МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Депортамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №2 по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп(1)
Кикоть М.Е. ____________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

«25» мая 2024 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1. Введение

Математические модели взаимодействия между хищниками и их жертвами представляют собой важный инструмент для изучения динамики экосистем. Модель ”хищник-жертва” является классическим примером таких моделей, которая позволяет описать взаимосвязь между популяциями хищников и жертв в природной среде. В данном отчете мы построим математическую модель этой системы и исследуем ее поведение в различных условиях.

Применение модели ”хищник-жертва” не ограничивается только биологическими науками. Она также находит широкое применение в экологии, управлении ресурсами, а также в экономике и социологии для анализа динамики взаимодействия между различными группами или процессов. Понимание основных принципов этой модели может помочь в прогнозировании изменений в популяциях и разработке стратегий устойчивого управления ресурсами.

Таким образом, изучение модели ”хищник-жертва” имеет не только теоретическое значение, но и практическую важность для понимания сложных систем и развития эффективных стратегий управления ими.

2. Построение модели

Рассматривается ограниченная зона, где обитают два вида животных: травоядные (жертвы) и хищники. Предполагается, что животные не покидают территорию, у травоядных достаточно пищи, а хищники питаются исключительно жертвами.

Построим математическую модель взаимодействия двух популяций в зависимости от времени.

Пусть $x(t)$ – популяция травоядных, $y(t)$ – популяция хищников на момент времени t.

При отсутствии взаимодействия, то есть внешней угрозы от хищников, травоядные продолжают размножаться с коэффициентом рождаемости $a > 0$. Изменение их популяции можно выразить как

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

Пока хищники не охотятся на жертв, они вымирают с неким коэффициентом убыли $b > 0$

$$\frac{dy}{dt} = -bx.$$

При взаимодействии каждый хищник поедает жертв с коэффициентом :

$$\frac{dx}{dt} = (a - y)x.$$

Сытые хищники способны к размножению с коэффициентом d:

$$\frac{dx}{dt} = (dx - b)y.$$

С учётом этих факторов можно составить следующую математическую модель борьбы популяций:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a - cy)x, \\ \dfrac{dy}{dt} = (dx - b)y, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

3. Анализ модели

Найдем точки покоя математической модели:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a - cy)x = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = (dx - b)y = 0. \end{cases}$$

Корнями будут:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{d}, \\ y_1 = \dfrac{a}{c}; \end{cases} \tag{2}$$

Применим метод первого приближения для анализа устойчивости найденных точек покоя. Для этого построим матрицу Якоби и вычислим её собственные значения.

Матрица Якоби математической модели:

$$J = \begin{pmatrix} a - c \cdot y & -c \cdot x \\ d \cdot y & -b + d \cdot x \end{pmatrix}$$

Подставим найденные точки покоя в матрицу Якоби.

Для точки (x_0, y_0):

$$J|_{(x_0,y_0)} = J_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \to \det(J_0 - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -b - \lambda \end{vmatrix}.$$

Отсюда собственные значения J_0:

$$\lambda_1 = a > 0, \quad \lambda_2 = -b < 0.$$

Нулевая точка является седловой точкой. Это означает, что рядом с ней функция ведет себя следующим образом:

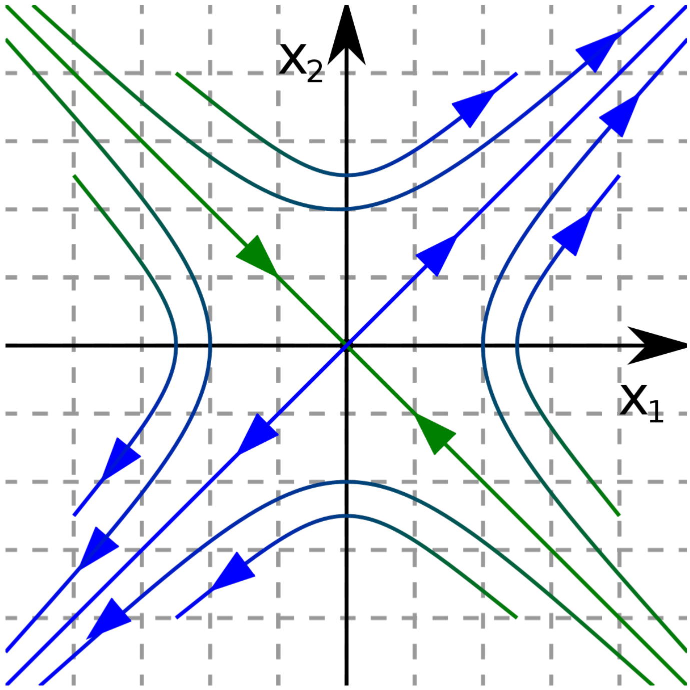

Рис. 1: Поведение функции рядом с седловой точкой

Для точки (x_1, y_1):

$$J|_{(x_1,y_1)} = J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -c \cdot \dfrac{b}{d} \\ d \cdot \dfrac{a}{c} & 0 \end{pmatrix} \to \det(J_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -c \cdot \dfrac{b}{d} \\ d \cdot \dfrac{a}{c} & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Отсюда собственные значения для J_1:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{ab}$$

Поскольку $\lambda_{1,2}$ состоят только из мнимой части точка $(x_1, y_1) = \left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right)$ является асимптотически неуйсточивой, а именно центром. Это означает, что в самой точке не будет происходить изменения, но на на некотором удалении от неё движение будет циклично.

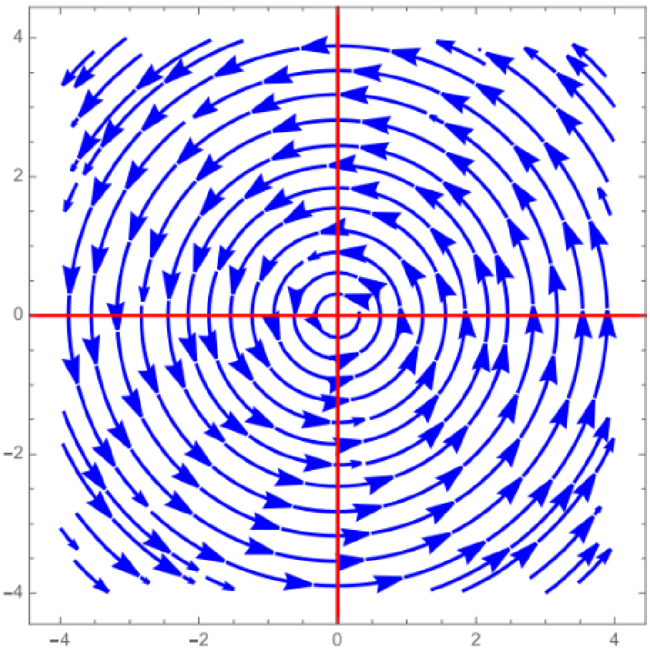

Рис. 2: Поведение функции рядом с центром

4. Вычислительные эксперименты

Для численного нахождения решения системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами используем метод Рунге-Кутты и построим графики решений $x(t), y(t)$, а также фазовую траекторию $F(x, y)$, отображающую взаимосвязь двух популяций.

Проведём численные эксперименты при параметрах:

$$a = 7, b = 4, c = 0.7, d = 0.5.$$

Было проведено 6 численных экспериментах с разными начальными условиями (x_0, y_0).

В точках покоя $(0, 0)$ и $\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right)$ функция не изменяется, то есь значения $x(t), y(t)$ остаются постоянными вне зависимости от времени.

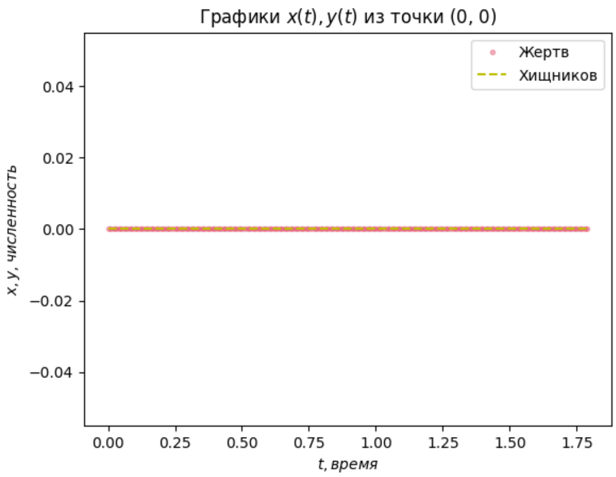

Рис. 3: Графики популяций травоядных и хищников в точке $(0, 0)$

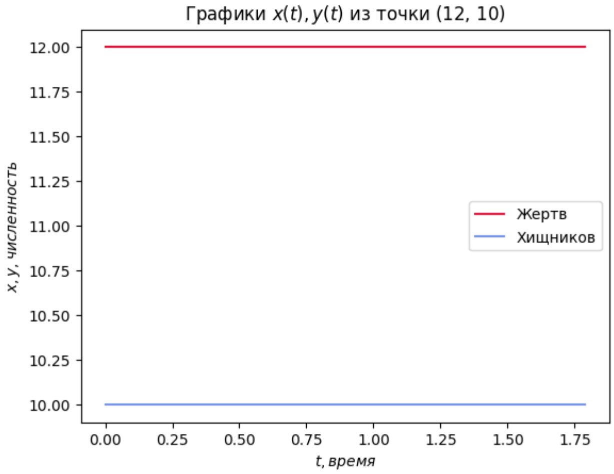

Рис. 4: Графики популяций травоядных и хищников в точке $\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right)$

В других точках, на некотором отдалении от точки $\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right)$ функции $x(t), y(t)$ цикличны.

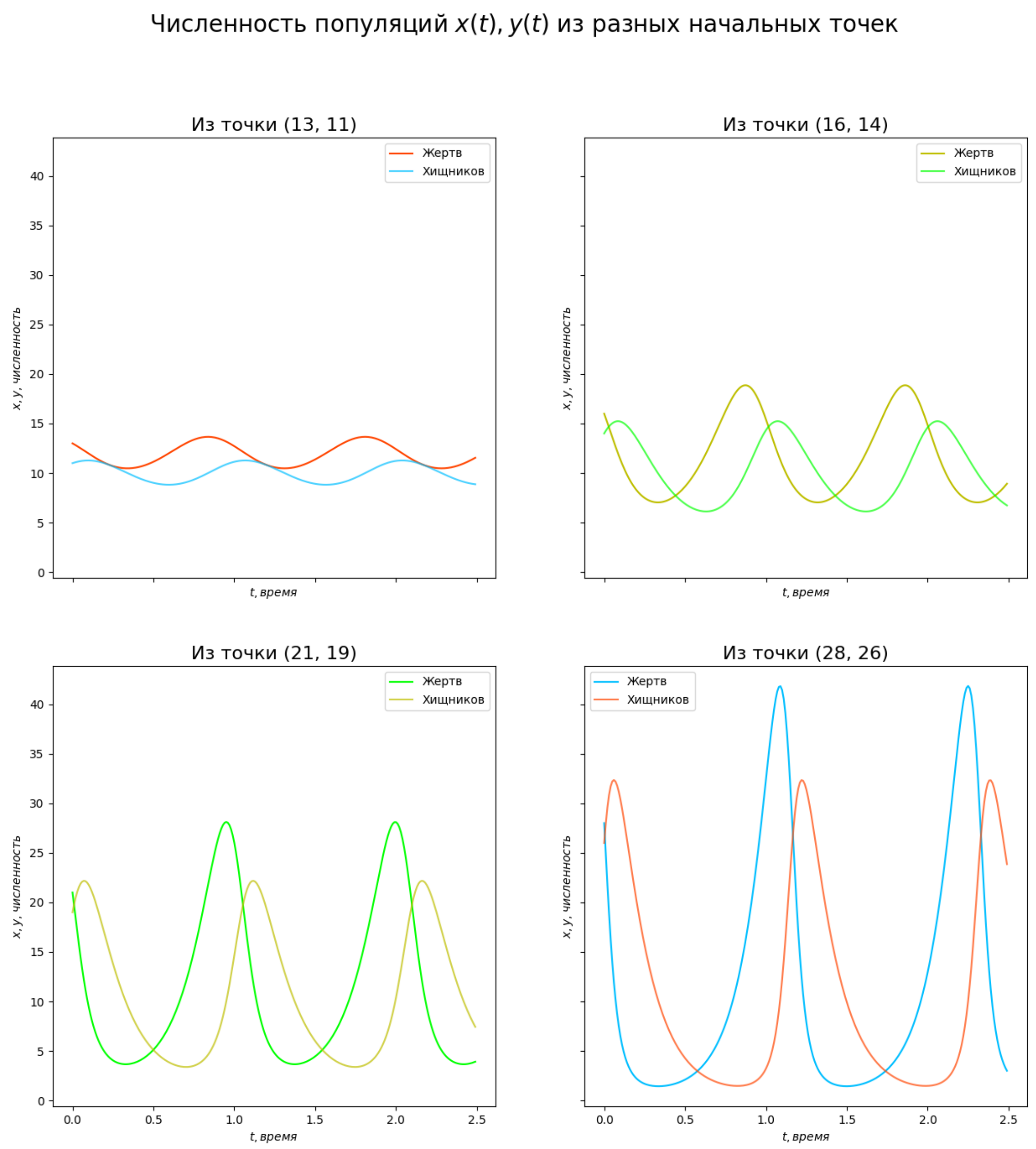

Рис. 5: Графики популяций травоядных и хищников в отдалении от $\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right)$

Эту цикличность можно лучше увидеть на фазовой плоскости (x, y):

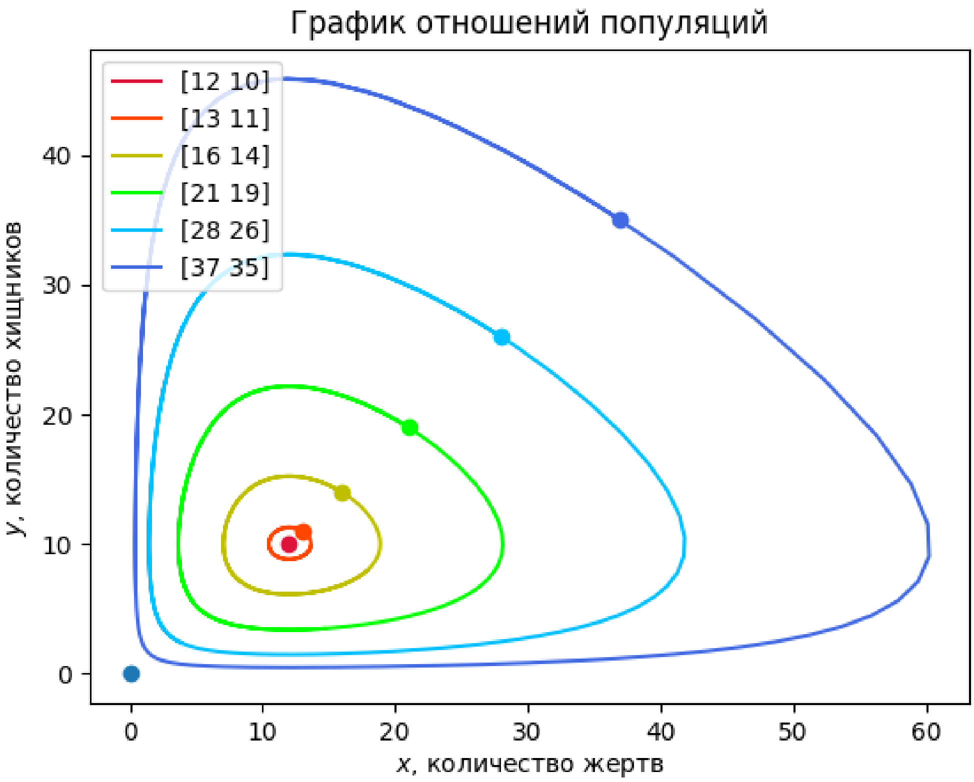

Рис. 6: График взаимодействия популяций

Как мы и проанализировали, в точках $(0, 0)$ и $\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right)$ количество жертв и хищников не изменяется со временем. И так как точка $\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right)$ является центром, из-за чего вокруг неё образовались циклы.

5. Заключение

Была построена математическая модель конкуренции двух видов. Модель представляет из себя систему дифференциальных уравнений 1-го порядка. При анализе на точки равновесия была найдена точка центра, вокруг которой взаимодействие двух видов зациклено. Мы доказали это численно, построив математическую модель из разных начальных точек и нарисовав графики изменение численности популяций от времени, а также фазовую плоскость.