第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列
7.2 生成函数
7.3 指数生成函数
7.4 求解线性齐次递推关系
7.5 非齐次递推关系
7.6 一个几何例子

第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列
7.2 生成函数
7.3 指数生成函数
7.4 求解线性齐次递推关系
7.5 非齐次递推关系
7.6 一个几何例子

回顾：错位排列计数公式的递推关系

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

递推关系

(1) $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$, $(n = 3, 4, \ldots)$

(2) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$，$(n = 2, 3, \ldots)$

数列

- 设 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$表示一个数列，
  - ✓ 其中 h_n 叫做数列的一般项或通项

例如：算术数列（等差数列）：

$$h_0, h_0+q, h_0+2q, \ldots, h_0+nq, \ldots$$

- ✓ 递推关系：$h_n= h_{n-1}+q$
- ✓ 一般项：$h_n= h_0+nq$
- ✓ 前n+1项和：$s_n= (n+1)h_0+qn(n+1)/2$

数列

- 设 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$表示一个数列，
  - ✓ 其中 h_n 叫做数列的一般项或通项

例如：几何数列（等比数列）：

$$h_0, qh_0, q^2h_0, \ldots, q^nh_0, \ldots$$

- ✓ 递推关系：$h_n = qh_{n-1}$ （$n \geq 1$）
- ✓ 一般项： $h_n = q^nh_0$ （$n \geq 0$）
- ✓ 前n+1项和：$s_n = h_0(1-q^{n+1})/(1-q)$

例：算术数列(等差数列)举例

(1) $h_0=1, q=2$: 1, 3, 5, …, $1+2n$

正奇整数数列：$h_n=1+2n, n\geq 0$

(2) $h_0=4, q=0$： 4, 4, 4,…, 4,…

每一项都等于4的常数数列： $h_n=4, n\geq 0$

(3) $h_0=0, q=1$: 0, 1, 2, …, n,..

非负整数数列: $h_n=n, n\geq 0$

例：几何数列(等比数列)举例

(1) $h_0=1, q=2$: 1, 2, 2^2, …, 2^n, …

n元集合的子集数: $h_n=2^n$, $n\geq 0$

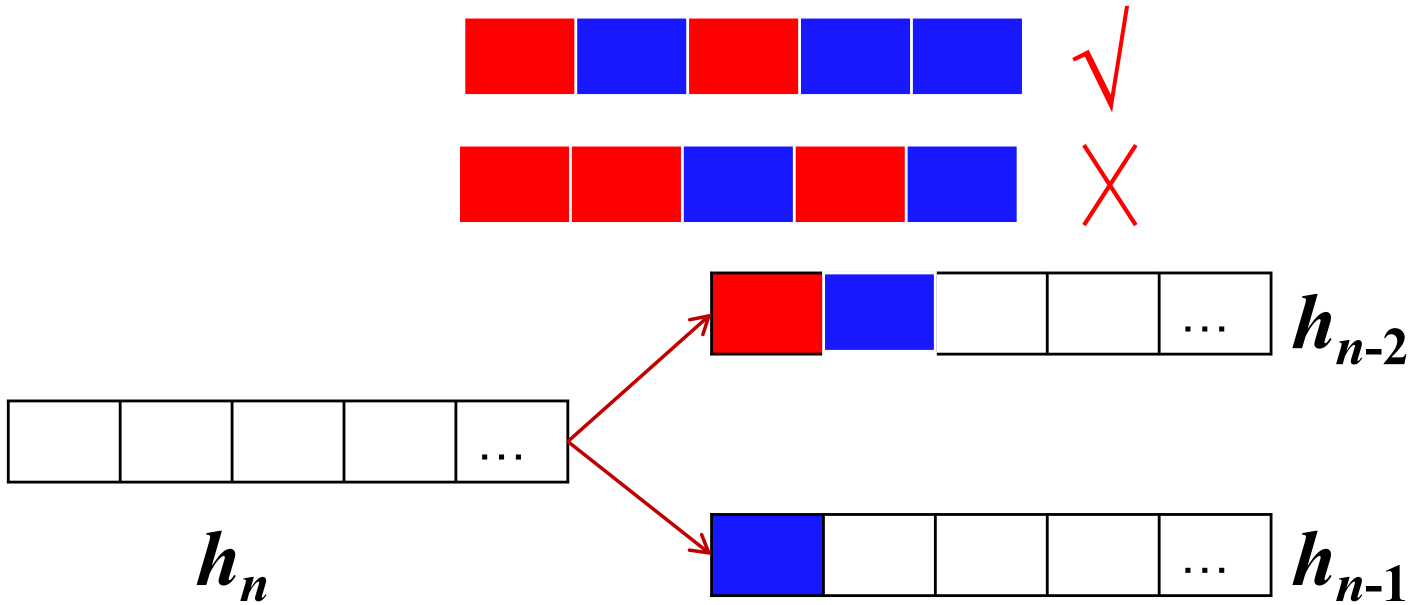
(2) $h_0=5, q=3$： 5, $3\cdot 5$, $3^2\cdot 5$,…, $3^n\cdot 5$,…

$h_n= 3^n\cdot 5, n\geq 0$

主要内容

- 求递推式
- 斐波那契（**Fibonacci**）序列

例: 考虑1行 n列棋盘。假设用红和蓝两种颜色给这个棋盘的每一个方格着色。设 h_n是使得没有两个着成红色的方格相邻的着色方法数。求h_n满足的递推关系。



h_n满足的递推关系为: $h_n=h_{n-1}+h_{n-2}\ (n\geq 3)$

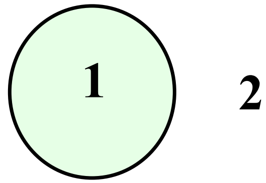
$h_1=2,\ h_2=3$

例. 确定平面一般位置上的 n个互相交叠的圆所形成的区域数，其中

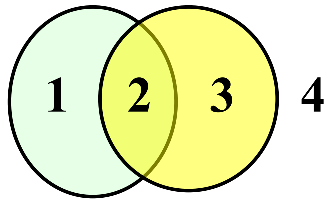
- 互相交叠是指每两个圆相交在不同的两个点上；
- 一般位置是指不存在有一个公共点的三个圆。

解：用h_n表示平面一般位置上的n个互相交叠的圆所形成的区域数。

$h_0=1$：一个区域即一个平面

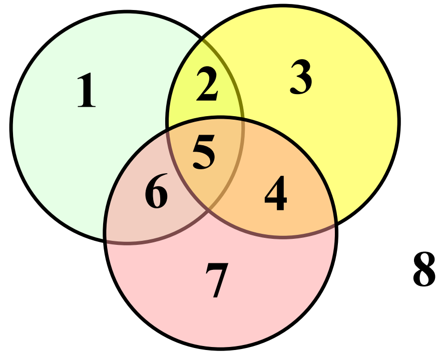


$h_1=2$：圆内区域和圆外区域

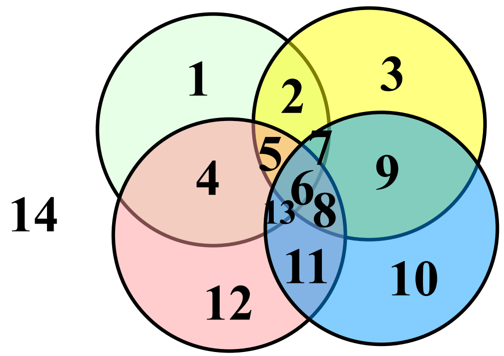


$h_2=4$

$h_3=8$



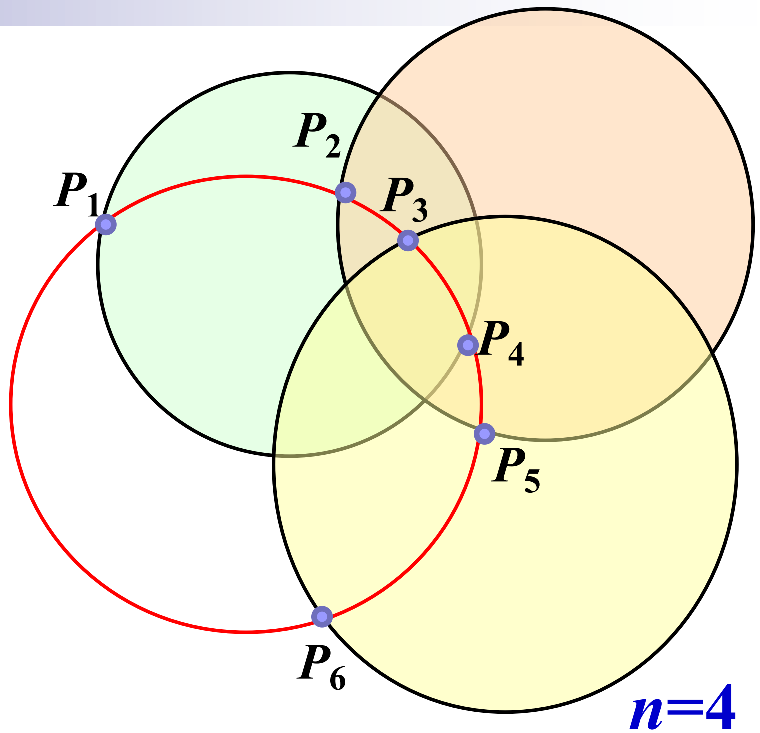
$h_4=14$



一般递推关系(n≥2):

第n个圆与前n-1个圆相交于

2(n-1)不同交点：$P_1, P_2, \ldots, P_{2(n-1)}$。



共形成第n个圆上的2(n–1)条弧:

P_1P_2, P_2P_3, …, $P_{2(n-1)-1}\ P_{2(n-1)}$和$P_{2(n-1)}\ P_1$:

- 每条弧把穿过的区域一分为二
- 增加了2(n–1)个区域

因此, 得到递推关系: $h_n=h_{n-1}+2(n-1)$，$h_0=1$，$h_1=2$

斐波那契（Fibonacci）序列

- 1202年出版的著作《珠算原理》(Liber Abaci中提出问题：

> 年初把一对新生的雌雄兔子放进笼子，从第二个月开始每月生出一对雌雄兔子，每对新兔也从第二个月开始每月生出一对雌雄兔子，问一年后笼子内共有多少对兔子。

设 f_n 表示第n个月开始（即第 n-1个月结束）时笼子里的兔子对数。

$n=1, f_1=1$

$n=2, f_2=1$

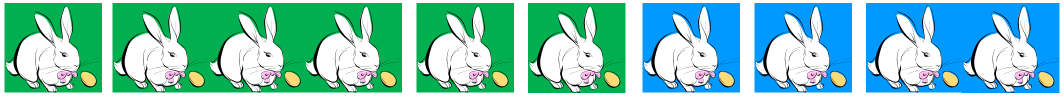
$n=3, f_3=2$

$n=4, f_4=3$

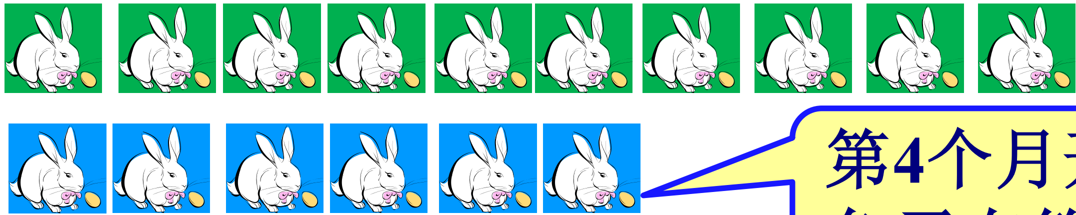
$n=5, f_5=5$

$n=6, f_6=8$

设f_n表示第n个月开始（即第n-1个月结束）时笼子里的兔子对数。

f_5=5：

第5个月开始已有的兔子

f_6=8 

第4个月开始已有的新生兔子在第5个月生的兔子

- 第n个月开始（第n-1个月结束）兔子对数分为两个部分：
  - 第n-1个月开始（第n-2个月结束）已有的兔子对数
  - 第n-1个月期间出生的兔子对数

||

第n-2个月开始已有的兔子对数

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, n≥2

$f_0=0, f_1=1$

f_7=13，f_8=21， f_9=34， …

设有数列$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$。如果

$f_0=0, f_1=1$, 且满足递推关系 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$， $n \geq 2$

称该数列为斐波那契（**Fibonacci**）数列，这个数列的项称为斐波那契数。

定理7.1.1 斐波那契数f_n满足公式

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

求解线性齐次递推式

设有数列$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$。如果

$f_0=0, f_1=1$, 且满足递推关系 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$， $n \geq 2$

称该数列为斐波那契（**Fibonacci**）数列，这个数列的项称为斐波那契数。

例：斐波那契数列的项的部分和为

$$s_n = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$

证明：对n施归纳法证明。

设有数列$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$。如果

$$f_0=0, f_1=1, \text{且满足递推关系 } f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \quad n\geq 2$$

称该数列为斐波那契（Fibonacci）数列，这个数列的项称为斐波那契数。

性质：

(1) 斐波那契数列的部分和为

$$s_n=f_0+f_1+\ldots+f_n=f_{n+2}-1$$

(2) 斐波那契数是偶数当且仅当n被3整除

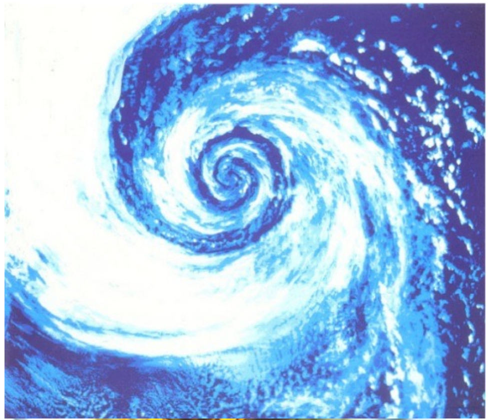
(3) 斐波那契数能被3整除当且仅当n可被4整除

(4) 斐波那契数能被4整除当且仅当n可被6整除

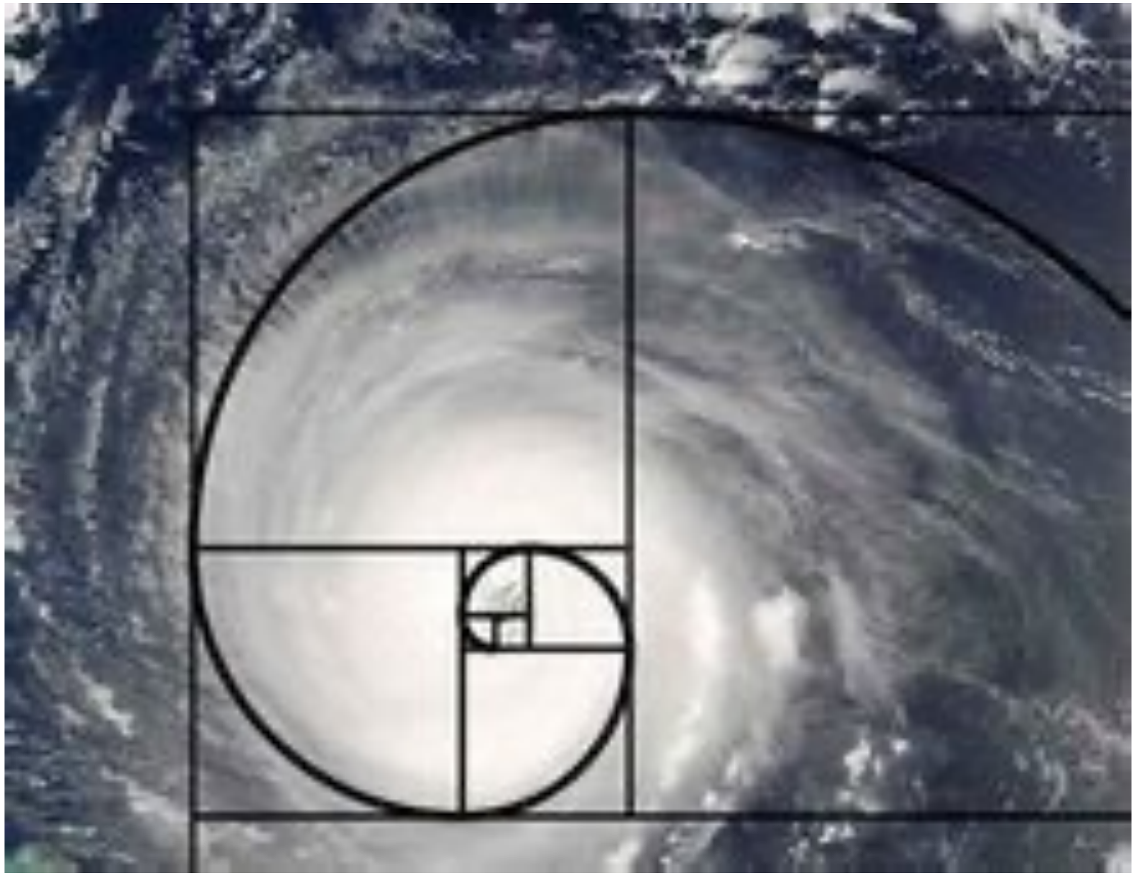
奇妙的斐波那契数列

斐波那契螺旋

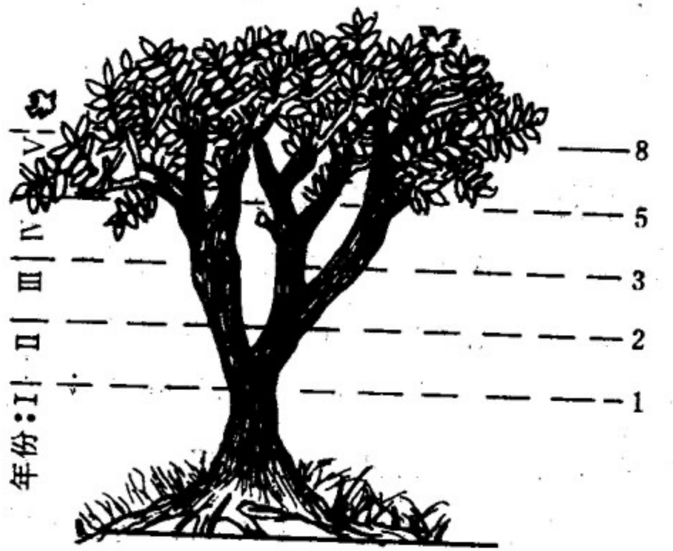
- 也称“黄金螺旋”，是根据斐波那契数列画出来的螺旋曲线
- 斐波那契螺旋线，以斐波那契数为边的正方形拼成的长方形，然后在正方形里面画一个90度的扇形，连起来的弧线就是斐波那契螺旋线
- 自然界中存在许多斐波那契螺旋线的图案，是自然界最完美的经典黄金比例。



斐波那契螺旋



一株树木各个年份的枝椏
数构成斐波那契数列



Fibonacci数列与黄金分割数

- 观察数据： $\{\frac{f_n}{f_{n+1}}, n \geq 0\}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \cdots$$

- 数列 $\{\frac{f_n}{f_{n+1}}, n \geq 0\}$ 不是单调函数，但随着n的增大，**Fibonacci数列的前两项与之比趋近于黄金数0.618。**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

例：斐波那契数列的部分和为

$$s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$

证明：对 n 用数学归纳法。

当 $n=0$ 时，$s_0=f_0=0$，且 f_2-1=1-1=0，结论成立。

当 $n\geq 1$ 时，假设结论对 n 成立，即 $s_n=f_0+f_1+\ldots+f_n= f_{n+2}-1$。

考虑 $n+1$ 时，$s_{n+1}= f_0+f_1+\ldots+f_n+f_{n+1}= f_{n+2}-1+f_{n+1}=f_{n+3}-1$。

由归纳法，结论对 $n\geq 0$ 时成立。

例：斐波那契数f_n是偶数当且仅当 n被3整除。

$f_0=0$, $f_1=1$, $f_2=1$,

$f_3= 2$, $f_4=3$, $f_5=5$,

$f_6=8$, $f_7=13$, $f_8=21$, …

(偶数，奇数，奇数)

偶数，奇数，奇数，偶数，奇数，奇数

证明：可证，斐波那契数列的每三项构成了

(偶数，奇数，奇数)的形式，

即，对于任意的$i=\geq 0$，

f_{3i}为偶数，f_{3i+1}为奇数，f_{3i+2}为奇数（数学归纳法）。

因此，斐波那契数是偶数当且仅当n被3整除。

斐波那契数在其他组合学问题的应用

定理7.1.2 沿Pascal三角形从左下到右上的对角线上的二项式系数和是斐波那契数，即

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{n-t}{t-1}$$

其中，$t = \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$。

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	2						
1	1	1	3	5					
2	1	2	1	8	13				
3	1	3	3	1	21	34			
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

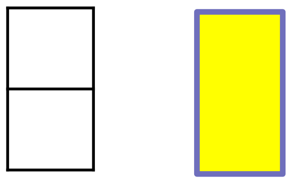
在其他组合学问题的应用

例： 确定$2\times n$棋盘用多米诺牌完美覆盖的方法数h_n。

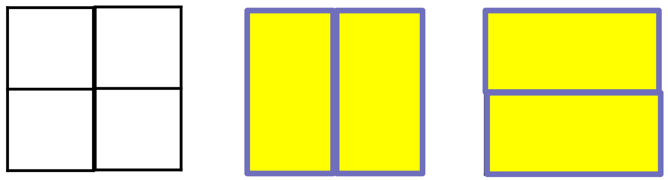
（每张多米诺骨牌正好可以覆盖棋盘上两个相邻的方格）

规定 $h_0=1$.

$n=1$

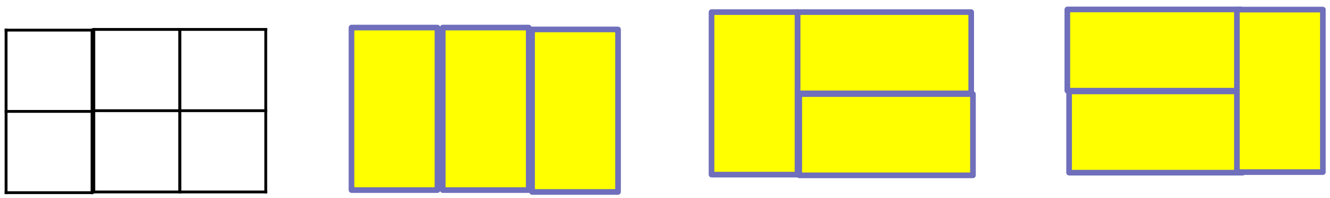


$n=2$



$h_1=1$　　$h_2=2$

$n=3$



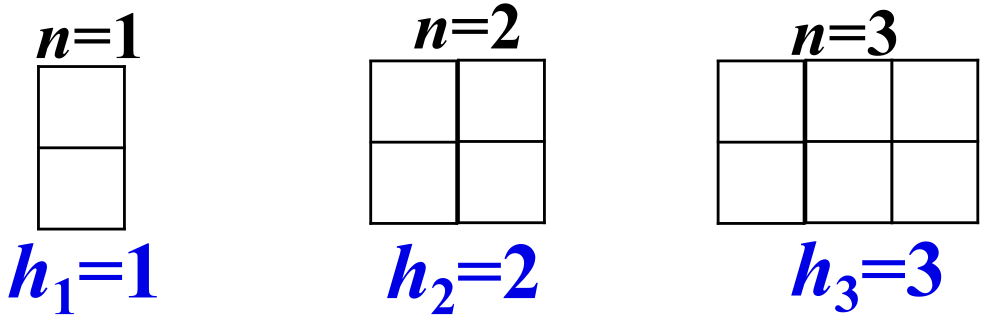
$h_3=3$

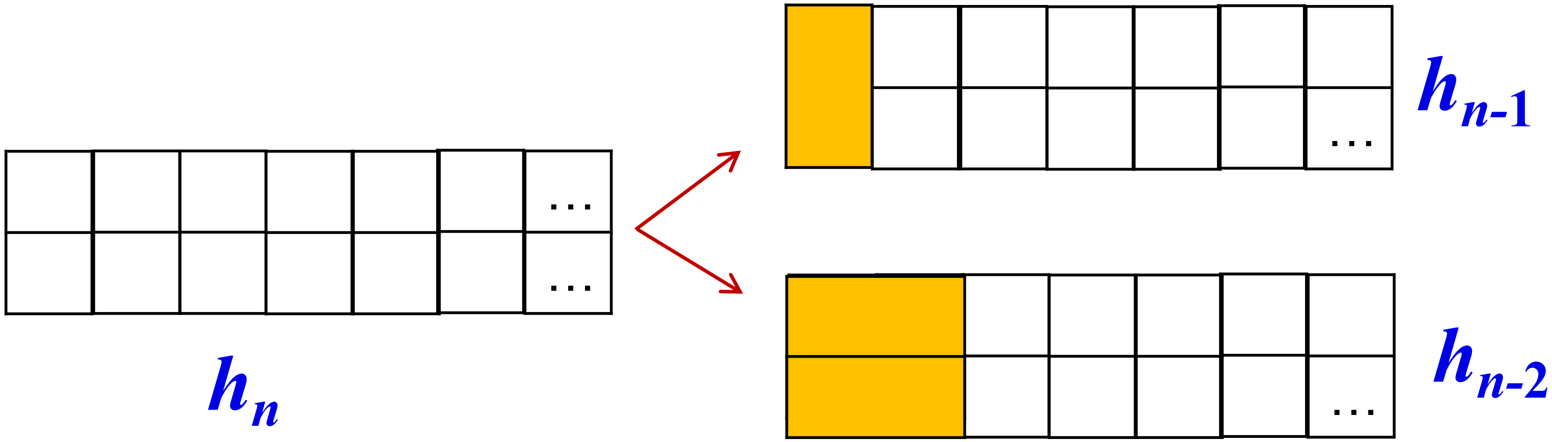
在其他组合学问题的应用

例： 确定$2\times n$棋盘用多米诺牌完美覆盖的方法数h_n。

（每张多米诺骨牌正好可以覆盖棋盘上两个相邻的方格）

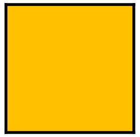
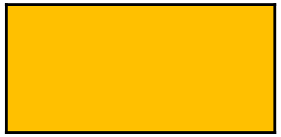
规定 $h_0=1$.



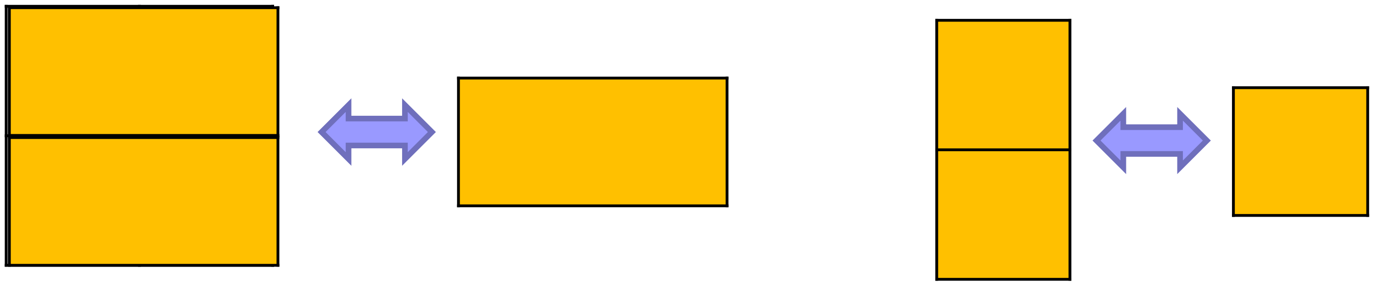


$h_n=h_{n-1}+h_{n-2}$ 满足斐波那契递推关系。h_n是斐波那契数。

例：确定用单牌和多米诺牌完美覆盖$1\times n$棋盘的方法数b_n。

单牌： 多米诺牌：

$2\times n$棋盘用多米诺牌的完美覆盖与
$1\times n$棋盘用单牌和多米诺牌的完美覆盖的一一对应



因此，用单牌和多米诺牌覆盖$1\times n$棋盘的完美覆盖数等于用多米诺牌覆盖$2\times n$棋盘的完美覆盖数