Задача о скорости роста популяции

Постановка задачи

Необходимо получить график изменения численности популяции травоядных животных и хищников при определённых условиях.

Выбор переменных

Множество условий охарактеризуем набором некоторых параметров:

- 1. а скоростью размножения травоядных,
- 2. b скоростью поедания травоядных хищниками,
- 3. с естественной скоростью вымирания хищников,
- 4. d скоростью размножения хищников за счёт поедания травоядных.

a = 3

 $b \coloneqq 1$

 $c\!\coloneqq\!2$

d = 1

Выбор законов и зависимостей

Для того, чтобы построить график изменения численности травоядных и хищников, необходимо узнать, за счёт чего численность увеличивается и за счёт чего она может уменьшаться.

Количество травоядных может увеличиваться за счёт размножения, а уменьшаться за счёт поедания хищниками:

$$dx/dt = a x - (b y) x$$



Количество хищников может увеличиваться за счёт поедания травоядных и уменьшаться за счёт естественного вымирания: $dy/dt = (d\ x)\ y$ - $c\ y$



Формулировка математической модели

Объединим вышеприведённые уравнения в систему дифферециальных уравнений

$$D(t,y) \coloneqq \begin{bmatrix} a \cdot y_{_{0}} - \left(b \cdot y_{_{0}}\right) \cdot y_{_{1}} \\ \left(d \cdot y_{_{0}}\right) \cdot y_{_{1}} - c \cdot y_{_{1}} \end{bmatrix}$$

Математическая модель поставлена

Решение

Зададим несколько начальных условий, а также построим графики для этих точек

$$x_1 \coloneqq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad x_2 \coloneqq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad x_3 \coloneqq \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_4 \coloneqq \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x_5 \coloneqq \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_6 \coloneqq \begin{bmatrix} 1.3 \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 \coloneqq \operatorname{rkfixed} \left(x_1 \,, 0 \,, 2000 \,, 100000 \,, D \right) \qquad \qquad Z_4 \coloneqq \operatorname{rkfixed} \left(x_6 \,, 0 \,, 2000 \,, 100000 \,, D \right)$$

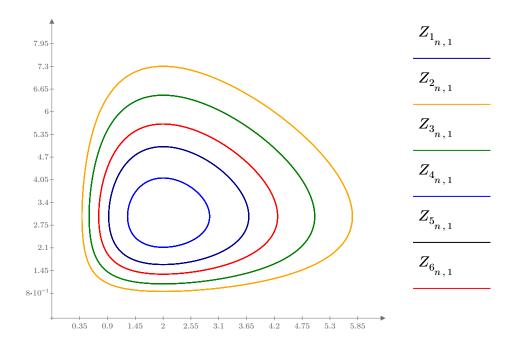
$$Z_{2}\!\coloneqq\!\operatorname{rkfixed}\left(x_{2},0\,,2000\,,100000\,,D\right)$$

 $Z_5\!\coloneqq\!\operatorname{rkfixed}\left(x_5,0\,,2000\,,100000\,,D\right)$

 $Z_{3}\!\coloneqq\!\operatorname{rkfixed}\left(x_{3},0\,,2000\,,100000\,,D\right)$

 $Z_6\!\coloneqq\!\operatorname{rkfixed}\left(x_4,0\,,2000\,,100000\,,D\right)$

 $n \coloneqq 0 \dots 1000$



$$Z_{1_{n,\,2}}$$

 $Z_{2_{n\,,\,2}}$

 $Z_{3_{n,2}}$

 $Z_{4_{n,2}}$

 $Z_{5_{n\,,\,2}}$

 $Z_{6_{n,2}}$