



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

5.6 再论偏序集


回顾：集合的组合

■ n 元素集合的 r 子集的数目

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r(r-1) \dots 1}$$

例：有10位专家，从中选取5位构成专家小组，一共可构成多少个专家小组？

$\binom{10}{5}$ 个专家小组



例： $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

证明：

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

另一种证明方式：组合证明

问题：从 n 个不同的球中取出 k 个球，有多少种方法？

方法1：直接取，共有 $\binom{n}{k}$ 种取法。

方法2：取出 $n-k$ 个球丢弃，留下剩下的 k 个球，共有 $\binom{n}{n-k}$ 种取法。

因此，得 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 。

组合证明

- 是一种依靠计数原理构建代数事实的证明方法
- 基本框架：
 1. 定义一个集合 S ;
 2. 通过一种计数方式得出 $|S| = n$;
 3. 通过另一种计数方式得出 $|S| = m$;
 4. 得出结论 $n = m$ 。

■ 二项式定理

令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

二项式系数

n 元素集合的 r 子集的数目

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k(k - 1) \dots 1}$$

本章的目的主要是讨论二项式系数一些相关等式和性质。



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

5.1 帕斯卡三角形

定理5.1.1(Pascal公式) 对于满足 $1 \leq k \leq n$ 的所有整数 k 和 n , 有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$n-1$ 元素集合的
 $k-1$ 子集的数目

n 元素集合的
 k 子集的数目

$n-1$ 元素集合的
 k 子集的数目

设集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, S 的 k 子集分为两类:

✓ 不包含1 的 k 子集 $\binom{n-1}{k}$ 个

✓ 包含1 的 k 子集 $\binom{n-1}{k-1}$ 个

(组合证明)

定理5.1.1(Pascal公式) 对于满足 $1 \leq k \leq n$ 的所有整数 k 和 n , 有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

证明：设 S 的 k 子集的集合为 X , 那么 $|X| = \binom{n}{k}$ 。

设 x 是 S 的一个元素,

令 A 是**不含** x 的 k 子集的集合,

B 是**包含** x 的 k 子集的集合,

那么, $X = A \cup B$, 且 $A \cap B = \emptyset$ 。

由加法原理, $|X| = |A| + |B|$ 。

计算得: $|A| = \binom{n-1}{k}$, $|B| = \binom{n-1}{k-1}$

因此, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 。证毕。

Pascal三角形

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$\binom{n}{k}$ 的规律

- 对角线上元素全为1
- 第一列上元素全为1
- 对角线以外各项都是其上一行的两项的和：

- 直接上方的项
- 直接上方的项的直接左邻的项

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{5}{1}$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									...
1	1	1								...
2	1	2	1							...
3	1	3	3	1						...
4	1	4	6	4	1					...
5	1	5	10	10	5	1				...
6	1	6	15	20	15	6	1			...
7	1	7	21	35	35	21	7	1		...
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	...
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

$n=9,10$ 的两行分别是多少？

Pascal三角形

每一行相加:
(第 n 行)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^1$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$$

[illegible]

第1列:

$$\binom{n}{1} = n$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

■ 第2列是三角形数，即三角形阵列中的点数：

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$



1

$n=2$



3

$n=3$



6

$n=4$



10

$n=5$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

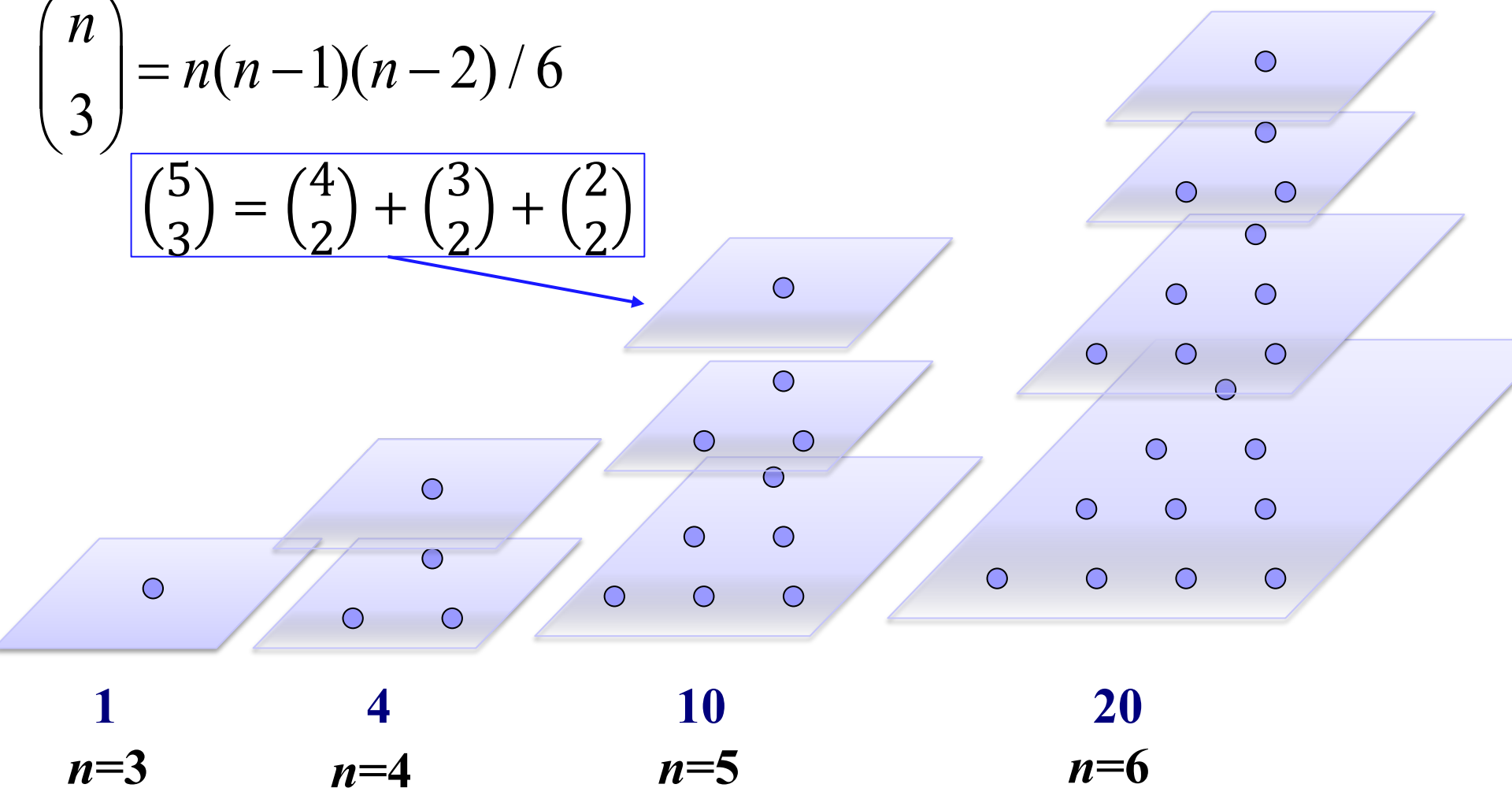
- 第3列是四面体数：
$$\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$$

K=3

- 第3列是四面体数，即四面体阵列中的点数

$$\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2) / 6$$

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$



二项式系数的另一种组合解释

$p(n, k)$: 从 $\binom{0}{0}$ 项到 $\binom{n}{k}$ 项的路径的数目

两种移动方向:

$$p(n, 0) = 1$$

$$p(n, n) = 1$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

二项式系数的另一种组合解释

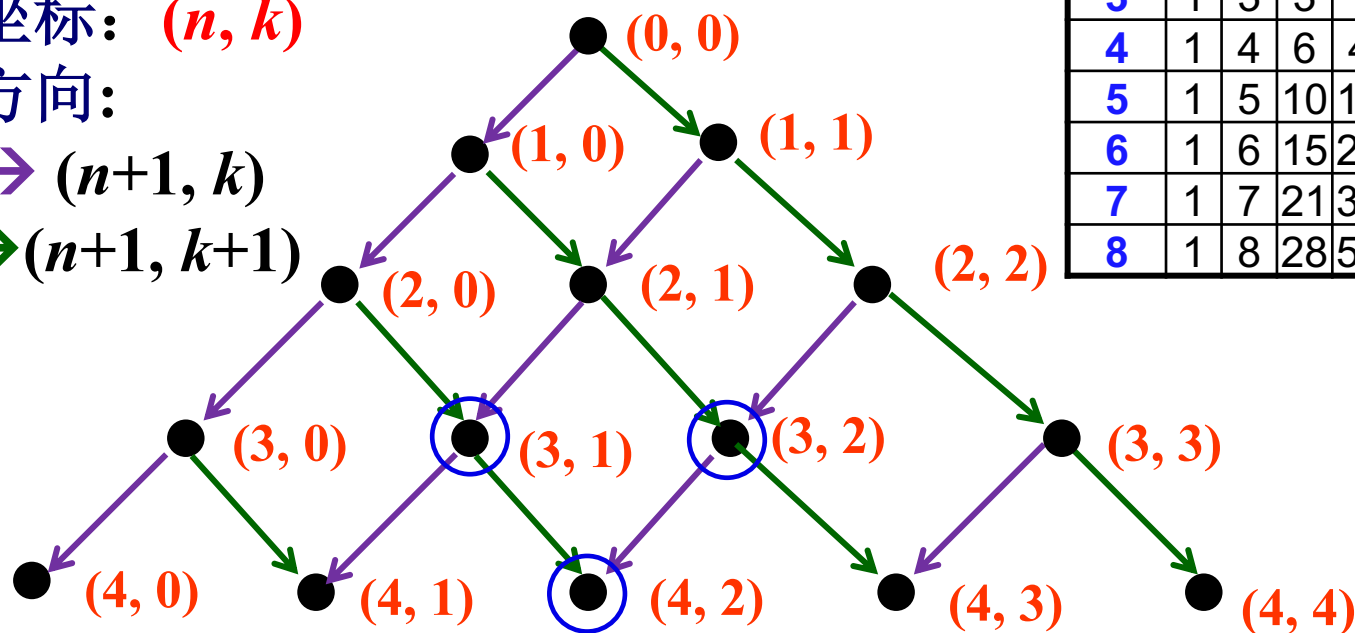
n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

• 顶点坐标: (n, k)

• 移动方向:

$(n, k) \rightarrow (n+1, k)$

$(n, k) \rightarrow (n+1, k+1)$



令 $p(n, k)$ 表示从 $(0,0)$ 到 (n,k) 的路径数,

• 规定 $p(0, 0)=1$

• 由加法原理, $p(n, k) = p(n-1, k) + p(n-1, k-1)$, 其中, $n \geq 1$.

用数学归纳法可证 $p(n, k) = \binom{n}{k}$



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

5.2 二项式定理

定理5.2.1 令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

证明: (组合证明) 将 $(x+y)^n$ 写成 n 个 $x+y$ 因子的乘积形式:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$$

用分配律将乘积展开, 再合并同类项。

展开时, 对于每个因子 $x+y$, 或者选择 x , 或者选择 y , 所以展开结果有 2^n 项, 其中, 每一项具有形式 $x^{n-k}y^k, k=0,1,\dots,n$ 。

合并同类项时, $x^{n-k}y^k$ 的系数相当于在 n 项因子中选 k 个 y , 余下 $n-k$ 项因子是 x ,

因此, 等于组合数 $\binom{n}{k}$ 。

二项式定理的等价形式

令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$(y+x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

定理5.2.1 令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例: 用二项式定理求下列式子

$$(1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$$

$$(2) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k} = (3+(-1))^n = 2^n$$

$$(3) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 9^{n-k} = (9+(-1))^n = 8^n$$

$$(4) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 9^k = (1+9)^n = 10^n$$

二项式系数的其他等式

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

- 例： n 个人中选 k 人组成足球队，其中一人为队长，有多少种不同选法？

- 先选足球队，然后从足球队中选队长，选法数目为：

$$\binom{n}{k} \binom{k}{1} = k \binom{n}{k}$$

- 先选队长，再在剩下的 $n-1$ 人中选 $k-1$ 个足球队员，选法数目为： $\binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1}$