МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Депортамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №1 по дисциплине

«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп(1)
Кикоть М.Е. ____________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 10 » мая 2024 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1. Введение

Электрические нагреватели широко применяются в различных областях, начиная от промышленности и заканчивая бытовыми устройствами. Создание математической модели электрического нагревателя играет важную роль в оптимизации процессов нагрева, повышении эффективности и безопасности его работы. Математическая модель позволяет предсказывать тепловые характеристики нагревателя в зависимости от различных параметров, таких как мощность тока, материал нагревательного элемента, его площадь и так далее.

Применение математической модели электрического нагревателя может быть полезным в различных областях, включая промышленное производство, медицину, сельское хозяйство и научные исследования. Например, она может помочь оптимизировать процессы термической обработки материалов, контролировать температурные режимы в медицинских устройствах или разрабатывать новые методы обогрева в сельском хозяйстве.

Важность разработки математической модели без терморегулятора заключается в возможности понимания динамики нагрева и охлаждения системы при изменении различных параметров. Это позволит нам определить оптимальные режимы работы нагревателя для конкретных задач.

Создание математической модели электрического нагревателя с терморегулятором позволит нам более точно контролировать температурный режим работы устройства. Это крайне важно для предотвращения перегрева или недостаточного нагрева системы, что может привести к повреждению оборудования или снижению эффективности работы.

Целью этой лабораторной работы является построение и анализ математических моделей электрического нагревателя без терморегулятора и с ним. С помощью построенной модели мы хотим изучить, как изменяется температура нагревателя с течением времени в зависимости от разных параметров.

2. Условия рассмотрения модели

В рамках данного исследования мы рассматриваем электрический нагреватель как однородное тело, состоящее полностью из одного материала. Это предположение позволяет упростить модель и сосредоточиться на основных процессах нагрева.

Мы также предполагаем, что температура внешней среды остается постоянной, то есть при повышении температуры нагревателя не происходит изменения температуры окружающей среды. Это условие позволяет сосредоточиться на внутренних тепловых процессах внутри нагревателя без учета внешних факторов.

3. Построение модели

Для того чтобы понять, как меняется температура нагревателя с течением времени, мы должны разобраться, что именно влияет на этот процесс и какие законы описывают изменение температуры.

Используемые формулы

1. **Формула изменения количества теплоты**. Она описывает связь изменения количества внутренней теплоты и изменение температуры вещества.

$$\Delta Q = mc\Delta T,$$

где

- ΔQ – количество выделившейся теплоты тела,
- m – масса тела,
- – удельная теплоемкость тела
- ΔT – изменение температуры тела.

Эта формула играет важную роль в описании тепловых процессов и является ключевой в термодинамике.

2. **Закон Джоуля-Ленца**. Он объясняет, почему проводники нагреваются при прохождении через них электрического тока. При использовании электрического нагревателя, электрический ток протекает через специально созданный проводник с высоким сопротивлением, из-за чего происходит выделение теплоты.

$$\Delta Q = I^2 R\Delta t,$$

где

- ΔQ – количество выделившейся теплоты тела,

- I – сила тока,
- R –сопротивление тока,
- Δt – время.

Выразим этот закон через мощность тока, так как это характеристика чаще всего встречается при описании процессов электроприборов.

Зная, что мощность тока вычисляется по формулее $P = I^2R$, получим новый вид закона:

$$\Delta Q = P\Delta t.$$

Эту формулу и будем использовать при построении модели.

3. **Закон теплоотдачи, Ньютона-Рихмана**. Он говорит о том, что скорость изменения тепла тела пропорциональна разности температур между телом T и окружающей средой T_{out}. Коэффициент теплоотдачи k зависит от площади поверхности тела S, характеристик среды и других факторов.

$$\Delta Q_t = -kS\left(T - T_{out}\right)\Delta t.$$

4. **Тепловое излучение**. Формула описывает тепловое излучение, которое является электромагнитным излучением, испускаемым всеми телами при любой температуре выше абсолютного нуля.

$$\Delta Q_t = -\sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)\Delta t,$$

где

- ΔQ – количество выделившейся теплоты тела,
- S – плозадь поверхности,
- T – температура нагревателя,
- T_0 – температура окружающей среды,

- σ – постоянная Стефана-Больцмана, которая равна $5.67 \cdot 10^{-}8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$,
- Δt – время.

Итак, объединив все описанные процессы, мы знаем, что, с одной стороны, изменение количества внутренней теплоты ΔQ связано с изменением температуры тела ΔT по формуле (1). С дргой стороны, количество выделившейся теплоты включает в себя процессы нагревания электронагревателя при прохождении тока (2), а также охлаждения тела из-за процессов теплообмена (3) и теплового излучения (4):

$$\Delta Q = P\Delta t - kS\left(T - T_{out}\right)\Delta t - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)\Delta t.$$

Таким образом, у нас есть две формулы, описывающие одну и ту же величину - количество выдеившейся теплоты при нагревании Q:

$$\begin{cases} \Delta Q = mc\Delta T, \\ \Delta Q = P\Delta t - kS\left(T - T_{out}\right)\Delta t - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)\Delta t. \end{cases}$$

Поэтому мы можем приравнять обе правые части друг к другу, так как они описывают один и тот же процесс:

$$mc\Delta T = P\Delta t - kS\left(T - T_{out}\right)\Delta t - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)\Delta t.$$

Разделив это равенство на mc и устремив $\Delta t \to 0$, мы получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc},$$

которое описывает изменение температуры электронагревателя по отношению к времени.

Добавив начальные условия, мы получаем математическую модель электрического нагревателя без терморегулятора:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}, \\ T(0) = T_{out}. \end{cases}$$

Для построения математической модели с терморегулятором, необходимо ввести функцию $H(T)$, которая управляет температурой нагревателя, прерывая поступления тока при превышении верхней границы T_{up} и возобновляя её при опускании температуры ниже нижней границы T_{down}.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{H(T) \cdot P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}, \\ T(0) = T_{out}, \end{cases} \qquad H(T) = \begin{cases} 0, & T > T_{up}, \\ 1, & T < T_{down}. \end{cases}$$

Таким образом, мы построили математические модели, описывающие изменение температуры электронагревателя с учетом и без учета работы терморегулятора в зависимости от времени.

4. Математические модели электрического нагревателя

Математическая модель без терморегулятора

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}, \\ T(0) = T_a. \end{cases}$$

Математическая модель с терморегулятором

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{H(T) \cdot P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}, \\ T(0) = T_a, \end{cases}$$

где $H(T) = \begin{cases} 0, & T > T_{up}, \\ 1, & T < T_{down}. \end{cases}$

Обозначения

- $T\,[\text{К}]$ – температура нагревателя в Кельвинах
- $t\,[\text{с}]$ – время в секундах
- $P\,[\text{Вт}]$ – мощность тока
- $S\,\left[\text{м}^2\right]$ – площадь поверхности нагревателя
- $T_0\,[\text{К}]$ – температура внешней среды
- $c\left[\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\right]$ – удельная теплоемкость материала
- $m\,[\text{кг}]$ – масса тела
- $k\left[\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}\right]$ – коэффициент теплопередачи
- $\sigma\left[\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}\right]$ – постоянная Стефана-Больцмана

5. Анализ модели

Построенная модель представляет из себя задачу Коши для обыкновенного уравнения 1-го порядка, нелинейное, разрешенное относительно производной.

5.1. Верхняя грань

В начальный момент времени разогрева нагревателя $T = T_{out}$, отсюда:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P}{cm} > 0.$$

Это обозначает, что температура будет увеличиваться. Поскольку производная $\frac{dT}{dt}$ представляет из себя непрерывную функцию, то изменение температуры будет плавным. Со временем отрицательные компоненты будут возрастать. что приведёт к замедлению роста функции $T(t)$. В конечном итоге мощность P и отрицательные компоненты сбалансируют друг друга, достигнув равновесия:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{H(T) \cdot P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc} = 0.$$

После чего температура больше не будет увеличиваться, достигнув максимального значения.

6. Реализация модели

Математическая модель представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка, разрешенное относительно производной. Для решения можно использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка, который имеет погрешность порядка $O(h^4)$, где h – шаг метода.

Построим зависимость температуры от времени $T(t)$ при следующих выбранных параметрах:

- $P = 800$Вт;
- $S = 0.5$м^2;
- $T_0 = 298$К;
- $c = 1460\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$;
- $m = 1$кг;
- Шаг, с которым мы будем замерять время $h = 0.1$;

6.1. Нагреватель без терморегулятора

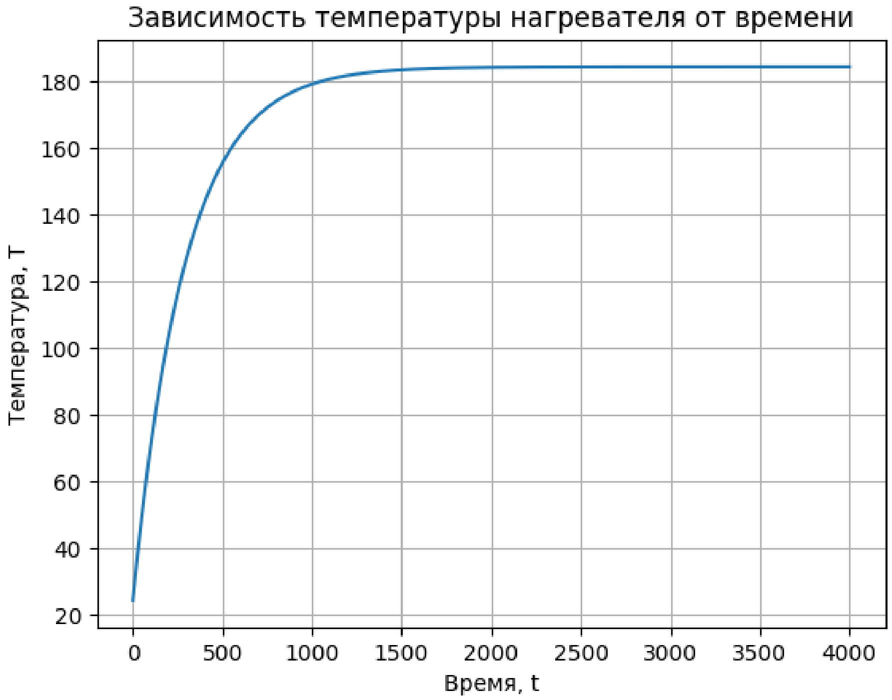

Рис. 1: График нагревания без терморегулятора

Листинг 1: Вычисление значений методом Рунге-Кутта без терморегулятора

```
def findFunction(x, y0, h):
    y = [y0]
    for i in range(len(x) - 1):
        k0 = f(x[i], y[i])
        k1 = f(x[i] + h/2, y[i] + h/2*k0)
        k2 = f(x[i] + h/2, y[i] + h/2*k1)
        k3 = f(x[i] + h, y[i] + h*k2)
        y.append(y[i] + h/6 * (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3))
    return y
```

6.2. Нагреватель с терморегулятором

Рис. 2: График нагревания с терморегулятором

Листинг 2: Вычисление значений методом Рунге-Кутта с терморегулятором

```
def findFunctionWithRelle(x, y0, h, down_bound, up_bound):
    y = [y0]
    a = 1
    for i in range(len(x) - 1):
        if y[i] > up_bound + K_CONST:
            a = 0
        elif y[i] < down_bound + K_CONST and a == 0:
            a = 1
        k0 = f(x[i], y[i], a)
        k1 = f(x[i] + h/2, y[i] + h/2*k0, a)
        k2 = f(x[i] + h/2, y[i] + h/2*k1, a)
        k3 = f(x[i] + h, y[i] + h*k2, a)
        y.append(y[i] + h/6 * (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3))
    return y
```

7. Численные эксперименты

Проведём серию численных экспериментов, варьируя каждый параметр по отдельности, чтобы выяснить, какие влияние они оказывают на математическую модель.

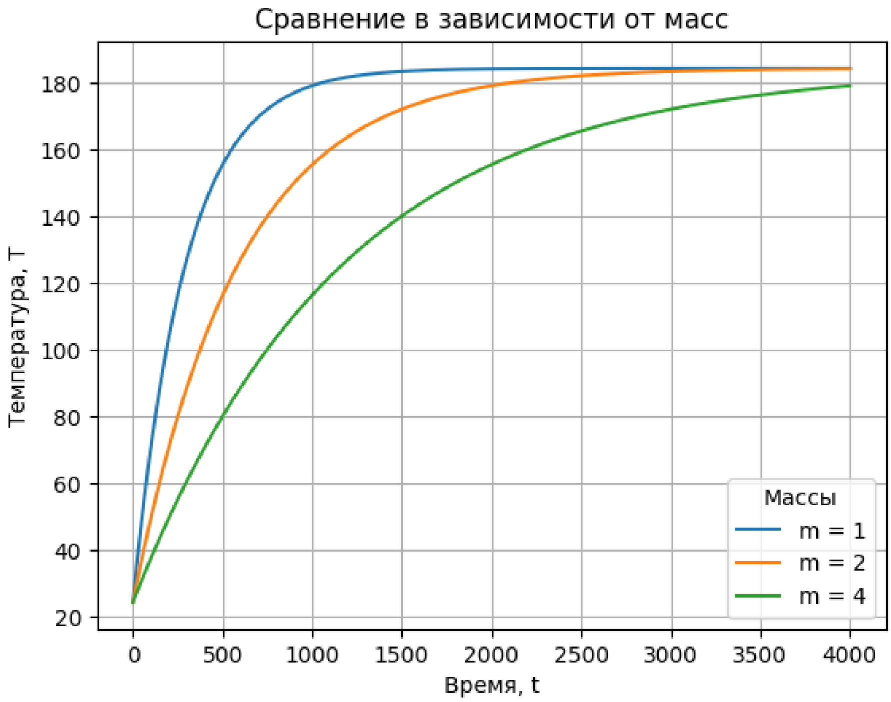

Рис. 3: Влияние массы на модель

Из этого графика можно сделать вывод, что масса нагревателя не влияет на максимальную температуру, но влияет на скорость, с которой она достигается.

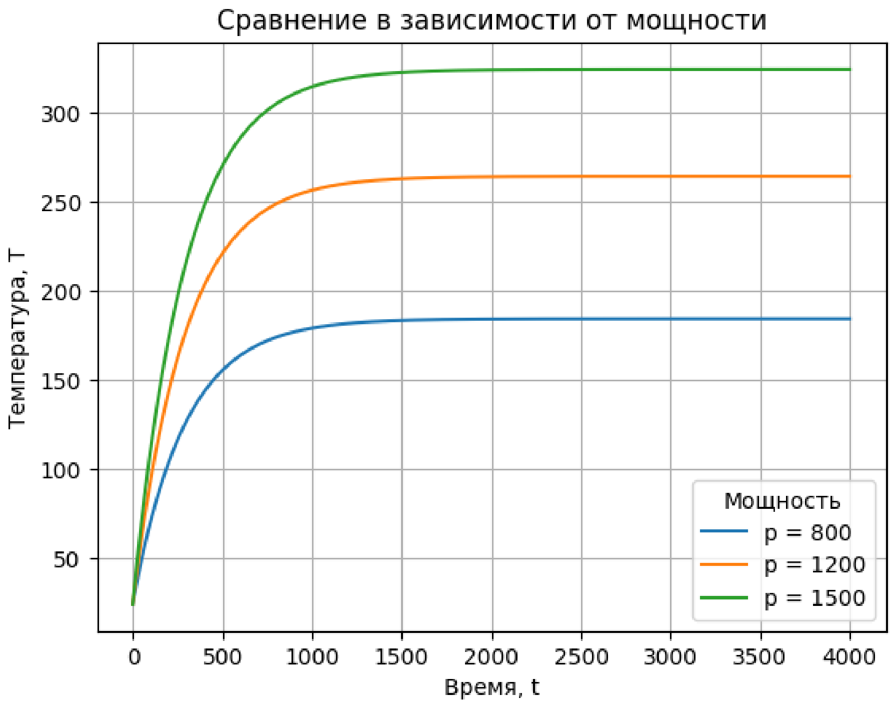

Рис. 4: Влияние мощности на модель

Наблюдение показывает, что чем больше мощность тока, тем выше температура, которую нагреватель может достичь. Это логично, поскольку большая мощность обеспечивает больше энергии для нагрева.

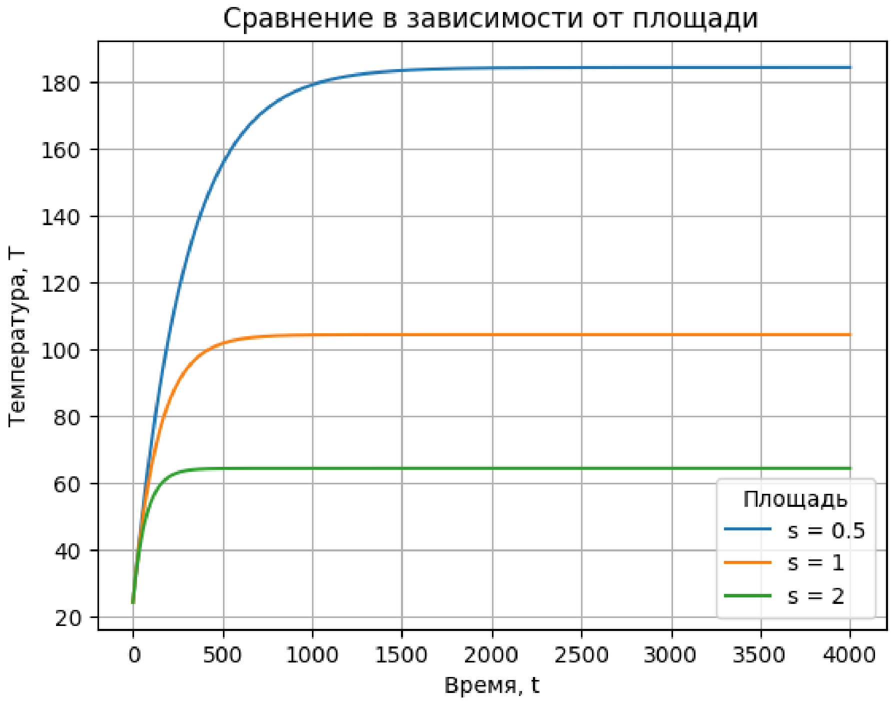

Рис. 5: Влияние площади на модель

Отсюда видно, что площадь поверхности нагревателя влияет обратно пропорционально на максимальную температуру. Это может быть связано с тем, что более большая поверхность может эффективнее отводить тепло, что может снижать максимально достижимую температуру.

8. Заключение

В результате проведенной лабораторной работы были построены и проанализированы математические модели электрического нагревателя как с терморегулятором, так и без него. Полученные результаты позволили изучить динамику изменения температуры нагревателя в зависимости от различных параметров.