第2章 排列与组合

2.2 集合的排列

2.3 集合的组合

北航计算机学院：李建欣

Tel：82339274

E-mail：lijx@act.buaa.edu.cn

http://act.buaa.edu.cn/lijx

几个问题

- 数字1、3、8放入5个不同盒子，多少种方法?
- 数字1、3、8（无限重复）可以构造出多少个五位数?
- 数字1,1,1, 3, 8可构造出多少个不同5位数？
- 将数字1，2，…，15
  - 放入4×4的方阵中，共有多少种摆放方法？
  - 放入6×6的方阵中，共有多少种摆放方法?
- 如何理解？ $P(n, r)=n*P(n-1, r-1)$

$$P(n, r)=P(n-1,r)+rP(n-1,r-1)$$

$$C(n,r)C(r,k)=C(n,k)C(n-k, r-k)$$

例子：排列与组合

- 编号为1、2、3、4的四个乒乓球，取出3个。
  - 如果考虑顺序关系，则称之为排列数 P(4,3)=4*3*2=24

(无重复排列）

例子：排列与组合

- 编号为1、2、3、4的四个乒乓球，取出3个。
  - 如果考虑顺序关系，则称之为排列数 P(4,3)=4*3*2=24

    (无重复排列）

  - 如果不考虑顺序关系，则称之为组合数

    C(4,3)=4!/3!=4

    (无重复组合）

2.2 区分两种不同的计数类型

（1）对元素的**有序**摆放数或选择数的计数。

a)没有重复的元素

b)有重复的元素（无限重复或有限重复）

（2）对元素的**无序**摆放数或选择数的计数。

a)没有重复的元素

b)有重复的元素（无限重复或有限重复）

定义：

与顺序有关的摆放或选择称 **排列(Permutation)**。

与顺序无关的摆放或选择称 **组合(Combination)**。

(1)集合的线性排列

- **定义**：从n个不同元素取出r个元素有序摆放，称n元素集合的r-排列。
  - 用$P(n, r)$表示n元素集合的全部r-排列数。约定当$r>n$时，$P(n, r)=0$。
  - 如集合$S=\{a, b, c\}$的2-排列包括：

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb$$

- 集合S的一个排列是某种顺序列出S的所有元素。（称为全排列）

集合的线性排列

- 定理2.2.1：对于整数n和r, $r\le n$, 有

$$P(n, r)=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

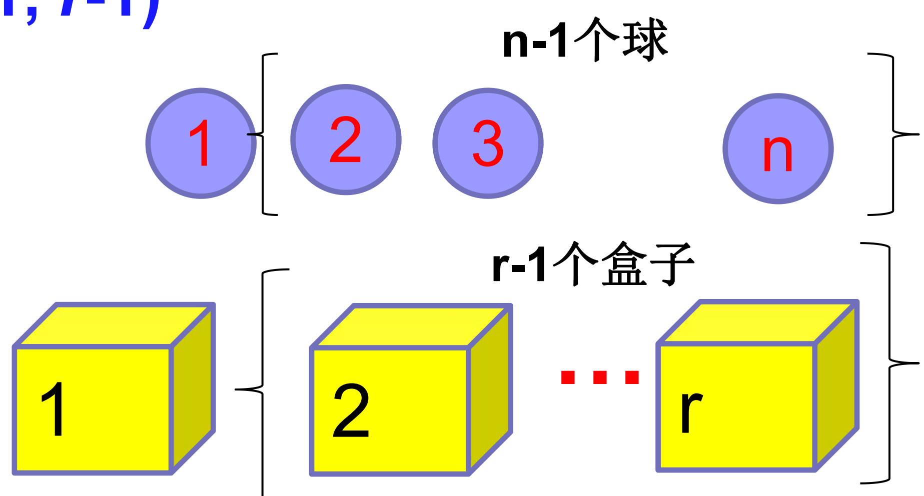
(其中：定义$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$, 约定$0!=1$)

全排列$P(n, \mathrm{n})=n!$

排列$P(n,r)$的递推关系

$$P(n, r)=n*P(n-1, r-1)$$

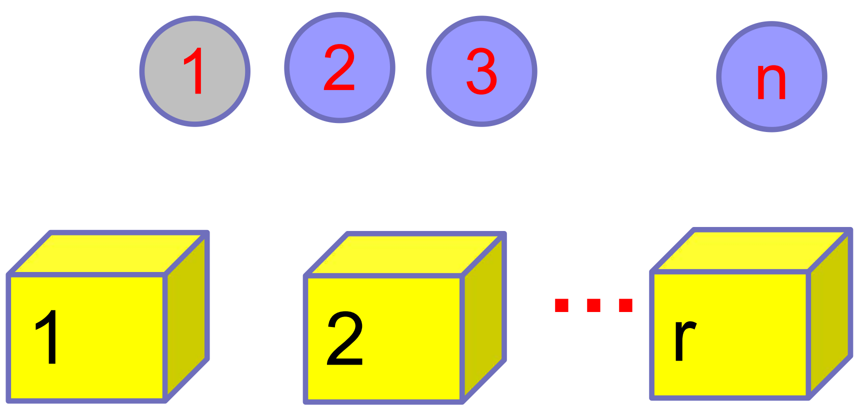
- 分步递推
  - 选择1号盒子，放入一个乒乓球
    - ***n*种选择**
  - 从n-1个球中选出r-1个放入r-1个盒子排列
    - $P(n-1, r-1)$



排列P(n,r)的递推关系

$$P(n, r)=P(n-1,r)+rP(n-1,r-1)$$

- 分类递推
  - 不选第一个球
    - **P(n-1, r)种选择**
  - 选择第一个球
    - **rP(n-1,r-1)**



组合的模型

- 模型：投球入盒模型
  - 若球不同，盒子相同，则是从n个球中取r个的组合模型。
  - 即将排列模型中盒子标号去掉，则产生相应的组合模型
    - 盒子有r!种标号方案
  - 因此：
    - $C(n,r)* r!=P(n, r)= \frac{n!}{(n-r)!}$
    - $C(n,r)= \frac{n!}{r!(n-r)!}$

组合的模型

- 公式1：$C(n, r) = C(n, n-r)$
  - n个球中选出r个方法等于剩下的n-r个的方法数

- 公式2：$C(n,r)C(r,k)=C(n,k)C(n-k, r-k)$
  - 某班级，选出r个班委，选出k个位常委
  - 不同选举策略：
    - 等价于，先选出k个常委，再选出l-k个其他班委

例子

- 例1：将数字1，2，…，15 放入一个4×4的方阵中，问共有多少种摆放方法？若放入6×6的方阵中，共有多少种摆放方法？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

- **解**（1）将空白块标号0，那么，每一种摆放方法对应16数字的一个排列，则问题等价于16个数字的任何排列数，即

  $P(16, 16)=16!$

（2）依次摆放1，2,…15号方块，每个标号可在36个方块选取，故相当于36个中选取15个的任意排列：共有$P(36，15)$。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15			

例

- 将字母表的26个字母排序使得元音字母a, e, i, o, u中任意两个都不得相继出现，这种排序的方法总数是多少？
- **解**：21个辅音字母排序有21！种；

  将5个元音字母分别插入22空位：有$P(22, 5)$种，由乘法原理

$$21! \times P(22, 5)$$

例

- **有多少个取自{1，2，…，9}的各位互异的7位数，使得5和6不以任何顺序相继出现？**
- **多种解法：**

（1）分4种情况，S_1表示5,6均不出现数字集；S_2表示5出现但6不出现数字集；S_3表示6出现但5不出现数字集；S_4表示5,6均出现数字集。那么

$|S_1|=P(7,7)=5040;$

$|S_2|=|S_3|=7\times P(7,6)=35280;$

计算$|S_4|$。分为3种情况：第一位数字5；最后一位为5；5出现在其他位置。

$$5\times \mathrm{P}(7,5)+5\times \mathrm{P}(7,5)+5\times 4\times \mathrm{P}(7,5)=75600$$

总数为各部分和：

$$|S_1|+|S_2|+|S_3|+|S_4|$$

5	$\neq 6$	$\neq 6$	5	$\neq 6$	$\neq 6$	5

- 解法(2): (减法原理）

T是互异7位数字全集，$P(9,7)$.

T可划分为两个子集S和S的补集$\overline{S}$，其中S表示5和6不连续出现数字集。那么，

$|\overline{S}|=2\times 6\times P(7, 5)$

$|S|=|T|-|\overline{S}|=P(9,7)-2\times 6\times P(7, 5)$

小结

- **加法原理：**
  - 设集合S划分为$S_1, S_2,\dots, S_m$。则：

$$|S|=|S_1|+|S_2|+\dots+|S_m|$$

- **乘法原理**
  - 设S是P和Q的乘积（即$S=P\times Q$），则

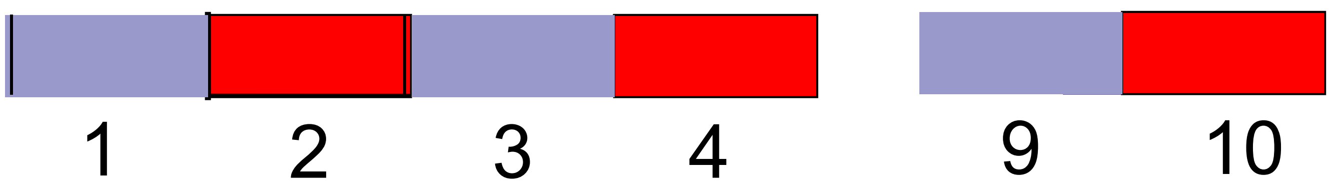
$$|S|=|P|\times|Q|$$

- **集合的线性排列**
- **集合的多种类型排列**

循环排列 VS 线性排列？

- 10个人排成一列，其中2个人不愿彼此相邻，有多少种排法？
  - 解法：共P(10,10)种,减去有5个（？）位置相邻，两次先后位置换2，

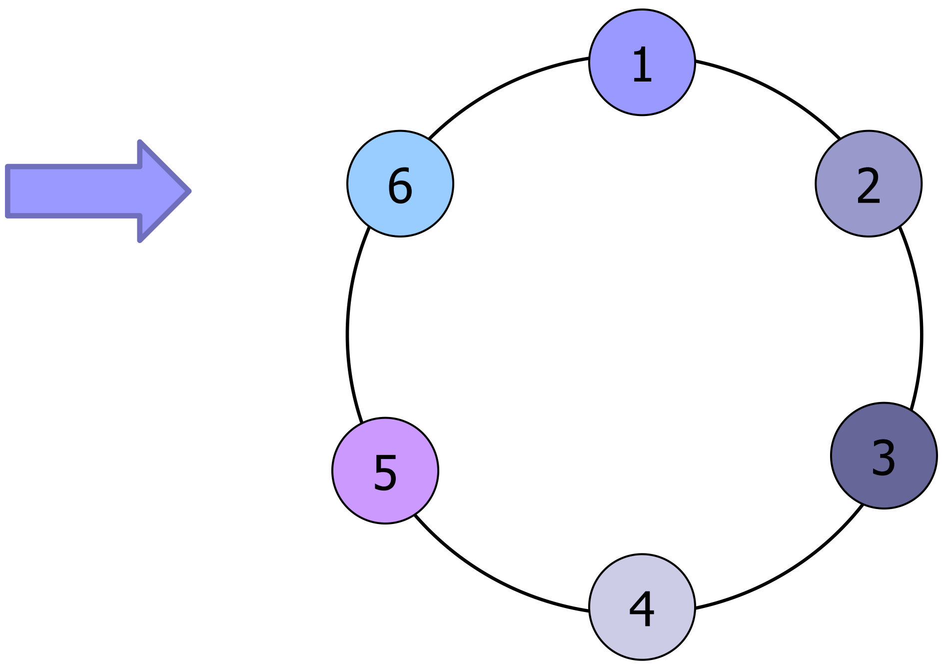
P(10,10)-2*9*P(8,8)



- 10个人围坐一个圆桌，其中2个人不愿彼此挨着就座，问有多少种座位摆放方法？
- 10颗不同珠子做一个项链，其中2颗珠子不能被串在一起，问有多少种项链构成样式？

循环排列

- 把元素排成首尾相连的一个圈，只考虑元素间的相对顺序的排列称循环排列。



循环排列计数

- **定理2.2.2** n个元素集合的循环r排列个数为：

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$$

特别地，n元素的循环排列个数=$(n-1)!$

- 证明思路：利用除法原理，把线性r-排列的集合划分成若干部分。
- 思考：该问题应用除法原理的条件是什么？

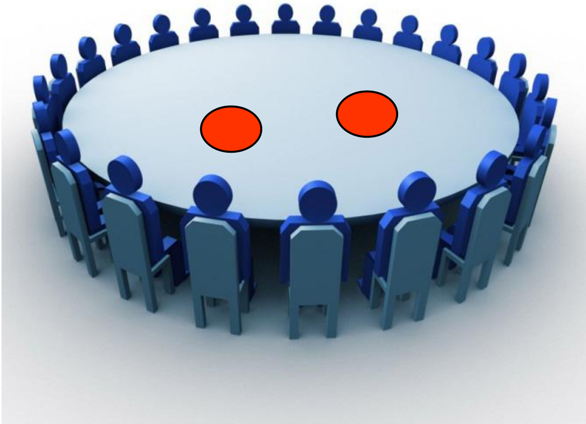
应用

- **例3：**10个人围坐一个圆桌，其中2个人不愿彼此挨着就座，问有多少种座位摆放方法？

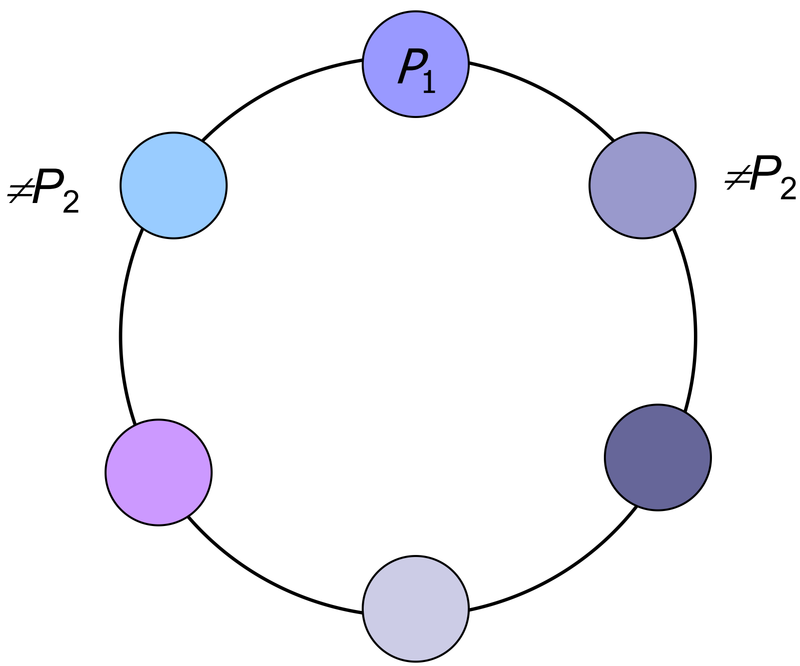
  - 解1：总的排列数减去不满足条件的排列数。总的排列数为$(10-1)!$

    2个连续情况的排列数：$2\times(9-1)!$

    即：$9!-2\times8!=7\times8!$



- 解2：设P_1，P_2不挨着坐，固定其中一个P_1的位置，那么，P_2可选位子是7，然后，余下8人可任意坐，按线性排列方法计数：$7 \times 8!$



项链排列

- n个元素集合的串起来循环r排列数为：

$$\frac{P(n, r)}{2r} = \frac{n!}{2r(n-r)!}$$

特别地，
n个元素的项链循环排列数$(n-1)!/2$

多种排列类型

组合？

- 排列
  - 线性排列
  - 循环排列
- 排列
  - 普通集排列
  - 多重集排列

2.3 集合的组合

- 定义：从n个元素中无序地取出r个元素，称n元素集合的r-组合。
- 用$\binom{n}{r}$表示n元素集合的全部r-组合数。
- 约定：（1）$\binom{0}{0}=1$

  （2）当$r>n$时，$\binom{n}{r}=0$

定理2.3.1：组合公式

- 定理2.3.1：对于整数n和r，$r \leq n$, 有：

$$P(n, r)=r!\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}$$

即 $$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

如何证明？

定理2.3.1的证明

- 证明：对$P(n, r)$计数可分为两步：
  1）从集合中无序选取r个元素：$\binom{n}{r}$
  2）对选取的元素排序计数：$r!$

由乘法原理得到：

$$P(n, r)=r!\binom{n}{r}$$

推论2.3.1

- 推论2.3.1：　对于整数r，$0 \le r \le n$，

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

应用

- **例：** 平面上25个点，假设不存在3点共线情况，问这些点可以组成多少条直线？多少个三角形？

- 解：1）每两个点确定一条直线：$\binom{25}{2}$

  2）每三个点确定一个三角形：$\binom{25}{3}$

练 习：

- **例**：如果每个词都包含3，4或5个元音，那么字母表中26个字母可以构造多少个8字母词？
  - 假设每个词中的字母使用次数没有限制
- 解：1）3元音词：$\binom{8}{3}5^3 21^5$，元音位置方式，元音选择方式，辅音的方式。

  2）4元音词：$\binom{8}{4}5^4 21^4$

  3）5元音词：$\binom{8}{5}5^5 21^3$

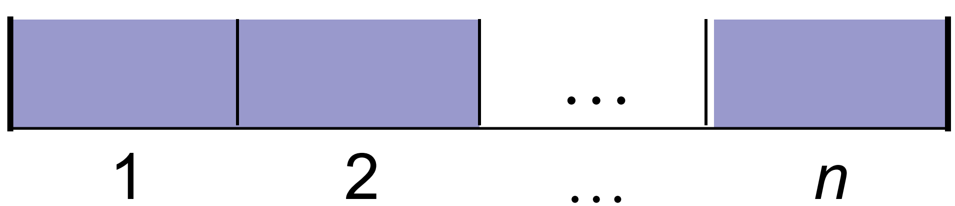
定理2.3.2证明

- 定理2.3.2：下述公式成立：$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

证明：对n元集合S的所有组合用不同方法计数（双计数）。
1）对所有r-组合运用加法原理得：

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

2）对于S的每一个元素编号，那么对任何一个组合C，S的一个元素x有2种可能，由乘法原理，n个元素共有2^n。即完成定理证明。



小结

- 基本的计数原理
- 集合的线性、循环排列
- 集合的组合
- 注意：元素的重复计数问题
  - 一个经验：优先对有约束条件的位置计数。
- 应用：
  - 算得全：防止缺失或重复
  - 列的准：能够准确排列或组合

作业

- 2.7习题

8， 10, 11