無人飛行載具 - 四軸飛行器

王文宏 Wang, Wen-Hung
Hom19910422@gmail.com

摘要－

本專題的主要目的為在單晶片上建立一個可測得載體當下姿態角度的姿態系統，並通過PD控制器在四軸飛行器上實現自主平衡與懸停的功能，並藉由自製的平台來做調整及控制。

專題進行過程首先了解四軸飛行器的結構組成及飛行原理，再對無線傳輸模組及無刷馬達做控制，以及感測器讀取與濾波，最後計算飛行器姿態與自主平衡控制。

關鍵字：四軸飛行器、姿態系統、四元數、PID。

1、簡介

近年來，由於微機電系統技術（Micro Electro Mechanical Systems，MEMS）快速發展與半導體製程工藝的提升，造就了低成本、普及的感測器，以及高效能的微控制器，使的以演算法與感測器為核心的四軸飛行器成為熱門的研究課題，其有重量輕、體積小、結構簡單、機動性高、維護方便等優點，基於以上優點，可以應用於實時的監控、地形的探勘、災區的救援以及搜尋、運送等領域[1]。

目前國內成功大學航太所的飛行控制與模擬實驗室，研究無人飛行器載具的導航與控制已有數年，並有不錯的成果，國外美國賓州大學（University of Pennsylvania）GRASP實驗室（The General Robotics, Automation, Sensing and Perception）研究飛行器與飛行器間的協同工作，以及瑞士蘇黎世聯邦理工學院（ETH Zurich）動態系統與控制研究所（Institute for Dynamic Systems and Control）的FMA實驗室（Flying Machine Arena）研究飛行器的學習和安全性，在學術及實際應用上都有重大的貢獻。

2、結構與飛行原理

2.1、飛行器結構

四軸飛行器結構如圖 1 所示，由兩對正反螺旋槳、四顆無刷馬達、四個電子調速器（電調）、一顆鋰電池與一片飛行控制板（飛控板）所組成。

圖 1　四軸飛行器實體圖

2.1.1、機身

用來放置控制器、馬達、電池以及擴充裝置 ... 等等的平台。機身的大小，會限制螺旋槳的長度，進而影響到馬達的選擇、飛行器的負載；機身的硬度、材質，會改變到馬達所產生震動影響的大小。本次專題使用對角馬達與馬達距離為 450mm 的機身。

2.1.2、螺旋槳

經由馬達帶動旋轉來產生推力以提供飛行器向上升力。其中螺旋槳依擺放位置分成兩組,兩組旋轉方向互為相反，達到水平的旋轉力矩平衡。在相同轉速下，螺旋槳越長，攻角越大，所提供的升力就越大，但所受到的阻力亦會越大，所以轉動大的螺旋槳需要扭力大的馬達。本次專題使用 1045 的螺旋槳（長 10cm, 螺距 45），如圖 2 所示。

圖 2　螺旋槳實體圖

2.1.3、無刷馬達

旋轉螺旋槳主要的動力來源，推動飛行器。與有刷馬達相比，無刷馬達具有扭力大、低耗損的優點，但由於其結構設計的問題，必須加上一些電路與較為複雜的方法解決換相問題；線圈的匝數、繞線圈的方法與供電電壓，會影響到馬達的扭力與轉速，匝數越多間接導致扭力越大、轉速越低；匝數越少，扭力越小、轉速越快。本次專題使用 980KV 的無刷馬達（980RPM/V），如圖 3 所示。

圖 3　無刷馬達實體圖

2.1.4、電子調速器

藉由此裝置可以簡化無刷馬達的控制,這裡簡稱電調。電調內已放置了驅動電路與無刷馬達控制程式，只需透過脈衝寬度調變技術（Pulse Width Modulation, PWM）即可控制無刷馬達。本次專題使用 40A 的電調，如圖 4 所示。

圖 4　電子調速器實體圖

2.1.5、電池

提供控制板與馬達電源。本專題使用 11.1V 2200mAh 的鋰電池（最大放電 25C, 瞬間 35C），如圖 5 所示。

圖 5　鋰電池實體圖

2.1.6、飛行控制器

控制飛行器平衡運動與傳輸的裝置，這裡簡稱飛控板。飛控板是集成微控制器、感測器、無線傳輸模組的裝置，也是非行器的核心裝置，圖 6 為自行設計和製作的飛控版 QCopterFlightControl[2]，以下為配置：

- 微控制器 STM32F405RG
  - ARM 32bit Cortex-M4 CPU with FPU
  - Frequency up to 168MHz
  - 196Kbytes SRAM，1024bytes Flash
- 感測器 SmartIMU[3]
  - ARM 32bit Cortex-M4 CPU with FPU
  - MPU9250　加速度計、陀螺儀、電子羅盤
  - MS5611　氣壓計
- 無線傳輸 nRF24L01P + PA + LNA
  - 理想傳輸距離 520m（2Mbps）、750m（1Mbps）、1000m（250Kbps）
- 儲存紀錄　Micro SD
  - SDIO　讀寫
- 其他擴充介面
  - 1*USART、1*SPI、2*ADC、1*USB、1*CAN BUS、8*PWM

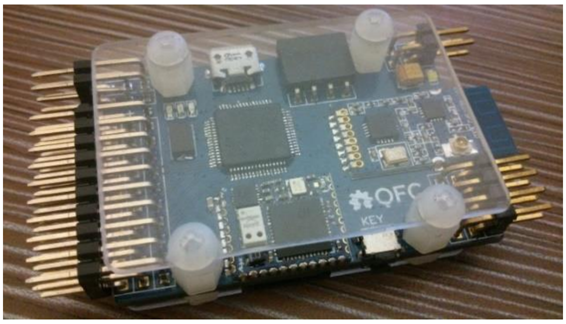

圖 6　飛行控制器實體圖

2.1.7、遙控器

遙控飛行器、給予飛行器指令與監控訊息的裝置。設有飛行器基本資訊、示波器和測試 … 等介面，可以檢測和監控飛行器狀態資訊，如圖 7 為自行設計和製作的遙控版 QCopterRemoteControl[4]，以下為配置：

- 微控制器 STM32F407VG
  - ARM 32bit Cortex-M4 CPU with FPU
  - Frequency up to 168MHz
  - 196Kbytes SRAM，1024bytes Flash
- 無線傳輸 nRF24L01P + PA + LNA
  - 理想傳輸距離 520m（2Mbps）、750m（1Mbps）、1000m（250Kbps）
- 顯示器　TFT_3.5-inch[5]
  - 控制器 R61581
  - 3.5 吋螢幕，解析度 480*320
  - 色彩 16-bit（RGB 565）
- 儲存紀錄　Micro SD
  - SDIO　讀寫
- 其他擴充介面
  - 1*USART、1*SPI、1*USB、1*I²C / CAN BUS

圖 7　遙控器實體圖

2.2、飛行原理

四軸飛行器的運動原理如圖 8 所示，當升力等於四軸飛行器自身重量時，飛行器就會保持懸停狀態；在懸停狀態下增加或減少相鄰兩邊馬達的旋轉速度，則會使四軸飛行器傾斜，達到移動；若分別增加與減少對角馬達轉速，則可使飛行器自旋。

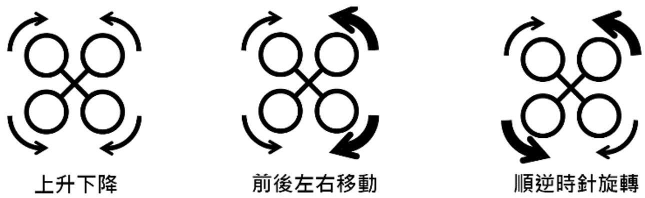

圖 8　四軸飛行器運動原理

3、系統架構

四軸飛行器的系統運作示意圖如圖 9 所示，微控制器從感測器讀取資訊，透過演算法計算出飛行器當下姿態角度作為控制器的回授，姿態角度會經由無線傳輸模組發送至控制平台做顯示，控制平台則會傳送飛行控制命令資訊給飛行器，飛行器上的微控制器依此控制命令與飛行器當下姿態角度的回授，輸入到控制器做計算，控制器輸出 PWM 訊號控制電調，改變無刷馬達轉速，來達到自主平衡與方向控制。

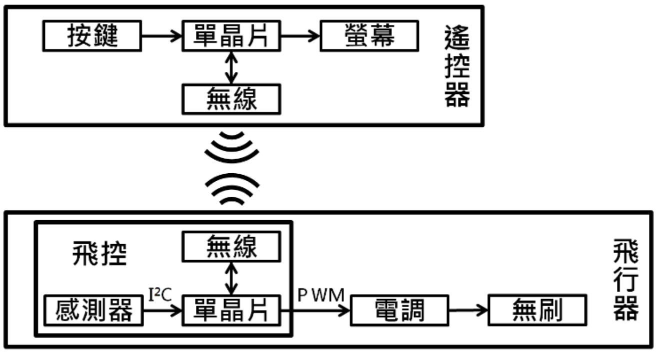

圖 9　四軸飛行器系統運作示意圖

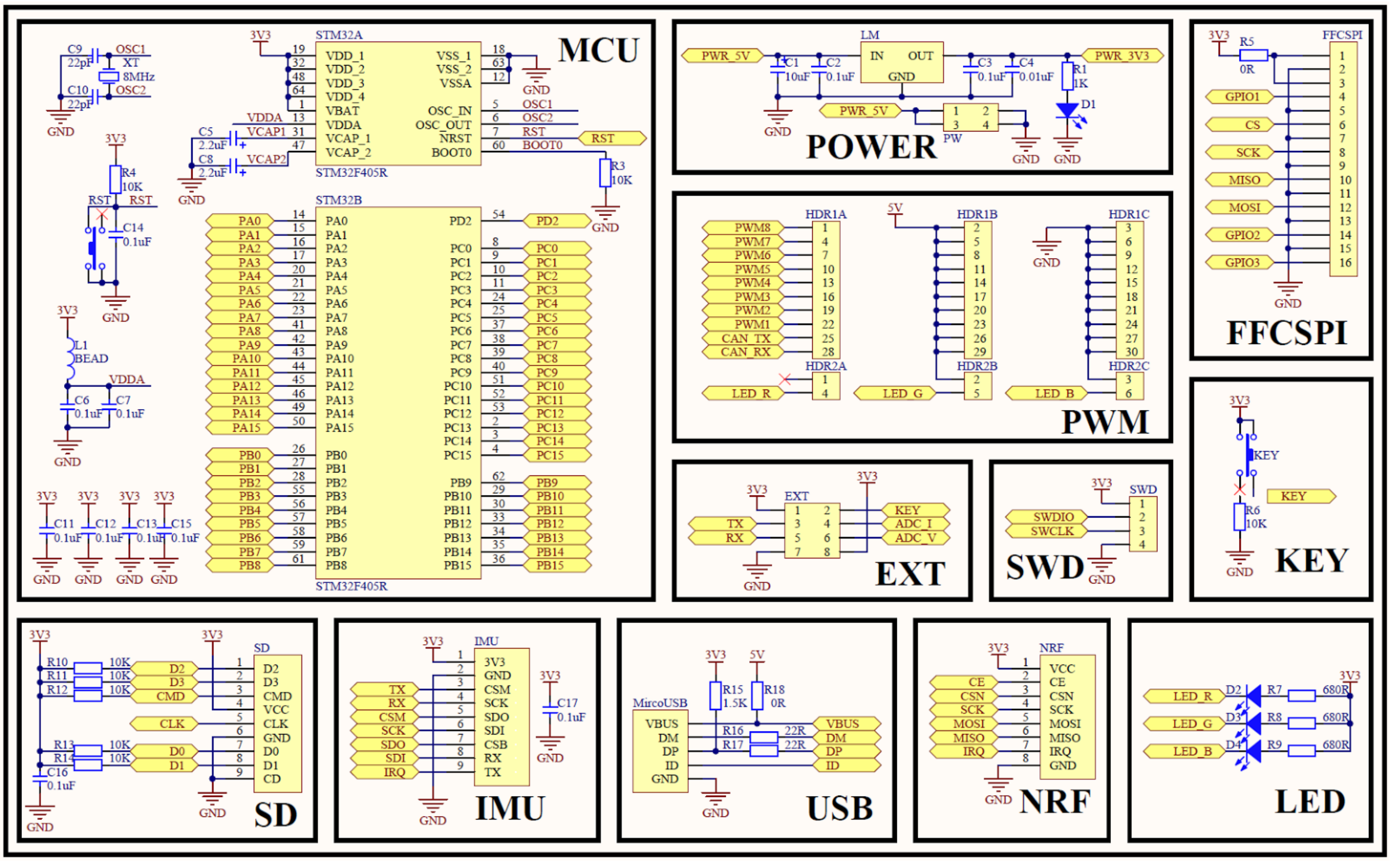

圖 10　QFC 電路圖

3.1、硬體

四軸飛行器之電路圖如圖 10 所示。

3.1.1、主微控制器（MCU）

採用意法半導體公司（STMicroelectronics, ST）的 32 位元微控制器 STM32F405RG 作為主控制器[2]，其 CPU 採用 ARM Cortex-M4；具有 210 DMIPS 的處理能力，最高工作頻率 168MHz，196Kbytes SRAM，1Mbyte Flash，有獨立的浮點數運算單元(FPU)、DSP 指令集；並有 USB、SDIO、USART、SPI、I^2C 等外設。

微控制器與其他裝置、硬體連接示意圖如圖 11 所示，通過 1 個 SPI 與無線傳輸模組連接，1 個 SPI 與 SmartIMU 連接，4 個通道的 PWM 與 4 個電調連接，2 個通道的 ADC 與電壓和電流連接，1 個 SDIO 與 Micro SD 卡連接。

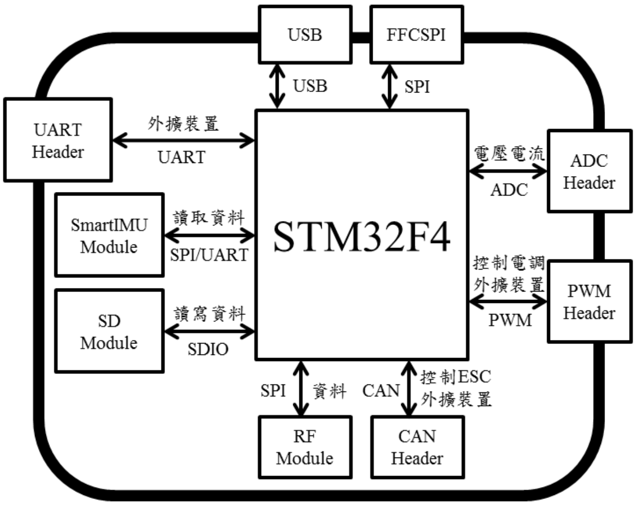

圖 11　QFC 內部連接示意圖

3.1.2、慣性測量元件（SmartIMU）

SmartIMU 是一個集成微控制器（STM32F401C）、3-axis 加速度計、3-axis 陀螺儀、3-axis 電子羅盤、氣壓計等感測器（MPU9250、MS5611）於一體的模組，可以透過 UART / I^2C、SPI、USB 來讀取計算出載體的角度、加速度、速度、位移、高度 ... 等等資訊，實體圖如圖 12 所示，主微控制器可以透過 SPI3 或 UART 從 SmartIMU 讀取已經處理好的姿態角度，也可以直接透過 SPI1 讀取感測器，直接處理感測器資訊，如圖 13 所示。

圖 12　SmartIMU 實體圖

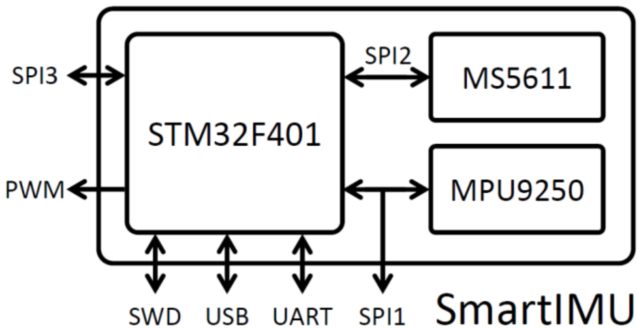

圖 13　SmartIMU 內部連接示意圖

3.1.3、無線傳輸

無線傳輸模組用於向監控平台傳送飛行器上的資訊與接收控制平台所發送的控制訊號、指令。

本次專題所採用的無線傳輸模組使用 NORDIC 公司 2.4G 的 nRF24L01P，並搭配功率放大器（PA）與低噪音放大器（LNA）來增加傳輸距離。nRF24L01P 提供了三種傳輸速率 2Mbps、1Mbps、250Kbps，其空曠下傳輸距離分別為 520m、750m、1000m。

3.1.4、電源

四軸飛行器的電源供應如圖 14 所示，由 11.1v 2200mAh 的鋰電池作為電力的來源，11.1v 經過 LM2596 轉換成 5v，再經由 AMS1117 轉換為 3.3v，其中 11.1v 供電給電調與無刷馬達，5v 供電給其他設備，3.3v 供電給飛控板。

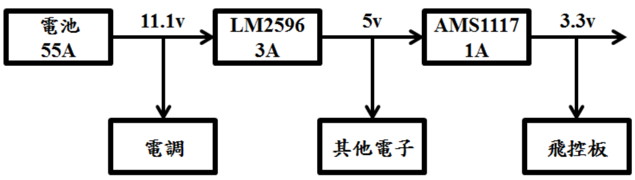

圖 14　電源供應圖

3.2、軟體

四軸飛行器的程式流程如圖 15 所示，供電後系統首先對系統時脈、I/O 與各種模組及功能做初始化，再對感測器做初始校正與飛行器姿態的初始化，最後為防止馬達突然啟動，設置了鎖定功能，在解鎖前，接收任何訊號皆不會使馬達旋轉。

解鎖完後即進入有限狀態機（Finite State Machine, FSM），狀態機的狀態如圖 16 所示，狀態機的初始狀態為接收模式，在此狀態中會接收遙控器的控制訊號，接收成功後才會進入到下一個狀態發射模式，在發射模式中會將感測器讀到的資料與計算的姿態傳送到遙控器顯示，傳送完後就進入下一個狀態控制模式，在控制模式中會使用平台所傳來的控制資訊，對四軸飛行器做控制，目前只有控制飛行器的傾斜角度與馬達轉速大小，控制完後就進入串列模式，這個狀態是用來測試與外接其他功能用的，以增加擴充性。

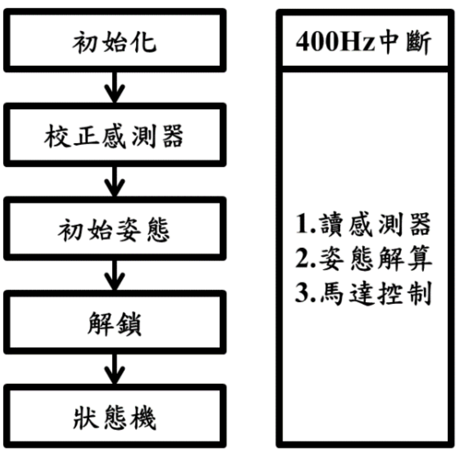

圖 15　程式流程圖

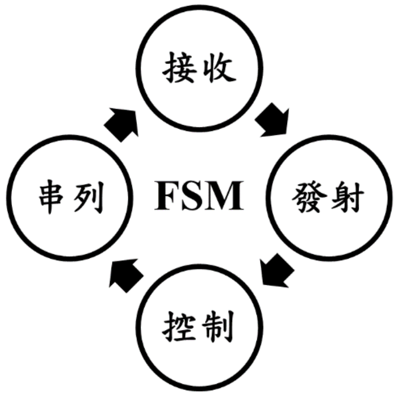

圖 16　狀態機示意圖

4、演算法

演算法為四軸飛行器之核心，其中主要包含了感測器的校正、姿態的計算與平衡的控制，本次專題中主要的演算法實現於 400Hz 的計時中斷中，其流程如圖 17 所示。

一開始先讀取感測器資料，然後利用初始校正所得到的校正資訊對讀到的資料作校正，校正完後轉成物理量(mg、dps、gauss)，再對其做加權移動平均，減少誤差，最後計算飛行器姿態，並依此當前的姿態做 PID 平衡，以達到自主懸停及控制。

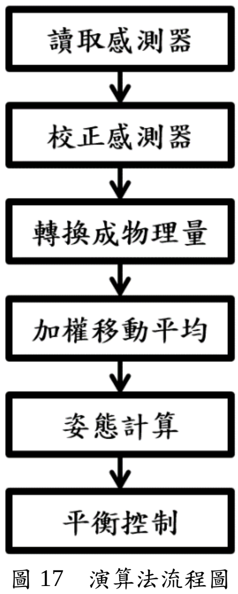

圖 17　演算法流程圖

4.1、初始校正

MEMS 元件雖然具有體積小與低成本的優勢，但只要是感測器都會有誤差存在的問題。

4.1.1、加速度計校正

考慮到地球上相同地區的重力加速度誤差可視為零的情況下，預先測量在水平狀態下的加速度與重力加速度 $g\,(0,1,1)$ 的誤差並記錄，在程式中就不需再次測量，直接對加速度計誤差的做偏移校正。

4.1.2、陀螺儀校正

陀螺儀為測量角速度的元件，已知靜止無運動的情況下，角速度為零，利用此條件對陀螺儀做校正，實際方法：先讓飛行器保持靜止，此時讀取陀螺儀 100 筆數據求平均值，此平均值則為陀螺儀的誤差偏移量，之後每次讀取完後減去此平均值即可得到正確的數據。

4.1.3、電子羅盤校正

地球磁場並非是均勻分佈的，會存在磁傾角及磁偏角，以台灣為例，磁傾角約為 37 度左右，加上馬達、環境、電池…等的影響干擾，在不校正的情況下，難以取的正確的航向。

只考慮二維的情況下，電子羅盤的 X 軸 Y 軸所讀到的磁場理想上會以中心在原點上的圓形所分佈，但受到其他磁場的影響會使圓形變形且偏離原心，造成磁場以橢圓形分佈。

對電子羅盤間隔 45 度做一次取樣，共有 8 點的磁場樣本，在對樣本做橢圓擬合[5]，得出橢圓方程後，將橢圓移到原心，並還原成圓形，使航向可以正常取得，詳細過程請參考附件 1。

4.2、姿態計算

直接對角速度做積分是取得姿態的方法之一，但由於陀螺儀本身的誤差會隨溫度變化，長時間對角速度做積分等同於放大誤差，加上角速度所計算出來的角度其中有一為 90 度或 270 度時，轉回原始座標時就會產生萬向節鎖（Gimbal Lock）的問題，導致轉不回去，所以專題在姿態計算中採用四元數[6]，並使用文獻[7]的方法實現。

在航向角部分採用互補濾波（Complementary Filter, CF），依文獻[8]之方法，套用至基於電子羅盤的航向角確定，將電子羅盤靜態時精確及陀螺儀的高靈敏度的特性結合在一起，以取得準確的航向。

4.2.1、四元數

四元數可以有效解決萬向節鎖問題，且經過一些變換後，可以直接以角速度來更新姿態與使用加速度計來校正陀螺儀。

利用四元數將地理的重力加速度旋轉至飛行器上面，再與加速度計讀出的值（已歸一化的）做外積，得出誤差，用此誤差對角速度做校正融合，詳細過程請參考附件 2。

4.2.2、互補濾波

將電子羅盤長期準確及陀螺儀靈敏度高的特性互補，即為對電子羅盤做低通濾波，對陀螺儀做高通濾波，並將其相加，得出較為可信的資訊。

$$\mathrm{Angle} = (\mathrm{k}) * (\mathrm{Angle} + \mathrm{Gyro} * \mathrm{dt}) + (1 - \mathrm{k}) * \mathrm{AngleMag}$$

其中k 是高低通頻率邊界，k = 時間常數 τ/(時間常數 τ + 取樣時間 dt)，AngleMag 是透過電子羅盤計算出來的航向角度。

4.3、平衡控制

PID 控制器在控制領域上已有數十年的發展，其特點簡單、穩定和有效，使他至今仍然廣為使用，本專題在自主平衡方面選用 PD 控制器，輸入期望角度及當前三軸角度以及角速度至 PD 控制器，將計算出來的三軸結果，依螺旋槳旋轉的方向分配至四顆馬達上，來達到對四軸平衡的效果，控制器設計如下：

$$u(t) = K_P * e(t) + K_D * \omega(t)$$

上式中 $u(t)$ 是 PD 控制器的輸出，K_P 與 K_D 是控制器參數，$e(t)$ 是回授角度與期望角度的誤差，$\omega(t)$ 是角速度。

5、結果與討論

以 400Hz 的取樣及更新週期，在沒有啟動馬達的情況下，姿態角的誤差可以達到 0.2 度以內，在起動馬達後，因為馬達的震動，使角度會在 5 度內震盪，使用 PID 控制器雖然可以讓飛行器飛起來，但卻沒辦法非常穩定的平衡，所以目前設計的計算姿態方法還需再調整及改善，以達到穩定的平衡，圖 18 至圖 25 為起飛時每隔 0.2 秒所拍攝的實際影像。

圖 26 為加速度的整體數據，縱軸單位為加速度（mg），橫軸單位為數據數，啟動馬達後加速度計的 XY 軸約在±0.3g 跳動，而 Z 軸約±0.2g 跳動。

圖 27 為陀螺儀的整體數據，縱軸單位為角速度（10mdps），橫軸單位為數據數，啟動馬達後陀螺儀的 X 軸約±40dps 跳動，Y 軸約±100dps 跳動，而 Z 軸約±10dps 跳動。

圖 28 為電子羅盤的整體數據，縱軸單位為高斯（0.1mGauss），橫軸單位為數據數，啟動馬達後電子羅盤震動都還不算太大，但出現了明顯的磁場變化，X 軸約減少了 20mGauss，Y 軸約減少了 60mGauss，而 Z 軸約減少了 70mGauss。

圖 29 為計算出來的角度數據，縱軸單位為角度（XY 軸 10mdeg，Z 軸 100mdeg），橫軸單位為數據數，啟動馬達後角度的 X 軸約±4deg 跳動，Y 軸約±2deg 跳動，而 Z 軸幾乎沒有明顯震動，反倒是偏移了 10deg。

6、參考文獻

[1] 維基百科，四軸飛行器 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9B%E8%BD%B4%E9%A3%9E%E8%A1%8C%E5%99%A8

[2] QCopterFlightControl, GitHub https://github.com/QCopter/QCopterFlightControl

[3] SmartIMU, GitHub https://github.com/Hom-Wang/SmartIMU

[4] QCopterRemoteControl, GitHub https://github.com/QCopter/QCopterRemoteControl

[5] 陳基偉，橢圓直接擬合算法研究，工程勘察，2007

[6] 鄭正隆，慣性技術 Inertial Technology，崧博出版事業有限公司，2011

[7] M. Euston, P. Coote, R. Mahony, Jonghyuk Kim and T. Hamel, “A Complementary Filter for Attitude Estimation of a Fixed-Wing UAV,” IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 340-345, Sept. 2008.

[8] Shane Colton, “The Balance Filter,” Massachusetts Institute of Technology, Tech. Rep., 2007

圖 18　起飛連續圖 1

圖 19　起飛連續圖 2

圖 20　起飛連續圖 3

圖 21　起飛連續圖 4

圖 22　起飛連續圖 5

圖 23　起飛連續圖 6

圖 24　起飛連續圖 7

圖 25　起飛連續圖 8

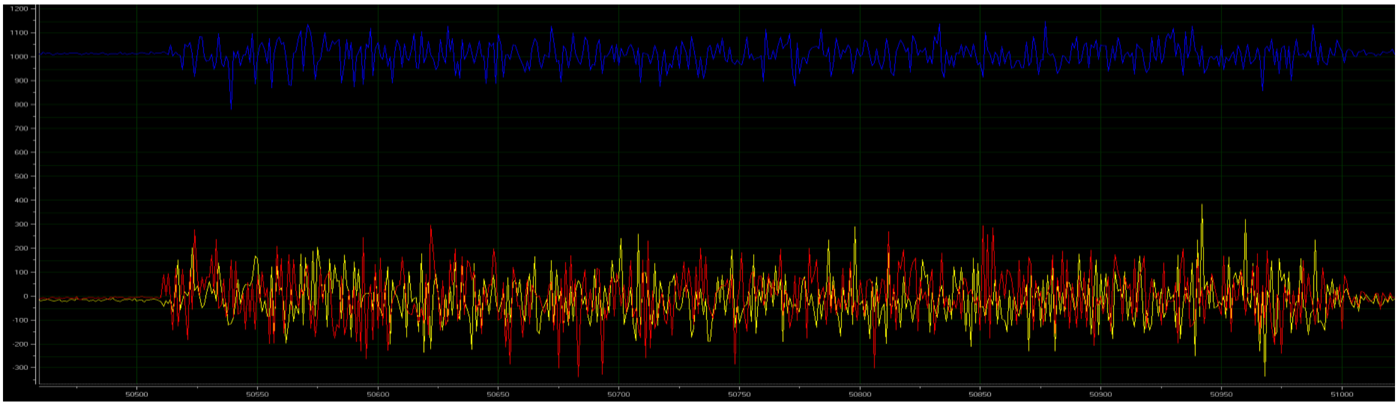

圖 26　加速度計整體資料

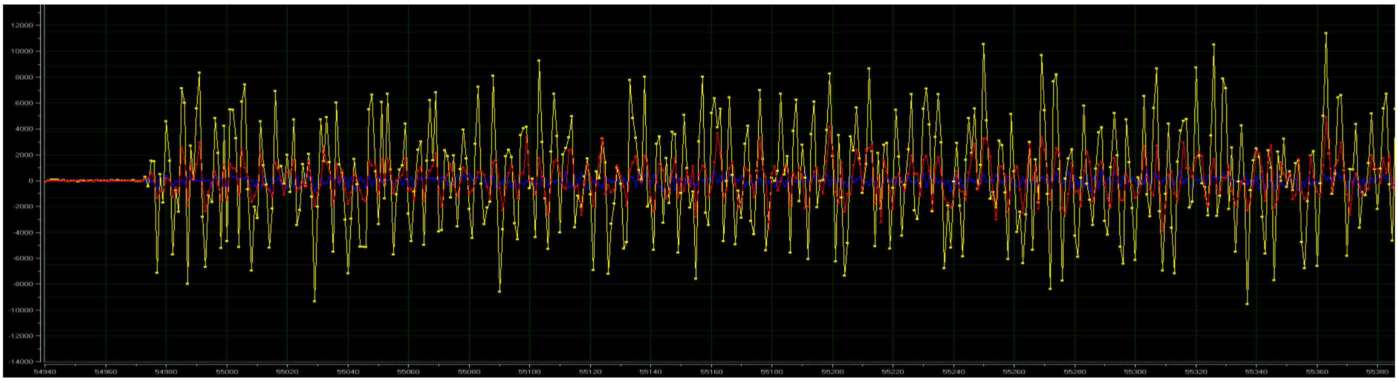

圖 27　陀螺儀整體資料

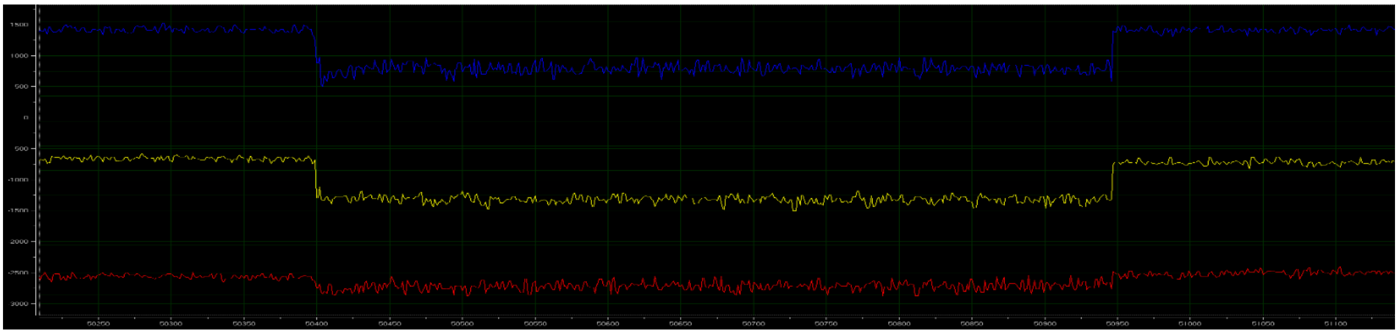

圖 28　電子羅盤整體資料

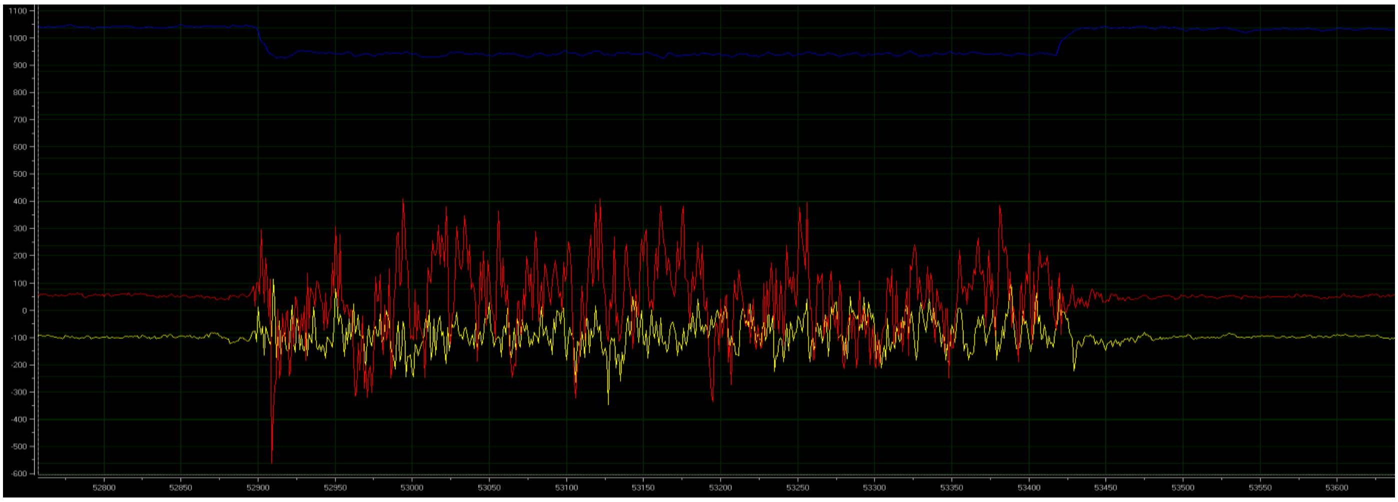

圖 29　角度整體資料

附件 1、橢圓擬合

任意位置大小的橢圓方程式可以描述如下：

$$\left(\frac{X-X_0}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-Y_0}{b}\right)^2=1$$

上式可分解成圓形對 X,Y 軸做變形

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}X-X_0\\Y-Y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}\\(X')^2+(Y')^2=1\end{cases}$$

對 X,Y 軸做旋轉

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}X-X_0\\Y-Y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\theta&sin\theta\\-sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}\\(X')^2+(Y')^2=1\end{cases}$$

求得 X',Y'

$$\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a*cos\theta&b*sin\theta\\-a*sin\theta&b*cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X-X_0\\Y-Y_0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{cos\theta}{a}&-\dfrac{cos\theta}{a}\cdot\dfrac{sin\theta}{\mathrm{Cos}[\theta]}\\\dfrac{cos\theta}{b}\cdot\dfrac{sin\theta}{cos\theta}&\dfrac{cos\theta}{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X-X_0\\Y-Y_0\end{pmatrix}$$

令 $\alpha=\frac{\cos\theta}{a}$, $\beta=\frac{\cos\theta}{b}$, $\gamma=\tan\theta$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&-\alpha\cdot\gamma\\\beta\cdot\gamma&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X-X_0\\Y-Y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(X-X_0)-\alpha\gamma(Y-Y_0)\\\beta\gamma(X-X_0)+\beta(Y-Y_0)\end{pmatrix}$$

代入圓形方程&整理

$$(\alpha(X-X_0)-\alpha\gamma(Y-Y_0))^2+(\beta\gamma(X-X_0)+\beta(Y-Y_0))^2=1$$

$$\Rightarrow(\alpha^2+\beta^2\gamma^2)(X-X_0)^2+2(\beta^2\gamma-\alpha^2\gamma)(X-X_0)(Y-Y_0)+(\alpha^2\gamma^2+\beta^2)(Y-Y_0)^2=1$$

令 $\mathrm{U}=\alpha^2+\beta^2\gamma^2$, $\mathrm{V}=2(\beta^2\gamma-\alpha^2\gamma)$, $\mathrm{W}=\alpha^2\gamma^2+\beta^2$

$$(U)X^2+(V)XY+(W)Y^2+(-2UX_0-VY_0)X+(-VX_0-2WY_0)Y+(UX_0^2+VX_0Y_0+WY_0^2)=1$$

$$\Rightarrow X^2+\left(\frac{V}{U}\right)XY+\left(\frac{W}{U}\right)Y^2+\left(\frac{-2UX_0-VY_0}{U}\right)X+\left(\frac{-VX_0-2WY_0}{U}\right)Y+\left(\frac{UX_0^2+VX_0Y_0+WY_0^2}{U}\right)=1$$

$$\Rightarrow X^2+\left(\frac{V}{U}\right)XY+\left(\frac{W}{U}\right)Y^2+\left(-2X_0-\frac{V}{U}Y_0\right)X+\left(-\frac{V}{U}X_0-2\frac{W}{U}Y_0\right)Y+\left(X_0^2+\frac{V}{U}X_0Y_0+\frac{W}{U}Y_0^2\right)=\frac{1}{U}$$

任意橢圓方程式

$$X^2 + A \cdot XY + B \cdot Y^2 + C \cdot X + D \cdot Y + E = 0$$

其中 $A = \frac{V}{U}$, $B = \frac{W}{U}$, $C = -2X_0 - AY_0$, $D = -AX_0 - 2BY_0$, $E = X_0^2 + AX_0Y_0 + BY_0^2 - \frac{1}{U}$

使用最小平方法做橢圓擬合，其中 N 為取樣數目

$$Q = \sum_{i=1}^{N} {F_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} ({X_i}^2 + A \cdot X_iY_i + B \cdot {Y_i}^2 + C \cdot X_i + D \cdot Y_i + E)^2$$

欲使 Q 為最小值，必有

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{\partial Q}{\partial B} = \frac{\partial Q}{\partial C} = \frac{\partial Q}{\partial D} = \frac{\partial Q}{\partial E} = 0$$

展開

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 2\sum_{i=1}^{N} \left({X_i}^2 + A \cdot X_iY_i + B \cdot {Y_i}^2 + C \cdot X_i + D \cdot Y_i + E\right)(X_iY_i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = 2\sum_{i=1}^{N} \left({X_i}^2 + A \cdot X_iY_i + B \cdot {Y_i}^2 + C \cdot X_i + D \cdot Y_i + E\right)({Y_i}^2) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial C} = 2\sum_{i=1}^{N} \left({X_i}^2 + A \cdot X_iY_i + B \cdot {Y_i}^2 + C \cdot X_i + D \cdot Y_i + E\right)(X_i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial D} = 2\sum_{i=1}^{N} \left({X_i}^2 + A \cdot X_iY_i + B \cdot {Y_i}^2 + C \cdot X_i + D \cdot Y_i + E\right)(Y_i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial E} = 2\sum_{i=1}^{N} \left({X_i}^2 + A \cdot X_iY_i + B \cdot {Y_i}^2 + C \cdot X_i + D \cdot Y_i + E\right)(1) = 0$$

矩陣形式

$$\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{N} {X_i}^2{Y_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} X_i{Y_i}^3 & \sum_{i=1}^{N} {X_i}^2Y_i & \sum_{i=1}^{N} X_i{Y_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} X_iY_i \\
\sum_{i=1}^{N} X_i{Y_i}^3 & \sum_{i=1}^{N} {Y_i}^4 & \sum_{i=1}^{N} X_i{Y_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} {Y_i}^3 & \sum_{i=1}^{N} {Y_i}^2 \\
\sum_{i=1}^{N} {X_i}^2Y_i & \sum_{i=1}^{N} X_i{Y_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} {X_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} X_iY_i & \sum_{i=1}^{N} X_i \\
\sum_{i=1}^{N} X_i{Y_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} {Y_i}^3 & \sum_{i=1}^{N} X_iY_i & \sum_{i=1}^{N} {Y_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} Y_i \\
\sum_{i=1}^{N} X_iY_i & \sum_{i=1}^{N} {Y_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} X_i & \sum_{i=1}^{N} Y_i & N
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}
= -\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{N} {X_i}^3Y_i \\
\sum_{i=1}^{N} {X_i}^2{Y_i}^2 \\
\sum_{i=1}^{N} {X_i}^3 \\
\sum_{i=1}^{N} {X_i}^2Y_i \\
\sum_{i=1}^{N} {X_i}^2
\end{pmatrix}$$

解線性方程組後，可得到 A,B,C,D,E 的值

由 $C=-2X_0-AY_0,\ D=-AX_0-2BY_0$ ， 可解得 $X_0,\ Y_0$

$$X_0=\frac{2BC-AD}{A^2-4B},\qquad Y_0=\frac{2D-AC}{A^2-4B}$$

由 $\mathrm{U}=\alpha^2+\beta^2\gamma^2,\ \mathrm{V}=2(\beta^2\gamma-\alpha^2\gamma),\ \mathrm{W}=\alpha^2\gamma^2+\beta^2$ ， 可解得 $\gamma,\ \theta$

$$\frac{W-U}{V}=\frac{1-\gamma^2}{2\gamma}$$

$$\Longrightarrow V\gamma^2+2(W-U)\gamma-\mathrm{V}=0$$

$$\Longrightarrow A\gamma^2+2(B-1)\gamma-A=0$$

$$\gamma=\frac{1-B}{A}\pm\sqrt{(\frac{1-B}{A})^2+1}$$

$$\theta=\mathrm{ArcTan}[\gamma]$$

由 $E=X_0^2+AX_0Y_0+BY_0^2-\frac{1}{U}$， 可解得 U

$$U=\frac{1}{(X_0^2+AX_0Y_0+BY_0^2)-E}$$

由 $\mathrm{U}=\alpha^2+\beta^2\gamma^2,\ \mathrm{V}=2(\beta^2\gamma-\alpha^2\gamma)$ ， 可解得 a,b

$$\alpha=\sqrt{\frac{\mathrm{U}}{\gamma^4-1}(\mathrm{B}\gamma^2-1)},\qquad \beta=\sqrt{\frac{\mathrm{U}}{\gamma^4-1}(\gamma^2-\mathrm{B})}$$

$$\Longrightarrow a=\frac{\mathrm{Cos}[\theta]}{\alpha},\qquad b=\frac{\mathrm{Cos}[\theta]}{\beta}$$

整理結果

$$\begin{cases} X_0=\dfrac{2BC-AD}{A^2-4B} \\ Y_0=\dfrac{2D-AC}{A^2-4B} \\ \theta=\mathrm{ArcTan}[\gamma] \\ a=\dfrac{\mathrm{Cos}[\theta]}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{U}}{\gamma^4-1}(\mathrm{B}\gamma^2-1)}} \\ b=\dfrac{\mathrm{Cos}[\theta]}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{U}}{\gamma^4-1}(\gamma^2-\mathrm{B})}} \\ U=\dfrac{1}{(X_0^2+AX_0Y_0+BY_0^2)-E} \\ \gamma=\dfrac{1-B}{A}\pm\sqrt{\left(\dfrac{1-B}{A}\right)^2+1} \end{cases}$$

附件 2、四元數

1. 方向餘弦矩陣 DCM

先建立旋轉矩陣 $R_x,\ R_y,\ R_z$，繞 X,Y,Z 軸旋轉角度分別為θ, ϕ, ψ

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} cos\phi & 0 & -sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\phi & 0 & cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_z = \begin{pmatrix} cos\psi & sin\psi & 0 \\ -sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

設一向量 $P(\mathrm{X,Y,Z})$，並依 $Z-Y-X$ 順序對向量旋轉，對 Z 軸旋轉，P' 為 P 對 Z 軸旋轉後的向量

$$P' = R_z \cdot P$$

對 Y 軸旋轉，P''為 P' 對 Y 軸旋轉後的向量

$$P'' = R_y \cdot P' = R_y \cdot R_z \cdot P$$

對 X 軸旋轉，P''' 為 P'' 對 X 軸旋轉後的向量

$$P''' = R_x \cdot P'' = R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot P$$

令 $R_{xyz} = R_x \cdot R_y \cdot R_z$, 則

$$R_{xyz} = \begin{pmatrix} cos\phi\ cos\psi & cos\phi\ sin\psi & -sin\phi \\ cos\psi\ sin\theta\ sin\phi - cos\theta\ sin\psi & cos\theta\ cos\psi + sin\theta\ sin\phi\ sin\psi & cos\phi\ sin\theta \\ cos\theta\ cos\psi\ sin\phi + sin\theta\ sin\psi & -cos\psi\ sin\theta + cos\theta\ sin\phi\ sin\psi & cos\theta\ cos\phi \end{pmatrix}$$

2. 四元數 Quaternions

四元數由一個實數與三個虛數組成，可表示成

$$Q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} = cos\frac{\theta}{2} + \hat{n} \cdot sin\frac{\theta}{2}$$

其中 $\hat{n}$ 為轉軸方向, $\theta/2$為轉角大小，$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 關係為

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = -1,\quad \hat{i}\cdot\hat{j} = -\hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{k},\quad \hat{j}\cdot\hat{k} = -\hat{k}\cdot\hat{j} = \hat{i},\quad \hat{k}\cdot\hat{\imath} = -\hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}$$

設有兩四元數 Q_A, Q_B，其乘法關係為

$$Q = Q_A \cdot Q_B = \left(q_{A0} + q_{A1}\hat{i} + q_{A2}\hat{j} + q_{A3}\hat{k}\right) \cdot \left(q_{B0} + q_{B1}\hat{i} + q_{B2}\hat{j} + q_{B3}\hat{k}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} q_{A0}\cdot q_{B0} - q_{A1}\cdot q_{B1} - q_{A2}\cdot q_{B2} - q_{A3}\cdot q_{B3} \\ q_{A1}\cdot q_{B0} + q_{A0}\cdot q_{B1} - q_{A3}\cdot q_{B2} + q_{A2}\cdot q_{B3} \\ q_{A2}\cdot q_{B0} + q_{A3}\cdot q_{B1} + q_{A0}\cdot q_{B2} - q_{A1}\cdot q_{B3} \\ q_{A3}\cdot q_{B0} - q_{A2}\cdot q_{B1} - q_{A1}\cdot q_{B2} + q_{A0}\cdot q_{B3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

旋轉四元數

$$Q_{xyz} = Q_z \cdot Q_y \cdot Q_x = (cos\frac{\psi}{2} + sin\frac{\psi}{2}\ \hat{k}) \cdot (cos\frac{\phi}{2} + sin\frac{\phi}{2}\ \hat{j}) \cdot (cos\frac{\theta}{2} + sin\frac{\theta}{2}\ \hat{i})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{\psi}{2}\ cos\frac{\phi}{2}\ cos\frac{\theta}{2} + sin\frac{\psi}{2}\ sin\frac{\phi}{2}\ sin\frac{\theta}{2} \\ cos\frac{\psi}{2}\ cos\frac{\phi}{2}\ sin\frac{\theta}{2} - sin\frac{\psi}{2}\ sin\frac{\phi}{2}\ cos\frac{\theta}{2} \\ cos\frac{\psi}{2}\ sin\frac{\phi}{2}\ cos\frac{\theta}{2} + sin\frac{\psi}{2}\ cos\frac{\phi}{2}\ sin\frac{\theta}{2} \\ sin\frac{\psi}{2}\ cos\frac{\phi}{2}\ cos\frac{\theta}{2} - cos\frac{\psi}{2}\ sin\frac{\phi}{2}\ sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

設一向量 $R = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$，及旋轉後向量 $R' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$，四元數滿足 $R' = Q^{-1} \cdot R \cdot Q$

四元數倒數

$$Q^{-1} = \frac{1}{Q} = \frac{Q^*}{Q \cdot Q^*} = \frac{Q^*}{|\ Q\ |}$$

當四元數被歸一化後

$$|\ Q\ | = 1 \Rightarrow Q^{-1} = Q^*$$

可得到

$$R' = Q^* \cdot R \cdot Q$$

將其展開

$$x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k} = (q_0 - q_1\hat{i} - q_2\hat{j} - q_3\hat{k}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2 & 2(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & 2(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) \\ 2(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & {q_0}^2 - {q_1}^2 + {q_2}^2 - {q_3}^2 & 2(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) \\ 2(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) & 2(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) & {q_0}^2 - {q_1}^2 - {q_2}^2 + {q_3}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

令四元數旋轉矩陣為 M_q

$$M_q = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2 & 2(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & 2(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) \\ 2(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & {q_0}^2 - {q_1}^2 + {q_2}^2 - {q_3}^2 & 2(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) \\ 2(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) & 2(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) & {q_0}^2 - {q_1}^2 - {q_2}^2 + {q_3}^2 \end{pmatrix}$$

將 Q_{xyz} 帶入 M_q 會得到與 R_{xyz} 相同結果

$$M_q = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\phi\ cos\psi & cos\phi\ sin\psi & -sin\phi \\ cos\psi\ sin\theta\ sin\phi - cos\theta\ sin\psi & cos\theta\ cos\psi + sin\theta\ sin\phi\ sin\psi & cos\phi\ sin\theta \\ cos\theta\ cos\psi\ sin\phi + sin\theta\ sin\psi & -cos\psi\ sin\theta + cos\theta\ sin\phi\ sin\psi & cos\theta\ cos\phi \end{pmatrix}$$

將尤拉角轉成四元數，由 M_q 可得出

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{M_{23}}{M_{33}}\right), \qquad \phi = -sin^{-1}(M_{13}), \qquad \psi = tan^{-1}\left(\frac{M_{12}}{M_{11}}\right)$$

3. 四元數微分

四元數微分，已知一四元數 $Q = cos\frac{\theta}{2} + \hat{n} \cdot sin\frac{\theta}{2}$，對時間微分

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{2}sin\frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{n}}{dt} \cdot sin\frac{\theta}{2} + \hat{n} \cdot \frac{1}{2}cos\frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

已知 $\hat{\mathrm{n}} \cdot \hat{\mathrm{n}} = -1$, $\frac{d\hat{n}}{dt} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = \omega_{\mathrm{Eb}}^{\mathrm{E}}$, E 為地理座標系, b 為飛行器坐標系

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}\hat{n} \cdot \omega_{Eb}^{E} \cdot (cos\frac{\theta}{2} + \hat{n} \cdot sin\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{Eb}^{E} \cdot Q$$

因為陀螺儀在飛行器上測到的角速度為 $\vec{\omega}_{Eb}^{b} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$, 故將 $\vec{\omega}_{Eb}^{E}$ 轉換成 $\vec{\omega}_{Eb}^{b}$ 會較為方便

$$\vec{\omega}_{Eb}^{b} = Q^*\vec{\omega}_{Eb}^{E} \cdot Q \Rightarrow Q \cdot \vec{\omega}_{Eb}^{b} = Q \cdot Q^* \cdot \vec{\omega}_{Eb}^{E} \cdot Q = \vec{\omega}_{Eb}^{E} \cdot Q$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{Eb}^{E} \cdot Q = \frac{1}{2}Q \cdot \vec{\omega}_{Eb}^{b}$$

將 $\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{2}\mathrm{Q} \cdot \vec{\omega}_{\mathrm{Eb}}^{\mathrm{b}}$ 展開

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}(q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}) \cdot (\omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

整理為

$$\frac{dQ}{dt} = \Omega_b \cdot Q$$

其中

$$\Omega_b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

4. 更新四元數

使用一階 Runge-Kutta 更新四元數, 假設有一微分方程

$$\frac{dX}{dt} = f[X[t], \omega[t]]$$

則其解為

$$X[t + \Delta t] = X[t] + \Delta t \cdot f[X[t], \omega[t]]$$

其中 $\Delta\mathrm{t}$ 為取樣週期, 將套用至四元數

$$Q[t+\Delta t] = Q[t] + \Delta t \cdot \Omega_b[t] \cdot Q[t]$$

展開上式

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}_t + \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} -\omega_x \cdot q_1 - \omega_y \cdot q_2 - \omega_z \cdot q_3 \\ +\omega_x \cdot q_0 - \omega_y \cdot q_3 + \omega_z \cdot q_2 \\ +\omega_x \cdot q_3 + \omega_y \cdot q_0 - \omega_z \cdot q_1 \\ -\omega_x \cdot q_2 + \omega_y \cdot q_1 + \omega_z \cdot q_0 \end{pmatrix}$$

只需利用角速度即可更新四元數

5. 使用四元數融合加速度計

利用四元數將地理的重力加速度旋轉至飛行器上面，再與加速度計讀出的值（已歸一化的）做外積，得出誤差，用此誤差對角速度做校正融合，假設一重力加速度

$$\vec{g} = g\hat{z}$$

做歸一化後

$$\vec{g} \to \hat{g} = \hat{z}$$

設旋轉至飛行器上的重力加速度為 $\hat{g}_b$

$$\hat{g}_b = M_q \cdot \hat{g} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{g}_b = \begin{pmatrix} g_{\mathrm{bx}} \\ g_{\mathrm{by}} \\ g_{\mathrm{bz}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{13} \\ M_{23} \\ M_{33} \end{pmatrix}$$

飛行器上的加速度計測得的加速度 $\vec{a}_b$ 做歸一化

$$\vec{a}_b \to \hat{a}_b$$

做外積，計算誤差 $\vec{e}$

$$\vec{e} = \hat{a}_b \times \hat{g}_b = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_{\mathrm{bx}} & a_{\mathrm{by}} & a_{\mathrm{bz}} \\ g_{\mathrm{bx}} & g_{\mathrm{by}} & g_{\mathrm{bz}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\mathrm{by}} & a_{\mathrm{bz}} \\ g_{\mathrm{by}} & g_{\mathrm{bz}} \end{vmatrix} \hat{x} + \begin{vmatrix} a_{\mathrm{bz}} & a_{\mathrm{bx}} \\ g_{\mathrm{bz}} & g_{\mathrm{bx}} \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} a_{\mathrm{bx}} & a_{\mathrm{by}} \\ g_{\mathrm{bx}} & g_{\mathrm{by}} \end{vmatrix} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \begin{pmatrix} e_{\mathrm{x}} \\ e_{\mathrm{y}} \\ e_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{by}} \cdot g_{\mathrm{bz}} - a_{\mathrm{bz}} \cdot g_{\mathrm{by}} \\ a_{\mathrm{bz}} \cdot g_{\mathrm{bx}} - a_{\mathrm{bx}} \cdot g_{\mathrm{bz}} \\ a_{\mathrm{bx}} \cdot g_{\mathrm{by}} - a_{\mathrm{by}} \cdot g_{\mathrm{bx}} \end{pmatrix}$$

將 e 融合至角速度上