МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Депортамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №1 по дисциплине

«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп(1)

Кикоть М.Е. ______________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 25 » мая 2024 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1. Введение

Электрические нагреватели широко применяются в различных областях, начиная от промышленности и заканчивая бытовыми устройствами. Создание математической модели электрического нагревателя играет важную роль в оптимизации процессов нагрева, повышении эффективности и безопасности его работы. Математическая модель позволяет предсказывать тепловые характеристики нагревателя в зависимости от различных параметров, таких как мощность тока, материал нагревательного элемента, его площадь и так далее.

Применение математической модели электрического нагревателя может быть полезным в различных областях, включая промышленное производство, медицину, сельское хозяйство и научные исследования. Например, она может помочь оптимизировать процессы термической обработки материалов, контролировать температурные режимы в медицинских устройствах или разрабатывать новые методы обогрева в сельском хозяйстве.

Важность разработки математической модели без терморегулятора заключается в возможности понимания динамики нагрева и охлаждения системы при изменении различных параметров. Это позволит нам определить оптимальные режимы работы нагревателя для конкретных задач.

Создание математической модели электрического нагревателя с терморегулятором позволит нам более точно контролировать температурный режим работы устройства. Это крайне важно для предотвращения перегрева или недостаточного нагрева системы, что может привести к повреждению оборудования или снижению эффективности работы.

Целью этой лабораторной работы является построение и анализ математических моделей электрического нагревателя без терморегулятора и с ним. С помощью построенной модели мы хотим изучить, как изменяется температура нагревателя с течением времени в зависимости от разных параметров.

2. Упрощения математической модели

В рамках данного исследования мы рассматриваем электрический нагреватель как однородное тело, состоящее полностью из одного материала. Это предположение позволяет упростить модель и сосредоточиться на основных процессах нагрева.

Мы также предполагаем, что температура внешней среды остается постоянной, то есть при повышении температуры нагревателя не происходит изменения температуры окружающей среды. Это условие позволяет сосредоточиться на внутренних тепловых процессах внутри нагревателя без учета внешних факторов.

3. Построение модели

Для того чтобы понять, как меняется температура нагревателя со временем, мы должны разобраться, что именно влияет на этот процесс и какие законы описывают изменение температуры.

В процессе взаимодействия частей замкнутой теплоизолированной системы между ними устанавливается состояние теплового равновесия.

Следствием закона сохранения энергии для замкнутой теплоизолированной системы служит уравнение теплового баланса:

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \cdots + \Delta Q_n. \tag{1}$$

Рассмотрим процессы, которые участвуют при использовании электрического нагревателя и его нагревании в уравнении теплового баланса.

1. В процессе нагревания тела происходит изменение внутренней энергии ΔQ_1 за счёт изменения температуры тела:

$$\Delta Q = mc\Delta T, \tag{2}$$

   где

   - m [кг] – масса тела,
   - $c \left[\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right]$ – удельная теплоемкость тела,
   - ΔT [К] – изменение температуры тела.

2. При использовании электрического нагревателя, электрический ток протекает через специально созданный проводник, из-за чего происходит выделение теплоты. Оно измеряется по формуле:

$$\Delta Q_1 = P\Delta t, \tag{3}$$

   где

- P [Вт] – мощность тока,
- Δt [с] – прошедшее время.

3. В процессе нагревания тела также происходит и его охлаждение за счёт температуры окружающей среды. Этот процесс может быть записан с помощью закона теплоотдачи Ньютона-Рихмана:

$$\Delta Q_2 = -kS\left(T - T_{out}\right)\Delta t, \tag{4}$$

где

- $k\left[\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}\right]$ – коэффициент теплоотдачи,
- $S\left[\text{м}^2\right]$ – площадь поверхности тела,
- T [К] – температура нагреваемого тела,
- T_{out} [К] – температура окружающей среды,
- Δt [с] – прошедшее время.

4. Все тела, температура которых выше абсолютного нуля, испускают тепловое излучение, расчитываемое по формуле:

$$\Delta Q_3 = -\sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)\Delta t, \tag{5}$$

где

- ΔQ – количество выделившейся теплоты тела,
- $S\left[\text{м}^2\right]$ – плозадь поверхности,
- T [К] – температура нагревателя в кельвинах,
- T_0 [К] – температура окружающей среды в кельвинах,
- σ – постоянная Стефана-Больцмана, которая равна $5.67\cdot 10^-8\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$,
- Δt – прошедшее время.

Таким образом, в заданных ранее условиях рассмотрения модели, мы получаем следующее уравнение теплового баланса для электрического нагревателя:

$$mc\Delta T = P\Delta t - kS\left(T - T_{out}\right)\Delta t - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)\Delta t. \tag{6}$$

Наша поставленная задача состоит в том, чтобы построить функцию изменения температуры нагревателя в зависимости от времени. Потому выразим из полученной формуле (6) дифференциальное уравнение относительно $\dfrac{dT}{dt}$. Для этого поделим уравнение (6) на $mc\Delta t$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc},$$

и устремим $\Delta t \to 0$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}.$$

Таким образом, мы построили дифференциальное уравнение температуры T электрического нагревателя в зависимости от времени t. Решая его можно найти искомую функцию $T(t)$.

Добавив начальные условия, мы получаем математическую модель электрического нагревателя без терморегулятора:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}, \\ T(0) = T_{out}. \end{cases}$$

Для построения математической модели с терморегулятором, необходимо ввести функцию $H(T)$, которая управляет температурой нагревателя, прерывая поступления тока при превышении верхней границы T_{up} и возобновляя её при опускании температуры ниже нижней границы T_{down}.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{H(T)\cdot P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}, \\ T(0) = T_{out}, \end{cases} \qquad H(T) = \begin{cases} 0, & T > T_{up}, \\ 1, & T < T_{down}. \end{cases}$$

Таким образом, мы построили математические модели, описывающие изменение температуры электронагревателя с учетом и без учета работы терморегулятора в зависимости от времени.

4. Математические модели электрического нагревателя

Математическая модель без терморегулятора

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}, \\ T(0) = T_a. \end{cases}$$

Математическая модель с терморегулятором

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{H(T) \cdot P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc}, \\ T(0) = T_a, \end{cases}$$

где $H(T) = \begin{cases} 0, & T > T_{up}, \\ 1, & T < T_{down}. \end{cases}$

Обозначения

- T [К] – температура нагревателя в Кельвинах
- t [с] – время в секундах
- P [Вт] – мощность тока
- S $\left[\text{м}^2\right]$ – площадь поверхности нагревателя
- T_0 [К] – температура внешней среды
- c $\left[\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right]$ – удельная теплоемкость материала

- $m\,[\text{кг}]$ – масса тела
- $k\left[\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}\right]$ – коэффициент теплопередачи
- $\sigma\left[\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}\right]$ – постоянная Стефана-Больцмана

Построенные модели представляют из себя задачу Коши для обыкновенного уравнения 1-го порядка, нелинейное, разрешенное относительно производной.

5. Анализ модели

5.1. Максимальная температура

В начальный момент времени разогрева нагревателя $T = T_{out}$, отсюда:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P}{cm} > 0.$$

Это обозначает, что температура будет увеличиваться. Поскольку производная $\frac{dT}{dt}$ представляет из себя непрерывную функцию, то изменение температуры будет плавным. Со временем отрицательные компоненты будут возрастать. что приведёт к замедлению роста функции $T(t)$. В конечном итоге мощность P и отрицательные компоненты сбалансируют друг друга, достигнув равновесия:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right)}{mc} = 0.$$

После чего температура больше не будет увеличиваться, достигнув максимального значения.

Значение максимальной температуры можно узнать, решив уравнение:

$$P - kS\left(T - T_{out}\right) - \sigma S\left(T^4 - T_{out}^4\right) = 0$$

Соберём общие множители у степеней T:

$$T^4 + \frac{k}{\sigma}T - \left(T_0^4 + \frac{kT_0 + \frac{P}{S}}{\sigma}\right) = 0.$$

Это уравнение четвёртой степени, а значит оно имеет ровно 4 корня. Убедимся, что существует лишь одно допустимое решение этого уравнения, которое и будет является максимальной температурой. Для того, чтоб решение T^* являлось максимальным значением для задачи, необходимо:

$$T > 0, \tag{7}$$

$$T \in R. \tag{8}$$

Для удобства переобзначим:

$$a = \frac{k}{\sigma} > 0,$$

$$b = \left(T_0^4 + \frac{kT_0 + \frac{P}{S}}{\sigma} \right),$$

$$T^4 + aT - b = 0.$$

6. Реализация модели

Математическая модель представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка, разрешенное относительно производной. Для решения можно использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка, который имеет погрешность порядка $O(h^4)$, где h – шаг метода.

Построим зависимость температуры от времени $T(t)$ при следующих выбранных параметрах:

- $P = 800$Вт;
- $S = 0.5$м^2;
- $T_0 = 298$К;
- $c = 1460\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$;
- $m = 1$кг;
- Шаг, с которым мы будем замерять время $h = 0.1$;

6.1. Нагреватель без терморегулятора

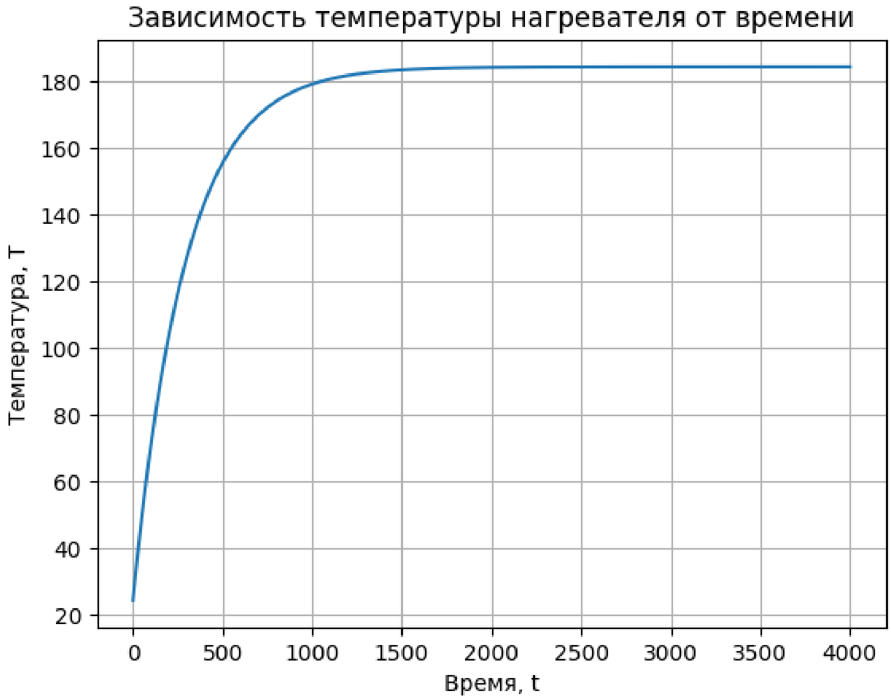

Рис. 1: График нагревания без терморегулятора

Листинг 1: Вычисление значений методом Рунге-Кутта без терморегулятора

```
def findFunction(x, y0, h):
    y = [y0]
    for i in range(len(x) - 1):
        k0 = f(x[i], y[i])
        k1 = f(x[i] + h/2, y[i] + h/2*k0)
        k2 = f(x[i] + h/2, y[i] + h/2*k1)
        k3 = f(x[i] + h, y[i] + h*k2)
        y.append(y[i] + h/6 * (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3))
    return y
```

6.2. Нагреватель с терморегулятором

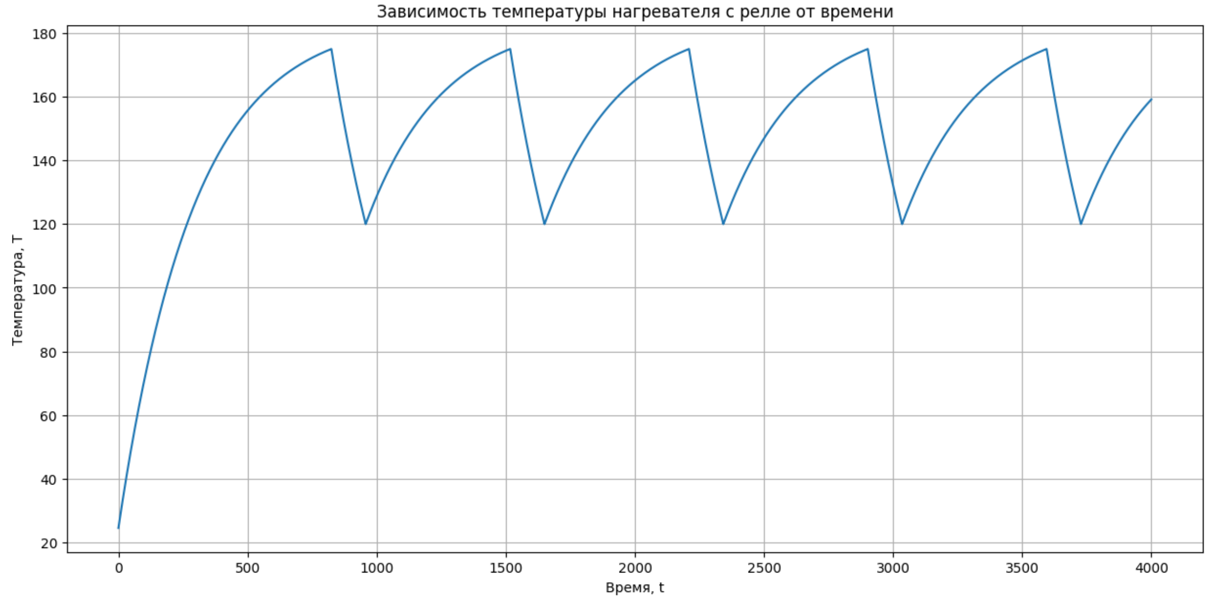

Рис. 2: График нагревания с терморегулятором

Листинг 2: Вычисление значений методом Рунге-Кутта с терморегулятором

```
def findFunctionWithRelle(x, y0, h, down_bound, up_bound):
    y = [y0]
    a = 1
    for i in range(len(x) - 1):
        if y[i] > up_bound + K_CONST:
            a = 0
        elif y[i] < down_bound + K_CONST and a == 0:
            a = 1
        k0 = f(x[i], y[i], a)
        k1 = f(x[i] + h/2, y[i] + h/2*k0, a)
        k2 = f(x[i] + h/2, y[i] + h/2*k1, a)
        k3 = f(x[i] + h, y[i] + h*k2, a)
        y.append(y[i] + h/6 * (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3))
    return y
```

7. Численные эксперименты

Проведём серию численных экспериментов, варьируя каждый параметр по отдельности, чтобы выяснить, какие влияние они оказывают на математическую модель.

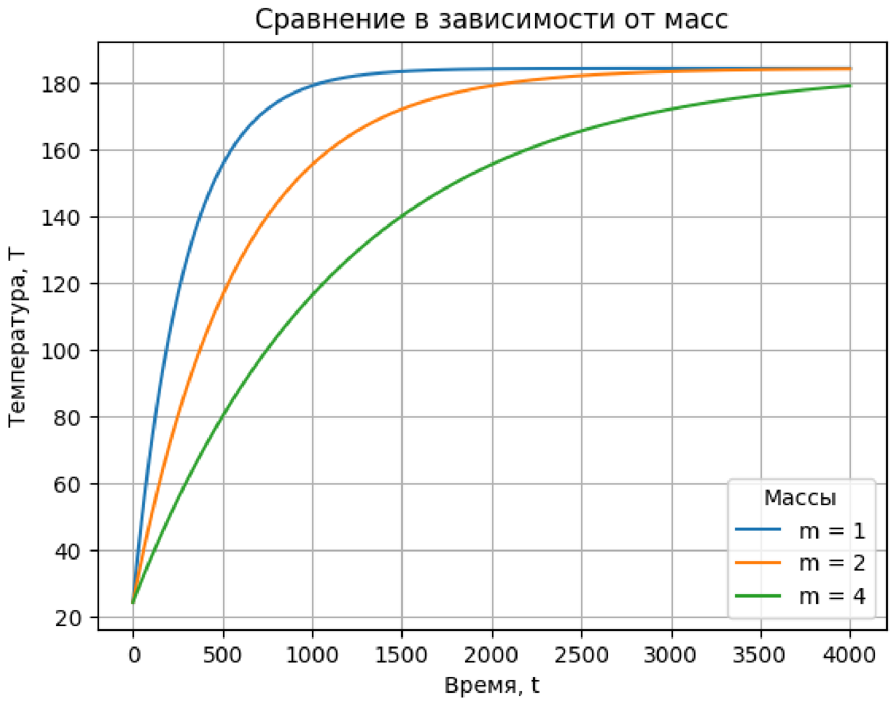

Рис. 3: Влияние массы на модель

Из этого графика можно сделать вывод, что масса нагревателя не влияет на максимальную температуру, но влияет на скорость, с которой она достигается.

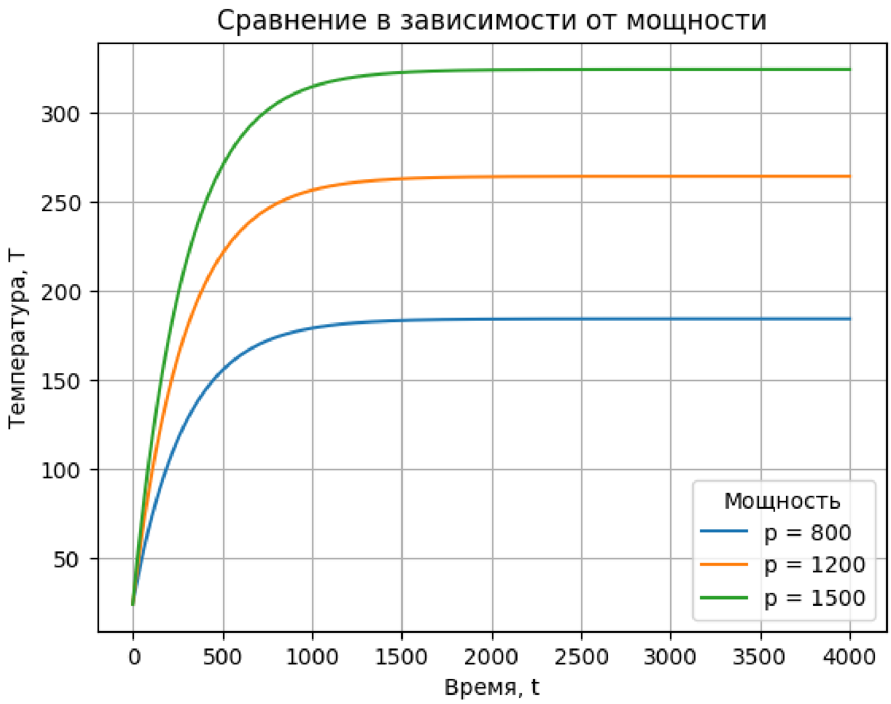

Рис. 4: Влияние мощности на модель

Наблюдение показывает, что чем больше мощность тока, тем выше температура, которую нагреватель может достичь. Это логично, поскольку большая мощность обеспечивает больше энергии для нагрева.

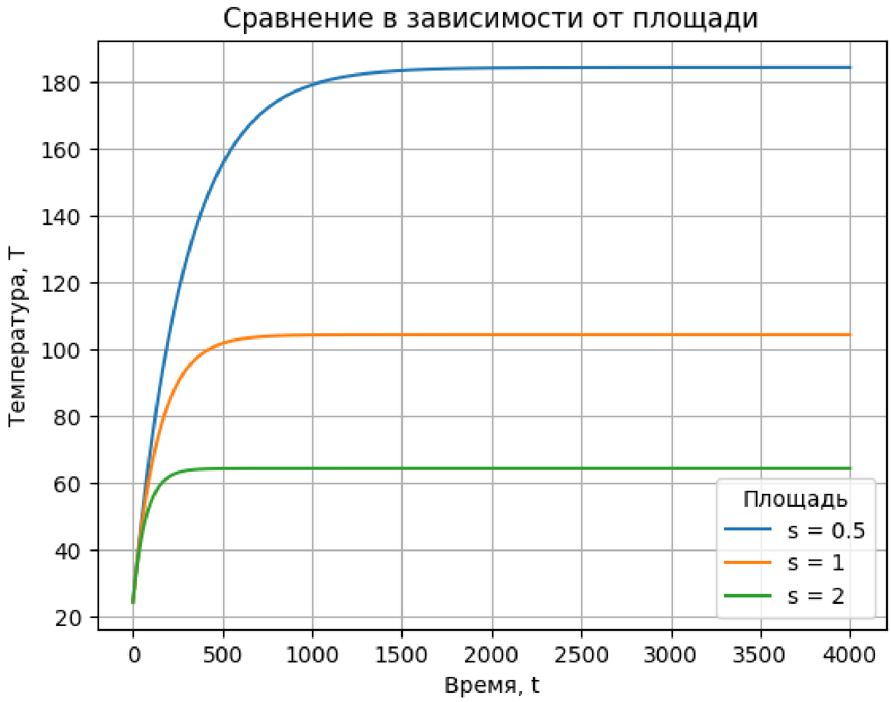

Рис. 5: Влияние площади на модель

Отсюда видно, что площадь поверхности нагревателя влияет обратно пропорционально на максимальную температуру. Это может быть связано с тем, что более большая поверхность может эффективнее отводить тепло, что может снижать максимально достижимую температуру.

8. Заключение

В результате проведенной лабораторной работы были построены и проанализированы математические модели электрического нагревателя как с терморегулятором, так и без него. Полученные результаты позволили изучить динамику изменения температуры нагревателя в зависимости от различных параметров.