回顾：排列与组合

- 设集合 S 包含n个不同的元素
  - S的排列的个数：$n!$
  - S的r 组合的个数：$\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- 设集合 S 包含重数分别为$n_1, \ldots, n_t$的 t 类元素
  - S的排列的个数：$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$
  - S的r 组合的个数（ $n_i \geq r, i = 1, 2, \ldots, t$ ）: $\binom{r+t-1}{r}$

如果存在i, 使得$n_i < r$，怎么计算？

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题
6.6 莫比乌斯反演

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理

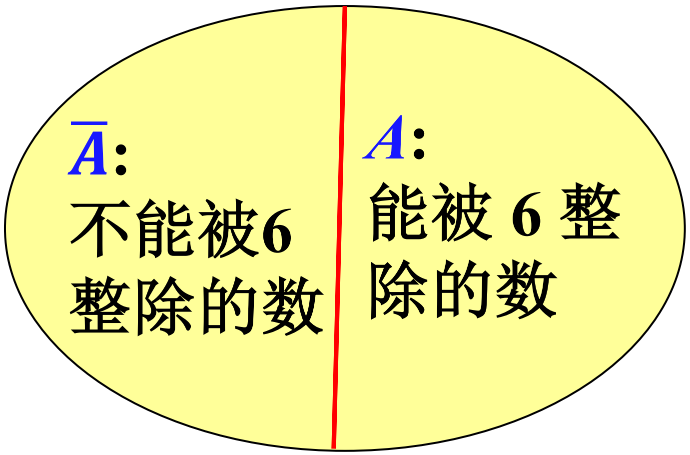
6.2 带重复的组合

6.3 错位排列

6.4 带有禁止位置的排列

6.5 另一个禁止位置问题

例1. 计算1到600中不能被6整除的整数个数。



S={1, 2, …, 600}

互斥

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

$$|\overline{A}| = |S| - |A|$$

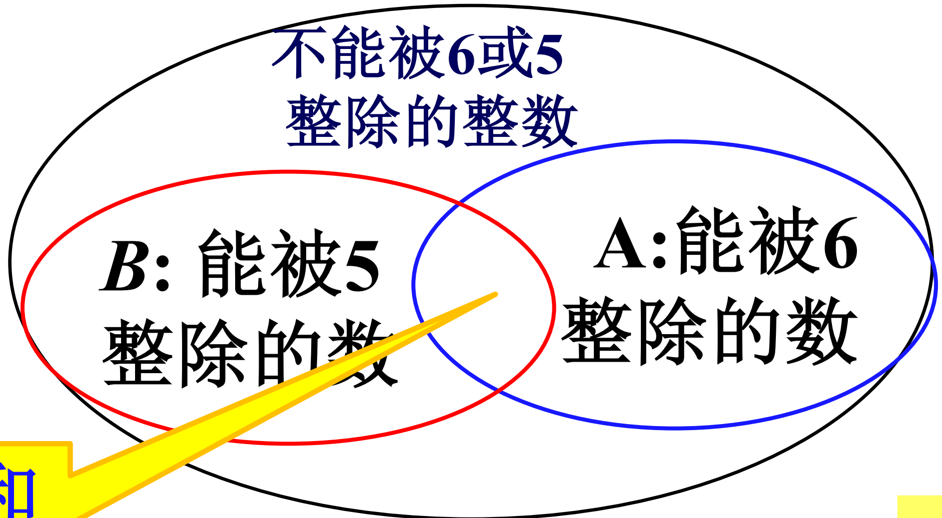
解:（减法原理） 1到600中能被6整除的整数个数是

$$\left\lfloor \frac{600}{6} \right\rfloor = 100\text{个。}$$

因此，1到600中不能被6整除的整数个数是

$$600-100=500\text{个。}$$

例3. 计算1到600中不能被6或5整除的整数个数？



容斥

A∩***B***:能被5和
6整除的数

S={1,2,…, 600}

$|A \cup B| \neq |A| + |B|$

$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$

回顾：加法原理

- 基本计数原理：加法原理

两两互斥

$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$， $S_i \cap S_j = \varnothing$， $i \neq j$

则： $|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_m|$

问题：如果存在重叠，即 $S_i \cap S_j \neq \varnothing$，如何计数？

- 容斥原理：解决具有重叠集合的并集的计数原理。

例4：A_1和A_2分别是S中具有性质P_1和P_2的元素的集合，求S中既不具有性质P_1也不具有性质P_2的元素个数。

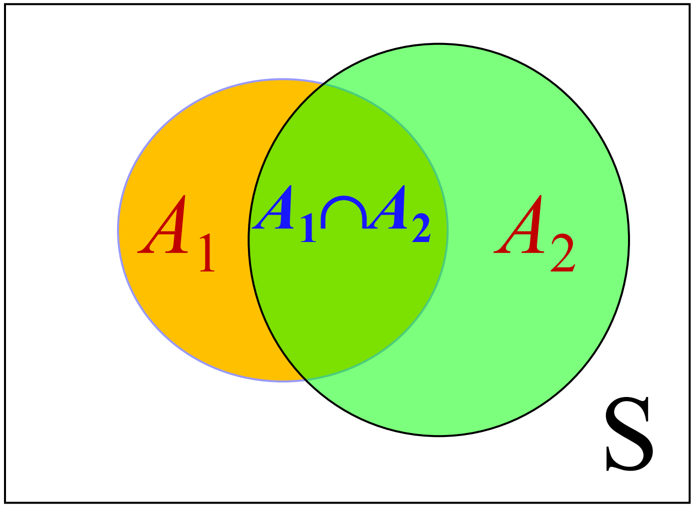
$\overline{A_1}$: S中不具有性质P_1的元素的集合

$\overline{A_2}$: S中不具有性质P_2的元素的集合

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$: S中既不具有性质P_1也不具有性质P_2的元素的集合

$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S-(A_1 \cup A_2)|$

$= |S|-|A_1|-|A_2|+|A_1 \cap A_2|$



$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S-(A_1 \cup A_2)| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

证明：定义一个计数函数: $\sigma_x(A)=\begin{cases} 1, \text{当 } x\in A \\ 0, \text{当 } x\notin A \end{cases}$

则有，$|A|=\Sigma_{x\in S}\sigma_x(A)$。

因此，只需证明：

$$\sum_{x\in S}\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \sum_{x\in S}\sigma_x(S) - \sum_{x\in S}\sigma_x(A_1) - \sum_{x\in S}\sigma_x(A_2) + \sum_{x\in S}\sigma_x(A_1 \cap A_2)$$

$$= \sum_{x\in S}(\sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2))$$

因此，只需证明：对$\forall x\in S$, 下式成立

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2)$$

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2)$$

S中的元素可分为 4 种情况：

(1) x不属于 A_1和 A_2：左边=1; 右边=1–0–0+0=1

(2) x属于 A_1且不属于 A_2：左边=0; 右边=1–1–0+0=0

(3) x属于 A_2, 不属于 A_1：左边=0;右边=1–0–1+0=0

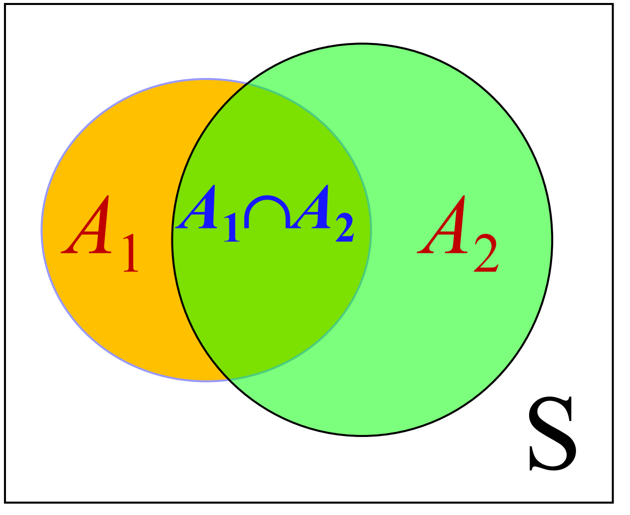
(4) x属于 A_1, 又属于 A_2：左边=0;右边=1–1–1+1=0

因此：对于$\forall x \in S$

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) =$$

$$\sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2)$$

得 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$



一般情形：容斥原理计数

定理6.1.1 集合 S 不具有性质$P_1,P_2,\ldots,P_m$的物体的个数：

$$|\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_m}| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i\cap A_j| - \Sigma|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\ldots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$

其中，第一个和对$\{1, 2, \ldots, m\}$的所有的 1 子集 $\{i\}$ 进行，第二个和对$\{1, 2,\ldots, m\}$的所有的 2 集合$\{i, j\}$进行，依此类推.

$m=2$: $\quad |\overline{A_1}\cap\overline{A_2}| = |S|-|A_1|+|A_1\cap A_2|$

$m=3$: $\quad |\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = |S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)$

$$+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)$$

$$-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明：验证每个元素在等式两边计数相等。

(1) 设 $x \in S$ 不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$，左边计数为：

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}) = 1$$

右边计数为：$1-0+0-0+\ldots+(-1)^m 0=1$

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

(2) 设 $y \in S$ 具有其中 n (≥ 1)个性质，

左边计数为：$\sigma_y(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}) = 0$

右边计数： $\sigma_y(S) = 1 = \binom{n}{0}$（因为：$y \in S$）

$\sum_{i=1}^{m} \sigma_y(A_i) = n = \binom{n}{1}$（因为$A_1, \ldots, A_m$中有$n$个包含了$y$。）

$$\sum_{\{i,j\}是\{1,..,m\}的2\text{-}组合} \sigma_y(A_i \cap A_j) = \binom{n}{2}$$

因为$\sigma_y(A_i \cap A_j)=1$ 当且仅当 $y \in A_i$ 且 $y \in A_j$，因此，上式左边等于从n个物体取出 2个的组合个数。

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

一直继续下去，式子右边最后一项：

$$\sigma_y(A_1 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_m) = \binom{n}{m}$$

因此，右边等于：

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{m} \quad n \leq m$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

证毕。

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

$$\|$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}|$$

因此，$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |S| - |\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m|$

推论6.1.2 集合S中至少具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$之一的元素的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

- 设集合A_i是集合S中满足性质 P_i的所有物体的子集，$i=1, 2, \ldots, m$, 则
  - 集合 S 不具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$的物体的个数为

$$\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

  - 集合 S 中至少具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$之一的物体的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

例: 求 1 到1000不能被 5, 6或8整除 的数的个数.

解: 设A_1, A_2和A_3分别是1到1000中能被 5, 6和8整除的数集合，那么1到1000不能被5, 6或8整除的数的个数为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$。

有 $|A_1| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$

$|A_2| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$

$|A_3| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$

$|A_1 \cap A_2| = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

$|A_1 \cap A_3| = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

由容斥原理得 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$

$$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

例：字母M, A,T,H, I, S, F, U, N存在多少排列使得单词MATH, IS和FUN都不出现？

解：设 S 为 9个字母组成所有排列的集合,

A_1是MATH出现的排列集合； A_2是IS出现的排列集合；A_3是FUN出现的排列集合。

则使得单词MATH, IS和FUN都不出现的排列个数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|。$$

有 $|S|=9!$， $|A_1|= 6!$， $|A_2|=8!$， $|A_3|=7!$

$|A_1 \cap A_2|= 5!$， $|A_1 \cap A_3|= 4!$， $|A_2 \cap A_3|=6!$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|= 3!$,

由容斥原理计算可得（略）。

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

特别情况：

若 $\alpha_1=|A_1|=|A_2|=\ldots=|A_m|$ （所有集合包含的元素个数相等）

$\alpha_2=|A_1 \cap A_2|=\ldots=|A_{m-1} \cap A_m|$ （任意两个集合的交包含相等个数的元素）

$\alpha_3=|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=\ldots=|A_{m-2} \cap A_{m-1} \cap A_m|$

… （任意三个集合的交包含相等个数的元素个数）

$\alpha_k=|A_1 \cap \ldots \cap A_k|=\ldots=|A_{m-k+1} \cap \ldots \cap A_m|$

…

$\alpha_m=|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

则，$\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m$

$$= \alpha_0 - \binom{m}{1}\alpha_1 + \binom{m}{2}\alpha_2 - \binom{m}{3}\alpha_3 + \ldots + (-1)^k \binom{m}{k}\alpha_k + \ldots + (-1)^m \alpha_m$$

例. 从 0到 99999中有多少同时含有数字2, 5和8的整数。

解：设A_1，A_2和A_3分别是不包含数字2, 5和8的集合，需要计算$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|$。

0 到 99999 的整数个数：$\alpha_0=10^5$

$$\alpha_1=|A_1|=|A_2|=|A_3|=9^5$$

$$\alpha_2=|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=8^5$$

$$\alpha_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|=7^5$$

因此，满足题意的整数个数为 $10^5-3\times9^5+3\times8^5-7^5$。

例：确定$S=\{1, 2,\ldots, 8\}$的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

自然位置	1	2	3	4	5	6	7	8
自然排列	1	2	3	4	5	6	7	8
排列2 √	2	1	4	3	6	5	8	7
排列3	1	2	4	3	6	5	8	7

每个数都在其自然位置

每个数都不在其自然位置

例：确定S={1, 2,…, 8}的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

自然位置	1	2	3	4	5	6	7	8
自然排列	1	2	3	4	5	6	7	8
排列2 √	2	1	4	3	6	5	8	7
排列3 ×	1	2	4	3	6	5	8	7

每个数都在其自然位置

每个数都不在其自然位置

例：确定S={1, 2,…, 8}的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

解：设A_1, A_2, A_3, A_4分别为偶数 2，4，6，8在其自然位置上的排列够成的集合，因此 S 的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数为 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$。

$|A_1|=7! =|A_2|=|A_3|=|A_4|$

$|A_1 \cap A_2| =6! \quad = |A_i \cap A_j|, i, j=1, 2, 3, 4, i \neq j$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =5! \quad = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$;

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$。

因此$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = 8!-4 \cdot 7!+6 \cdot 6! - 4 \cdot 5!+4!$

例：确定S={1,2,…, 8}的排列中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数。

解：设A_1, A_2, A_3, A_4分别为奇数1，3，5，7在其自然位置上的排列够成的集合，则S中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数为 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$。

有 $|A_1| = 7! = |A_i|, i=2,3,4$

$|A_1 \cap A_2| = 6! = |A_i \cap A_j|, i, j=1,2,3,4, i \neq j$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5! = |A_i \cap A_j \cap A_k|, i, j, k=1,2,3,4, i \neq j \neq k$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$

因此S中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数为 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$ （略）。

小结

- 容斥原理
  - 用于重叠集合的并集计数
  - 也用于重叠集合的补集的交集计数
- 用容斥原理解决更复杂的计数问题
  - 带重复的组合
  - 错位 排列
  - 带有绝对/相对禁止位置的排列
  - 几何问题

第六章 容斥原理及应用

多重集的组合

- n个不同元素的集合的r子集的数目为$\binom{n}{r}$.
- 令S是多重集，包含k个不同的元素，每个元素都有无限重复次数，那么，S的r子集个数为$\binom{r+k-1}{r}$.
- 假设$n_i \geq r$ $(i=1,\ldots,k)$，则$T=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的$r$组合数目等于$T'=\{r\cdot a_1, r\cdot a_2,\ldots, r\cdot a_k\}$的$r$子集数目，等于$\binom{r+k-1}{r}$.

如果存在i, 使得$n_i < r$，怎么计算?

容斥原理在多重集组合的应用

例1: 确定多重集$T=\{3.a, 4.b, 5.c\}$的10子集的个数.

每个10子集中的元素不会多于3个a，且不会多于4个b，且不会多于5个c。

解：令多重集$T^*=\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$的所有10子集的集合为 S,

设：

A_1是 S 中包含多于 3个a 的10子集的集合,

A_2是 S 中包含多于 4个b 的10子集的集合,

A_3是 S 中包含多于 5个c 的10子集的集合,

那么，T 的10-组合数等于$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$

例1: 确定多重集$T=\{3.a, 4.b, 5.c\}$的10子集的个数.

解(续)：应用容斥原理，计算：

$$|S|=\binom{10+3-1}{10}=66$$

A_1中的每个子集中a至少出现4次，剩下6个元素可以是 T^* 的任何6-组合，

因此，$|A_1|=\binom{6+3-1}{6}=\binom{8}{6}=28$

A_2中的每个子集中b 至少出现5次，剩下5个元素可以是T^*的任何5-组合，

因此，$|A_2|=\binom{5+3-1}{5}=\binom{7}{5}=21$

类似可得 $|A_3|=\binom{4+3-1}{4}=\binom{6}{4}=15$

例1: 确定多重集$T=\{3.a, 4.b, 5.c\}$的10子集的个数.

解(续):计算$|A_1 \cap A_2|$:$A_1 \cap A_2$中的每个子集中 a 至少出现4次同时 b 至少出现5次，剩下1个元素可是T^*的任何1子集，因此

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{1+3-1}{1} = \binom{3}{1} = 3$$

类似的，
$$|A_1 \cap A_3| = \binom{0+3-1}{0} = \binom{2}{0} = 1$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

应用容斥原理:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 = 6$$ 。

多重集组合与方程整数解个数

令S＝$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$，则 S 的一个r组合具有形式$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2,\ldots, x_k\cdot a_k\}$，满足

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=r\ ,$$

其中，x_i是非负整数，即$x_i\geq 0$, i=1, 2, …, k。

以上方程的任何一个解确定 S 的一个r组合，反之亦然，因此S的 r组合个数等于以上方程解的个数。

多重集T=$\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的 r组合数等于方程

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=r,\ \ 0\leq x_1\leq n_1,\ 0\leq x_2\leq n_2,\ \ldots,\ 0\leq x_k\leq n_k$$

的整数解的个数。

例2: 求满足$1\le x_1 \le 5$, $-2\le x_2 \le 4$, $0\le x_3 \le 5$, $3\le x_4 \le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:作变量替换 $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2+2$, $y_3=x_3$, $y_4=x_4-3$得到方程:

$$y_1+y_2+y_3+y_4=16 \qquad (*)$$

且关于x_i 的不等式成立当且仅当

$$0\le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 6,\ 0\le y_3 \le 5,\ 0\le y_4 \le 6。\qquad (**)$$

因此满足题意的整数解个数等于当条件（**）满足时，方程（*）的整数解的个数。

令A_1, A_2, A_3, A_4分别表示方程（*）在$y_1\ge 5$， $y_2 \ge 7$，$y_3 \ge 6$， $y_4 \ge 7$时的整数解的个数，则条件（**）满足时，方程（*）的整数解的个数为 $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$。

例2: 求满足$1\le x_1\le5$, $-2\le x_2\le4$, $0\le x_3\le5$, $3\le x_4\le9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:（续）设S是方程(*)的非负整数解的集合，则$|S|$等于方程

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$ 的非负整数解的个数，得

$$|S|=\binom{16+4-1}{16}=\binom{19}{16}=969$$

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$

$0\le y_1\le4$, $0\le y_2\le6$,

$0\le y_3\le5$, $0\le y_4\le6$

令 $z_1=y_1-5$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4$, 那么, $|A_1|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=11$ 的非负整数解个数相等，得

$$A_1=\binom{11+4-1}{11}=\binom{14}{11}=364$$

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2-7$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4$, 那么, $|A_2|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=9$ 的非负整数解个数相等，得

$$A_2=\binom{9+4-1}{9}=\binom{12}{9}=220$$

例2: 求满足$1\le x_1\le 5$, $-2\le x_2\le 4$, $0\le x_3\le 5$, $3\le x_4\le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:（续）

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$
$0\le y_1\le 4$, $0\le y_2\le 6$,
$0\le y_3\le 5$, $0\le y_4\le 6$

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3-6$, $z_4=y_4$, 那么, $|A_3|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=10$ 的非负整数解个数相等，得

$$A_3=\binom{10+4-1}{10}=\binom{13}{10}=286$$

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4-7$ ， 那么, $|A_4|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=9$ 的非负整数解个数相等，得

$$A_4=\binom{9+4-1}{9}=\binom{12}{9}=220$$

。

例2: 求满足$1\le x_1\le 5$, $-2\le x_2\le 4$, $0\le x_3\le 5$, $3\le x_4\le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解：（续）令 $z_1=y_1-5$, $z_2=y_2-7$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4$, 得 $|A_1\cap A_2|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=4$ 的非负整数解个数相等，得

$$A_1\cap A_2=\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}=35,$$

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$
$0\le y_1\le 4$, $0\le y_2\le 6$,
$0\le y_3\le 5$, $0\le y_4\le 6$

同理可得，

$$A_1\cap A_3=\binom{5+4-1}{5}=\binom{8}{5}=56,\ A_1\cap A_4=\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}=35$$

$$A_2\cap A_3=\binom{3+4-1}{3}=\binom{6}{3}=20,\ A_2\cap A_4=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}=10$$

$$A_3\cap A_4=\binom{3+4-1}{3}=\binom{6}{3}=20。$$

又集合A_1, A_2, A_3, A_4中任意三个的交都是空集。

应用容斥原理可得结论（略）。

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题

6.3 错位排列

例：1. 四位厨师聚餐时各做了一道拿手菜。现在要求每人去品尝一道菜，但不能尝自己做的那道菜。问共有几种不同的尝法?

2. 假设同学们做课堂测试，每位同学选择一位同学给其评分（不能给自己评分），问有多少种不同的选择方法?

定义1: 设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$, 它的排列用$i_1\, i_2\ldots\, i_n$表示。错位排列是使得 $i_1\neq 1,\ i_2\neq 2, \ldots,\ i_n \neq n$ 的排列。用D_n表示错位排列个数。

错位排列

定义1：设 $X=\{1, 2, …, n\}$，它的排列用$i_1\, i_2 … \, i_n$表示。错位排列是使得 $i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, …, i_n \neq n$ 的排列。用D_n表示错位排列个数。

$n=1$时，X有1个排列： 1 $D_1=0$

$n=2$时，X有2个排列：12，$\boxed{21}$ $D_2=1$

$n=3$时，X有6个有排列：123,132, 213, $\boxed{231}$, $\boxed{312}$, 321 $D3=2$

$n=4$时，X共有 24 个排列；错位排列为：

2143， 3142， 4123， 2341， 3412，

4312， 2413， 3421， 4321

$D_4 = 9$

用容斥原理求解D_n

设 S是全部排列$i_1\ i_2\ldots\ i_n$的集合，而 A_j是$i_j = j$ 的排列集合，

则 $D_n = \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m$

j 在第 j 个位置上

对于任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$A_i$是第 i个位置为 i 的排列的集合，因此 $|A_i| = (n-1)!$

对于任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，且 $i \neq j$，$A_i \cap A_j$是第 i个位置为 i，第 j个位置为 j的排列的集合，因此 $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

对于任意两两不同的 $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_1}$ 是第 i_j个位置为 j ($j=1,\ldots, k$) 的排列的集合，因此，

$$|A_{i1} \cap \ldots \cap A_{ik}| = (n-k)!\text{，} \quad 1 \le k \le n$$

应用容斥原理：

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

定理6.3.1 对$n \geq 1$，

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

计算可得：$D_5 = 44$, $D_6 = 265$, $D_7 = 1854$, $D_8 = 14833$

例：在一次聚会上，有n位男士和n位女士。

(1)这n位女士能够有多少种方法选择男舞伴开始跳第一支舞？ $n!$

(2) 如果每人必须要换舞伴，那么第二支舞又有多少种选择方法？ D_n

例：设上述聚会中,男士和女士在跳舞前存放他/她们的帽子.

(1) 在聚会结束时随机地返回他/她们这些帽子，有多少种方法？ $(2n)!$

(2) 如果每位男士得到一顶男帽，每位女士得到一顶女帽，有多少种方法？ $n!\cdot n!$

(3) 如果每位男士得到一顶男帽，每位女士得到一顶女帽，但又都不是他/她们自己曾经存放的那顶帽子，有多少种方法？ $D_n\cdot D_n$

例：在一次聚会上，7位绅士存放他们的帽子。有多少种方法使得他们的帽子返还时满足

(1) 没有绅士收到他自己的帽子？

(2) 至少一位绅士收到他自己的帽子？

(3) 至少两位绅士收到他们自己的帽子？

解: (1) D_7

(2) $7! - D_7$

(3) $7! - D_7 - 7D_6$

例：确定{1, 2,…, 8}的排列中恰有四个整数在它们的自然位置上的排列数。

解：任选四个整数在自然位置上：$\binom{8}{4}$

剩下四个整数不在其自然位置上：D_4

因此，恰有四个整数在它们的自然位置上的排列数为

$$\binom{8}{4}D_4$$

错位排列的递推关系

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

D_n 满足如下递推关系：

$$D_n = (n-1)(D_{n-2}+D_{n-1}),\quad (n=3,4,\ldots)$$

$$D_2=1;\quad D_1=0$$

- 设d_n为第一个位置为 2的错位排列个数

$i_j \neq j,\ j=1,\ldots,n$

$i_1 i_2 \ldots i_n$

错位排列

$D_n=(n-1)d_n$

$i_1 \neq 1$

$2 i_2 \ldots i_n$ d_n

$3 i_2 \ldots i_n$ d_n

…

$n i_2 \ldots i_n$ d_n

错位排列

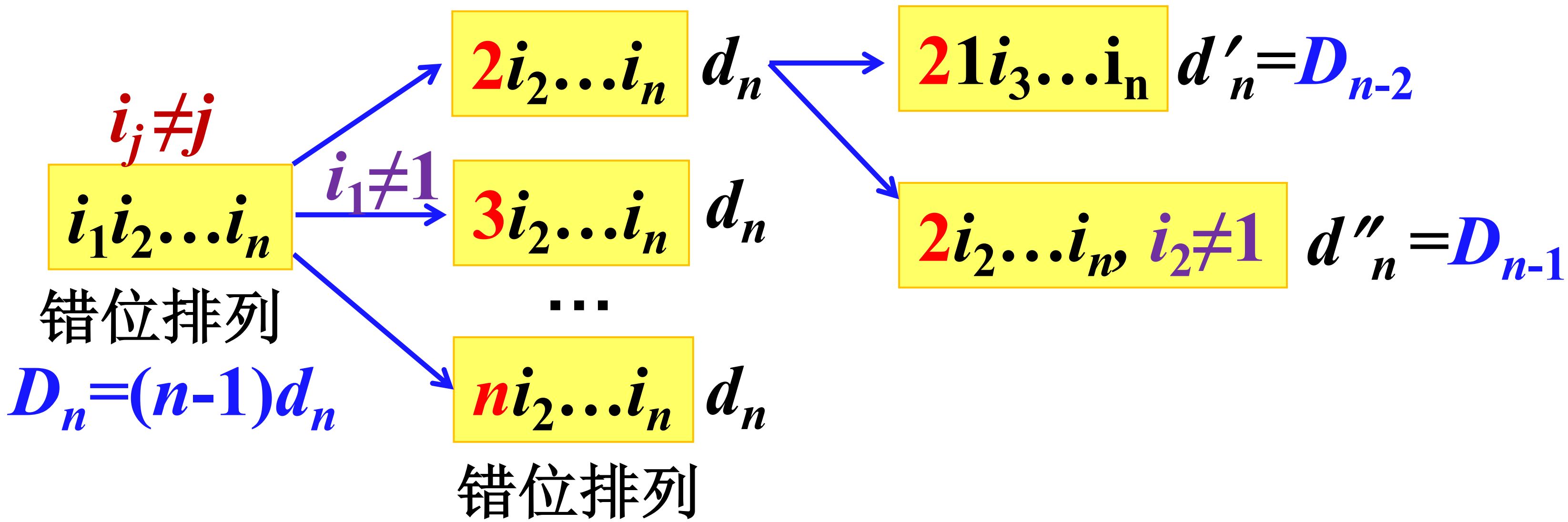
$21 i_3 \ldots i_n$ $d'_n = D_{n-2}$

$2 i_2 \ldots i_n,\ i_2 \neq 1$ $d''_n = D_{n-1}$

相当于$\{1, 3, 4, \ldots, n\}$的错位排列

$$D_n=(n-1)d_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$$

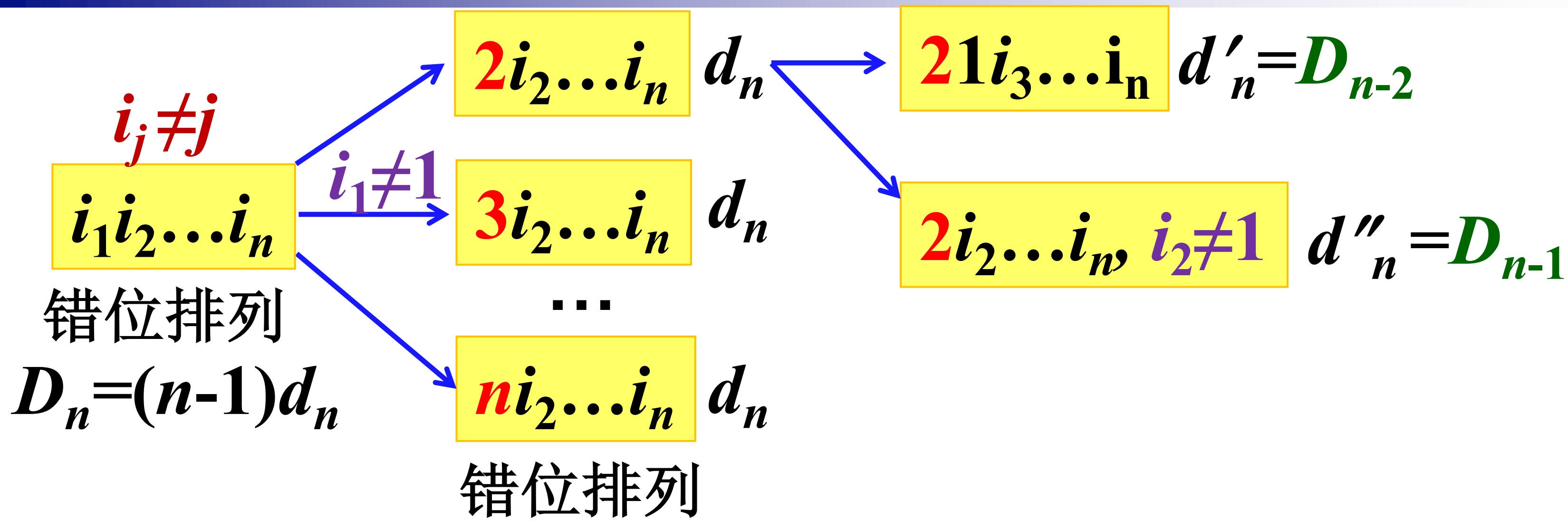
递推关系的组合解释



- D_n是集合$\{1, 2, \ldots, n\}$的错位排列数。
  - 第1位可以是$2,\ldots,n$的任一个，划分为$n-1$个部分：

    $i_1\ i_2 \ldots i_n$，$i_1 \in \{2,\ldots,n\}$ $i_2 \neq 2, \ldots, i_n \neq n$
- 设 d_n是2在第1位的错位排列数，

$$\text{则} D_n=(n-1)d_n$$



- 排列$2i_2,\ldots,i_n$可进一步划分两种情况：

$$2\ 1\ i_3 \ldots i_n, \qquad i_3 \neq 3, \ldots, i_n \neq n,$$

$$2 i_2\ i_3 \ldots i_n, \qquad i_2 \neq 1,\ i_3 \neq 3, \ldots, i_n \neq n$$

设d'_n是第1种排列数,与集合$\{3, 4, \ldots, n\}$错位排列相等，即

$$d'_n = D_{n-2};$$

设d''_n是第2种排列数,与集合$\{1, 3, 4, \ldots, n\}$错位排列相等，即

$$d''_n = D_{n-1};$$

则 $d_n = d'_n + d''_n$，得 $D_n = (n-1)(d'_n + d''_n) = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$

错位排列的递推关系

D_n 满足如下递推关系:

- $D_n = (n-1)(D_{n-2}+D_{n-1}), \quad (n=3,4,\ldots)$
  $D_2=1$; $D_1=0$
- $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$

利用递推关系推导:

$$D_n-nD_{n-1} = -[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]$$
$$= (-1)^2 [D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}]$$
$$\cdots$$
$$= (-1)^{n-2}(D_2-2D_1)$$

由 $D_1=0$，$D_2=1$进一步得到：$D_n= nD_{n-1}+(-1)^n$

递推关系用于计算错位排列

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

- $D_5=44$，那么， $D_6 = 6\times 44+(-1)^6=265$

  $D_7 = 7\times 265+(-1)^7=1854$

  $D_8 = 8\times 1854+(-1)^8=14833$

  …… ……

- D_n 是偶数当且仅当 n 是奇数