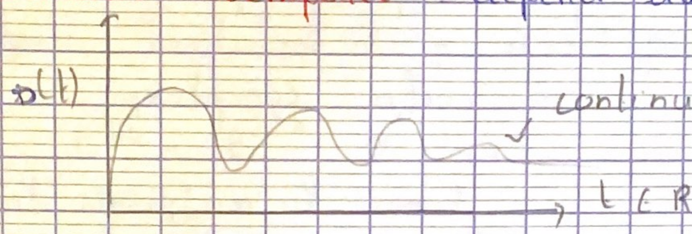
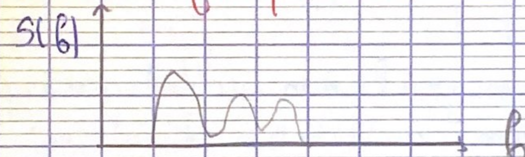
Analyse de Fourier

Domaine temporel dépend du temps



Domaine fréquentiel (spectral)



s = domaine temporel
S = " fréquentiel

Pour quitter domaine frequentiel pour domaine temporel on utilise le transforme de fourier inverse.

Chaque raie dans le domaine frequentiel correspond à un signal sinusoïdal

Tout signal periodique à energie fini peut être decomposer en une somme de cos et sin. Les cos et sin sont des diracs ou raies en domaine fourier

Spectre unilateral : dans la représentation on a que la partie positive avec des coefs réels + S. bilateral représenté avec des coefs complexes.

Filtre passe bas : laisse passer les signaux de basse fréquence utilisé avec un spectre unilateral

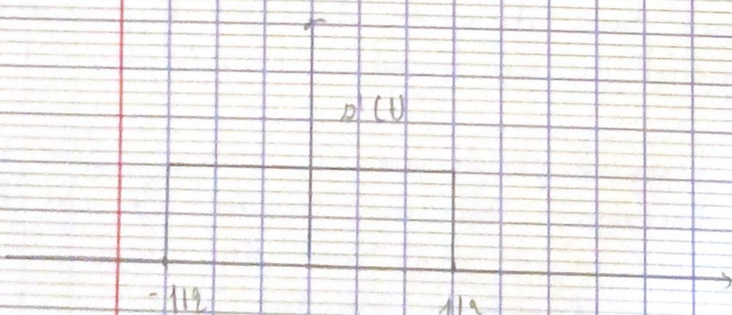
Filtre passe bande : élimine les extrémités

Harmonique : H ce qui est sinusoïdal
d'ordre 1 appelé fondamental

Pour un signal non périodique, pour la transformation, on utilise l'intégral de fourier

$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \quad j = i$ complexe

Exercice



Pas périodique

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi t f} = \left[-\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}}{j2\pi f} \quad \text{or} \quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$= \frac{\sin \pi f}{\pi f} = \text{sinc}(\pi f)$$ sinc : sinus cardinal

Pour fourier sur python, importer la bibliothèque scipy : fft, ifft, fftshift()

Réponse fréquentielle est la transformée de fourier d'une réponse impulsionnelle

$$g(t) = s(t) * h(t)$$

Si on a g(t) et s(t) on ns demande h(t)

$g(t) \Rightarrow G(f)$ et $s(t) = S(f)$

$$G(f) = S(f) \times H(f)$$

$$H(f) = \frac{G(f)}{S(f)} \Rightarrow$$

$$h(t) \underset{TF}{\overset{TI}{\updownarrow}} H(f)$$

Exercice

Soit le signal $x(t)$ periodique de periode $T = 2\pi$ sur $[-\pi ; \pi]$

$$x(t) \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2- Tracer $x(t)$

3- Determiner son developpement de fourier

Mê question pour

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ -1/2 & \text{sinon} \end{cases} \qquad -\pi/4 \leq t/2 \leq \pi/4$$

$T = 2\pi$ defini sur $[-\pi ; \pi]$

Exercice 2

1- Soit le signal defini par

$x(t) = \sin^2(3\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t) + \cos(5\omega_0 t) + 3$

Calculer les coefficients de fourier complexes C_k du signal $x(t)$

2- Tracer son spectre bilateral d'amplitude

3- On considere le signal $x(t)$ de periode $T = 2\pi$ et representer son spectre le periode

fourier

≤ 1/4

cos(5w0t)+3

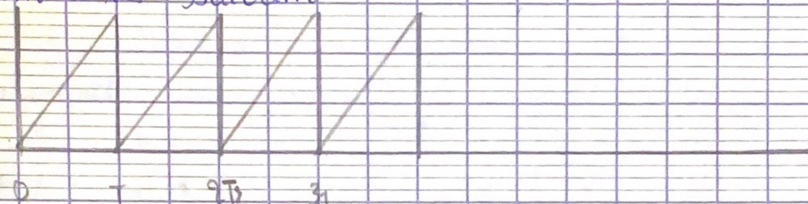
en complexes

d'amplitude

de periode

Exercice 3

Soit le signal défini par une suite de rampe unitaires suivant



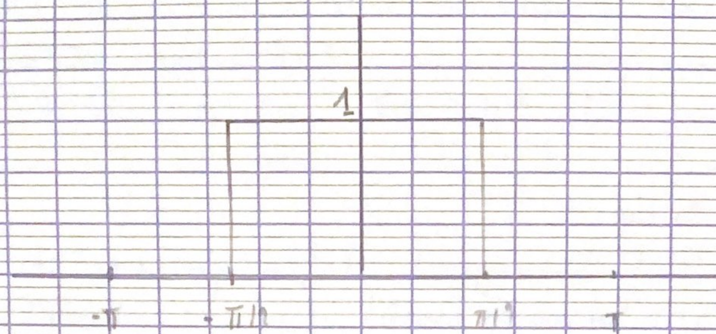
1 Donner l'expression des coef de fourier a_0, a_n et b_n

2 Donner son developpement en serie de fourier

Dans le cas où seules les 4 premiers raies sont considerées, donner la rep du spectre d'amplitude bilateral de $x(t)$ pour $T = 1$

$\int \cos(ax) = \frac{1}{a}\sin x$

Exercice 1



$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right]$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} s(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[t\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} s(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \qquad \omega = 2\pi/T$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\pi/2} \frac{1}{n}\sin(nt)$$

$-\sin(a) = \sin(-a)$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{T}\left[\frac{\sin(n\pi/2)}{n} - \frac{\sin(-\pi/2\,n)}{n}\right]$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{2\sin(n\pi/2)}{n} = \frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi n}$$

Quand le signal est pair $b_n = 0$

impair $a_n = 0$

an

Exerc

$s(t)$

$= a$

$= 1$

$= \frac{7}{2}$

Par

$\frac{a_0}{2} =$

pour

an co

Sous

$C_0 =$

$C_1 =$

$C_2 =$

C_{-2}

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Exercice 2

$x(t) = \sin^2(3w_0t) + \cos(w_0t) + \cos(5w_0t) + 3$

$= a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n w_0 t) + b_n \sin(n w_0 t)]$

$= \frac{1 - \cos(6w_0t)}{2} + \cos(w_0t) + \cos(5w_0t) + 3$

$= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\cos(6w_0t) + \cos(w_0t) + \cos(5w_0t)$

Par analogie $b_n = 0 \quad \forall n$

$\frac{a_0}{2} = \frac{7}{2} \quad a_6 = \frac{-1}{2} \quad a_1 = 1 \quad a_5 = 1 \quad a_4 = 0$

pour $a_n > a_6 \quad a_n = 0$ car on a

$a_1\cos(w_0t) + a_2\cos(2w_0t) + a_3\cos(3w_0t) + \text{etc} \ldots$

Sous forme complexe on a

$C_0 = a_0/2 = 7/2$

$C_1 = \frac{a_1 - jb_1}{2} = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$

$C_2 = \frac{a_2 - jb_2}{2} = 0 \qquad C_3 = 0$

$C_{-2} = 0 \qquad C_{-3} = 0$

$C_4 = 0$

$C_{-4} = 0$

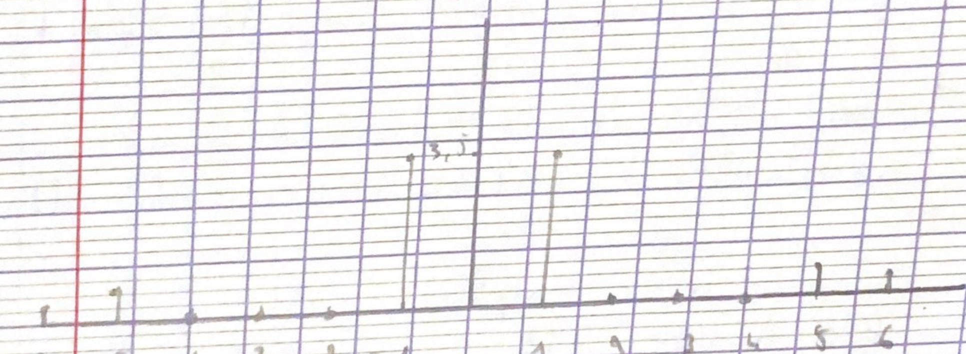
$C_5 = \frac{a_5 - j b_5}{2} = \frac{a_5}{2} = \frac{1}{2}$

$C_{-5} = \frac{1}{2}$

$C_6 = \frac{a_6 - j b_5}{2} = \frac{a_6}{2} = -\frac{1}{4}$

$C_{-6} = -\frac{1}{4}$

Traçons le spectre bilatéral



Exercice 3