I. Let $\mathcal{X}$ be the set of all bounded and unbounded sequences of complex numbers. Show that the function d given by

$$\forall x=(\xi_j),\forall y=(\eta_j),d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}$$

is a metric on $\mathcal{X}$

Solution:

$$\forall x=(\xi_j),\forall y=(\eta_j),\forall z=(\zeta_j)$$

(1)non-negativity:

$$\forall j\in\mathbb{N}^+,\ \frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}\geq 0\ \Rightarrow d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}\geq 0$$

(2)identity of indiscernible:

- $x=y$: 可知

$$\forall j\in\mathbb{N}^+,\ \xi_j=\eta_j\Rightarrow \frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}=0\Rightarrow d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}=0$$

- $d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}=0$:

$$\forall j\in\mathbb{N}^+,\ \frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}\geq 0\Rightarrow\forall j\in\mathbb{N}^+,\ \frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}=0\Rightarrow\forall j\in\mathbb{N}^+,\ \xi_j=\eta_j\Rightarrow x=y$$

所以

$$x=y\Leftrightarrow d(x,y)=0$$

(3)symmetry:

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\eta_j-\xi_j|}{1+|\eta_j-\xi_j|}=d(y,x)$$

(4)triangel inequality:

$$\begin{aligned}
d(x,z)&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\zeta_j|}{1+|\xi_j-\zeta_j|}\\
&\leq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|+|\eta_j-\zeta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|+|\eta_j-\zeta_j|}\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|+|\eta_j-\zeta_j|}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\eta_j-\zeta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|+|\eta_j-\zeta_j|}\\
&\leq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\eta_j-\zeta_j|}{1+|\eta_j-\zeta_j|}=d(x,y)+d(y,z)
\end{aligned}$$

II. The completeness depends on the metric. For the metric $d_1(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\mathrm{d}t$, show that the metric space $(\mathcal{C}[a,b],d_1)$is not complete.

Solution:

定义函数列 $\{f_n\}$, 其中

$$f_n=\begin{cases} e^{\frac{n(x-a)}{x-b}}, & \text{if } a\le x<b \\ 0, & \text{if } x=b \end{cases}$$

因为 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 给定, $\lim_{x\to b} e^{\frac{n(x-a)}{x-b}}=0$, 所以 $\forall n\in\mathbb{N}^+$, $f_n\in\mathcal{C}[a,b]$
再取

$$f=\begin{cases} 1, & \text{if } x=a \\ 0, & \text{if } a<x\le b \end{cases}$$

可知 $\forall x\in[a,b]$给定,$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$
下面将证明 $\lim_{x\to\infty} f_n=f$：
$\forall\epsilon>0$，因为 $\forall a<x<b$, $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n(x-a)}{x-b}}=0$，$\exists N>0,\forall n>N$, $s.t.$ $f_n(a+\frac{\epsilon}{2})=e^{\frac{n\epsilon}{2(a-b)+\epsilon}}<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$
又可知 f_n 单减，那么 $\forall a+\frac{\epsilon}{2}\le x\le b$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$
而 $\forall a\le x\le a+\frac{\epsilon}{2}$, $|f_n(x)-f(x)|<1$
所以

$$\begin{aligned} d_1(f_n,f)&=\int_a^b |f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t \\ &<\int_a^{a+\frac{\epsilon}{2}} |f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t+\int_{a+\frac{\epsilon}{2}}^b |f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t \\ &<\frac{\epsilon}{2}\cdot 1+\frac{\epsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a) \\ &=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \end{aligned}$$

可以得到函数列 $\{f_n\}$ 按 d_1 收敛到 f, 但是 f 不是 $[a,b]$ 上的连续函数，所以 $(\mathcal{C}[a,b],d_1)$ 不完备

III.Show that the ℓ^p space in is complete for $p\ge 1$

Solution:

假设 $\{x^{(n)}\}=\{(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots)\}$ 是 ℓ^p 中任意的 *Cauchy* 列，$\forall N\in\mathbb{N}^+$, $\sum_{j=1}^\infty |x_j^{(n)}|^p<\infty$
假设 $\lim_{n\to\infty} x=(x_1,x_2,\cdots)$, 那么 $\forall\epsilon>0$, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $d(x^{(n)},x)=(\sum_{j=1}^\infty |x_j^{(n)}-x_j|^p)^{\frac{1}{p}}<\epsilon$
固定 $k\in\mathbb{N}^+$, $(\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)}-x_j|^p)^{\frac{1}{p}}\le(\sum_{j=1}^\infty |x_j^{(n)}-x_j|^p)^{\frac{1}{p}}<\epsilon$
由 Minkowski 不等式可知 $(\sum_{j=1}^k |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}\le(\sum_{j=1}^k |x_j-x_j^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}}<\epsilon+(\sum_{j=1}^\infty |x_j^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty$
令 $k\to\infty$, 得 $(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}\le\epsilon+(\sum_{j=1}^\infty |x_j^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty\Rightarrow x\in\ell^p$
所以 ℓ^p 空间是完备的

IV. Show that the sequence space c_{00} is a dense subset of ℓ^p with $p\in[1,\infty)$

Solution:

$\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in\ell^p$, $\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p<\infty$

那么 $\forall\epsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ \sum_{j=n}^{\infty}|x_j|^p<\epsilon^p$

取 $x^N=(x_1,x_2,\cdots,x_N,0,0,\cdots)$ 可知 $x_N\in c_{00}$

所以 $d(x,x^N)=(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j-x_j^N|^p)^{\frac{1}{p}}=(\sum_{j=N+1}^{\infty}|x_j|^p)^{\frac{1}{p}}<\epsilon$

所以 c_{00} 是 $\ell^p(p<\infty)$ 的稠密子集

V. Show that $\emptyset$ and $\mathcal{X}$ are both open and closed

Solution:

$\forall r>0,\ \forall x\in\mathcal{X},\ B_r(x)=\{y\in\mathcal{X}:d(x,y)<r\}\subset\mathcal{X}$, 所以 $\mathcal{X}$ 是开集

$\forall r>0,\ \forall x\in\emptyset$(假定有这样一个虚拟的元素)

因为这样的 x 不存在，所以 $B_r(x)=\{y\in\mathcal{X}:d(x,y)<r\}=\emptyset\subset\emptyset$，所以 $\emptyset$ 是开集

那么就可以知道 $\mathcal{X}^c=\mathcal{X}\setminus\mathcal{X}=\emptyset$ 是开集，所以 $\mathcal{X}$ 是闭集

$\emptyset^c=\mathcal{X}\setminus\emptyset=\mathcal{X}$ 是开集，所以 $\emptyset$ 是闭集

VI. If a closed set F in a metric space $\mathcal{X}$ does not contain any nonempty open set, then $\mathcal{X}\setminus F$ is dense in $\mathcal{X}$

Solution:

$\forall x\in F$, x 即不是内点也不是孤立点

若 x 是内点，那么 $\exists r>0,\ B_r(x)\subset F$ 是 F 的非空开子集，矛盾

若 x 是孤立点，那么 $\exists r>0,\ B_r(x)=\{x\}\subset F$ 是 F 的非空开子集, 矛盾

那么 $\forall x\in F,\ \forall\epsilon>0,\ B_\epsilon(x)\cap(\mathcal{X}\setminus F)\neq\emptyset, \exists y\in\mathcal{X}\setminus F,\ s.t.\ d(x,y)<\epsilon$

所以 $\mathcal{X}\setminus F$ 在 $\mathcal{X}$ 上是稠密的

VII. What is the connection between the uniformly continuous and Lipschitz continuous

Solution:

若函数 Lipschitz 连续那么一定一致连续

Proof:

函数 $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ Lipschitz 连续，那么有

$\exists L>0\ s.t.\ \forall x,y\in\mathcal{X},\ d_{\mathcal{Y}}(f(x),f(y))<Ld_{\mathcal{X}}(x,y)$

那么 $\forall\epsilon>0$，取 $\delta=\frac{\epsilon}{L}$, 那么 $\forall x,y\in\mathcal{X},\ d_{\mathcal{X}}(x,y)<\delta\Rightarrow d_{\mathcal{Y}}(f(x),f(y))<Ld_{\mathcal{X}}(x,y)<L\frac{\epsilon}{L}=\epsilon$

VIII. Show that the *Hilbert cube* in the metric space ℓ^2,

$$C:=\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}:x_n\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\right\}$$

is sequentially compact

Solution:

$\forall x \in C,\ \sum_j^\infty |x_n|^2 \le \sum_j^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$ 所以 $C \subset \ell^2$，ℓ^2 完备，又有 C 是闭集，那么只用证明 C 完全有界

$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0, \forall n > N,\ \sum_{j=n}^\infty |x_n|^2 < \frac{\epsilon^2}{N+1}$

定义 $Y := \{(y_1, y_2, \cdots, y_N, 0, 0, \cdots) : y_k \in \{i\epsilon : i = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{\sqrt{N+1}}{k\epsilon} \rfloor\}\}$，$Y$ 是有限集

又有 $x_k \in [0, \frac{1}{k}]$，$\exists\ y \in Y,\ s.t.\ |x_k - y_k| < \frac{\epsilon}{\sqrt{N+1}}$

所以 $\forall x \in C,\ \exists y \in Y,\ s.t.\ d(x, y) = (\sum_{j=1}^\infty |x_j - y_j|^2)^{\frac{1}{2}} < (\sum_{j=1}^N \frac{\epsilon^2}{N+1} + \frac{\epsilon^2}{N+1})^{\frac{1}{2}} = \epsilon$

所以 Y 是 C 的一个有限的 $\epsilon - net$

所以 C 完全有界，从而证明了 C is sequentially compact

IX. Denote by $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a bounded open convex set. For $M_1, M_2 \in \mathcal{R}^+$, Show that the set

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega}) : \forall x \in \Omega, |f(x)| \le M_1; \|\nabla f(x)\| \le M_2\}$$

is sequentially compact

Solution:

$\bar{\Omega}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界闭集，所以 $\bar{\Omega}$ 是紧集，所以 $\forall f \in \mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega})$, f 和 ∇f 在 $\bar{\Omega}$ 一致连续

那么就可以知道 $\mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega})$ 的子集 $\mathcal{F}$ 一致有界，而 $\mathcal{F}$ 是闭集且 $\mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega})$ 完备，只用证明 $\mathcal{F}$ 等度连续

由范数的等价性可知 $\exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 \le A\|x\|$，那么 $\forall f \in \mathcal{F}, \|\nabla f\|_2 \le AM_2$

$\forall \epsilon > 0,\ \delta = \frac{\epsilon}{A^2 M_2},\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall x, y \in \bar{\Omega}, \|x - y\| < \delta,\ |f(x) - f(y)| \le \|x\| AM_2 < A\delta AM_2 = \epsilon$

所以 $\mathcal{F}$ 等度连续，所以 $\mathcal{F}$ is sequentially compact

X. If the radius of convergence of f in Example D.171 is $+\infty$, does $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge to f uniformly or locally uniformly

Solution:

局部收敛

显然满足 Example D.171 条件的函数一定是局部收敛的，那么只用找到反例证明其不一致收敛即可

考虑函数 $f(x) = e^x$，给定一点 $x = a$，在该点的泰勒多项式列为 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^a}{k!}(x - a)^k$

取某个 $0 < r < 1$, $\forall \epsilon > 0$, 取定任意某个 $\bar{x} \in \mathbb{R}$ 取 $N > 0,\ s.t.\ \frac{e^{\bar{x}+1}}{(N+1)!}(|\bar{x} - a| + 1)^{N+1} < \epsilon$,

有 $\forall x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, $\exists N > 0$

$\forall n > N,\ |e^x - \sum_{k=1}^n \frac{e^a}{k!}(x - a)^k| = |\frac{e^\xi}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}| < \frac{e^{\bar{x}+1}}{(N+1)!}(|\bar{x} - a| + 1)^{N+1} < \epsilon,\ \xi \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$

由 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^n} = 0$ 可知，满足上述条件的 N 一定存在

所以任意一点的泰勒多项式列 $\{T_n\}$ 局部收敛至 $f(x) = e^x$, 且收敛半径为 $+\infty$

但是我们固定 $N > 0$ 考虑 $E_N(x) = |T_N(x) - f(x)| = |\sum_{n=0}^N t_n x^n - e^x|$

因为多项式的增长阶为 0 而 e^x 的增长阶为 1, 所以 $\lim_{x\Rightarrow\infty} E_N(x) = \infty$

所以不存在 $N > 0,\ \forall n > N,\ \forall x \in \mathbb{R},\ s.t.\ E_n(x) < \epsilon$

即 $\{T_n\}$ 不在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛至 $f(x) = e^x$，只能局部收敛至 $f(x) = e^x$