第七章 递推关系和生成函数

- 一个计数问题通常不是一个独立的问题，而是由一系列的独立问题组成

例：设 h_n表示$\{1, 2, ..., n\}$的排列数，有 $h_n=n!$，因此得到一个序列：$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$。

- ✓ 一般项 $h_n=n!$
- ✓ $n=5$时，$h_5=5!$

- 涉及一个整数参数 n 的某些计数问题的代数求解方法：生成函数（母函数）
  - 求解带约束的多重集组合与排列的计数

回顾：多重集的组合与排列

- 设集合 S 包含重数分别为$n_1, \ldots, n_t$的 t 类元素
  - S的 r 组合的个数：

    $n_i \geq r \ (i = 1, 2, \ldots, t)$: $\binom{r+t-1}{r}$

    至少存在一个$n_i < r$：容斥原理

    对每类元素的出现次数进行约束：生成函数
  - S 的排列的个数：$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$

    对每类元素的出现次数进行约束：指数生成函数

回顾:几个常见的展开式

$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, $(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$

对满足 $|x|<1$ 的任意 x，有

$\frac{1}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k$, $\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$

$n=1$ 时，得 $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ $(|x|<1)$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ $(|x|<1)$

令 $x=y^m$，得 $\frac{1}{1+y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{mk}$ $(|y|<1)$

$\frac{1}{1-y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}y^{mk}$ $(|y|<1)$

生成函数

令$h_0, h_1, \ldots, h_n \ldots$为一无穷数列, 其生成函数$g(x)$定义为:

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

例1：每一项都 等于1的无穷数列1, 1, 1,…的生成函数是 $g(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$

例2：设m为正整数，二项式系数$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}$的生成函数是

$$g_m(x)=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots+\binom{m}{m}x^m=(1+x)^{\mathrm{m}}$$

有限数列$h_0, h_1, \ldots, h_n$可以看作是无限数列$h_0, h_1, \ldots, h_n, 0, \ldots 0 \ldots$

生成函数的应用

令$h_0, h_1,\ldots,h_n\ldots$为一无穷数列, 其生成函数$g(x)$定义为:

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

- 利用生成函数求解多重集的组合个数
  - 带有约束的多重集的组合个数

例:设S是多重集合$\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \infty \cdot a_3, \infty \cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的$n$组合数时，求解数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的一般项$h_n$：

(1) a_1出现奇数次，a_2出现偶数次

(2) 元素 a_1不会出现, a_2至多出现1次

(3) 每个 a_i 出现的次数是 3的倍数。

数列与生成函数的关系：多重集组合

设k是正整数, h_n等于方程

$$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$$

e_i为 a_i在一个n组合中出现的次数

的非负整数解个数,

即 h_n为多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$ 的 n组合个数,

求数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n\ldots$的生成函数 $g(x)$。

因为 $h_n = \binom{n+k-1}{n}$,

因此, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$ $(|x|<1)$

- 以上数列$h_0, h_1,\ldots, h_n\ldots$确定了一个生成函数!
- 问题：生成函数 $\frac{1}{(1-x)^k}$是否可以确定以上数列?

$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ($|x|<1$)

k 项

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^k}=\underbrace{\frac{1}{(1-x)}\times\frac{1}{(1-x)}\times\cdots\times\frac{1}{(1-x)}}_{k\text{ 项}}\quad (|x|<1)$$

$$=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2}\right)\ldots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k}\right)$$

e_i 个 a_i , $i=1,\ldots,k$

$$=\sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty} x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$$

$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$

其中，x^{e_i}是因子$\sum_{e_i=0}^{\infty} x^{e_i}$的代表项。($k$个因子)

由于 项 $x^n=x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$ 满足 $e_1+e_2+\ldots+e_k=n$.

因此，项 x^n的系数 h_n 是方程 $e_1+e_2+\ldots+e_k=n$ 的非负整数解的个数。

因此，$h_n=\binom{n+k-1}{n}$.

设多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$。$e_i$表示在一个$n$组合中$a_i$出现次数

设k是正整数，$g(x)$是数列h_0，$h_1, \ldots$，$h_n \ldots$的生成函数，其中h_n等于方程$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$的非负整数解个数.

设多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$。$e_i$表示在一个$n$组合中$a_i$出现的次数

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$$

$$=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2}\right)\ldots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k}\right)$$

$$=\sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty}x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$$

当n组合中a_i的出现次数有约束时，将反映到第i个因子中

合并同次项后，x^n前的系数即为h_n

例:设S是多重集合$\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\infty\cdot a_3,\infty\cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的 n组合数时，确定数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的生成函数:

(1) a_1出现奇数次，a_2出现偶数次

(2) 元素a_1不会出现, a_2至多出现1次

(3) 每个a_i出现的次数是3的倍数。

e_i是一个n组合中a_i出现的次数

无约束时，$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$

$$=(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k})$$

解: (1) 生成函数为

$$g(x)=(x+x^3+\ldots+x^{2n+1}+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^2$$

$$=x(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots)^2(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^2$$

$$=x\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

例:设S是多重集合$\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\infty\cdot a_3,\infty\cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的 n组合数时，确定数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的生成函数:

(1) a_1出现奇数次，a_2出现偶数次

(2) 元素a_1不会出现, a_2至多出现1次

(3) 每个a_i出现的次数是3的倍数。

e_i是一个n组合中a_i出现的次数

无约束时，$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$

$=(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k})$

解: (2) 生成函数为

$g(x) = x^0\,(1+x)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^2$

$= (1+x)\,(\frac{1}{1-x})^2$

例:设S是多重集合$\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\infty\cdot a_3,\infty\cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的 n组合数时，确定数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的生成函数:

(1) a_1出现奇数次，a_2出现偶数次

(2) 元素a_1不会出现, a_2至多出现1次

(3) 每个a_i出现的次数是3的倍数。

e_i是一个n组合中a_i出现的次数

无约束时，$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$

$=(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k})$

解: (3) 生成函数为

$$g(x) = (1+x^3+x^6+\ldots+x^{3n}+\ldots)^4$$

$$= \left(\frac{1}{1-x^3}\right)^4$$

几个常见的展开式

$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots$

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\ (1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

对满足$|x|<1$的任意z，有

$$\boxed{\frac{1}{(1+x)^n}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k,\ \boxed{\frac{1}{(1-x)^n}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$n=1$时，得

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\quad(|x|<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\quad(|x|<1)$$

令$x=y^m$，得

$$\frac{1}{1+y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{mk}\quad(|y|<1)$$

$$\frac{1}{1-y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}y^{mk}\quad(|y|<1)$$

例:设S是多重集合$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \infty\cdot a_3, \infty\cdot a_4\}$。当$h_n$是满足元素$a_1$不会出现, a_2至多出现1次的S的 n组合数时，求解数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的一般项 h_n:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

解: 数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的生成函数为:

$$g(x)=x^0(1+x)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^2=\frac{1+x}{(1-x)^2}$$

令 $\frac{1+x}{(1-x)^2}=\frac{c_1}{1-x}+\frac{c_2}{(1-x)^2}=\frac{c_1+c_2-c_1x}{(1-x)^2}$

令 $c_1+c_2=1$， $c_1=-1$, 解得 $c_1=-1$， $c_2=2.$

因此 $g(x)=\frac{-1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty} x^k+\sum_{k=0}^{\infty} 2\binom{2+k-1}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\underbrace{2k+1}_{h_k})x^k$$

得一般项 $h_n=2n+1, n\geq 0$。

例：求装有苹果、香蕉、桔子和梨的果篮的数量 h_n,其中每个果篮中, 苹果的个数是偶数,香蕉的个数是5的倍数, 桔子不超过4个,而且至多只有一个梨.

解：相当于求苹果、香蕉、桔子和梨的满足条件的n组合个数。设e_1, e_2, e_3, e_4分别表示n组合中的苹果、香蕉、桔子和梨的个数，则问题等价于求满足e_1是偶数，e_2是5的倍数，$0 \le e_3 \le 4$，$0 \le e_4 \le 1$的方程$e_1+e_2+e_3+e_4=n$的非负整数解个数。

则相应的生成函数是：

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}(1+x)$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2+n-1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

因此，满足条件的n组合个数为 $h_n=n+1$ $(n \ge 0)$。

设k是正整数，$g(x)$是数列h_0, h_1,…, h_n…的生成函数，其中h_n等于方程 $e_1+e_2+\ldots+e_k=n$ 的非负整数解个数.

设多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$。$e_i$表示在一个$n$组合中$a_i$出现的次数

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$$

$$=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2}\right)\ldots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k}\right)$$

$$=\sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty}x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$$

当n组合中a_i的出现次数有约束时，将反映到第i个因子中

合并同次项后，x^n 前的系数即为 h_n

例：设h_n是方程$3e_1+4e_2+2e_3+5e_4=n$的非负整数解的个数，求序列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的生成函数.

e_i前有正整数系数

解：作变量替换$f_1=3e_1, f_2=4e_2, f_3=2e_3, f_4=5e_4$得到

$$f_1+f_2+f_3+f_4=n \qquad (1)$$

因此，h_n等于方程(1)的非负整数解的个数，满足f_1是3的倍数，f_2是4的倍数，f_3是2的倍数，f_4是5的倍数。

因此，生成函数为

$$g(x)=(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^4+x^8+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)$$

$$=\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}$$

回顾：排列逆序

- 集合$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列$\pi = i_1 i_2 \ldots i_n$中的逆序为:

  (i_k, i_l)，其中 $k < l$, 且 $i_k > i_l$
- 记π中的逆序的数目为$\mathrm{inv}(\pi)$，有$0 \le \mathrm{inv}(\pi) \le n(n-1)/2$,

  例：$\pi=315246$，$\mathrm{inv}(\pi)=4$
- 设$h(n, t)$ 表示$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列中有 t 个逆序的排列的数目，则
  - 对于$0 \le t \le n(n-1)/2$，有$h(n,t) \ge 1$
  - 对$t > n(n-1)/2$，有$h(n,t) = 0$

定理7.2.1 设 n 是正整数，则数列 $h(n, 0), h(n,1),\ldots, h(n, n(n-1)/2)$ 的生成函数为 $g_n(x)=1(1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+\ldots+x^{n-1}) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-x^j)}{(1-x)^n}$ (1)

证：生成函数 为：$g_n(x)=h(n,0)+h(n,1)x+\ldots+h(n, n(n-1)/2)x^{n(n-1)/2}$

记 $q_n(x) = 1(1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+\ldots+x^{n-1})$ 。

展开$q_n(x)$, 得每一项都是形如 $x^{a_n}x^{a_{n-1}}x^{a_{n-2}}\ldots x^{a_1} = x^p$ 的多项式,

其中 $p = a_n+ a_{n-1} +\ldots + a_1$ (2)，满足

$$0 \le a_n \le 0,\ 0 \le a_{n-1} \le 1,\ 0 \le a_{n-2} \le 2,\ \ldots,\ 0 \le a_1 \le n-1 \quad (3)$$

注意到：$q_n(x)$中 x^p 的系数等于方程(2)满足不等式(3)的解的个数,

而满足不等式(3)的解与$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列存在一一对应。

令 a_i 为排列中在 i 的前面但又大于i 的整数的个数，则$0 \le a_i \le n-i$。

因此，方程(2)满足不等式(3)的解与有p个逆序的排列对应。

故 $q_n(x)$中 x^p 的系数等于$h(n, p)$，且对于所有的p成立，从而有

$g_n(x)=q_n(x)$。

证毕。

小结

设k是正整数，$g(x)$是数列h_0，$h_1,\ldots$，$h_n\ldots$的生成函数，其中h_n等于方程$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$的非负整数解个数.

设多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$。$e_i$表示在一个$n$组合中$a_i$出现的次数

若e_i前有系数，则进行变量替换，引入对a_i的出现次数的约束

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$$

$$=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2}\right)\ldots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k}\right)$$

$$=\sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty}x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$$

当n组合中a_i的出现次数有约束时，将反映到第i个因子中

合并同次项后，x^n前的系数即为h_n

第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列
7.2 生成函数
7.3 指数生成函数
7.4 求解线性齐次递推关系
7.5 非齐次递推关系
7.6 一个几何例子

指数型生成函数

- 考虑由n个元素组成的多重集

$$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\},$$

其中 $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$。从中取 r 排列。

若$r=n$, 则考虑n个元素的全排列，不同的排列数为

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

- 问题：若$r<n$, 如何计算 r 排列数?

分析：先考虑 r 组合，再生成 r排列

例：假设有多重集合$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$，从中取 r组合，其组合数为h_r，则其对应的生成函数为：

$$g(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$
$$= 1+3x+6x^2+9x^3+10x^4+9x^5+6x^6+3x^7+x^8$$

- r组合的数目：x^r的系数

如：x^4 前的系数为10，表示 4组合的数目为10

问题：如何取这10个4组合?

从$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$中取10个4组合的方式可从下面的展开式中得到：

$$g(x) = (1+x_1+x_1^2+x_1^3)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3+x_3^2+x_3^3)$$

$$= 1+(x_1+x_2+x_3)$$

$$+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2)$$

$$+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+x_3^3)$$

$$+(x_1x_3^3+x_1x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3+x_1^2x_2x_3+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2x_3^3+x_2^2x_3^2+x_1^3x_2+x_1^3x_3)$$

其中，4次方项表示从S中取4组合的所有方案。

如 $x_1x_3^3$： 1个a_1，2个a_3； $x_1x_2x_3^2$： 1个a_1，1个a_2，2个a_3

$$g(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$

由$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$的4组合生成4排列数目：

$1a_2, 3a_3$: $\frac{4!}{1!\,3!}$ $1a_1, 1a_2, 2a_3$: $\frac{4!}{1!\,1!\,2!}$ $2a_1, 1a_2, 1a_3$: $\frac{4!}{2!\,1!\,1!}$

$2a_1, 2a_2$: $\frac{4!}{2!\,2!}$ $1a_1, 2a_2, 1a_3$: $\frac{4!}{1!\,2!\,1!}$ $2a_2, 2a_3$: $\frac{4!}{2!\,2!}$

$3a_1, 1a_2$: $\frac{4!}{3!1!}$ $1a_1, 3a_3$: $\frac{4!}{1!\,3!}$ $2a_1, 2a_3$: $\frac{4!}{2!\,2!}$ $3a_1, 1a_3$: $\frac{4!}{3!\,1!}$

得到S的4排列的个数：

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}\right)$$

$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$ 的4排列的个数：

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}\right)$$

观察到：$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)$

$$=\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=4}\frac{x^{e1}x^{e2}x^{e3}}{e_1!e_2!e_3!}\right)=\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=4}\frac{4!}{4!}\cdot\frac{1}{e_1!e_2!e_3!}\right)x^4$$

$$=4!\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=4}\frac{1}{e_1!e_2!e_3!}\right)\frac{x^4}{4!}$$

$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \infty\cdot a_3\}$ 的 4排列的个数

定义

$$g^{(e)}(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5+\frac{35}{72}x^6+\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8$$

$$=1!+\frac{3}{1!}x+\frac{9}{2!}x^2+\frac{28}{3!}x^3+\frac{70}{4!}x^4+\frac{170}{5!}x^5+\frac{350}{6!}x^6+\frac{560}{7!}x^7+\frac{560}{8!}x^8.$$

指数生成函数

$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$ 的4排列的个数：

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}\right)$$

?

观察下式：

$$\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=4}\frac{x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}}{e_1!e_2!e_3!}\right)=\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=4}\frac{4!}{4!}\cdot\frac{1}{e_1!e_2!e_3!}\right)x^4$$

$$=4!\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=4}\frac{1}{e_1!e_2!e_3!}\right)\frac{x^4}{4!}$$

$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \infty\cdot a_3\}$ 的 4排列的个数

定义

$$g^{(e)}(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5+\frac{35}{72}x^6+\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8$$

$$=1!+\frac{3}{1!}x+\frac{9}{2!}x^2+\frac{28}{3!}x^3+\frac{70}{4!}x^4+\frac{170}{5!}x^5+\frac{350}{6!}x^6+\frac{560}{7!}x^7+\frac{560}{8!}x^8.$$

指数生成函数

指数生成函数

数列$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$的指数生成函数定义为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + h_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

例：设n是正整数。确定下面数列的指数生成函数：

$$P(n, 0), P(n, 1), P(n, 2), \ldots, P(n, n)$$

其中，$P(n,k)$ 表示 n元素集合的 k排列的数目，即

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}。$$

解：指数生成函数为：

$$g^{(e)}(x) = P(n, 0) + P(n, 1)x + P(n, 2)\frac{x^2}{2!} + \ldots + P(n, n)\frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + nx + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^2 + \ldots + \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k + \ldots + \frac{n!}{n!0!}x^n$$

$$= (1+x)^n$$

数列$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ 的生成函数

例：数列 1, 1, 1, …, 1,…的指数生成函数是

$$g^{(e)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

若 a是任意一个实数，则数列 $a^0=1, a, a^2, \ldots, a^n,\ldots$的指数生成函数是

$$g^{(e)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!}=e^{ax}$$

- 多重集合的n排列：

设多重集合 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$，

则 S的排列数为 k^n，

问题：有穷重数的情形？

因此数列 $k^0, k, k^2,\ldots, k^n,\ldots$的指数生成函数是

$$g^{(e)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kx)^n}{n!}=e^{kx}$$

定理7.3.1 设 S是多重集 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，其中 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 是非负整数。设 h_n是 S的 n排列数，那么数列 $h_1, h_2,\ldots, h_k\ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}$为：

$$g^{(e)} = f_{n_1}(x)\, f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x) \qquad (1)$$

其中，对于i =1, 2, …, k，有

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \qquad (2)$$

证明：把(1) 式展开，得到以下乘积的和：

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!} = \frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

其中，$0\le m_1\le n_1$, $0\le m_2\le n_2$, …, $0\le m_k\le n_k$

定理7.3.1 设 S是多重集 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，其中 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 是非负整数。设 h_n是 S的 n排列数，那么数列 $h_1, h_2,\ldots, h_k\ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}$为：

$$g^{(e)} = f_{n_1}(x)\, f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x) \qquad (1)$$

其中，对于i =1, 2, …, k，有

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \qquad (2)$$

证明：令 $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$，则

$$\frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!m_2!\ldots m_k!} = \frac{x^n}{m_1!m_2!\ldots m_k!} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}\frac{x^n}{n!}$$

得 $\frac{x^n}{n!}$ 的系数为 $\sum \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$ (3)

其中, 求和是对所有满足下面条件的$m_1, m_2,\ldots, m_k$的求和：

$$0\le m_1 \le n_1,\ 0 \le m_2 \le n_2,\ \ldots,\ 0 \le m_k \le n_k,\quad m_1+m_2+\ldots+m_k=n$$

定理7.3.1 设 S是多重集 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$， 其中 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 是非负整数。设 h_n是 S的 n排列数，那么数列 $h_1, h_2,\ldots, h_k\ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}$为：

$$g^{(e)} = f_{n_1}(x)\, f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x) \qquad (1)$$

其中，对于i=1, 2, …, k，有

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \qquad (2)$$

同样应用于存在无穷重数的情形

与生成函数的因子有类似的含意

证明：得 $\frac{x^n}{n!}$ 的系数为 $\sum\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$ (3)

其中, 求和是对所有满足下面条件的$m_1, m_2,\ldots, m_k$的求和：

$$0\le m_1\le n_1,\ 0\le m_2\le n_2,\ \ldots,\ 0\le m_k\le n_k,\quad m_1+m_2+\ldots+m_k=n$$

由于$\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$等于$S$的子集$\{m_1\cdot a_1,\ldots, m_k\cdot a_k\}$的$n$排列数，且 S的 n排列数目等于所有满足$m_1+\ldots+m_k=n$的组合的排列数，因此， (3)为S的n 排列数。

推广到无穷重数的情况

多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$的 n排列数为 h_n, 求数列$h_0, h_1,\ldots, h_n,\ldots$的指数生成函数为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + h_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$
$$= f_\infty(x) f_\infty(x) \ldots f_\infty(x)$$

k个因子

其中，$f_\infty(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x$

- 当 n排列中a_i的出现有约束时，将反映到第i个因子中

带有附加限制的多重集合的n排列数数列

例：设 h_n表示由数字1, 2, 3构造的n位数的个数，其中在这个n位数中, 1的个数是偶数，2的个数至少是3，而3的个数最多是4。确定数列$h_0, h_1,\ldots, h_n,\ldots$的指数生成函数$g^{(e)}(x)$。

解：函数 $g^{(e)}(x)$对于数字1，2，3分别有一个因子$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$，且反映了对1，2，3的约束。

因为1的个数是偶数，所以 $f_1(x) = 1+ x^2/2!+x^4/4!+\ldots$

因为2的个数至少是3，因此 $f_2(x) = x^3/3!+x^4/4!+\ldots$

因为3的个数最多是4，因此

$$f_3(x)= 1+ x+x^2/2!+x^3/3!+x^4/4!$$

得，$g^{(e)}(x) = f_1(x)f_2(x)f_3(x)$。

例：用红、蓝、黄三种颜色给$1\times n$的棋盘着色，如果被着成红色的方格数是偶数，确定给这个棋盘着色的方法数h_n。

解：设h_n表示着色的方法数，定义$h_0=1$。

显然，h_n等于3种颜色的多重集合的n排列数，其中每种颜色的重数是无穷的，且红色出现的次数是偶数。

因此，指数生成函数为

$$g^{(e)}=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)$$

数列 $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$的指数生成函数定义为

$$g^{(e)}(x)=h_0+\frac{h_1}{1!}x+\frac{h_2}{2!}x^2+\frac{h_3}{3!}x^3+\cdots+\frac{h_k}{k!}x^k+\cdots$$

展开式

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1) \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

$$\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

例：用红、蓝、黄三种颜色给$1\times n$的棋盘着色，如果被着成红色的方格数是偶数，确定给这个棋盘着色的方法数h_n。

解：设h_n表示着色的方法数，定义$h_0=1$。

显然，h_n等于3种颜色的多重集合的n排列数，其中每种颜色的重数是无穷的，且红色出现的次数是偶数。

因此，指数生成函数为

$$g^{(e)}=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)e^x\,e^x=\frac{1}{2}\left(e^{3x}+e^x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(3^n+1\right)\frac{x^n}{n!}$$

得 $h_n=\dfrac{3^n+1}{2},\ n\geq 0$。

例：确定满足下面条件的n位数的个数h_n:

每个数字都是奇数且数字1和3出现偶数次。

解：设$h_0=1$，h_n等于多重集合$\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 3, \infty\cdot 5, \infty\cdot 7, \infty\cdot 9\}$的1和3出现偶数次的 n排列个数。

则$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$的指数生成函数为

$$g^{(e)} = (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)^2\,(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^3$$

$$=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 e^{3x}=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)$$

$$=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty} 5^n\frac{x^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5^n+2\times 3^n+1}{4})\frac{x^n}{n!}$$

因此，$h_n=\frac{5^n+2\times 3^n+1}{4}, n\geq 0$

小结

令$h_0, h_1, \ldots, h_n \ldots$为一无穷数列,

- 其生成函数$g(x)$定义为:

$$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots$$

（多重集组合）

- 其指数生成函数$g^{(e)}(x)$定义为:

$$g^{(e)}(x)=h_0+h_1x+h_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+h_n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

（多重集排列）

例： 7个有区别的球放进4个有标志的盒子里，要求第1，2两个盒子必须有偶数个球，第3个盒子有奇数个球，求不同的方案个数。