Fiche de révision DS1

Fiche de révision DS1 de maths

1. Espaces de Hilbert

Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel normé complet muni d'un produit scalaire.

Définitions

- **Produit scalaire** :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \quad \text{(ou une intégrale si l'espace est infini-dimensionnel).}$$

- **Norme induite** :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Propriétés

1. **Orthogonalité** : Deux vecteurs uuu et vvv sont orthogonaux si :

$$\langle u, v \rangle = 0$$

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

3. **Théorème de projection orthogonale** :
   Si H est un sous-espace fermé, tout vecteur x se décompose en :

$$x = x_H + x_H^{\perp}, \quad x_H \in H, \, x_H^{\perp} \in H^{\perp}.$$

2. Décomposition en Séries de Fourier

Définition

Une fonction périodique $f(x)$ de période 2π peut être décomposée en une série de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Coefficients de Fourier

- a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

- a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Propriétés

- **Convergence** : La série converge en moyenne quadratique dans $L^2([-\pi, \pi])$.
- **Parseval** :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

3. Convolution

Définition

La convolution de deux fonctions f et g est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau$$

Propriétés

1. **Commutativité** :

$$f * g = g * f$$

2. **Associativité** :

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. **Distributivité** :

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier** :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

4. Distribution de Dirac

Définition

La distribution de Dirac $\delta(x)$ est définie par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

pour toute fonction f continue au voisinage de 0.

Propriétés

1. **Support ponctuel** :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

2. **Translation** :

$$\delta(x - a) \quad \text{est centrée en } x = a$$

3. **Propriété de filtrage** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x)\, dx = f(a)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier** :

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$$
