

Fiche de révision DS1

Fiche de révision DS1 de maths

- [1. Rappel primitive et dérivé](#)
- [2. Espaces de Hilbert](#)
 - [Définitions](#)
 - [Propriétés](#)
- [3. Décomposition en Séries de Fourier](#)
 - [Définition](#)
 - [Coefficients de Fourier](#)
 - [Propriétés](#)
- [4. Convolution](#)
 - [Définition](#)
 - [Propriétés](#)
- [4. Distribution de Dirac](#)
 - [Définition](#)
 - [Propriétés](#)

1. Rappel primitive et dérivé

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Primitive $F(x)$
$x^n (n \neq -1)$	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	$-x^{-2}$	$\ln x $
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \ln(x) - x$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\sin(ax)$	$a \cos(x)$	$-\frac{1}{a} \cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\cos(ax)$	$-a \sin(x)$	$\frac{1}{a} \sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	

2. Espaces de Hilbert

Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel normé complet muni d'un produit scalaire.

Définitions

- **Produit scalaire :**

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i} \quad (\text{ou une intégrale si l'espace est infini-dimensionnel}).$$

- **Norme induite :**

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Propriétés

1. **Orthogonalité :** Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si :

$$\langle u, v \rangle = 0$$

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

3. Théorème de projection orthogonale :

Si H est un sous-espace fermé, tout vecteur x se décompose en :

$$x = x_H + x_H^\perp, \quad x_H \in H, \quad x_H^\perp \in H^\perp.$$

3. Décomposition en Séries de Fourier

Définition

Une fonction périodique $f(x)$ de période 2π peut être décomposée en une série de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Coefficients de Fourier

- a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

- a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

- b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Propriétés

- **Convergence** : La série converge en moyenne quadratique dans $L^2([-\pi, \pi])$.
(Pas vu en cours mais je le note la quand même au cas ou)
- **Parseval** :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

4. Convolution

Définition

La convolution de deux fonctions f et g est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

Propriétés

1. **Commutativité :**

$$f * g = g * f$$

2. **Associativité :**

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. **Distributivité :**

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

4. **Lien avec la transformée de Fourier :**

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

4. Distribution de Dirac

Définition

La distribution de Dirac $\delta(x)$ est définie par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

pour toute fonction f continue au voisinage de 0.

Propriétés

1. **Support ponctuel :**

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

2. **Translation :**

$$\delta(x - a) \quad \text{est centrée en } x = a$$

3. Propriété de filtrage :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$

4. Lien avec la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$$
