Метод множителей Лагранжа для численной оптимизации

Метод множителей Лагранжа — это техника для нахождения экстремумов функции с учётом ограничений. В классическом аналитическом подходе мы устанавливаем систему уравнений, включающую производные функции и ограничений, и решаем её. Однако для более сложных или высокоразмерных задач часто требуется численный подход.

Численный метод **множителей Лагранжа** для условной оптимизации сводится к решению системы уравнений, которая возникает из функции Лагранжа. Вот по шагам, как работает этот метод:

Шаги метода

1. **Постановка задачи**:
   У нас есть задача минимизации функции $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ с ограничениями вида:
   $g_i(_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1, 2, ..., m$ где f — целевая функция, g_i — ограничения.

Задача условной оптимизации заключается в том, чтобы найти минимум функции $f(x)$, удовлетворяя данным ограничениям.

2. **Формулировка функции Лагранжа**:
   Для решения задачи вводится функция Лагранжа, которая комбинирует целевую функцию и ограничения с помощью множителей Лагранжа (λ_i)

$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$=$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ + $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$\

Здесь:

- $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — целевая функция,
- $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ - ограничения,
- λ_i - множители Лагранжа (неизвестные переменные, которые вводятся для учета ограничений).

3. **Частные производные функции Лагранжа**:
   Следующим шагом является нахождение частных производных функции Лагранжа по всем переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ и по каждому множителю Лагранжа λ_i. Полученная система уравнений выглядит так:

- $\frac{\delta L}{\delta x_j} = 0$, для всех $j = 1, 2, ..., n$
- $\frac{\delta L}{\delta \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, для всех $i = 1, 2, ..., m$

Это даёт систему из n + m уравнений с n + m неизвестными: $x_1, x_2, ..., x_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$

4. **Численное решение системы уравнений**:
   Для численного решения этой системы уравнений используется метод Ньютона-Рафсона. Он основан на итеративном улучшении приближений для решения системы нелинейных уравнений.

5. **Ответ**
   В результате работы метода мы получаем:
   - Значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые минимизируют целевую функцию.
   - Множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, которые могут дать информацию о "силе" ограничения на каждом этапе оптимизации.

Пример задачи 1

Рассмотрим задачу:

- **Функция для минимизации**: $f(x, y) = x^2 + y^2$ (минимизация расстояния до начала координат).
- **Ограничение**: $g(x, y) = x + y - 1 = 0$
  Аналитическое решение этой задачи предполагает, что минимум достигается при $x = y = 0.5$.

Реализация данной задачи на Python в файле `main.py`

Пример задачи 2

Рассмотрим задачу:

- **Функция для минимизации**: $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$
- **Ограничение**:

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \\ g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

Реализация данной задачи на Python в файле `main2.py`

Лекционный пример

Реализация лекционного примера в `test.py`