第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形
5.2 二项式定理
5.3 二项式系数的单峰性
5.4 多项式定理
5.5 牛顿二项式定理

5.4 多项式定理

- 把二项式定理 $(x+y)^n$ 扩展到$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n$

- 多项式系数：

$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_t!}$，其中 $n_1, n_2, \ldots\ n_t$是非负整数，且$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$。

  - 表示重数分别为$n_1, n_2, \ldots\ n_t$的 t 种不同类型物品的多重集的排列数

二项式系数：$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$，可记为$\binom{n}{r\ \ n-r}$

多项式系数的帕斯卡公式

- 二项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{k\ \ n-k} = \binom{n-1}{k\ \ n-k-1} + \binom{n-1}{k-1\ \ n-k}$$

- 多项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \binom{n-1}{n_1-1\ n_2 \ldots n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \ldots\ n_t} + \ldots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t-1}$$

多项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \binom{n-1}{n_1-1\ n_2 \ldots n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \ldots\ n_t} + \ldots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t-1}$$

组合证明：

设多重集 S 有 t个不同的元素$a_1, a_2, \ldots, a_t$，每个元素的重复数分别为$n_1, n_2, \ldots, n_t$，则 S的全排列一共有$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$个。

假设全排列的第1个位置的元素为a_i, $1 \le i \le t$，此时S的全排列个数为 $\binom{n-1}{n_1\ \ldots n_{i-1}\ n_i-1\ \ n_{i+1}\ \ldots n_t}$。

因此，等式成立。

定理 5.4.1. 设 n是正整数。对于所有的$x_1, x_2,\ldots, x_t$，有

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_1 \ldots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t}$$

其中求和是对$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$的所有非负整数解$n_1, n_2, \ldots, n_t$进行的。（证明方法同二项式定理）

例. 确定在$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$的展开式中，$x_1^3x_2x_3^4x_5^2$的系数。

解: $x_1^3x_2x_3^4x_5^2$的系数为$\binom{10}{3\ 1\ 4\ 0\ 2} = \frac{10\,!}{3!4!2!}$

定理 5.4.1. 设 n是正整数。对于所有的$x_1, x_2, \ldots, x_t$，有

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_1 \ldots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t}$$

其中求和是对$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$的所有非负整数解$n_1, n_2, \ldots, n_t$进行的。（证明方法同二项式定理）

例. 证明：$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1-n_2+n_3} = (-3)^n$

证明：$(-3)^n = ((-1)+(-1)+(-1))^n$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1} (-1)^{n_2} (-1)^{n_3}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1} (-1)^{-n_2} (-1)^{n_3}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1-n_2+n_3}$$

第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形
5.2 二项式定理
5.3 二项式系数的单峰性
5.4 多项式定理
5.5 牛顿二项式定理

5.5 牛顿二项式定理

1676年牛顿把二项式定理进行扩展：

定理5.5.1: 令 α 是一个实数, 对于所有满足 $0 \le |x| < |y|$ 的变量 x, y 有

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

其中, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

- 如果 α 是整数 n, 那么对于 $k>n$, $\binom{n}{k} = 0$, 上述式子即为二项式定理:

$$(x+y)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

关于牛顿二项式定理注记

- 牛顿二项式定理是二项式无穷级数展开式。可通过“泰勒级数”展开式证明。
- 可以用于计算一些无理数的精确值，如平方根。
- 主要用于第7章中生成函数。

牛顿二项式的等价形式

定理5.5.1: 令 α 是一个实数, 对于所有满足 $0\le |x|<|y|$ 的变量 x, y 有

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}y^{\alpha-k}$$

其中, $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ 。

令 $z=\frac{x}{y}$ （此时，$|z|<1$ ）得 $(x+y)^{\alpha}=(zy+y)^{\alpha}=y^{\alpha}(z+1)^{\alpha}$ 。

则牛顿二项式定理可以等价地转述成:

对满足 $|z|<1$ 的任意 z， 有

$$(1+z)^{\alpha}=\frac{(x+y)^{\alpha}}{y^{\alpha}}=(1+\frac{x}{y})^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(\frac{x}{y})^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^{k}$$

牛顿二项式的等价形式

对满足 $|z|<1$ 的任意 z，有 $(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k$

令 $\alpha=-n$, 则有 $(1+z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}z^k$,

由于 $\binom{-n}{k}=\dfrac{-n(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}$

$$=(-1)^k\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}=(-1)^k\cdot\binom{n+k-1}{k}$$

因此，当 $|z|<1$时，$(1+z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k$

对满足$|z|<1$的任意z，有$(1+z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k$

- $n=1$时，得

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \quad (|z|<1)$$

- 用**-z**代替z，得

$$(1-z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^k \quad (|z|<1)$$

$n=1$时，得 $$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \quad (|z|<1)$$

组合推理： $(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$ $(|z|<1)$

$(1-z)^{-n} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} \cdots \frac{1}{1-z}$

$= (1+z+z^2+\ldots) \ldots (1+z+z^2+\ldots)$ （n个因子）

假设从第1个因子取 z^{k_1},从第2个因子取 z^{k_2} …, 从第n个因子取 z^{k_n}，且$k_1+\ldots+k_n=k$, 其中 $k_1,\ldots,k_n$为非负整数。因此得到 z^k 的不同方法等于$k_1+\ldots+k_n=k$ 的非负整数解的个数，即$\binom{n+k-1}{k}$。

因此等式成立。

应用：求解任意精度的平方根

令 α =1/2，有$\binom{\alpha}{0}=1$。对于$k>0$有

$$\binom{\alpha}{k}=\binom{1/2}{k}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\frac{1\times2\times3\times4\times\cdots\times(2k-3)\times(2k-2)}{2\times4\times\cdots\times(2k-2)\times(k!)}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{k\times2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!^2}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{k\times2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$$

$$\sqrt{20}=\sqrt{16+4}=4\sqrt{1+0.25}$$
$$=4\left(1+\frac{1}{2}(0.25)-\frac{1}{8}(0.25)^2+\frac{1}{16}(0.25)^3-\cdots\right)$$
$$=4.472\cdots$$

因此, 对$|z|<1$, 有

$$\sqrt{1+z}=(1+z)^{1/2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\times2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}z^k$$

$$=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2\times2^3}\binom{2}{1}z^2+\frac{1}{3\times2^5}\binom{4}{2}z^3-\cdots$$

总结

- 帕斯卡三角形
  - 帕斯卡公式、
- 二项式定理
  - 二项式系数相关等式的证明
    - 利用已有公式化简
    - 求导法、积分法
    - 组合证明（推理）
- 二项式系数的单峰性
  - 链、反链
  - 链划分、反链划分
- 多项式定理、牛顿二项式定理