МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Депортамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине

«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп(1)

Кикоть М.Е. ____________
(Ф.И.О.) (подпись)

« 27 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1. Введение

До сих пор мы имели дело с инерциальными системами отсчета, то есть системами, в которых выполняются законы Ньютона. Системы отсчета, которые движутся относительно инерциальных систем с ускорением, называются неинерциальны
В них законы Ньютона в обычном виде применять нельзя, требуется введение специальных поправок — сил инерции.

Движение на вращающемся диске является примером неинерциальной системы отсчета. На вращающемся диске тело, двигаясь относительно диска, подвергается центробежным силам. Центробежные силы возникают из-за ускорения тела относительно центра вращения. Эти силы изменяют траекторию движения тела и делают движение на вращающемся диске отличным от равномерного прямолинейного движения.

Понимание этого явления позволяет углубить знания о физике и механике, а также применить их в различных практических ситуациях.

2. Построение модели

Перед началом построения сделаем некоторые предположения

- рассматриваем движение тела относительно вращающейся системы отчета с системой координат (x, y),
- вращение происходит с постоянной угловой скоростью w,
- тело является материальной точкой с массой m,
- не рассматриваем силу трения.

Поскольку система отсчёта неинерцианальна, то на тела действует сила F_u, равная

$$\vec{F_u} = -m\frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{1}$$

где m – масса, $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – вектор скорости тела.

При движении тела относительно вращающейся системы известно, что появляется сила Кориолиса, вычисляемая по формуле:

$$\bar{F_k} = 2m \cdot [\vec{v}, \vec{w}]. \tag{2}$$

Приравнивая между собой силы получается:

$$-m\frac{d\vec{v}}{dt} = 2m \cdot [\vec{v}, \vec{w}]. \tag{3}$$

Сократив уравнение на m и рассматривая изменение положения по каждой компоненте, получаем систему линейных дифферециальных уравнений II порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2w\dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2w\dfrac{dy}{dt}. \end{cases} \tag{4}$$

Добавим начальные условия и получим математическую модель, описывающую в неинерциальной системе отсчета.

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2w\dfrac{dx}{dt}, \\
\dfrac{d^2y}{dt^2} = -2w\dfrac{dy}{dt}, \\
x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \\
y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.
\end{cases} \tag{5}
$$

3. Анализ модели

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2w\dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2w\dfrac{dy}{dt}, \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

Разделим первую строку на вторую и получим:

$$\frac{d^2x}{d^2y} = -\frac{dy}{dx} \to d^2x \cdot dx + d^2y \cdot dy = 0. \tag{6}$$

Это уравнение можно проинтегрировать:

$$\int dx \cdot d^2x + \int dy \cdot d^2y = 0 \to dx^2 + dy^2 = C = x_0'^2 + y_0'^2. \tag{7}$$

Таким образом получили в левой части сумму проекций кинетической инергии E_k и что она остается постоянной, следуя из правой. Так и должно быть, так как наша система замкнутая, потому и закон сохранения энергии должен действовать.

Отсюда же можно сделать вывод, что траектории движения будут принимать вид окружности, так как уравнение (7) выглядит как уравнение окружности. Из уравнения (7) также можно сделать вывод, чем чем больше начальные значения скорости x'_0, y'_0, тем больше радиус у полученной окружности.

По полученному закону можно вывести соотношение, по которому будем проверять точность численного решения.

$$dx^2 + dy^2 - {x'_0}^2 - {y'_0}^2 = 0. \tag{8}$$

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Метод для вычисления

Для вычисления решения был использован метод Рунге-Кутта. Он позволяет вычислять решения с погрешностью $O(h^4)$, где h – заданый шаг.

Листинг 1: Код метода Рунге-Кутта

```
def right(t, x):
     return np.array([
        x[2],
        x[3],
        2 * w * x[3],
        -2 * w * x[2]
     ])

def solve_odu2(f, y0, a, b, h):
    num = int(np.ceil((b - a) / h))
    t = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
    x = [y0] * num

    for i in range(num - 1):
        k0 = f(t[i], x[i])
        k1 = f(t[i] + h/2, x[i] + h/2*k0)
        k2 = f(t[i] + h/2, x[i] + h/2*k1)
        k3 = f(t[i] + h,x[i] + h*k2)
        x[i + 1] = x[i] + h/6 * (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)

    return t, np.array(x)
```

4.2. Результаты

Рассмотрим траектории, начинающиеся из точки $(8, 4)$ с разными имеющимися начальными скоростями.

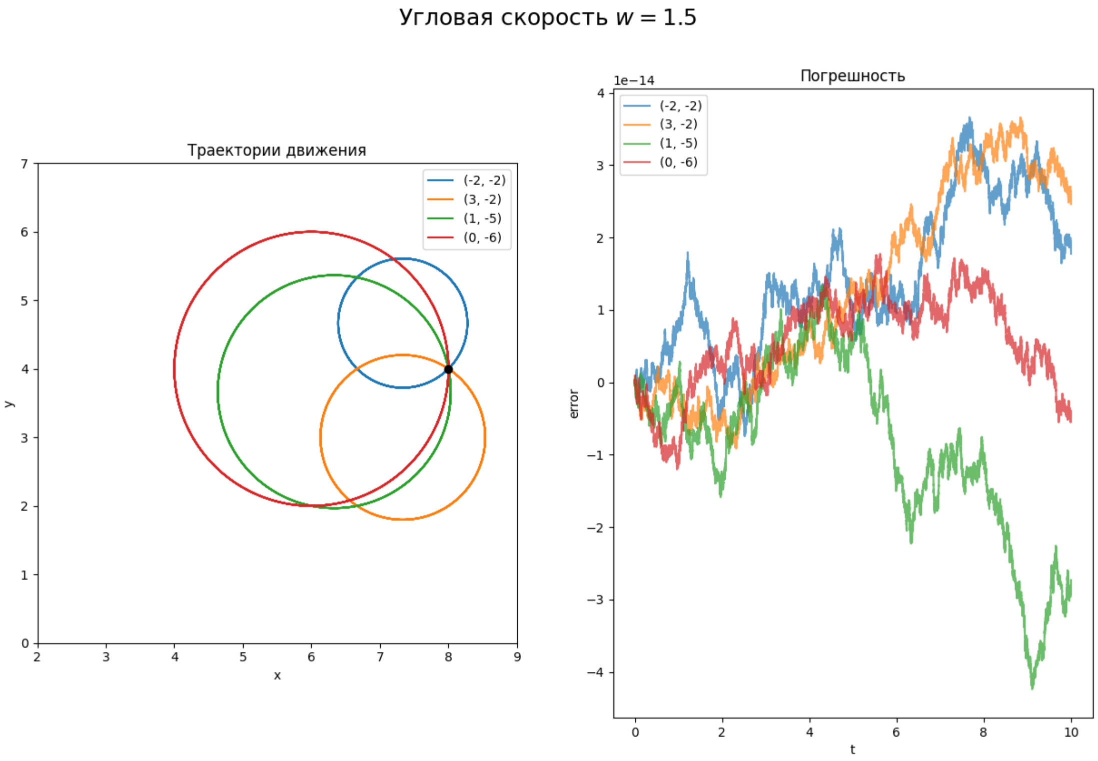

Рис. 1: Рисунок при угловой скорости $w = 1.5$

На численном эксперименте подтвердили гипотезу о том, что траектории движения принимают вид окружности. Как и то, что чем больше начальные скорости x'_0, y'_0 по модулю, тем больше радиус окружности.

Закон сохранения энергии не выполняется точно, но это можно связать с погрешностью численного метода. Так как при уменьшении шага h уменьшается и погрешность. В данном примере шаг $h = 10^{-4}$, и полученная погрешность при таком шаге равна $O(10^{-13})$.

Рассмотрим влияние угловой скорости w на траектории движения. В прошлом примере $w = 1.5$, теперь же уменьшим ее до $w = \dfrac{\pi}{6}$ и рассмотрим траектории для тех же начальных точек.

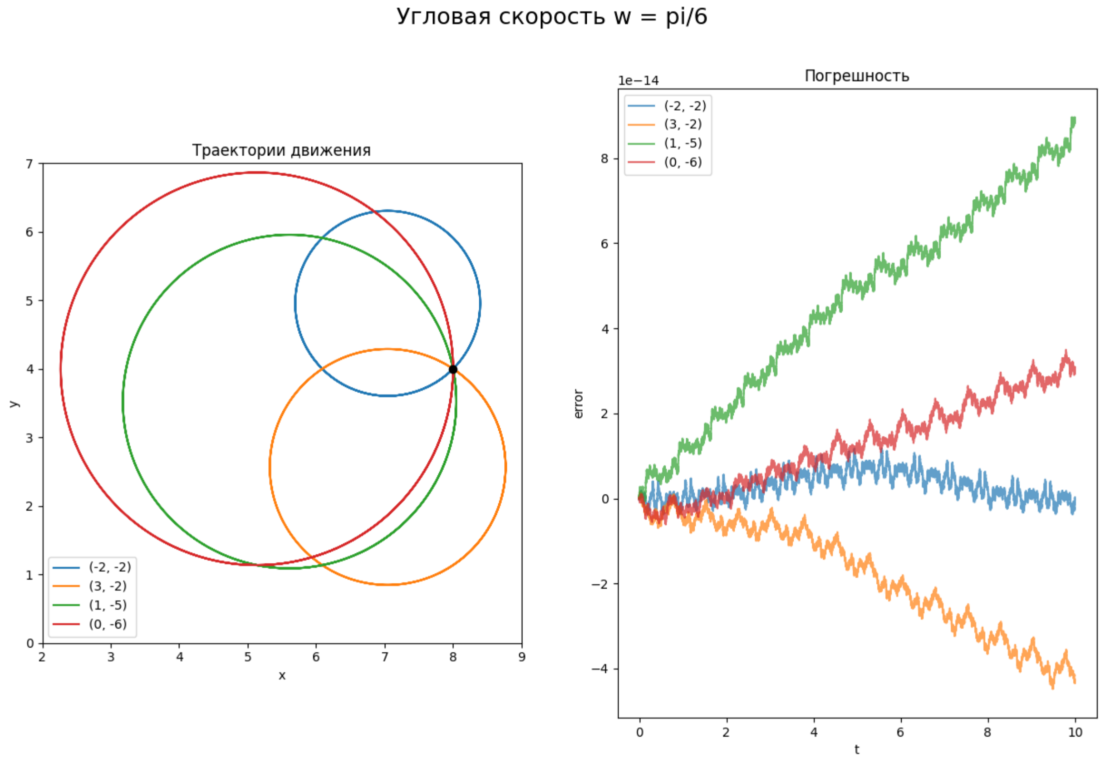

Рис. 2: Рисунок при угловой скорости $w = \frac{\pi}{6}$

Как видим, при уменьшении угловой скорости w радиусы увеличиваются.

5. Заключение

Была построена математическая модель во вращающейся система отсчета. Она представляла из себя систему двух дифференциальных уравнения II порядка. При анализе было выявлено, что траектории движения выглядят как окружности. И чем больше по модулю начальные скорости тела, тем больше радиус окружности движения. Были построены численные решения из одной точки с разными начальными скоростями, чтоб подтвердить эту гипотезу, а также увидеть зависимость радиуса траекторий от угловой скорости вращения w: чем меньше w, тем больше радиус окружности.