Fiche de révision DS1

Fiche de révision DS1 de maths

1. Rappel primitive et dérivé

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Primitive $F(x)$
$x^n(n \neq -1)$	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	$-x^{-2}$	$\ln \|x\|$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x\ln(x) - x$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\sin(ax)$	$a\cos(x)$	$-\frac{1}{a}\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\cos(ax)$	$-a\sin(x)$	$\frac{1}{a}\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	

2. Espaces de Hilbert

Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel normé complet muni d'un produit scalaire.

Définitions

- **Produit scalaire** :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \quad \text{(ou une intégrale si l'espace est infini-dimensionnel).}$$

- **Norme induite** :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Propriétés

1. **Orthogonalité** : Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si :

$$\langle u, v \rangle = 0$$

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

3. **Théorème de projection orthogonale** :
Si H est un sous-espace fermé, tout vecteur x se décompose en :

$$x = x_H + x_H^{\perp}, \quad x_H \in H,\, x_H^{\perp} \in H^{\perp}.$$

3. Décomposition en Séries de Fourier

Définition

Une fonction périodique $f(x)$ de période 2π peut être décomposée en une série de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Coefficients de Fourier

- a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

- a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Propriétés

- **Convergence** : La série converge en moyenne quadratique dans $L^2([-\pi, \pi])$. (Pas vu en cours mais je le note la quand même au cas ou)
- **Parseval** :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

4. Convolution

Définition

La convolution de deux fonctions f et g est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Propriétés

1. **Commutativité** :

$$f * g = g * f$$

2. **Associativité** :

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. **Distributivité** :

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier** :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

4. Distribution de Dirac

Définition

La distribution de Dirac $\delta(x)$ est définie par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)\,dx = f(0)$$

pour toute fonction f continue au voisinage de 0.

Propriétés

1. **Support ponctuel** :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

2. **Translation** :

$$\delta(x-a) \quad \text{est centrée en } x = a$$

3. **Propriété de filtrage** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx = f(a)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier** :

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$$

5. Distribution de 2 variables

Gradient d'une fonction à 2 variables

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Dérivée partielle selon x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Dérivée partielle selon y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Rotationnel en 2D

$$\nabla \times f = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}$$

Théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \text{si } f_{xy} \text{ et } f_{yx} \text{ sont continues.}$$

Matrice hessienne

Définition

La matrice hessienne d'une fonction $f : R^n \to R$ est une matrice carrée composée des dérivées partielles secondes de f. Si $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ est deux fois continûment différentiable, alors :

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Propriétés

1. La matrice hessienne est **symétrique** si f est de classe C^2
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
2. La hessienne permet de déterminer la **convexité** ou la **concavité** de f :
   - Si $H_f(x)$ (x) est définie positive ($\forall v, v^T H_f(x) v > 0$) alors f est **strictement convexe**.
   - Si $H_f(x)$ (x) est définie négative ($\forall v, v^T H_f(x) v < 0$) alors f est **strictement concave**.

Exemple: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

Calcul des dérivées partielles

1. Les dérivées partielles premières :
   $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y.$
2. Les dérivées partielles secondes :
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$

Matrice hessienne

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Analyse

La matrice hessienne $H_f(x, y)$ est définie positive (ses valeurs propres sont toutes positives). Cela signifie que la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ est strictement convexe.
