourcentage, proportion, évolution

1 $\frac{53}{122} \approx 0{,}434$

La proportion de voiliers Class40 dans l'ensemble des voiliers participants est environ 43,4 %.

2 **a)** $\frac{27}{100} \times 122 = 32{,}94$ donc il y avait 33 multicoques.

$\frac{18{,}2}{100} \times 33 = 6{,}006$ donc il y avait 6 Multi50.

b) $\frac{6}{122} \approx 0{,}049$

La proportion de voiliers Multi50 dans l'ensemble des voiliers participants est environ 4,9 %.

3 • $\frac{122-91}{91} \approx 0{,}34$ donc, entre 2014 et 2018, le taux d'augmentation du nombre d'engagés est environ 34 %.

• $\frac{74-58}{58} \approx 0{,}28$ donc, entre 2002 et 2006, le taux d'augmentation du nombre d'engagés est environ 28 %.

• L'affirmation de l'article de presse n'est pas exacte. En effet, 34 % $>$ 28 %. On ne peut toutefois pas parler d'une information fausse, car si l'on arrondit à la dizaine, 34 % et 28 % sont proches de 30 %.

2 Évolutions successives

1 • Valeur de l'action fin mars :

$$100\,€ + \frac{10}{100} \times 100\,€ = 100\,€ \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)$$
$$= 100\,€ \times 1{,}1.$$

Fin mars, l'action vaut 110 €.

• Valeur de l'action fin avril :

$$110\,€ - \frac{10}{100} \times 110\,€ = 110\,€ \times \left(1 - \frac{10}{100}\right)$$
$$= 110\,€ \times 0{,}9.$$

Fin avril, l'action vaut 99 €.

2 **a)** On désigne par a la valeur de l'action (en euro) début mars.

Fin mars, la valeur de l'action est $a \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)$.

Fin avril, la valeur de l'action est

$a \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

L'égalité $a \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = a$ traduit le fait que, fin avril, l'action retrouve sa valeur initiale a de début mars.

Or, $a \neq 0$; cette égalité équivaut donc à :

$$\left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1.$$

b) $\left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1$

équivaut à $1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{1 + \frac{10}{100}}$,

c'est-à-dire $1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{1{,}1}$,

soit $\frac{t}{100} = 1 - \frac{1}{1{,}1} = \frac{0{,}1}{1{,}1}$.

Ainsi $t = \frac{0{,}1}{1{,}1} \times 100 = \frac{100}{11}$ soit $t \approx 9{,}09$.

Pour que l'action retrouve fin avril sa valeur de début mars, le taux de baisse en avril doit être environ 9,09 %.

Acquérir des automatismes

3 On calcule 72 % de 83 %.

$\frac{72}{100} \times \frac{83}{100} = 0{,}72 \times 0{,}83 = 0{,}5976$

Environ 59,8 % des clients ont acheté un sapin Nordmann.

4 • Société S_1 : $16\,540 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 14\,059$

En mars, le chiffre d'affaires de la société S_1 est 14 059 €.

• Société S_2 : $\frac{21\,864 - 18\,220}{18\,220} = 0{,}2$

Entre janvier et mars, le chiffre d'affaires de la société S_2 a augmenté de 20 %.

• Société S_3 : $\frac{16\,192 - 17\,600}{17\,600} = -0{,}08$

Entre janvier et mars, le chiffre d'affaires de la société S_3 a baissé de 8 %.

Voici le tableau complété.

	janvier	mars	Taux d'évolution
S1	16 540	14 059	– 15 %
S2	18 220	21 864	20 %
S3	17 600	16 192	– 8 %

7 Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 + \frac{12}{100}\right) \times \left(1 - \frac{15}{100}\right).$$

Ainsi $1 + \frac{t}{100} = 1{,}12 \times 0{,}85 = 0{,}952$

soit $\frac{t}{100} = -0{,}048$.

Le nombre de paniers a diminué de 4,8 % entre le 1er juin et le 31 juillet 2019.

8 Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 - \frac{9}{100}\right) \times \left(1 - \frac{13}{100}\right).$$

Ainsi $1 + \frac{t}{100} = 0{,}91 \times 0{,}87 = 0{,}7917$

soit $\frac{t}{100} = -0{,}2083$.

L'audience a diminué d'environ 20,8 % entre les 1er et 3e épisodes.

9 Le taux d'évolution réciproque t' % vérifie :

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 - \frac{20}{100}} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25.$$

Ainsi $\frac{t'}{100} = 0{,}25$.

En 2019, la production de sel doit augmenter de 25 % pour retrouver sa valeur initiale.

10 Le taux d'évolution réciproque t' % vérifie :

$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 + \frac{30}{100}} = \frac{1}{1{,}3}$ soit $1 + \frac{t'}{100} \approx 0{,}77$.

Ainsi $\frac{t'}{100} \approx -0{,}23$; donc au retour des vacances, Lara devrait diminuer son temps de lecture d'environ 23 % pour retrouver sa durée initiale de lecture.

11 **a)** La population P est l'ensemble des patients vus par le médecin au cours de la journée.

La sous-population V est l'ensemble des patients du médecin venus se faire vacciner ce jour-là.

b) $\frac{20}{100} \times 30 = 6$ donc 6 patients vus par le médecin ce jour-là ont été vaccinés.

12 Jules se trompe. En effet, $\frac{3}{4}$ correspond à 75 %, et non à 80 %.

13 Les affirmations exactes sont **(1)** et **(3)**.

14 **a) Faux.** En effet, $\frac{12}{12 + 20} = \frac{12}{32} = 0{,}375$ (et non 0,6).

b) Vrai. En effet, $\frac{12}{12 + 20} = 0{,}375$ soit 37,5 %.

c) Vrai. En effet, 100 % – 37,5 % = 62,5 %.

15 $\frac{9}{25} = 0{,}36$ donc 36 % des poules de la population E sont rousses.

16 $\frac{650}{1200} \approx 0{,}542$

Environ 54,2 % des pommes de la population E sont des pommes golden.

17 Il y a 31 jours en juillet.

$24\text{ h} \times 31 = 744\text{ h}$ donc le mois de juillet compte 744 h.

$\frac{362}{744} \approx 0{,}4866$ donc, à Nice, en juillet 2018, les heures d'ensoleillement ont représenté environ 48,66 % du nombre total d'heures de ce mois.

18 On désigne par m la masse, en tonne, de quinoa consommée en France en 2018.

On peut traduire la situation par la relation

$\frac{30}{100} \times m = 1800$, c'est-à-dire $0{,}3m = 1800$.

Ainsi, $m = \frac{1800}{0{,}3} = 6000$.

En 2018, 6 000 t de quinoa ont été consommées en France.

19 La proportion cherchée est :

$p = \frac{3427}{3427 + 2913} = \frac{3427}{6340}$, soit $p \approx 0{,}54$.

La longueur des côtes représente environ 54 % du périmètre de la France métropolitaine.

20 **a)** En cellule E2, on saisit la formule =B2+C2+D2 ou la formule =SOMME(B2:D2).

De même, en cellule E3, on saisit la formule =B3+C3+D3 ou la formule =SOMME(B3:D3).

b) • En cellule B4, on peut saisir la formule =B2+B3.

• En cellule B5, on peut saisir la formule =B2/B4.

On recopie ces formules vers la droite jusqu'en cellules E4 et E5.

c) Voici une copie de la feuille de calcul.

	A	B	C	D	E
1		**Ouvriers**	**Secrétaires**	**Cadres**	**Total**
2	**Femmes**	18	3	3	24
3	**Hommes**	32	1	7	40
4	**Total**	50	4	10	64
5	**Pourcentage de femmes**	36,00 %	75,00 %	30,00 %	37,50 %

d) Jamil se trompe.

En effet, $36\ \% + 75\ \% + 30\ \% = 141\ \%$.

Ce pourcentage est très éloigné du pourcentage de femmes dans la société (37,5 %). Cela provient du fait que :

$$\frac{18}{50} + \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \neq \frac{18+3+3}{50+4+10}.$$

21 • Avant l'arrivée des nouvelles personnes, la proportion de lecteurs de moins de 20 ans est $\frac{15}{30}$, c'est-à-dire 50 %.

• Après l'arrivée des nouvelles personnes, on compte 35 lecteurs, dont 17 ont moins de 20 ans. La proportion de lecteurs de moins de 20 ans est $\frac{17}{35}$, soit moins de 50 % (en effet, 17 est strictement inférieur à la moitié de 35). La proportion de lecteurs de moins de 20 ans a donc diminué.

22 • $\frac{40}{100} \times 780 = 312$ et $\frac{65}{100} \times 420 = 273$

M. Jouand a obtenu 312 voix dans le bureau 1 et 273 voix dans le bureau 2.

• $312 + 273 = 585$ et $780 + 420 = 1200$

Dans l'ensemble des deux bureaux de vote, M. Jouand a obtenu 585 voix parmi les 1 200 bulletins exprimés.

$\frac{585}{1200} = 0{,}4875$ donc il a obtenu 48,75 % des bulletins exprimés sur l'ensemble des deux bureaux de vote.

23 Réponse **(3)**. En effet, on calcule ici un pourcentage de pourcentage (30 % de 70 %).

24 $0{,}6 \times 0{,}15 = 0{,}09$ donc les chiens adoptés ce week-end représentent 9 % des animaux du refuge.

25 • Exemple de proposition :

Lors d'un match de hand-ball, les supporters de l'équipe locale occupent 75 % des places en tribune. Parmi eux, on compte 25 % de jeunes de moins de 16 ans.

Calculer le pourcentage de places en tribune occupées par des supporters locaux de moins de 16 ans.

• Réponse : $0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}1875$

Les supporters locaux de moins de 16 ans occupent 18,75 % des places en tribune.

26 C'est vrai. En effet, $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$.

27 **a)** L'ensemble E représente la capacité de la carte mémoire, l'ensemble F est l'ensemble des fichiers audio et l'ensemble G l'ensemble des fichiers de K-pop.

b) $0{,}72 \times 0{,}65 = 0{,}468$

Les fichiers de K-pop occupent 46,8 % de la capacité de la carte mémoire.

28 $0{,}61 \times 0{,}64 = 0{,}3904$

Cet été, 39,04 % des Français sont allés en vacances à la mer.

29 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$.

Un quart des vélos, c'est-à-dire 25 % des vélos de ce magasin, sont des vélos électriques de marque française.

30 $100\ \% - 40\ \% = 60\ \%$.

Parmi les clients d'Abel qui font des achats de moins de 30 €, 60 % paient autrement qu'en espèces.

$0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$ donc 48 % des clients d'Abel règlent des achats de moins de 30 € autrement qu'en espèces.

31 L'affirmation **(3)** est correcte.

En effet, $P' = P + \frac{15}{100} \times P = P \times \left(1 + \frac{15}{100}\right)$.

32 **a)** Augmentation de 20 % (en effet, $1{,}2 = 1 + \frac{20}{100}$).

b) Diminution de 7 % (en effet, $0{,}93 = 1 - \frac{7}{100}$).

c) Augmentation de 200 % (en effet, $3 = 1 + \frac{200}{100}$).

d) Augmentation de 50 % (en effet, $1{,}5 = 1 + \frac{50}{100}$).

e) Diminution de 30 % (en effet, $0{,}7 = 1 - \frac{30}{100}$).

33 • C'est Justine qui a raison.

En effet, le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 50 % est $CM = 1 - \frac{50}{100} = 0{,}5$.

Or, multiplier par 0,5 c'est aussi multiplier par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à diviser par 2.

• Augmenter de 50 % revient à multiplier par 1,5, donc William se trompe.

34 • $V_1 - V_0 = 250\,€ - 200\,€ = 50\,€$

La variation absolue du prix de cet objet est 50 €.

• $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

La variation relative est 25 %.

35 **a)** $CM = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$

b) $CM = 1 - \frac{12}{100} = 0{,}88$

c) $CM = 1 - \frac{5}{100} = 0{,}95$

36 $120\,€ + 49\,€ = 169\,€$

$\left(1 + \frac{5}{100}\right) \times 169\ € = 177{,}45\,€$

Le montant de la dépense est 177,45 €, frais de port inclus.

37 $\left(1 - \frac{15}{100}\right) \times 69\ € = 58{,}65\,€$

$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 73\ € = 58{,}40\,€$

$58{,}40\,€ < 58{,}65\,€$ donc Pierre choisit le blouson de droite, qu'il paie 58,40 €.

38 Deux démarches possibles :

– on calcule le taux d'évolution de chaque prix en 2018 et on le compare au taux d'inflation ;

– on calcule chaque prix, fin 2018, avec une hausse conforme à l'inflation, puis on le compare à celui relevé.

Ci-après, on propose la première démarche.

• Boule de pain : $\frac{1{,}2 - 1{,}1}{1{,}1} \approx 0{,}09$.

Le prix d'une boule de pain a augmenté d'environ 9 % en 2018, soit une hausse beaucoup plus forte que l'inflation.

• Place de cinéma : $\frac{10 - 9{,}9}{9{,}9} \approx 0{,}0101$.

Le prix d'une place de cinéma a augmenté d'environ 1,01 % en 2018, soit une hausse inférieure à l'inflation.

• Carnet de 10 tickets de bus : $\frac{15{,}10 - 14{,}80}{14{,}80} \approx 0{,}020$.

Le prix d'un carnet de 10 tickets de bus a augmenté d'environ 2 % en 2018, ce qui est conforme à l'inflation.

39 On désigne par n le nombre de lycéens ayant eu leur baccalauréat en 2018 dans cet établissement.

On peut traduire la situation par la relation

$\left(1 + \frac{8}{100}\right) \times n = 189$ c'est-à-dire $1{,}08n = 189$.

Ainsi $n = \frac{189}{1{,}08} = 175$.

En 2018, 175 lycéens avaient eu leur baccalauréat dans cet établissement.

40 • $V_1 - V_0 = 50193 - 46800 = 3393$

La variation absolue de cette population, sur la période 2010-2015, est 3 393 habitants.

• $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{3393}{46800} = 0{,}0725$

La variation relative, sur la période 2010-2015, est 7,25 %.

41 Alicia a oublié de mettre des parenthèses.

Elle aurait dû saisir $(182000 - 173000) \div 173000$.

42 **a)** $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{150 - 25}{25} = \frac{125}{25} = 5$

Le taux d'évolution du nombre de lions sauvages, entre 1990 et 2018, est 500 %.

b) $150 : 25 = 6$ (autre démarche : $CM = 1 + 5 = 6$)

Le nombre de lions sauvages a été multiplié par 6 entre 1990 et 2018.

43 $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{4{,}59 - 6{,}32}{6{,}32} = -\frac{1{,}73}{6{,}32}$

soit $\frac{V_1 - V_0}{V_0} \approx -0{,}2737$.

Entre septembre 2000 et septembre 2018, la superficie de la banquise arctique a diminué d'environ 27,37 %.

44 • $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{2{,}51 - 2{,}34}{2{,}34} = \frac{0{,}17}{2{,}34}$

soit $\frac{V_1 - V_0}{V_0} \approx -0{,}0726$. Le nombre d'utilisateurs de réseaux sociaux dans le monde a augmenté d'environ 7,26 % entre 2016 et 2017.

• $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{2{,}67 - 2{,}51}{2{,}51} = \frac{0{,}16}{2{,}51}$

soit $\frac{V_2 - V_1}{V_1} \approx 0{,}0637$.

Il a augmenté d'environ 6,37 % entre 2017 et 2018.

45 • $400 - 200 = 600 - 400 = 800 - 600 = 200$.

Les variations absolues sont égales, donc chaque jour, il y a le même nombre d'admissions.

• $\frac{200}{200} = 1$; $\frac{200}{400} = 0{,}5$; $\frac{200}{600} \approx 0{,}33$.

Le taux d'évolution du nombre d'admissions diminue : hausse de 100 % entre les 1er et 2e jours, hausse de 50 % entre les 2e et 3e jours et hausse d'environ 33 % entre les 3e et 4e jours.

46 L'affirmation **(2)** est correcte.

En effet, $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$ et $1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$.

Le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs, c'est-à-dire $CM = 1{,}1 \times 1{,}2$.

47 Adel se trompe. En effet, le coefficient multiplicateur global est $CM = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \times \left(1 + \frac{20}{100}\right)$, c'est-à-dire $CM = 0{,}8 \times 1{,}2 = 0{,}96$ (or, $0{,}96 \neq 1$).

48 **a)** Le coefficient multiplicateur global est :

$$CM = \left(1 - \frac{50}{100}\right) \times \left(1 - \frac{50}{100}\right) = 0{,}5^2 = 0{,}25 = 1 - \frac{75}{100}$$

Il s'agit d'une diminution globale de 75 %.

b) $CM = \left(1 + \frac{100}{100}\right) \times \left(1 + \frac{100}{100}\right) = 2^2 = 4 = 1 + \frac{300}{100}$

Il s'agit d'une augmentation globale de 300 %.

c) $CM = \left(1 + \frac{20}{100}\right) \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1{,}2^2 = 1{,}44$

$= 1 + \frac{44}{100}$

Il s'agit d'une augmentation globale de 44 %.

d) $CM = \left(1 + \frac{20}{100}\right) \times \left(1 - \frac{50}{100}\right) = 1{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}6$

$= 1 - \frac{40}{100}$

Il s'agit d'une diminution globale de 40 %.

e) $CM = \left(1 - \frac{40}{100}\right) \times \left(1 + \frac{50}{100}\right) = 0{,}6 \times 1{,}5 = 0{,}9$

$= 1 - \frac{10}{100}$

Il s'agit d'une diminution globale de 10 %.

49 **a)** Le coefficient multiplicateur global est :

$$CM = \left(1 + \frac{40}{100}\right) \times \left(1 + \frac{18}{100}\right) = 1{,}4 \times 1{,}18 = 1{,}652$$

b) Le prix moyen du kilogramme de carottes a subi une hausse globale de 65,2 %.

50 Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 + \frac{20}{100}\right) \times \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 1{,}2 \times 0{,}88 = 1{,}056.$$

Ainsi $\frac{t}{100} = 0{,}056$.

Sur les deux années, le nombre de coureurs a augmenté de 5,6 %.

51 Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 0{,}95 \times 1{,}04 = 0{,}988.$$

Ainsi $\frac{t}{100} = -0{,}012$.

Sur les deux mois, le volume des ventes a diminué de 1,2 %.

52 Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 0{,}9^2 = 0{,}81.$$

Ainsi $\frac{t}{100} = -0{,}19$.

En deux années, la superficie de terrain envahi par la renouée du Japon a diminué de 19 %.

53 **a)** $c = (1 + 1/100)(1 + 2/100) = 1{,}0302$

$t = (1{,}032 - 1) \times 100 = 3{,}2$

Le nombre renvoyé par la fonction est 3,2.

b) Cette fonction renvoie l'arrondi au centième d'un taux d'évolution global, après deux évolutions successives.

c) • Voici l'affichage obtenu :

```
>>> Taux(-1.5,-2.5)
-3.96
```

• Exemple de situation : Le nombre d'abonnés à un quotidien régional a baissé de 1,5 % en 2018, puis il a encore baissé de 2,5 % en 2019.

Quel est le taux d'évolution global, en pourcentage, sur ces deux années ? Arrondir au centième.

Réponse : le nombre d'abonnés a baissé d'environ 3,96 % au cours de ces deux années.

54 Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 - \frac{1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{0{,}1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{0{,}4}{100}\right)$$

c'est-à-dire $1 + \frac{t}{100} = 0{,}99 \times 1{,}001 \times 1{,}004$.

Ainsi $1+\frac{t}{100} \approx 0{,}995$ soit $\frac{t}{100} \approx -0{,}005$.

Sur ces trois trimestres de 2018, le nombre de demandeurs d'emploi en France métropolitaine a diminué d'environ 0,5 %.

55 L'affirmation **(3)** est correcte.

En effet, CM' est l'inverse de CM.

56 **a)** $0{,}4 \times 2{,}5 = 1$.

b) $CM = 1-\frac{60}{100} = 0{,}4$.

Le coefficient multiplicateur de l'évolution directe est 0,4 donc le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est son inverse ; ainsi $CM' = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$.

Le nombre de fans de la chanteuse doit être multiplié par 2,5.

Le taux d'augmentation associé t % vérifie :

$1+\frac{t}{100} = 2{,}5$ c'est-à-dire $\frac{t}{100} = 1{,}5$.

Le nombre de fans de la chanteuse doit augmenter de 150 % pour retrouver son niveau d'avant ce concert.

57 **a)** $\frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$; $\frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$; $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{1}{0{,}25} = 4$.

Voici le tableau complété.

	①	②	③	④
CM	1,6	0,8	5	0,25
Inverse de CM	0,625	1,25	0,2	4

b) • Le taux d'évolution t % vérifie :

$$1+\frac{t}{100} = 1{,}6.$$

Ainsi $\frac{t}{100} = 0{,}6$. Il s'agit d'une augmentation de 60 %.

• Le taux d'évolution réciproque t' % vérifie :

$1+\frac{t'}{100} = 0{,}625$ soit $\frac{t'}{100} = -0{,}375$.

L'évolution réciproque est une diminution de 37,5 %.

c) • $CM = 1-\frac{20}{100} = 0{,}8$ donc le coefficient multiplicateur réciproque est 1,25 (colonne 2 du tableau).

$1{,}25-1 = 0{,}25$ donc l'évolution réciproque d'une diminution de 20 % est une augmentation de 25 %.

• $CM = 1+\frac{400}{100} = 5$ donc le coefficient multiplicateur réciproque est 0,2 (colonne 3 du tableau).

$0{,}2-1 = -0{,}8$ donc l'évolution réciproque d'une augmentation de 400 % est une diminution de 80 %.

• $CM = 1-\frac{75}{100} = 0{,}25$ donc le coefficient multiplicateur réciproque est 4 (colonne 4 du tableau).

$4-1 = 3$ donc l'évolution réciproque d'une diminution de 75 % est une augmentation de 300 %.

58 **a)** Le taux d'évolution réciproque t' % vérifie :

$1+\frac{t'}{100} = \frac{1}{1-\frac{90}{100}} = \frac{1}{0{,}1} = 10$ c'est-à-dire $\frac{t'}{100} = 9$.

L'évolution réciproque d'une diminution de 90 % est une augmentation de 900 %.

b) Le taux d'évolution réciproque t' % vérifie :

$1+\frac{t'}{100} = \frac{1}{1+\frac{500}{100}} = \frac{1}{6}$ c'est-à-dire $1+\frac{t'}{100} \approx 0{,}167$.

Ainsi $\frac{t'}{100} \approx -0{,}833$.

L'évolution réciproque d'une augmentation de 500 % est une diminution d'environ 83,3 %.

59 Le taux d'évolution réciproque t' % vérifie :

$1+\frac{t'}{100} = \frac{1}{1-\frac{4{,}51}{100}} = \frac{1}{0{,}9549}$

c'est-à-dire $1+\frac{t'}{100} \approx 1{,}0472$.

Ainsi $\frac{t'}{100} \approx 0{,}0472$.

Pour qu'il retrouve sa valeur du 23 octobre, le Nasdaq aurait dû augmenter d'environ 4,72 %.

60 **a)** Voici la fonction écrite en langage Python.

```
1 def TauxRéci(t1):
2     c=1/(1+t1/100)
3     t=(c-1)*100
4     t=round(t,2)
5     return t
```

b) Voici l'affichage obtenu :

```
>>> TauxRéci(2)
-1.96
```

• Exemple de situation : Le prix d'un ticket de bus a augmenté de 2 % en septembre.

Quel devrait être son taux d'évolution en pourcentage en octobre, pour qu'il retrouve sa valeur d'août ? Arrondir au centième.

Réponse : Le prix du ticket de bus doit baisser d'environ 1,96 % en octobre.

61 **1.** C **2.** B **3.** D **4.** A **5.** D

62 **1.** A, B, C, D **2.** B, C **3.** A, C, D **4.** B, C, D

63 **1. Faux**. En effet,

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{41{,}9 - 44{,}9}{44{,}9} = -\frac{3}{44{,}9}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} \approx -0{,}067$$

Les dépenses ont baissé d'environ 6,7 % et non de 6,5 %.

2. Vrai. En effet, $CM = \frac{43{,}7}{41{,}9}$ soit $CM \approx 1{,}04$.

3. Faux. En effet, le taux d'évolution entre 2015 et 2017 est :

$$\frac{V_2 - V_0}{V_0} = \frac{43{,}7 - 44{,}9}{44{,}9} = -\frac{1{,}2}{44{,}9}$$

soit $\frac{V_2 - V_0}{V_0} \approx -0{,}027$.

Or, $-0{,}027 \neq -0{,}024$.

4. Vrai. En effet, le taux d'évolution pour passer de 43,7 à 44,9 (en milliards d'euros) est

$$\frac{V_3 - V_2}{V_2} = \frac{44{,}9 - 43{,}7}{43{,}7} = \frac{1{,}2}{43{,}7}$$

soit $\frac{V_3 - V_2}{V_2} \approx 0{,}027$.

Ceci correspond bien à une augmentation d'environ 2,7 %.

64 **a)** $837 + 713 = 1\,550$

L'effectif est 1 550 lycéens.

b) On étudie la sous-population des filles et la sous-population des garçons.

Voici le schéma complété.

c) La proportion de filles dans ce lycée est $\frac{837}{1\,550}$.

Or, $\frac{837}{1\,550} = 0{,}54$ et $0{,}54 \times 100 = 54$.

Il y a 54 % de filles dans ce lycée.

d) La proportion de garçons dans ce lycée est $\frac{713}{1\,550}$.

Or, $\frac{713}{1\,550} = 0{,}46$ et $0{,}46 \times 100 = 46$.

Il y a 46 % de garçons dans ce lycée.

65 **a)** Voici le schéma complété.

b) On calcule 22 % de 65 % :

$0{,}22 \times 0{,}65 = 0{,}143$ et $0{,}143 \times 100 = 14{,}3$

14,3 % des participants au tournoi sont membres du club Échiquier rouge en catégorie U16.

66 **a)** Diminuer le prix de 15 % revient à multiplier ce prix par $1 - \frac{15}{100}$.

$$\left(1 - \frac{15}{100}\right) \times 48\,€ = 0{,}85 \times 48\,€ = 40{,}80\,€$$

Après réduction, le prix des jeans est 40,80 €.

b) $\left(1 + \frac{15}{100}\right) \times 35\,€ = 1{,}15 \times 35\,€ = 40{,}25\,€$

Après augmentation, le prix des pulls est 40,25 €.

67 **1. a)** $V_0 = 850\,€$; $V_1 = 918\,€$.

b) $V_1 - V_0 = 918\,€ - 850\,€ = 68\,€$.

La variation absolue du loyer est 68 €.

c) $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{68}{850} = 0{,}08$ et $0{,}08 \times 100 = 8$

Le loyer a augmenté de 8 %.

2. a) $V_0 = 1200\,€$; $V_1 = 1140\,€$.

b) $V_1 - V_0 = 1140\,€ - 1200\,€ = -60\,€$.

c) $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{-60}{1200} = -0{,}05$ et $-0{,}05 \times 100 = -5$

Le loyer a baissé de 5 %.

S'entraîner

69 **a)** • Ligne 2, on complète par la surface initiale des forêts : 4000 (en millions d'hectares).

• Ligne 4, on calcule la somme de la nouvelle surface des forêts et des 7,2 millions d'hectares nouveaux reboisés.

$$1 - \frac{0{,}4}{100} = 0{,}996$$

On complète cette ligne par : 0.996*X+7.2.

b) Pour $n = 10$, la fonction renvoie environ 3 913,6.

En 2025, la surface des forêts sur Terre sera environ 3 914 millions d'hectares.

• Pour $n = 100$, la fonction renvoie environ 3 273,5.

En 2115, la surface des forêts sur Terre sera environ 3 274 millions d'hectares.

• Pour $n = 500$, la fonction renvoie environ 2 096,5.

En 2515, la surface des forêts sur Terre sera environ 2 097 millions d'hectares.

70 **a)** • Ligne 2, on complète par le nombre initial de clients : 800.

• Ligne 4, on calcule la différence entre le nombre de clients du mois suivant et les 10 clients qui ne reviennent pas.

$1+\frac{1,5}{100}=1,015$ donc on complète la ligne 4 par :

$1,015^{*}X-10$.

b) • Décembre 2019 est le 3e mois après septembre 2019. On saisit $n=3$ en entrée. Voici l'affichage obtenu :

```
>>> Cl(3)
806.0904499999998
```

On peut estimer à 806 environ le nombre de clients en décembre 2019.

• Septembre 2020 est le 12e mois après septembre 2019. On saisit $n=12$ en entrée. Voici l'affichage obtenu :

```
>>> Cl(12)
826.0824228615371
```

On peut estimer à 826 environ le nombre de clients en septembre 2020.

72 **b)** Dans la cellule C3, on saisit la formule =(C2-$B2)/$B2 puis on l'étend dans la plage D3:E3.

On obtient les résultats de la plage C3:E3 ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	**Semaine**	1	2	3	4
2	**Nombre de visiteurs**	940	972	985	1 014
3	**Taux d'évolution**		3,40 %	4,79 %	7,87 %

73 **b)** Dans la cellule C3, on saisit la formule =(C2-B2)/B2 puis on l'étend dans la plage D3:F3.

On obtient les résultats de la plage C3:F3 ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	**Année**	2014	2015	2016	2017	2018
2	**SMIC horaire brut** (en €)	9,53	9,61	9,67	9,76	9,88
3	**Taux d'évolution**		0,84%	0,62%	0,93%	1,23%

74 $\frac{1053\,460}{1523\,442}\approx 0,69$ et $\frac{1021557}{1544\,546}\approx 0,66$.

En 2016, le pourcentage de reçus est environ 69 % ; en 2017, il n'est que de 66 % environ.

$69\,\% > 66\,\%$ donc Killian a raison.

75 **a)** $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$. On calcule 75 % de 31 %.

$0,75\times 0,31=0,2325$

En 2018, les forêts privées occupent 23,25 % de la superficie de la France métropolitaine.

b) $0,232\,5\times 551695\text{ km}^2=128\,269\text{ km}^2$

La superficie des forêts privées est environ 128 269 km².

76 **a)** On calcule 35 % de 64 %.

$0,35\times 0,64=0,224$

22,4 % des membres de la chorale sont des femmes sopranos.

b) $100\,\%-64\,\%=36\,\%$

Il y a 36 % d'hommes dans la chorale.

$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$, donc on calcule 25 % de 36 %.

$0,25\times 0,36=0,09$

9 % des membres de la chorale sont des hommes ténors.

c) $36\,\%-9\,\%=27\,\%$

27 % des membres de la chorale sont des hommes autres que ténors.

77 • (1) et (C)

Question : Quel est le prix de cet ordinateur, après réduction ?

Réponse : $450\text{ €}\times\left(1-\frac{6}{100}\right)=450\text{ €}\times 0,94=423\text{ €}$

On paie l'ordinateur 423 €.

• (2) et (A)

Question : Quelle est la nouvelle longueur de la piste ?

Réponse : $450\text{ m}\times\left(1+\frac{6}{100}\right)=450\text{ m}\times 1,06=477\text{ m}$

La nouvelle longueur de la piste est 477 m.

• (3) et (B)

Question : Quel est le nombre de pompiers de cette ville ayant moins de 20 ans ?

Réponse : $450\times\frac{6}{100}=450\times 0,06=27$

27 pompiers de cette ville ont moins de 20 ans.

78 **a)** $\left(1-\frac{20}{100}\right)\times 130\text{ €}=0,8\times 130\text{ €}=104\text{ €}$

Après réduction, le prix de la raquette est 104 €.

b) On désigne par p le prix des chaussures, en euro, avant réduction.

p vérifie la relation $\left(1-\frac{20}{100}\right)\times p=68$ soit :

$$0,8\times p=68.$$

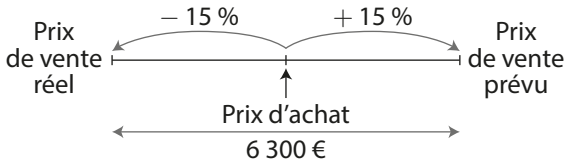
Ainsi, $p=\frac{68}{0,8}=85$.

Avant réduction, le prix des chaussures était 85 €.

c) $\frac{V_1-V_0}{V_0}=\frac{26,60-28}{28}=-\frac{1,4}{28}=-0,05$

Le prix de la casquette a baissé de 5 %.

79 On désigne par p le prix d'achat de la voiture, en euro. On peut traduire la situation par un schéma.



L'écart entre le prix de vente prévu et le prix de vente réel est de 6 300 €, il correspond à une perte de 30 % du prix d'achat.

Ainsi $0{,}3p = 6300$ c'est-à-dire $p = \dfrac{6300}{0{,}3}$ soit $p = 21000$.

Le négociant avait acheté la voiture 21 000 €.

• Autre démarche possible : on résout l'équation $1{,}15p - 6300 = 0{,}85p$, qui traduit la situation.

80 **a)** Il indique une évolution.
b) Il indique une proportion.
c) Il indique une proportion.
d) Il indique une évolution.

81 **a)** Comme la série des indices est proportionnelle à la série des nombres, on peut écrire :

$$\frac{I_1}{100} = \frac{3166}{2018}.$$

Ainsi $I_1 = \dfrac{100 \times 3166}{2018}$ soit $I_1 \approx 156{,}89$.

b) De même, $\dfrac{I_2}{100} = \dfrac{1734}{2018}$

c'est-à-dire $I_2 = \dfrac{100 \times 1734}{2018}$ soit $I_2 \approx 85{,}93$.

c) $\dfrac{I_3}{100} = \dfrac{1604}{2018}$ c'est-à-dire $I_3 = \dfrac{100 \times 1604}{2018}$

soit $I_3 \approx 79{,}48$.

$\dfrac{I_4}{100} = \dfrac{2614}{2018}$ c'est-à-dire $I_4 = \dfrac{100 \times 2614}{2018}$

soit $I_4 \approx 129{,}53$.

$\dfrac{I_5}{100} = \dfrac{2861}{2018}$ c'est-à-dire $I_5 = \dfrac{100 \times 2861}{2018}$

soit $I_5 \approx 141{,}77$.

d) • $I_2 - 100 \approx 85{,}93 - 100$ soit $I_2 - 100 \approx -14{,}07$.

Entre mai et juillet 2018, l'indice a baissé d'environ 14,07, ce qui signifie que le nombre de voitures a baissé d'environ 14,07 %.

• $I_5 - 100 \approx 141{,}77 - 100$ soit $I_5 - 100 \approx 41{,}77$.

Entre mai et octobre 2018, l'indice a augmenté d'environ 41,77, ce qui signifie que le nombre de voitures a augmenté d'environ 41,77 %.

82 **2. a)** En cellule C4, on saisit la formule =C3-B3 et on la recopie vers la droite en cellule D4.

b) En cellule C5, on peut saisir la formule =C4/B3 et on la recopie vers la droite en cellule D5.

c) Pour la société A, la variation absolue diminue et le taux d'évolution diminue.

3. a) Voici une copie de la feuille de calcul complétée.

	A	B	C	D
1	**Bénéfices de la société A** (en milliers d'euros)			
2	Année	2016	2017	2018
3	Bénéfice	3 500	4 200	4 620
4	Variation absolue		700	420
5	Taux d'évolution		20,00 %	10,00 %
6	**Bénéfices de la société B** (en milliers d'euros)			
7	Année	2016	2017	2018
8	Bénéfice	2 500	3 750	5 250
9	Variation absolue		1250	1500
10	Taux d'évolution		50,00 %	40,00 %
11	**Bénéfices de la société C** (en milliers d'euros)			
12	Année	2016	2017	2018
13	Bénéfice	3 100	3 720	4 340
14	Variation absolue		620	620
15	Taux d'évolution		20,00 %	16,67 %
16	**Bénéfices de la société D** (en milliers d'euros)			
17	Année	2016	2017	2018
18	Bénéfice	2 700	3 240	3 888
19	Variation absolue		540	648
20	Taux d'évolution		20,00 %	20,00 %

c) Pour la société B, la variation absolue augmente et le taux d'évolution diminue.

Pour la société C, la variation absolue est stable et le taux d'évolution diminue.

Pour la société D, la variation absolue augmente et le taux d'évolution est stable.

4. On peut résumer les différents types de croissance dans un tableau : une flèche qui monte représente une augmentation, une flèche qui descend représente une diminution et une flèche horizontale représente une stagnation.

	Variation absolue	Taux d'évolution
A	↘	↘
B	↗	↘
C	→	↘
D	↗	→

5. Dans le tableau, le cas où la variation absolue et le taux d'évolution augmentent n'apparaît pas.

Voici un exemple de cette situation.

Bénéfices de la société E (en milliers d'euros)			
Année	2016	2017	2018
Bénéfice	100	110	132
Variation absolue		10	22
Taux d'évolution		10 %	20 %

83 **a)** $\dfrac{V_1 - V_0}{V_0} = \dfrac{56\,875 - 22\,750}{22\,750} = 1{,}5$

Entre 2015 et 2018, le nombre de clients a augmenté de 150 %.

b) $CM = 1 + \dfrac{150}{100} = 2{,}5$

Entre 2015 et 2018, le nombre de clients a été multiplié par 2,5.

84 **a)** Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1+\frac{t}{100}=\left(1-\frac{40}{100}\right)\times\left(1-\frac{10}{100}\right)=0{,}6\times0{,}9=0{,}54.$$

Ainsi $\frac{t}{100}=-0{,}46$.

Le taux de réduction global est -46 %.

b) On désigne par p le prix du sac, en euro, avant les deux démarques.

p vérifie la relation $0{,}54\times p=29{,}99$.

Ainsi $p=\frac{29{,}99}{0{,}54}$ soit $p\approx55{,}54$.

Le prix du sac était d'environ 55,54 € avant les deux démarques.

85 • On calcule le coefficient multiplicateur global.

$$\text{CM}=\left(1+\frac{2}{100}\right)\times\left(1+\frac{2}{100}\right)=1{,}02^2=1{,}0404$$

• On désigne par p le prix du croissant, en euro, avant les deux augmentations.

p vérifie la relation $0{,}0404\times p=1{,}56$.

Ainsi $p=\frac{1{,}56}{1{,}0404}$ soit $p\approx1{,}50$.

Le prix d'un croissant était d'environ 1,50 € avant les deux augmentations.

86 **a)** Le coefficient multiplicateur global est :

$$\text{CM}=\left(1+\frac{53}{100}\right)\times\left(1-\frac{19}{100}\right)\times\left(1+\frac{9}{100}\right)$$

$\text{CM}=1{,}53\times0{,}81\times1{,}09$.

$\text{CM}=1{,}350\,837$.

b) Le taux d'évolution global t % vérifie $1+\frac{t}{100}=\text{CM}$, c'est-à-dire $1+\frac{t}{100}=1{,}350\,837$;

ainsi $\frac{t}{100}=0{,}350\,837$.

Entre 2017 et 2019, le prix du beurre a augmenté d'environ 35 %.

87 **a)** Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1+\frac{t}{100}=\left(1+\frac{2}{100}\right)\times\left(1+\frac{2}{100}\right)\times\left(1+\frac{2}{100}\right)=1{,}02^3.$$

Ainsi $1+\frac{t}{100}=1{,}061208$,

c'est-à-dire $\frac{t}{100}=0{,}061208$.

Trois hausses successives de 2 % équivalent à une augmentation globale d'environ 6,12 %.

b) Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1+\frac{t}{100}=\left(1-\frac{30}{100}\right)\times\left(1-\frac{30}{100}\right)\times\left(1-\frac{30}{100}\right)=0{,}7^3$$
$$=0{,}343.$$

Ainsi $\frac{t}{100}=-0{,}657$.

Trois baisses successives de 30 % équivalent à une baisse globale de 65,7 %.

88 • On calcule le coefficient multiplicateur global.

$$\text{CM}=\left(1-\frac{1}{100}\right)^3=0{,}99^3=0{,}970299$$

• On désigne par L la longueur des manches du pull, en cm, avant les trois séchages.

L vérifie la relation $0{,}970299\times\text{L}=59{,}4$.

Ainsi $\text{L}=\frac{59{,}4}{0{,}970299}$ soit $\text{L}\approx61{,}2$.

La longueur des manches du pull était environ 61,2 cm avant les trois séchages.

89 Deux semaines, c'est 14 jours $(2\times7=14)$.

Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1+\frac{t}{100}=\left(1+\frac{5}{100}\right)^{14}=1{,}05^{14}.$$

Ainsi $1+\frac{t}{100}\approx1{,}98$ c'est-à-dire $\frac{t}{100}\approx0{,}98$.

La hauteur du gazon augmente d'environ 98 % en deux semaines.

90 Chaque année, le solde est multiplié par $1+\frac{1{,}75}{100}$, c'est-à-dire par 1,017 5.

Si on désigne par S la somme d'argent placée par Alexis, il aura sur son compte, au bout de 40 ans, un solde égal à $\text{S}\times1{,}0175^{40}$.

$1{,}0175^{40}\approx2{,}002$ et $2{,}002>2$ donc le solde du compte aura bien plus que doublé. Alexis a raison.

91 **a)** Le taux t % cherché vérifie :

$$\left(1-\frac{20}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=1-\frac{32}{100}$$

c'est-à-dire $0{,}8\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=0{,}68$.

Ainsi $1+\frac{t}{100}=\frac{0{,}68}{0{,}8}=0{,}85$ soit $\frac{t}{100}=-0{,}15$ ou $t=-15$.

La seconde baisse de fréquentation de cette salle a été de 15 %.

b) Le taux t % cherché vérifie :

$$\left(1-\frac{20}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=1$$

c'est-à-dire $0{,}8\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=1$.

Ainsi $1+\frac{t}{100}=\frac{1}{0{,}8}=1{,}25$ soit $\frac{t}{100}=0{,}25$ ou $t=25$.

Après la baisse de 20 %, le prix d'une place de cinéma a augmenté de 25 % pour revenir à son tarif initial.

92 Le taux t % $(t > 0)$ cherché vérifie :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1-\frac{t}{100}\right)=1-\frac{36}{100}$$

c'est-à-dire $\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1-\frac{t}{100}\right)=0{,}64$.

Ainsi $1^2-\left(\frac{t}{100}\right)^2=0{,}64$ soit $1-\left(\frac{t}{100}\right)^2=0{,}64$.

$\left(\frac{t}{100}\right)^2=0{,}36$ donc $\frac{t}{100}=0{,}6$ (t est un nombre positif).

$t=60$ donc le taux cherché est 60 %.

93 **a)** Le taux d'évolution global t % vérifie :

$$1+\frac{t}{100}=\left(1+\frac{30}{100}\right)\times\left(1+\frac{60}{100}\right)=1{,}3\times1{,}6=2{,}08.$$

Ainsi $\frac{t}{100}=1{,}08$.

Au cours de ces deux mois, le nombre d'utilisateurs a augmenté de 108 %.

b) Le taux t % $(t > 0)$ cherché vérifie :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=2{,}08$$

c'est-à-dire $\left(1+\frac{t}{100}\right)^2=2{,}08$

soit $1+\frac{t}{100}=\sqrt{2{,}08}$ ($1+\frac{t}{100}$ est un nombre positif).

Ainsi $\frac{t}{100}=\sqrt{2{,}08}-1$ soit $t=(\sqrt{2{,}08}-1)\times100$.

Donc $t\approx44{,}22$.

Au cours de ces deux mois, le nombre d'utilisateurs a augmenté en moyenne d'environ 44,22 %.

94 **a)** On note t % le taux moyen annuel d'évolution.

Le taux d'évolution global sur 5 ans est :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)$$

c'est-à-dire $\left(1+\frac{t}{100}\right)^5$.

Ainsi, $\left(1+\frac{t}{100}\right)^5=1+\frac{12}{100}=1{,}12$.

b) D'après le résultat affiché par le logiciel de calcul formel, $1+\frac{t}{100}\approx1{,}0229$ soit $\frac{t}{100}\approx0{,}0229$.

Le taux moyen annuel d'évolution est environ 2,29 %.

Ainsi le nombre de licenciés de ce club a en moyenne augmenté d'environ 2,29 % chaque année pendant ces cinq années.

95 **a) Vrai.** En effet, $1+\frac{50}{100}=1{,}5$ donc le prix a été multiplié par 1,5.

Or, $1{,}5\times\frac{2}{3}=\frac{1{,}5\times2}{3}=\frac{3}{3}=1$; le nombre $\frac{2}{3}$ est bien l'inverse de 1,5.

b) Faux. En effet, voici un contre-exemple.

Si un objet coûte 100 €, son nouveau prix est 100 € × 0,5 c'est-à-dire 50 €. En divisant ce nouveau prix par $\frac{2}{3}$, on obtient : $50\text{ €}:\frac{2}{3}=50\text{ €}\times\frac{3}{2}=75\text{ €}$.

L'objet n'a pas retrouvé son prix initial.

96 **a)** Une augmentation de 40 % correspond à un coefficient multiplicateur égal à 1,4.

$1{,}4\times\frac{5}{7}=\frac{1{,}4\times5}{7}=\frac{7}{7}=1$; le nombre $\frac{5}{7}$ est l'inverse de 1,4.

Le coefficient multiplicateur $\frac{5}{7}$ étant l'inverse du coefficient multiplicateur 1,4, les coûts du secteur Santé reviendraient bien à leur niveau initial de l'an 2000.

b) $\frac{5}{7}\approx0{,}714$ et $0{,}714-1\approx-0{,}286$ donc le taux de l'évolution réciproque est environ $-28{,}6$ %.

L'évolution réciproque d'une augmentation de 40 % est une diminution d'environ 28,6 %.

97 **b)** Le taux de TVA est de 20 % :

$$1+\frac{20}{100}=1{,}2$$

On peut saisir la formule =B2*1,2 en cellule B3 avant de la recopier vers la droite.

c) On peut saisir la formule =(E2-B2)/B2 en cellule G2 avant de la recopier en cellule G3.

Voici une copie de la feuille de calcul.

	A	B	C	D	E	F	G
1		T1	T2	T3	T4		
2	**Prix HT** (en €)	73,32	75,78	79,16	77,49		5,69%
3	**Prix TTC** (en €)	87,98	90,94	94,99	92,99		5,69%

On constate que le taux d'évolution global est le même pour le prix HT et pour le prix TTC.

d) Le taux d'évolution global t' % vérifie :

$$1+\frac{t'}{100}\approx\frac{1}{1+\frac{5{,}69}{100}}$$

c'est-à-dire $1+\frac{t'}{100}\approx\frac{1}{1{,}0569}$

soit $1+\frac{t'}{100}\approx0{,}946$. Ainsi $\frac{t'}{100}\approx-0{,}054$.

Le prix HT (comme le prix TTC) de ce casque doit diminuer d'environ 5,4 % en 2019 pour retrouver le niveau du 1er trimestre 2018.

98 **a) Faux.** En effet, on calcule 80 % de 12,5 % d'une journée.

$0{,}8\times0{,}125\times24\text{ h}=0{,}1\times24\text{ h}=2{,}4\text{ h}$

Or, $2{,}4\,\text{h} = 2\,\text{h} + \frac{4}{10} \times 60\,\text{min} = 2\,\text{h}\,24\,\text{min}$

Marlène a passé 2 h 24 min devant l'écran de son smartphone, et non 2 h 40 min.

b) Vrai. En effet, si l'on désigne par g et m les gains respectifs de Guillaume et de Maud, on peut traduire l'information « Guillaume gagne 25 % de plus que Maud » par la relation $g = \left(1 + \frac{25}{100}\right) \times m$ c'est-à-dire $g = 1{,}25\,m$.

Alors $m = \frac{g}{1{,}25} = \frac{1}{1{,}25} g = 0{,}8\,g$.

Or, $0{,}8 = 1 - \frac{20}{100}$; Maud gagne bien 20 % de moins que Guillaume.

c) Vrai. En effet, en désignant par S le salaire, en euro, on peut traduire l'information « Une augmentation de 10 % du salaire l'augmente de 200 € » par la relation : $\frac{10}{100} \times \text{S} = 200\,€$.

En divisant par 2 les deux membres de l'égalité, on obtient $\frac{5}{100} \times \text{S} = 100\,€$, ce qu'on peut traduire par : « Une augmentation de 5 % du salaire l'augmente de 100 € ».

d) Faux. En effet, si l'on désigne par p le prix initial d'un stylo, en euro, alors le prix de 6 de ces stylos est $6\,p$.

Après augmentation, le prix d'un stylo est $\left(1 + \frac{2}{100}\right) \times p$ c'est-à-dire $1{,}02\,p$ et le prix de 6 de ces stylos est $6{,}12\,p$ soit $1{,}02 \times 6\,p$ donc le taux d'évolution du prix des 6 stylos est encore 2 %.

Zoran paiera 2 % de plus qu'avant l'augmentation, et non 12 %.

e) Faux. En effet, $\left(1 + \frac{50}{500}\right) \times \left(1 + \frac{50}{100}\right) = 2{,}25$.

Le prix d'une pizza est multiplié par 2,25 et non par 2.

99 **a) Faux**. En effet, $1 + \frac{300}{100} = 1 + 3 = 4$ donc le coefficient multiplicateur est 4, et non 3.

b) Faux. En effet, si un objet coûte 100 €, son nouveau prix est $100\,€ \times 1{,}1^2$, c'est-à-dire 121 €, ce qui correspond à une augmentation de 21 %, et non de 20 %.

c) Vrai. En effet, $\left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = 1{,}02^2 = 1{,}040\,4$.

Or, $1{,}040\,4 - 1 = 0{,}040\,4$, ce qui correspond bien à une augmentation de 4,04 %.

d) Vrai. En effet,

$\left(1 + \frac{4}{100}\right) \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 1^2 - 0{,}04^2 = 1 - 0{,}0016$.

Cela correspond bien à une baisse de 0,16 %.

Organiser son raisonnement

100 Le nombre de livres d'Armine est un nombre entier naturel.

$25\,\% = \frac{1}{4}$ et la proportion « 1 sur 7 » se traduit par la fraction $\frac{1}{7}$. Ainsi le nombre de livres d'Armine est un multiple de 4 et de 7, c'est-à-dire un multiple de 28.

Les premiers multiples de 28 sont : 0 ; 28 ; 56 ; 84 ; 112.

Le seul de ces nombres compris entre 60 et 100 est 84, donc Armine possède 84 livres.

101 On désigne par n le nombre d'élèves dans la classe et par f le nombre de filles.

On peut traduire l'augmentation de la somme des notes de deux façons :

- $4f$ car chaque fille a eu 4 points de plus ;
- n car la moyenne de la classe a augmenté de 1 point et qu'il y a n élèves dans la classe.

Ainsi $4\,f = n$ c'est-à-dire que la proportion de filles dans la classe est $\frac{f}{n} = \frac{1}{4}$; il y a 25 % de filles dans la classe.

$100\,\% - 25\,\% = 75\,\%$

Il y a 75 % de garçons dans la classe.

102 On désigne par L et ℓ la longueur et la largeur du terrain, exprimées dans la même unité.

On désigne par A l'aire du terrain initial : $\text{A} = \text{L} \times \ell$.

- Avec la proposition 1, l'aire du terrain devient $\text{L} \times 1{,}3 \times \ell \times 0{,}7$ c'est-à-dire $0{,}91 \times \text{L} \times \ell$ soit $0{,}91 \times \text{A}$.

Elle diminue de 9 %.

- Avec la proposition 2, l'aire du terrain devient $\text{L} \times 0{,}85 \times \ell \times 1{,}2$ c'est-à-dire $1{,}02 \times \text{L} \times \ell$ soit $1{,}02 \times \text{A}$.

Elle augmente de 2 %.

- Avec la proposition 3, l'aire du terrain devient $\text{L} \times 1{,}25 \times \ell \times 0{,}8$ c'est-à-dire $1 \times \text{L} \times \ell$ soit A.

Elle reste la même.

- Conclusion : Amandine a intérêt à choisir la proposition 2.

103 L'angle droit indiqué sur le diagramme permet d'affirmer que les tablettes représentent 25 % de la production de la société et les smartphones 75 % de la production.

a) On calcule 5 % de 25 %.

$0{,}05 \times 0{,}25 = 0{,}0125$

Les tablettes défectueuses représentent 1,25 % de la production totale.

b) On calcule 3 % de 75 %.

$0{,}03 \times 0{,}75 = 0{,}0225$

Les smartphones défectueux représentent 2,25 % de la production totale.

104 $\left(1+\frac{30}{100}\right)\times\left(1-\frac{25}{100}\right)\times 39 = 1{,}3\times 0{,}75\times 39$
$= 38{,}025$

The coat price during the sale is £ 38,03.

105 On désigne par m la masse de confiture et p le prix, avant promotion.

• Avec la promotion 1, le prix devient 0,8 p pour une masse m de confiture.

• Avec la promotion 2, la masse devient 1,2 m pour un prix p.

• Avec la promotion 1, cela revient à payer un prix p pour une masse $\frac{m}{0{,}8}$ de confiture. Or, $\frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$ donc le client a une masse 1,25 m de confiture.

Or, $1{,}25 > 1{,}2$; ainsi, pour le même prix, le client a plus de confiture avec la promotion 1. La promotion 1 serait la plus avantageuse pour le client.

106 La recette s'obtient en multipliant la quantité vendue par le prix unitaire.

On désigne par p le prix habituel, en euro, et q la quantité produite habituelle.

La recette habituelle est $p\,q$.

Lors de cette année exceptionnelle, la recette est :

$$p\times\left(1-\frac{t}{100}\right)\times q\times\left(1+\frac{25}{100}\right),$$

où t est le taux de baisse du prix de vente.

L'information « La recette n'augmente pas » se traduit par $p\times\left(1-\frac{t}{100}\right)\times q\times\left(1+\frac{25}{100}\right) = p\,q$.

Ainsi $\left(1-\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{25}{100}\right) = 1$

soit $\left(1-\frac{t}{100}\right)\times 1{,}25 = 1$.

$1-\frac{t}{100} = \frac{1}{1{,}25}$

c'est-à-dire $1-\frac{t}{100} = 0{,}8$ soit $\frac{t}{100} = 0{,}2$.

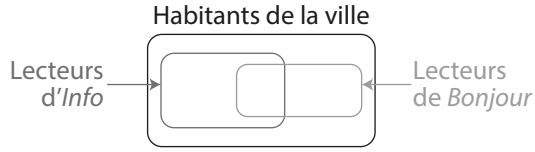
Le prix du kilogramme de mirabelles a baissé de 20 %.

107 En 2020, la pension alimentaire sera multipliée par $\left(1+\frac{2}{100}\right)^2$, c'est-à-dire $1{,}02^2$.

Or, $1{,}02^2 = 1{,}0404$ et 1,040 4 est proche de 1,04.

Donc la prévision de Killian n'est pas mauvaise, même si elle n'est pas tout à fait exacte.

108 On représente la situation par un schéma.



Cette annonce ne sera pas lue par 35 % des habitants de la ville car certains habitants lisent les deux journaux. Elle sera donc lue par moins de 35 % des habitants.

109 • On calcule 90 % de 50 % et 85 % de 30 %.

$0{,}9\times 0{,}5 = 0{,}45$ et $0{,}85\times 0{,}3 = 0{,}255$

Ainsi 45 % des élèves entrés en Seconde réussissent le bac général en 3 ans et 25,5 % des élèves entrés en Seconde réussissent le bac technologique en 3 ans.

• Aucun élève ne passe les deux bacs en même temps, donc on ajoute les pourcentages.

$45\,\% + 25{,}5\,\% = 70{,}5\,\%$

Dans ce lycée, le pourcentage de réussite au bac en trois ans est de 70,5 %.

110 **a)** L'indice le plus grand est 103, donc c'est en 2017 que la société a réalisé son meilleur bénéfice.

$103 - 100 = 3$ donc le bénéfice a augmenté de 3 % depuis 2014.

b) 105 est supérieur à 102,9, mais cela ne signifie pas que le bénéfice est plus important dans cette société que dans la première. En effet, on ne connaît pas les valeurs des bénéfices. On ne peut pas comparer des indices sur des séries différentes.

111 On désigne par S le salaire de l'employé avant augmentation.

En 2015, le salaire du PDG était $S\times\left(1+\frac{240}{100}\right)$ c'est-à-dire 3,4 S.

Après augmentation :

• le salaire de l'employé est $S\times\left(1+\frac{10}{100}\right)$ c'est-à-dire 1,1 S,

• le salaire du PDG est $1{,}1S\times\left(1+\frac{350}{100}\right)$ c'est-à-dire $1{,}1S\times 4{,}5$ soit 4,95 S.

$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{4{,}95\,S - 3{,}4\,S}{3{,}4\,S} = \frac{1{,}55\,S}{3{,}4\,S} = \frac{1{,}55}{3{,}4}$

soit $\frac{V_1 - V_0}{V_0} \approx 0{,}4559$

Le salaire du PDG a augmenté d'environ 45,59 %.

112 • On désigne par t % le taux de matière sèche dans ce fromage.
Grâce à l'information « Pourcentage de matière grasse dans matière sèche : 75 % », on sait que le pourcentage de matière grasse dans le fromage est $0{,}75 \times \frac{t}{100}$.
Il est aussi 24 % d'après la première information.
Ainsi on a la relation $0{,}75 \times \frac{t}{100} = 0{,}24$ c'est-à-dire $\frac{t}{100} = \frac{0{,}24}{0{,}75} = 0{,}32$.
Le pourcentage total de matière sèche est 32 %.
• Le fromage est composé d'eau et de matière sèche.
$100\,\% - 32\,\% = 68\,\%$
Il y a 68 % d'eau dans ce fromage.

113 **a)** • La variable n représente le nombre de jours où le niveau d'eau est suffisant et la variable V le volume d'eau (en m^3) dans la piscine.
• L'évaporation de l'eau est de 4 % par jour, donc le volume V restant dans la piscine au bout d'une journée est multiplié par $1 - \frac{4}{100}$, c'est-à-dire par 0,96.
Il convient d'ajouter chaque jour les 2 m^3 du système automatique de remplissage.
Le volume d'eau restant dans la piscine chaque jour est donc $0{,}96 \times V + 2$.
b) Voici un tableau de suivi des variables.

	Initialisation	Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4
n	0	1	2	3	4
V	75	74	73,0	72,1	71,2

	Jour 5	Jour 6	Jour 7	Jour 8	Jour 9
n	5	6	7	8	9
V	70,4	69,6	68,8	68,0	67,3

La valeur affichée en sortie de cet algorithme est donc 8. Le volume d'eau dans la piscine reste suffisant pendant les huit jours qui suivent le jour de la mise en fonctionnement du système de remplissage automatique.

114 La brique donnée a la forme d'un parallélépipède rectangle.
On désigne par a, b et c ses dimensions (longueur, largeur, hauteur).
Le volume V de cette brique est $a \times b \times c$.
Les dimensions sont réduites de 75 %, donc chaque dimension est multipliée par $1 - \frac{75}{100}$, c'est-à-dire par 0,25.
Le volume V' de la brique réduite est :

$$V' = a \times 0{,}25 \times b \times 0{,}25 \times c \times 0{,}25$$

c'est-à-dire $V' = V \times 0{,}25^3$.
Le volume de la brique de 4 kg est donc multiplié par $0{,}25^3$, sa masse aussi, puisqu'il s'agit du même matériau.
Or $0{,}25^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.
$4\,\text{kg} \times 0{,}25^3 = 4\,\text{kg} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{16}\,\text{kg} = 0{,}0625\,\text{kg}$
La masse de la brique réduite est donc 62,5 g.

115 • 65 % des élèves ont aimé le film Les lumières de la ville et 84 % des élèves ont aimé le film Charulata.
$65\,\% + 84\,\% - 100\,\% = 49\,\%$
Ainsi au moins 49 % des élèves aiment ces deux films.
• De plus, 71 % des élèves aiment le film La tortue rouge.
$49\,\% + 71\,\% - 100\,\% = 20\,\%$
Ainsi au moins 20 % des élèves aiment les trois films.
Le pourcentage minimum des élèves qui ont aimé les trois films est donc de 20 %.

116 **1. D.** En effet, le pourcentage actuel de billes rouges dans le sac est $\frac{49}{49+1}$ c'est-à-dire $\frac{49}{50}$.
Si on enlève 40 boules rouges, il devient :
$\frac{49-40}{50-40} = \frac{9}{10} = 0{,}9$.
2. A. En effet, $n = \frac{50}{100} \times m$
donc $m = n \times \frac{100}{50} = 2n$
3. C. En effet,
$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{70-80}{80} = -\frac{10}{80} = -0{,}125$
Sa cote de popularité a baissé de 12,5 %.
4. A. En effet, les indices sont proportionnels aux salaires, donc, si S_1 désigne le salaire (en euro) au bout de 10 ans et S_2 le salaire (en euro) au bout de 20 ans, on a les égalités : $\frac{2\,067}{100} = \frac{S_1}{111{,}56} = \frac{S_2}{133{,}77}$
$\frac{2\,067}{100} = \frac{S_1}{111{,}56}$
c'est-à-dire $S_1 = \frac{111{,}56 \times 2\,067}{100}$.
Ainsi $S_1 \approx 2\,306$.
5. D. En effet, les deux pourcentages sont relatifs au même ensemble de référence : les élèves de la classe. De plus, un élève ne peut étudier qu'une seule LV1, donc les deux parties n'ont aucun élément commun.
On peut ajouter les pourcentages :
$40\,\% + 21\,\% = 61\,\%$.

6. C. En effet, $\frac{12}{25-5}=\frac{12}{20}=0{,}6$.

7. B. En effet, on calcule la quantité de sucre pour 8 L de boisson, puis pour 100 L.

$q=5\times\frac{30}{100}+3\times\frac{20}{100}=5\times0{,}3+3\times0{,}2$

$q=1{,}5+0{,}6=2{,}1$

La quantité de sucre pour 8 L de boisson est 2,1 L.

$\frac{2{,}1\times100}{8}=26{,}25$

La quantité de sucre pour 100 L de boisson est 26,25 L, donc il y a 26,25 % de sucre dans le mélange.

8. D. En effet, si on désigne par S le salaire moyen et par n l'effectif de cette entreprise, la masse salariale initiale, qui est le produit du salaire moyen par l'effectif de cette entreprise, est $n\,S$.

Elle devient $n\times\left(1-\frac{18}{100}\right)\times S\times\left(1+\frac{5}{100}\right)$,

c'est-à-dire $n\times0{,}82\times S\times1{,}05$

soit $n\times S\times0{,}861$.

Elle a donc été multipliée par 0,861.

9. C. En effet, si on désigne par L et ℓ les dimensions de l'écran du premier smartphone, exprimées dans la même unité, l'aire de l'écran est Lℓ.

L'aire de l'écran du nouveau smartphone est

$\mathrm{L}\times\left(1+\frac{10}{100}\right)\times\ell\times\left(1+\frac{10}{100}\right)$,

c'est-à-dire $\mathrm{L}\times\ell\times1{,}1^2$ soit $\mathrm{L}\times\ell\times1{,}21$.

Elle a été multipliée par 1,21.

$1{,}21-1=0{,}21$ donc elle a été augmentée de 21 %.

10. D. En effet, $\frac{V_1}{V_0}=\frac{19{,}91}{23{,}32}$

soit $\frac{V_1}{V_0}\approx0{,}8538$ et $1-0{,}8538=0{,}1462$.

La part des salaires des coachs a baissé d'environ 14,62 %.

Si on désigne par t % $(0<t<100)$ le taux moyen annuel cherché, il vérifie :

$\left(1-\frac{t}{100}\right)\times\left(1-\frac{t}{100}\right)\approx0{,}8538$

soit $1-\frac{t}{100}\approx\sqrt{0{,}8538}$ (car $1-\frac{t}{100}$ est un nombre positif).

Ainsi $1-\frac{t}{100}\approx0{,}924$ soit $\frac{t}{100}\approx0{,}076$.

Le taux moyen cherché est donc environ 7,6 %.

Exploiter ses compétences

117 • On calcule le bonus écologique pour chaque véhicule, à l'aide des Doc. 1 et Doc. 2 et d'informations de l'énoncé.

Véhicule A : 0,27 × 25 500 € = 6 885 €

Véhicule B : 0,27 × 21 300 € = 5 751 €

Véhicule C : 0,27 × 23 350 € = 6 305 €

Véhicule D : 0,27 × 23 200 € = 6 264 €

5 751€ < 6 000 € donc les véhicules A, C et D bénéficient d'un bonus de 6 000 € et le véhicule B d'un bonus de 5 751 €.

• On détermine le prix de chaque véhicule après déduction du bonus et de la prime, à l'aide du Doc. 2.

Véhicule A : 25 500 € − 6 000 € − 2 500 € = 17 000 €

Véhicule B : 21 300 € − 5 751 € − 2 500 € = 13 049 €

Véhicule C : 23 350 € − 6 000 € − 2 500 € = 14 850 €

Véhicule D : 23 200 € − 6 000 € − 2 500 € = 14 700 €

• On détermine le prix de vente du véhicule à l'aide du Doc. 3.

Véhicule A : 0,75 × 17 000 € = 12 750 €

Véhicule B : 0,92 × 13 049 € = 12 005,08 €

Véhicule C : 0,8 × 14 850 € = 11 880 €

Véhicule D : 0,85 × 14 700 € = 12 495 €

• Conclusion : Aline et Kévin choisiront le véhicule C, qui est finalement le moins cher.

118 • On détermine le nombre d'embarcations de chaque sorte louées pour 1 h et louées pour 2 h, à l'aide du Doc. 2 et d'informations de l'énoncé.

– Pédalos

$0{,}6\times0{,}4=0{,}24$ et $0{,}4-0{,}24=0{,}16$

$0{,}24\times200=48$ et $0{,}16\times200=32$

48 pédalos sont loués pour 1 h et 32 pédalos pour 2 h.

– Kayaks

$0{,}7\times0{,}35=0{,}245$ et $0{,}35-0{,}245=0{,}105$

$0{,}245\times200=49$ et $0{,}105\times200=21$

49 kayaks sont loués pour 1 h et 21 kayaks pour 2 h.

– Bateaux électriques

$100\,\%-(40\,\%+35\,\%)=25\,\%$

et $0{,}35-0{,}245=0{,}105$

$0{,}5\times0{,}25=0{,}125$ et $0{,}125\times200=25$

25 bateaux électriques sont loués pour 1 h et 25 pour 2 h.

• On détermine le montant R de la recette prévue, à l'aide du Doc. 1.

48 × 15 € + 32 × 25 € = 1 520 €

49×10 € $+ 21 \times 16$ € $= 826$ €
25×35 € $+ 25 \times 60$ € $= 2\,375$ €
R $= 1\,520$ € $+ 826$ € $+ 2\,375$ €
R $= 4\,721$ €
Le gérant de la base nautique peut espérer une recette journalière de 4 721 €.

119 • On complète l'algorithme, à l'aide du Doc. 1 et d'informations de l'énoncé.
La variable n représente le nombre de mois à partir du 1er janvier 2019 et la variable A représente le nombre d'abonnés.
Chaque mois, 1 500 abonnés se désinscrivent, il en reste $A - 1500$.
Le mois suivant, le nombre d'abonnés augmente de 4 %.

$$\left(1+\frac{4}{100}\right)\times(A-1500) = 1{,}04\times(A-1500)$$

$$\left(1+\frac{4}{100}\right)(A-1500) = 1{,}04\times A - 1{,}04\times 1500$$

$$\left(1+\frac{4}{100}\right)(A-1500) = 1{,}04\times A - 1560$$

Donc le mois suivant, il y a $1{,}04 \times A - 1560$ abonnés.
Dans l'algorithme, on complète :
• le cadre rouge par 275 000,
• le cadre jaune par $n + 1$,
• le cadre vert par $1{,}04 \times A - 1560$.
• On exécute cet algorithme. La valeur obtenue à la fin de l'algorithme est $n = 36$.
36 mois c'est 3 ans, donc les Youtubeurs atteindront leur objectif à partir de janvier 2022.

120 • On désigne par h le salaire d'un homme et f le salaire de son épouse, en euro.
Le salaire initial du couple est $h + f$.
Après augmentation, le salaire de l'homme devient $1{,}05\,h$ et celui de la femme devient $1{,}09f$.
Le salaire du couple devient $1{,}05\,h + 1{,}09\,f$.
• Le taux d'évolution du salaire du couple est :

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{1{,}05\,h + 1{,}09\,f - (h+f)}{h+f} = \frac{0{,}05\,h + 0{,}09\,f}{h+f}$$

• Pour Mr et Mme Carmo, $h = f$.

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{0{,}05\,h + 0{,}09\,f}{h+f} = \frac{0{,}05\,f + 0{,}09\,f}{f+f}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{0{,}14\,f}{2\,f} = 0{,}07$$

Le salaire total de Mr et Mme Carmo a augmenté de 7 %.

• Pour M. et Mme Thevenet, $h = 2\,f$.

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{0{,}05\,h + 0{,}09\,f}{h+f} = \frac{0{,}05\times 2\,f + 0{,}09\,f}{2\,f+f}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{0{,}19\,f}{3\,f} = \frac{0{,}19}{3}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} \approx 0{,}063$$

Le salaire total de M. et Mme Thevenet a augmenté d'environ 6,3 %.

• Pour Mr et Mme Le Queau, $h = \frac{4}{3}f$.

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{0{,}05\,h + 0{,}09\,f}{h+f} = \frac{0{,}05\times\frac{4}{3}f + 0{,}09\,f}{\frac{4}{3}f + f}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{\frac{0{,}2}{3}f + 0{,}09\,f}{\frac{7}{3}f} = \frac{\frac{0{,}47}{3}f}{\frac{7}{3}f}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{0{,}47}{3}\times\frac{3}{7} = \frac{0{,}47}{7} \text{ soit } \frac{V_1 - V_0}{V_0} \approx 0{,}067$$

Le salaire total de Mr et Mme Le Queau a augmenté d'environ 6,7 %.

• Pour Mr et Mme Gautier, $h = \frac{2}{3}f$.

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{0{,}05\,h + 0{,}09\,f}{h+f} = \frac{0{,}05\times\frac{2}{3}f + 0{,}09\,f}{\frac{2}{3}f + f}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{\frac{0{,}1}{3}f + 0{,}09\,f}{\frac{5}{3}f} = \frac{\frac{0{,}28}{3}f}{\frac{5}{3}f}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{0{,}28}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{0{,}28}{5} = 0{,}056$$

Le salaire total de Mr et Mme Gautier a augmenté de 5,6 %.

12 Statistique descriptive

Découvrir

1 Indicateurs de tendance centrale

1 L'âge moyen des 60 lauréats est environ 34,7 ans
En effet,
$$\frac{1\times 27+3\times 28+5\times 30+\ldots+8\times 38+7\times 39}{60}$$
$$=\frac{2\,080}{60}\approx 34{,}7.$$

2 **a)** 9 lauréats étaient âgés de 30 ans ou moins.
b)

Âge	27	28	30	31	32	33
Effectif	1	3	5	4	3	4
Effectif cumulé croissant	**1**	**4**	**9**	**13**	**16**	**20**
Âge	34	35	36	37	38	39
Effectif	6	5	7	7	8	7
Effectif cumulé croissant	**26**	**31**	**38**	**45**	**53**	**60**

3 **a)** L'effectif total 60 est pair donc la médiane de cette série est la demi-somme des deux valeurs centrales (valeurs de rangs 30 et 31). Ces deux valeurs sont égales à 35 donc la médiane de la série est 35 ans.
b) Le quart de l'effectif total est égal à 15. L'effectif cumulé croissant de la valeur 32 est 16, donc $Q_1 = 32$ ans.
c) 45 lauréats ont un âge inférieur ou égal à 37 ans et $45=\frac{3}{4}\times 60$ donc Charlotte a raison.

2 Un indicateur de dispersion : l'écart-type

1 La moyenne de cette série est égale à 7 km. En effet,
$$\frac{8\times 3+6\times 4+\ldots+5\times 12+2\times 13}{8+6\ldots+5+2}=\frac{210}{30}=7$$

2 **a) b)**

Distance (en km)	3	4	5	9	10	12	13
Écart	–4	**–3**	**–2**	**2**	**3**	**5**	**6**
Carré de l'écart	16	**9**	**4**	**4**	**9**	**25**	**36**
Effectif	8	6	2	4	3	5	2

c) $V=\frac{8\times 16+6\times 9+\ldots+5\times 25+2\times 36}{30}$
$=\frac{430}{30}$
soit $V\approx 14{,}3\,\text{km}^2$.
d) $s=\sqrt{V}=\sqrt{\frac{430}{30}}$ et $s\approx 3{,}8$ km.

Acquérir des automatismes

3 **a)** $m=\frac{3\times 3+7\times 6+4\times 7+6\times 8{,}5}{3+7+4+6}=6{,}5$
Le prix moyen de mugs dans ce magasin est 6,50 €.
b) Grâce à la linéarité de la moyenne, le prix moyen des mugs après cette réduction s'obtient en effectuant une baisse de 10 % du prix moyen initial : $0{,}9\times 6{,}5=5{,}85$.
Le prix moyen de mugs après réduction est 5,85 €.

4 **a)** L'effectif total de la série est 20, donc la médiane est la demi-somme des 10e et 11e valeurs. Donc $\text{Me}=\frac{6\text{ €}+7\text{ €}}{2}=6{,}50$ €. Ainsi, au moins 50 % des mugs ont un prix inférieur ou égal à 6,50 € et au moins 50 % des mugs ont un prix supérieur ou égal à 6,50 €.
b) L'effectif total est maintenant égal à 25. La médiane de la nouvelle série est la valeur de rang 13, soit 7 €. Ainsi, au moins 50 % des mugs ont un prix inférieur ou égal à 7 € et au moins 50 % des mugs ont un prix supérieur ou égal à 7 €.

7 **a)** $\frac{1}{4} \times 30 = 7{,}5$ donc le 1er quartile est la 8e valeur de la série. Ainsi $Q_1 = 19$.

$\frac{3}{4} \times 30 = 22{,}5$ donc le 3e quartile est la 23e valeur de la série. Ainsi $Q_3 = 20$.

b) Au moins 25 % des sachets contiennent un nombre de vis inférieur ou égal à 19. Au moins 75 % des sachets contiennent un nombre de vis inférieur ou égal à 20.

8 **a)** La moyenne m de cette série est égale à 1 678 €.

x_i	1 100	1 200	1 500	1 800	2 200	2 800
$x_i - m$	– 578	– 478	– 178	122	522	1 122
$(x_i - m)^2$	334 084	228 484	31 684	14 884	272 484	1 258 884

$$V = \frac{6 \times 334\,084 + 10 \times 228\,484 + \ldots + 4 \times 1\,258\,884}{6 + 10 + 9 + 14 + 7 + 4}$$

donc $V = 234\,516$ et $s \approx 484{,}27$ €.

b) On détermine les bornes de l'intervalle : $m - 2s \approx 709{,}46$ € et $m + 2s \approx 2\,646{,}54$ €.

$6 + 10 + 9 + 14 + 7 = 46$ donc 46 employés ont un salaire dans l'intervalle $[m - 2s\,;\, m + 2s]$.

9 $4 \times 3 = 12$; $6 \times 2 + 8 = 20$; $5 \times 4 = 20$;
$20 + 20 + 12 = 52$ et $52 : 10 = 5{,}2$
Le prix moyen d'un dessert est 5,20 €.

10 Flora confond la moyenne d'une série avec la médiane.

11 $\frac{4 \times 15 + 6 \times 17 + \ldots + 1 \times 42}{4 + 6 + \ldots + 1} = \frac{920}{40} = 23$

Donc le salaire annuel moyen dans l'entreprise est de 23 milliers d'euros.

12 $\frac{8 \times 0 + 12 \times 1 + \ldots + 4 \times 7}{8 + 12 + \ldots + 4} = \frac{304}{100}$

Donc le nombre moyen de fautes de frappes dans un texte lors de ce stage de formation est 3,04.

13 La moyenne de cette série est :
$0{,}17 \times 54 + 0{,}19 \times 59 + 0{,}48 \times 68 + 0{,}16 \times 88 = 67{,}11$

14 $0{,}2 \times 1 + 0{,}4 \times 2 + 0{,}25 \times 3 + 0{,}1 \times 4 + 0{,}05 \times 5 = 2{,}4$

Donc il y a 2,4 enfants par famille en moyenne.

15

Centre	98,25	98,75	99,25	99,75	100,25	100,75	Total
Effectif	9	17	31	26	13	4	100

$$m \approx \frac{9 \times 98{,}25 + 17 \times 98{,}75 + +4 \times 100{,}75}{100} \text{ soit}$$

$$m \approx \frac{9\,939{,}5}{100}$$

La moyenne de cette série est environ 99,40.

16 **a)** $m = \frac{14 \times 38 + 34 \times 39 + \ldots + 2 \times 46}{14 + 34 + \ldots + 2} = \frac{32\,299}{774}$

$m \approx 41{,}7$

b) $\frac{100}{41{,}7} \approx 2{,}4$

Donc la masse moyenne d'un bonbon est 2,4 g.

17 **a)** Les valeurs de cette série sont obtenues en ajoutant 100 à chaque valeur de la série initiale. Donc, grâce à la linéarité de la moyenne, la série a pour moyenne 182,8.

b) Les valeurs de cette série sont obtenues en multipliant par 100 chaque valeur de la série initiale. Donc, grâce à la linéarité de la moyenne, la série a pour moyenne 8 280

c) Les valeurs de cette série sont obtenues en multipliant par 10 chaque valeur de la série initiale puis en lui ajoutant 3. Donc, grâce à la linéarité de la moyenne, la série a pour moyenne $10 \times 82{,}8 + 3$ c'est-à-dire 831.

18 **a)** Les valeurs de la série sont obtenues en ajoutant 700 à celles de la série $3 - 4 - 8 - 10 - 15$ dont la moyenne est $\frac{40}{5} = 8$. Grâce à la linéarité de la moyenne, la moyenne de la série est 708.

b) Les valeurs de la série sont obtenues en multipliant par 0,001 celles de la série $37 - 41 - 43 - 60 - 69$ dont la moyenne est $\frac{250}{5} = 50$. Donc grâce à la linéarité de la moyenne, la série a pour moyenne $50 \times 0{,}001 = 0{,}05$.

19 **a)**

Valeur	3	10	11	14	21
Effectif	1	3	3	2	1

$$m = \frac{3 + 3 \times 10 + 3 \times 11 + 2 \times 14 + 21}{10}$$

$$m = \frac{115}{10} = 11{,}5$$

b) Grâce à la linéarité de la moyenne, la moyenne de la série obtenue en retranchant m à chaque valeur de la série initiale est égale à $m - m$, soit 0. Donc Mathieu se trompe.

20 **a)**

$$m = \frac{9{,}7 + 11{,}2 + 12{,}4 + 13{,}9 + 15 + 14{,}7 + 16{,}1 + 17{,}1 + 14{,}1}{9}$$

$m = \frac{124,2}{9} = 13,8$

Donc la masse moyenne de pommes sur un arbre est 13,8 kg

b) Grâce à la linéarité de la moyenne, la masse moyenne de pommes sur un arbre en 2019 est égale à celle de 2018 augmentée de 50 %, soit $1,5 \times 13,8$ kg $= 20,7$ kg.

c) Grâce à la linéarité de la moyenne ; la masse moyenne prévisible de pommes sur un arbre en 2020 est égale à celle de 2019 augmentée de 20 kg, soit 40,7 kg.

21 $N = 16$

a) 16 est pair donc la médiane est la moyenne des 8e et 9e valeurs de la série.

$Me = \frac{56 + 62}{2} = 59$

b) $\frac{16}{4} = 4$ donc le 1er quartile est la 4e valeur de la série : $Q_1 = 46$.

$3 \times \frac{16}{4} = 12$ donc le 3e quartile est la 12e valeur de la série : $Q_3 = 74$.

22 Le graphique montre que 20 % des valeurs sont inférieures ou égales à 3. Or, si $Q_1 = 3$, on a au moins 25 % des valeurs inférieures ou égales à 3.

23 $N = 30$

30 est pair, donc la médiane est la moyenne des 15e et 16e valeurs de la série : $Me = 4$ car les 15e et 16e valeurs sont égales à 4.

$\frac{30}{4} = 7,5$ donc le 1er quartile est la 8e valeur de la série : $Q_1 = 4$.

$3 \times 7,5 = 22,5$ donc le 3e quartile est la 23e valeur de la série : $Q_3 = 8$.

24 $N = 31$

31 est impair, donc la médiane est la 16e valeur de la série : $Me = 11$.

$\frac{31}{4} = 7,75$ donc le 1er quartile est la 8e valeur de la série : $Q_1 = 5$.

$3 \times 7,75 = 23,25$ donc le 3e quartile est la 24e valeur de la série : $Q_3 = 11$.

25

Valeur	7	12	14	27	32
Fréquence cumulée croissante	0,05	0,25	0,65	0,8	1

$Me = 14$; $Q_1 = 12$; $Q_3 = 27$.

26

Valeur	5	15	20	25	30	35
Effectif	3	1	2	4	4	2
Effectif cumulé croissant	3	4	6	10	14	16

$Me = 25$; $Q_1 = 15$; $Q_3 = 30$.

27 Série ordonnée : 0 – 1 – 1 – 2 – 3 – 3 – 4 – 4 – 5 – 5 – 5 – 6 – 7 – 10

a) $Me = 4$, $Q_1 = 2$ et $Q_3 = 5$.

b) Cela n'entraîne pas de modifications car $7 > Q_3$.

28 **1.** L'effectif total est N=45 000. $\frac{N}{4} = 11250$ et $\frac{3N}{4} = 33\,750$.

Ainsi $Q_1 = 2$, $Me = 2$ et $Q_3 = 3$.

2. a) « Au moins **75 %** des foyers possèdent trois véhicules au plus » ;

b) « Au moins 50 % des foyers possèdent **deux** véhicules ou moins ».

29 Série ordonnée : 25,3 – 44,4 – 47,5 – 47,9 – 48,4 – 49,9 – 53 – 54,4 – 61,3 – 63,5 – 68,5 – 68,6 – 70,1

1. $Me = 53$, $Q_1 = 47,9$ et $Q_3 = 63,5$.

2. a) « Dans plus de 50 % des régions, la part des surfaces agricoles est supérieure à **53 %**. »

b) « Dans plus de 75 % des régions, la part des surfaces agricoles est inférieure à **63,5 %**. »

30 **a)** $83 - 68 = 15$ donc 15 % de ces familles se connectent entre 4 h et 5 h par jour.

b) L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 50 % est $Me \approx 3,25$.

L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 25 % est $Q_1 \approx 2$.

L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 75 % est $Q_3 \approx 4,5$.

c) Au moins 50 % des familles se connectent moins de 3,25 h par jour, au moins 50 % des familles se connectent au plus 3,25 h par jour.

Au moins 25 % des familles se connectent au plus de 2 h par jour. Au moins 75 % des familles se connectent au plus 4,5 h par jour.

31 **a)** $N = 43$ donc Me est la 22e valeur : $Me = 250$.

b) $\frac{N}{4} = 10,75$ donc Q_1 est la 11e valeur : $Q_1 = 160$.

$\frac{3N}{4} = 32,25$ donc Q_3 est la 33e valeur : $Q_3 = 500$.

c) On estime ce pourcentage à au moins 75 %.

d) Fréquence cumulée de la valeur 500 :

$$\frac{2 + 9 + 11 + 7 + 5}{43} \approx 0,790\,7.$$

Donc environ 79,07 % d'ordinateurs ont une capacité inférieure ou égale à Q_3.

e) $\dfrac{9+11+7+5}{43} \approx 0{,}744\,2$.

Donc environ 74,42 % d'ordinateurs ont une capacité dans $[Q_1\,;Q_3]$.

32 **a)** $S = \dfrac{12\times 900 + 10\times 1100 + \cdots + 1\times 4\,500}{139}$

$S = \dfrac{276\,100}{139}$ et $S \approx 1986$ €.

b)

Salaire	900	1 100	1 300	1 500	1 700	1 900	2 100
Effectif	12	10	20	18	12	13	5
Effectif cumulé	12	22	42	60	72	85	90

Salaire	2 300	2 500	2 700	2 900	3 100	3 300	3 500
Effectif	3	12	5	7	10	0	6
Effectif cumulé	93	105	110	117	127	127	133

Salaire	3 700	3 900	4 100	4 300	4 500
Effectif	5	0	0	0	1
Effectif cumulé	138	138	138	138	139

139 est impair. Me est la 70e valeur, Me $= 1700$ €.

c) Le directeur mettrait en avant le salaire moyen S plus élevé que le salaire médian Me.

Un observateur impartial pourrait remarquer que cette moyenne prend en compte les salaires élevés des cadres. Le salaire médian permet quant à lui de dire qu'au moins la moitié des salariés ne touche pas plus de 1 700 € par mois.

33 L'étendue de la série est égale à :

$$\max - \min = 53 - 27 = 26.$$

L'écart interquartile de la série est égal à :

$$Q_3 - Q_1 = 42 - 31 = 11.$$

34 L'étendue de la série est égale à $234 - 78 = 156$.

35 **a)** Pour la série de Lou, l'étendue est égale à :

$$1810 - 625 = 1185.$$

Pour la série d'Alan, l'étendue est égale à :

$$1625 - 720 = 905.$$

L'étendue est donc la plus grande pour la série de Lou.

b) Pour chaque série, on range les valeurs dans l'ordre croissant.

Lou : 625 – 700 – 885 – 975 – 980 – 1 090 – 1 200 – 1 350 – 1 400 – 1 810.

N=10 et $\dfrac{10}{4} = 2{,}5$ donc Q_1 est la 3e valeur : $Q_1 = 885$ et Q_3 est la 8e valeur : $Q_3 = 1350$.

Écart interquartile : $1350 - 885 = 465$.

Alan : 720 – 790 – 800 – 915 – 950 – 1 010 – 1 100 – 1 335 – 1 480 – 1 540 – 1 625.

$N = 11$ et $\dfrac{11}{4} = 2{,}75$ donc Q_1 est la 3e valeur : $Q_1 = 800$ et Q_3 est la 9e valeur : $Q_3 = 1480$.

Écart interquartile :

$$1480 - 800 = 680.$$

L'écart interquartile est donc le plus grand pour la série d'Alan.

36 On range les 20 valeurs de la série dans l'ordre croissant :

35 – 56 – 62 – 75 – 105 – 144 – 159 – 177 – 178 – 225 – 229 – 256 – 265 – 294 – 346 – 354 – 386 – 402 – 411 – 431.

$\dfrac{20}{4} = 5$ donc le 1er quartile est la 5e valeur : $Q_1 = 105$.

$3\times 5 = 15$ donc le 3e quartile est la 15e valeur : $Q_3 = 346$.

Écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 241$.

37 $4\times 4 + 2\times 6 = 28$ et $3\times 5 + 1 + 7 = 22$ donc $m = \dfrac{28+22}{10} = \dfrac{50}{10} = 5$.

On calcule d'abord la variance de cette série. Pour cela, on calcule pour chaque valeur de la série, le carré de son écart à m.

$$V = \frac{4\times 1 + 3\times 0 + 2\times 1 + 1\times 4}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Donc $s = \sqrt{V} = 1$.

38 **a)** Tous les termes sont égaux à 15, donc la moyenne de la série est 15. Tous les écarts à la moyenne sont alors égaux à 0, donc l'écart-type s de la série est nul $(s = 0)$.

b) La moyenne m de cette série est égale à 15.

Dans la série, 20 termes ont un écart à m égal à -5, pour les 20 autres termes, cet écart est égal à 5.

La variance de la série est donc égale à :

$\dfrac{20\times(-5)^2 + 20\times 5^2}{40} = \dfrac{1000}{40} = 25$ et l'écart-type s de la série est $s = \sqrt{25} = 5$.

39 **a)** $m = \dfrac{1\times 3 + 2\times 4 + \ldots + 2\times 10}{1 + 2 + \ldots + 2} = 6{,}65$

donc $m \approx 6{,}7$.

b)

Valeur x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
*$(x_i - m)^2$	13,32	7,02	2,72	0,42	0,12	1,82	5,52	11,22
Effectif	1	2	7	10	8	6	4	2

* Les carrés des écarts sont arrondis au centième.

$$V \approx \frac{1 \times 13{,}32 + 2 \times 7{,}02 + \ldots + 2 \times 11{,}22}{40}$$

$V \approx \frac{107}{40}$ et $V \approx 2{,}7$

Donc $s = \sqrt{V}$ et $s \approx 1{,}6$

40 **a)**

L1	L2
8.7	1
9.9	3
10.4	4
10.7	6
12.1	5
12.7	2

b)

```
Stats 1 var
x̄=10.95714286
Σx=230.1
Σx²=2543.93
Sx=1.06516263
σx=1.039492288
n=21
minX=8.7
```

$m \approx 10{,}96$ et $s \approx 1{,}04$

c) On détermine les bornes de l'intervalle $[m - s\,;m + s]$:

$m - s \approx 9{,}92$ et $m + s \approx 12$.

$\frac{4+6}{21} \approx 0{,}48$ donc environ 48 % des données se trouvent dans l'intervalle $[m - s\,;m + s]$.

On détermine les bornes de l'intervalle $[m - 2s\,;m + 2s]$:

$m - 2s \approx 8{,}88$ et $m + 2s \approx 13{,}04$.

$\frac{3+4+6+5+2}{21} \approx 0{,}95$ donc environ 95 % des données se trouvent dans l'intervalle $[m - 2s\,;m + 2s]$.

41 **a)**

L1	L2
32.5	1
37.5	16
42.5	8
47.5	12
52.5	5
57.5	9
62.5	3

```
Stats 1 var
x̄=46.48148148
Σx=2510
Σx²=120337.5
Sx=8.320220291
σx=8.242821211
n=54
minX=32.5
```

$m \approx 46$ min et $s \approx 8$ min

b) Les valeurs de la série sont assez dispersées autour de la moyenne. Le couple (médiane ; écart interquartile) pourrait s'avérer plus pertinent ici.

42 **a)** Les deux séries ont environ la même moyenne : 30.

b) Celle qui a le plus grand écart-type semble être la série 1, dont les valeurs sont plus dispersées autour de la moyenne.

Remarque : avec la calculatrice, on peut observer que :

- pour la série 1 : $m \approx 29{,}8$ et $s \approx 9{,}2$
- pour la série 2 : $m \approx 31{,}1$ et $s \approx 6{,}7$.

43 Les séries des écrans A et B semblent avoir des moyennes proches (approximativement 10) mais les valeurs de la série de l'écran A sont plus dispersées autours de cette moyenne que celles de la série de l'écran B.

Les séries des écrans C et D sont plutôt homogènes, mais les valeurs de la série de l'écran C sont toutes inférieures à celles de la série de l'écran D.

44 **a)** Par lecture graphique, la série de gauche semble avoir des valeurs plus dispersées autour de sa moyenne que la série de droite. Son écart-type est donc plus grand que celui de la série de droite.

b) Série de gauche

L1	L2
20	3
40	2
60	1
80	5
100	3

$m \approx 64{,}3$

$s \approx 29{,}5$

```
Stats 1 var
x̄=64.28571429
Σx=900
Σx²=70000
Sx=30.56249228
σx=29.45075447
n=14
minX=20
```

Série de droite

L1	L2
20	1
40	4
60	5
80	3
100	1

$m \approx 58{,}6$

$s \approx 20{,}7$

```
Stats 1 var
x̄=58.57142857
Σx=820
Σx²=54000
Sx=21.43223412
σx=20.65261756
n=14
minX=20
```

45 **1.**

```
Stats 1 var
x̄=22
Σx=308
Σx²=6856
Sx=2.480694692
σx=2.390457219
n=14
minX=18
```

$m = 22$ °C

2. a)

```
Stats 1 var
x̄=22
Σx=308
Σx²=7140
Sx=5.291502622
σx=5.099019514
n=14
minX=10
```

$m = 22$ °C

b) Relevé de cette année : $s_1 \approx 2{,}4$ °C.
Relevé de l'année précédente : $s_2 \approx 5{,}1$ °C.
La comparaison de s_1 et s_2 indique que les températures de l'année précédente sont plus dispersées autour de la moyenne que celles de l'année en cours.

46

	Moyenne	Écart-type	Médiane	Écart inter-quartile
Série des notes du groupe A	5,5	$\approx 1{,}9$	6	3
Série des notes du groupe B	$\approx 5{,}5$	$\approx 2{,}8$	6	5

On constate que les deux séries ont des moyennes et des médianes égales, mais l'écart-type et l'écart interquartile de la série des notes du groupe B sont plus grands que ceux de la série des notes du groupe A. Les valeurs de la série des notes du groupe B sont donc plus dispersées autour de la moyenne 5,5.

47 **1.** B **2.** A **3.** D **4.** A

48 **1.** B, D **2.** C, D **3.** A, B, C, D

49 **1. Vrai.** En effet, la moyenne de la série 1 est $m_1 \approx 6{,}9$ et celle de la série 2 est $m_2 \approx 2{,}9$.
2. Vrai. En effet, l'écart-type de la série 1 est $s_1 \approx 0{,}9$ et celui de la série 2 est $s_2 \approx 1{,}7$.
3. Vrai. En effet, pour la série 1, $m_1 \approx 6{,}9$ et $\text{Me}_1 = 7$.
4. Vrai. En effet, pour la série 2, $m_2 \approx 2{,}9$ et $\text{Me}_2 = 3$.

50 **1.**

Nombre de spams	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	3	0	1	4	4	2	1	5	3	1	1

2. $3 + 0 + 1 + 4 + 4 + 2 + 1 + 5 + 3 + 1 + 1 = 25$
L'effectif total de la classe est 25.
3. a) « Plus de 7 spams » correspond à 8 ou 9 ou 10 spams. Donc 5 élèves ont reçu plus de 7 spams.
b) « Au plus 5 spams » correspond à 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 spams. Donc 14 élèves ont reçu au plus 5 spams.

51 **a)**

Valeur	35	37	38	39	41	42	43	45
Effectif	5	5	7	10	10	2	9	5
Effectif cumulé croissant	**5**	**10**	**17**	**27**	**37**	**39**	**48**	**53**

L'effectif total de la série est $N = 53$.
b) $N = 53$ donc la médiane est la 27e valeur : $\text{Me} = 39$.
c) $\frac{N}{4} = 13{,}25$ donc Q_1 est la 14e valeur de la série : $Q_1 = 38$.
$\frac{3N}{4} = 39{,}75$ donc Q_3 est la 40e valeur de la série : $Q_3 = 43$.

52 **a)** $Q_3 = 78$ donc au moins 75 % des patients ont un âge inférieur ou égal à 78 ans.
L'affirmation est vraie.
b) La médiane de cette série est comprise en Q_1 et Q_3, donc entre 53 et 78, mais les informations données ne permettent pas d'être plus précis.
On ne peut pas savoir.
c) $Q_1 = 53$ donc au moins 25 % des patients ont 53 ans ou moins. Mais 25 % de 120 correspond à 30. Donc au moins 30 patients ont 53 ans ou moins. Alors, moins de 90 patients ont strictement plus de 53 ans.
L'affirmation est donc fausse.
d) $\min = 20$ et $Q_1 = 53$ donc au moins 25 % des patients ont un âge compris entre 20 et 53 ans inclus. Mais 25 % de 120 correspond à 30.
Donc l'affirmation est vraie.

53 **a)** Pour la série des filles :
$$Q_3 - Q_1 = 168 \text{ cm} - 159 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$
Pour la série des garçons :
$$Q_3 - Q_1 = 181 \text{ cm} - 165 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$
b) D'après **a)** les tailles des garçons sont plus dispersées autour de la médiane Me que celles des filles.
c) L'écart-type de la série des garçons est supérieur à celui de la série des filles. Donc les tailles des garçons sont plus dispersées autour de la moyenne m que celles des filles.

S'entraîner

55 **a)** La fonction H calcule le quotient de la somme des termes par le nombre de termes de la liste, soit la moyenne des termes de la liste.

b)
```
>>> L=[2,1,6,3]
>>> H(L)
3.0
>>> M=[8,6,5,8,9,3,10,5,7,1,7,9,4,5,6]
>>> H(M)
6.2
```

56 **a)** Cadre rouge : len(serie)
Cadre vert : serie[i]
Cadre bleu : T/N

b)
```
>>> M=[8,6,5,8,9,3,10,5,7,1,7,9,4,5,6]
>>> Moyenne(M)
6.2
```

58 **1.**

	A	B	C	D
1	**Face *x***	**Effectif n**	**Produit *nx***	***n*(*x* – *m*)²**
2	1	3	3	14,52
3	2	0	0	0
4	3	3	9	0,12
5	4	1	4	0,64
6	5	2	10	6,48
7	6	1	6	7,84
8	**Total**	10	32	29,6
9				
10	**Moyenne *m***	3,2		
11	**Variance V**	2,96		
12	**Ecart-type *s***	1,7204651		

2. a) Si l'on ajoute un 3, l'écart-type de la série diminue ($s \approx 1{,}641$).
b) Si l'on ajoute un 6, l'écart-type de la série augmente ($s \approx 1{,}827$).

59 **1.**

	A	B	C	D
1	**Valeur *x***	**Effectif n**	**Produit *nx***	***n*(*x* – *m*)²**
2	2	3	6	1 248,48
3	7	2	14	474,32
4	12	4	48	432,64
5	15	1	15	54,76
6	22	5	110	0,8
7	31	1	31	73,96
8	35	6	210	952,56
9	42	3	126	1 152,48
10	**Total**	25	560	4 390
11				
12	**Moyenne *m***	22,4		
13	**Variance V**	175,6		
14	**Ecart-type *s***	13,251		

2. a) Si l'on ajoute 10 à chaque valeur de la série, l'écart-type reste le même.
b) Si l'on multiplie par 10 chaque valeur de la série, l'écart-type est multiplié par 10.

60 **1. a)** $\sum_{i=1}^{n} kx_i = kx_1 + kx_2 + \ldots + kx_n$

$$\sum_{i=1}^{n} kx_i = k(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = k\sum_{i=1}^{n} x_i$$

b) $\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{n \text{ fois}} = n \times k$

c) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots (x_n + y_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

2. On considère les deux séries :
$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$ et $y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 1.$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{3} y_i\right) = (x_1 + x_2 + x_3) \times (y_1 + y_2 + y_3)$$
$$= 3 \times 3 = 9$$

Nathan se trompe.

61 **1. a)** $(x_i - m)^2 = x_i^2 - 2x_i m + m^2$

b) $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} (n_i x_i^2 - 2n_i x_i m + n_i m^2)$

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2m\sum_{i=1}^{n} n_i x_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} n_i$$

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2m\sum_{i=1}^{n} n_i x_i + \mathrm{N}m^2$$

c) $\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - m)^2$ est égal à

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2m \times \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i + m^2$$

2. a) $m = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i$ et $\mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - m)^2$

b) $\mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2m^2 + m^2$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - m^2$$

3. $m = 18{,}35$ et $\mathrm{N} = 20$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{20}(2 \times 14^2 + \ldots + 5 \times 21^2) - 18{,}35^2$$

donc $\mathrm{V} = 4{,}327\,5$.

Remarque : on peut noter que, pour calculer V avec la formule de König-Huygens, on effectue une seule soustraction, alors qu'avec la formule donnée en cours, on en effectue N.
Cela avait son importance à une époque où les calculatrices électroniques n'avaient pas été inventées.

62 $\dfrac{7 \times 11{,}2 + 12 \times 10{,}8 + 10 \times 10{,}4}{7 + 12 + 10} = \dfrac{312}{29}$

La moyenne de la classe est environ 10,8.

63 **1. a)** On saisit les données à la calculatrice et on obtient une moyenne m égale à 8,072.
b) On obtient $s \approx 0{,}278$.
2. La première condition est vérifiée :

$$8 - 0{,}1 < m < 8 + 0{,}1.$$

On détermine les bornes de l'intervalle $[8 - 2s\,;\,8 + 2s]$:

$$8 - 2s \approx 7{,}444 \text{ et } 8 + 2s \approx 8{,}556.$$

Toutes les valeurs de l'échantillon sont dans l'intervalle, donc la deuxième condition est vérifiée.

On détermine les bornes de l'intervalle $[8 - s\,;8 + s]$:

$8 - s \approx 7{,}722$ et $8 + s \approx 8{,}278$.

25 valeurs sur 50 sont dans l'intervalle $[8 - s\,;8 + s]$ donc la troisième condition n'est pas vérifiée.

À partir de cet échantillon, on peut affirmer que la production n'est pas satisfaisante.

64 **a)** Avec la calculatrice, on obtient : $m \approx 25{,}55$ et $s \approx 3{,}89$.

b) On détermine les bornes de l'intervalle :

$m - 2s \approx 17{,}77$ et $m + 2s \approx 33{,}33$.

$\frac{451}{471} \approx 0{,}958$ donc 95,8 % des projets ont une durée de réalisation dans l'intervalle $[m - 2s\,;m + 2s]$.

65 **1. a)** et **b)**

	Musée 1	Musée 2	Musée 3
m	100	100	72
s	56,57	56,57	46,36
Me	100	100	60
$\mathbf{Q_3 - Q_1}$	80	80	80

2. Pour les musées 1 et 2, on peut résumer chaque série par le couple (médiane ; écart interquartile) puisque les moyennes et les médianes sont égales. Pour le musée 3, on peut prendre le couple (médiane ; écart interquartile) car il est peu sensible aux valeurs extrêmes.

66 **a)** La variable SC représente la somme des carrés des écarts à la moyenne des valeurs de la série. La variable N représente l'effectif total de la série.

b)
```
>>> M=[1,3,4,4,5,6,10]
>>> Ecarttype(M)
2.602981022612657
```

67 **a)** La variable C représente le nombre de valeurs de la liste M comprises dans l'intervalle $[m - 2s\,;m + 2s]$, où m est la moyenne des valeurs de la liste M et s leur écart-type.

b) La fonction Proportion renvoie la proportion des valeurs de la liste M qui sont dans l'intervalle $[m - 2s\,;m + 2s]$, où m est la moyenne des valeurs de la liste M et s leur écart-type.

c)
```
>>> M=[1,3,4,4,5,6,10]
>>> Proportion(M)
0.8571428571428571
```

68 **a)** La fonction Lancer renvoie une liste de *n* entiers aléatoirement choisis entre 1 et 6. Elle simule 100 lancers d'un dé équilibré à 6 faces.

b)
```
>>> A=Lancer(100)

>>> A
[5, 2, 5, 6, 4, 6, 2, 1, 5, 2, 6, 2, 1, 6, 6, 2, 5, 2, 4, 6,
6, 3, 1, 6, 1, 2, 5, 1, 5, 3, 3, 3, 4, 4, 2, 6, 6, 3, 1, 1,
5, 5, 2, 3, 4, 1, 3, 2, 5, 3, 2, 4, 4, 3, 4, 3, 4, 5, 1, 3,
2, 1, 2, 6, 2, 6, 1, 4, 3, 1, 2, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 6, 6, 3,
4, 3, 2, 5, 2, 5, 6, 3, 6, 4, 3, 2, 5, 2, 6, 2, 5, 5, 4, 1]

>>> Moyenne(A)
3.47

>>> Ecarttype(A)
1.7289013852733182
```

69 **a)** La fonction SommeDes renvoie une liste de *n* sommes de deux entiers aléatoirement choisis entre 1 et 6. Elle simule *n* lancers de deux dés équilibrés à 6 faces et renvoie la liste des sommes obtenues.

b) Dans la console, on saisit B=SommeDes(100).

c) On peut utiliser la fonction Proportion écrite en langage Python à l'exercice **67** et saisir dans la console Proportion(B)*100.

70 **a)** Fournée 1 : $m_1 \approx 3{,}01$ et $s_1 \approx 0{,}49$

Fournée 2 : $m_2 \approx 2{,}98$ et $s_2 \approx 0{,}20$

b) La fournée 2 est plus régulière que la fournée 1 car $s_2 < s_1$. On peut raisonnablement penser qu'il s'agit de celle réalisée par la machine.

71 **a)** Série 1 : $m_1 \approx 60{,}13$ et $s_1 \approx 1{,}22$

Série 2 : $m_2 \approx 60{,}37$ et $s_2 \approx 2{,}06$

b) Le producteur utilisant des procédés industriels obtient des taux de sucre plus homogènes, on lui associe donc la série ayant l'écart-type le plus petit, soit la série 1.

c) On calcule les bornes de l'intervalle $[m - s\,;m + s]$ pour chaque série :

- $m_1 - \sigma_1 \approx 58{,}91$ et $m_1 + \sigma_1 \approx 61{,}35$

$\frac{15 + 18 + 16}{60} = \frac{49}{60}$ donc environ 81,7 % des données de la série 1 appartiennent à l'intervalle $[m_1 - s_1\,;m_1 + s_1]$.

- $m_2 - \sigma_2 \approx 58{,}31$ et $m_2 + \sigma_2 \approx 62{,}43$

$\frac{9 + 12 + 11 + 9}{60} = \frac{41}{60}$ donc environ 68,3 % des données de la série 2 appartiennent à l'intervalle $[m_2 - s_2\,;m_2 + s_2]$.

On calcule les bornes de l'intervalle $[m - 2s\,;m + 2s]$ pour chaque série :

- $m_1 - 2\sigma_1 \approx 57{,}69$ et $m_1 + 2\sigma_1 \approx 62{,}57$

$\frac{3 + 15 + 18 + 16 + 5}{60} = \frac{57}{60} = 0{,}95$ donc 95 % des données de la série 1 appartiennent à l'intervalle $[m_1 - 2s_1\,;m_1 + 2s_1]$.

- $m_2 - 2\sigma_2 \approx 56{,}25$ et $m_2 + 2\sigma_2 \approx 64{,}49$

$\dfrac{2+5+9+12+11+9+6+2}{60} = \dfrac{56}{60}$ donc environ 93,3 % des données de la série 2 appartiennent à l'intervalle $[m_2 - 2s_2\ ; m_2 + 2s_2]$.

72 **a)** Joueur 1 :
$\text{Me} = 9{,}5\ ;\ \ Q_1 = 8{,}5\ ;\ \ Q_3 = 10$
Joueur 2 :
$\text{Me} = 9\ ;\ \ Q_1 = 9\ ;\ \ Q_3 = 9{,}5$
b) L'écart interquartile de la série du joueur 2 est plus petit que celui de la série du joueur 1.
Les résultats du joueur 2 sont plus réguliers que ceux du joueur 1.

73 **a) Vrai.** En effet, une série dont tous les termes sont égaux a une moyenne et une médiane égales (elles sont toutes deux égales à la valeur de chaque terme de la série).
b) Vrai. En effet, Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1, donc $\text{Me} \geqslant Q_1$.
De même, Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3, donc $\text{Me} \leqslant Q_3$.
Ainsi la médiane Me appartient à l'intervalle $[Q_1\ ; Q_3]$ quelle que soit la série statistique.

74 **a) Vrai.** En effet, $m = 12{,}3$ et $s \approx 3{,}7$ donc $m + s \approx 16$.
La valeur $a = 20$ de la série vérifie $a > m + s$.
b) Faux. En effet, $m + 2s \approx 19{,}7$ donc la valeur $b = 20$ de la série ne vérifie pas $|b - m| < 2s$.

75 **1. a)** Proposition vraie.
b) Proposition vraie.
c) Proposition vraie.
2. C implique A : proposition fausse.
D implique A : proposition fausse.
D implique B : proposition vraie.

Organiser son raisonnement

76 Si on augmente chaque valeur de la série de 40 %, la moyenne augmente de 40 %. La moyenne de la série initiale est donc : $\dfrac{25{,}62}{1{,}4} = 18{,}3$.

Pour trouver la valeur de x, on résout alors l'équation :
$\dfrac{2\times 8 + 2\times 10 + 1\times 15 + 3\times 20 + 1\times x + 1\times 40}{2+2+1+3+1+1} = 18{,}3$
soit $151 + x = 183$ d'où $x = 32$.

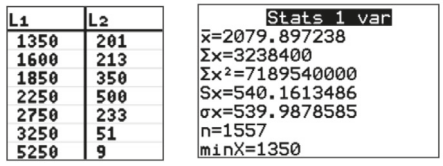
77 **1. a)** Seine :
$m \approx 258{,}3\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ et $s = 154{,}6\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$
Rhône : $m \approx 1613{,}8\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ et $s = 394{,}2\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$
b) Le Rhône semble le plus capricieux car l'écart-type est plus grand.
2. a) Seine : $\dfrac{s}{m} \approx 0{,}60$
Rhône : $\dfrac{s}{m} \approx 0{,}24$
b) Ce coefficient indique que, finalement, c'est la Seine qui connaît les variations de débits les plus importantes, relativement à son débit moyen.

78

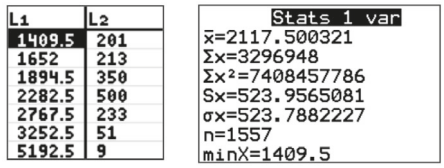
	m	s	Me	$Q_3 - Q_1$
Groupe A	$\approx 2{,}48$	$\approx 0{,}35$	2,4	0,5
Groupe B	$\approx 2{,}78$	$\approx 0{,}28$	2,8	0,5

Les indicateurs de tendance centrale du groupe A (moyenne et médiane) sont plus petits que ceux du groupe B. Il semble raisonnable de penser que le médicament est plus efficace que le placebo.

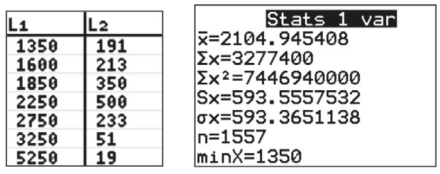
79 On obtient des valeurs approchées de m et s en prenant les milieux des classes.
Répartition initiale :



Méthode 1 :



Méthode 2 :



La méthode 1 augmente le salaire moyen et réduit les disparités puisque l'écart-type diminue.
La méthode 2 augmente le salaire moyen mais accentue les disparités puisque l'écart-type augmente.
La méthode 1 est donc la plus appropriée.

80 **1 a)** La variable mini est initialisée à $F_i[0] = 5$.

i		1	2	3	4
mini	5	5	5	3	3

b) La fonction Minimum renvoie l'élément le plus petit de la liste F, soit le minimum de la série.

2. et **3.**

```
def Maximum(L):
    N=len(L)
    maxi=L[0]
    for i in range(1,N):
        if L[i]>maxi:
            maxi=L[i]
    return maxi

def Minimum(L):
    N=len(L)
    mini=L[0]
    for i in range(1,N):
        if L[i]<mini:
            mini=L[i]
    return mini

def Etendue(L):
    e=Maximum(L)-Minimum(L)
    return e
```

81 Expérimentation avec le tableur pour une solution.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Valeur**	-1	0	1	3	5	**Total**
2	**Effectif**	5	2	5	6	6	24
3	**Effectif cumulé croissant**	5	7	12	18	24	
4							
5	**Moyenne**	2					
6	**Médiane**	1					
7	**Q1**	0					
8	**Q3**	3					

82

$$m = \frac{0{,}538\,8 \times 28\,455\,402 + 0{,}442\,2 \times 790\,149 + 0{,}38 \times 2\,679\,513 + 0{,}525\,3 \times 1\,626\,919}{28\,455\,402 + 790\,149 + 2\,679\,513 + 1\,626\,919}$$

$m \approx 0{,}518\,9$

The results as a percentage of this referendum are 51,89% of valid votes in favour of leaving the European Union.

83 **1. a) Vrai.** En effet, pour la série des salaires des hommes, $D_9 = 3\,990$ donc au moins 90 % des salaires des hommes sont inférieurs ou égaux à 3 390 €.

b) Vrai. En effet, pour la série des salaires des hommes, $D_5 = 1906$ donc au moins donc au moins 50 % des salaires des hommes sont inférieurs ou égaux à1 906 €.

c) Faux. En effet, pour la série des salaires des femmes, $D_8 = 2\,432$ donc au moins donc au moins 80 % des salaires des femmes sont inférieurs ou égaux à 2 432 €. donc le troisième quartile est inférieur ou égal à 2 432 €.

d) Vrai. En effet, pour la série des salaires des hommes, $D_2 = 1427$ et pour la série des salaires des femmes, $D_3 = 1396$.

2. a)

	$\frac{D_9}{D_1}$	$\frac{Me}{D_1}$	$\frac{D_9}{Me}$
Femmes	$\approx 3{,}16$	$\approx 1{,}51$	$\approx 2{,}09$
Hommes	$\approx 2{,}69$	$\approx 1{,}41$	$\approx 1{,}91$

b) 10 % des hommes gagnant le plus, gagnent un peu plus de 3 fois plus que les 10 % des hommes gagnant le moins.

Les 10 % des femmes gagnant le plus, gagnent un peu plus de 2,5 fois plus que les 10 % des femmes gagnant le moins.

10 %des hommes gagnent 1,5 fois moins que le salaire médian des hommes ou moins.

10 % des femmes gagnent 1,4 fois moins que le salaire médian des femmes ou moins.

10 % des hommes gagnent 2 fois plus que le salaire médian des hommes ou plus.

10 % des femmes gagnent 1,9 fois plus que le salaire médian des femmes ou plus.

84 **• Répartition initiale**

L1	L2
1250	300
1750	55
2750	35
4000	10

```
Stats 1 var
x̄=1518.75
Σx=607500
Σx²=1061875000
Sx=590.7269533
σx=589.9880825
n=400
Q1[TI-83CE]=1250
Méd[TI-83CE]=1250
Q3[TI-83CE]=1250
maxX=4000
```

• Après négociations

L1	L2
1315	300
1805	55
2785	35
4010	10

```
Stats 1 var
x̄=1578.375
Σx=631350
Σx²=1130227750
Sx=578.9124142
σx=578.1883209
n=400
Q1[TI-83CE]=1315
Méd[TI-83CE]=1315
Q3[TI-83CE]=1315
maxX=4010
```

On constate que le salaire moyen a augmenté. Grâce à la linéarité de la moyenne, on peut calculer directement ce salaire moyen en appliquant la transformation au salaire moyen de la série initiale.

Le salaire médian a lui aussi augmenté.

Les nouveaux salaires sont moins dispersés autour de la moyenne, l'écart-type se réduit.

• Étude des évolutions des salaires en pourcentage

Salaire initial	Nouveau salaire	Taux d'évolution
1 250	1 315	5,2 %
1 750	1 805	$\approx$ 3,1 %
2 750	2 785	$\approx$ 1,3 %
4 000	4 010	0,25 %

On constate un pourcentage d'évolution dégressif depuis 5,2 % pour le plus bas salaire jusqu'à 0,25 % pour les plus hauts.

85 La moyenne est égale à 45 et l'écart-type à 7,5.
En soustrayant 45 puis en divisant par 7,5 chaque valeur de la série, on obtient une nouvelle série de moyenne égale à 0 et d'écart-type égal à 1.
Il ne reste plus qu'à multiplier chaque valeur par 3 puis ajouter 10 afin de répondre au problème.
Si x est une des valeurs initiales, la nouvelle valeur est alors :

$$\frac{x-45}{7{,}5}\times 3+10=0{,}4x-8$$

Donc $a=0{,}4$ et $b=-8$.
La nouvelle série est 4 ; 10 ; 10 ; 10 ; 13 ;13.

86 On note x le nombre de mille-feuilles vendus en septembre.

$$2\,019=\frac{x+2\,018+2\,017}{3}$$

Donc $6\,057=2\,018+2\,017+x$ et $x=2\,022$.
On procède ainsi en « remontant » de mois en mois jusqu'en janvier. On obtient :

Mois	Nombre de mille-feuilles vendus
Janvier	2 062
Février	1 865
Mars	2 106
Avril	2 011
Mai	1 994
Juin	2 037
Juillet	2 014
Août	2 015
Septembre	2 022
Octobre	2 017
Novembre	2 018
Décembre	2 019
Total	24 180

87 On note n le nombre d'élèves de la classe et x l'âge de la professeure de mathématiques.
Alors $16{,}966n+x=(n+1)\times 18{,}193$
et $1{,}227n=x-18{,}193$.
On construit une feuille de calcul donnant les valeurs de $1{,}227n$ pour $1\leqslant n\leqslant 40$ et les valeurs de $x-18{,}83$ pour $25\leqslant x\leqslant 63$.

	A	B	C	D	E
1	***n***	**1,227 *n***		***x***	***x* - 18,193**
2	1	1,227		25	6,807
3	2	2,454		26	7,807
4	3	3,681		27	8,807
5	4	4,908		28	9,807
6	5	6,135		29	10,807
27	26	31,902		50	31,807
28	27	33,129		51	32,807
29	28	34,356		52	33,807
30	29	35,583		53	34,807
31	30	36,81		54	35,807
32	31	38,037		55	36,807
33	32	39,264		56	37,807
34	33	40,491		57	38,807
35	34	41,718		58	39,807
36	35	42,945		59	40,807
37	36	44,172		60	41,807

Sachant que les moyennes données sont des valeurs approchées, on cherche les valeurs proches dans ces deux colonnes. On vérifie que $x=55$ et $n=30$ conviennent :

$$\frac{16{,}966\times 30+55}{31}\approx 18{,}193$$

88 **1. B.** En effet, l'effectif total est impair, $\mathrm{N}=33=2\times 16+1$.
Donc Me est la 17e valeur, à savoir $\mathrm{Me}=12$.
2. B. En effet, la médiane est toujours dans l'intervalle $[\mathrm{Q}_1\,;\mathrm{Q}_3]$.
3. D. En effet, la moyenne m est $m\approx 12{,}1$ donc $m>\mathrm{Me}$.
4. C. En effet, Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des valeurs lui sont inférieures ou égales. Donc strictement moins de 75 % des valeurs de la série sont strictement inférieures à Q_3.
5. B. En effet, $\mathrm{Q}_1=10$ et $\mathrm{Q}_3=14$ donc $\mathrm{Q}_3-\mathrm{Q}_1=4$.
6. C. En effet, les valeurs de la série L sont obtenues en multipliant par 100 celles de la série K, donc $m_2=100m_1$.
7. D. En effet, lorsqu'on multiplie les x_i par 100, la variance devient

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n}n_i(100x_i)^2-(100m)^2$$

c'est-à-dire $10\,000\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n}n_ix_i^2-m^2\right]$.
Autrement dit, la variance est multipliée par 100^2 et l'écart-type par $\sqrt{100^2}$ c'est-à-dire 100.
Donc $s_2=100s_1$.
8. B. En effet, Q1 et Q3 sont multipliés par 2, il en est donc de même de $\mathrm{Q}_3-\mathrm{Q}_1$.
9. B. En effet, cela se produit par exemple lorsqu'on obtient la même face lors de tous les lancers de dé.
10. C. En effet, cela se produit par exemple lorsqu'on lance 30 fois un dé et que l'on obtient 10 fois la face 2, 10 fois la face 3, 10 fois la face 4.

Exploiter ses compétences

89 On détermine graphiquement (Doc 1) les bornes de l'intervalle $[m-2s\,;m+2s]$ pour chaque âge, puis on utilise le Doc 2 pour déterminer la proportion p de garçons ayant une taille dans l'intervalle.

	$[m-2s\,;m+2s]$	p
12 mois	[71 ; 81]	89 %
18 mois	[76,5 ; 88]	91 %
24 mois	[82 ; 94]	90 %
30 mois	[86 ; 99]	93 %
36 mois	[89,5 ; 104]	95 %

On constate que la proportion de garçons ayant une taille dans l'intervalle $[m-2s\,;m+2s]$ augmente avec l'âge.

90 On utilise les fonctions Moyenne et Ecarttype de l'exercice **66** pour étudier 200 sorties de prison.

```
>>> A=Serie(200)
[5, 2, 1, 14, 1, 8, 10, 2, 7, 8, 12, 33, 8, 2, 18, 2
, 5, 6, 3, 1, 1, 1, 7, 7, 5, 6, 3, 9, 6, 11, 6, 6, 4
, 6, 6, 4, 3, 5, 5, 1, 7, 7, 15, 2, 16, 5, 7, 1, 1,
 1, 2, 8, 7, 5, 8, 4, 3, 3, 2, 11, 5, 22, 6, 7, 12,
 9, 6, 1, 2, 1, 17, 1, 3, 1, 3, 7, 7, 7, 3, 1, 7, 4,
 19, 22, 1, 7, 2, 2, 4, 1, 13, 11, 3, 7, 6, 22, 6, 6
, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 10, 5, 7, 7, 5, 5, 5, 7, 3, 2, 6
, 6, 3, 2, 6, 1, 12, 3, 1, 3, 2, 2, 7, 9, 5, 2, 1, 3
, 10, 1, 1, 5, 1, 11, 2, 1, 1, 5, 5, 2, 11, 4, 18, 8
, 4, 7, 8, 1, 3, 17, 9, 8, 1, 4, 8, 7, 4, 5, 4, 23,
 1, 8, 4, 6, 8, 13, 5, 4, 7, 10, 2, 2, 8, 12, 2, 17,
 1, 5, 5, 14, 11, 2, 6, 5, 1, 1, 9, 2, 5, 8, 1, 1, 2
, 6, 6, 8]
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
>>> A=[5, 2, 1, 14, 1, 8, 10, 2, 7, 8, 12, 33, 8, 2,
 18, 2, 5, 6, 3, 1, 1, 1, 7, 7, 5, 6, 3, 9, 6, 11, 6
, 6, 4, 6, 6, 4, 3, 5, 5, 1, 7, 7, 15, 2, 16, 5, 7,
 1, 1, 1, 2, 8, 7, 5, 8, 4, 3, 3, 2, 11, 5, 22, 6, 7
, 12, 9, 6, 1, 2, 1, 17, 1, 3, 1, 3, 7, 7, 7, 3, 1,
 7, 4, 19, 22, 1, 7, 2, 2, 4, 1, 13, 11, 3, 7, 6, 22
, 6, 6, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 10, 5, 7, 7, 5, 5, 5, 7, 3
, 2, 6, 6, 3, 2, 6, 1, 12, 3, 1, 3, 2, 2, 7, 9, 5, 2
, 1, 3, 10, 1, 1, 5, 1, 11, 2, 1, 1, 5, 5, 2, 11, 4,
 18, 8, 4, 7, 8, 1, 3, 17, 9, 8, 1, 4, 8, 7, 4, 5, 4
, 23, 1, 8, 4, 6, 8, 13, 5, 4, 7, 10, 2, 2, 8, 12, 2
, 17, 1, 5, 5, 14, 11, 2, 6, 5, 1, 1, 9, 2, 5, 8, 1,
 1, 2, 6, 6, 8]
>>> Moyenne(A)
5.9
>>> Ecarttype(A)
4.972926703662546
```

On remarque que sur ces 200 sorties de prison, il faut en moyenne environ 6 lancers avant d'obtenir un 6. L'écart-type de cette série est environ de 5 lancers.

91 **• Pour les prix sans impôts :**

– l'écart type est 2,74 centimes d'euro ;

– le premier quartile (7e valeur) est 9,50, le troisième quartile (21e valeur) est 13,05, l'écart interquartile est donc 3,55 centimes d'euro,

En centimes d'euros par kWh	Prix TTC	Prix TTC ordonnés
Lituanie	11,07	9,83
Bulgarie	9,83	11,07
Slovaquie	14,42	11,34
Hongrie	11,34	12,36
Danemark	30,10	12,89
Roumanie	12,89	13,19
Estonie	13,19	13,64
Pologne	14,51	14,42
Croatie	12,36	14,51
Lettonie	15,82	14,88
Finlande	15,99	15,56
Portugal	22,30	15,82
Grèce	16,20	15,99
Slovénie	16,13	16,13
France	17,56	16,18
Pays-Bas	15,56	16,20
Luxembourg	16,18	17,56
Autriche	19,78	18,26
Rép. tchèque	14,88	18,56
Malte	13,64	19,78
Suède	19,93	19,93
Italie	20,80	20,80
Royaume-Uni	18,56	21,77
Allemagne	30,48	22,30
Chypre	18,26	23,55
Espagne	21,77	28,77
Belgique	28,77	30,10
Irlande	23,55	30,48

• Pour les prix TTC :

– l'écart-type est 5,39 centimes d'euro ;

– le premier quartile (7e valeur) est 13,64, le troisième quartile (21e valeur) est 19,33, l'écart interquartile est donc 6,29 centimes d'euros.

Les impôts et taxes augmentent la dispersion des prix de l'électricité au sein de l'union européenne.

92 Il y a 30 écarts donnés depuis 1988. Pour cette période, l'écart minimum est environ 0 °C, le premier quartile (8e valeur) est environ 0,7 °C, la médiane (moyenne des 15e et 16e valeurs) est environ 1,1 °C, le troisième quartile (23e valeur) est environ 1,3 °C, l'écart maximum est environ 1,9 °C.

Les températures de la période 1988-2017 sont nettement plus chaudes que celles de la période 1900-1987 :

– toutes les années depuis 1988 ont été plus chaudes que 75 % des années de la période 1900-1987 ;

– au moins la moitié des années de la période 1988-2017 ont été plus chaudes que toutes les années de la période 1900-1987 ;

– plus précisément, sur la période 1988-2017, 19 années sur 30 ont été plus chaudes que toutes les années de la période 1900-1987.

Les températures de la période 1988-2017 sont plus dispersées que celles de la période 1900-1987.

En effet, l'écart interquartile est plus important : 0,6 °C au lieu de 0,3 °C.

13 Probabilités

Découvrir

1 Distribution des fréquences et modèle probabiliste

1 Premier sac : la probabilité d'obtenir la boule numérotée 0 est égale à $\frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir la boule 2 est égale à $\frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir la boule 4 est égale à $\frac{1}{3}$.

Second sac : la probabilité d'obtenir la boule numérotée 0 est égale à $\frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir la boule 1 est égale à $\frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir la boule 3 est égale à $\frac{1}{3}$.

2 **a)** Les sommes possibles sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7.

b) Il s'agit du modèle 3 car $\frac{1}{9} \approx 0{,}111$ et $\frac{2}{9} \approx 0{,}222$.

2 Le langage des événements

1 **a)**

	F	$\bar{F}$	Total
I	10	10	20
$\bar{I}$	8	4	12
Total	18	14	32

b) $P(\bar{F}) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$

2 $P(F \cap I) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

3 $P(F \cup I) = \frac{10+10+8}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$

Acquérir des automatismes

3 E = {Rouge ; Bleu ; Jaune}.

Issue	Rouge	Bleu	Jaune
Probabilité	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

4 Il s'agit du modèle 2, dans lequel les fréquences observées par simulation se rapprochent des probabilités.

7 L'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi de probabilité ci-dessous.

Issue	Pile	Face
Probabilité	0,12	0,88

8 $P(V) = 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25$
$P(W) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}45$

11 Les diviseurs de 6 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6.
Donc la probabilité de tirer un jeton qui est un diviseur de 6 est égale à $\frac{4}{10}$ soit 0,4.

12 On note J l'événement « L'adhérent choisi est une personne jeune » et F l'événement « L'adhérent choisi est une femme ».
$P(J \cup F) = P(J) + P(F) - P(J \cap F)$
$P(J \cup F) = 0{,}7 + 0{,}5 - 0{,}25$
$P(J \cup F) = 0{,}95$.
La probabilité que l'adhérent choisi soit une femme ou une personne jeune est égale à 0,95.

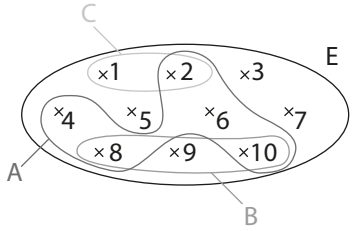
13 $I = \{a ; e\}$; $J = \{a ; b\}$.

14 A et B n'ont aucune issue en commun, donc $A \cap B = \varnothing$.

$\overline{A} = \{2 ; 4 ; 6\}$; $\overline{B} = \{1 ; 3 ; 4 ; 5\}$ donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4\}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$.

15 **a) Faux.** En effet, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
b) Vrai.
c) Vrai.

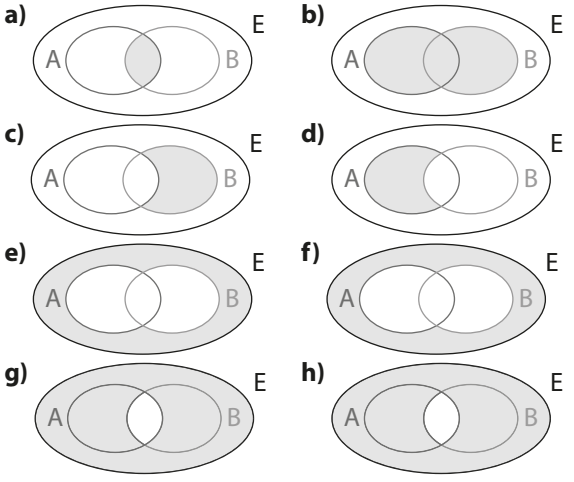
16 **a)** $A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$.
$B = \{8 ; 9 ; 10\}$.
$C = \{1 ; 2\}$.
b)



c) • $\overline{A} = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$.
• $\overline{B} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$.
• $A \cap B = \{8 ; 10\}$.
• $A \cap C = \{2\}$.
• $A \cup B = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10\}$.
• $A \cup C = \{1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$.

17 • $\overline{A} = \{x_1 ; x_3 ; x_4\}$.
• $A \cap B = \{x_5\}$.
• $A \cup B = \{x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5\}$.
• $A \cup \overline{B} = \{x_1 ; x_2 ; x_5\}$.
• $\overline{A \cap B} = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4\}$.
• $\overline{A \cup B} = \{x_1\}$.

18

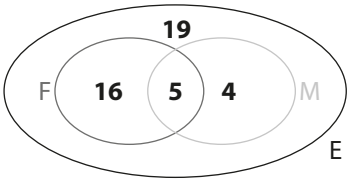


19 **a)**

	A	$\overline{A}$
B	**4**	**11**
$\overline{B}$	**16**	**9**

b) • H : 44 issues • I : 16 issues • $A \cup B$: 31 issues
• $\overline{H}$: 36 issues • $\overline{I}$: 24 issues • $A \cap \overline{B}$: 16 issues

20 **a)**



b) • F : 21 issues • M : 9 issues • $\overline{F}$: 23 issues
• $F \cap M$: 5 issues • $F \cup M$: 25 issues

21 **a) Faux.** En effet, $\frac{3}{2} > 1$.
b) Faux. En effet, le résultat d'un tirage n'a aucune influence sur le tirage du lendemain.
c) Faux. En effet, les résultats des lancers précédents n'ont aucune influence sur le lancer suivant.

22 La loi **(1)** est correcte. En effet, pour la loi (2) $p(\{3\})$ devrait être égale à $\frac{1}{4}$ et $p(\{44\})$ à $\frac{1}{8}$.

23 $p(\{\text{Rouge}\}) = \frac{2}{7}$; $p(\{\text{Vert}\}) = \frac{2}{7}$;
$p(\{\text{Bleu}\}) = \frac{3}{7}$.

24 $p = 1 - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}$

25 **a)** Loi d'équiprobabilité sur $E = \{\text{Pile} ; \text{Face}\}$.

Issue	Pile	Face
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

b) Loi d'équiprobabilité sur $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

c) Loi d'équiprobabilité sur :
$E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

Issue	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

26 Dé n° 1

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Dé n° 2

Issue	1	2	3
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Dé n° 3

Issue	1	2	4	5
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

27 **a)**

Issue	0	1	2	3
Probabilité	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$

b)

Issue	Bleu	Jaune	Rose
Probabilité	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$

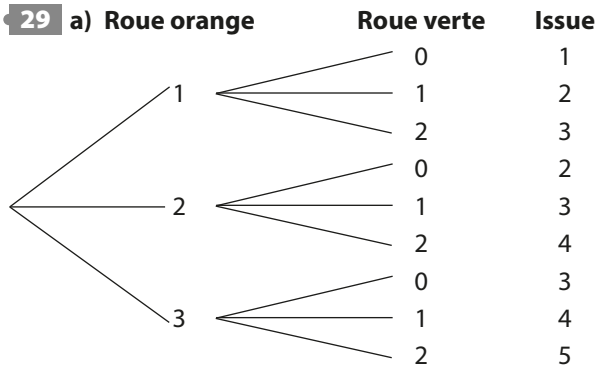
28 On lance le dé et on note le numéro obtenu sur la face supérieure.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On lance le dé et note la couleur obtenue sur la face supérieure.

Issue	Bleu	Jaune	Rose
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

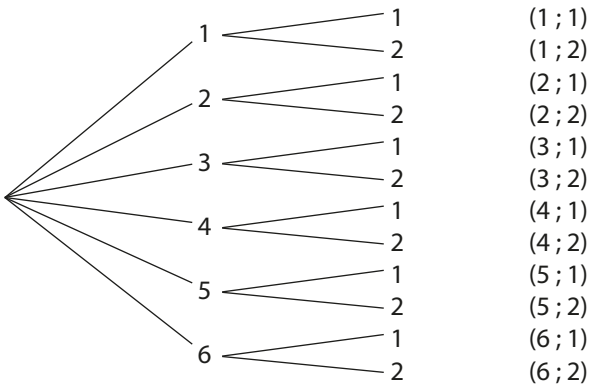
29 **a)**



b)

Issue	1	2	3	4	5
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

30 **a)**



b) Loi d'équiprobabilité sur :

$$E = \{(1\,;1)\,;(1\,;2)\,;\ldots\,;(6\,;2)\}.$$

Issue	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(2 ; 1)	…	(6 ; 1)	(6 ; 2)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	…	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

31 Il s'agit du modèle 3 pour lequel les fréquences observées se rapprochent des probabilités du modèle.

32 **a)** Il s'agit du modèle 3 pour lequel les fréquences observées se rapprochent des probabilités du modèle.

b) Les probabilités et les mesures d'angles semblent proportionnelles.

Secteur	D	C	B	A
Angle	30°	90°	42°	198°

33 $P(V) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

34 **a) (1)** $P(\overline{A}) = \frac{50}{100}$

b) (1) $P(A \cup B) = \frac{90}{100}$

c) (2) $P(\overline{A} \cap B) = \frac{40}{100}$

35 **1.**

	Seconde	Première	Terminale	Total
Espagnol	84	80	87	**251**
Allemand	**36**	**35**	**43**	**114**
Total	**120**	**115**	**130**	**365**

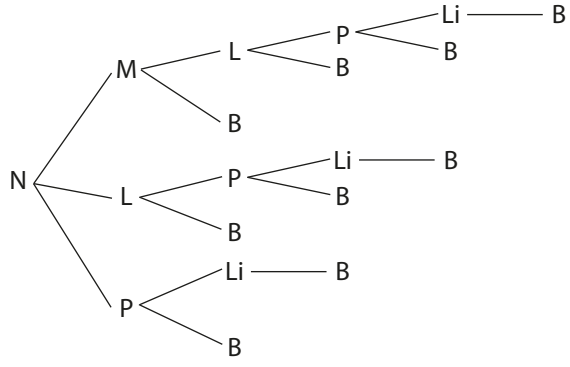
2. a) $P(A) = \frac{130}{365} = \frac{26}{73}$

b) $P(B) = \frac{36}{365}$

c) $P(C) = \frac{114}{365}$

36 **a)** $P(A) = \frac{1}{3}$ **b)** $P(B) = \frac{2}{3}$ **c)** $P(C) = \frac{2}{3}$

37 **1.** On note N (resp. M ; L ; P ; Li ; B) pour Narbonne (resp. Montpellier ; Lyon ; Paris ; Lille ; Bruxelles).



2. a) $P(L) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ **b)** $P(M) = \frac{4}{9}$

c) $P(\bar{L}) = \frac{1}{3}$ **d)** $P(L \cap M) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

e) $P(L \cup M) = \frac{7}{9}$ **f)** $P(\overline{L \cap M}) = \frac{2}{3}$

38 **a)** $P(A) = \frac{15}{58}$ **b)** $P(B) = 1 - \frac{14}{58} = \frac{22}{29}$

c) $P(C) = \frac{15+12}{58} = \frac{27}{58}$

d) $P(D) = \frac{15+14}{58} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2}$

39 **1. a)** $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ **b)** $P(B) = \frac{7}{20}$

c) $P(C) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

2. a)

$A \cup B = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20\}$.

Donc $P(A \cup B) = \frac{13}{20}$.

b) $B \cup C = \{5 ; 10 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20\}$.

Donc $P(B \cup C) = \frac{9}{20}$.

c) $A \cap C = \{10 ; 20\}$.

Donc $P(A \cup C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

3. a) • $A \cap B = \{14 ; 16 ; 18 ; 20\}$.

Donc $P(A \cap B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

• $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{20} - \frac{13}{20}$

$P(A \cap B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

b) • $B \cap C = \{15 ; 20\}$.

Donc $P(B \cap C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

• $P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C)$

$P(B \cap C) = \frac{7}{20} + \frac{1}{5} - \frac{9}{20}$

$P(B \cap C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

c) • $A \cup C = \{2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20\}$

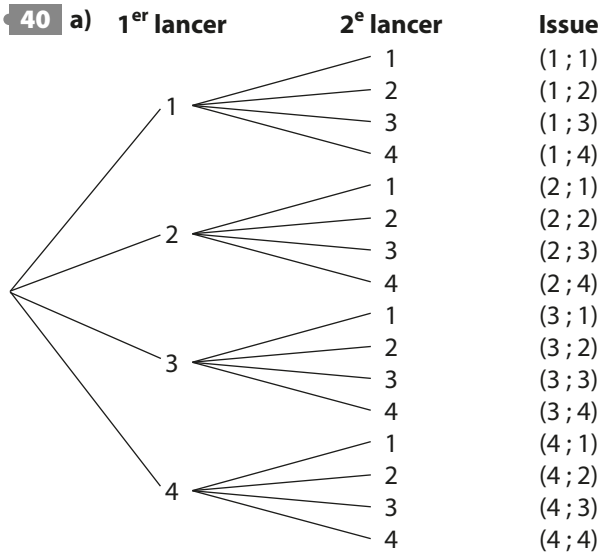
Donc $P(A \cup C) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

• $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

• $P(A \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$

$P(A \cup C) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

40 **a)**



b) Car chaque issue a la même probabilité d'être obtenue : $\frac{1}{16}$.

c) • $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ • $P(B) = \frac{7}{16}$ • $P(C) = \frac{9}{16}$

d) $A \cap B = \{(1 ; 1)\}$. Donc $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$.

$A \cap C = \{(1 ; 1) ; (3 ; 3) ; (4 ; 4)\}$.

Donc $P(A \cap C) = \frac{3}{16}$.

$B \cap C = \{(1 ; 1) ; (1 ; 3) ; (3 ; 1) ; (1 ; 4) ; (4 ; 1) ; (3 ; 4) ; (4 ; 3) ; (3 ; 3) ; (4 ; 4)\}$.

Donc $P(B \cap C) = \frac{9}{16}$.

41

Dé rouge \ Dé vert	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

b) $M = \{(1 ; 1) ; (2 ; 2) ; (3 ; 3) ; (4 ; 4) ; (5 ; 5) ; (6 ; 6)\}$

donc $P(M) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$S = \{(2 ; 6) ; (6 ; 2) ; (3 ; 5) ; (5 ; 3) ; (4 ; 4)\}$

donc $P(S) = \frac{5}{36}$ et $P(\bar{S}) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$.

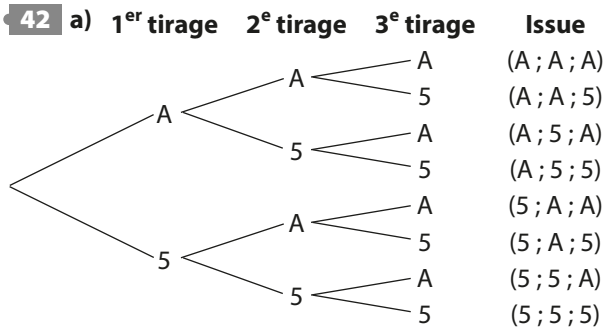
$M \cap S = \{(4 ; 4)\}$ donc $P(M \cap S) = \frac{1}{36.}$

$P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$

$P(M \cup S) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{1}{36}$

$P(M \cup S) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

42 **a)**



b) $L = \{(A ; A ; A) ; (A ; A ; 5) ; (A ; 5 ; A) ; (5 ; A ; A) ; (A ; 5 ; 5) ; (5 ; A ; 5) ; (5 ; 5 ; A)\}$.

$D = \{(A ; 5 ; 5) ; (5 ; A ; 5) ; (5 ; 5 ; A) ; (5 ; 5 ; 5)\}$.

c) $\overline{L} = \{(5 ; 5 ; 5)\}$ donc $P(\overline{L}) = \frac{1}{8}$.

$L \cup D = E$ (l'univers tout entier) donc $P(L \cup D) = 1$.

$L \cap D = \{(A ; 5 ; 5) ; (5 ; A ; 5) ; (5 ; 5 ; A)\}$

donc $P(L \cap D) = \frac{3}{8}$.

43 **1.** C **2.** A **3.** A **4.** B **5.** D

44 **1.** B **2.** A, C **3.** B, C

45 **1. Faux.** En effet,
$0{,}15 + 0{,}22 + 0{,}14 + 0{,}37 + 0{,}33 = 1{,}21$
et $1{,}21 \neq 1$.

2. Faux. En effet, les trois issues (Rouge, Bleue, Verte) ne sont pas équiprobables :

$$P(R) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{1}{6},\ P(V) = \frac{1}{2}.$$

3. Vrai. En effet, en notant R pour rouge, B pour bleue et V pour verte,

$p = P(R ; R) + P(B ; B) + P(V ; V)$

$p = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

4. Faux. En effet,

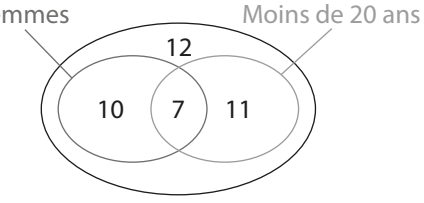
$p' = P(R ; R) + P(R ; B) + P(R ; V) + P(B ; R) + P(V ; R)$

$p' = \frac{5}{9}$

46 **a)**

	A	$\overline{A}$	Total
B	12	14	26
$\overline{B}$	20	34	54
Total	32	48	80

b)



47 **a)**

$A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24\}$

$B = \{5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25\}$

b) $P(A) = \frac{12}{25}$ et $P(B) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

48 **a)** $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}55 - 0{,}2$

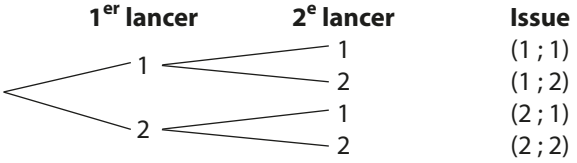
$P(A \cup B) = 0{,}65$

c) $P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C)$

$P(A \cap C) = 0{,}3 + 0{,}45 - 0{,}5$

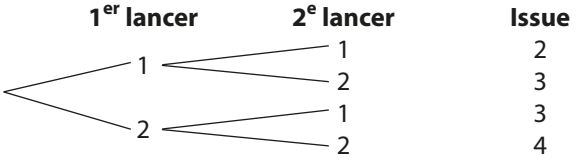
$P(A \cap C) = 0{,}25$

49 **a) Situation 1**



Issue	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(2 ; 1)	(2 ; 2)
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b) Situation 2



Issue	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

S'entraîner

51 **1. a)** Lorsque $n = 7$, l'algorithme donne 1 ;
lorsque $n = 18$, l'algorithme donne 1 ;
lorsque $n = 21$, l'algorithme donne 0 ;
lorsque $n = 17$, l'algorithme donne 1.

b) Les issues sont 0 et 1.

$P(\{0\}) = \frac{18}{34} = \frac{9}{17}$ et $P(\{1\}) = \frac{8}{17}$.

2. On obtient, par exemple :
0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1.

La fréquence de sortie du 0 est $\frac{9}{20}$ soit 0,45 et celle de sortie du 1 est $\frac{11}{20}$ soit 0,55.

52 **1. a)** Cette fonction simule l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une lettre de l'alphabet grec et à noter 1 si c'est une voyelle, 0 sinon.

b) $P(\{1\}) = \frac{5}{24}$ et $P(\{0\}) = \frac{19}{24}$.

2. On obtient, par exemple :

0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0.

La fréquence de sortie du 0 est $\frac{15}{20}$ soit 0,75 et celle de sortie du 1 et $\frac{5}{20}$ soit 0,25.

54 **a)** En cellule B2 et C2, on saisit :

=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;15)<=5;1;0)

En cellule G2, on saisit :

=NB.SI(D$2:D$3001;F2)/3000

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre d'épreuves	1re tirage	2e tirage	Total		Nombre de jetons rouges	Fréquence
2	1	0	0	0		0	0,45
3	2	0	0	0		1	0,44
4	3	0	0	0		2	0,11
5	4	0	0	0		Total	1
6	5	0	0	0			
7	6	0	0	0			
8	7	0	1	1			
9	8	1	1	2			
10	9	0	1	1			
11	10	1	1	2			

b) On modélise cette expérience aléatoire par la loi de probabilités :

x_i	0	1	2
p_i	0,45	0,45	0,1

55 **a)** • Dans les cellules B2 et C2, on saisit :

=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)<=4;1;0)

• Dans la cellule D2, on saisit :

=SOMME(B2:C2)

• Dans la cellule G2, on saisit :

=NB.SI(D$2:D$10001;F2)/10000

que l'on étire dans les cellules G3 et G4.

• Dans la cellule G5, on saisit :

=SOMME(G:G4)

On obtient la feuille de calcul ci-dessous.

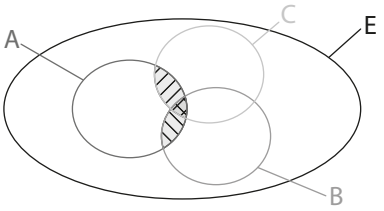
	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre d'épreuves	1re tirage	2e tirage	Total		Nombre de faces 1	Fréquence
2	1	0	1	1		0	0,12
3	2	0	1	1		1	0,44
4	3	0	1	1		2	0,44
5	4	1	0	1		Total	1
6	5	0	1	1			
7	6	1	1	2			
8	7	1	1	2			
9	8	1	0	1			
10	9	1	0	1			
11	10	1	1	2			

b) On modélise cette expérience aléatoire en assimilant la fréquence d'apparition de 0,1 ou 2 à la probabilité théorique de 0, 1 ou 2.

Issue	0	1	2
Probabilité	0,12	0,44	0,44

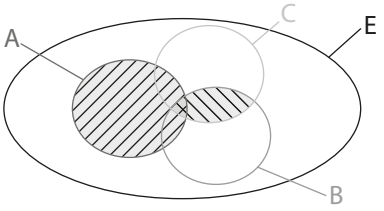
56 **a)** et **b)** $A \cap (B \cup C)$: rose ;

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$: hachuré



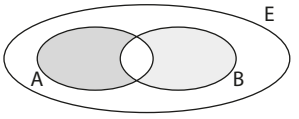
Ainsi, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) $A \cup (B \cap C)$: rose ; $(A \cup B) \cap (A \cup C)$: hachuré

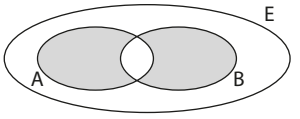


Ainsi, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

57 **a)** et **b)**

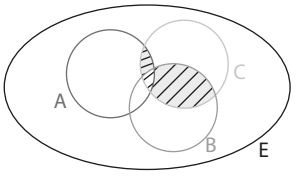


c)

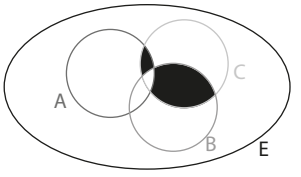


On constate que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

d) $(A \triangle B) \cap C$ en hachuré



$(A \cap C) \triangle (B \cap C)$ en noir



On constate que
$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

58 On note p, p', p'' les probabilités d'obtenir un chiffre impair associées aux dés 1, 2, 3.

Dé 1 : $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Dé 2 : $p' = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

Dé 3 : $p'' = 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}6$

Il faut donc choisir le dé 3.

59 **a)** Ce domaine contient 25 points à coordonnées $(x\,;y)$ avec $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant 4$.

$A = \{(-2\,;2)\,;(0\,;3)\,;(2\,;4)\}$ donc $P(A) = \frac{3}{25}$.

$B = \{(0\,;0)\,;(1\,;1)\}$ donc $P(B) = \frac{2}{25}$.

$C = \{(-2\,;4)\,;(-1\,;1)\,;(0\,;0)\,;(1\,;1)\,;(2\,;4)\}$

donc $P(C) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

b) Les événements A et B sont incompatibles car $A \cap B = \varnothing$.

60 **a)** $A = \{0\,;9\,;18\,;27\,;36\,;45\}$

donc $P(A) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$ et $P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}$.

b) $B = \{0\,;8\,;16\,;24\,;32\,;40\,;48\}$

donc $A \cap B = \{0\}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{50}$.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{6}{50} + \frac{7}{50} - \frac{1}{50} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$.

d) $C = \{2\,;3\,;5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;19\,;23\,;29\,;31\,;37\,;41\,;43\,;47\}$

donc $P(C) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$.

e) $B \cap C = \varnothing$

donc $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{7}{50} + \frac{15}{50} = \frac{22}{50} = \frac{11}{25}$.

f) $A \cap C = \varnothing$

donc $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{6}{50} + \frac{15}{50} = \frac{21}{50}$.

61 **1.** On note A : «Une espèce menacée par la déforestation » et B : « Une espèce menacée par le changement climatique ».

B \ A	Oui	Non	Total
Oui	**35**	**45**	**80**
Non	**95**	25	120
Total	**130**	70	200

2. a) $P(A \cup B) = \frac{45 + 35 + 95}{200} = \frac{175}{200} = 0{,}875$.

La probabilité qu'une espèce soit menacée par la déforestation ou le changement climatique est 0,875.

b) $P(A) = \frac{130}{200} = 0{,}65$.

La probabilité qu'une espèce soit menacée par la déforestation est 0,65.

c) $P(\overline{A} \cap B) = \frac{45}{200} = 0{,}225$.

La probabilité qu'une espèce soit menacée par le changement climatique mais pas par la déforestation est 0,225.

62 $E = \{(0\,;-1)\,;(0\,;1)\,;(0\,;2)\,;(0\,;3)\,;(1\,;-1)\,;(1\,;1)\,;(1\,;2)\,;(1\,;3)\,;(2\,;-1)\,;(2\,;1)\,;(2\,;2)\,;(2\,;3)\,;(3\,;-1)\,;(3\,;1)\,;(3\,;2)\,;(3\,;3)\}$

2. a) $A = \{(1\,;-1)\,;(2\,;1)\,;(3\,;3)\}$ donc $P(A) = \frac{3}{16}$.

b) $B = \{(3\,;3)\,;(1\,;2)\}$ donc $P(B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

c) $A \cap B = \{(3\,;3)\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$.

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{3}{16} + \frac{2}{16} - \frac{1}{16}$

$P(A \cup B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

63 **a)** $P(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ **b)** $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

c) $P(C) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

d) $A \cap C =$ {Roi de trèfle ; Roi de pique}

donc $P(A \cap C) = \frac{2}{32} = \frac{1}{6}$.

e) $B \cap C =$ {Roi de trèfle} donc $P(B \cap C) = \frac{1}{32}$.

f) $A \cap B =$ {7 de trèfle ; 8 de trèfle ; … ; As de trèfle}

donc $P(A \cap B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

64 **a)** $A = \{00\,;01\,;02\,;03\,;04\,;05\,;06\,;07\,;08\,;09\,;10\,;20\,;30\,;40\,;50\,;60\,;70\,;80\,;90\}$

donc $P(A) = \frac{19}{100} = 0{,}19$.

$B = \{09\,;19\,;29\,;39\,;49\,;59\,;69\,;79\,;89\,;90\,;91\,;92\,;93\,;94\,;95\,;96\,;97\,;98\,;99\}$

donc $P(B) = \frac{19}{100} = 0{,}19$.

c) $A \cap B = \{09\,;90\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{2}{100} = 0{,}02$.

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

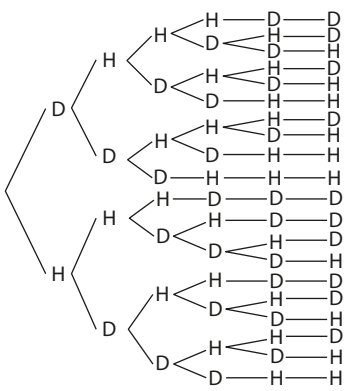
$P(A \cup B) = 0{,}19 + 0{,}19 - 0{,}02 = 0{,}36$.

65 $P(H) = 0{,}1237 + 0{,}2557 + 0{,}112 = 0{,}4914$.

$P(A) = 1 - (0{,}1384 + 0{,}112) = 0{,}7496$.

$P(B) = 1 - (0{,}1179 + 0{,}1237) = 0{,}7584$.

66 **1.**



Il y a 20 chemins possibles.

2. a) • Probabilité qu'il passe par le point M :

$$p = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

• Probabilité qu'il passe par le point N :

$$p' = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

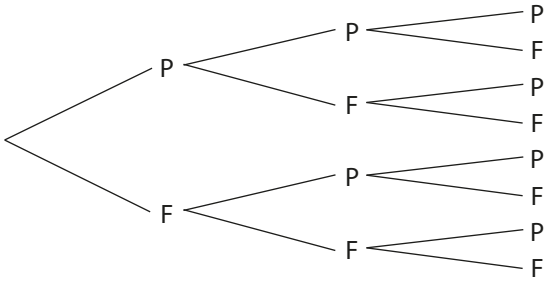
b) Probabilité qu'il passe par les deux points M et N :

$$p'' = \frac{3}{20}$$

c) Probabilité qu'il passe par l'un au moins de ces deux points :

$$p''' = p + p' - p'' = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

67 **a)** **1er lancer** **2e lancer** **3e lancer**



b)

$p = p(\{(P\,;P\,;F)\}) + p(\{(P\,;F\,;P)\} + p(\{(F\,;P\,;P)\})$

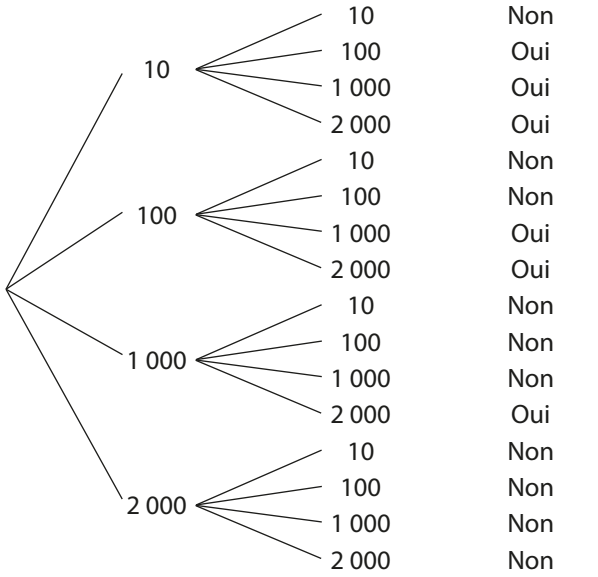
$p = \frac{3}{8}$

68 **a)**

2e lancer \ 1er lancer	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

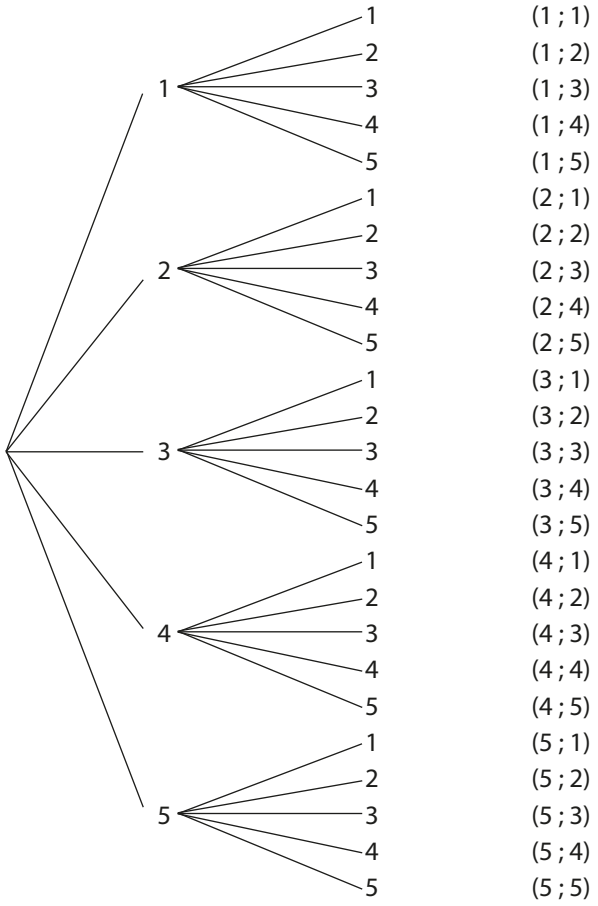
b) • $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ • $P(B) = \frac{5}{36}$

69 **a)**



b) $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

70 **a)** **1re boule** **2e boule** **Issue**

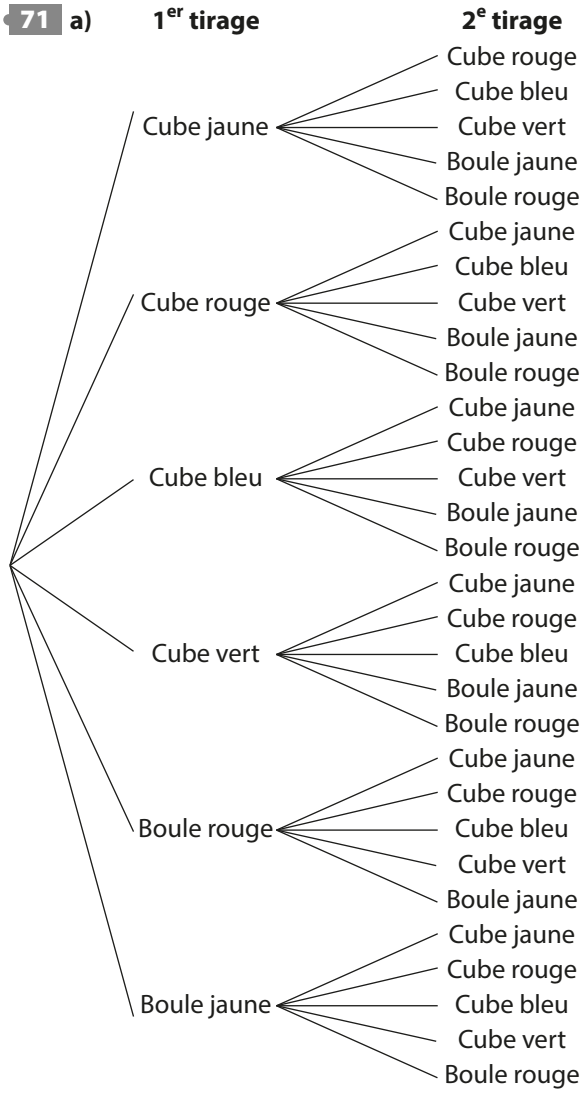


Il y a donc 25 tirages possibles.

b) $A=\{(5\,;5)\}$ donc $P(A) = \frac{1}{25}$.

$B = \varnothing$ donc $P(B) = 0$.
$C = \{(1\,;1)\,;(2\,;2)\,;(3\,;3)\,;(4\,;4)\,;(5\,;5)\}$
donc $P(C) = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$.

71 **a)**

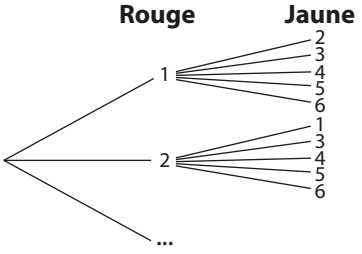


Donc il y a 30 tirages possibles.

b) • $P(A) = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$ • $P(B) = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$

• $P(C) = 1 - P(B) = \dfrac{13}{15}$

72 **a)**



En poursuivant cet arbre, on constate qu'il y a 6×5 dispositions, c'est-à-dire 30.

b) $P(A) = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5}$; $P(B) = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5}$; $P(C) = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$.

73 **a)** $\overline{A}$: « L'élève choisi est une fille ou est dans une classe autre que la Seconde »

b) $\overline{B}$: « L'élève choisi est en Seconde »

c) $\overline{C}$: « L'élève choisi est un garçon ou est en Seconde »

74 **1.** Non, ce sera l'un ou l'autre, mais pas les deux.

2. a) $P(D) = \dfrac{3}{30} = \dfrac{1}{10}$ $P(E) = \dfrac{11}{30}$

b) Ils seront 11 élèves.

75 **a)** $A \subset B$ signifie que toutes les issues de A sont aussi des issues de B.

On note C l'ensemble formé par les issues de B qui ne sont pas dans A (C peut être vide lorsque $A = B$).

A et C sont incompatibles,
donc $P(B) = P(A) + P(C)$. Or, $P(C) \geqslant 0$,
donc $P(B) \geqslant P(A)$.

b) La réciproque est fausse.

Par exemple, pour $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ univers d'une expérience aléatoire associé à une loi d'équiprobabilité (lancer d'un dé équilibré à six faces).

Si $A = \{1\,;2\}$, alors $P(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$,

et si $B = \{3\,;4\,;5\}$, alors $P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

$P(B) \geqslant P(A)$ mais A n'est pas inclus dans B.

Organiser son raisonnement

76 **a)** Il s'agit d'une loi d'équiprobabilité sur l'univers E formé des 10 épisodes de la saison 5.

La probabilité cherchée est $p = \dfrac{9}{10}$.

b) Il s'agit d'une loi d'équiprobabilité sur l'univers E formé par tous les épisodes de toutes les saisons.

La probabilité cherchée est $p' = \dfrac{9 \times 6 + 6 + 5}{10 \times 6 + 7 + 6} = \dfrac{65}{73}$.

77 **a)** $P(A) = \dfrac{25 + 11 + 12}{150} = \dfrac{48}{150} = \dfrac{8}{25}$.

The probability that the randomly choosed employee is a woman is $\dfrac{8}{25}$.

b) $P(A \cap \bar{B}) = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$.

The probability that the randomly choosed employee is a woman and a player is $\frac{1}{6}$.

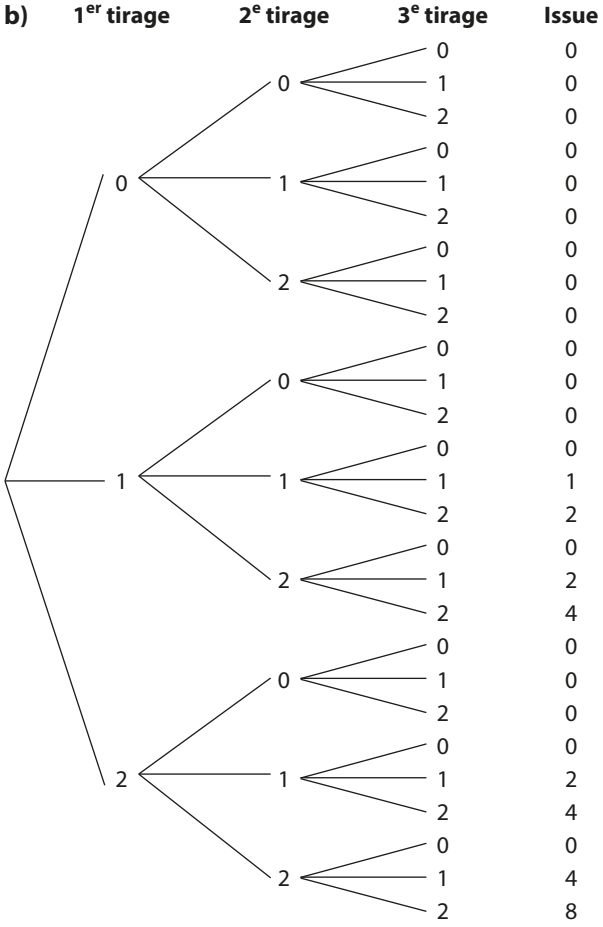
c) $P(A \cup B) = \frac{150 - 47}{150} = \frac{113}{150}$.

The probability that the randomly choosed employee is either a woman or not a player is $\frac{103}{150}$.

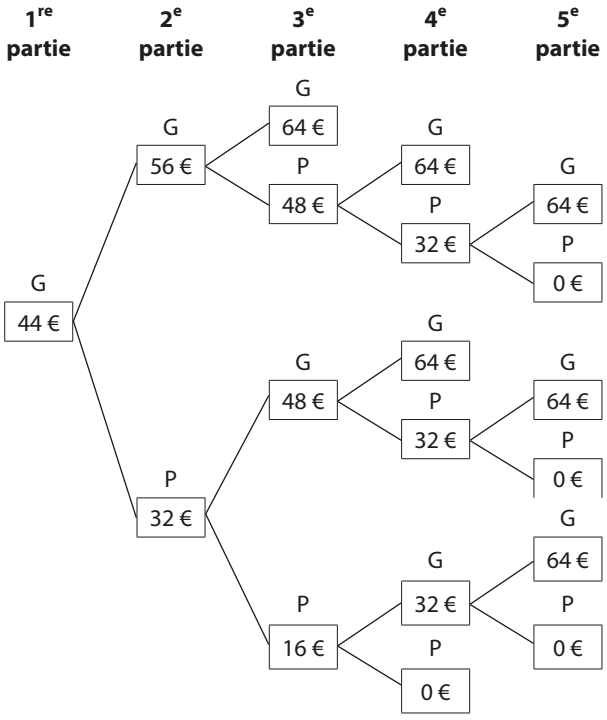
78 **a)** n représente le numéro marqué sur la boule tirée à l'issue de chacun des trois tirages.

M représente le résultat du produit des trois numéros obtenus.

b)


1er tirage
2e tirage
3e tirage
Issue
0
1
2
0
1
2
0
1
2

3. a)



b) Si Anna a gagné la première partie et que la deuxième partie ne peut avoir lieu, alors elle aurait eu une chance sur deux de gagner la deuxième partie (et d'encaisser 56 €) et une chance sur deux de perdre la deuxième partie (et d'encaisser 32 €). Cela correspond à un gain moyen de : $\frac{1}{2} \times 56\,€ + \frac{1}{2} \times 32\,€$ soit 44 €.

83 Lancer des deux dés tétraédriques :

Dé 2 \ Dé 1	0	1	2	3
3	3	4	5	6
4	4	5	6	7
5	5	6	7	8
6	6	7	8	9

La probabilité d'obtenir une somme égale à 6 est : $p = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

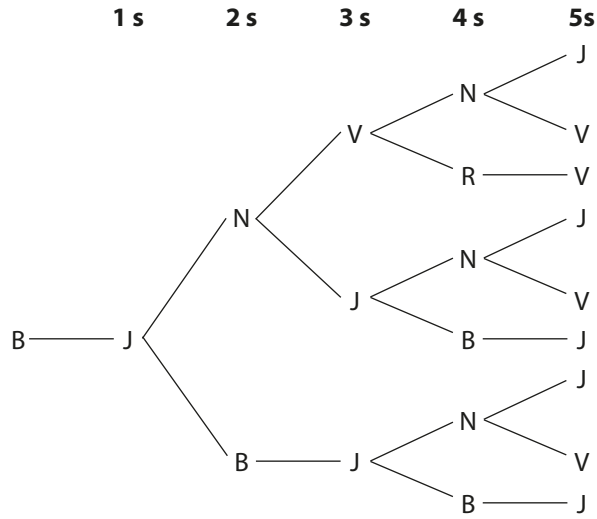
• Lancer du dé octaédrique :

Pour obtenir une somme égale à 6, le numéro caché doit être l'un des 2. La probabilité d'obtenir une somme égale à 6 est : $p' = \frac{3}{8}$.

• Conclusion $p' > p$.

Le joueur a intérêt à utiliser le dé octaédrique.

84 On peut représenter la situation par un arbre :



Où B (resp. J, N, V, R) sont les événements : « La puce se trouve dans l'anneau bleu (resp. jaune, noir, vert, rouge). »

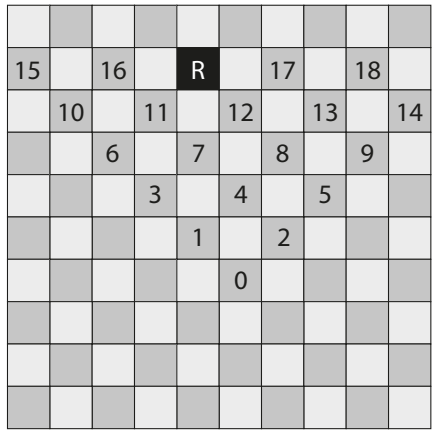
Chaque chemin est équiprobable.

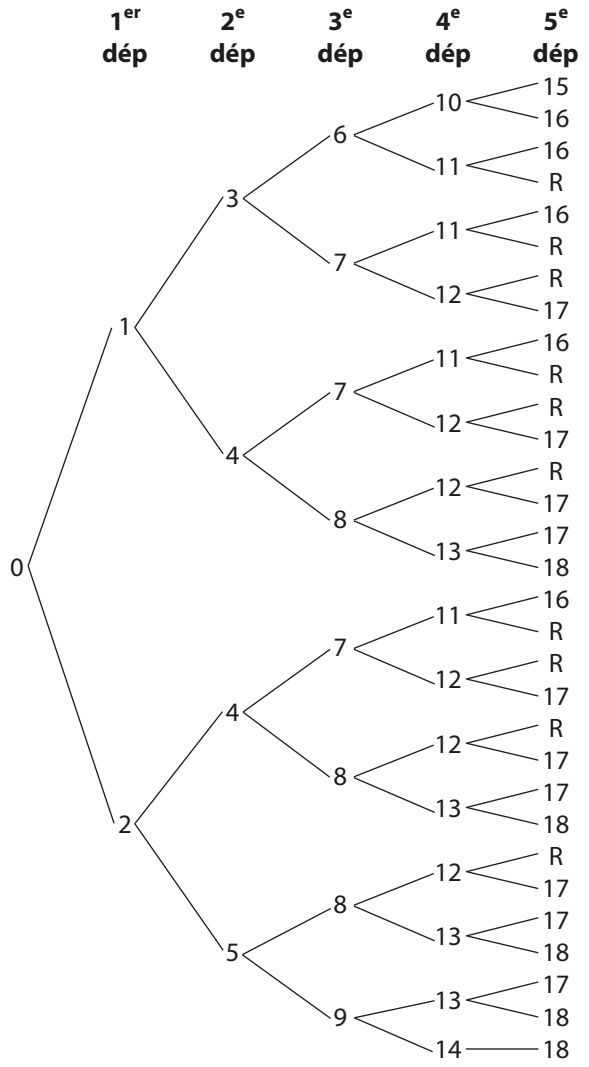
La probabilité qu'elle se trouve dans l'anneau vert au bout de 5 s est donc égale à $\frac{4}{9}$.

85 On peut numéroter les cases afin de compter :

• le nombre total de chemins à 5 déplacements ;

• le nombre de chemins à 5 déplacements qui mènent à la case noire.





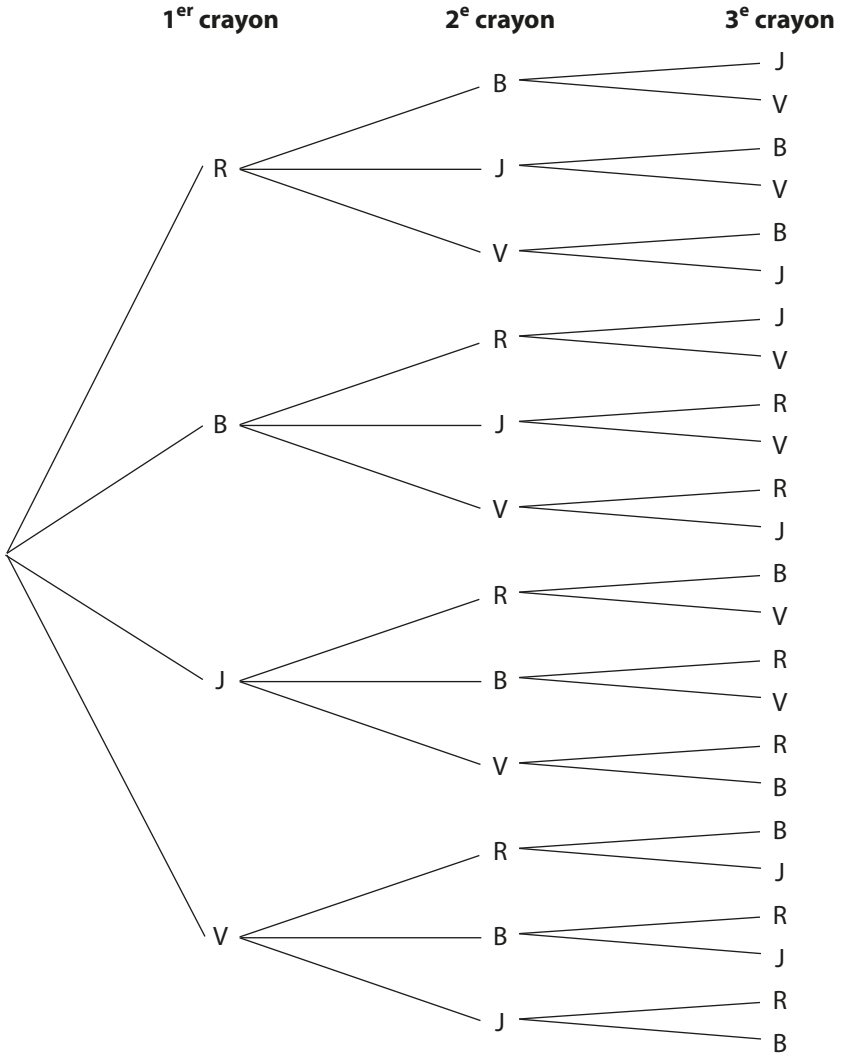
La probabilité cherchée est $p = \frac{10}{31}$.

86 **1. A.** En effet,
$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$
$P(\overline{A} \cup B) = (1 - 0{,}35) + 0{,}42 - 0{,}15 = 0{,}92$
2. B. En effet, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$.
Or, $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}35 + 0{,}15$
soit $P(A \cup B) = 0{,}5$.
Donc $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
3. D. En effet, $P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \cap B)$
soit $P(A \cup \overline{B}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
4. B. En effet, on peut compter les issues de A avec un arbre.
Il y a par exemple (Roi de cœur ; As de trèfle) … mais aussi (As de trèfle ; Roi de cœur). Il y en a 32 au total.
5. A. En effet, on peut compter les issues de B. Elles sont de la forme (Dame de carreau ; Autre carte (sauf Dame de carreau)) ou (Autre carte (sauf Dame de carreau) ; Dame de carreau) ou (Dame de carreau ; Dame de carreau).
Il y en a $31 + 31 + 1 = 63$ au total.
6. A. En effet, A et B n'ont pas d'issues en commun.
7. D. En effet, on obtient 4 avec les tirages $(1 ; 4)$, $(4 ; 1)$, $(2 ; 2)$.
8. B. En effet, $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16\}$.
9. B. En effet, A est réalisé avec les tirages $(0 ; 0)$, $(0 ; 1)$, $(0 ; 2)$, $(0 ; 4)$, $(1 ; 0)$, $(2 ; 0)$, $(4 ; 0)$ et il y a 16 tirages en tout donc $P(A) = \frac{7}{16}$.
10. C. En effet,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = \frac{7}{16} + \frac{2}{16} - 0 = \frac{9}{16}$

Exploiter ses compétences

87
La somme égale à 9 provient des issues :
• (1 ; 2 ; 6), (6 ; 1 ; 2), (2 ; 6 ; 1), (2 ; 1 ; 6), (6 ; 2 ; 1), (1 ; 6 ; 2) ;
• (1 ; 3 ; 5), (1 ; 5 ; 3), (3 ; 1 ; 5), (3 ; 5 ; 1), (5 ; 1 ; 3), (5 ; 3 ; 1) ;
• (1 ; 4 ; 4), (4 ; 1 ; 4), (4 ; 4 ; 1) ;
• (2 ; 2 ; 5), (5 ; 2 ; 2), (2 ; 5 ; 2) ;
• (2 ; 3 ; 4), (2 ; 4 ; 3), (3 ; 4 ; 2), (3 ; 2 ; 4), (4 ; 2 ; 3), (4 ; 3 ; 2) ;
• (3 ; 3 ; 3).
Soit 25 cas au total.
La somme égale à 10 provient des issues :
• (1 ; 3 ; 6), (1 ; 6 ; 3), (3 ; 1 ; 6), (3 ; 6 ; 1), (6 ; 1 ; 3), (6 ; 3 ; 1) ;
• (1 ; 4 ; 5), (1 ; 5 ; 4), (4 ; 1 ; 5), (4 ; 5 ; 1), (5 ; 1 ; 4), (5 ; 4 ; 1) ;
• (2 ; 2 ; 6), (2 ; 6 ; 2), (6 ; 2 ; 2) ;
• (2 ; 3 ; 5), (2 ; 5 ; 3), (3 ; 2 ; 5), (3 ; 5 ; 2), (5 ; 3 ; 2), (5 ; 2 ; 3) ;
• (2 ; 4 ; 4), (4 ; 2 ; 4), (4 ; 4 ; 2) ;
• (3 ; 3 ; 4), (3 ; 4 ; 3), (4 ; 3 ; 3).
Soit 27 cas au total.
Or il y a $6 \times 6 \times 6$ c'est-à-dire 216 cas au total.
Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 9 est $\frac{25}{216}$ et celle d'obtenir une somme égale à 10 est $\frac{27}{216}$.
On a bien $\frac{27}{216} > \frac{25}{216}$.

88 On représente la situation par un arbre en notant R (resp. B, J, V) les événements « Le crayon prélevé est rouge (resp. bleu, jaune, vert) ».
L'enfant prélève ses crayons l'un après l'autre donc il ne reprend pas deux fois la même couleur.



Il y a 24 chemins sur cet arbre, tous équiprobables.
On compte alors le nombre de chemins pouvant convenir pour chaque drapeau.

Sénégal : $P_S = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Finlande : $P_F = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

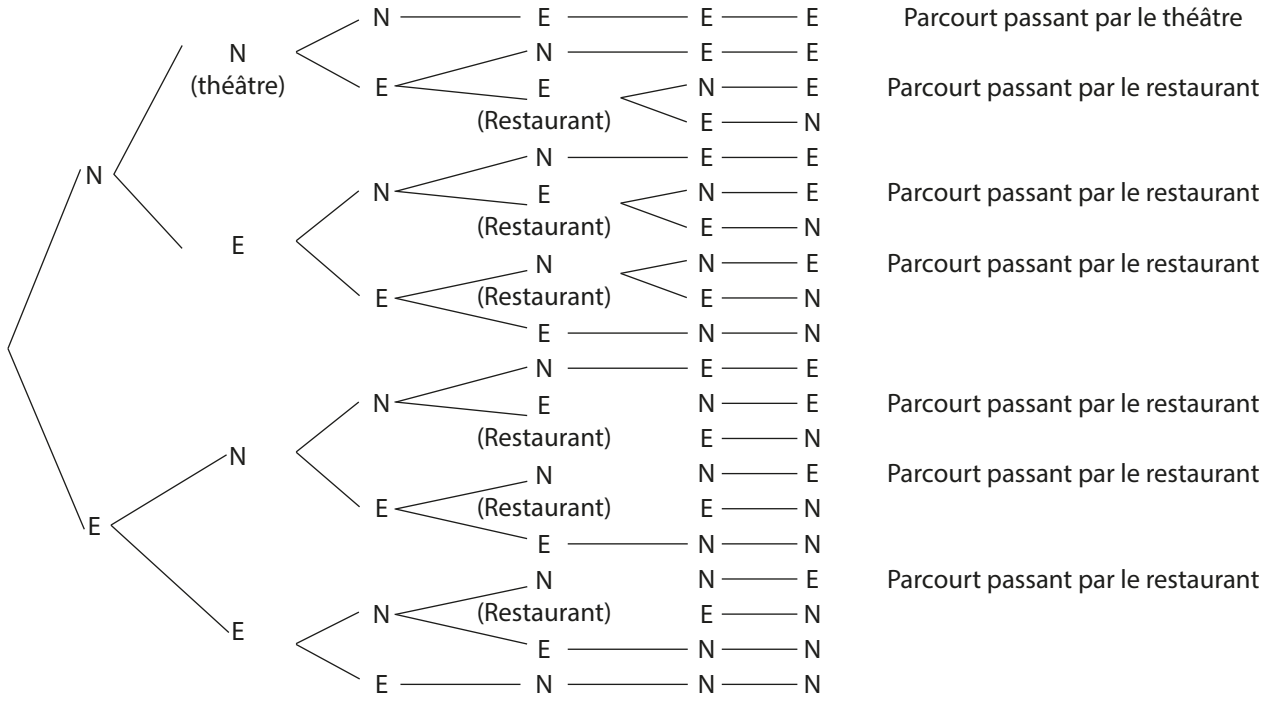
Brésil : $P_B = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Autriche : $P_A = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

Afrique du Sud : $P_{AS} = 0$ (car il n'y a pas de crayon noir)

Italie : $P_I = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

89



• Il y a 20 parcours possibles.

• Il y a 4 parcours passant par le théâtre. Donc la probabilité qu'il passe par le théâtre est de $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

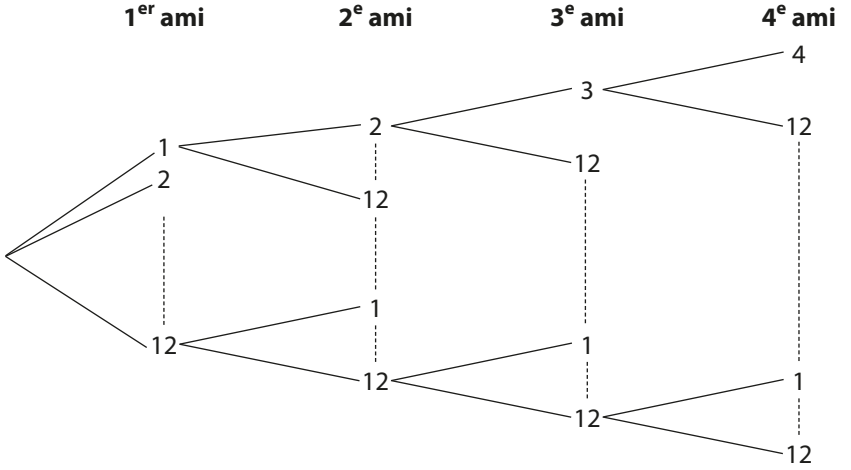
• Il y a 12 parcours passant par le restaurant. Donc la probabilité qu'il passe par le restaurant est de $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.

• Il y a 6 parcours ne passant ni par le restaurant, ni par le théâtre. Donc la probabilité qu'il ne passe ni par le restaurant ni par le théâtre est de $\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.

Ainsi, Alex a plus de chances de voir le tournage du film 2 qui a lieu au restaurant.

89 Il y a $12 \times 12 \times 12 \times 12$ soit 20 736 listes de 4 mois d'anniversaires possibles.

On note A l'événement : « Au moins deux d'entre eux sont nés le même mois ». Ainsi $\overline{A}$ est l'événement : « Les quatre amis ont tous un mois d'anniversaire différent ».



$\overline{A}$ est réalisé par $12 \times 11 \times 10 \times 9$ c'est-à-dire 11880 listes de 4 mois d'anniversaires possibles.

Donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{11880}{20\,736}$ soit $P(A) \approx 0{,}427$.

Ainsi, Julien s'est trompé.

14 Échantillonnage

Découvrir

1 Observer des fluctuations

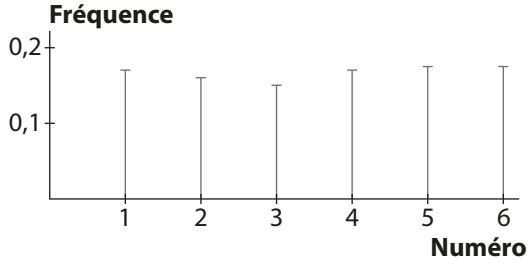
a) Le nombre de bonbons à l'orange n'est pas le même dans toutes les boîtes.
b) On a trouvé le même nombre de bonbons de chaque parfum dans 4 boîtes (les boîtes 2, 8, 15, 34).
c) La proportion minimum est 40 %, la proportion maximum est 60 %.
d) L'écart maximum est 10 %.

2 Estimer des probabilités

a) La fréquence d'obtention du 1 est $\frac{34}{200}$ soit 0,17, c'est-à-dire 17 %.
b)

Numéro	1	2	3	4	5	6
Fréquence	17 %	16 %	15 %	17 %	17,5 %	17,5 %

c)



d) Il y a peu de différence entre les fréquences observées. On peut donc penser que le dé est bien équilibré.

Acquérir des automatismes

3 **a)** La probabilité de gagner est $\frac{4}{10}$, donc 0,4.
b)

```
from random import *

def Tirage():
    if random()<=0.4:
        p=1
    else:
        p=0
    return p
```

c) On peut par exemple obtenir : 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1.

4 La fréquence observée est $f = \frac{47}{250}$. L'estimation ainsi obtenue est 51,95 %.

5 Par exemple : 5 ; 2 ; 4 ; 6 ; 6.

6 Les listes B et D peuvent constituer des échantillons de taille 8 dans cette situation.

7 La fonction random() renvoie un nombre aléatoire décimal de l'intervalle $[0 ; 1[$, il y a donc une probabilité égale à 0,3 que la condition soit réalisée. Ce n'est pas 1 chance sur 3, donc Nefeli a tort.

8 P ; P ; F ; F ; P ; F ; P ; P ; P ; F ; F ; P.

9 R ; R ; V ; V ; R ; V ; V ; V ; R ; R.

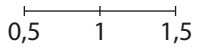
10 Non ; Non ; Non ; Oui ; Non ; Oui ; Non ; Non ; Non ; Non ; Non ; Oui ; Non ; Non.

11 **a)** Pour une pièce équilibrée, les probabilités d'obtenir Pile et Face sont égales à 0,5. Dans une table de chiffres au hasard, les probabilités d'obtenir un chiffre pair et un chiffre impair sont aussi égales à 0,5. La méthode de simulation est donc adéquate.

b) Il y a 31 chiffres pairs sur 50. Donc la fréquence de Pile dans l'échantillon est $f = \frac{31}{50}$ c'est-à-dire 0,62.

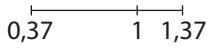
12 **a)** [0,4 ; 1,4[**b)** [0,9 ; 1,9[
c) [0,71 ; 1,71[**d)** [0,18 ; 1,18[

13 **a)** Probabilité d'obtenir 0 : 0,5
Probabilité d'obtenir 1 : 0,5

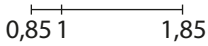


b) Probabilité d'obtenir 0 : 0,8
Probabilité d'obtenir 1 : 0,2

c) Probabilité d'obtenir 0 : 0,63
Probabilité d'obtenir 1 : 0,37



d) Probabilité d'obtenir 0 : 0,15
Probabilité d'obtenir 1 : 0,85



14 **a)** La formule tableur =ENT(ALEA()+0,6) renvoie 1 avec la probabilité 0,6 et 0 avec la probabilité 0,4. On peut donc assimiler la sortie de 1 à l'obtention d'un haricot blanc et la sortie de 0 à l'obtention d'un haricot rouge.
b) On peut par exemple obtenir : 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 1 ; 0 ; 1 ; 1.
c) La fréquence de haricots blancs dans cet échantillon est $f = \frac{20}{38}$ soit environ 0,53. Elle n'est pas égale à 0,6 du fait des fluctuations d'échantillonnage.

15 **a)** On peut utiliser la formule =ENT(ALEA()+0,26).
b)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		**Fréquence de 1**
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		0,293
3	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1		
6	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1		
7	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0		
8	0	0	0	1	0							
9												
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		**Fréquence de 1**
11	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1		0,240
12	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1		
13	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1		
14	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
15	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0		
16	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0		
17	0	0	0	0	1							

c) On peut par exemple obtenir 29,3 % et 24 %.
d) Les fréquences ne sont pas forcément égales du fait des fluctuations d'échantillonnage.
e) Pour la même raison, il n'y a pas nécessairement dans l'entreprise une fréquence observée égale à 26 %.

16 **1.** Par exemple, si on obtient le nombre aléatoire 0,57, la fonction renvoie le résultat 1.
2. a) et **b)** On obtient par exemple :

```
>>>
111111010111
```

c) La fréquence observée est $f = \frac{10}{12}$, c'est-à-dire $f \approx 0{,}83$. Elle n'est pas égale à 0,75 du fait des fluctuations d'échantillonnage.

17 **a)** L'instruction conditionnelle if random()<=0.55 : simule le fait de tirer au hasard la fiche d'un élève et d'observer s'il s'agit d'une fille. Avec la boucle for, on répète 45 fois ce tirage simulé et on ajoute 1 à *n* quand on obtient une fille.
b) Le nombre *n* représente le nombre de filles obtenu dans l'échantillon simulé.
c) On obtient par exemple :

```
>>> Echantillon()
28
```

d) La fréquence observée est $f = \frac{28}{45}$ c'est-à-dire $f \approx 0{,}62$. Elle n'est pas égale à 0,55 du fait des fluctuations d'échantillonnage.

18 **a)**

```
1 from random import *
2
3 def Echantillon():
4     n=0
5     for i in range(50):
6         if random()<=0.5:
7             n=n+1
8     return n
```

b) On obtient par exemple :

```
>>> Echantillon()
26
```

c) La fréquence observée est $f = \frac{26}{50}$, c'est-à-dire $f = 0{,}52$.

19 **a)**

```
1 from random import *
2
3 def Echantillon():
4     n=0
5     for i in range(60):
6         if random()<=0.08:
7             n=n+1
8     return n
```

b) On obtient par exemple les cinq résultats suivants : 3 ; 4 ; 2 ; 13 ; 3.
c) Les fréquences observées sont respectivement $\frac{3}{60}$, $\frac{4}{60}$, $\frac{13}{60}$, $\frac{13}{60}$ et $\frac{3}{60}$, c'est-à-dire, en pourcentages éventuellement arrondis au centième, 5 %, 6,67 %, 3,33 %, 21,67 % et 5 %. Elles ne sont pas toujours égales à 8%.

20 **a)**

```
from random import*
def Echantillon():
    n=0
    for i in range(36):
        if random()<=0.5:
            n=n+1
    return n
```

b) On obtient par exemple les résultats suivants : 21, 20, 17, 18, 20.

c) On constate que chaque sac ne contiendra pas forcément le même nombre de bonbons de chaque parfum.

21 0,57 et 0,9 peuvent être des fréquences observées.

22 **a)** 0,43 **b)** 0,6 **c)** 0,74

23 Une estimation de la proportion de garçons parmi les nouveaux-nés est $\frac{18}{30}$, c'est-à-dire environ 60 %. Mais cela ne veut pas dire qu'il y a chaque année 60 % de garçons. L'affirmation de Mélina est donc fausse.

24 Une estimation de la proportion de jetons verts dans ce sac est $\frac{4}{24}$, c'est-à-dire environ 16,7 %.

25 Une estimation de la probabilité de jetons portant le chiffre 5 dans ce sac est $\frac{406}{4\,000}$, c'est-à-dire 0,1015.

26 Une estimation de la proportion de femmes dans la clientèle de ce supermarché est $\frac{1421}{2\,573}$, c'est-à-dire environ 55,2 %.

27 Une estimation de la proportion d'ordinateurs défectueux dans cette entreprise est $\frac{4}{200}$, c'est-à-dire 2 %.

28 Une estimation de la proportion de chansons de moins de 4 min dans ce catalogue est $\frac{427}{500}$, c'est-à-dire 85,4 %.

29 Une estimation de la proportion de lecteurs de bandes dessinées parmi ces habitants est $\frac{136}{855}$, c'est-à-dire environ 15,9 %.

30 Une estimation de la proportion de votants pour ce candidat est $\frac{571}{1123}$ c'est-à-dire environ 50,8 %.

31 Pour : $\frac{429}{1128}$, soit environ 38,0 %.

Contre : $\frac{395}{1128}$, soit environ 35,0 %.

Indécis : $\frac{304}{1128}$, soit environ 27,0 %.

32 Première estimation : $\frac{486}{10\,000}$, soit 0,048 6.

Deuxième estimation : $\frac{997}{20\,000}$, soit 0,049 85.

33 **a)** Première estimation : $\frac{616}{1000}$, soit 0,616.

Deuxième estimation : $\frac{5\,999}{10\,000}$, soit 0,599 9.

Troisième estimation : $\frac{60\,024}{100\,000}$, soit 0,600 24.

b) Les estimations sont proches de 0,6 et non de 0,5, on peut donc penser que la pièce n'est pas équilibrée.

34 **a)** Premier échantillon : $\frac{174}{500}$, soit 0,348.

Deuxième échantillon : $\frac{660}{2\,000}$, soit 0,33.

Troisième échantillon : $\frac{1636}{5\,000}$, soit 0,327 2.

b) Une estimation de la probabilité d'obtenir une face noire est $\frac{1}{3}$.

35 **1.** C **2.** D **3.** A **4.** B

36 **1.** B **2.** C **3.** C **4.** A, B, D

37 **1. Vrai.** En effet, la syntaxe est correcte et l'indentation aussi.

2. Faux. En effet, l'effectif total de l'échantillon est *n*. *k* compte le nombre de succès dans l'échantillon simulé.

3. Faux. En effet, *p* est la proportion dans la population totale, que l'on utilise pour simuler l'échantillon.

4. Vrai. En effet, la probabilité que la condition random()<=p soit vérifiée est bien *p*.

5. Vrai. En effet, cette fonction renvoie la fréquence dans l'échantillon, qui peut être différente de la proportion dans la population totale.

38 **1.** La probabilité que le côté apparent soit Pile est 0,5.

2. a) Du fait des fluctuations d'échantillonnage, on n'est pas certain d'obtenir 5 fois Pile.

b) On peut par exemple obtenir 4 fois Pile, ce qui donne une fréquence observée égale à 0,4.

3. a) Du fait des fluctuations d'échantillonnage, on n'est pas certain d'obtenir 500 fois Pile.

b) La fréquence observée est égale à 0,514.

4. Si on répète 100 000 fois l'expérience, on peut s'attendre à ce que la fréquence observée soit proche de 0,5.

39 **a)** La fréquence des pieds infectés est $f = \frac{53}{400}$, c'est-à-dire $f = 0{,}312\,5$.

b) L'information obtenue à partir de l'échantillon ne concerne pas la population entière. On ne peut donc pas affirmer que 13,25 % de l'ensemble des pieds sont infectés.

c) Du fait des fluctuations d'échantillonnage, le viticulteur aurait pu obtenir une fréquence observée différente.

d) On peut dire que 13,25 % est une estimation de la proportion de pieds infectés sur l'ensemble des pieds.

40 **a)** La taille de l'échantillon est le nombre de répétitions de la boucle for, c'est donc 500.

b) La probabilité du succès apparaît dans l'instruction conditionnelle. Elle est égale à 0,3.

c) Il faudrait remplacer random()<=0.3 par random()<=0.7

d) La variable *k* représente le nombre de succès dans l'échantillon simulé.

S'entraîner

42 **a)** Aux lignes 5 et 8, on remplace 1 000 par 2 000, car il s'agit d'échantillons de 2 000 répétitions.

Aux lignes 6 et 9, on remplace 0,1 par 0,4 car la probabilité de tirer un jeton bleu est $\frac{10}{25}$, c'est-à-dire 0,4.

b) Voici des résultats possibles :

0,001 5	0,006	0,001 5	0,005	0,004 5
0,008 5	0,017	0,003	0,000 5	0,022 5
0,006 5	0,003	0,019	0,002	0,018 5
0,012 5	0,001 5	0,009	0,007	0,001
0,001	0,008 5	0,001	0,006 5	0,012
0,005 5	0,005	0,007 5	0,001	0,006
0,003	0,038 5	0,007 5	0,006 5	0,006
0,02	0,0165	0,021	0,0085	0,0095

c) $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\,000}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}022$.

On constate que 39 écarts sont inférieurs à 0,022, soit une proportion égale à $\frac{39}{40} = 0{,}975$.

43 **a)** Aux lignes 5 et 8, on remplace 1000 par 500, car il s'agit d'échantillons de 500 répétitions.

Aux lignes 6 et 9, on remplace 0.1 par 0.25, qui est la probabilité de gagner.

b) Voici des résultats possibles :

0.006	0.01	0.0	0.016	0.026
0.002	0.01	0.049	0.004	0.016
0.0	0.006	0.006	0.024	0.014
0.026	0.034	0.022	0.012	0.034
0.016	0.01	0.002	0.022	0.022
0.036	0.004	0.028	0.012	0.014
0.05	0.014	0.002	0.006	0.01
0.004	0.032	0.016	0.026	0.012

c) $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{500}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}048$.

On constate que 38 écarts sont inférieurs à 0,048, soit une proportion égale à $\frac{38}{40} = 0{,}95$.

45 **a)** Dans les cellules B2 et B404, il faut remplacer 0,6 par 0,35, la probabilité de piocher une bille blanche.

b) Voici des résultats possibles pour les premiers échantillons simulés.

	A	B	C	D	E	F
1	**Échantillon**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
402	**Nombres de billes blanches**	142	151	134	126	138
403	**Fréquence**	0,355	0,378	0,335	0,315	0,345
404	**Écart à 0,35**	0,005	0,028	0,015	0,035	0,005

c) $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0{,}05$. Avec la feuille de calcul ci-dessus, on a trouvé 98 % d'échantillons où l'écart avec 0,35 est inférieur ou égal à 0,05.

46 **a)** Dans les cellules B2 et B404, il faut remplacer 0,6 par 0,17, la probabilité de gagner.

b) Voici des résultats possibles pour les premiers échantillons simulés.

	A	B	C	D	E	F
1	**Échantillon**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
402	Nombre de tickets gagnants	75	77	70	76	57
403	Fréquence	0,1875	0,193	0,175	0,19	0,143
404	Écart à 0,17	0,0175	0,023	0,005	0,02	0,028

c) $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0{,}05$. Avec la feuille de calcul ci-dessus, on a trouvé 99 % d'échantillons où l'écart avec 0,17 est inférieur ou égal à 0,05.

47 **1. a)**

```
1 from random import *
2
3 def Echantillon1():
4     n=0
5     for i in range(100):
6         if random()<=0.92:
7             n=n+1
8     f=n/100
9     return f
```

b)

```
10 for i in range(20):
11     print(Echantillon1())
```

c) On peut par exemple obtenir les résultats suivants :

```
>>>
0.94 0.93 0.9 0.94 0.94 0.96 0.92 0.9 0.92 0.92
 0.9 0.91 0.93 0.93 0.93 0.91 0.92 0.97 0.93 0.9
```

2. a)

```
from random import *

def Echantillon2():
    n=0
    for i in range(100):
        if random()<=0.75:
            n=n+1
    f=n/100
    return f
```

b)

```
for i in range(20):
    print(Echantillon2())
```

c) On peut par exemple obtenir les résultats suivants :

```
>>>
0.72 0.79 0.72 0.76 0.79 0.73 0.79 0.73 0.77 0.8
 0.75 0.77 0.72 0.76 0.7 0.71 0.71 0.73 0.76 0.66
```

3. Du fait des fluctuations d'échantillonnage, on peut obtenir une fréquence supérieure avec la deuxième fonction. C'est cependant assez rare.

48 **a)**

```
from random import *

def Echantillon():
    n=0
    for i in range(200):
        if random()<=0.34:
            n=n+1
    f=n/200
    return f
```

b)

```
for i in range(20):
    print(Echantillon())
```

Les fréquences observées minimum et maximum ci-dessous sont 0,285 et 0,395.

```
>>>
0.285 0.39 0.34 0.355 0.335 0.34 0.36 0
.395 0.345 0.3 0.335 0.315 0.35 0.385 0
.315 0.315 0.335 0.375 0.355 0.345
```

49 **1.**

	Europe	Hors Europe	Total
Eau douce	80	120	200
Eau de mer	40	160	200
Total	120	280	400

2. a) $\frac{200}{400} = 0{,}5$ donc la probabilité que ce soit un poisson d'eau de mer est 0,5.

b) $\frac{280}{400} = 0{,}7$ donc la probabilité que ce ne soit pas un poisson européen est 0,7.

c) $\frac{160}{400} = 0{,}4$ donc la probabilité que ce soit un poisson d'eau de mer non européen est 0,4.

3. On utilise la probabilité de tirer la fiche d'un poisson européen, qui est égale à 0,3.

```
from random import *

def Echantillon():
    n=0
    for i in range(100):
        if random()<=0.3:
            n=n+1
    return n
```

50 **1. a)** Appliquer une réduction de 20 % revient à multiplier le prix par 0,8.

Appliquer une réduction de 10 % revient à multiplier le prix par 0,9.

En appliquant les deux réductions, on multiplie donc le prix initial par $0{,}8 \times 0{,}9$, c'est-à-dire par 0,72, ce qui correspond à un pourcentage total de réduction de 28 %.

b) Pour une réduction annoncée de 30 %, le pourcentage total est 37 %.

Pour une réduction annoncée de 40 %, le pourcentage total est 46 %.

Donc aucun tee-shirt n'est soldé à 50 %.

2. a) Les tee-shirts soldés à plus de 25 % sont ceux qui sont annoncés avec une réduction de 30 % ou 40 %. La probabilité de tirer un tel tee-shirt est donc $\frac{1}{2}$.

b)

```
from random import *

def Echantillon():
    n=0
    for i in range(200):
        if random()<=0.5:
            n=n+1
    return n
```

c) Il est possible d'obtenir un échantillon simulé avec exactement 100 tee-shirts soldés à plus de 35 %.

51 **a)** Il y a 18 numéros impairs sur la roulette, donc $P(A) = \frac{18}{37}$.

b) Il y a 18 numéros rouges, donc $P(B) = \frac{18}{37}$.

c) L'événement $A \cap B$. représente « La bille s'arrête sur un numéro impair rouge ». Il y a 10 numéros impairs rouges, donc $P(A \cap B) = \frac{10}{37}$.

d) La probabilité que le joueur gagne est la probabilité de l'événement $A \cup B$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} - \frac{10}{37} = \frac{26}{37}$

e)

```
from random import *

def Echantillon():
    n=0
    for i in range(200):
        if random()<=26/37:
            n=n+1
    return n
```

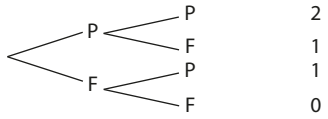
f)

```
for i in range(50):
    print(Echantillon())
```

On obtient par exemple :

```
>>>
142 146 138 148 143 144 142 151 140 138
 144 135 147 135 139 137 141 132 152
 138 141 140 145 137 142 123 154 142
 146 131 151 136 115 139 139 137 144
 134 140 135 136 124 148 148 128 141
 142 145 149 156
```

52 **a)**



b) On est dans une situation d'équiprobabilité, donc la probabilité d'obtenir deux fois Pile est $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire 0,25.

c)

```
from random import*

def Echantillon():
    k=0
    for i in range(200):
        if random()<=0.25:
            k=k+1
    return k
```

53 Estimation pour Android : $\frac{1260}{1540}$, donc environ 81,8 %.

Estimation pour iOS : $\frac{275}{1540}$, donc environ 17,9 %.

Estimation pour Autres : $\frac{5}{1540}$, donc environ 0,3 %.

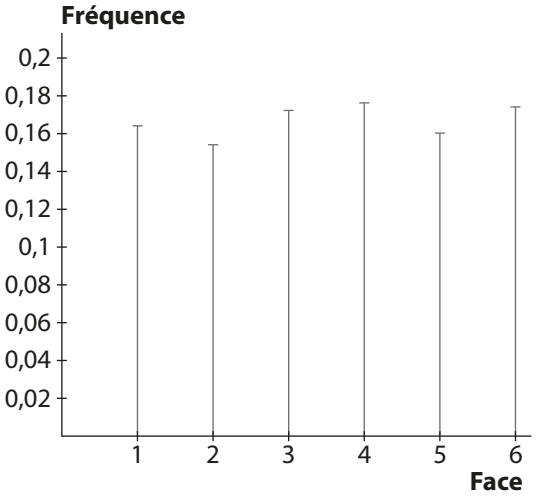
54 **a)** Axel obtient l'estimation 0,68.

b) Baptiste obtient l'estimation 0,656.

55 **a)** Probabilités estimées :

Face	1	2	3
Estimation	0,165 5	0,154	0,172
Face	4	5	6
Estimation	0,175	0,159 5	0,174

b)



c) Les fréquences observées sont proches de 0,167 donc on peut penser que le dé est équilibré. Mais on peut aussi considérer qu'il y a une différence assez notable entre les probabilités d'obtenir 2 et 5 et les autres numéros et dans ce cas, penser que le dé n'est pas équilibré.

56 Une estimation de la prévalence de la maladie est $\frac{90}{50\,000}$, soit environ 0,18 %.

La prévalence est inférieure à 0,192 %, donc selon cet échantillon on ne peut pas annoncer une épidémie.

57 **a)** Une estimation de la proportion de paires de chaussures qui présentent des défauts est $\frac{10}{80}$, c'est-à-dire 0,125.

b) En utilisant l'estimation précédente, on peut considérer que le nombre de paires de chaussures vendues à 40 € est $0{,}125 \times 560$, c'est-à-dire 70, et que donc 470 paires sont vendues à 60 €. La recette estimée est donc 470×60 € $+ 70 \times 40$ €, c'est-à-dire 31 000 €.

58 **a)**

Liste	A	B	C	D
Estimation	23,9 %	11,8 %	28,7 %	35,6 %

b) Selon ce sondage, la liste D pourrait l'emporter.

59 Il s'agit de résoudre l'inéquation $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}03$; elle équivaut à $\sqrt{n} \geqslant \frac{1}{0{,}03}$, c'est-à-dire $n \geqslant \left(\frac{1}{0{,}03}\right)^2$ soit $n \geqslant 1\,112$.

Il faut donc des échantillons de taille supérieure ou égale à 1 112.

60 **1. a)** Une estimation de la proportion de robots défectueux est $\frac{14}{400}$, soit environ 3,5 %.

b) L'estimation est supérieure à 3 %, il faut donc revoir le processus de fabrication.

2. 3 % de 400 représente 12 robots. Il faut donc revoir le processus de fabrication si on observe 12 robots ou plus défectueux sur 400.

61 **a)** Une estimation de la proportion de jeunes est $\frac{74}{1250}$, soit 5,92 %.

b) Une estimation de la proportion de jeunes est alors $\frac{123}{1362}$, soit environ 9,0 %.

c) D'après ces estimations, on peut penser que la modification des tarifs a eu un impact.

62 **a)** Une première estimation de la proportion p est $\frac{390}{400}$, soit 97,5 %.

b) Une deuxième estimation de p est $\frac{352}{400}$, soit 88 %.

c) D'après la deuxième estimation, on peut penser que cette publicité est mensongère, ou basée sur une estimation particulière.

63 **a)** Une estimation de la proportion de pommes abîmées dans la production du fournisseur A est $\frac{16}{300}$, soit environ 5,3 %.

b) Une estimation de la proportion de pommes abîmées dans la production du fournisseur B est $\frac{17}{350}$, soit environ 4,9 %.

c) Selon ces estimations, il faudrait privilégier le fournisseur A.

64

Opérateur	1	2	3	4
Estimation	10,6 %	36,6 %	34,4 %	18,4 %

b) Les estimations sont assez différentes des parts de marchés nationales, en particulier pour l'opérateur 2.

2. L'étudiant peut donc estimer qu'il y a une différence notable.

65 **1. a)**, **2. a)**, **3. a)**, **4. a)**

Face	**10 lancers**	**100 lancers**	**1 000 lancers**	**5 000 lancers**
1	0,3	0,15	0,17	0,171
2	0,1	0,11	0,079	0,0792
3	0,1	0,14	0,167	0,1636
4	0,2	0,15	0,176	0,1718
5	0,1	0,19	0,238	0,2446
6	0,2	0,26	0,17	0,1698

1. b) À ce stade, on peut penser que ce dé n'est pas équilibré et qu'on a plus de chances d'obtenir 1.

2. b) Il peut logiquement penser que ce dé n'est pas équilibré et qu'il a plus de chances d'obtenir 6.

3. b) Les doutes ne sont pas confirmés. Il semble maintenant que la face 5 a plus de chances d'apparaître, et la face 2 moins.

4. b) Les soupçons sont confirmés par ce nouvel échantillon. L'employé peut alors estimer que le dé n'est pas équilibré.

5. On peut conjecturer les valeurs ci-dessous :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

66 **a)** Une estimation de la probabilité de gagner dans ce cas est $\frac{882}{2\,000}$, soit 0,441.

b) Une estimation de la probabilité de gagner dans ce cas est $\frac{911}{2\,000}$, soit 0,455 5.

c) Les deux estimations sont proches de $\frac{4}{9}$.

On peut donc conjecturer que la probabilité de gagner est la même dans les deux cas.

67 **a) Vrai.** En effet, cet énoncé est la loi des grands nombres.

b) Faux. En effet, par le fait du hasard, f peut être proche de p pour une petite valeur de n.

c) Vrai. En effet, c'est la contraposée de l'affirmation **a)**.

d) Faux. En effet, c'est la contraposée de l'affirmation **b)**.

68 **a) Vrai.** En effet, on peut obtenir 12 fois Pile.

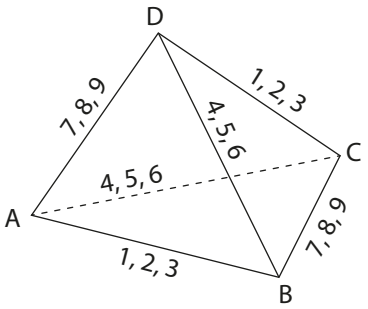
b) Faux. En effet, il est possible d'obtenir Face.

c) Faux. En effet, du fait des fluctuations d'échantillonnage on n'obtient pas forcément autant de Pile que de Face.

d) Vrai. En effet, il est possible d'obtenir 8 fois Pile et 4 fois Face.

Organiser son raisonnement

69 **a)** On associe à chaque arête trois chiffres, en excluant le 0, comme indiqué sur la figure ci-après.



En partant du point A, on peut alors construire des promenades à partir d'une suite de chiffres aléatoires. On peut obtenir une telle suite de chiffres aléatoires avec la commande =ALEA() du tableur ou Ran# ou NbrAléat de la calculatrice.

Par exemple, la suite de chiffres 8, 4, 7, 4 correspond à la promenade $A \xrightarrow{8} D \xrightarrow{4} B \xrightarrow{7} C \xrightarrow{4} A$.

b) On peut par exemple obtenir les résultats suivants :

Durée (en min)	1	2	3	4	5
Effectif	0	6	5	6	2
Durée (en min)	6	7	8	9	10
Effectif	1	2	1	1	1

c) Le minimum de cette série est 2, le maximum est 10, l'étendue est $10 - 2 = 8$.

La moyenne est $\dfrac{1\times 0 + 2\times 6 + \ldots + 10\times 1}{25} \approx 4{,}32$.

La médiane est la 13e valeur quand les valeurs sont ordonnées, c'est-à-dire 4.

d) À partir de l'échantillon simulé, une estimation de la probabilité que la promenade dure 3 min ou moins est $\dfrac{11}{25}$, c'est-à-dire 0,44. On peut donc penser que cette affirmation est fausse.

70 **a)**

```
>>> Estimation(500,220)
0.44
>>> Estimation(220,500)
0.44
```

b) The lines 2 to 5 exchange the two values if *n* is less than m. This ensures that the two outcomes in question **a)** are the same.

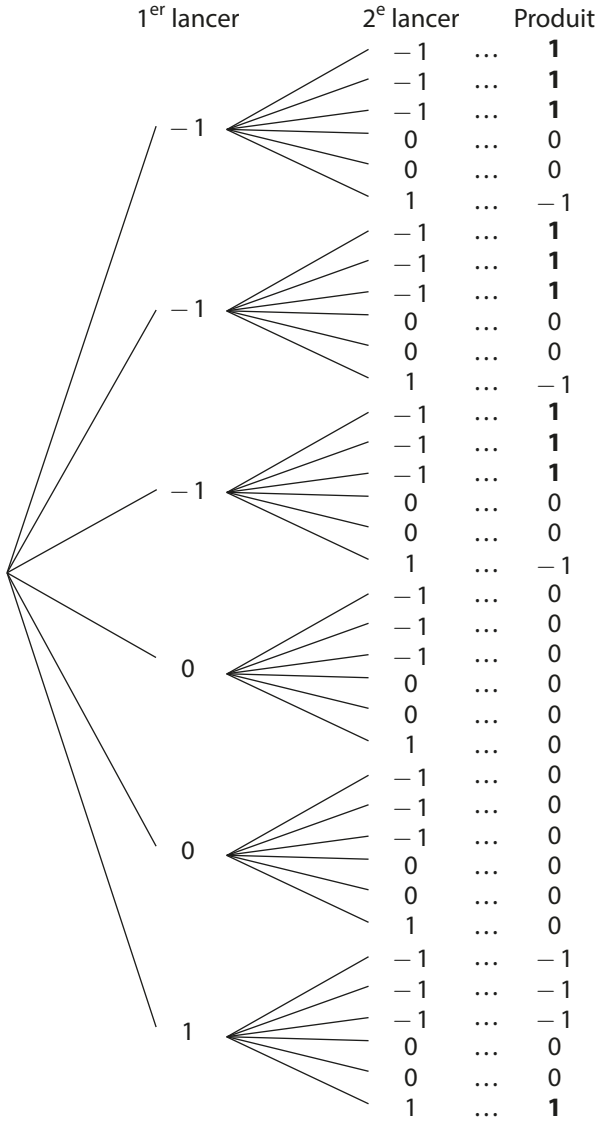
c) This function computes the estimation obtained when *m* (or *n*) occurrences of a character appear in a sample of size *n* (or *m*).

71 Voici les estimations obtenues pour chaque sondage, en pourcentage arrondi au centième.

Sondage	Estimation
1	45,02 %
2	47,00 %
3	49,95 %
4	51,04 %
5	52,99 %

Les estimations sont croissantes et, à partir du sondage 4, dépassent 50 %. L'évolution des résultats est donc rassurante pour le candidat.

72

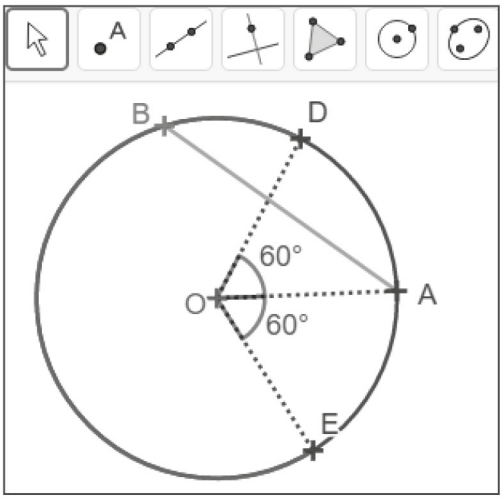


La probabilité d'obtenir un produit égal à 1 est $p = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

D'où la fonction ci-dessous écrite en langage Python.

```
1 from random import *
2
3 def Ecarts():
4     n=0
5     for i in range(500):
6         k=0
7         for i in range(100):
8             if random()<=5/18:
9                 k=k+1
10        f=k/100
11        e=abs(f-5/18)
12        if e<0.1:
13            n=n+1
14    return n
```

73 On a représenté la situation avec un logiciel de géométrie en traçant un cercle de rayon *r* et de centre O.



Les points D et E sont les points du cercle situés exactement à la distance *r* du point A. L'arc de cercle $\overset{\frown}{DE}$ est donc celui où doit se trouver le point B pour que la corde [AB] ait une longueur supérieure ou égal à *r*.

$\frac{240°}{360°} = \frac{2}{3}$ donc on peut estimer que la probabilité de cet événement est $\frac{2}{3}$.

74 On peut par exemple utiliser la fonction Python ci-dessous, qui simule 500 répétitions de l'expérience et calcule la fréquence d'obtention d'un nombre supérieur ou égal à 10.

```
from random import *
def Des():
    n=0
    for i in range(500):
        k=0
        for i in range(4):
            k=k+randint(1,6)
        if k>=10:
            n=n+1
    f=n/500
    return f
```

La fréquence renvoyée est une estimation de la probabilité cherchée. On obtient une valeur proche de 0,9.

```
>>> Des()
0.914
```

75 **1. A.** En effet, il y a 12 figures sur les 32 cartes, donc la probabilité d'obtenir une figure est égale à $\frac{12}{32}$, c'est-à-dire $\frac{3}{8}$.

2. C. En effet, la moitié des cartes sont rouges donc $P(R) = P(\overline{R})$.

3. B. En effet, $F \cap R$ signifie « Obtenir une figure rouge », or il y a 6 figures rouges sur les 32 cartes, donc la probabilité de cet événement est $\frac{6}{32}$, c'est-à-dire $\frac{3}{16}$. Et puisque $P(F) = \frac{3}{8}$, cette probabilité est bien égale à $\frac{1}{2}P(F)$.

4. A. En effet, il faut écrire dans le cadre la probabilité d'obtenir une figure rouge, qui d'après la question précédente est $\frac{3}{16}$, c'est-à-dire 0,187 5.

5. A. En effet, la fonction range(n) indique qu'on répète *n* fois la boucle.

6. B. En effet, les autres propositions ne sont pas correctes car la fonction Echantillon doit avoir exactement un argument.

7. C. En effet, la valeur de *p* affichée en sortie est un nombre entier compris entre 0 et 1 000.

8. C. En effet, les propositions A et B ne font pas appel à la variable *n*, et avec la proposition D la valeur *f* de la fréquence ne sera pas renvoyée, car l'instruction de sortie reste return *p*.

9. C. En effet, il s'agit d'une propriété qui a été vue dans les exercices corrigés 42 et 45.

10. B. En effet, la probabilité d'obtenir une figure rouge est 0,187 5 et $0{,}187\,5 \times 1\,000 = 187{,}5$. On peut donc s'attendre à obtenir une valeur proche de celle-ci.

Exploiter ses compétences

76 On s'intéresse au pourcentage de garçons parmi les naissances.

L'estimation obtenue à partir de l'échantillon 1 est $\frac{82}{182}$, c'est-à-dire environ 45,05 %.

L'estimation obtenue à partir de l'échantillon 2 est $\frac{53}{153}$, c'est-à-dire environ 34,64 %.

Or, d'après les informations données sur la carte, le pourcentage de garçons à la naissance au Canada est habituellement $\frac{105}{205}$, c'est-à-dire environ 51,22 %. Il y a une différence importante entre ce pourcentage et les estimations, il y a donc probablement lieu de s'inquiéter.

77 On réalise une feuille de calcul avec 1 000 lancers des dés de Sicherman en utilisant les indications données.
Pour cela, dans la cellule D2, on saisit la formule =SI(C2=1;1;SI(C2=2;3;SI(C2=3;4;SI(C4=4;5;SI(C2=5;6;8)))))
puis dans la cellule E2, =SOMME(B2;D2).

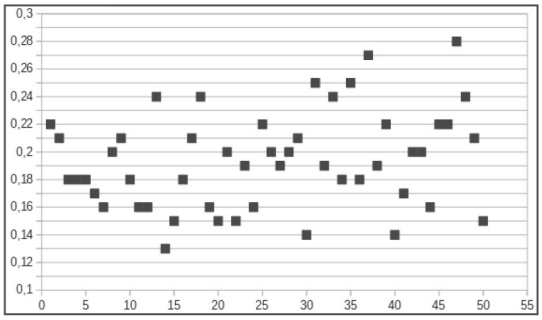
	A	B	C	D	E
1		**Dé 1**		**Dé 2**	**Somme**
2	3	2	1	1	3
3	5	3	1	1	4
4	1	1	4	5	6
5	5	3	1	1	4
6	2	2	2	3	5
7	5	3	2	3	6
8	6	4	1	1	5
9	3	2	6	8	10
10	4	3	4	5	8

On peut alors utiliser la formule =NB.SI() pour compter l'effectif de chaque résultat (colonne H), puis on calcule les fréquences (colonne I).

G	H	I	J
Somme	**Effectif**	**Estimation de la probabilité**	**Avec dés classiques**
2	31	0,031	0,028
3	60	0,060	0,056
4	94	0,094	0,083
5	108	0,108	0,111
6	125	0,125	0,139
7	161	0,161	0,167
8	135	0,135	0,139
9	112	0,112	0,111
10	83	0,083	0,083
11	60	0,060	0,056
12	31	0,031	0,028

En comparant avec les probabilités pour deux dés classiques (colonne J), on peut penser qu'Alice a raison.

78 On reproduit la feuille de calcul en utilisant les formules vues à l'exercice résolu 44. On affiche alors le nuage de points.



95 % de 50 échantillons est égal à 47,5.
On cherche donc un intervalle autour de 0,2 qui contient 48 valeurs. Avec l'exemple ci-dessus, on peut par exemple proposer l'intervalle $[0{,}14 ; 0{,}27]$.

79 Le Doc 2 donne une fonction Python qui permet de simuler un déplacement du robot et d'indiquer s'il revient à son point de départ – on affiche alors le message « Retour au point de départ ».
On peut modifier la fonction pour qu'elle renvoie 1 en cas de retour au point de départ et 0 sinon.
Puis, on écrit la fonction ci-dessous qui simule 500 déplacements et renvoie la fréquence des retours au point de départ.

```
1  from random import *
2
3  def Construction():
4      x=randint(0,1)+randint(0,1)+randint(0,1)
5      if x==0 or x==3:
6          k=1
7      else:
8          k=0
9      return k
10
11 def Robot():
12     n=0
13     for i in range(500):
14         n=n+Construction()
15     f=n/500
16     return f
```

Une estimation de la probabilité de retour du robot à son point de départ est par exemple :

```
>>> Robot()
0.272
```

Édition : Julien Lionnet
Composition : DESK (www.desk53.com.fr)
Schémas : DESK
Adaptation graphique : Simon Géliot