Fiche de révision DS1

Fiche de révision DS1 de maths

1. Rappel primitive et dérivé

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Primitive $F(x)$
$x^n (n \neq -1)$	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	$-x^{-2}$	$\ln \|\|x\|\|$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \ln(x) - x$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\sin(ax)$	$a\cos(x)$	$-\frac{1}{a}\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\cos(ax)$	$-a\sin(x)$	$\frac{1}{a}\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	

2. Espaces de Hilbert

Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel normé complet muni d'un produit scalaire.

Définitions

- **Produit scalaire** :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \quad \text{(ou une intégrale si l'espace est infini-dimensionnel).}$$

- **Norme induite** :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Propriétés

1. **Orthogonalité** : Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si :

$$\langle u, v \rangle = 0$$

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

3. **Théorème de projection orthogonale** :
   Si H est un sous-espace fermé, tout vecteur x se décompose en :

$$x = x_H + x_H^\perp, \quad x_H \in H,\, x_H^\perp \in H^\perp.$$

3. Décomposition en Séries de Fourier

Définition

Une fonction périodique $f(x)$ de période 2π peut être décomposée en une série de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Coefficients de Fourier

- a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

- a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Propriétés

- **Convergence** : La série converge en moyenne quadratique dans $L^2([-\pi, \pi])$. (Pas vu en cours mais je le note la quand même au cas ou)
- **Parseval** :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

4. Convolution

Définition

La convolution de deux fonctions f et g est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau$$

Propriétés

1. **Commutativité** :

$$f * g = g * f$$

2. **Associativité** :

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. **Distributivité** :

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier** :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

4. Distribution de Dirac

Définition

La distribution de Dirac $\delta(x)$ est définie par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

pour toute fonction f continue au voisinage de 0.

Propriétés

1. **Support ponctuel** :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

2. **Translation** :

$$\delta(x - a) \quad \text{est centrée en } x = a$$

3. **Propriété de filtrage** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) \, dx = f(a)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier** :

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$$

5. Distribution de 2 variables

Gradient d'une fonction à 2 variables

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Dérivée partielle selon x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Dérivée partielle selon y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Rotationnel en 2D

$$\nabla \times f = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}$$

Théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \text{si } f_{xy} \text{ et } f_{yx} \text{ sont continues.}$$

```
\usepackage{amsmath, tikz}
\usepackage{pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.17}

\begin{document}

\section*{Convolution : Exemple avec \(f(t)\) et \(g(t)\)}

\subsection*{Les fonctions}
1. \(f(t)\), définie comme :
```

```
\[
f(t) =
\begin{cases}
e^t & \text{si } t \leq 0, \\
e^{-t} & \text{si } t > 0.
\end{cases}
\]

2. \(g(t)\), définie comme :
\[
g(t) =
\begin{cases}
1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\
0 & \text{sinon.}
\end{cases}
\]

\subsection*{Définition de la convolution}
La convolution est donnée par :
\[
(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau
\]

Pour ce cas spécifique :
\[
(f * g)(t) =
\begin{cases}
\int_{0}^{t} e^\tau \, d\tau & \text{si } t \leq 1, \\
\int_{t-1}^{t} e^\tau \, d\tau & \text{si } t > 1.
\end{cases}
\]

\subsection*{Résultat de la convolution}

Calculons les deux cas :
1. Si \(t \leq 1\) :
\[
(f * g)(t) = \int_{0}^{t} e^\tau \, d\tau = \left[e^\tau
\right]_{0}^{t} = e^t - 1.
\]

2. Si \(t > 1\) :
\[
(f * g)(t) = \int_{t-1}^{t} e^\tau \, d\tau = \left[e^\tau \right]_{t-
1}^{t} = e^t - e^{t-1}.
\]
```

```
\subsection*{Visualisation des fonctions et de la convolution}

\begin{figure}[ht]
    \centering
    \begin{tikzpicture}
        % Graph for f(t)
        \begin{axis}[
            width=12cm,
            height=6cm,
            xlabel={$t$},
            ylabel={$f(t)$ and $g(t)$},
            axis x line=middle,
            axis y line=middle,
            ymin=0, ymax=2,
            xmin=-2, xmax=2,
            samples=100,
            legend style={at={(1.1,1)},anchor=north west}
        ]
            % f(t)
            \addplot[domain=-2:0, thick, blue] {exp(x)} node[pos=0.5,
above] {};
            \addplot[domain=0:2, thick, blue] {exp(-x)} node[pos=0.5,
above] {};
            \addlegendentry{$f(t)$}

            % g(t)
            \addplot[domain=0:1, thick, red] {1} node[pos=0.5, above]
{};
            \addplot[domain=-2:0, thick, red] {0};
            \addplot[domain=1:2, thick, red] {0};
            \addlegendentry{$g(t)$}
        \end{axis}
    \end{tikzpicture}
    \caption{Les fonctions \(f(t)\) et \(g(t)\).}
\end{figure}

\begin{figure}[ht]
    \centering
    \begin{tikzpicture}
        % Graph for the convolution
        \begin{axis}[
            width=12cm,
            height=6cm,
            xlabel={$t$},
            ylabel={$(f * g)(t)$},
            axis x line=middle,
            axis y line=middle,
```

```
            ymin=0, ymax=2,
            xmin=-1, xmax=3,
            samples=100
        ]
            % Convolution result
            \addplot[domain=0:1, thick, green] {exp(x) - 1};
            \addplot[domain=1:3, thick, green] {exp(x) - exp(x-1)};
        \end{axis}
    \end{tikzpicture}
    \caption{Résultat de la convolution : \((f * g)(t)\).}
\end{figure}

\end{document}
```

```
\begin{document}
  \begin{tikzpicture}[domain=0:4]
    \draw[very thin,color=gray] (-0.1,-1.1) grid (3.9,3.9);
    \draw[->] (-0.2,0) -- (4.2,0) node[right] {$x$};
    \draw[->] (0,-1.2) -- (0,4.2) node[above] {$f(x)$};
    \draw[color=red]    plot (\x,\x)             node[right] {$f(x)
=x$};
    \draw[color=blue]   plot (\x,{sin(\x r)})    node[right] {$f(x) =
\sin x$};
    \draw[color=orange] plot (\x,{0.05*exp(\x)}) node[right] {$f(x) =
\frac{1}{20} \mathrm e^x$};
  \end{tikzpicture}
\end{document}
```
