Fiche de révision DS1

Fiche de révision DS1 de maths

1. Rappel primitive et dérivé

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$	**Primitive** $F(x)$
$x^n (n \neq -1)$	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	$-x^{-2}$	$\ln \|\|x\|\|$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \ln(x) - x$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\sin(ax)$	$a\cos(x)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\cos(ax)$	$-a\sin(x)$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	

2. Identités trigonométrique:

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

3. Rappel mathématique

IPP

$\int u\, v'\, dx = uv - \int u'\, v\, dx$

Fréquence

$\omega = 2\pi * F$ ou $\omega = \frac{2\pi}{T}$
$F = \frac{1}{T}$

Partité d'une fonction

Une fonction est paire si $f(-x) = f(x)$
Une fonction est impaire si $f(-x) = -f(x)$
Une fonction peut ne pas avoir de parité.

4. Espaces de Hilbert

Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel normé complet muni d'un produit scalaire.

Définitions

- **Produit scalaire** :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \quad \text{(ou une intégrale si l'espace est infini-dimensionnel).}$$

- **Norme induite** :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Propriétés

1. **Orthogonalité** : Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si :

$$\langle u, v \rangle = 0$$

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

3. **Théorème de projection orthogonale** :
Si H est un sous-espace fermé, tout vecteur x se décompose en :

$$x = x_H + x_H^{\perp}, \quad x_H \in H, \, x_H^{\perp} \in H^{\perp}.$$

5. Décomposition en Séries de Fourier

Définition

Une fonction périodique $f(x)$ de période 2π peut être décomposée en une série de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Coefficients de Fourier

- a_0 : (tous le temps)

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{d}^{d+T} f(x)\, dx$$

- a_n : (si paire)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- b_n : (si impaire)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Propriétés

- **Convergence** : La série converge en moyenne quadratique dans $L^2([-\pi, \pi])$. (Pas vu en cours mais je le note la quand même au cas ou)
- **Parseval** :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

6. Convolution

Définition

La convolution de deux fonctions f et g est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

Propriétés

1. **Commutativité** :

$$f * g = g * f$$

2. **Associativité** :

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. **Distributivité** :

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier** :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

Exemple: Convolution de deux fonctions exponentielles

Soient α et $beta$ deux nombres réels. Nous cherchons à démontrer l'existence et à calculer le produit de convolution :

$$\left(e^{\alpha x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)\right) * \left(e^{\beta x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)\right).$$

Correction

Remarquons d'abord que l'existence du produit de convolution de ces deux fonctions ne résulte pas immédiatement des théorèmes du cours.

- Si $alpha > 0$ et $beta > 0$, alors les deux fonctions ne sont dans aucun L^p pour $p \geq 1$.
- Elles appartiennent à L^1_{loc}, mais aucune des deux n'a de support compact.

Ainsi, pour démontrer l'existence du produit de convolution, il faut montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$y \mapsto e^{\alpha(x-y)}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x-y)e^{\beta y}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y)$$

est intégrable.

Comme cette fonction est positive, il suffit de faire le calcul sans les valeurs absolues.

On a alors :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha(x-y)}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x-y)e^{\beta y}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y)\,dy.$$

Substituons les fonctions indicatrices :

$$f * g(x) = e^{\alpha x}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x-y)e^{\beta y}\,dy.$$

Or, $x-y \in [0,+\infty[\iff x \geq y$. Il en résulte que :

- Si $x \leq 0$, alors $f * g(x) = 0$. - Si $x \geq 0$, alors :

  $$f * g(x) = e^{\alpha x}\int_0^{x} e^{(\beta-\alpha)y}\,dy$$

  Pour terminer, on a :
- Si $\beta \neq \alpha$, alors :

  $$f * g(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}\big(e^{\beta x} - e^{\alpha x}\big).$$

  - Si $\beta = \alpha$, alors :

  $$f * g(x) = xe^{\alpha x}.$$

  Ce qui donne le produit de convolution:

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{\beta-\alpha}\big(e^{\beta x} - e^{\alpha x}\big) & \text{si } x > 0 \text{ et } \beta \neq \alpha, \\ xe^{\alpha x} & \text{si } x > 0 \text{ et } \beta = \alpha. \end{cases}$$

7. Distribution de Dirac

Définition

La distribution de Dirac $\delta(x)$ est définie par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

pour toute fonction f continue au voisinage de 0.

Propriétés

1. **Support ponctuel** :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

2. **Translation** :

$$\delta(x-a) \quad \text{est centrée en } x = a$$

3. **Propriété de filtrage** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx = f(a)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier** :

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$$

8. Distribution de 2 variables

Définition

Une **distribution de deux variables** est une généralisation des fonctions classiques permettant de modéliser des phénomènes singuliers ou localisés, comme les impulsions ou les discontinuités. Elle agit sur des fonctions tests $\phi(x, y)$ lisses et à support compact par une intégrale généralisée.

Gradient d'une fonction à 2 variables

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Dérivée partielle selon x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Dérivée partielle selon y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Rotationnel en 2D

$$\nabla \times f = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}$$

Théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \text{si } f_{xy} \text{ et } f_{yx} \text{ sont continues.}$$

Recherche de point critique

On pose $\nabla f(x, y) = 0$
Puis une fois que x est exprimé par rapport a y on cherche les points évidents.
Ensuite une exprime la matrice hessienne pour les points critiques.
Si le déterminant Δ > 0 est défini positive.
Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, alors le point critique est un **minimum local**.
Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, alors le point critique est un **maximum local**.
Si Δ < 0 le point critique est un **point de selle**.
Si Δ = 0 le test est **indéterminé**, et il faut utiliser d'autres méthodes pour conclure.

9. Matrice hessienne

Définition

La matrice hessienne d'une fonction $f : R^n \to R$ est une matrice carrée composée des dérivées partielles secondes de f. Si $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ est deux fois continûment différentiable, alors :

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Propriétés

1. La matrice hessienne est **symétrique** si f est de classe C^2
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
2. La hessienne permet de déterminer la **convexité** ou la **concavité** de f :
   - Si $H_f(x)$ (x) est définie positive ($\forall v, v^T H_f(x) v > 0$) alors f est **strictement convexe**.

- Si $H_f(x)$ (x) est définie négative ($\forall v, v^T H_f(x) v < 0$) alors f est **strictement concave**.

Exemple: f(x, y) = x^2 + xy + y^2

Calcul des dérivées partielles

1. Les dérivées partielles premières :
   $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y.$
2. Les dérivées partielles secondes :
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$

Matrice hessienne

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Analyse

La matrice hessienne $H_f(x, y)$ est définie positive (ses valeurs propres sont toutes positives). Cela signifie que la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ est strictement convexe.
