



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №3 по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп(1)

Кикоть М.Е.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 14 » июня 20 24 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1	Введение	3
2	Построение модели	4
2.1	Нелинейная математическая модель без учёта внешних сил	4
2.2	Линейная математическая модель без учёта внешних сил	5
2.3	Математическая модель с учётом трения	6
2.4	Математическая модель с вынужденными колебаниями	6
3	Анализ модели	7
3.1	Анализ модели без учёта внешних сил	7
3.2	Анализ модели с учётом трения	7
3.3	Анализ модели с вынужденными колебаниями	8
4	Численные эксперименты	9
4.1	Метод решения	9
4.2	Программа	9
4.3	Результаты	9
4.3.1	Модель без учёта внешних сил	9
4.3.2	Модель с учётом трения	11
4.3.3	Модель с учётом гармонических колебаний	12
4.3.4	Модель с учётом гармонических колебаний и трения	13
4.4	Резонанс	16
5	Заключение	18

1. Введение

В нашем мире происходит множество явлений, одно из которых — колебания математического маятника.

Математический маятник служит простейшей моделью физического тела, совершающего колебания, не учитывая распределение массы. Однако реальный физический маятник при малых амплитудах колеблется так же, как и математический.

Изучение различных моделей маятника позволяет лучше понять особенности колебательных систем и их поведение в различных условиях, что имеет важное значение для практических применений и теоретических исследований в области физики и механики.

Модель математического маятника будет реализована в нескольких вариантах:

- Без учёта трения и вынужденных колебаний;
- Только с учётом трения;
- Только с учётом вынужденных колебаний;
- С учётом трения и вынужденных колебаний;

А также, для воспроизведения математической модели явления резонанса, проведём серию экспериментов для выявления закономерностей.

2. Построение модели

Математический маятник представляет собой идеальную механическую систему, где на одном конце невесомой и нерастягивающейся нити находится материальная точка массой m , а другой конец нити (стержня) обычно неподвижен.

Математический маятник сможет колебаться только в одной плоскости вдоль выделенного горизонтального направления. При колебаниях в одной плоскости маятник движется по дуге окружности радиуса l . Тогда движение маятника можно описать через угол отклонения от вертикальной оси α .

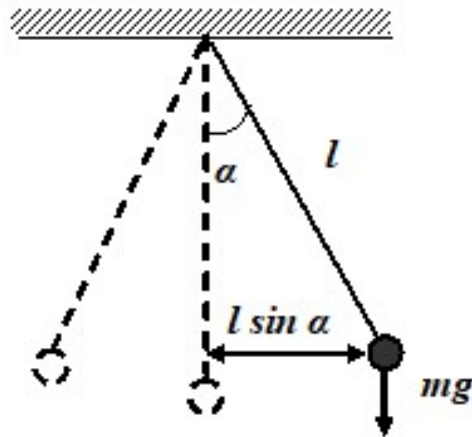


Рис. 1: Рисунок математического маятника

2.1. Нелинейная математическая модель без учёта внешних сил

Воспользуемся уравнением моментов для материальной точки:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M, \quad (1)$$

где α – угол наклона маятника в настоящий момент, J – момент инерции относительно оси:

$$J = m \cdot l^2. \quad (2)$$

Если тело не находится в положении равновесия, то на него действует момент силы M :

$$M = F \cdot l, \quad (3)$$

где l – длина нити, F – возвращающая сила, проекция силы тяжести на ось движения маятника. То есть момент силы рассчитывается по формуле

$$M = -mg \cdot l \sin \alpha. \quad (4)$$

Подставив формулы (2) и (4) в уравнение моментов (1), получим:

$$m \cdot l^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg \cdot l \sin \alpha \Rightarrow \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0. \quad (5)$$

Получили нелинейное дифференциальное уравнение II порядка, описывающее угол отклонения маятника в зависимости от времени.

Обозначив за $w^2 = \frac{g}{l}$ и добавив начальные условия, получим нелинейную математическую модель без учёта трения и вынужденных колебаний.

$$\begin{cases} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + w^2 \sin \alpha = 0, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha_1. \end{cases} \quad (6)$$

2.2. Линейная математическая модель без учёта внешних сил

Если заранее известно, что угол значения принимает небольшие значения, тогда можно заменить $\sin \alpha \approx \alpha$ и получить линейное дифференциальное уравнение, которое будет иметь небольшую погрешность от решения (6):

$$\begin{cases} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + w^2 \alpha = 0, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha_1. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим модель маятника с оказываемыми на него внешними силами.

2.3. Математическая модель с учётом трения

Одной из внешних сил является трение, из-за которого колебания со временем будут постепенно затухать. Сила трения зависит от скорости $\frac{d\alpha}{dt}$ и от некоторого коэффициента трения $k > 0$. При учёте действия трения на маятник, получаем математическую модель движения маятника с учётом трения.

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} + w^2 \sin \alpha = 0, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha_1. \end{cases} \quad (8)$$

2.4. Математическая модель с вынужденными колебаниями

Также можем рассмотреть внешнее воздействие в виде вынужденных колебаний. Они задаются через амплитуду вынуждающей силы A_f и частоту колебаний w_f :

$$F_o = A_f \cdot \cos(w_f t). \quad (9)$$

Математическая модель движения маятника только при действии вынужденных колебаний выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + w^2 \sin \alpha = A_f \cdot \cos(w_f t), \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha_1. \end{cases} \quad (10)$$

Если рассматривать движения маятника при действии и силы трения, и вынужденных колебаний, то получим:

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} + w^2 \sin \alpha = A_f \cdot \cos(w_f t), \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha_1. \end{cases} \quad (11)$$

3. Анализ модели

Проведём анализ линейной модели математического маятника, так как с помощью неё можно сделать вывод о поведении решений и нелинейных моделей при небольших колебаниях.

3.1. Анализ модели без учёта внешних сил

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + w^2\alpha = 0, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha_1. \end{cases}$$

Для такой системы можно заранее найти аналитическое решение:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(wt) + \frac{\alpha_1}{w} \sin(wt)$$

Однако запись можно упростить. Существуют такой угол β и такая константа ρ , что:

$$\sin \beta = \rho \cdot \alpha_0, \quad \cos \beta = \rho \cdot \frac{\alpha_1}{w},$$

что точное решение можно сложить по формуле синуса суммы в:

$$\alpha(t) = \rho \sin(wt + \beta).$$

То есть, решение модели без учёта внешних сил принимает вид синусоиды.

3.2. Анализ модели с учётом трения

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k \frac{d\alpha}{dt} + w^2\alpha = 0, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha_1. \end{cases}$$

Аналитическое решение для такого дифференциального уравнения:

$$\alpha(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t(\sqrt{k^2-4w^2}+k)} + C_2 e^{\frac{1}{2}t(\sqrt{k^2-4w^2}-k)}$$

Слагаемые представляют из себя показательные функции. Первое слагаемое имеет отрицательную степень $-\frac{1}{2}(\sqrt{k^2-4w^2}+k)$ за счёт знака. Во втором слагаемом степень также меньше нуля $\sqrt{k^2-4w^2}-k < 0$ при любых $k, w > 0$, потому что тоже является убывающей функцией.

Таким образом, так как оба слагаемых представляют из себя показательные функции с отрицательными степенями:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} C_1 e^{-\frac{1}{2}t(\sqrt{k^2-4w^2}+k)} &\rightarrow 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} C_2 e^{\frac{1}{2}t(\sqrt{k^2-4w^2}-k)} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

то и их сумма, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \rightarrow 0$.

То есть со временем из-за силы трения со временем колебания будут затухать и в один момент маятник достигнет покоя.

3.3. Анализ модели с вынужденными колебаниями

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + w^2\alpha = A \cdot \cos(wt), \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha_1. \end{cases} \quad (12)$$

Аналитическое решение: $C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt) + \frac{k \cos(w_f t)}{w^2 - w_f^2}$.

При $w_f \neq w$ все слагаемые – ограниченные сверху и снизу функции, потому и решение $\alpha(t)$ тоже будет ограниченной функцией. Но при $w_f = w$ в знаменателе получается ноль. Потому точное решение, нелинейной модели, скорее всего, при таком параметре w_f будет иметь непредсказуемо поведение.

4. Численные эксперименты

4.1. Метод решения

Модели представляют из себя краевые задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка, потому их решения можно найти численно с помощью метода Рунге-Кутты, который обеспечивает погрешность $O(h^4)$.

4.2. Программа

Листинг 1: Код метода Рунге-Кутты

```
1 def solve_odu2(f, t, u):
2     a = [u0[0]]
3     z = [u0[1]]
4     u = u0
5     for i in range(len(t) - 1):
6         k0 = f(t[i], u)
7         k1 = f(t[i] + h/2, u + h/2*k0)
8         k2 = f(t[i] + h/2, u + h/2*k1)
9         k3 = f(t[i] + h, u + h*k2)
10        u = u + h/6 * (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)
11
12        a.append(u[0])
13        z.append(u[1])
14
15    return a, z
```

4.3. Результаты

4.3.1. Модель без учёта внешних сил

Проанализируем поведение решения точной, нелинейной, модели и приближенной, линейной, модели.

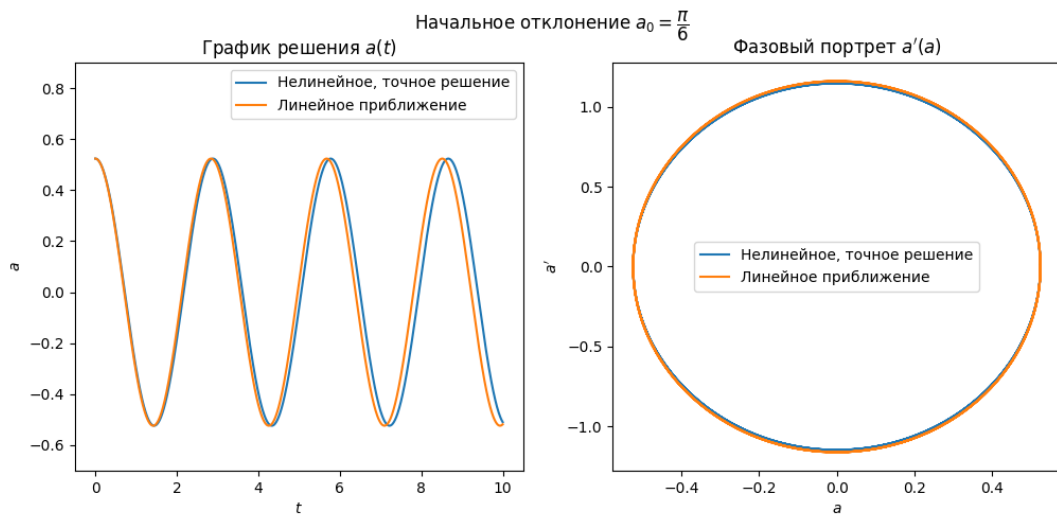


Рис. 2: $\alpha(0) = \frac{\pi}{6}$

При небольших колебаниях в самом начале решение линейной модели почти идеально повторяет поведения точного решения. Но с увеличением времени видно, что нарастает ошибка.

Чем больше угол колебания α , тем быстрее нарастает ошибка. Это отлично можно заметить из следующего графика.

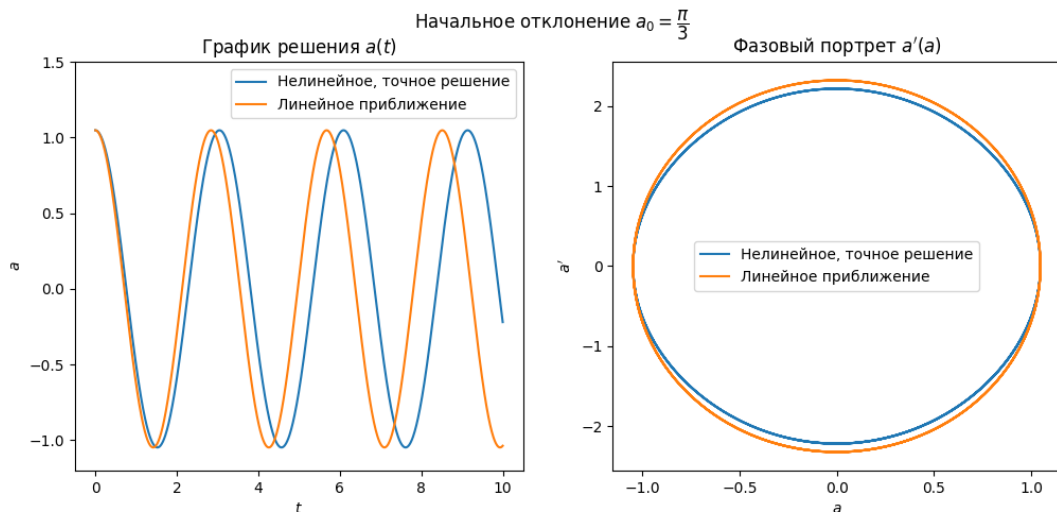


Рис. 3: $\alpha(0) = \frac{\pi}{3}$

В начале приближение почти идеально повторяет поведение точного решения. Но уже на $t = 10$ разница составляет аж половину амплитуды колебаний.

4.3.2. Модель с учётом трения

При учитывании трения решение постепенно сходится к нулю, как и было сказано в анализе модели.

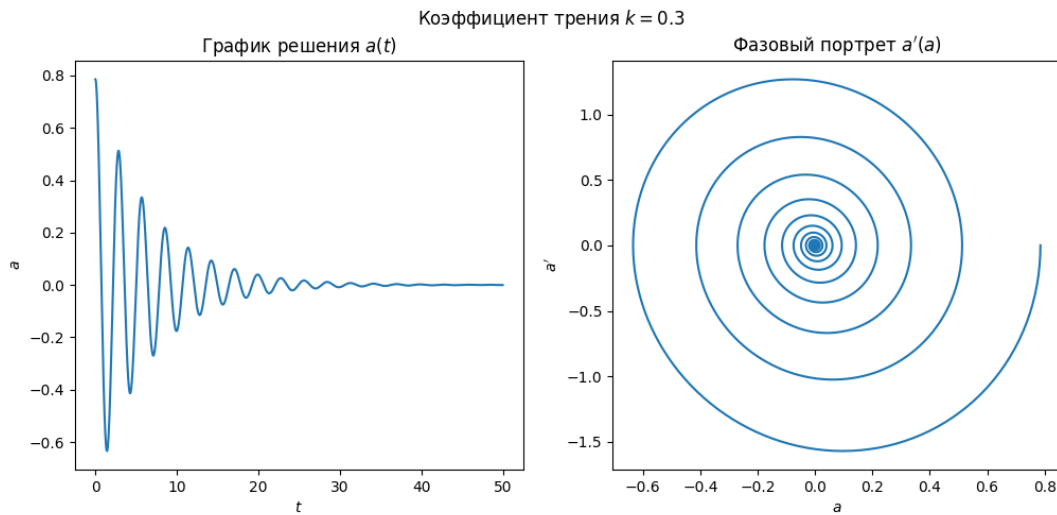


Рис. 4: $k = 0.03$

Чем меньше коэффициент трения, тем медленнее происходит затухание колебаний.

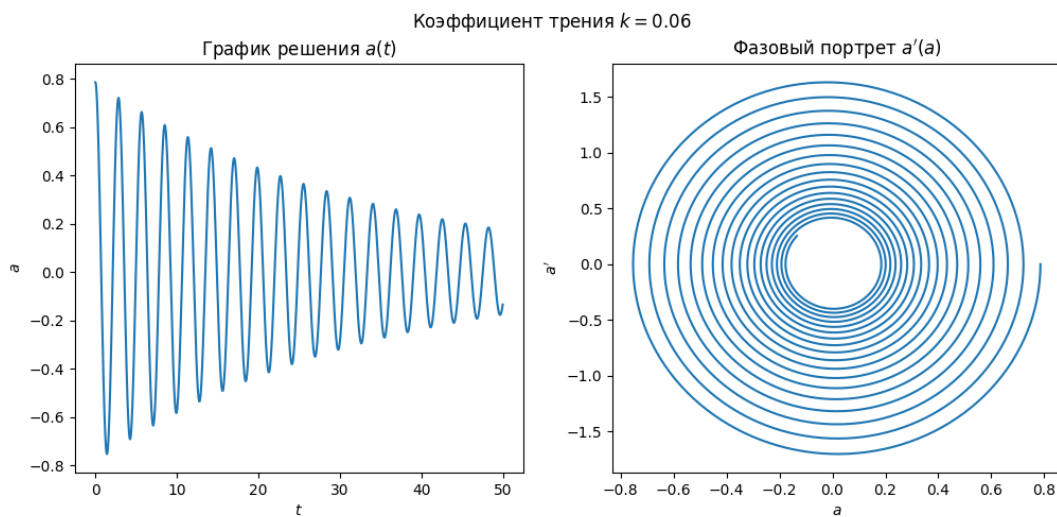


Рис. 5: $k = 0.006$

4.3.3. Модель с учётом гармонических колебаний

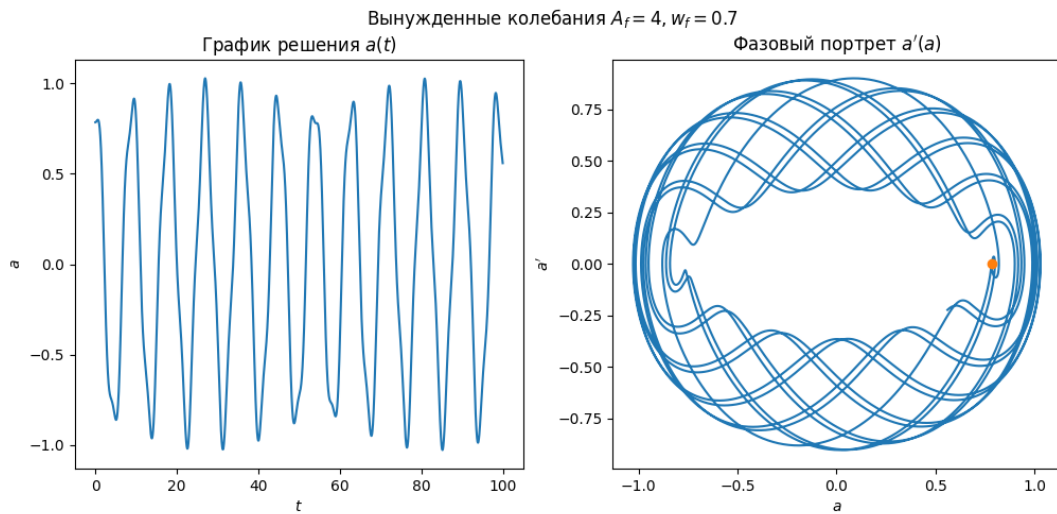


Рис. 6: $A_f = 1, w_f = 0.5$

Отсюда можно заметить, что при вынужденных колебаний происходит смещение угла α . Причем изменение угла не циклично и на фазовом портрете не возвращается в ту же точку.

Но ситуация иная, если частота вынужденных колебаний кратна частоте колебаний маятника. Тогда поведение маятника циклично является циклическим, что можно увидеть по следующим графикам.

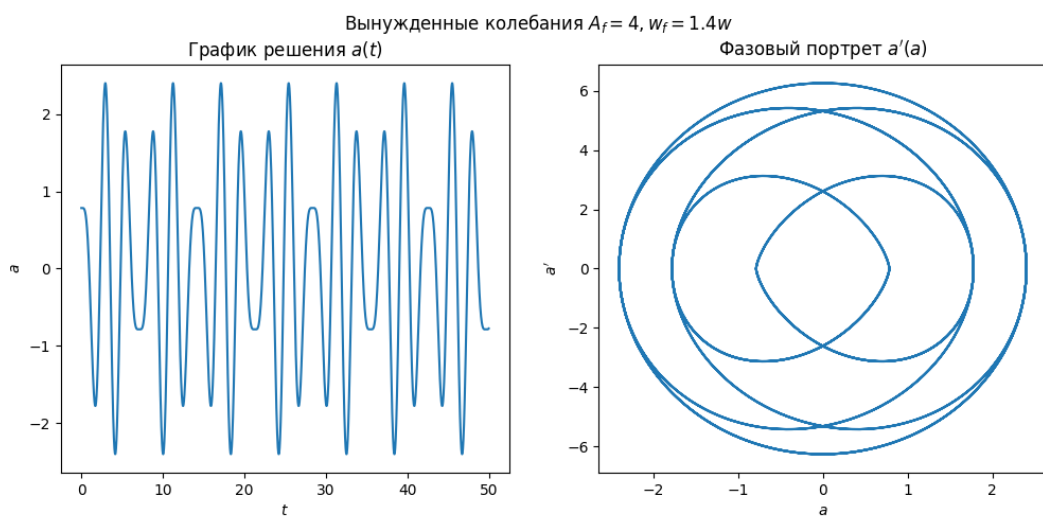
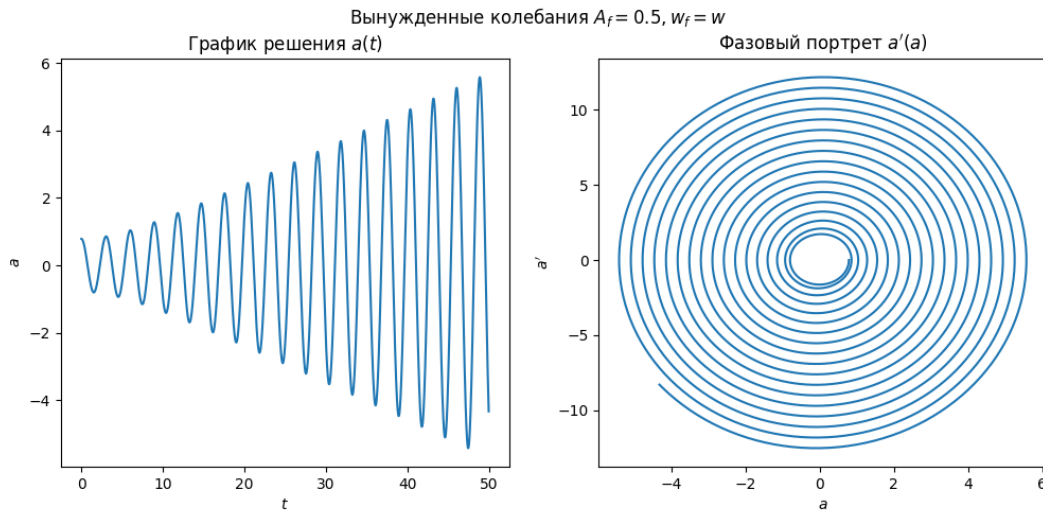


Рис. 7: $A_f = 4, w_f = 1.4w$

При совпадении частот маятника и вынужденных колебаний происходит

постоянное увеличение угла отклонения маятника. Это явление называется резонансом.



4.3.4. Модель с учётом гармонических колебаний и трения

Если на маятник одновременно действует сила трения и вынужденные колебания, то получается интересная картина.

При непропорциональных вынужденных колебаниях, система некоторое время будет нециклично сходиться.

Вынужденные колебания $A_f = 4, w_f = 2.6$

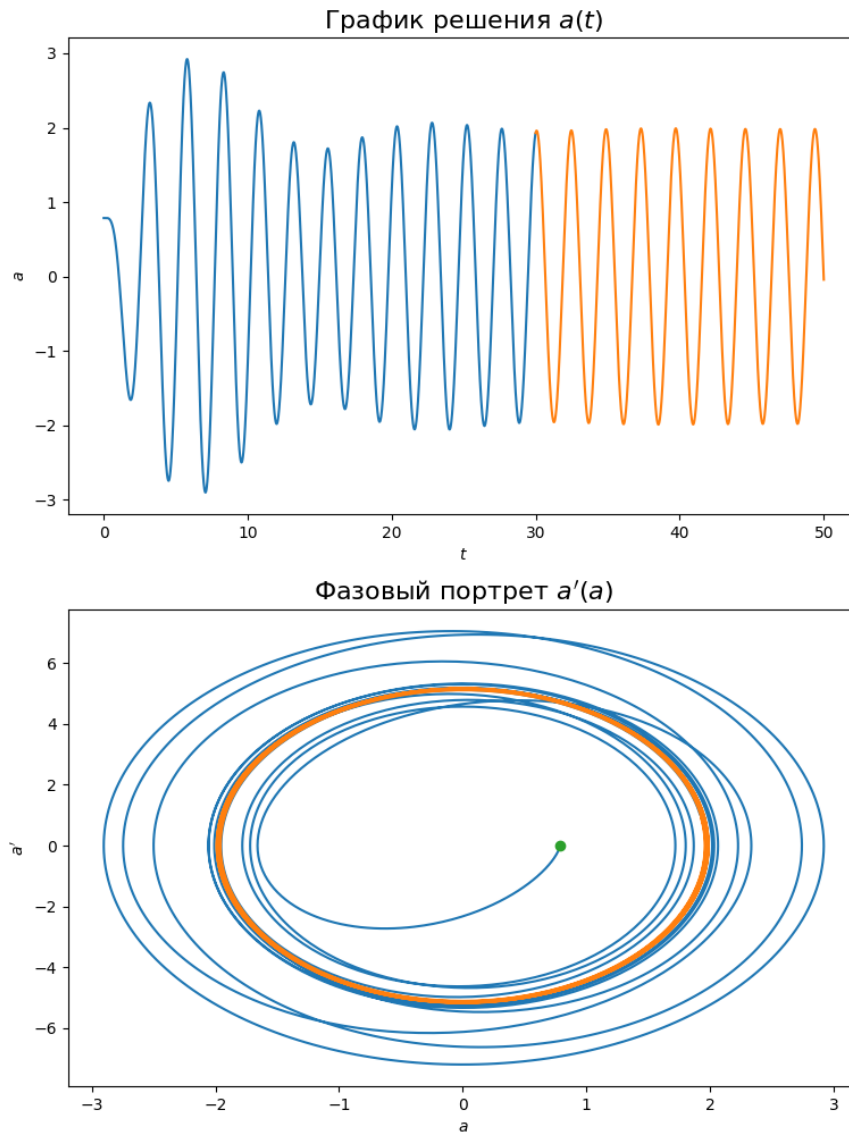


Рис. 9: $w_f = 2.6$

Но после принимает вид почти циклических колебаний некой другой амплитуды и частоты. "Почти циклические" они потому, что всю время амплитуда все же растет, пусть и очень медленно.

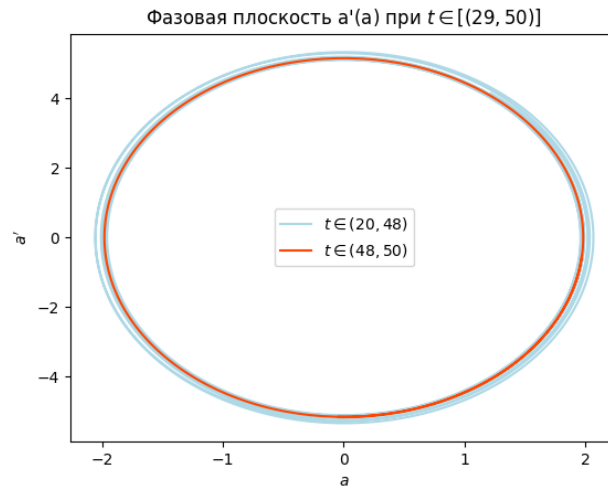


Рис. 10: Фазовая плоскость под конец наблюдения

С трением и вынужденными колебаниями пропорциональной частоты получается, что со временем движение маятника становится цикличным.

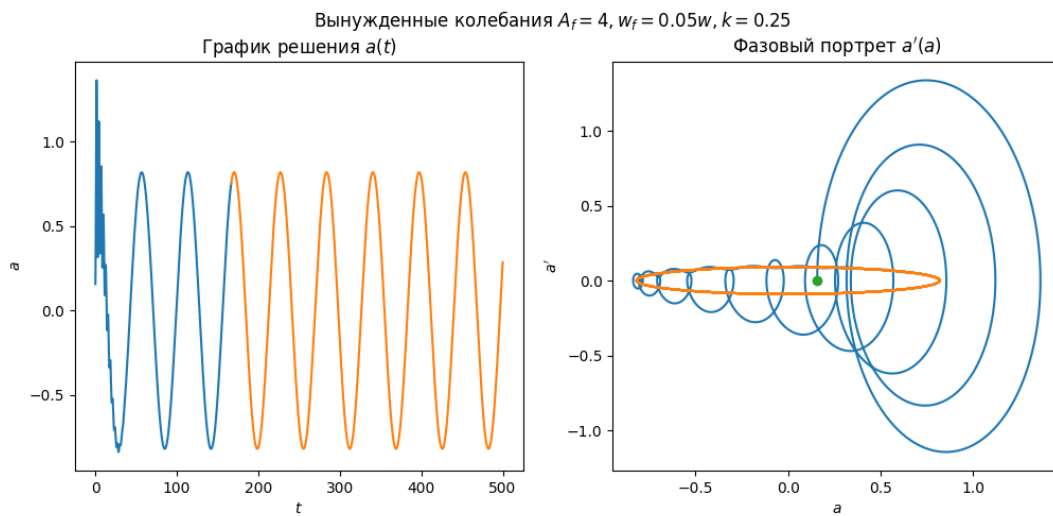


Рис. 11: $w_f = 0.05w$

А вот при совпадении частот амплитуда колебаний растёт.

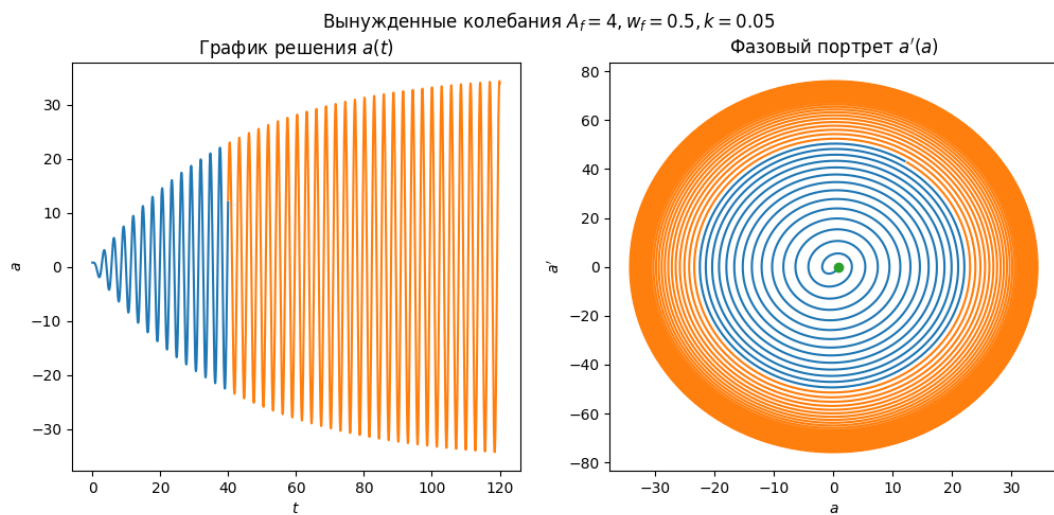


Рис. 12: $w_f = w$

Но спустя некоторое время, рост амплитуды сильно замедляется и становится почти циклическим.

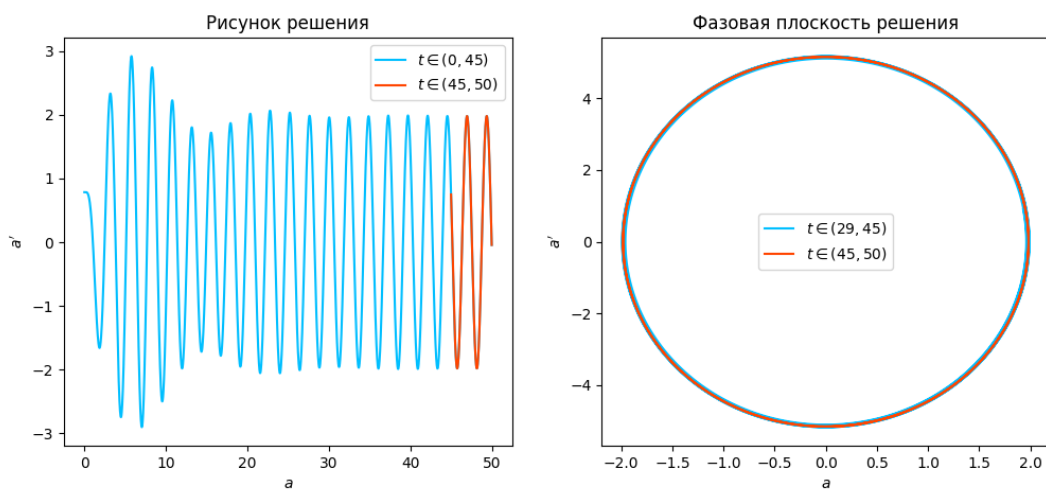


Рис. 13: $w_f = w$

4.4. Резонанс

Как было замечено из рисунков (8) и (11), при совпадении частот возникает такое физическое явление, как резонанс.

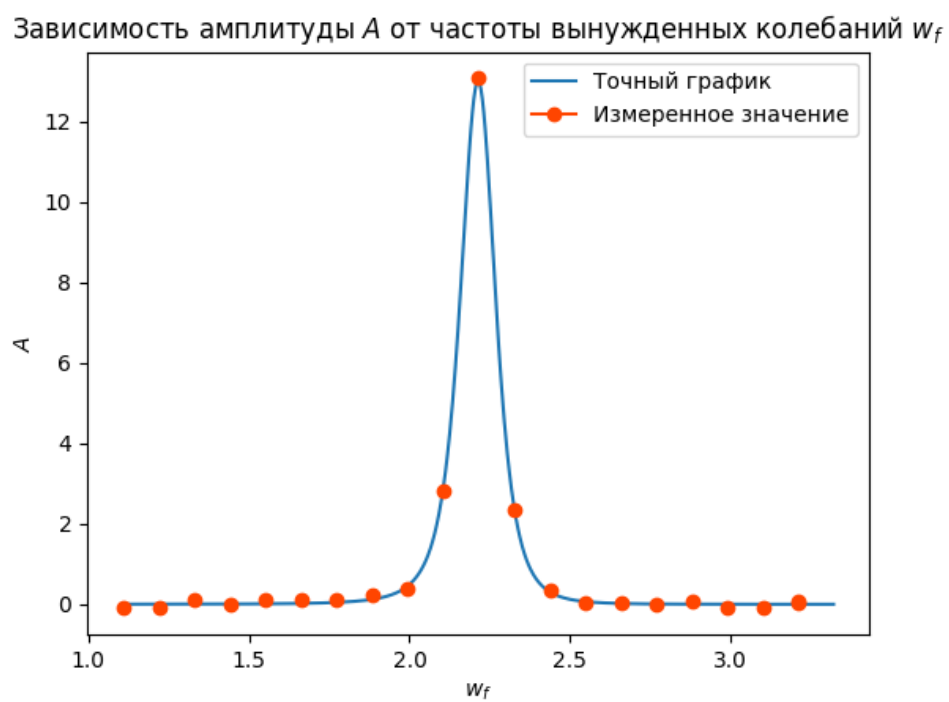


Рис. 14: Рисунок зависимости амплитуды от частоты вынужденных колебаний

5. Заключение

Были построены разные математические модели маятника: с учётом и без учета внешних сил. Модели представляют из себя дифференциальные уравнения второго порядка, потому численное решения можно было найти через метод Рунге-Кутты. В анализе мы через анализ линейных моделей попытались предсказать поведения точных решений и проверили гипотезы на практике.