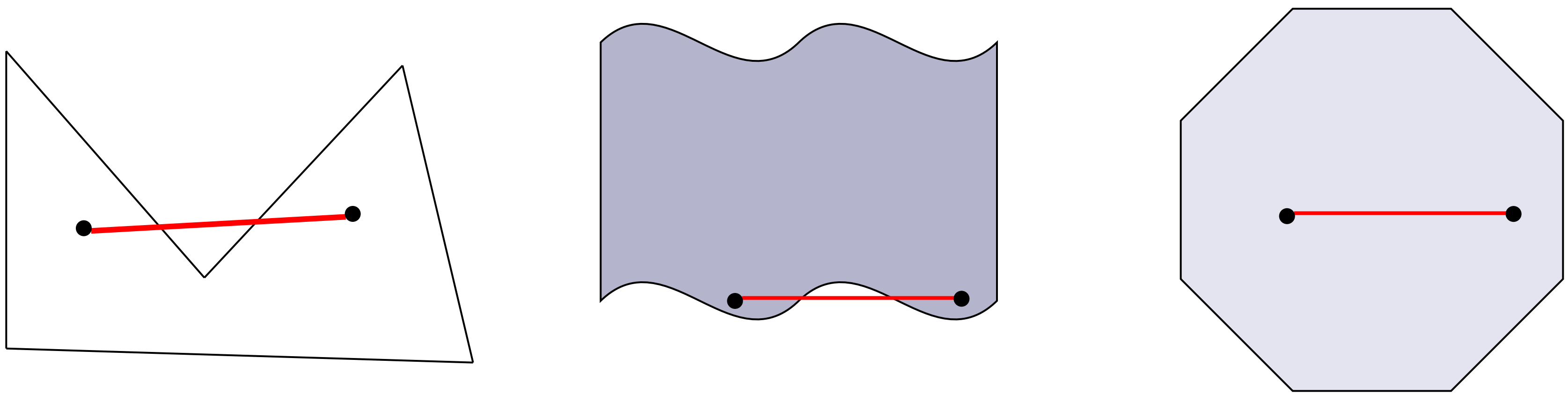
第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列
7.2 生成函数
7.3 指数生成函数
7.4 求解线性齐次递推关系
7.5 非齐次递推关系
7.6 一个几何例子

7.6 一个几何例子

定义1：设有平面或空间中的点集 K, 若 K中任意两点 p 和 q 的连线上的所有点都在 K 内,称 K 是凸集.



✗ ✗ √

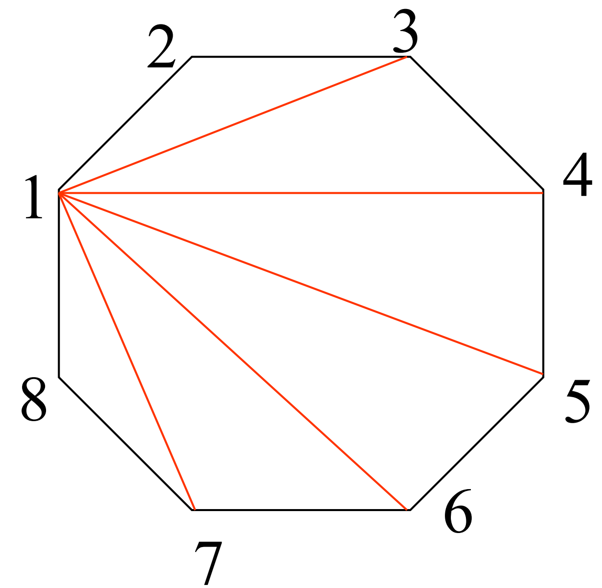
凸多边形的计数问题

- 设 K是有n条边的多边形区域，如下计数它的对角线个数：
- 每一个顶点通过对角线与其他n-3个顶点相连；
- 计数每一顶点处的对角线条数再求和得$n(n$-3$)$；
- 每条对角线计算了两次，因此对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$。

另一种计算方法：

- n个顶点一共可构成$n(n$-1$)/2$条边
- 减去n条边，剩下的是对角线：

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$



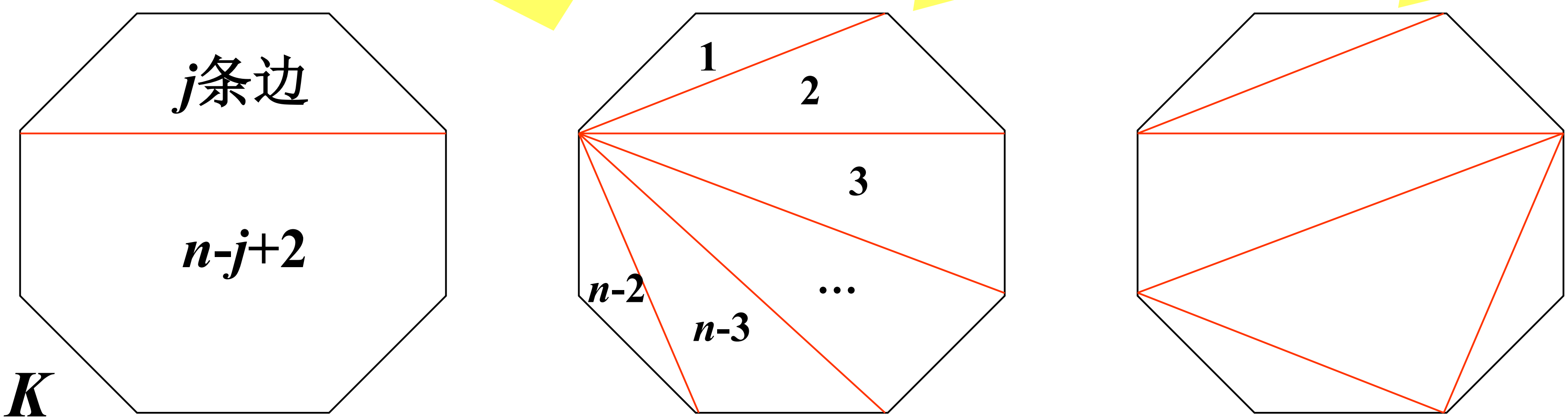
凸多边形的计数问题

- 设 K是有 n条边的多边形区域，
  - K 的每条对角线把 K分成两个区域：j 条边的凸多边形和 $n\text{-}j\text{+}2$条边的区域（j=3, 4,…, n-1）
  - 交于 K的某个顶点处的n-3条对角线把 K分成n-2个三角形区域
  - 还有其他方法在 K中插入n-3条对角线把 K分成n-2个三角形区域

对角线不相交

把K划分成三角形

共有多少种划分方法？



凸多边形三角形剖分方法计数

定理7.6.1 设 h_n表示用下面方法把凸多边形区域分成三角形区域的方法数：

$n+1$个点

在有$n+1$条边的凸多边形区域内通过插入不相交的对角线，而把它分成三角形区域。

定义 $h_1=1$。

则 h_n满足如下递推关系：

$$h_n = h_1h_{n-1}+h_2h_{n-2}+\ldots+h_{n-1}h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \quad (n\geq 2)$$

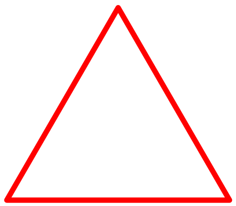
该递推关系解为： $h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \quad (n=1, 2, 3,\ldots)$

$h_n = h_1 h_{n\text{-}1} + h_2 h_{n\text{-}2} + \ldots + h_{n\text{-}1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$

证明: (1) 求递推关系。

n=1时，定义h_1=1，且把一条线段 看作是具有两侧而没有内部的多边形区域。

n=2时，为三角形，没有对角线，不能进一步再分，因此h_2=1。



由于 $\sum_{k=1}^{2-1} h_k h_{2-k} = h_1 h_1$=1.

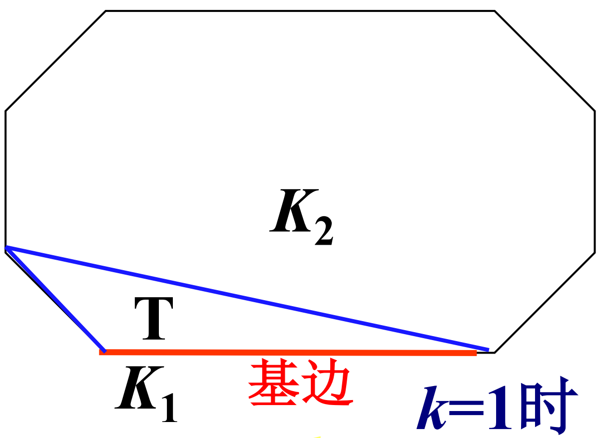
因此，$n = 2$时，递推公式成立。

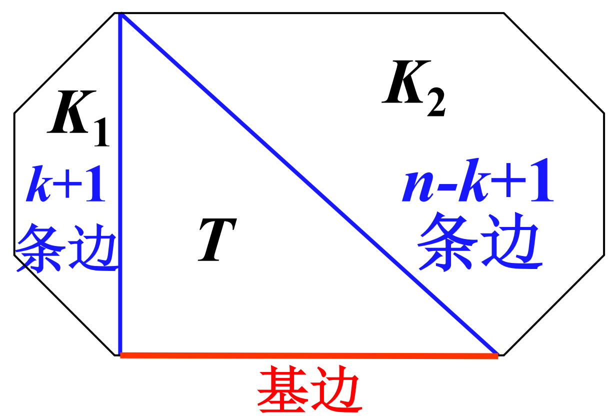
$$h_n = h_1h_{n-1}+h_2h_{n-2}+\ldots+h_{n-1}h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$$

令$n \geq 3$, 考虑 $n+1$ 条边的凸多边形区域 K。

选取 K的一条边称为基边：

对每一种分法，基边所在的三角形区域 T将 K 分成两个部分K_1和K_2，其中K_1有$k+1$条边，而K_2有 $n-k+1$条边 (k=1, 2,…, n-1)。





具有n+1条边的多边形区域

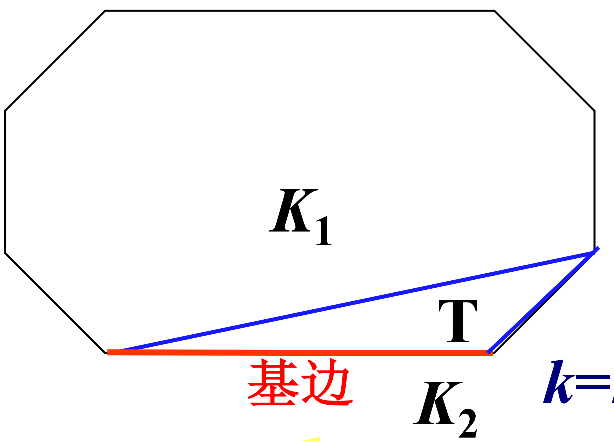
把一条线段看作是具有两侧而没有内部的多边形区域

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$$

令 $n \geq 3$, 考虑 $n+1$ 条边的凸多边形区域 K。

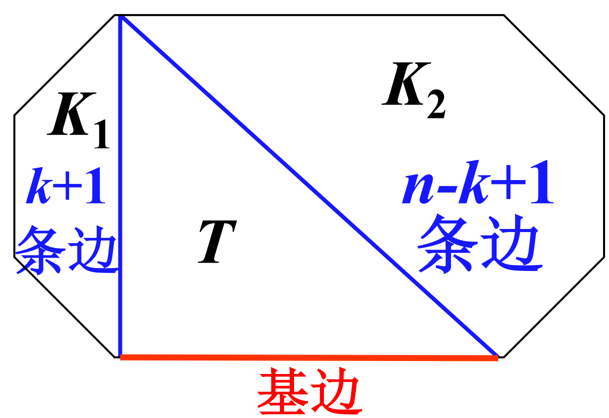
选取 K的一条边称为基边:

对每一种分法，基边所在的三角形区域 T将 K 分成两个部分K_1和K_2，其中K_1有$k+1$条边，而K_2有 $n-k+1$条边 (k=1, 2,…, n-1)。



k=n-1时

把一条线段看作是具有两侧而没有内部的多边形区域



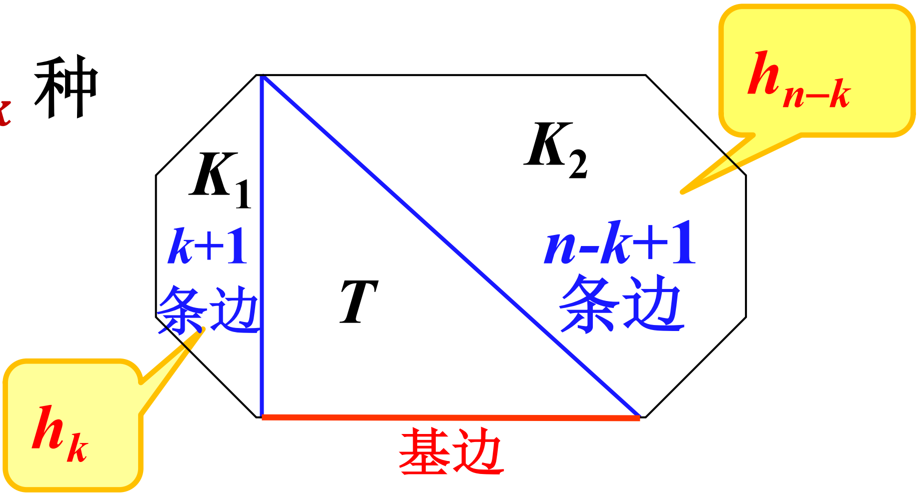
具有n+1条边的多边形区域

$$h_n = h_1 h_{n\text{-}1} + h_2 h_{n\text{-}2} + \ldots + h_{n\text{-}1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$$

通过分别在 K_1 与 K_2 中插入不相交的对角线，可把 K_1 与 K_2 划分成三角形区域，从而实现对 K 的进一步划分。

因此，对于三角形区域 T 中包含基边的一个特定的选择，存在 $h_k h_{n-k}$ 种方法利用在 K 内不相交的对角线把它分成三角形区域。

因此总共有 $h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$ 种方法把 K 分成三角形区域。



具有 n+1 条边的多边形区域

(2) 求解（非线性）递推关系。

设$h_1, h_2, \ldots, h_n \ldots$的生成函数为

$$g(x) = h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1$

$h_2 = h_1 h_1$

$h_3 = h_1 h_2 + h_2 h_1$

$h_4 = h_1 h_3 + h_2 h_2 + h_3 h_1$

$h_5 = h_1 h_4 + h_2 h_3 + h_3 h_2 + h_4 h_1$

则有

$$(g(x))^2$$

$$= (h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 \ldots + h_n x^n + \ldots)(h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 \ldots + h_n x^n + \ldots)$$

$$= h_1^2 x^2 + (h_1 h_2 + h_2 h_1) x^3 + (h_1 h_3 + h_2 h_2 + h_3 h_1) x^4 + \ldots +$$

$$(h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1) x^n + \ldots$$

$$= h_2 x^2 + h_3 x^3 + h_4 x^4 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

$$= g(x) - h_1 x = g(x) - x \quad (h_1 = 1)$$

因此 $g(x)$满足方程 $(g(x))^2 - g(x) + x = 0$。

因此 $g(x)$满足方程 $(g(x))^2-g(x)+x=0$

解方程得到：

$$g_1(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}, \quad g_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

由于 $g(0)=0$, 而 $g_1(0)=1$ 不符合条件,

$g_2(0)=0$ 符合条件

故， $$g(x) = g_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

根据牛顿二项式定理：

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

应用：求解任意精度的平方根（第5章）

$$g(x)=g_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

代入展开得到:

$$(1-4x)^{1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\times 2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n 4^n x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

$$=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

代入$g(x)==\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$，得 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$

因此 $h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

Catalan数 C_{n-1}

凸多边形三角形剖分方法计数

定理7.6.1 设 h_n表示用下面方法把凸多边形区域分成三角形区域的方法数：

$n+1$个点

在有$n+1$条边的凸多边形区域内通过插入不相交的对角线，而把它分成三角形区域。

定义 $h_1=1$。

则 h_n满足如下递推关系：

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \quad (n \geq 2)$$

该递推关系解为： $h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$

Catalan数 C_{n-1}

总结

- 数列与递推多项式
- 生成函数、指数生成函数
  - 多重集组合、多重集排列（每类元素出现次数上的约束）
- 求解常系数线性（非）齐次递推关系
- ***n*+1**条边的凸多边形的对角线划分为三角形的方法数（非线性的递推关系）