第8章 特殊计数序列

8.3 分拆数

几个问题?

例: 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量? 对能称出的重量有几种可称量方案?

- 若有1克的砝码3枚，2克的砝码4枚，4克的砝码2枚。问能称出哪些重量? 有几种方案?
- 设有1、 2、 4、 8、 16、32克砝码各一枚，问能称出哪些重量? 分别有几种方案?

整数拆分

例：对整数 6 进行拆分成若干非零整数和的形式，可得以下拆分方式：

6,

5+1, 4+2，3+3，

4+1+1，3+2+1，2+2+2，

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1，

1+1+1+1+1+1

- 讨论对整数n的进行两种拆分的组合计数问题

（**1**）无限制地拆分，

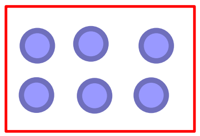
（**2**）限制拆分块数量的拆分。

不同拆分法的计数叫做拆分数**(**或者分拆数**)**。

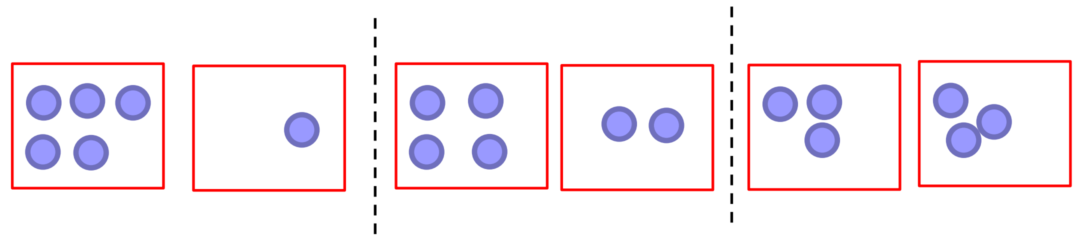
整数拆分

例：把6个无区别的球放入无区别盒子，且无空盒

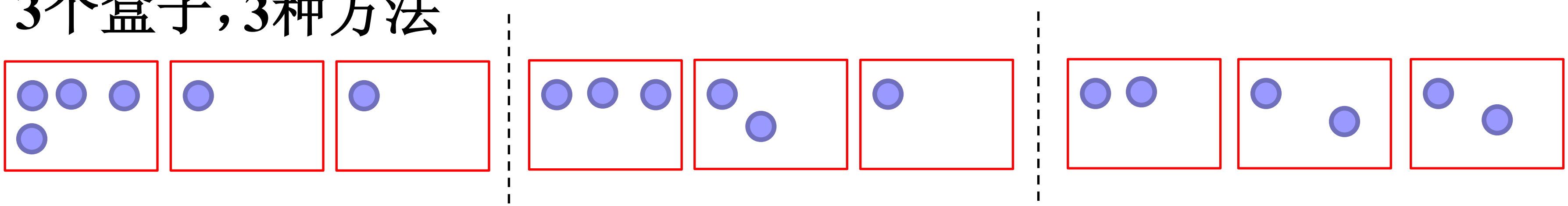
1个盒子
1种方法



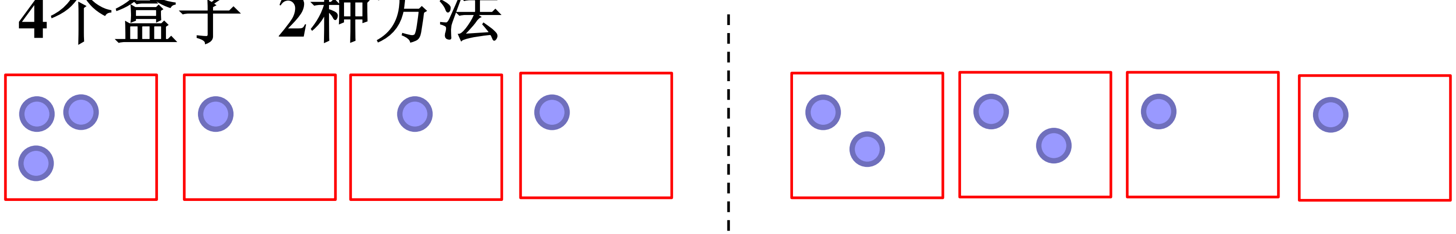
2个盒子
3种方法



3个盒子，3种方法

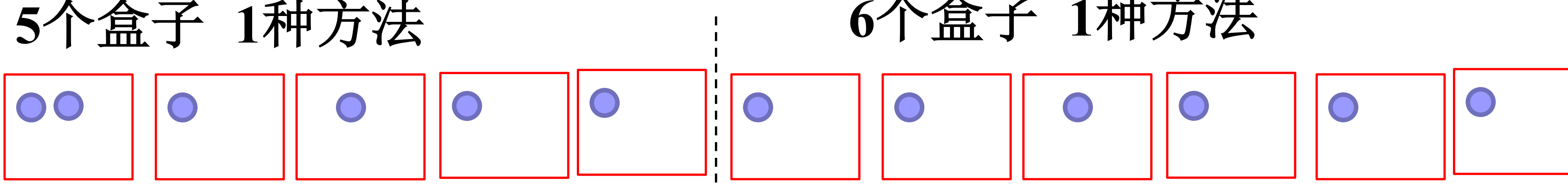


4个盒子 2种方法



5个盒子 1种方法

6个盒子 1种方法



整数拆分的组合含义

- 把 n个无区别的球放入无区别的盒子的放法，其中各盒子中可放入 t 个球, $1\le t \le n$
- n元集 X 的划分的个数（无空集）

每个方式对应于适合条件：

$$n = \sum_{i=1}^{k} a_i,\ a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_k,\ 1\le k \le t$$

的一个k元组 $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$，其中 a_i 按由大到小顺序。该k元组通常就称为整数 n的一个分拆。

例：(2, 2, 1, 1)为整数 6的一个分拆。

分拆数

设一个正整数 n，若存在正整数集 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$ （$1\leq k \leq n$，$1 \leq n_i\leq n$），使得

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

则称 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$ 是n的一个分拆。

称每个 n_i 为 n的一个部分（或类）。

记 n的所有包含k个部分的不同分拆的个数为 p_n^k，

n的所有不同分拆的个数记为 p_n，称为n的分拆数。

$\sum_{k=1}^{n} p_n^k = p_n$

6

5+1, 4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

例：{2, 2, 1, 1}为整数 6的一个分拆。

$p_6^1=1, p_6^2=3$，$p_6^3=3$

$p_6^4=2$，$p_6^5=p_6^6=1$

$p_6=11$

问题：分拆数的通项公式和递推公式

分拆数

设一个正整数 n，若存在正整数集 $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ （ $1 \le k \le n$， $1 \le n_i \le n$)，使得

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

则称 $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ 是n的一个分拆。

称每个 n_i 为 n的一个部分（或类）。

记 n的所有包含k个部分的不同分拆的个数为 p_n^k，

n的所有不同分拆的个数记为 p_n，称为n的分拆数。

$\sum_{k=1}^{n} p_n^k = p_n$

对于 n 的分拆 $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$，

- ✓ $n_i \le n$， $1 \le k \le n$
- ✓ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 中可能有重复的数

  $\{2, 2, 1, 1\}$为整数 6的一个分拆。

分拆的表示

整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1
6						
5+1						
4+2						
3+3						
4+1+1						
3+2+1						
2+2+2						
3+1+1+1						
2+2+1+1						
2+1+1+1+1						
1+1+1+1+1+1						

分拆的表示

整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1
6	1					
5+1		1				1
4+2			1		1	
3+3				2		
4+1+1			1		2	
3+2+1						
2+2+2						
3+1+1+1						
2+2+1+1						
2+1+1+1+1						
1+1+1+1+1+1						

分拆的表示

整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1	
6	1						6^1
5+1		1				1	$5^1 1^1$
4+2			1		1		$4^1 2^1$
3+3				2			3^2
4+1+1			1		2		$4^1 1^2$
3+2+1				1	1	1	$3^1 2^1 1^1$
2+2+2					3		2^3
3+1+1+1				1		3	$3^1 1^3$
2+2+1+1					2	2	$2^2 1^2$
2+1+1+1+1					1	4	$2^1 1^5$
1+1+1+1+1+1						6	1^6

分拆的表示

假设$a_1, a_2, \ldots, a_n$是 n个非负整数，且

$$n = na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 + 1a_1$$

则上式对应 n的一个分拆记作：

$$\lambda = n^{a_n} \ldots 2^{a_2}\ 1^{a_1}。$$

注意：拆分中的部分的顺序不重要，因此总可以排列这些部分使得它们被排列成从大到小的顺序。

分拆数 p_n 的等价表示

假设$a_1, a_2, \ldots, a_n$是 n个非负整数，且

$$n = na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 + 1a_1$$

则上式对应 n的一个分拆记作：

$$\lambda = n^{a_n} \ldots 2^{a_2}\ 1^{a_1}。$$

n的分拆数 p_n 等价于方程

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 + a_1 = n$$

的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$的个数。

与多重集的组合数的区别是什么？

多重集 $S=\{\infty\cdot b_1, \infty\cdot b_2, \ldots, \infty\cdot b_k\}$的 n组合数 等于方程

$$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$$

的非负整数解个数.

$S=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \ldots, \infty\cdot n\}$

n的分拆数 p_n 等价于方程

$$na_n+(n-1)a_{n-1}+\ldots+2a_2+a_1=n$$

的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$的个数。

n的分拆个数

例：设h_n是方程$3e_1+4e_2+2e_3+5e_4=n$的非负整数解的个数，求序列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的生成函数.

多重集 $S=\{\infty\cdot b_1, \infty\cdot b_2, \ldots, \infty\cdot b_k\}$的 n组合数 等于方程

$$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$$

的非负整数解个数.

$S=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \ldots, \infty\cdot n\}$

n的分拆数 p_n 等价于方程

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots. + 2a_2 + a_1=n$$

的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$的个数。

n的分拆个数

- 计算方法:
  - 递归法

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k,\quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^k：n的所有包含k个部分的分拆的个数）

证明：把 n分拆成1个部分和 n个部分，显然均只有一种可能，即 $p_n^1 = p_n^n = 1$。

设 E 是将 n分成不多于k个部分的分拆的集合，有$|E| = \sum_{j=1}^{k} p_n^j$。

属于 E 的每个分拆可看成是一个 k元组（其分量用 0 补足k位）。

定义映射 φ，使得 对 E中的每个分成 m个部分的拆分

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0)$ （即 $n = a_1+a_2+\ldots+a_m$），

有 $\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1+1, a_2+1, \ldots, a_m+1, 1, 1, \ldots, 1)$ 。

则 α' 是 $n+k$ 的一个包含 k个部分的分拆。

令 $E' = \{ \varphi(\alpha) \mid \alpha \in E\}$。

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k, \quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^k：n的所有包含k个部分的分拆的个数）

$$E = \{\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0) \mid 1 \le m \le k\}$$
$$E' = \{\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1+1, a_2+1, \ldots, a_m+1, 1, 1, \ldots, 1) \mid \alpha \in E\}$$

证明：(续) 显然有：

(1) $\alpha_1, \alpha_2 \in E$ 且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 当且仅当$\alpha_1', \alpha_2' \in E'$且$\alpha_1' \neq \alpha_2'$；

(2) 对任意 $\alpha' \in E'$, 有 $\alpha \in E$ 使 $\varphi(\alpha) = \alpha'$。

因此 φ 为双射，得 $|E| = |E'|$。

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k, \quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^k：n的所有包含k个部分的分拆的个数）

$$E=\{\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0) | 1 \le m \le k\}$$

$$E' = \{\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1+1, a_2+1, \ldots, a_m+1, 1, 1, \ldots, 1) | \alpha \in E\}$$

证明：（续）下面证明$|E'| = p_{n+k}^k$。

只需证明对任意一个$n+k$的包含k个部分的划分α'，都能找到一个$\alpha \in E$，使得$\varphi(\alpha)=\alpha'$。

设$\alpha' = (b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_k)$，

(1) 若b_i全大于1，$i=1, \ldots, k$, 则$\alpha = (b_1-1, b_2-1, \ldots, b_k-1)$ 为n的k个部分的划分；

(2) 否则，设$\alpha'=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 1, \ldots, 1)$，则$\alpha = (b_1-1, \ldots, b_m-1, 0, \ldots, 0)$为$n$的$m$个部分的划分。

因此，$|E'| = p_{n+k}^k$。

综上，定理得证。

利用定理给出的公式，可递归地推算p_n^k如下表：

p_n^k	k=1	2	3	4	5	6	7	8
n=1	1							
2	1	1						
3	1	1	1					
4	1	2	1	1				
5	1	2	2	1	1			
6	1	3	3	2	1	1		
7	1						1	
8	1							1

$p_{n+k}^k = \sum_{j=1}^k p_n^j$，　$p_n^1 = p_n^n = 1$

$p_n^k = p_{n-k+k}^k = \sum_{j=1}^k p_{n-k}^j$

即将n-k行中前k个数相加。

利用定理给出的公式，可递归地推算p_n^k如下表：

p_n^k	k=1	2	3	4	5	6	7	8	$p_n=\sum_{k=1}^{n} p_n^k$
n=1	1								1
2	1	1							2
3	1	1	1						3
4	1	2	1	1					5
5	1	2	2	1	1				7
6	1	3	3	2	1	1			11
7	1	3	4	3	2	1	1		15
8	1	4	5	5	3	2	1	1	22

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \leq n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且 $q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 n-r 的分拆数量，则

$$p_n(r) = q_n(r)。$$

6

5+1, 4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4)$

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \leq n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且 $q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，则

$$p_n(r) = q_n(r)。$$

6

5+1, 4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4)$

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，则

$$p_n(r) = q_n(r)。$$

6

5+1, 4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：4+2，4+1+1

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且 $q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，则

$$p_n(r) = q_n(r)。$$

6

5+1, 4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：4+2，4+1+1

$q_6(4)$

分拆各部分不大于 4 的 2 的分拆数量

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且 $q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，则

$$p_n(r) = q_n(r)。$$

6

5+1, 4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：4+2，4+1+1

$q_6(4) = 2$：2，1+1

分拆各部分不大于 4 的 2 的分拆数量

构建两种情况的分拆的一一对应

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。
设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且 $q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，则

$$p_n(r) = q_n(r)。$$

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(1) 任取 n的一个最大部分为 r 的分拆 λ_1，
去掉λ_1的一个等于 r 的部分，得到 $n-r$ 的一个分拆 λ_1'，且 λ_1' 的任何部分都不大于r；

(2) 反过来，任取 $n-r$ 的分拆 λ_2，其任何部分都不大于 r，
插入一个等于r的部分，从而得到一个 n 的分拆λ_2'。

因此，得 $p_n(r) = q_n(r)$。

分拆的几何图示：Ferrers图

设 λ 是 n 的分拆 $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$，其中 $n_1 \geq n_2\ldots \geq n_k >0$。
λ 的**Ferrers图**（**Ferrers diagram**），是一个**左对齐**的点组，该组有 k 行，第 i 行有 n_i 的点 （$1\leq i \leq k$）。

例：10的分拆 λ 为 10＝4＋2＋2＋1＋1，可记作 $4^1 2^2 1^2$,

λ 的Ferrers图为：

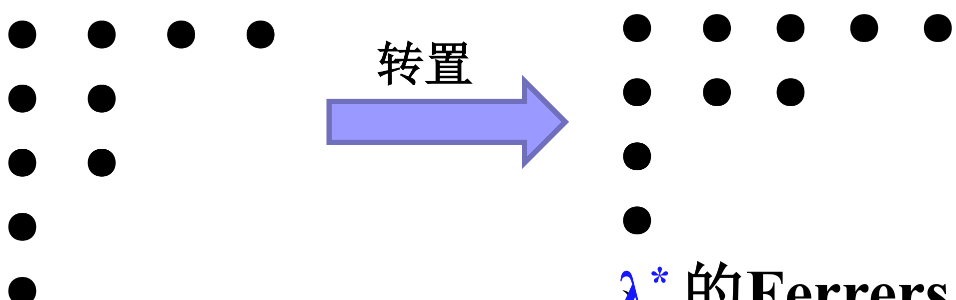
● ● ● ●
● ●
● ●
●
●

显然，对于任何正整数n，其每个分拆可由Ferrers图唯一确定。

分拆的几何图示：Ferrers图

将分拆 λ 的Ferrers图 看成一个矩阵，其 转置矩阵称为 λ 的共轭分拆， 记为 λ^*。

例：10的分拆 λ 为 10＝4＋2＋2＋1＋1，可记作 $4^1 2^2 1^2$,
λ 的Ferrers图为：



λ^* 的Ferrers图

$10 = 5+3+1+1$

λ^*： 531^2

- 分拆 λ的共轭的共轭就是它本身，即$(\lambda^*)^* = \lambda$。
- λ^*（ λ ）的行数等于 λ （ λ^* ）的最大部分。

■ λ^*（λ）的行数等于 λ（λ^*）的最大部分。

问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的拆分有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1

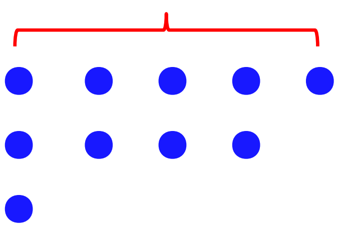
= 5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1+1 　7 个

分成 5个部分的拆分有多少个？

10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 =4+3+1+1+1= 4+2+2+1+1+

= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2 　7 个

以5作为最大部分

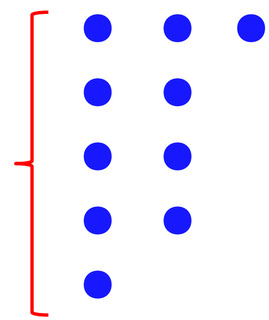


5+4+1

一一对应

分成

5个部分



3+2+2+2+1

- λ^*（λ）的行数等于 λ（λ^*）的最大部分。

问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的拆分有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1

= 5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1+1

7 个

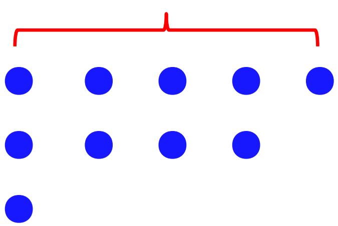
分成 5个部分的拆分有多少个？

10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 =4+3+1+1+1= 4+2+2+1+1+

= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2

7 个

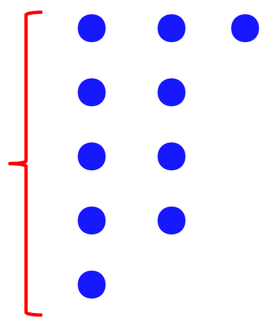
以5作为最大部分



5+4+1

一一对应

分成
5个部分



3+2+2+2+1

- λ^*（λ）的行数等于 λ（λ^*）的最大部分。

问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的拆分有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1

= 5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1+1

7 个

分成 5个部分的拆分有多少个？

10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 =4+3+1+1+1= 4+2+2+1+1+

= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2

7 个

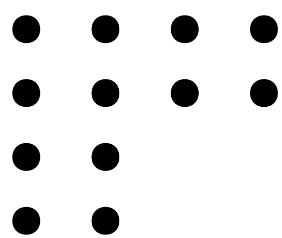
定理（拆分数定理）：正整数 n 分成 k个部分的拆分个数，等于 n 分成以 k为最大部分的拆分个数。

自共轭分拆

- 当某个分拆 λ 与它的共轭分拆 λ* 完全相同时，即 λ ＝ λ* 时，λ 称为自共轭分拆。
  - 此时，λ的Ferrers图是一个对称方阵。

例如：将12拆分成：12= 4+4+2+2； $\lambda = 4^2 2^2$;

其Ferrers图如下：



✓ 它的转置与自身一样。

✓ 关于主对角线对称

定理8.3.2 设 n 是正整数，

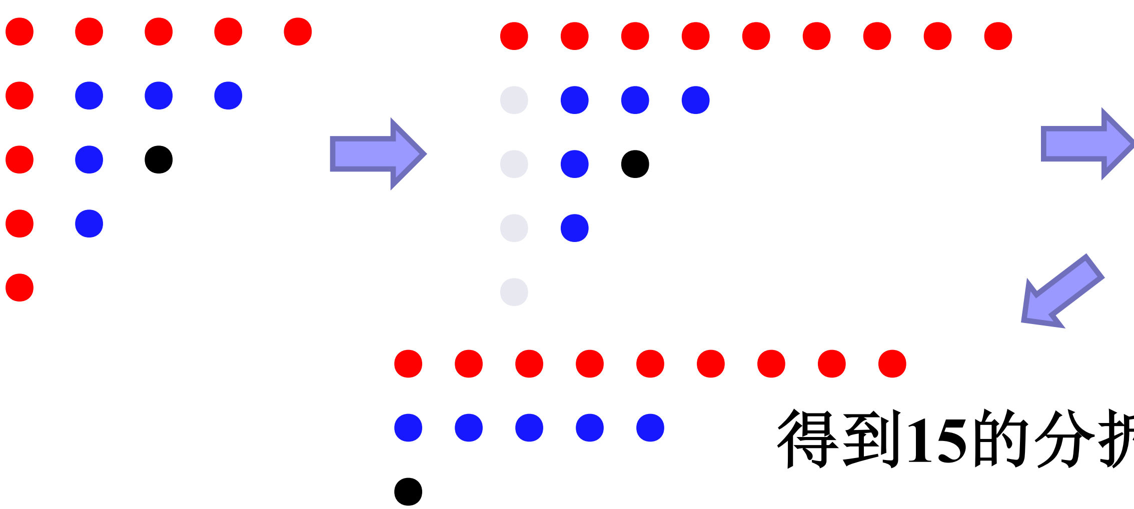
设p_n^s为 n 的自共轭分拆个数，

p_n^t 为分拆成互不相同的若干奇数的和的分拆个数，则

有 $p_n^s = p_n^t$。

分析：利用Ferrers图建立两种分拆的一一对应。

例：考虑15的自共轭分拆 λ： **15 = 5+4+3+2+1**，其图为



为什么会是互不相同的若干奇数的和？

得到15的分拆 λ' ：$15 = 9 + 5 + 1$。

把以上过程反过来，可得从λ'得到λ。

定理8.3.3（欧拉恒等式） 设 n 是正整数，

设 p_n^o 是把 n 分成奇数部分的分拆个数，

p_n^d 是把 n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

例：考虑32的奇数和分拆 32 = 7+5+5+5+3+3+1+1+1+1。

32 = 7+5+5+5+3+3+1+1+1+1

= 7+10+5+3+3+1+1+1+1

= 7+10+5+6+1+1+1+1

= 7+10+5+6+2+1+1

= 7+10+5+6+2+2

= 7+10+5+6+4

迭代地把两个相同部分合并成一个部分，最终产生不同部分的分拆

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，
设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，
p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

考虑 32 的分成不同部分的分拆

$$32 = 11+9+6+4+2。$$

$$\begin{aligned}32 &= 11+9+6+4+2\\ &= 11+9+3+3+2+2+1+1\\ &= 11+9+3+3+1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

迭代地把偶数部分平分成两个相等部分，直至产生奇数部分的分拆。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，
设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，
p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(1) 考虑把n分成奇数和的一个分拆λ。

- 若 λ 的所有部分互不相同，则 λ 是一个把n分成不同部分的分拆；
- 如果存在两个相同的部分，则把这两部分合并成一个部分。

持续以上过程，直到所有部分都互不相同。

由于每次合并两个部分时，都相应减少了部分的数量，

因此以上过程最终会终止，得到一个把n分成不同部分的分拆。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，

设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，

p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(2) 考虑把n分成不同部分的一个分拆λ。

- 如果λ的所有部分都是奇数，则λ是一个把n分成奇数和的分拆；
- 否则至少存在一个偶数部分，则把每一个偶数部分分成两个相同的部分。

重复以上过程，直到所有部分都是奇数。

- 如何计算分拆数？

- 方法一：

定理：n分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k, \quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

n 分拆数 $p_n = \sum_{i=1}^{n} p_n^i$

- 方法二：生成函数

分拆数与生成函数

定理8.3.4 数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)^{-1}。$$

证明：由 $(1-x^k)^{-1} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{a_k k} + \ldots$，得

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n + \ldots$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)^{-1}$$

$$= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \ldots \times \frac{1}{1-x^k} \times \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots) \times \ldots$$

$$(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

每一个项 x^n 由通过从第一个因子选择x^{1a_1}，从第二个因子选择项x^{2a_2}，从第三个因子选择项x^{3a_3}, …得到，其中，

$$1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots ka_k + \ldots = n \quad (0 \le a_i \le n) \quad (1)$$

显然，方程(1)的每个正整数解均对应 n 的一个拆分，因此，x^n 的系数，即方程(1)的非负整数解的个数，就是 n 的分拆数。

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \boxed{\frac{1}{1-x^k}} \cdot \ldots$$

对应为 k 的部分

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots)$$

$$\times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

- 多重集合 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$ 的 n 组合数数列 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_1} + \ldots) \times (1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_2} + \ldots) \times \ldots \times$$

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_k} + \ldots)$$

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x^k}\cdot\ldots$$

$$= (1+x+x^2+\ldots+x^{1a_1}+\ldots)\times(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2a_2}+\ldots)$$

$$\times\ldots\times(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{ka_k}+\ldots)\times\ldots$$

问题:

- n 分成 k个部分的分拆数 p_n^k 的生成函数?
- n 分成奇数和的分拆数 p_n 的生成函数?
- n 分成互不相等的部分的拆分数 p_n 的生成函数?
- n 分成互不相等的奇数部分的拆分数 p_n 的生成函数?

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$的生成函数是

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}$。

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots)$$

$$\times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

- n 分成 k个部分的分拆数p_n^k的生成函数

$$g(x) = x^k(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}\ldots(1-x^k)^{-1}$$

保证至少存在一个部分k

保证最大部分为 k

定理（拆分数定理）：正整数 n 分成 k个部分的拆分个数，等于 n 分成以 k为最大部分的拆分个数。

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$的生成函数是

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$。

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1+x+x^2+\ldots+x^{1a_1}+\ldots) \times (1+x^2+x^4+\ldots+x^{2a_2}+\ldots)$$

$$\times \ldots \times (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{ka_k}+\ldots) \times \ldots$$

- n 分成奇数和的分拆数 p_n 的生成函数？

$$g(x) = (1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^7)^{-1}\ldots$$

$$= (1+x+x^2+\ldots+x^{1a_1}+\ldots) \times$$

$$(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3a_2}+\ldots) \times$$

$$(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{5a_k}+\ldots) \ldots$$

保证每个部分都为奇数

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$的生成函数是

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}$。

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots)$$

$$\times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

- n 分成互不相等的部分的拆分数 p_n 的生成函数？

分拆中1, 2, …, n只能出现 一次

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^n)\ldots$$

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots)$$

$$\times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

- n 分成互不相等的奇数部分的拆分数 p_n 的生成函数？

分拆中不超过n 的奇数只能出现 1次

$$g(x) = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots(1+x^{2k-1})\ldots$$

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案？

分析： 与{1, 2, 3, 4}的组合数有区别：

{1, 2, 4}, {3, 4}是两个不同的组合，但称出同样的重量。

(1) {1, 2, 3, 4}的组合数的生成函数为：

$G_1(x)=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$

(2) {1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？对能称出的重量有几种可称量方案?

分析：{1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

例 1　有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案？

分析： {1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

把四个因子中的x用x_1, x_2, x_3, x_4替换，得

$(x_1^0+ x_1^1)(x_2^0 + x_2^2)(x_3^0 + x_3^3)(x_4^0 + x_4^4) =$

$x_1^0\, x_2^0\, x_3^0\, x_4^0+ x_1^0\, x_2^0\, x_3^0\, x_4^4+ x_1^0\, x_2^0\, x_3^3\, x_4^0+ x_1^0\, x_2^0\, x_3^3 x_4^4+$

$x_1^0 x_2^2 x_3^0\, x_4^0+ x_1^0 x_2^2 x_3^0\, x_4^4+ x_1^0 x_2^2 x_3^3\, x_4^0+ x_1^0 x_2^2 x_3^3 x_4^4+$

$x_1^1 x_2^0\, x_3^0\, x_4^0+x_1^1 x_2^0\, x_3^0\, x_4^4+ x_1^1\, x_2^0\, x_3^3\, x_4^0+x_1^1 x_2^0\, x_3^3 x_4^4+$

$x_1^1 x_2^2 x_3^0\, x_4^0+x_1^1 x_2^2 x_3^0\, x_4^4+x_1^1 x_2^2 x_3^3\, x_4^0+x_1^1 x_2^2 x_3^3 x_4^4$

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案?

分析： {1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

把四个因子中的x用x_1, x_2, x_3, x_4替换，得

$(x_1^0+x_1^1)(x_2^0+x_2^2)(x_3^0+x_3^3)(x_4^0+x_4^4)=$

$x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0+x_1^0x_2^0x_3^0x_4^4+x_1^0x_2^0x_3^3x_4^0+x_1^0x_2^0x_3^3x_4^4+$

$x_1^0x_2^2x_3^0x_4^0+x_1^0x_2^2x_3^0x_4^4+x_1^0x_2^2x_3^3x_4^0+x_1^0x_2^2x_3^3x_4^4+$

$x_1^1x_2^0x_3^0x_4^0+x_1^1x_2^0x_3^0x_4^4+x_1^1x_2^0x_3^3x_4^0+x_1^1x_2^0x_3^3x_4^4+$

$x_1^1x_2^2x_3^0x_4^0+x_1^1x_2^2x_3^0x_4^4+x_1^1x_2^2x_3^3x_4^0+x_1^1x_2^2x_3^3x_4^4$

把x_1, x_2, x_3, x_4替换成x，得

$g(x) = 1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10}$

从$G(x)$展开式中x的幂次项知，可称出1~10克的重量，系数即为对应的称量方案数。

例： 若有 1 克的砝码 3 枚，2克的砝码 4 枚，4克的砝码2枚。问能称出哪些重量？各有几种方案？

有 序 拆 分

- 以上讨论的整数n的拆分都是无序拆分
  - 即在定义中强加了一种次序，即

$$n=\sum_{i=1}^{k} a_i,\ a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$$

例：5=3+1+1，5=1+3+1，5=1+1+3 是5的同一无序拆分。

- 当考虑有序拆分时，定义可改写如下：

$$n=\sum_{i=1}^{k} a_i,\ a_i \geq 1,\ i=1, 2, \ldots, k$$

例：5=3+1+1，5=1+3+1，5=1+1+3 是 5的不同的有序拆分。

n的有序拆分的个数？