北京航空航天大学

2005—2006 学年 第二学期期末

离 散 数 学3

《组　合　数　学》

答案及评分标准

2006 年 7 月 7 日

班号__________ 学号_________ 姓名________ 成绩________

《组合数学》期末考试卷—答案

注意事项：1、考试时间 120 分钟、闭卷。

2、第一题的答案直接填写在题目留出的空白，第二题之后，答题写在后面的空白页上，请标明**题号**。

题目：

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

(1) 设 K_m 是 m 个顶点（其中任何 3 点不共线）的完全图，用 2 种颜色对 K_m 的所有边着色，要保证无论用何种方法着色，均存在一个单色的三角形，那么，m 至少为___6___.

(2) 多重集{2·a, 3·b, 4·c}的 9-排列数为：$\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}=1260$.

(3) 在 9 阶反射 Gray 码中 110010001 的直接后继是___110010000___.

(4) 集合 S={a, b, c, d}的一个最大的杂置：{{a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}}.

(5) 1 到 500 中不能被 5 或 8 整除的整数个数是___350___.

(6) 满足递推关系 $h_n=h_{n-1}+h_{n-2}$（$n\geq 3$）和初始条件 $h_0=0$，$h_1=1$ 的序列 h_0, $h_1,\ldots, h_n,\ldots$的生成函数是：$\frac{x}{1-x-x^2}$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)x^n$.

二、13 个人围坐一个圆桌。如果 B 拒绝坐在 A 的右侧，有多少种围坐方式？（8 分）

解：13 人围坐方式共有：(13−1)!=12!; ··························2 分

B 坐在 A 的右侧情况，将 B 与 A 位置相对固定，相当 12 人围坐，因此，B 坐在 A 的右侧的围坐方式有：(12−1)!=11! . . . . 4 分

由加法原理，B 拒绝坐在 A 的右侧的围坐方式有：12!−11!（=439084800）

····················. . 2 分（写出阶乘表达式即可）

三、用压缩序排出集合$\{x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}$的所有组合。（10 分）

解：用基 2 生成算法：

00000	$\varnothing$
00001	$\{x_0\}$
00010	$\{x_1\}$
00011	$\{x_1, x_0\}$
00100	$\{x_2\}$
00101	$\{x_2, x_0\}$
00110	$\{x_2, x_1\}$
00111	$\{x_2, x_1, x_0\}$
01000	$\{x_3\}$
01001	$\{x_3, x_0\}$
01010	$\{x_3, x_1\}$
01011	$\{x_3, x_1, x_0\}$
01100	$\{x_3, x_2\}$
01101	$\{x_3, x_2, x_0\}$
01110	$\{x_3, x_2, x_1\}$
01111	$\{x_3, x_2, x_1, x_0\}$
10000	$\{x_4\}$
10001	$\{x_4, x_0\}$
10010	$\{x_4, x_1\}$
10011	$\{x_4, x_1, x_0\}$
10100	$\{x_4, x_2\}$
10101	$\{x_4, x_2, x_0\}$
10110	$\{x_4, x_2, x_1\}$
10111	$\{x_4, x_2, x_1, x_0\}$
11000	$\{x_4, x_3\}$
11001	$\{x_4, x_3, x_0\}$
11010	$\{x_4, x_3, x_1\}$
11011	$\{x_4, x_3, x_1, x_0\}$
11100	$\{x_4, x_3, x_2\}$
11101	$\{x_4, x_3, x_2, x_0\}$
11110	$\{x_4, x_3, x_2, x_1\}$
11111	$\{x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}$

··················. 10 分（写出集合排序即可）

四、确定多重集$\{4\cdot a, 3\cdot b, 4\cdot c, 5\cdot d\}$的 12−组合的个数. (12 分)

解：设多重集 $T=\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c, \infty\cdot d\}$的所有 12-组合的集合为 S。

令 A_1 是 S 中 a 的个数多于 4 的组合的集合；

令 A_2 是 S 中 b 的个数多于 3 的组合的集合；

令 A_3 是 S 中 c 的个数多于 4 的组合的集合；

令 A_4 是 S 中 d 的个数多于 5 的组合的集合. ………………3 分

需要计算：$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4|$

$|S|=\binom{12+4-1}{12}=\binom{15}{12}$;

A_1 由 T 中 a 的个数至少 5 个的组合组成，去掉 5 个 a，相当于 T 的 7-组合，因此

$|A_1|=\binom{7+4-1}{7}=\binom{10}{7}$；

类似有：

$|A_2|=\binom{8+4-1}{8}=\binom{11}{8}$； $|A_3|=\binom{7+4-1}{7}=\binom{10}{7}$； $|A_4|=\binom{6+4-1}{6}=\binom{9}{6}$；

$A_1\cap A_2$ 是至少 5 个 a 和 4 个 b 的组合集，因此，类似有

$|A_1\cap A_2|=\binom{3+4-1}{3}=\binom{6}{3}$; $|A_1\cap A_3|=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}$;

$|A_1\cap A_4|=\binom{1+4-1}{1}=\binom{4}{1}$; $|A_2\cap A_3|=\binom{3+4-1}{3}=\binom{6}{3}$;

$|A_2\cap A_4|=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}$; $|A_3\cap A_4|=\binom{1+4-1}{1}=\binom{4}{1}$.

类似方法知，A_1，A_2，A_3，A_4 中任意 3 个以上集合的交集为空集。

……………………………….6 分

由容斥原理，多重集$\{4\cdot a, 3\cdot b, 4\cdot c, 5\cdot d\}$的 12−组合的个数为：

$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4| = |S| - (|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|) +$

$(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|)$

$$=\binom{15}{12}-(\binom{10}{7}+\binom{11}{8}+\binom{10}{7}+\binom{9}{6})+(\binom{6}{3}+\binom{5}{2}+\binom{4}{1}+\binom{6}{3}+\binom{5}{2}+\binom{4}{1})$$

=455–(120+165+120+84)+(20+10+4+20+10+4)=34

……………………………3 分

五、求解初始值 $h_0=1$, $h_1=0$ 和 $h_2=0$ 的递推关系 $h_n=3h_{n-2}-2h_{n-3}$,（$n\geq 3$）。（12 分）

解法 1：递推关系的特征方程为：$x^3-3x+2=0$, 即$(x-1)^2(x+2)=0$. 解特征方程得到：$x_1=x_2=1$; $x_3=-2$.

……………………(3 分)

对应于特征根 $x_1=x_2=1$ 的部分一般解为

$H_n^{(1)}=c_1 1^n+ c_2 n 1^n$

而对应特征根 $x_3=-2$ 的部分为: $H_n^{(2)}=c_3(-2)^n$. 因此，递推关系的一般解为：

$h_n= H_n^{(1)}+ H_n^{(2)}= c_1 1^n+ c_2 n 1^n+ c_3(-2)^n= c_1+ c_2 n+ c_3(-2)^n$

……………………………………………(5 分)

代入初始值 $h_0=1$, $h_1=0$ 和 $h_2=0$ 得到：

$$\begin{cases} c_1+c_2\times 0+c_3(-2)^0=1 \\ c_1+c_2-2c_3=0 \\ c_1+2c_2+4c_3=0 \end{cases}$$

方程组唯一解是： $c_1=8/9$; $c_2=-2/3$; $c_3=1/9$, 因此，递推关系的解为：

$h_n=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}(-2)^n$ ………………………………. 4 分

六、确定{1,2,3,4,5,6,7,8}的没有偶数在它的自然位置上的排列数。（10 分）

解：令 S 是{1,2,3,4,5,6,7,8}的全部 8！个排列的集合。对于 j=2,4,6,8，

令 A_j 为 S 中 j 在它的自然位置上的排列的集合，那么 A_2 的中排列是形如 $i_1 2 i_3 \ldots i_8$ 的排列，其中 $i_1 i_3 \ldots i_8$ 是{1,3,4,5,6,7,8}的任意一个排列，因此 $|A_2|=7!$，类似的可得 $|A_4|=|A_6|=|A_8|=7!$。

类似的方法得到：

$$|A_2 \cap A_4|=|A_2 \cap A_6|=|A_2 \cap A_8|=|A_4 \cap A_6|=|A_4 \cap A_8|=|A_6 \cap A_8|=6!$$

一般的，对于{2,4,6,8}的任意 k-组合$\{i_1 \ldots i_k\}$ 有

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|=(8-k)!$$

其中 $k \le 4$. ……………………………………. 6 分

应用容斥原理得到所求的排列数为：

$$|\overline{A}_2 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_6 \cap \overline{A}_8|=8!-\binom{4}{1}\times 7!+\binom{4}{2}\times 6!-\binom{4}{3}\times 5!+4!$$

$$=8!-4\times 7!+6\times 6!-4\times 5!+4!$$

$$=24024$$

……………………………………. 4 分(保留阶乘即可)

七、确定方程 $2x_1+5x_2+x_3+x_4=100$ 满足条件 $0 \le x_1$，$0 \le x_2$，$0 \le x_3 \le 4$，$0 \le x_4 \le 1$ 的整数解的个数。（10 分）

解：设 h_n 是方程 $2x_1+5x_2+x_3+x_4=n$ 满足条件 $0 \le x_1$，$0 \le x_2$，$0 \le x_3 \le 4$，$0 \le x_4 \le 1$ 的整数解的个数，令 $y_1=2x_1$，$y_2=5x_2$，$y_3=x_3$，$y_4=x_4$，作变量替换，于是 h_n 也是方程

$$y_1+y_2+y_3+y_4=n$$

的非负整数解个数，其中 y_1 是 2 的倍数，y_2 是 5 的倍数，$0 \le y_3 \le 4$，$0 \le y_4 \le 1$.

那么，序列 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ 的生成函数为

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$$ ………4 分

$$=\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4 分$$

因此，$h_n=n+1$，特别的 $h_{100}=100+1=101$. ··················2 分

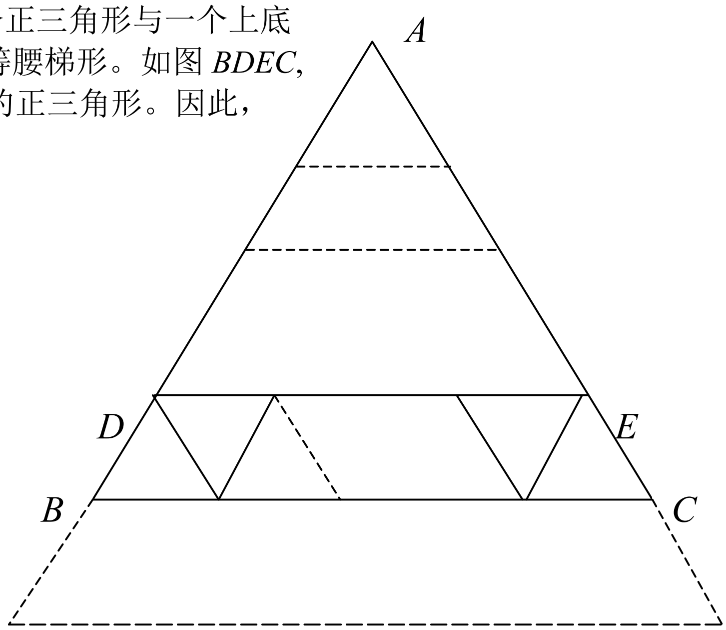
八、证明:在边长为 1 的正三角形内任意选取 n^2+1 个点，必然存在 2 个点，其距离不超过 $1/n$. (8 分)

证明：（1）首先，边长为 1 的正三角形可划分为 n^2 个边长为 $1/n$ 的正三角形。

如图所示，将边长为 1 的正三角形的每条边分为 n 等分，以一个顶点 A 为基础，依次连接两相邻边上的等分点，得到 n-1 条与第 3 边平行的线段。那么，A 与两腰上第 k（$1\le k\le n$）对点构成一个边长为 k/n 的正三角形。

令 h_k 是 A 为顶点的边长为 k/n 的正三角形（称第 k 个正三角形）可划分为边长 $1/n$ 的小正三角形的个数，显然，$h_1=1$。

而第 k 个正三角形划分为第 $k-1$ 个正三角形与一个上底长为$(k-1)/n$、下底长 k/n、两腰 $1/n$ 的等腰梯形。如图 $BDEC$, 这个梯形可划分为 $2k-1$ 个边长为 $1/n$ 的正三角形。因此，得到递推关系：



$$h_k=h_{k-1}+2k-1;\quad 2\le k$$

其中 $h_1=1$。

解这个递推关系得到：

$$h_k=k^2$$

特别的，$h_n=n^2$，即证明了边长为 1 的正三角形可划分为 n^2 个边长为 $1/n$ 的正三角形。

························4 分

（2）由鸽巢原理，选取 n^2+1 个点至少有两个落在一个边长为 $1/n$ 的正三角形内，那么，这两点距离必然不超过其边长 $1/n$。

·······································4 分