第5章 二项式系数

5.2 二项式定理

定理5.2.1 令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

证明：（组合证明）将 $(x+y)^n$ 写成 n 个$x+y$ 因子的乘积形式：

$$(x+y)^n=(x+y)\ (x+y)\ldots(x+y)$$

用分配律将乘积展开，再合并同类项。

展开时，对于每个因子 $x+y$，或者选择x，或者选择y，所以展开结果有2^n项，其中，每一项具有形式 $x^{n-k}y^k$, $k=0,1,\ldots,n$。

合并同类项时，$x^{n-k}y^k$的系数相当于在 n 项因子中选 k 个 y，余下 n-k 项因子是 x，

因此，等于组合数 $\binom{n}{k}$。

二项式定理的等价形式

令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$(y+x)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

定理5.2.1 令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例：用二项式定理求下列式子

(1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ $=(1+2)^n = 3^n$

(2) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k}$ $=(3+(-1))^n = 2^n$

(3) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 9^{n-k}$ $=(9+(-1))^n = 8^n$

(4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k$ $=(1+9)^n = 10^n$

二项式定理及等价形式

令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$(y+x)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

二项式系数的其他等式

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

- 例：n个人中选 k 人组成足球队，其中 一人为队长，有多少种不同选法?
  - 先选足球队，然后从足球队中选队长，选法数目为:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{1}=k\binom{n}{k}$$

  - 先选队长，再在剩下的n-1人中选k-1个足球队员,选法数目为:

$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}$$

二项式系数的其他等式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例：证明下列等式：

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n,\ n\geq 0$$

方法 1：对二项式令 $x=y=1$即得。

方法 2（组合证明）：

令 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$, 如下构造 S 的子集：

对于每个 i，可放进子集，也可不放入；

一共有 2^n 种构造方法。

例：证明以下等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$，（$n\geq 0$）

$$\binom{n}{k}^2=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

第一个n元素集合选 k 个，
第2个n 元素集合选 n-k 个，
一共从 2n 个元素中选 n个

关键：（加法原理）两个n元素集合相交为空。

例：证明以下等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$，（$n\geq 0$）

证明：设$A=\{1, 2, \ldots, n\}$, $B=\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$。

令$S=A\cup B$，S的n子集数是$\binom{2n}{n}$，其中，每个n子集含有A的元素为k个，含有B的元素为$n-k$个, $k=0,1,\ldots, n$。

令 C_k 是含有 k个A的元素的S的n子集的集合，

则 S的所有n子集可划分为 $C_0, C_1,\ldots, C_n$，有

$$\binom{2n}{n}=|C_0|+|C_1|+\ldots+|C_n|$$

其中，$|C_k|=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2$。

因此，$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$。

证毕。

二项式系数的其他等式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例：证明下列等式：

(1) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,\ n \geq 1$

(2) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^{n-1},\ n \geq 1$

偶数个元素的子集的个数
= 奇数个元素的子集的个数

方法一：对二项式公式令 $x=1, y=-1$ 即得。

方法二：组合证明 (2) 成立。

二项式系数的其他等式

偶数个元素的子集的个数
= 奇数个元素的子集的个数

例：证明下列等式：

$$(2)\ \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots=2^{n-1},\ n\geq 1$$

证明：（组合证明）

设集合$S=\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$是 n 元素集合，则可以把 S 的子集看成是以下选择过程：对每个 x_i 有两种选择：放入子集或不放入子集。

构造具有偶数个元素的子集时，$x_1,\ldots,x_{n-1}$中每个元素有2种选择，但 x_n只有一种选择：

- 当选择了$x_1,\ldots,x_{n-1}$中的偶数个，x_n不能被选择；
- 当选择了$x_1,\ldots,x_{n-1}$中的奇数个，x_n必须被选择。

因此，S的偶数个元素的子集个数为 2^{n-1}。

同理可证 S 的奇数个元素的子集个数为 2^{n-1}。证毕。

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\ n\geq 1$$

证明：方法1

由 $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ 得，

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}$$

$$=n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\ldots+n\binom{n-1}{n-1}$$

$$=n(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n-1}{n-1})=n2^{n-1}$$

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\ n\geq 1$$

方法2　求导法

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{k}x^k+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\ n\geq 1$$

方法2 求导法

等式 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ 两边对 x 求导得：

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1},$$

取 $x=1$ 即得等式。

组合证明?

例：用求导法证明以下等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}\text{（}n\geq 1\text{）}$$

证明：等式 $(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 两边对 x求导数得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1},$$

两边同乘 x得， $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$。

上式两边再对x求导数得

$$n(1+x)^{n-1}+nx(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1},$$

将$x=1$代入得

$$n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

$$= n(n+1)2^{n-2}。$$

证毕。

- 证明等式的方法
  - 利用已有等式：帕斯卡公式
  - 求导法、积分法
  - 组合推理法

组合定义扩展

$$\binom{n}{k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}$$, $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}$ 为非负整数

扩展： $\boldsymbol{n}$ 扩展为任意实数，

$\boldsymbol{k}$ 扩展为任意整数。

例：$\binom{\mathbf{5/2}}{\mathbf{4}}$, $\binom{\mathbf{-3.3}}{\mathbf{3}}$, $\binom{\mathbf{5/2}}{\mathbf{0}}$, $\binom{\mathbf{-3.3}}{\mathbf{-3}}$

组合定义扩展

令 r 可取任意实数，k 可取任意整数（正的、负的或零），定义二项式系数 $\binom{r}{k}$ 为

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} r(r-1)\dots(r-k+1)/k!, & 若 k \geq 1 \\ 1, & 若 k = 0 \\ 0, & 若 k \leq -1 \end{cases}$$

例：$\binom{5/2}{4} = (5/2 \cdot 3/2 \cdot 1/2 \cdot (-1/2))/4! = -5/128$

$\binom{-3.3}{3} = (-3.3) \cdot (-4.3) \cdot (-5.3)/3! = -12.5345$

$\binom{5/2}{0} = 1$，$\binom{-3.3}{-3} = 0$

组合定义扩展

- 扩展定义 $\binom{r}{k}$ 仍使**Pascal**公式成立。
- 令 ***r*** 可取任意实数, ***k***可取任意整数，有

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}, \quad k\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k-1}$$

根据定义验证即可。

例：证明以下等式

$$\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\ldots+\binom{r+k}{k}=\binom{r+k+1}{k}$$

$$\boxed{\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}}$$

注意：

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$=\binom{r-1}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-2}{k-2}$$

$$\cdots$$

$$=\binom{r-1}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-3}{k-2}+\ldots\cdots\binom{r-k}{1}+\binom{r-k-1}{0}$$

用$r+k+1$代替 r 即得等式，证毕。

例：证明以下等式

$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

利用等式 $\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$

第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形
5.2 二项式定理
5.3 二项式系数的单峰性
5.4 多项式定理
5.5 牛顿二项式定理

回顾

- 二项式系数Pascal公式 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$
- Pascal三角形

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

二项式系数先递增后递减

5.3 二项式系数的单峰性

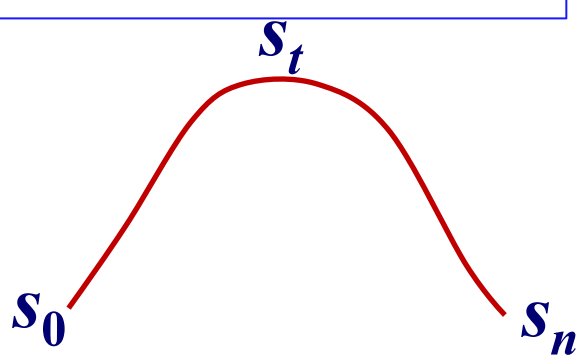
设序列$s_0,s_1,s_2,\ldots,s_n$, 若存在一个整数 t, $0\le t\le n$, 使得:

$$s_0\le s_1\le s_2\le \ldots \le s_t, \quad s_t\ge s_{t+1}\ge s_{t+2}\ge \ldots \ge s_n$$

那么, 称序列是单峰的。

注意：1. s_t一定是序列中的最大数

2. t 不一定是唯一的



例： 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

$1\le 6\le 15\le 20$, $20\ge 15\ge 6\ge 1$: $t=3$

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$1\le 7\le 21\le 35\le 35$, $35\ge 21\ge 7\ge 1$: $t=4$

$1\le 7\le 21\le 35$, $35\ge 35\ge 21\ge 7\ge 1$: $t=3$

二项式系数的单峰性

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

n为偶数

n为奇数

二项式系数的单峰性

定理5.3.1. 令n为正整数, 二项式系数序列是单峰序列, 其中,

- 若n是偶数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \boxed{\binom{n}{n/2}, \binom{n}{n/2}} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

- 若n是奇数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \boxed{\binom{n}{(n-1)/2}, \binom{n}{(n+1)/2}} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

证明：考虑连续两个二项式系数的商：

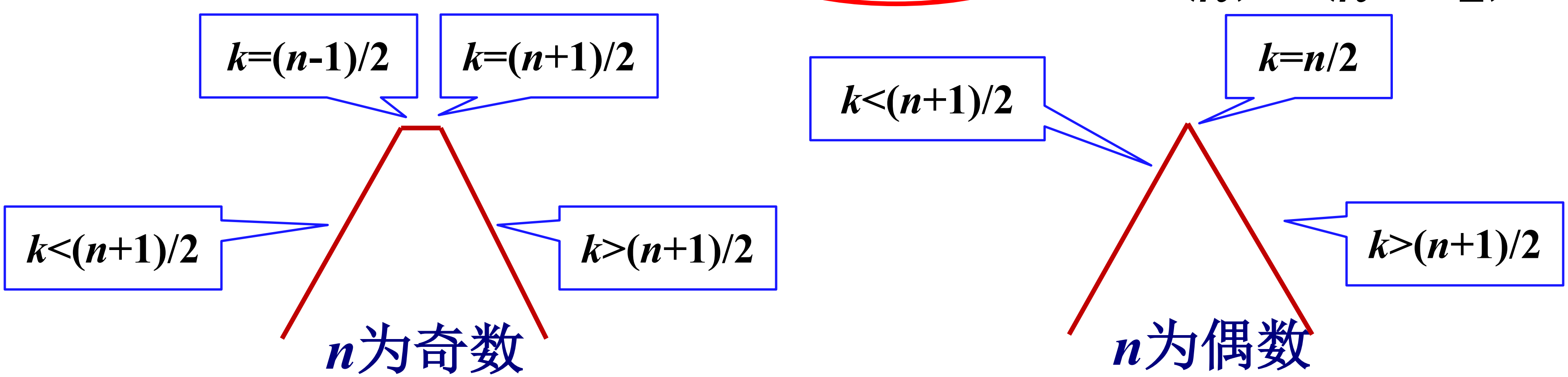
$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k}$$

若$(n-k+1)/k>1$, 则$k<n-k+1$, $k<(n+1)/2$，得$\binom{n}{k}>\binom{n}{k-1}$

若$(n-k+1)/k<1$, 则$k>n-k+1$, $k>(n+1)/2$，得$\binom{n}{k}<\binom{n}{k-1}$

只有n为奇数时出现

若$(n-k+1)/k=1$, 则$k=n-k+1$, $k=(n+1)/2$，得$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$



设x为任意实数，令$\lceil x \rceil$表示大于或等于x的最小整数，称强取整(上取整)；$\lfloor x \rfloor$表示小于或等于x的最大整数，称弱取整(下取整).

例：$\lceil 5/2 \rceil=3$，$\lfloor 5/2 \rfloor=2$

推论5.3.2　二项式系数$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$的最大者是

✓ $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{n}{n/2}$（$n$为偶数时,）

✓ $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$（$n$为奇数时）

对定理5.3.1的扩展

定理5.3.1. 令n为正整数, 二项式系数序列是单峰序列, 其中,

- 若n是偶数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{n/2}, \binom{n}{n/2} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

- 若n是奇数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{(n-1)/2}, \binom{n}{(n+1)/2} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

扩展:

- ✓ 由集合的子集的包含关系定义的链与反链
- ✓ 由包含关系推广到一般偏序

反链

令 S是 n 个元素的集合， S 上的一条反链（antichain）是S 的子集的一个集合A，其中 A中的子集不相互包含。

例：$S=\{a, b, c, d\}$,

$\{ \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, d\}, \{a, c\} \}$是 S 的一条反链

$\{ \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\} \}$不是 S 的反链

问题：如何找出 S 的反链？

令$S=\{a, b, c, d\}$，以下集合均为 S 的反链

$A_0=\{ \{\emptyset\}\}$

$A_1=\{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$A_2=\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

$A_3=\{ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$

$A_4=\{\{a, b, c, d\}\}$

如果反链中包含不止一种大小的子集，是否可以包含更多的子集？

- 令S为n个元素的集合，一个构造反链的方法：

选择一个整数 $k \le n$，取 A_k 为 S 所有的 k子集的集合。

该方法构成的反链最多含有$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

问题：反链最多可包含多少个子集？

链

令 S是 n 个元素的集合，S 上的一条链（chain）是 S 的子集的集合C ，其中对于C 中的每一对子集，总有一个包含在另一个之中：

对任意 S_1，$S_2 \in C$，且$S_1 \neq S_2$，则 $S_1 \subset S_2$ 或者 $S_2 \subset S_1$

例：$S = \{a, b, c, d, e\}$，

$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, e\}\}$ 是 S 的一条链，

$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$ 是 S 的一条链。

最大链

最大链

令 S 是 n个元素的集合, S 上的最大链 C 定义为:

$$C = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\},$$

满足:

(1) $A_0 = \Phi \subset A_1 \subset A_2 \ldots \subset A_n$, 且

(2) $|A_i| = i$ $(i = 1, \ldots, n)$

$n+1$个子集

问题：怎么构造最大链？

最大链的构造方法

(0) $A_0 = \Phi$

(1) 从 S 中选择一个元素i_1, 形成 $A_1=\{i_1\}$.

(2) 选择一个元素 $i_2 \neq i_1$, 形成 $A_2=\{i_1, i_2\}$.

(3) 选择一个元素 $i_3 \neq i_1, i_2$ 形成 $A_3=\{i_1, i_2, i_3\}$.

…

(k) 选择一个元素 $i_k \neq i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ 形成 $A_k=\{i_1, \ldots, i_k\}$.

…

(n) 选择一个元素$i_n \neq i_1, \ldots, i_{n-1}$ 形成 $A_n=\{i_1, \ldots, i_n\}$.

- S上的最大链与 S 的排列一一对应
- 最大链的数目为 $n!$

链与反链的关系

S上的一条链与一条反链可否包含多于两个公共子集

例：$S = \{a, b, c, d, e\}$,

$\{ \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, e\} \}$ 是 S上的一条链，

$\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{c, d, e\}$

是 S 上的一条反链。

- S上的一条链最多只能包含S的任意一条反链中的一个子集
- S上的一条反链最多只能包含S的任意一条链中的一个子集

反证法：设 C 是 S 的一条链，A是 S 的一条反链。

若 C 包含 A中两个子集 S_1和S_2，则 S_1与 S_2不存在包含关系，与 C是 S的一条链矛盾。

$|C \cap A| \leq 1$

定理 5.3.3. 设 S为 n个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

证明：设 A是 S上的一条反链，S_1是 A中一个子集，且 $|S_1|=k$，C 是包含 S_1 的最大链。

设 β 是 所有二元组(S_1, C)的个数。

由于一条最大链最多只能包含任意一条反链中的一个子集。

因此不存在两个元组(S_1, C)与(S_2, C), 其中S_1与S_2为A的不同的子集，且C 是包含A_1，A_2的最大链。

所以 β 的个数不超过最大链的个数，即 $\beta \leq n!$。

定理 5.3.3. 设 S 为 n 个元素的集合，则 S 上的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个子集。

证: (续) 设反链 A 中大小为 k 的子集个数为 a_k，则 $|A|=\sum_{k=0}^{n} a_k$。

设 A_k 为 A 中一个大小为 k 的子集，则包含 A_k 的最大链最多为 $k!(n-k)!$ 个，

得到包含 A 中大小为 k 的子集的最大链最多为 $a_k \cdot k!(n-k)!$ 个。

因此，$\beta=\sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)! \le n!$。

从而 $\sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)!\,/n! \le 1$, 得 $\sum_{k=0}^{n} a_k/\binom{n}{k} \le 1$。

由于 $\binom{n}{k}$ 最大为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$，得

$$\left(1/\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\right)\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{n} a_k/\binom{n}{k} \le 1,$$

因此，$|A|=\sum_{k=0}^{n} a_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$。证毕。

定理 5.3.3. 设 S 为 n 个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个子集。

- S的 k 子集构成的集合构成一条反链

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

例：S={1,2,3,4,5}, S上的一个最大反链为所有2子集构成的集合：

{ {1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{2,3}, {2,4},{2,5}, {3,4}, {3,5}, {4,5} }

S的 3子集构成的集合也是S上的一个最大反链！

更强的结果

定理 5.3.3. 设S为n个元素的集合，则S上的的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个集合。

设S是为n个元素的集合，

- 如果n是偶数，则大小为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 的唯一的反链是所有$n/2$子集的反链；
- 如果n是奇数，则大小为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 的反链有两个：
  - ✓ 所有 $(n\text{-}1)/2$ 子集的反链；
  - ✓ 所有 $(n+1)/2$ 子集的反链。