第2章 排列与组合

2.1 4个基本的计数原理

北航计算机学院：李建欣
Tel：82339274
E-mail：lijx@act.buaa.edu.cn
https://myjianxin.github.io/

基本计数问题

- 选取问题
  - 排列组合模型
  - 加法法则与乘法法则
  - 二项式定理和组合恒等式
  - 多项式定理
- 方程非负整数减问题
- 投球入盒问题

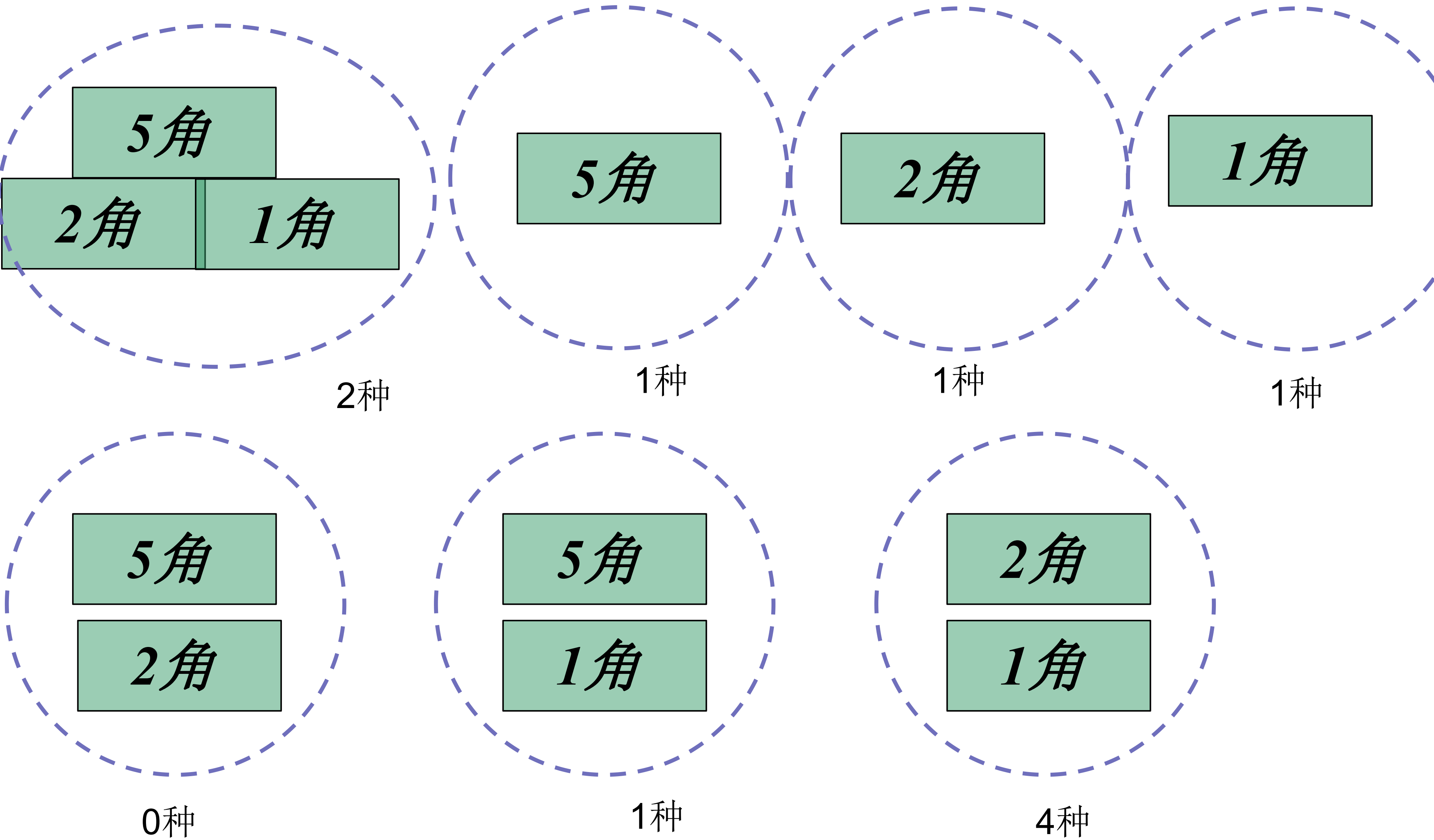
几个问题？

- 1、用1角、2角和5角的三种人民币（每种的张数没有限制）组成1元钱，有多少种方法？
- 2、4位同学和2位老师排成一排照相，规定老师站在两边有多少种排法？
- 3、有多少个取自{1，2，…，9}的各位互异的7位数，使得5和6不以任何顺序相继出现？
- 4、一本书从第1页开始编排页码，共用数字2355个，那么这本书共有多少页？

几个问题

- 将数字1，2，…，15 放入一个4×4的方阵中，问共有多少种摆放方法？若放入6×6的方阵中，共有多少种摆放方法
- 数字1,1,1, 3, 8可以构造出多少个不同的5位数？

1.用1角、2角和5角的三种人民币（每种的张数没有限制）组成1元钱，有多少种方法？



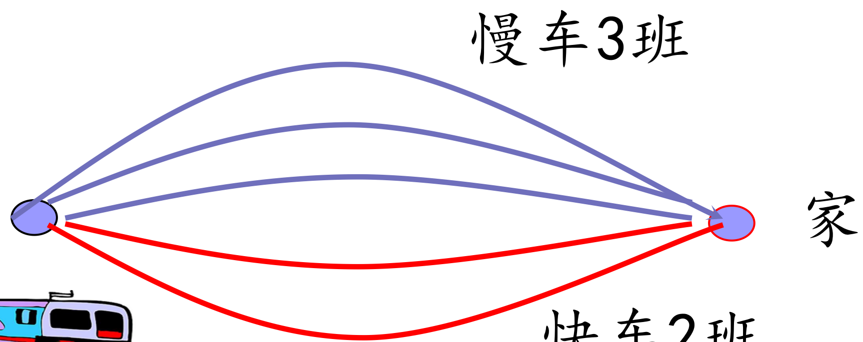
主要内容

- 2.1基本计数原理
  - 加法原理与乘法原理
  - 减法原理与除法原理
- 2.2 集合的排列
- 2.3 集合的组合
- 2.4 多重集的排列
- 2.5 多重集的组合

例1：寒假回家

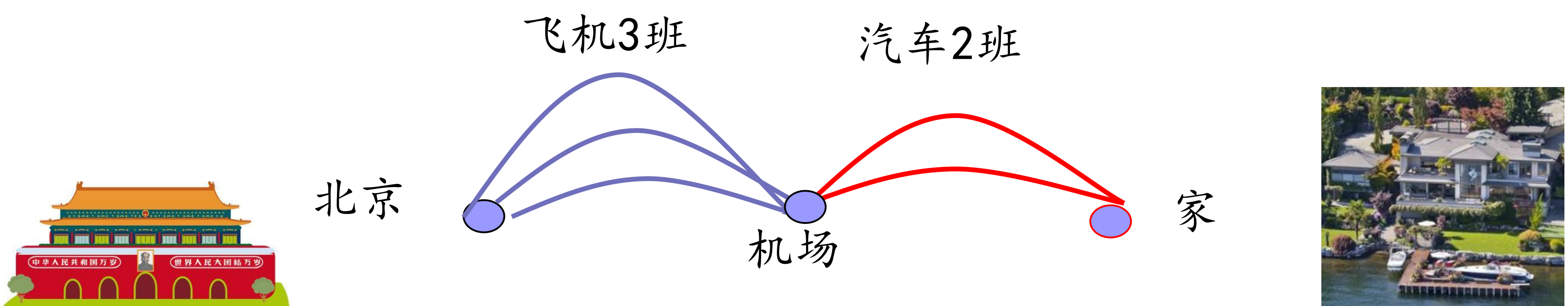
- 例子：寒假坐火车回家
  - 快车2班
  - 慢车3班

- 问题：一共有多少种回家的方式？
- 答案：2+3=5



例1：寒假回家

- 例子：寒假坐飞机回家，但无法直达。
    - 飞机3班
    - 汽车2班
- 问题：一共有多少种回家的方式？
- 答案：3*2=6

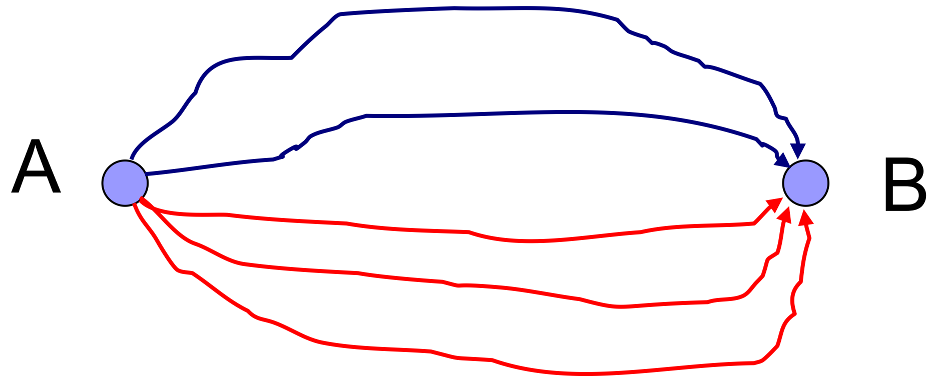


两种原理比较

分类

加法原理：

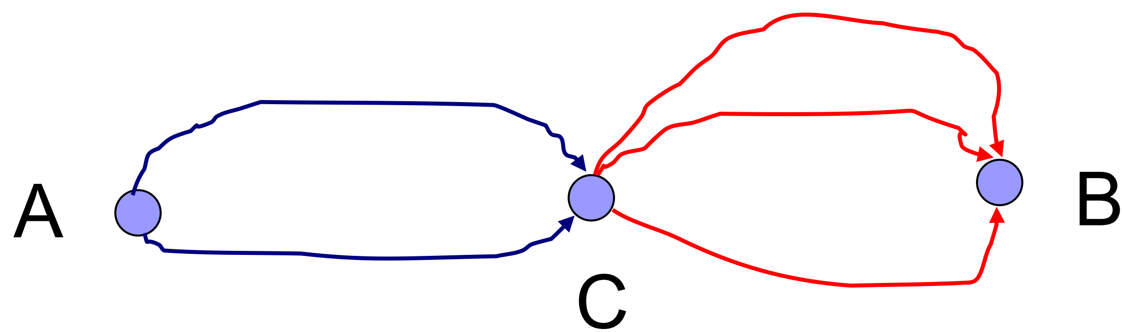
2＋3



分步

乘法原理：

2×3



加法原理Addition Principle

自然语言叙述:

- 设事件A有p种产生方式，事件B有q种产生方式，则事件A或B之一有$p+q$种产生方式。

$$|A|+|B|$$

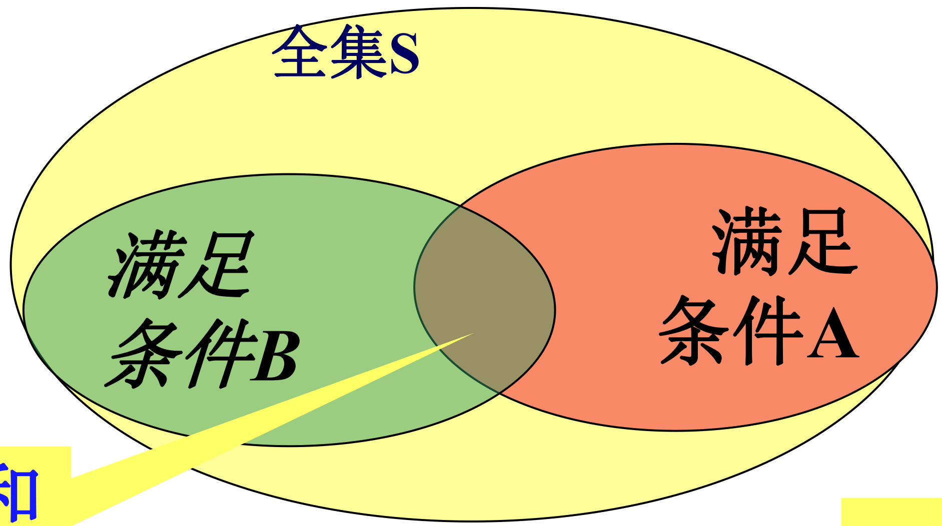
集合论描述:

- 设集合S划分为$S_1, S_2,\ldots, S_m$（即$S= S_1\cup S_2\cup \ldots \cup S_m$，$S_i\cap S_j=\varnothing$，$i\neq j$）。则:

$$|S|=|S_1|+|S_2|+\ldots+|S_m|$$

- **注意**：（1）集合的一个划分是指：该集合由一些**互不相交**的子集并集构成。（2）若**这些子集存在重叠**，则需要其他原理计数。

非独立集合：容斥原理（第6章）



容斥

$A \cap B$:能被5和6整除的数

S={1,2,…, 600}

$|A \cup B| \neq |A| + |B|$

$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$

乘法原理Multiplication Principle

自然语言叙述:

- 设事件A有p种产生方式，事件B有q种产生方式，则事件A与B一共有$p*q$种产生方式。

$$|A|\times|B|$$

集合论描述:

- 设S是P和Q的乘积（即$S=P\times Q$），则

$$|S|=|P|\times|Q|$$

例2：班干部推选

例子：假设计算机学院某小班有男生25名，女生5名。

- 问题一：该班级一共有多少名学生?

答案：25+5=30

- 问题二：如果选取1名男生担任班长，1名女生担任团支书，一共有多少种组合?

答案：25*5=125

- 问题三：问题二中不同时选中双胞胎兄妹男同学A和女同学B，一共有多少种组合？

例2：班干部推选

例子：假设计算机学院某小班有男生25名，女生5名。

- 问题三：问题二中不同时选中双胞胎兄妹男同学A和女同学B，一共有多少种组合？
  - 加法原理
    - 类别1：选A当班长，女生选择有4种。
    - 类别2：不选A当班长，男生选择24种，女生选择4种。24*5=120

    答案：4+24*5=124
  - 减法原理
    - 不满足情况1种，125-1=124。

减法原理 Subtraction Principle

更简便方法

- **满足要求方案：**需要分类讨论
- **不满足要求方案：**其实只有1种
- 减法原理：令集合$A \subseteq U$, $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$是$A$在$U$中的补集。那么，$|A| = |U| - |\overline{A}|$.

注：与加法原理等价。

除法原理 Division Principle

- 例2: 30个学生分成5组，每个组学生数？

- 除法原理：S是一个有限集，被划分为k个部分，使得每个部分含有相同的元素个数n。那么：

$$k = \frac{|S|}{n}$$

应用例子3:

- 例. 下面代码执行后k的值？

k=0

for i_1=1 to n_1

  $k := k+1$

for i_2=1 to n_2

  $k := k+1$

  ⋮

for i_m=1 to n_m

  $k := k+1$

解： k的初值为0。第i个循环被执行n_i次，循环分别进行，运用加法原理，即得到

$$k=n_1+n_2+\ldots+n_m$$

如果是嵌套循环呢？

应用例子4:

- 例. 有多少个不同的7位二进制串？
- 例. 一个实验室有32台微机，每台微机有24个端口。这个实验室有多少个不同的单机端口？

应用例子5:

- **例**. 确定数$3^4\times5^2\times11^7\times 13^8$的正整数因子的个数。

- **要点**：它的每个因子具有形式

  $3^i\times5^j\times11^k\times 13^l$,

其中，$0\le i\le4$, $0\le j\le2$, $0\le k\le7$, $0\le l\le8$.

乘法原理：因子总数$5\times3\times8\times9$

应用例子6

- **有6个桔子和9个苹果，要求篮子中至少有一个水果，问可以装配成多少种不同的水果蓝？**

- 可以用不同的计数方法。

（1）先设包括空的情形，那么，选择橘子方法有7种(0,1,2,3,4,5,6)，选择苹果方法有10种，故共有70种，除去空的情况有69种。

（2）考查划分为两个部分S_1和S_2，其中S_1表示没有橘子的组成方式，S_2表示至少有1个橘子的组成方式，那么$|S_1|=9$, 而$|S_2|=6\times10=60$，故共有69种。

注：这里认为橘子之间没有区别，若对橘子间编号，计数方式复杂得多。

小练习

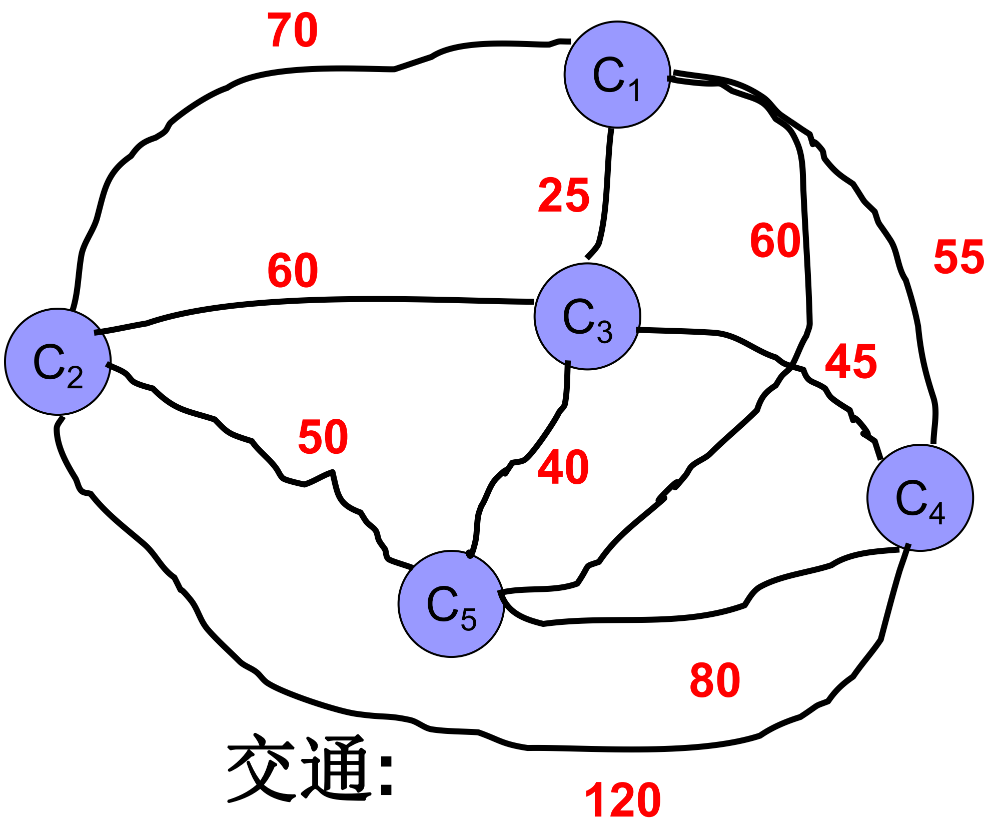
- 例. 在1000和9999之间有多少具有不同数字的奇数？

- 解：满足条件的数字是4个数字的有序排列，其中个位数只能是奇数，即属于{1,3,5,7,9}。十位数和百位数可是任一个数字，千位数不能为0。

个位数：5种选择；千位：8。乘法原理：$5\times8\times8\times7=2240$

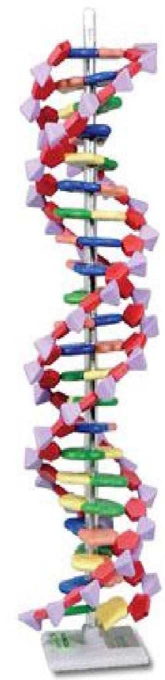
排列计数的广泛应用

经验：集合重复计算问题，对有约束条件的位置计数



交通:

多少可能不同的巡回路径？



生物:

多少种DNA链？

计数模型

- 投球入盒问题
- 选取问题
- 不定方式非负整数求解为
- 路径问题
- 整数拆分问题
- …