回顾：二次项系数的单峰性

定理5.3.1. 令n为正整数, 二项式系数序列是单峰序列, 其中,

- 若n是偶数:

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2\rceil} = \binom{n}{n/2}$$

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{n/2}, \binom{n}{n/2} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

- 若n是奇数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{(n-1)/2}, \binom{n}{(n+1)/2} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2} = \binom{n}{\lceil n/2\rceil}$$

- 推广到集合包含关系
  - 反链
  - 链

回顾：反链、链

令 S是 n 个元素的集合，

- S上的一条反链（antichain）是S 的子集的一个集合A，其中A中的子集不相互包含。
- S上的一条链（chain）是 S的子集的集合C，其中对于 C中的每一对子集，总有一个包含在另一个之中：

  对任意 S_1，$S_2 \in C$，且$S_1 \neq S_2$，则 $S_1 \subset S_2$或者 $S_2 \subset S_1$

- 一个构造反链的方法：

令 S为n个元素的集合， 选择一个整数 $k \le n$，取 A_k为 S 所有的 k子集的集合，为S上的一条包含$\binom{n}{k}$。

- 该方法构成的反链最多含有$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

回顾：反链、链

令 S是 n 个元素的集合，

- S上的一条反链（antichain）是S 的子集的一个集合A，其中A中的子集不相互包含。
- S上的一条链（chain）是 S的子集的集合C，其中对于 C中的每一对子集，总有一个包含在另一个之中：

  对任意 S_1，$S_2 \in C$，且$S_1 \neq S_2$，则 $S_1 \subset S_2$ 或者 $S_2 \subset S_1$

- 一个构造链的方法：

令 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$， S的选择一个排列 $i_1, \ldots, i_n$ 对应S上的一条链：

$$\{\emptyset, \{i_1\}, \{i_1, i_2\}, \{i_1, i_2, i_3\}, \ldots, \{i_1, \ldots, i_n\}\},$$

称为S上的一条最大链。

反之，S 上的任一条以上形式的链对应 S 的一个排列。

- S 上的最大链一共有$n!$条。

回顾：反链、链

令 S是 n 个元素的集合，

- S上的一条反链（**antichain**）是S 的子集的一个集合A，其中A中的子集不相互包含。
- S上的一条链（**chain**）是 S的子集的集合C，其中对于 C中的每一对子集，总有一个包含在另一个之中：

  对任意 S_1，$S_2 \in C$，且$S_1 \neq S_2$，则 $S_1 \subset S_2$ 或者 $S_2 \subset S_1$

- S上的一条链最多只能包含 S 上的任意一条反链中的一个子集。
- S上的一条反链最多只能包含 S 是的任意一条链中的一个子集。

定理 5.3.3. 设 S为 n个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

证明：设 A是 S上的一条反链，S_1是 A中一个子集，且$|S_1|=k$，C 是包含 S_1 的最大链。

设 β 是 所有二元组(S_1, C)的个数，即

$$\beta = |\{(S_1, C) \mid S_1 \in A, C \text{ 是包含 } S_1 \text{ 的最大链}\}|$$

由于一个最大链最多只能包含任意一个反链中的一个子集。

因此不存在两个元组(S_1, C)与(S_2, C)，其中S_1与S_2为A的不同的子集， C是包含S_1，S_2的最大链。

但 S_1 可能 包含于多个最大链，（多少个?）

所以，β 不超过最大链的个数，即$\beta \leq n!$。

定理 5.3.3. 设 S为 n个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

证: (续) 设反链A中大小为k的子集个数为a_k，则 $|A|=\sum_{k=0}^{n} a_k$。

设 A_k为A中一个大小为 k的子集，则包含 A_k的最大链最多为 $k!(n-k)!$ 个，

得到包含A中大小为 k的子集的最大链最多为 $a_k \cdot k!(n-k)!$个。

因此， $\beta = \sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)! \leq n!$。

从而 $\sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)!\,/n! \leq 1$, 得$\sum_{k=0}^{n} a_k / \binom{n}{k} \leq 1$。

由于$\binom{n}{k}$ 最大为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$，得

$$(1/\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}) \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k / \binom{n}{k} \leq 1,$$

因此，$|A|=\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$。证毕。

定理 5.3.3. 设 S为 n个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

- S的k子集构成的集合构成一条反链

例：$S=\{1,2,3,4,5\}$, S上的一个最大反链为所有2子集构成的集合：

$\{ \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\}, \{2,4\},\{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \}$

S的 3子集构成的集合也是S上的一个最大反链！

更强的结果

定理 5.3.3. 设S为n个元素的集合，则S上的的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个集合。

设S是为n个元素的集合，

- 如果n是偶数，则大小为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$的唯一的反链是所有$n/2$子集的反链；
- 如果n是奇数，则大小为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$的反链有两个：
  - ✓ 所有 $(n-1)/2$ 子集构成的反链；
  - ✓ 所有 $(n+1)/2$ 子集构成的反链。

链、反链的推广

- 集合的包含关系是偏序关系
- 把链、反链的概念推广到偏序集

令$(X, \leq)$是一个有限偏序集,

✓ 链是 X 的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的,

✓ 反链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都不可比.

令 $(X, \leq)$ 是一个有限偏序集,

- ✓ 反链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都不可比;
- ✓ 链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的.

例：设 $X=\{1, 2,\ldots, 10\}$, 考虑偏序集 $(X, |)$, 其中 | 为整除关系，即$a|b$表示 b 可被 a 整除。

反链A：A中任意两个不同的数a, b，$a\nmid b$且$b\nmid a$

链C：C中任意两个不同的数a, b,

或者$a \mid b$，或者$b \mid a$

{4，6，7，9，10}是一条反链

{1，2，4，8}是一条链

令 $(X, \leq)$ 是一个有限偏序集,

- ✓ 反链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都不可比;
- ✓ 链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的.

- 极小元：a 是偏序集的极小元当且仅当 X 中不存在满足 $x < a$ 的元素 x

  X 的所有极小元构成的子集是反链。

- 极大元：a 是偏序集的极大元当且仅当 X 中不存在满足 $x > a$ 的元素 x

  X 的所有极大元构成的子集也是反链。

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链，但不能划分为少于 r 个的反链。

证明：首先，证明：X 不能划分为少于 r 个的反链。

设 A是$(X, \leq)$的最大链，且 $|A|=r$。设 $A=\{a_1, \ldots, a_r\}$。

假设 X 划分为少于 r 个反链,

由鸽巢原理，至少存在一条反链至少包含最大链 A 中两个不同的元素，矛盾。

因此，假设不成立， 即X 不能划分为少于 r 个反链。

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链，但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链。

$A_p= X_p=X_{p-1}-A_{p-1}$的极小元集

…

A_3: $X_3 = X_2 - A_2$的极小元集

A_2: $X_2=X-A_1$的极小元集

A_1: X的极小元集

X

$X_p \neq \varnothing$，而 $X_{p+1}= X_p - A_p = \varnothing$

此时，得到 X的划分$A_1, A_2, \ldots, A_p$。

需要证明:

- 每个A_i 是反链，$i =1, 2, \ldots, p$
- $p = r$

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链，但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链。

$A_p = X_p = X_{p-1} - A_{p-1}$的极小元集
…
A_3: $X_3 = X_2 - A_2$的极小元集
A_2: $X_2 = X - A_1$的极小元集
A_1: X的极小元集

X

$X_p \neq \varnothing$，而 $X_{p+1} = X_p - A_p = \varnothing$

此时，得到 X的划分$A_1, A_2, \ldots, A_p$。

考虑任意 A_i, 由极小元的定义知,

对任意$a,b \in A_i$ 且$a \neq b$，a与b不可比。

因此，A_i 是X的一条反链,

故 $A_1, A_2, \ldots, A_p$是X的一条反链划分。

下面证明 $p = r$。

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链，但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链。

X
$A_p = X_p = X_{p-1} - A_{p-1}$的极小元集
…
A_3: $X_3 = X_2 - A_2$的极小元集
A_2: $X_2 = X - A_1$的极小元集
A_1: X的极小元集

证明: (续) 因为 X不能划分为少于r个反链，故 $p \geq r$。

对于$A_1, A_2, \ldots, A_p$，满足:

对任意$a_i \in A_i$，一定存在$a_{i-1} \in A_{i-1}$，使得 $a_{i-1} < a_i$，$i=2,\ldots,p$。

得到 X的一个链: $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$,

其中$a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

由于r是最大链的大小，因此有 $p \leq r$。

故 $p=r$。证毕。

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链，但不能划分为少于 r 个的反链.

例： 设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$，考虑 X 的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 在集合包含关系下构成的偏序集 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$。

最大链：$\Phi \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \ldots \subset \{1,2,\ldots, n\}$

则 $\mathcal{P}(X)$ 可被划分成 n+1个反链:

问题：极小元的集合是什么形式?

$\mathcal{P}(X)$的 k 子集，$k=0, 1, \ldots, n$

定理5.6.2 令$(X, \leq)$ 是一个有限偏序集, 并令m是最大反链的大小，则 X可以被划分成m个链，但不能划分成少于m个链。

证明：首先类似定理5.6.1的证明可证：X 不能划分为少于m 个链。

下面证明 X 可划分成 m个链。

对 X 中元素个数 n 进行归纳证明。

n=1时，结论显然成立。

设 n >1，假设当$|X|<n$时结论成立。

当$|X|=n$时，已知X的极大元集合与极小元集合一定是 X的反链，分两种情形讨论：

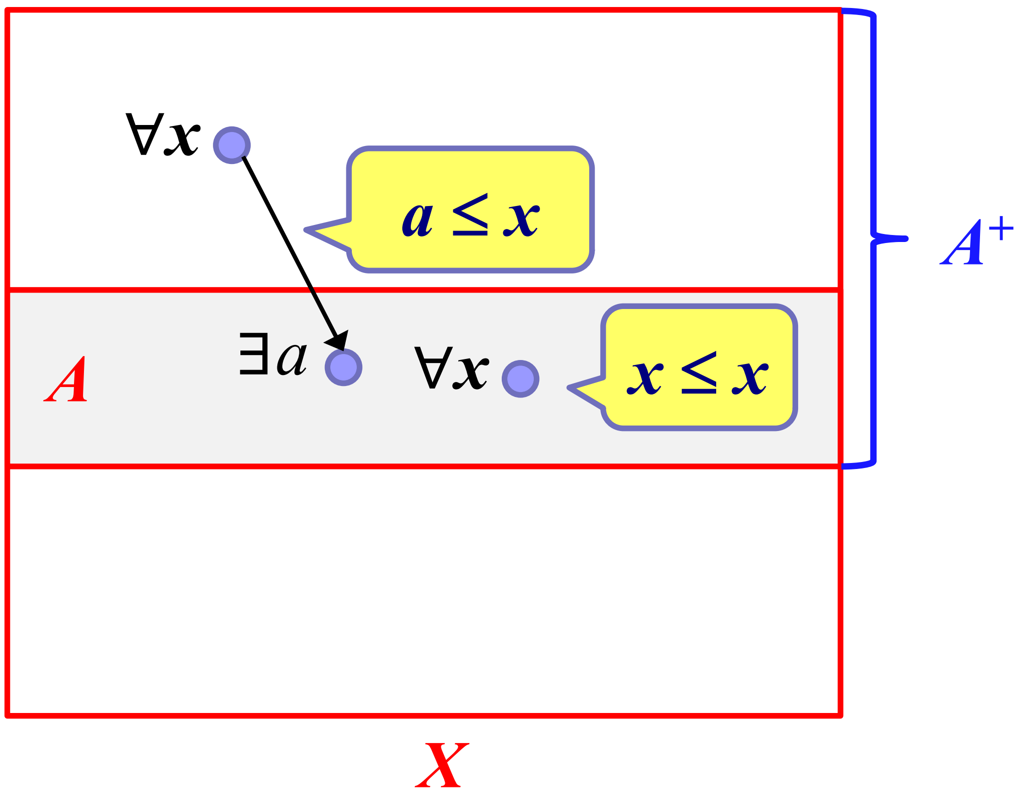
(1) 存在大小为 m 的反链 A，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

(2) 最多存在两个大小为 m的反链，即它们或者是所有极大元的集合和极小元的集合，或者是它们中的一个。

证明(续): (1) 存在大小为 m 的反链A，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

令 $A^+=\{x \mid x\in X$且存在 $a\in A$ 使得$a \leq x\}$, (“上覆盖”)

即，A^+包含 X 中属于 A的所有元素及在A中某个元素“之上”的所有元素组成的集合；且A是A^+的极小元集合。



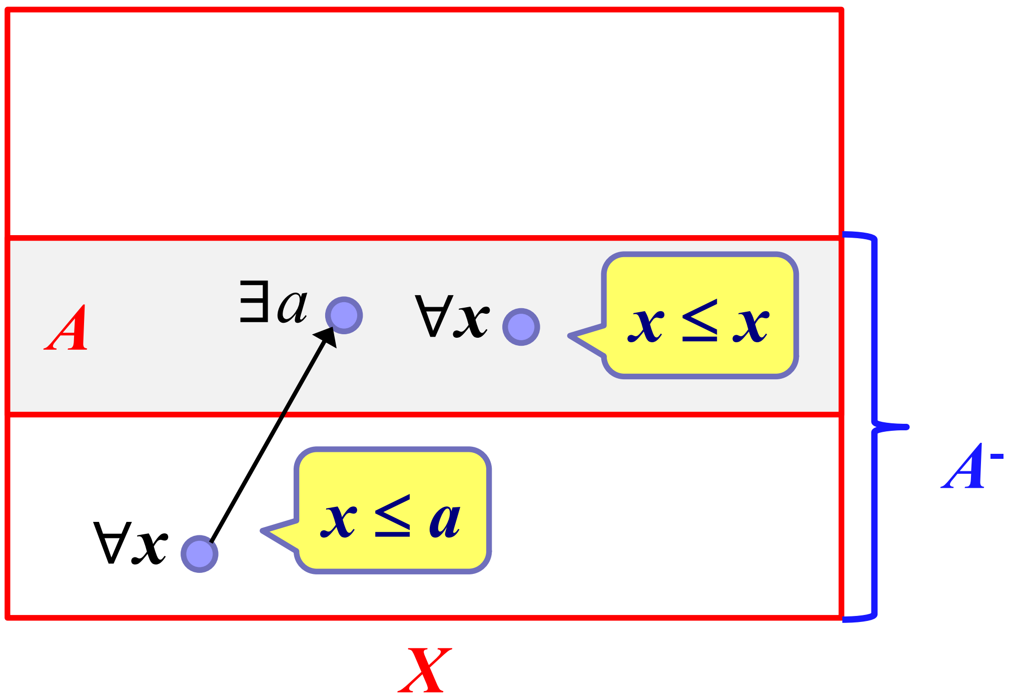
证明(续): (1) 存在大小为 m 的反链A，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

令 $A^+=\{x \mid x\in X$且存在 $a\in A$ 使得$a\leq x\}$, (“上覆盖”)

即，A^+包含 X 中属于 A的所有元素及在A中某个元素“之上”的所有元素组成的集合；且A是A^+的极小元集合。

$A^-=\{x \mid x\in X$且存在$a\in A$使得$x\leq a\}$ (“下覆盖”)

即，A^-包含 X 中属于 A 的所有元素及在 A 中某个元素“之下”的所有元素组成的集合；且A是A^-的极大元集合。



证明(续): (1) 存在大小为 m 的反链A，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

令 $A^+=\{ x \mid x\in X$且存在 $a\in A$ 使得$a \le x\}$, ("上覆盖")

即，A^+包含 X 中属于 A的所有元素及在A中某个元素"之上"的所有元素组成的集合；且A是A^+的极小元集合。

$A^-=\{x \mid x\in X$且存在$a\in A$使得$x \le a\}$ ("下覆盖")

即，A^-包含 X 中属于 A 的所有元素及在 A 中某个元素"之下"的所有元素组成的集合；且A是A^-的极大元集合。

可验证以下性质：

$|A^+|<n$：因为存在不在 A中的 X 的极小元。

$|A^-|<n$：因为存在不在 A中的 X 的极大元。

$A^+\cap A^-=A$：若存在 $x\in A^+\cap A^-$, 但$x\notin A$, 则存在$a_1, a_2 \in A$, 使得 $a_1< x <a_2$，与A是反链矛盾。

$A \subseteq A^+\cap A^-$

$A^+\cup A^-=X$：若存在 $x \in X$, 但 $x \notin A^+\cup A^-$, 则对任意$a \in A$, $a \not\le x$ 且 $x \not\le a$, 得$A\cup\{x\}$是反链，与A是最大反链矛盾。

$A^+\cup A^- \subseteq X$

证明(续): 因为 $|A^+|<n$， $|A^-|<n$， 且A^+和A^-都包含长度为m的最大反链A,

由归纳假设知， A^+可划分为 m个链$E_1, E_2,\ldots, E_m$,

A^-可划分为 m个链$F_1, F_2,\ldots, F_m$。

由于$A^+\cap A^-=A$ 且A是反链,

因此对任意$a\in A$, 一定存在唯一的E_i和唯一的F_j, 使得

- $a \in E_i$ 且 $a \in F_j$,（每个链(反链)只能包含任意一个反链(链)中最多一个元素）
- E_i 中其他元素 x都满足 $a\leq x$, （A是A^+的极小元集）
- F_j 中其他元素 y 都满足$y\leq a$ 。 （A是A^- 的极大元集）

因此 E_i 与F_j可以连接成一个的链 $E_i\cup F_j$。

同理可构成其他 m-1个链，构成了X 的划分。

证明(续)：(2) 最多存在两个大小为 m 的反链，即它们或者是所有极大元的集合和极小元的集合，或者是它们中的一个。

令 x 是极小元，而 y 是极大元且 $x \le y$ (x 可以等于 y)，此时$X\backslash\{x, y\}$的一条反链的最大的大小为 m-1。

由归纳假设，$X\backslash\{x, y\}$可以被划分为m-1个链。

这些链与链$\{x , y\}$一起构成了X 的一个划分。

证毕。

定理5.6.2　令$(X, \leq)$ 是一个有限偏序集，并令m是最大反链的大小，则X可以被划分成m个链，但不能划分成少于m个链。

定理5.3.3：令 S为 n个元素的集合，则 S的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个集合。

- S 的幂集 $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ 的最大反链大小为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$
- S 的幂集 $\mathcal{P}(S)$ 可以被划分成 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个链。

问题：如何构造这个划分？对称链划分

对称链划分

设$S=\{1, 2,\ldots, n\}$，如果 S的幂集$\mathcal{P}(S)$的一个链划分满足以下两个条件，则称其是一个对称链划分：

(1) 链中每一个子集比它前面的子集的元素个数多 1；

(2) 链中第一个子集与最后一个子集的大小和等于 n。

如果这个链只含一个子集，那么这个子集既是第一个子集也是最后一个子集，所以其大小为$n/2$

例：$S=\{1, 2, 3\}$的幂集

$$\mathcal{P}(S)=\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

的一个对称链划分：

$$C_1:\ \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

$$C_2:\ \{2\} \subset \{2, 3\}$$

$$C_3:\ \{3\} \subset \{1, 3\}$$

$\mathcal{P}(S)$的最长反链的长度为 3

对称链划分的构造方法

基本思路：将 S 的所有子集划分为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个对称链。

令$S=\{1, 2, \ldots, n\}$，对n 进行归纳构造：

$n=1$时，有一条对称链：$\varnothing\subset\{1\}$;

$n=2$时，有2条对称链：$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1, 2\}$

$\{2\}$

$n=3$时，有3条对称链： $\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1, 2, 3\}$

$\{3\}\subset\{1,3\}$

$\{2\}\subset\{2,3\}$

对于$n=k$时的每一个含多个子集的链 E，可构造$n=k+1$时的两个链：

1. 对 E 增加如下子集：在 E 的最后一个子集中增加$k+1$，构成一个新子集
2. 把$k+1$加到 E中除最后一个子集之外的所有子集，并删除最后一个子集

$n=3$时 $\qquad$ $n=4$时，有6条对称链：

$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1,2,3\} \rightarrow \varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1,2,3\}\subset\{1,2,3,4\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow \{4\}\subset\{1,4\}\subset\{1,2,4\}$

$\{3\}\subset\{1,3\} \rightarrow \{3\}\subset\{1,3\}\subset\{1,3,4\}$

$\qquad\qquad\quad \searrow \{3,4\}$

$\{2\}\subset\{2,3\} \rightarrow \{2\}\subset\{2,3\}\subset\{2,3,4\}$

$\qquad\qquad\quad \searrow \{2,4\}$

构造方法的正确性

归纳假设： 设集合$\{1, 2, \ldots, n-1\}$的幂集有对称链划分。

任取一条对称链：

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k,\ \text{其中} |A_1|+|A_k|=n-1,\ k\geq 1$$

构造$\{1, 2, \ldots, n\}$的对称链 。

对$k \geq 1$分两种情况：

(1)若$k>1$, 可生成$\{1, 2, \ldots, n\}$的两条链：

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset A_k \cup \{n\};\ \text{和}$$

$$A_1 \cup \{n\} \subset A_2 \cup \{n\} \subset \ldots \subset A_{k-1} \cup \{n\}$$

由$|A_1|+|A_k|=n-1$, 得 $|A_1|+|A_k \cup \{n\}|=n$,

且 $|A_1 \cup \{n\}|+|A_{k-1} \cup \{n\}|=n$

(2)若 $k=1$, 生成{1, 2,…, n}的 1条对称链：

$$A_k \subset A_k \cup \{n\}$$

由于 $|A_k|=(n-1)/2$，因此$|A_k|+|A_k\cup\{n\}|=n$.

注意到：{1, 2,…, n}的任一个子集或者是 A 或者是 $A\cup\{n\}$的形式，其中A是{1, 2,…, n–1}的一个子集。

那么，可以验证：{1, 2,…, n}的每一个子集恰好出现在上面构造的某个对称链中，这些链构成了{1, 2, …, n}所有子集的一个划分。

由归纳法原理证明了{1, 2, …, n}具有对称链划分。

而每条对称链均含有一个$\lfloor n/2 \rfloor$和$\lceil n/2 \rceil$的组合，

因此：{1, 2,…, n}的对称链数为：

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$$

即是反链的最多子集数。

小结

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

- 二项式系数序列的单峰性
  - 最大值： $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$
  - k-子集的个数的最大值
- n元集合S的链、反链(S的子集的集合)
  - 反链：k-子集、最大反链：$\lfloor n/2 \rfloor$-子集
  - 链：对应n元排列，n！个
- n元偏序集 $(X, \leq)$的链、反链
  - 反链与最大链的大小
  - 链与最大反链的大小
  - 幂集的对称链的构造