

北京航空航天大学

2011—2012 学年 第二学期期末

离散数学3

《组合数学》

班 级 _____ 学 号 _____

姓 名 _____ 成 绩 _____

2012 年 6 月 4 日

班号_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

《组合数学》期末考试卷

注意事项：1、考试时间 120 分钟、闭卷。

2、第一题的答案直接填写在题目留出的空白，第二题之后，答题写在后面的空白页上，请标明题号。

一、填空题（每空 5 分，共 35 分）

(1) 7 颗不同颜色珠子做成一条项链，其中有 3 颗红、黄、绿珠子任意 2 个都不能相邻，共能够有 72 种项链构成样式。

(2) 构造 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 的排列 73658412，其逆序列是 6, 6, 1, 4, 2, 1, 0, 0.

(3) 对于大小为 $2n$ 的多重集 $\{n \cdot a, 1, 2, 3, \dots, n\}$ ，求它的 n -组合数 $=$ 2^n 。

(4) 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ ，共有 $\binom{27}{3}$ 个满足 $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq -5$, $x_4 \geq 9$ 的整数解。

(5) 一个厨师会做 n 种菜品，要想用这 n 种菜品做成 100 桌酒席，且任何一桌酒席的菜品不会完全出现在另一桌上，则 n 最少为 9。

(6) 设 h_n 是方程 $e_1 + e_2 + \dots + e_k = n$ 的正整数解的个数，序列 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 的生成函数是 $\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$ 。

(7) 令 m 和 n 是非负整数 $m \geq n$ 。有 $m+n$ 个人排成一队进入电影院，电

影票为 50 元，这 $m+n$ 人中有 m 个人只有 50 元纸币， n 个人只有 100 元纸币。售票处采用一个空的售票箱。人们能够排队总有零钱

可找列队方式数为 $\frac{m-n+1}{n+1} \binom{m+n}{n}$

二、证明：证明对任意给定的 52 个整数，存在其中的两个整数，要么两者的和能被 100 整除，要么两者的差能被 100 整除。（共 10 分）

鸽巢

三、有两台机器 A 和 B 以及若干项需要运行的任务，每个任务在一台机器上运行。采用 $(k: a, b)$ 表示编号 k 任务可以在机器 A 的 a 模式或机器 B 的 b 模式运行，每台机器切换模式需要重启一次。当机器初始为关机状态，每台机器有 9 种不同的模式，需要执行 11 项任务： $(0:0,1)$ 、 $(1:0,4)$ 、 $(2:1,2)$ 、 $(3:1,5)$ 、 $(4:3,6)$ 、 $(5:4,7)$ 、 $(6:4,8)$ 、 $(7:5,4)$ 、 $(8:5,8)$ 、 $(9:6,7)$ 、 $(10:8,7)$ 时，这 11 项任务按照一定顺序在 2 台机器上调度，机器启动的最小次数是多少？（给出求解过程）。（共 10 分）

四、求多重集 $\{1 \cdot a, 2 \cdot b, 3 \cdot c, 4 \cdot d\}$ 存在多少种循环排列，对除 a 以外每种类型的字母，该类型的所有字母不连续出现，即不出现包含 bb 、 ccc 、 $dddd$ 的循环排列（求出最后数值）。（12 分）

2 871

五、确定方程 $5x_1+6x_2+x_3+x_4=289$, 满足 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq 4, 0 \leq x_4 \leq 5$ 的整数解个数。(8 分)

生成函数 $\frac{1}{1-x^5} \frac{1}{1-x^6} (1+\dots+x$
 $(1+\dots+x^5)$

六、求解初始值为 $h_0=0$ 的递推关系 $h_n=2h_{n-1}-n+2^n$ ($n \geq 1$)。(12 分)

$$h_n = (n-2)2^n + n + 2$$

七、用匹配算法确定图 1 中二分图的最大匹配, 并找出使得 $|S|=|M|$ 的覆盖 S 。(共 13 分)

(1) 假设 $M^1=\{(x_3,y_3), (x_4,y_4), (x_5,y_5)\}$, 给出计算最大匹配 M^* 过程 (需要给出每步二分图标注结果、交错路径 γ 及匹配 M^i)。(10 分)

(2) 给出求解过程 (1) 得出的最大匹配 M^* 以及使得 $|S|=|M|$ 覆盖集 S 。(3 分)

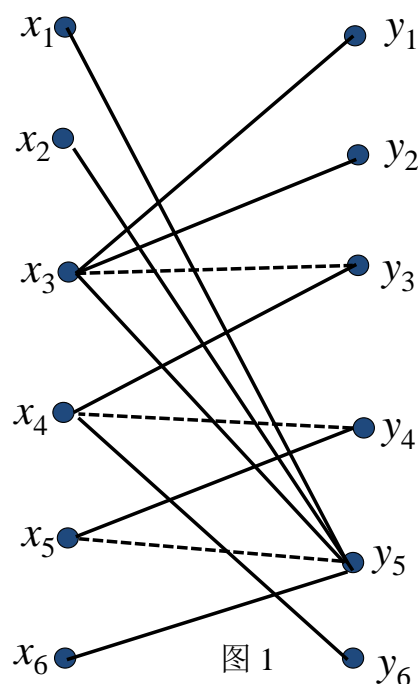


图 1