第十四章Pólya计数

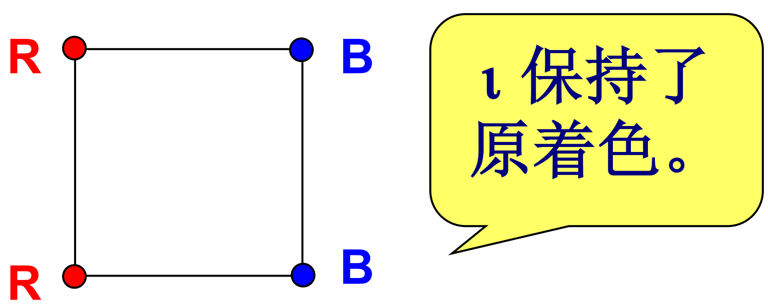
4.1 置换群与对称群

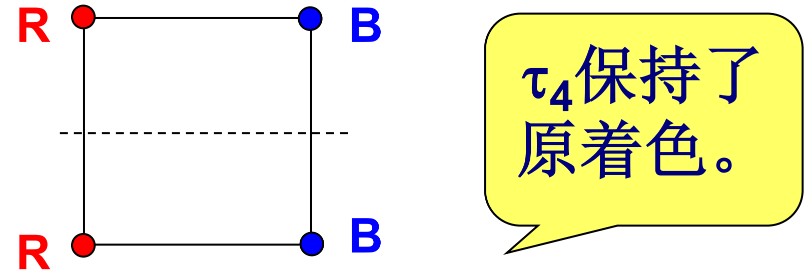
4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

14.2 Burnside定理

- 在集合X的置换群G的作用下，计算 X 的非等价着色数的Burnside公式
- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c， $f*c \in C$





保持原着色的置换构成该着色的稳定核。

稳定核与不变着色集

设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

- 使着色 c 保持不变的G中所有置换的集合

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f * c = c \},\ c \in C$$

$G(c) \subseteq G$

称为 c 的稳定核。

结论：任何着色 c 的稳定核也形成一个置换群。

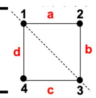
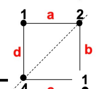
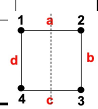
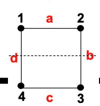
- 在置换 f 作用下保持不变的C中所有着色的集合：

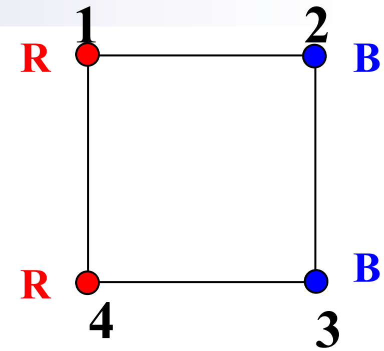
$C(f) \subseteq C$

$$C(f) = \{ c \mid c \in C, f * c = c \}, f \in G$$

称为 f 的不变着色集。

例：

G_C中的置换	作用在着色 $c=$ (R, B, B, R) 上的结果
$\rho_4^0=\iota$	$\boxed{\text{(R, B, B, R)}}$
ρ_4^1	(R, R, B, B)
ρ_4^2	(B, R, R, B)
ρ_4^3	(B, B, R, R)
τ_1 	(R, R, B, B)
τ_2 	(B, B, R, R)
τ_3 	(B, R, R, B)
τ_4 	$\boxed{\text{(R, B, B, R)}}$



着色 $c=$ (R, B, B, R) 的稳定核 $G_C(c)=\{\rho_4^0=\iota, \tau_4\}$。

注意到：(1) $\iota\circ\tau_4=\tau_4\circ\iota=\tau_4$， $\tau_4\circ\tau_4=\iota$ (合成运算封闭性)

(2) $\iota\in G_C(c)$ (单位元)

(3) $\tau_4^{-1}=\tau_4$ (逆元封闭性)

(4) 显然有结合律

因此，$G_C(c)$是置换群。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c)=\{f \mid f\in G, f*c=c\}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c=f*c$ 当且仅当 $f^{-1}\circ g\in G(c)$。

证明：(1) 置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，单位元和逆元运算的封闭性。

(a)设$f, g\in G(c)$，则$(g\circ f)*c=g*(f*c)=g*c=c$，所以$g\circ f\in G(c)$，即在合成运算下，$G(c)$具有封闭性。

(b)由于置换的合成满足结合律，因此，$G(c)$关于合成满足结合律。

(c)恒等置换 ι 必属于$G(c)$，使所有着色不变，为单位元。

(d) 设$f\in G(c)$，有$f*c=c$，则 $f^{-1}*c=f^{-1}*f(c)=(f^{-1}\circ f)(c)=\iota(c)=c$，得$f^{-1}\in G(c)$，

因此，$G(c)$对逆元具有封闭性。

综上，$G(c)$是一个置换群。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1}\circ g \in G(c)$。

$(f^{-1}\circ g)*c = c$

证明：(2) ($\Rightarrow$) 如果 $g*c = f*c$，则

$(f^{-1}\circ g)*c = f^{-1}*(g*c) = f^{-1}*(f*c) = (f^{-1}\circ f)*c = \iota*c = c$。

所以 $f^{-1}\circ g$ 使 c 不变，因此，$f^{-1}\circ g \in G(c)$。

($\Leftarrow$) 如果 $f^{-1}\circ g \in \mathrm{G}(c)$，则$(f^{-1}\circ g)*c = c$，

所以 $g*c = ((f\circ f^{-1})\circ g)*c = (f\circ(f^{-1}\circ g))*c = f*((f^{-1}\circ g)*c) = f*c$。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1} \circ g \in G(c)$。

问题：如何求在置换群G作用下的与 c 等价的着色数 ？

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f \in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数, 即

$$|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}。$$

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数, 即

$$|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}。$$

证明：由定理14.2.1知，

$$g*c = f*c \iff (f^{-1}\circ g)*c = c \iff f^{-1}\circ g \in G(c)$$

$$\iff \exists\, h \in G(c),\ \text{s.t.},\ f^{-1}\circ g = h,\ \text{即}\ g = f\circ h。$$

因此，与 f 作用在 c 上有同样效果的置换集合为：

$$\{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \} \subseteq \{ f\circ h \mid h\in G(c)\}。$$

对任意 $f\circ h$, 其中$h\in G(c)$， 由于 $(f\circ h)*c = f*(h*c) = f*c$，

得 $f\circ h\in \{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \}$。

因此，有$\{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \} = \{ f\circ h \mid h\in G(c)\}$。

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数, 即

$$|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|} 。$$

证明：（续）因此，有$\{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \} = \{ f\circ h \mid h\in G(c)\}$。

对任意的 $h, h' \in G(c)$，若 $f\circ h= f\circ h'$，由消去律知 $h= h'$。

因此 $|\{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \}| = |\{ f\circ h \mid h\in G(c)\}| = |G(c)|$。

从而，对于每个置换 f，恰好存在 $|G(c)|$ 个置换，这些置换作用在 c 上与 f 有同样的效果。

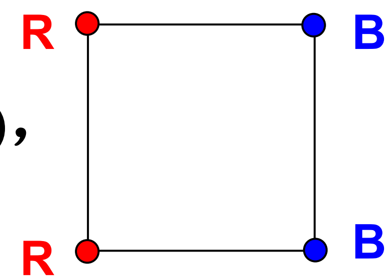
而总共有$|G|$个置换，所以，与 c 等价的着色数为

$$|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|} 。$$

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数, 即

$$|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}。$$

例：与 c_1=(R, B, B, R)等价的着色：



(R, B, B, R)、(R, R, B, B)、(B, R, R, B)、(B, B, R, R)，即等价数目为4。

$G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$

$G_c(c_1)=\{\iota, \tau_4\}$

在G_c作用下，与c_1等价等价的着色数为

$$\frac{|G_c|}{G_c(c_1)}=\frac{8}{2}=4$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

$$(C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}, f\in G)$$

- 设 $G=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$，则 $N(G, C) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|C(f_i)|$。

证明思想：（组合证明） 采用两种不同方式进行计数，然后使计数相等。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

$$(C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}, f\in G)$$

证明：计数使 f 保持c不变（即$f * c=c$）的对偶 (f, c)的个数。

存在两种计数方式：

(1)方式1：考察G中每个 f，计算 f 保持不变的着色数，然后相加，得对偶数为 $\sum_{f\in G}|C(f)|$。

(2)方式2：考察C中的每个c，计算满足$f*c=c$的置换数，然后相加所有的量，得对偶数为 $\sum_{c\in C}|G(c)|$。

则有 $\sum_{f\in G}|C(f)| = \sum_{c\in C}|G(c)|$。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

$$(C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}, f\in G)$$

证明：由推论14.2.2得 $|G(c)| = \dfrac{|G|}{|\{f*c \mid f \in \mathrm{G}\}|}$，

$$|\{f * c \mid f \in \mathrm{G}\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

$$(C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}, f\in G)$$

证明：由推论14.2.2得 $|G(c)| = \dfrac{|G|}{|\{f*c \mid f\in \mathrm{G}\}|}$，

因此，$\sum_{c\in C}|G(c)| = |G|\sum_{c\in C}\dfrac{1}{|\{f*c \mid f\in \mathrm{G}\}|}$。

证明：（续）因此，$\sum_{c\in C} G(c) = |G| \sum_{c\in C} \frac{1}{|\{f * c \mid f \in G\}|}$

由于非等价的着色数 $N(G, C)$等于等价着色构成的等价类的个数，

令 $C_1, \ldots, C_{N(G, C)}$ 为 C 的所有等价类，

假设C_i的代表元为c_i，$i = 1, 2, \ldots, N(G, C)$ 。

则 $\sum_{c\in C_i} \frac{1}{|\{f * c_i \mid f \in G\}|} = \sum_{c\in C_i} \frac{1}{|C_i|} =1$。

因此 $\sum_{c\in C} \frac{1}{|\{f * c \mid f \in G\}|} = \sum_{i=1}^{N(G,C)} \sum_{c\in C_i} \frac{1}{|\{f * c_i \mid f \in G\}|} = N(G, C)$。

即 $\sum_{c\in C} |G(c)| = |G| \times N(G, C)$，得

$$N(G, C) = \frac{\sum_{c\in C} |G(c)|}{|G|} = \frac{\sum_{f\in G} |C(f)|}{|G|}\text{。}$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

- 计数非等价的着色数$N(G, C)$的步骤：
  1. 确定置换群G;
  2. 确定着色集C;
  3. 计数G中每个着色的稳定核（或每个置换的不变着色集）的大小;
  4. 使用Burnside公式。

例：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

解：正方形的顶点对称群为D_4={ $\rho_4^0 = \iota$, ρ_4^1, ρ_4^2, ρ_4^3, $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ }

正方形的角点的着色集为$C=\{(c_1, c_2, c_3, c_4) | c_i \in \{\mathbf{R}, \mathbf{B}\}, 1 \le i \le 4\}$，因此，$|C|=16$。

(1) 单位元ι使所有着色保持不变，即$C(\iota)= C$，得$|C(\iota)|=16$。

(2) 旋转ρ_4和ρ_4^3各自保持 2 种着色，即所有顶点为红色和所有顶点为蓝色的着色不变，因此$C(\rho_4)$={(R, R, R, R), (B, B, B, B)}，

$C(\rho_4^3)$ ={(R, R, R, R), (B, B, B, B)}，得$|C(\rho_4)|=|C(\rho_4^3)|=2$。

(3) 旋转ρ_4^2保持4种着色，即所有顶点为相同颜色以及红和蓝间隔出现的着色不变，因此$C(\rho_4^2)$ ={(R, R, R, R),(B, B, B, B), (R, B, R, B),(B, R, B,R)}，得 $|C(\rho_4^2)|=4$。

(4) 为了使在反射τ_1作用下着色保持不变，顶点1和3可以选择任何颜色，顶点2和4必须具有相同颜色。

所以，在τ_1的作用下保持着色不变的方法：对顶点1选择一种颜色（2种选择），对顶点3选择一种颜色（2种选择），对顶点2和4选择一种颜色（2种选择）。

所以，在τ_1的作用下保持着色不变的着色数是$|C(\tau_1)|=2\times2\times2=8$。即

$$C(\tau_1)=\{ (R,R,R,R),(R,R,B,R),(B,R,R,R),(B,R,B,R), (R,B,R,B),(R,B,B,B),(B,B,R,B),(B,B,B,B) \}$$

(5) 类似地，在τ_2的作用下保持着色不变的着色数是

$|C(\tau_2)|= 2\times2\times2=8$。即

$$C(\tau_2)=\{(R,R,R,B),(R,R,R,B),(R,B,R,R),(R,B,R,B) (B,R,B,B),(B,R,B,B),(B,B,B,R),(B,B,B,B)\}$$

(6) 为了使在反射τ_3作用下着色保持不变，顶点**1**和**2**必须具有相同颜色，顶点**3**和**4**必须具有相同颜色。

所以，在τ_3的作用下保持着色不变的方法：对顶点**1**和**2**选择一种颜色（**2**种选择），对顶点**3**和**4**选择一种颜色（**2**种选择）。

因此，在τ_3的作用下保持着色不变的着色数是$|C(\tau_3)| = 2\times2=4$。

即$C(\tau_3)=\{(R, R, R, R), (R, R, B, B), (B, B, R, R), (B, B, B, B\}$。

(7) 类似地，在τ_4的作用下保持着色不变的着色数是

$|C(\tau_4)| = 2\times2=4$。即

$$C(\tau_4)=\{(R, B, B, R), (R, R, R, R), (B, R, R, B), (B, B, B, B)\}$$

根据**Burnside**定理，总的着色方法数为：

$$N(D_4, C) = \frac{1}{8}\left(16+2+4+2+8+8+4+4\right) = 6$$

例：(循环排列计数) 把n个不同的对象放在一个圆上，有多少种放法？(n-1)!

解：相当于用n种不同的颜色对正n角形 Ω 的顶点进行着色，此时，放法数为 Ω的循环群的非等价着色数。

令C 是对 Ω 的n个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的所有$n!$种方法所组成的集合，则作用在C上的循环群为

$$G=\{\rho_n^0, \rho_n^1, \ldots, \rho_n^{n-1}\}。$$

显然，G 的恒等变换ρ_n^0保持 C中所有$n!$种着色不变，即$c(\rho_n^0)=n!$。因为在C的着色中，每个顶点有不同的颜色，因此且C中其他置换都不保持 C中的任意着色不变，即$c(\rho_n^i)=0$，$i=1,\ldots, n-1$。

由定理14.2.3得非等价着色数为：

$$N(G, C) = \frac{1}{n}(n!+0+\ldots+0) = (n-1)!$$

例（项链计数问题）用$n\geq 3$种不同颜色的珠子组成一条项链，问有多少种方法?

解：相当于用n种不同的颜色对正n角形 Ω 的顶点进行着色，

此时，放法数为 Ω的正n角形的顶点对称群的非等价着色数。

令C 是对 Ω 的n个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的所有$n!$种方法所组成的集合，则作用在C上的顶点对称群为$2n$阶的二面体群$D_n=\{\rho_n^0, \rho_n^1, \ldots, \rho_n^{n-1}, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$。

显然，D_n的恒等变换保持 C中所有$n!$种着色不变，即$c(\rho_n^0)=n!$

因为在C的着色中，每个顶点有不同的颜色，因此且D_n中其他置换都不保持 C中的任意着色不变，即$c(\rho_n^i)=0$，$i=1,\ldots, n-1$，

$c(\tau_j)=0$，$j=1,\ldots, n$。

由定理14.2.3得非等价着色数为：$N(G,C)=\dfrac{1}{2n}(n!+0+\ldots+0)$

$$=\frac{1}{2}(n-1)!。$$

- 利用Burnside定理计数不等价的着色数的关键：
  1. 确定置换群G；
  2. 确定着色集C；
  3. 计数G中每个置换 f 的不变着色集 $C(f)$ 的大小。
  4. 使用Burnside公式
- 缺点：第3步的计数过程比较复杂

为了使该计数过程变得更加容易，仅考虑置换的循环结构，并引入有向圈概念。**Pólya定理**

第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

置换循环结构

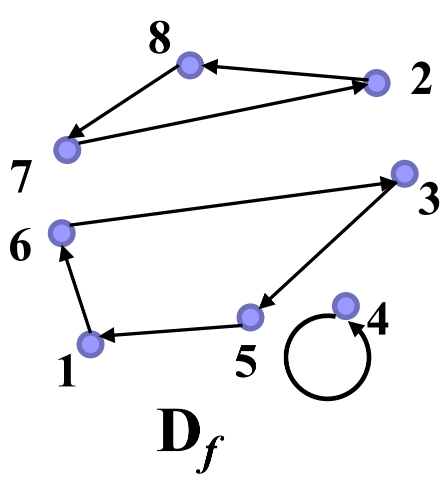
设 f 是 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的一个置换，$D_f = (X, A_f)$ 是顶点集为X且边集为 $A_f = \{ (i, f(i)) \mid i \in X \}$的有向图。

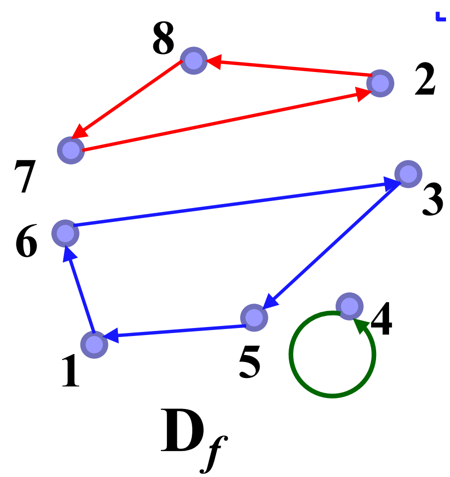
- ✓ D_f 有 n 个顶点与 n 条边，
- ✓ 各顶点的入度和出度等于1。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ f(1) & f(2) & \cdots\cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

则 弧集 A_f可以被划分为若干个有向圈，且每个顶点恰好属于一个有向圈。

例：设有$\{1, 2, \ldots, 8\}$的一个置换 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$





3个有向圈:

$1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$

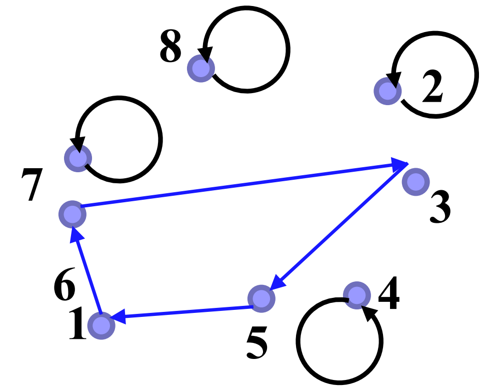
$2 \to 8 \to 7 \to 2$

$4 \to 4$

记对应有向圈 $1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$的置换记为 [1 6 3 5]：

对于{1, 2, …, 8} 上，把1变到6、6变到3、3变到5、5变到1，余下的整数保持不变。

$$[1 \quad 6 \quad 3 \quad 5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$



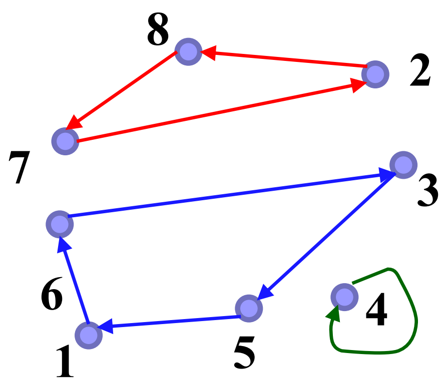
对应的有向圈：

$1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$， $2 \to 2$， $4 \to 4$， $7 \to 7$， $8 \to 8$

- **循环置换**：如果在一个置换中，某些元素以循环的方式置换且余下元素（如果有的话）保持不变，那么称这样的置换为循环置换，简称循环。
- 如果循环中的元素个数为 k，则称它为 k 循环。

例如，[1 6 3 5]是一个4 循环，[2 8 7]是一个 3 循环，[4]是一个 1 循环

例：设有{1, 2, …, 8}的一个置换 $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$



$\mathbf{D}_f$

$$[1\ 6\ 3\ 5]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}$$

$$[2\ 8\ 7]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}$$

$$[4]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

循环因子分解

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}=[1\quad 6\quad 3\quad 5]\circ[2\quad 8\quad 7]\circ[4]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

循环因子分解

设 f 是集合 X 的任意置换，$D_f=(X, A_f)$ 是顶点集为 X 且边集为 $A_f=\{(i, f(i)) \mid i\in X\}$的有向图，

$$[i_1 \ i_2 \dots i_p],\ [j_1 \ j_2 \dots j_q],\ \dots,\ [l_1 \ l_2 \dots l_r]$$

为 D_f 所对应的有向圈，则 f 可以分解为：

$$f=[i_1 \ i_2 \dots i_p]\circ[j_1 \ j_2 \dots j_q]\circ\dots\circ[l_1 \ l_2 \dots l_r],$$

称为 f 的循环因子分解。

（因为 f 中的每个整数至多属于因子分解中的一个循环）

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}=[1\quad 6\quad 3\quad 5]\circ[2\quad 8\quad 7]\circ[4]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

循环因子分解

设 f 是集合 X 的任意置换，$D_f=(X, A_f)$ 是顶点集为 X 且边集为 $A_f=\{(i, f(i)) \mid i\in X\}$的有向图，

$$[\, i_1 \;\; i_2 \ldots i_p \,],\;\; [\, j_1 \; j_2 \ldots \; j_q \,],\;\; \ldots,\;\; [\, l_1 \;\; l_2 \ldots l_r \,]$$

为 D_f 所对应的有向圈，则 f 可以分解为：

$$f = [i_1\ i_2 \ldots i_p]\circ [j_1\, j_2 \ldots j_q] \circ \ldots \circ [l_1\ l_2 \ldots l_r],$$

称为 f 的循环因子分解。

（因为 f 中的每个整数至多属于因子分解中的一个循环）

注意：

- 循环出现的次序可以任意变化外，f 的循环因子分解是唯一的。
- 1循环就是恒等置换。
- 在 f 的循环因子分解中，X中的每个元素只出现一次

例：求8阶二面体群D_4 (正方形的顶点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=[1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=[1\ 4\ 3\ 2]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

例：求8阶二面体群D_4(正方形的角点对称群)中各置换的循环因子分解。

恒等置换：所有的循环是 1循环

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=[1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=[1\ 4\ 3\ 2]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

例：求8阶二面体群D_4(正方形的顶点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

正方形对角线的反射：
出现两个 1循环

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=[1\ 4\ 3\ 2]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

例：求8阶二面体群D_4(正方形的角点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=[1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\rho_4^3$$

连接对边中点连线的反射：两个 2循环

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

例：求8阶二面体群D_4(正方形的顶点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\rho_4^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =[1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =[1$$

在一个正 n角形（n为偶数）的顶点对称群中，对于反射，

- 有一半有两个1-循环和 $\frac{n}{2}-1$ 个2循环
- 另一半有 $\frac{n}{2}$ 个2循环

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} =[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} =[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

例：求10阶二面体群D_5（正5角形的顶点对称群）中各置换的循环因子分解。

D_5	循环因子分解
$\rho_5^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]\circ[5]$
ρ_5^1	[1 2 3 4 5]
ρ_5^2	[1 3 5 2 4]
ρ_5^3	[1 4 2 5 3]
ρ_5^4	[1 5 4 3 2]
τ_1	$[1]\circ[2\ 5]\circ[3\ 4]$
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4\ 5]$
τ_3	$[1\ 5]\circ[3]\circ[2\ 4]$
τ_4	$[1\ 2]\circ[3\ 5]\circ[4]$
τ_5	$[1\ 4]\circ[2\ 3]\circ[5]$

例： 求10阶二面体群D_5（正5角形的顶点对称群）中各置换的循环因子分解。

D_5	循环因子分解
$\rho_5^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]\circ[5]$
ρ_5^1	$[1\ 2\ 3\ 4\ 5]$
ρ_5^2	$[1\ 3\ 5\ 2\ 4]$
ρ_5^3	$[1\ 4\ 2\ 5\ 3]$
ρ_5^4	$[1\ 5\ 4\ 3\ 2]$
τ_1	$[1]\circ[2\ 5]\circ[3\ 4]$
	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4\ 5]$
	$[1\ 5]\circ[3]\circ[2\ 4]$
	$[1\ 2]\circ[3\ 5]\circ[4]$
	$[1\ 4]\circ[2\ 3]\circ[5]$

在一个正n角形（n为奇数）的顶点对称群中，每个反射有一个1-循环和$\frac{n-1}{2}$个2循环

■ 利用循环因子分解计算非等价着色问题

利用Burnside定理计数不等价的着色数的关键：

1. 确定置换群G；
2. 确定着色集C；
3. 计数G中每个置换 f 的不变着色集 $C(f)$ 的大小。
4. 使用Burnside公式

■ 缺点：第3步的计数过程比较复杂

利用 f 的循环因子分解计算 $C(f)$

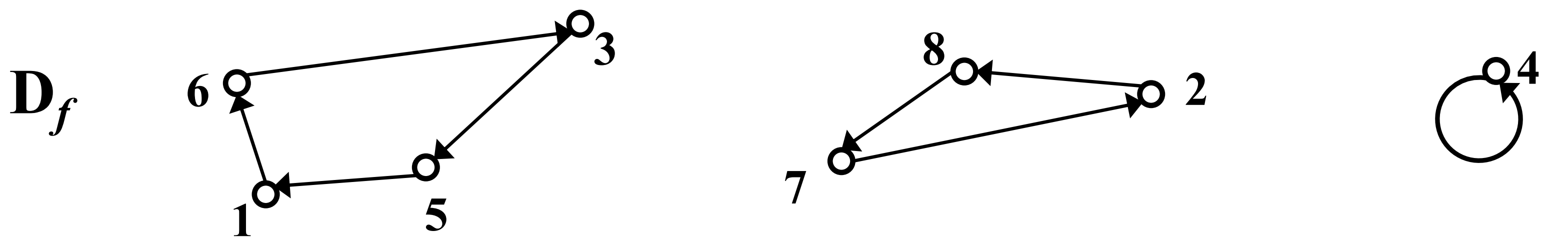
例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为 $f = [1\quad 6\quad 3\quad 5] \circ [2\quad 8\quad 7] \circ [4]$

假设用红、黄和蓝色对 X 进行着色，C 是所有着色的集合。问在 f 作用下 C 中保持不变的着色数 $|C(f)|$ 是多少？

解：设 c 是使得 $f{*}c = c$ 的一种着色。



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

颜色传递：每个有向圈内，顶点颜色一样。

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为 $f = \begin{bmatrix}1 & 6 & 3 & 5\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}2 & 8 & 7\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$

假设用红、黄和蓝色对 X 进行着色，C 是所有着色的集合。问在 f 作用下 C 中保持不变的着色数 $|C(f)|$ 是多少？

解：设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。

(1) 考虑 4 循环 [1 6 3 5]：该循环用 1的颜色给 6着色，用 6的颜色给 3着色， 用 3的颜色给 5着色，用 5的颜色给 1着色。

因为 f 保持着色 c不变，通过这个循环，得到

1的颜色 = 6的颜色 =3的颜色 =5的颜色，

即，1，6，3，5具有相同的颜色 。

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为 $f = [1 \quad 6 \quad 3 \quad 5] \circ [2 \quad 8 \quad 7] \circ [4]$

假设用红、黄和蓝色对 X 进行着色，C 是所有着色的集合。问在 f 作用下 C 中保持不变的着色数 $|C(f)|$ 是多少？

解：设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。

(2) 同理，通过 3循环[2 8 7]，得到 2, 8, 7 有相同的颜色，1循环 [4]中对4的颜色没有限制。

因此，在 f 作用下 C 中保持不变的着色c 满足：

对{1, 6, 3, 5}、{2, 8, 7}、{4} 任意指定红，黄，蓝中一种颜色。

得 $|C(f)| = 3^3 = 27$。

- 记置换 f 的循环分解中的循环个数为 $\#(f)$

> **定理14.3.1**：设 f 是集合 X 的一个置换。
> 假如用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令 C 是 X 的所有着色的集合，则 f 保持 C 中着色不变的着色数为：
> $$|C(f)|=k^{\#(f)}。$$

- 不变着色数 $C(f)$
  - ✓ 与颜色的数量和循环因子分解中循环个数有关，
  - ✓ 而与每个循环的阶数无关。

- 记置换 f 的循环分解中的循环个数为 $\#(f)$

定理14.3.1：设 f 是集合 X 的一个置换。
假如用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令 C 是 X 的所有着色的集合，则 f 保持 C 中着色不变的着色数为：

$$|C(f)|=k^{\#(f)}。$$

- 提供了一种计算 $|C(f)|$ 的新方法。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于 G 中所有 f 与 C 中所有 c，$f*c$ 仍在 C 中，则 C 中非等价的着色数 $N(G, C)$ 为：

$$N(G, C)=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即，C 中非等价的着色数等于在 G 中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

例：用红、黄、蓝三种颜色 对正方形的顶点进行着色，问共有多少种非等价的着色方法？

解：设 C 是用红、黄、蓝对正方形的顶点的所有着色的集合，正方形的顶点对称群是二面体群D_4。

D_4	循环因子分解	$\#(f)$	$\|C(f)\|$
$\rho_4^0=\iota$	[1]∘[2] ∘[3] ∘[4]	4	$3^4=81$
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	$3^1=3$
ρ_4^2	[1 3] ∘[2 4]	2	$3^2=9$
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	$3^1=3$
τ_1	[1] ∘[2 4] ∘[3]	3	$3^3=27$
τ_2	[1 3] ∘[2] ∘[4]	3	$3^3=27$
τ_3	[1 2] ∘[3 4]	2	$3^2=9$
τ_4	[1 4] ∘[2 3]	2	$3^2=9$

由Burnside定理，得

$$N(D_4, C)$$

$$=\frac{1}{|D_4|}\sum_{f\in D_4}|C(f)|$$

$$=\frac{81+3+9+3+27+27+9+9}{8}$$

$$=21$$

例：1. 对一个四边形的2个点着红色，其余点着蓝色，问有多少种不等价的着色数？

2. 对一个正五角形的3个顶点着红色，对其余顶点着蓝色，问有多少种不等价的着色？

置换的生成函数