第三章鸽巢原理

3.1 鴿巢原理的简单形式

3.2 鴿巢原理的加强形式

3.3 Ramsey定理

组合数学

- 存在性问题
  - 鸽巢原理
- 计数问题
  - 排列组合
  - 容斥原理
  - 生成函数、递推关系
  - Pólya计数
- 组合设计
- 组合优化

第三章鸽巢原理

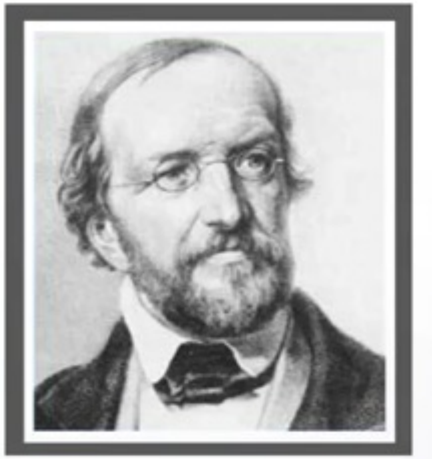
3.1 鴿巢原理的简单形式

3.2 鴿巢原理的加强形式

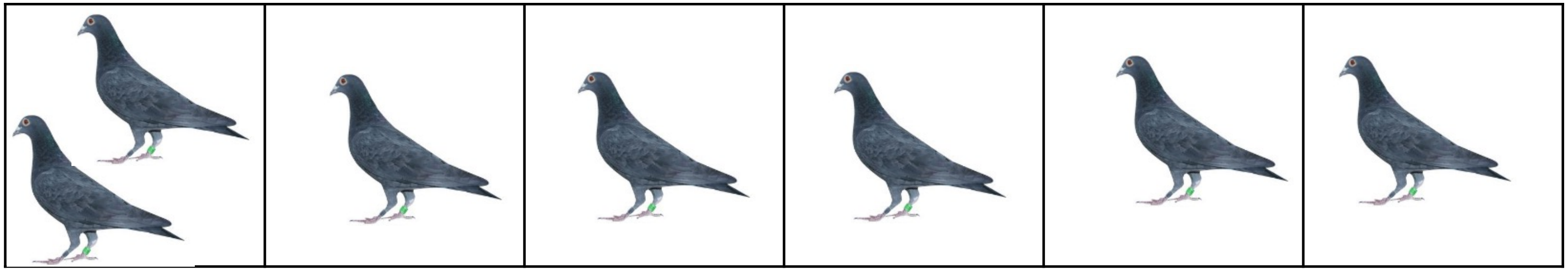
3.3 Ramsey定理

鸽巢原理

- 十九世纪德国数学家狄里克雷于1834年提出鸽巢原理，当时命名为抽屉原理（Schubfachprinzip，drawer principle）
- 7个鸽子飞进6个巢里，一定有一个巢至少有2只鸽子



Dirichlet，1805—1859



- 利用抽屉原理来建立有理数的理论，以后逐渐地应用到引数论、集合论、组合论等数学分支中，所以抽屉原理又称为狄里克雷原理

- 两桃杀三士
  - 《晏子春秋·内篇谏下· 第二十四》

齐景公

公孙接、田开疆、古冶子

晏子

- 宋代费衮的《梁溪漫志》中，就曾运用抽屉原理来批驳“算命”一类迷信活动的谬论

“近世士大夫多喜谭命，往往自能推步。予尝见人言日者阅人命，盖未始见年、月、日、时同者；纵有一二，必倡言于人以为异。尝略计之，若生时无同者，则一时生一人，一日生十二人，以岁记之，则有四千三百二十人；以一甲子计之，止（只）有二十五万九千二百人而已。今只从一大郡计，其户口之数尚不减数十万，况举天下之大，自五公大人以至小民何啻亿兆？虽明于数者有不能历算，则生时同者必不为少矣。其间五公大人始生之时则必有庶民同时而生者，又何贵贱贫富之不同也？”

- 把一个人出生的年、月、日、时（八字）作算命的根据，把“八字”作为“抽屉”，不同的抽屉只有12×360×60＝259200个。以天下之人为“物品”，其数“何啻亿兆”，进入同一抽屉的人必然千千万万，因而结论是“生时同者必不为少矣”。既然“八字”相同，“又何贵贱贫富之不同也？”

举例

- 13个同学，肯定至少有两个人出生在同一月份。
- 假设有5对已婚夫妇，从中随机挑出 6 人，一定会挑出一对夫妇。
- 10位同学，每位同学至少认识其余 9 位同学中的一位，则至少有两位认识的人数相等。
- 在任意6个人中，或者有3个人两两互相认识，或者有3个人两两互相不认识（Ramsey定理）
- 月高风黑穿袜子：蓝色、黄色、红色袜子各3双，请问最少取多少只袜子，一定可以凑成一双？4只

鸽巢原理

定理3.1.1 如果把$n+1$个物体放进 n 个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或更多的物体。（反证法）

注意：鸽巢原理只能用于证明某种现象的存在性。

物品集 X $\xrightarrow{\text{函数 } f}$ 盒子集 Y

- 当 X，Y为有限集时
  - 如果X的元素多于Y的元素（$|X|>|Y|$），则 f 不是单射
  - 如果$|X|=|Y|$，且 f 是满射，则 f 是单射
    (如果没有一个盒子为空，则每个盒子恰好有一个物体)
  - 如果$|X|=|Y|$，且 f是单射，则 f 是满射

(如果没有盒子被放入多于一个物体，则每个盒子里有一个物体)

鸽巢原理及其他形式

定理3.1.1 如果把$n+1$个物体放进 n 个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或更多的物体。（反证法）

注意：鸽巢原理只能用于证明某种现象的存在性。

- 鸽巢原理的其他形式
  - n 个物体放入 n 个盒子且没有一个盒子是空的, 那么, 每个盒子正好包含一个物体.
  - n 个物体放入 n 个盒子且没有盒子被放入多于一个物体, 那么, 每个盒子有一个物体.

例：如果从{1, 2, …, 2n}中选择n+1个不同的整数，证明一定存在两个整数，它们之间差为1。

n个盒子：

1, 2	3, 4	5, 6	…	2n-1, 2n

证明：把集合 {1, 2, …, 2n}划分成n个子集

$$S_1, S_2, \ldots, S_n,$$

其中，$S_i = \{2i-1, 2i\}$, i =1, 2, …, n。

由鸽巢原理知，从{1, 2, …, 2n}中取出n+1个数，一定会有一个子集中的整数同时被取出，且这两个整数之间差为1。

例：如果有$n+1$个不同的正整数，且这些正整数是小于或等于$2n$，是否一定会有一对数是互素的？为什么？

匈牙利大数学家厄杜斯 (Paul Erdous,1913 - 1996) 向当年年仅11岁的路易·波萨 (Louis Pósa) 提出这个问题，而小波萨思考了不足半分钟便给出了正确的答案。

n个盒子： | 1, 2 | | 3, 4 | | 5, 6 | … | $2n$-1, $2n$ |

例：如果从$\{1, 2, \ldots, 2n\}$中选择 $n+1$个不同的整数，证明一定存在两个整数，它们之间差为1。

证明：设选择的$n+1$个整数为 $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$。

令$b_1 = a_1+1$, $b_2 = a_2+1$, …, $b_{n+1} = a_{n+1}+1$，则

$$1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n+1} \le 2n+1。$$

现有$2n+2$个数：

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1},\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n+1},$$

且每个数均属于$\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$。

由鸽巢原理知，这$2n+2$个数中至少有一对数相等。

由于$a_1,\ldots, a_{n+1}$互不相等，且$b_1,\ldots, b_{n+1}$互不相等，

因此存在一对 $b_j = a_j+1$与 a_k（$j \neq k$）相等，得 a_k和a_j只相差1。

鸽巢原理在数论中的应用

例. 证明: 在m个正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$中, 存在$0\le k< l \le m$, 使得$a_{k+1}+ a_{k+2}+ \ldots+a_l$ 能够被 m 整除。

证：考虑m个和：

$$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ s_3=a_1+a_2+a_3,\ \ldots,\ s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$$

(1) 若以上和中有一个能被 m 整除，则结论成立；

(2) 否则，设$r_1, r_2, \ldots, r_m$是$s_1, s_2\ldots, s_m$ 除以m的非零余数，则 $1 \le r_i \le m-1$，$i=1,\ldots, m$。

由鸽巢原理知，存在$r_l = r_k, l >k$，则

$a_{k+1}+a_{k+2}+ \ldots+a_l = s_l - s_k$能被 m 整除。

例. 从整数1, 2, …，200中选取101个不同的整数。证明所选的数中存在两个整数，使得其中一个是另一个的因子。

证：对于1到200间的整数n，n可写作以下形式：

$$n = 2^k \times a \qquad (1)$$

其中 a 是 1, 2, …, 200 内的奇数。

由于要选取 101 个整数，而 200 内只有 100 个奇数，由鸽巢原理知必存在两个整数 n_1 与 n_2 写作 (1) 式形式后，两个奇数相等。

假设$n_1=2^{k_1}\times b$, $n_2=2^{k_2}\times b$，其中 b 是1, 2, …, 200内的奇数，显然，当$k_1 > k_2$时, n_2 整除n_1；否则n_1整除n_2。

思考题：

1. 证明：在n+2个任选的正整数中，存在两个数，或者其差能被 2n 整除，或者其和能被 2n 整除。

2. 一间房屋内有10个人，他们当中没有人超过 60 岁（年龄只能以整数给出)，但又至少不低于 1 岁。

证明：总能找出两组人（两组人中不含相同的人），使得年龄和相同。题中的10能换成更小的数吗？

3. 证明：对任意正整数n, 必存在由 0 和 3 组成的正整数能被 n 整除。

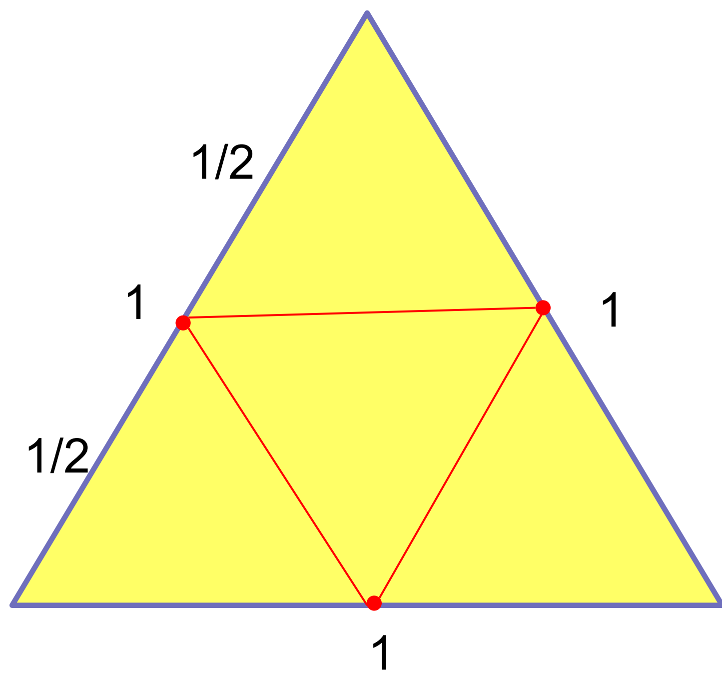
鸽巢原理在几何图形类问题中的应用

例5. 在边长为1的等边三角形内任意选择5个点。证明：一定存在2个点，其距离至多为1/2。

证明：如图所示，将等边三角形依每边中点分成四部分。

显然落在任意一个部分中的两点之间的距离至多为1/2。

根据鸽巢原理，任意选择5个点，肯定有两个点落在同一个部分，因此这两点距离至多为1/2。



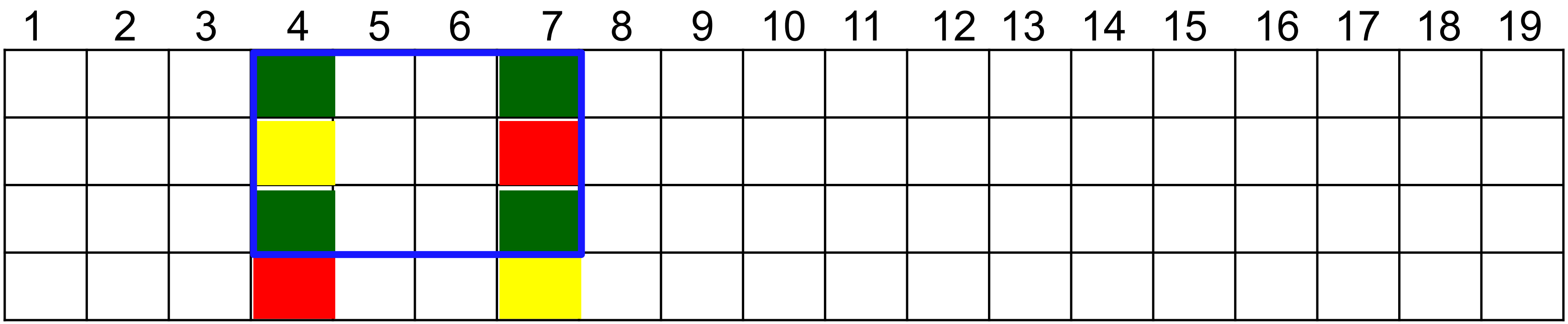
思考：1. 证明在边长为1的等边三角形中任意选择10个点，一定存在两个点，其距离至多为1/3。

2.确定一个整数n_k，使得如果在边长为**1**的等边三角形中任意选择n_k个点，一定存在**2**个点，其距离至多为**1/*k***。

3.在直径为**5**的圆内任意给定**10**个点，证明存在两点，它们之间的距离小于**2**。

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择。

证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择。

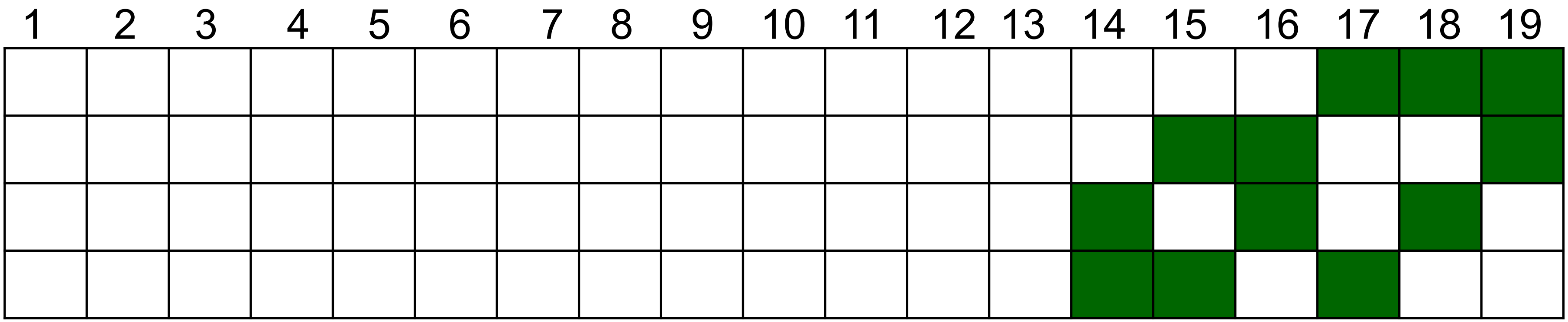
证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择。

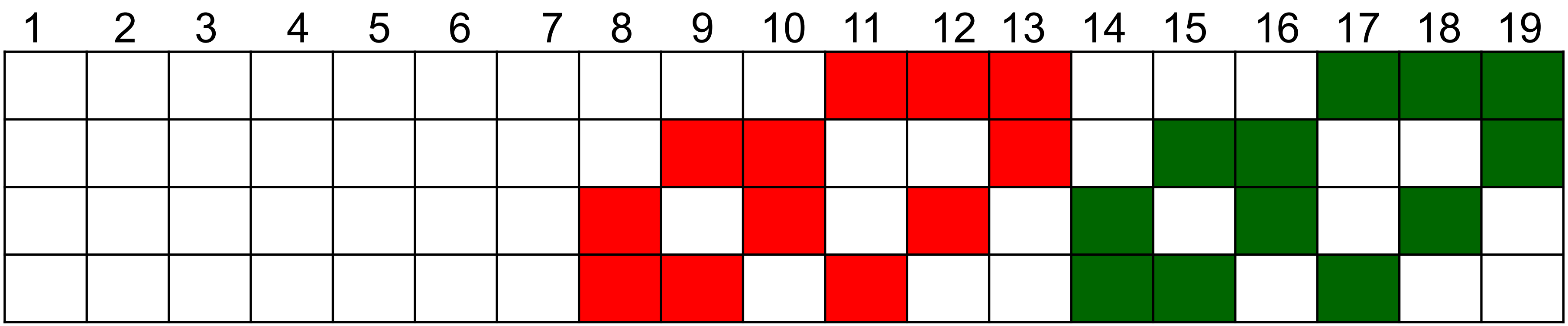
证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择。

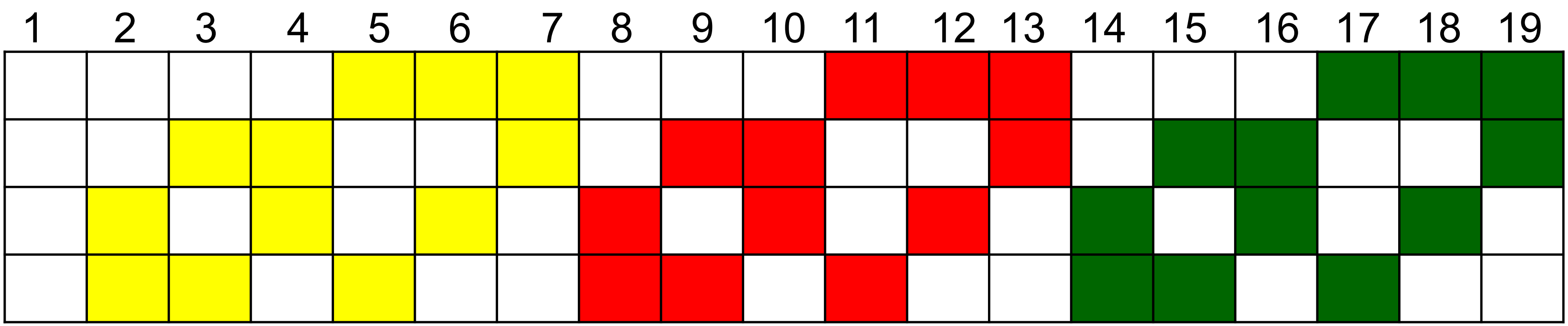
证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择。

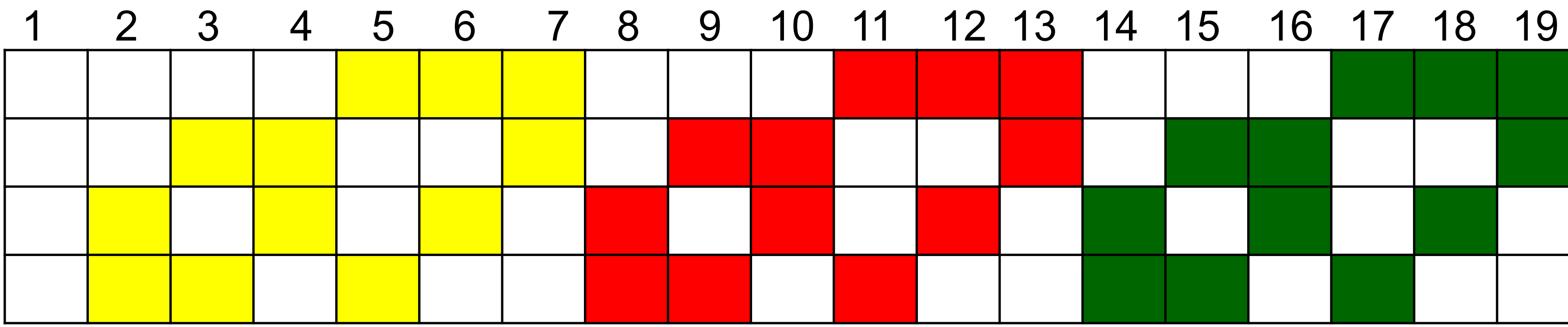
证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择。

证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。

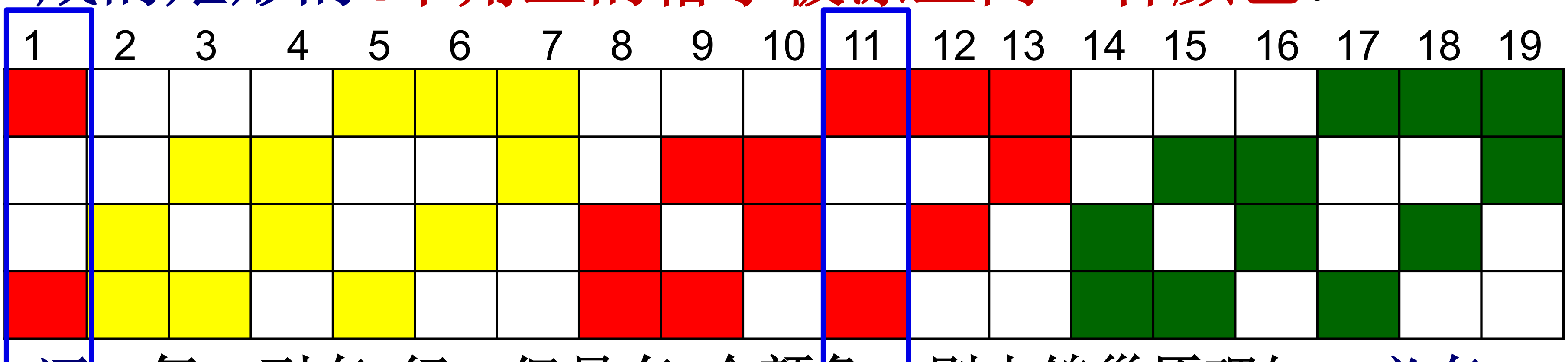


证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，则3种颜色下,一列中两个同色单元格的位置组合共有18种，而现在有19列。

因此，由鸽巢原理，必有两列的两个同色单元格位置相等且颜色相同。

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择。

证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，则3种颜色下,一列中两个同色单元格的位置组合共有18种，而现在有19列。

因此，由鸽巢原理，必有两列的两个同色单元格位置相等且颜色相同。

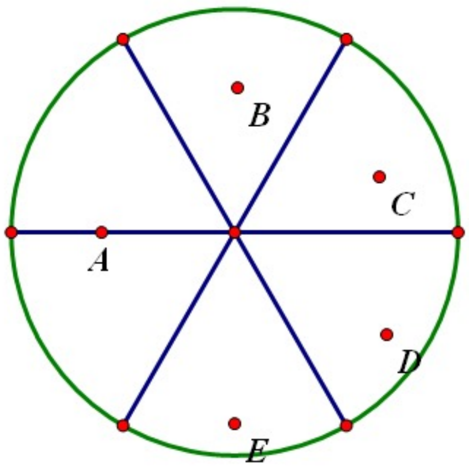
显然，这两列构成的矩形的4个角上的格子的颜色相同。证毕。

思考：随意地把一个3行9列棋盘的每个方格涂成红色或蓝色，求证：必有两列方格的涂色方式是一样的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9

思考：

（英国数学奥林匹克1975年的问题）在一个半径为1单位的圆板上钉7个钉，使得两个钉的距离是大于或等于1，那么这7个钉一定会有一个位置恰好是在圆心上。



典型应用：连续时间问题

例：某厂在五年期间的每一个月里至少试制一种新产品，每年最多试制19种新产品。试证明：一定存在连续几个月，恰好试制24种新产品。

证：设五年间每个月新产品数分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_{59}, a_{60}$。

构造出数列 a_n 的前 n 项和的数列 $s_1, s_2, \ldots, s_{59}, s_{60}$,

则有：$1 \le a_1 = s_1 < s_2 < \ldots < s_{59} < s_{60} \le 19 \times 5 = 95$,

而序列 $s_1+24, s_2+24, \ldots, s_{59}+24, s_{60}+24$也是一个严格递增序列:

$$25 \le s_1+24 < s_2+24 < \ldots < s_{59}+24 < s_{60}+24 \le 95+24 = 119。$$

于是，这120个数s_1，s_2，…s_{59}，s_{60} 和 s_1+24，s_2+24，…，$s_{59}+24$，$s_{60}+24$都在区间[1，119]内。

根据鸽巢原理，必定存在两个数 相等。

典型应用：连续时间问题

例：某厂在五年期间的每一个月里至少试制一种新产品，**每年最多试制19种新产品**。试证明：一定存在连续几个月，恰好试制24种新产品。

证: (续)：由于$s_1, s_2, \ldots, s_{59}, s_{60}$与$s_1+24, s_2+24, \ldots, s_{59}+24, s_{60}+24$均为严格单调的，因此必然存在一个$i$和$j$，使得

$$s_i = s_j + 24。$$

因此该厂在从第$j+1$个月起到第i个月的这几个月时间里，恰好试制了24种新产品。

中国剩余定理

- 韩信点兵传说：韩信带1500名兵士打仗，战死四五百人。命令士兵
  - ✓ 3人一排，多出2名；
  - ✓ 5人一排，多出3名；
  - ✓ 7人一排，多出2名。
  - ✓ 韩信马上说出人数：1073人。

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

- 《孙子算经》：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”
- 宋朝数学家秦九韶于1247年《数书九章》卷一、二《大衍类》对“物不知数”问题做出完整系统的解答。
- 明朝数学家程大位编成了歌决：

  三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

  七子团圆正半月，除百零五便得知。

例6 (中国剩余定理) 令 m, n是互素的正整数，a和b分别是小于m和n的非负整数。那么，存在正整数 x，使得 x 除以m余数为a, 且除以n余数为b，即

$$x = pm + a，\ x = qn + b。$$

分析：

1）首先构造足够多“除以m余数为a”的整数

2）证明在这些数中存在“除以n余数为b”的整数。

需要多少这样的数？

例6 (中国剩余定理) 令m, n是互素的正整数，a和b分别是小于m和n的非负整数。那么，存在正整数x，使得x除以m余数为a, 且除以n余数为b，即 $x=pm+a$，$x=qn+b$。

证：考虑 n个除以m余数为a 的整数：

$$a,\ m+a,\ \ldots,\ (n-1)m+a$$

假设存在两个数 $im+a$ 和 $jm+a$ $(0\leq i\leq j\leq n-1)$ 除以n的余数都为r，即存在非负整数 k 和 l 使得

$$im+a=kn+r,\quad jm+a=ln+r$$

上两式相减得$(j-i)m=(l-k)n$。由于m, n互素，因此 n 是 $j-i$ 的因子。

又由于$0\leq j-i\leq n-1$，矛盾。

故上述 n 个整数除以 n 的余数各不相同。

由鸽巢原理，n个数 $0, 1, 2, \ldots, n-1$中都出现在这些余数集之中，因此 b 也出现。

设对应除以 n 余数为 b 的数为 $x=pm+a$ $(0\leq p\leq n-1)$，

同时 $x=qn+b$ $(0\leq q\leq n-1)$,结论成立。

中国剩余定理一般形式

- 设$m_1, m_2, \ldots, m_k$是k个两两互素的正整数，$0 \le a_i < m_i$ ($i=1,\ldots,k$)，则存在x，使得 x 除以 m_i的余数为 a_i，即$x \equiv a_i \pmod{m_i}$ ($i=1,\ldots,k$) 。

$$\begin{cases} x \equiv a_1 & \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 & \pmod{m_2} \\ \quad \vdots & \\ x \equiv a_n & \pmod{m_n} \end{cases}$$

解决实际问题中的意义

- <u>密码问题</u>
- 可以选取5个两两互素的整数m_i (i=1,2,…5)，每个股东秘密保存b_i, 那么存在唯一的x使得x除以m_i的余数为b_i，用x作为密钥加密机密文件。

- **注意**：鸽巢原理仅提供了存在性证明，还需要设计求x的有效算法，这需要我们学习更多数学才能解决。

小结

- 鸽巢原理用于证明某种结构的存在性。
- 运用鸽巢原理通常需要将问题转化。

第三章鸽巢原理

3.1 鸽巢原理的简单形式

3.2 鸽巢原理的加强形式

3.3 Ramsey定理

回顾：鸽巢原理的简单形式

定理**3.1.1** 如果把 $n+1$个物体放进 n个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或者更多的物体。

鸽巢原理：加强形式

定理3.2.1 令q_1，q_2, …, q_n为正整数。如果将

$$q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$$

个物体被放进n个盒子内，那么，

- 或者第1个盒子至少含有q_1个物体，
- 或者第2个盒子至少含有q_2个物体，…，
- 或者第n个盒子至少含有q_n个物体。

简单形式：

当 $q_1 = q_2 = \ldots = q_n= 2$，有

$$q_1 + q_2 + \ldots +q_n- n +1 = n + 1.$$

鸽巢原理：加强形式

定理3.2.1 令q_1，q_2，…，q_n为正整数。如果将

$$q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$$

个物体被放进n个盒子内，那么，

- 或者第1个盒子至少含有q_1个物体，
- 或者第2个盒子至少含有q_2个物体，…，
- 或者第n个盒子至少含有q_n个物体。

证: (反证法) 假设对任意 $i=1,\ldots,n$，第 i 个盒子中物体都少于 q_i，那么物体总数少于或等于

$$(q_1-1)+(q_2-1)+\ldots+(q_n-1)=q_1+q_2+\ldots+q_n-n,$$

矛盾。因此，至少存在一个 $i=1,\ldots,n$，使得第 i个盒里至少有 q_i个物体。

鸽巢原理：加强形式

定理3.2.1 令q_1，q_2，…，q_n为正整数。如果将

$$q_1+q_2+\ldots+q_n - n+1$$

个物体被放进n个盒子内，那么，

- 或者第1个盒子至少含有q_1个物体，
- 或者第2个盒子至少含有q_2个物体，…，
- 或者第n个盒子至少含有q_n个物体。

特殊形式：$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = r$ 时，

$$q_1+q_2+\ldots+q_n - n+1= n(r-1)+1$$

推论3.2.2 设 n 和 r 都是正整数。如果$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子，则至少有一个盒子含有至少 r 个物体。

鸽巢原理：加强形式

推论3.2.2 设 n 和 r 都是正整数。如果 $n(r-1)+1$个物体放入 n个盒子，则至少有一个盒子含有至少 r 个物体。

假设第 i 个盒子里放入的物品数为 m_i，即

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n(r-1)+1,$$

有 $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)/n = (n(r-1)+1)/n = r-1+1/n > r-1$,
因此，至少有一个 $m_i \geq r$。

平均原理：如果n个非负整数$m_1, m_2, \ldots, m_n$的平均数大于$r-1$，即$(m_1+m_2+\ldots+m_n)/n > r-1$，则至少有一个整数大于或等于$r$。

设m和n都是正整数。如果m个物体放入n个盒子，则至少有一个盒子含有$\lceil m/n \rceil$个或更多的物体。

例: (1) 在100个人当中至少有多少人生在同一个月？

(2)从一幅标准的52张牌中随意选出26张牌，则至少有几张牌是同一个花色？

(3)从一幅标准的52张牌中要随意选出 7 张是同样的花色，必须至少选出多少张牌？

解: (1) 至少有[100/12]=9个人生在同一个月。

(2) 至少有[26/4] ＝ 7张牌是同一个花色。

(3) 由鸽巢原理，任意选出25 张牌，必存在[25/4] =7 张牌是一个花色。

当选出24张牌时，有可能出现每个花色都是6张牌。

因此，必须至少选出 25张牌。

例．一篮水果装有苹果、梨和桔子。为了保证或者至少8个苹果，或者至少6个梨 或者 至少9个桔子，则放入篮子中的水果的最少件数是多少？

解：由鸽巢原理的加强形式，放入篮子中的水果为8＋6＋9－3＋1＝21 件时，无论如何选择，都将满足题目要求。

但当放入篮子中的水果数为20时，可能出现7个苹果，5个香蕉和8个桔子的情形，不满足题目要求。

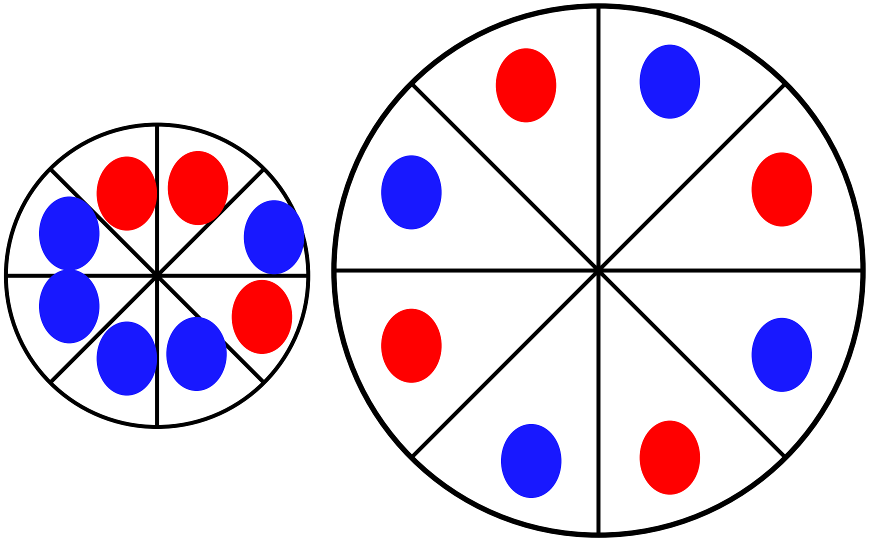
因此放入篮 子中的水果的最少件数是 21。

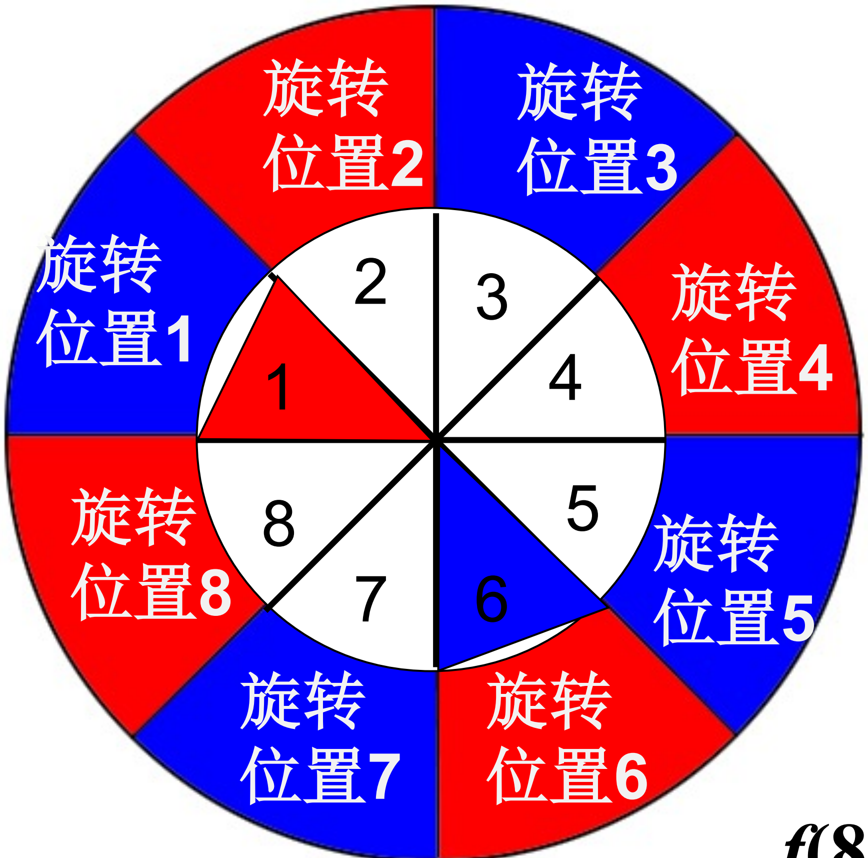
(用于判断满足条件的最小物品总数)

例：两个大小不一的碟子，均被分成200个相等扇形。

- ✓ 在大碟子中任选100个扇形涂成红色，其余的涂成蓝色。
- ✓ 小碟子中，每一个扇形随机地涂成红色或者蓝色，数目无限制。
- ✓ 将小碟子与大碟子中心重合。

试证能够通过适合旋转，存在两个碟子相同颜色重合的扇形数至少是100个的情形。





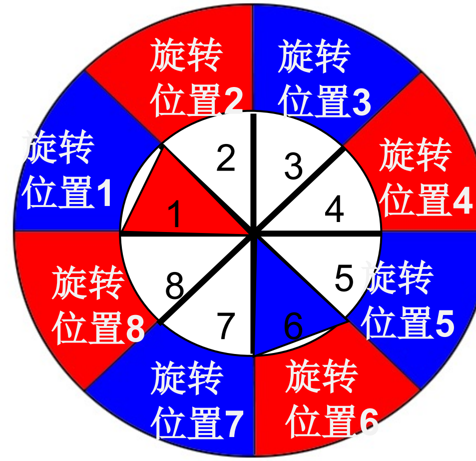
分析：大碟子不动，转动小碟子，转完一圈，回到原位，每个扇形与所有旋转位置颜色重合次数均为4。

$f(8,1)=1, f(1,1)=0$

定义函数：

$$f(i,j)=\begin{cases}0, & \text{在旋转位置 } i\text{，} j \text{ 扇区与大碟颜色不同}\\ 1, & \text{在旋转位置 } i\text{，} j \text{ 扇区与大碟颜色相同}\end{cases}$$

旋转位置 \ 小碟子扇形区编号	1	2	3	…	200
S_1	$f(1,1)$	$f(1,2)$	$f(1,3)$	…	$f(1,200)$
S_2	$f(2,1)$	$f(2,2)$	$f(2,3)$	…	$f(3,200)$
S_3	$f(3,1)$	$f(3,2)$	$f(3,3)$	…	$f(3,200)$
⋮	…	…	…	…	…
S_{200}	$f(200,1)$	$f(200,2)$	$f(200,3)$	…	$f(200,200)$



当配色确定时，通过旋转小碟, **共有 200 种可能的对应方式**，因此**平均颜色重合数为20000/200=100**。

由鸽巢原理的加强形式知，肯定存在一种方式，其颜色重合数至少为100.

对任意的k, $\sum_{i=1}^{100} f(i,k) = 100$, **(每列)**

即转动一圈，第 k个扇区与所有位置上的颜色重合数为100。

因此，所有扇区在在所有位置上，颜色重合的总数为：

$$\sum_{i,j=1}^{200} f(i,k) = 200 \times 100 = 20000$$