# 第8章 特殊计数序列

8.1 Catalan数
8.2 差分序列和Stirling数
8.3 分拆数

例：对于如下序列，给出第6项合适的值？

- 1 6 15 28 45 66 91

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 15 | 28 | 45 | 66 | 91……… | |
| | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | ………. |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | ………. |
| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | ……… |

差分原理

# 差分序列

设 $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$是一个序列。定义新序列：

$$\Delta h_0, \Delta h_1, \Delta h_2, \ldots, \Delta h_n, \ldots,$$

称为$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$的（一阶）差分序列，其中 $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n\ (n \geq 0)$，是序列的相邻项的差。

一阶差分序列

$\Delta h_0 = h_1 - h_0$

$\Delta h_1 = h_2 - h_1$

$\Delta h_2 = h_3 - h_2$

…

$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$

…

二阶差分序列

$\Delta^2 h_0 = \Delta h_1 - \Delta h_0$

$\Delta^2 h_1 = \Delta h_2 - \Delta h_1$

$\Delta^2 h_2 = \Delta h_3 - \Delta h_2$

…

$\Delta^2 h_n = \Delta h_{n+1} - \Delta h_n$

…

三阶差分序列

…

# 差分序列的递归定义

0阶差分序列：$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots,$

1阶差分序列：$\Delta^1 h_n = h_{n+1} - h_n \ (n=0,1,2,\ldots)$

2阶差分序列：$\Delta^2 h_n = \Delta\ (\Delta^1 h_n)$

$= \Delta^1 h_{n+1} - \Delta^1 h_n = (h_{n+2} - h_{n+1}) - (h_{n+1} - h_n)$

$= h_{n+2} - 2h_{n+1} + h_n \ (n \geq 0)$

*k*阶差分序列：

$\Delta^k h_n = \Delta(\Delta^{k-1} h_n) = \Delta^{k-1} h_{n+1} - \Delta^{k-1} h_n \ (n=0, 1, 2, \ldots)$

类比：微积分中导数

# 差分表

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第0行 | $h_0$ | | $h_1$ | | $h_2$ | | $h_3$ | | $h_4$ … |
| 第1行 | | $\Delta^1 h_0$ | | $\Delta^1 h_1$ | | $\Delta^1 h_2$ | | $\Delta^1 h_3$ … |
| 第2行 | | | $\Delta^2 h_0$ | | $\Delta^2 h_1$ | | $\Delta^2 h_2$ … | |
| 第3行 | | | | $\Delta^3 h_0$ | | $\Delta^3 h_1$ … | | |

…

- $\Delta^p h_n = \Delta^{p-1} h_{n+1} - \Delta^{p-1} h_n$
- 序列 $h_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$的差分表由第0行确定

# 差分表:示例

例：求序列$\{h_n\}$的差分表，其中 $h_n=2n^2+3n+1(n\geq 0)$

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h_n$ : | 1 | | 6 | | 15 | | 28 | | 45 | | 66 | | 91……… |
| $\Delta^1 h_n$ : | | 5 | | 9 | | 13 | | 17 | | 21 | | 25 | ………. |
| $\Delta^2 h_n$ : | | | 4 | | 4 | | 4 | | 4 | | 4 | | ………. |
| $\Delta^3 h_n$ : | | | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | | ……… |
| $\Delta^4 h_n$ : | | | | | 0 | | 0 | | 0 | | | | |

等差序列

如何确定是第几阶?

- 3阶差分序列全部由0组成
- 所有更高阶的差分序列也都由0组成

定理8.2.1：设序列的通项 $h_n$是$n$的$p$次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有: $\Delta^{p+1} h_n = 0$。

证明: 对多项式的次数 $p$ 实施数学归纳法。

(1) 当 $p = 0$ 时，$h_n = a_0$，对所有的 $n \geq 0$均为一常数，

因此, $\Delta^{p+1} h_n = \Delta^1 h_n = h_{n+1} - h_n = a_0 - a_0 = 0$,

结论成立。

(2) 假设 $p \geq 1$且当 $h_n$为$n$的最多$p-1$次多项式时，

定理成立，

则有$\Delta^p h_n = 0$对所有的$n \geq 0$成立。

定理8.2.1：设序列的通项 $h_n$是$n$的$p$次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有: $\Delta^{p+1} h_n = 0$。

证明(续)：当$h_n$是 $n$的$p$次多项式时，

由于$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$

$= a_p(n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \ldots + a_1 (n+1) + a_0$

$- (a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0)$

$= \underline{a_p((n+1)^p - n^p)} + a_{p-1}((n+1)^{p-1} - n^{p-1}) \ldots + a_1 + 0 \quad (1)$

把$(n+1)^p$ 按二项式定理展开后得，

$[(n+1)^p - n^p] = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^{p-k} - n^p = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{p-k}$, 代入(1)式得，

$\Delta h_n$最多为$n$的$p-1$次多项式，

由归纳假设知， $\Delta^p(\Delta h_n)=0$, 即$\Delta^{p+1} h_n = 0$。因此，定理成立。

可用于求解 $n$次多项式的序列通项

最大次数为$n^{p-1}$

差分表的性质：

- ✓ 差分表由第 0 行上元素的值就能决定
- ✓ 差分表也可由第 0 条对角线决定

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
h_0 & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & h_4 & \cdots \\
& \Delta^1 h_0 & & \Delta^1 h_1 & & \Delta^1 h_2 & & \Delta^1 h_3 & \cdots \\
& & \Delta^2 h_0 & & \Delta^2 h_1 & & \Delta^2 h_2 & \cdots \\
& & & \Delta^3 h_0 & & \Delta^3 h_1 & \cdots \\
& & & \cdots
\end{array}
$$

首先考虑特殊情况的第0条对角线

第1条对角线：

$$h_1=\Delta^0 h_1=\Delta^1 h_0+\Delta^0 h_0$$

$$=\Delta h_0+h_0$$

$$\Delta^1 h_1=\Delta^2 h_0+\Delta^1 h_0$$

$$\Delta^2 h_1=\Delta^3 h_0+\Delta^2 h_0$$

$$\Delta^3 h_1=\Delta^4 h_0+\Delta^3 h_0$$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出$h_n$？

## 差分表的性质：

- ✓ 差分表由第 0 行上元素的值就能决定
- ✓ 差分表也可由第 0 条对角线决定

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

| | |
|---|---|
| $h_0$ | 0 |
| $\Delta h_0$ | 0 |
| $\Delta^2 h_0$ | 0 |
| $\Delta^3 h_0$ | 0 |
| $\Delta^4 h_0$ | 0 |
| $\Delta^5 h_0$ | 0 |

若第0条对角线全为0，

第1条对角线：

$$h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0 = \Delta h_0 + h_0$$

$$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$$

$$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$$

$$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出$h_n$?

差分表的性质：

- ✓ 差分表由第 0 行上元素的值就能决定
- ✓ 差分表也可由第 0 条对角线决定

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h_0$ | 0 | 0 | | | | | |
| | $\Delta h_0$ | 0 | 0 | | | | |
| | | $\Delta^2 h_0$ | 0 | 0 | | | |
| | | | $\Delta^3 h_0$ | 0 | 0 | | |
| | | | | $\Delta^4 h_0$ | 0 | 0 | |
| | | | | | $\Delta^5 h_0$ | 0 | |

若第0条对角线全为0，

第1条对角线：

$$h_1=\Delta^0 h_1=\Delta^1 h_0+\Delta^0 h_0$$
$$=\Delta h_0+h_0$$
$$\Delta^1 h_1=\Delta^2 h_0+\Delta^1 h_0$$
$$\Delta^2 h_1=\Delta^3 h_0+\Delta^2 h_0$$
$$\Delta^3 h_1=\Delta^4 h_0+\Delta^3 h_0$$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出$h_n$?

差分表的性质：

- ✓ 差分表由第 0 行上元素的值就能决定
- ✓ 差分表也可由第 0 条对角线决定

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

$h_0$ 0 0 0 0

$\Delta h_0$ 0 0 0 0

$\Delta^2 h_0$ 0 0 0 0

$\Delta^3 h_0$ 0 0 0

$\Delta^4 h_0$ 0 0

$\Delta^5 h_0$ 0

若第0条对角线全为0，

第1条对角线：

$h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0$

$= \Delta h_0 + h_0$

$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$

$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出$h_n$?

## 差分表的性质：

- ✓ 差分表由第 0 行上元素的值就能决定
- ✓ 差分表也可由第 0 条对角线决定

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | … |
| $\Delta h_0$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | … |
| $\Delta^2 h_0$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | … |
| $\Delta^3 h_0$ | | | | 0 | 0 | 0 | … |
| $\Delta^4 h_0$ | | | | | 0 | 0 | … |
| $\Delta^5 h_0$ | | | | | | 0 | … |
| | | | | | | | … |

若第0条对角线全为0，则整个差分表全为0

第1条对角线：

$h_1=\Delta^0 h_1=\Delta^1 h_0+\Delta^0 h_0$

$=\Delta h_0+h_0$

$\Delta^1 h_1=\Delta^2 h_0+\Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1=\Delta^3 h_0+\Delta^2 h_0$

$\Delta^3 h_1=\Delta^4 h_0+\Delta^3 h_0$

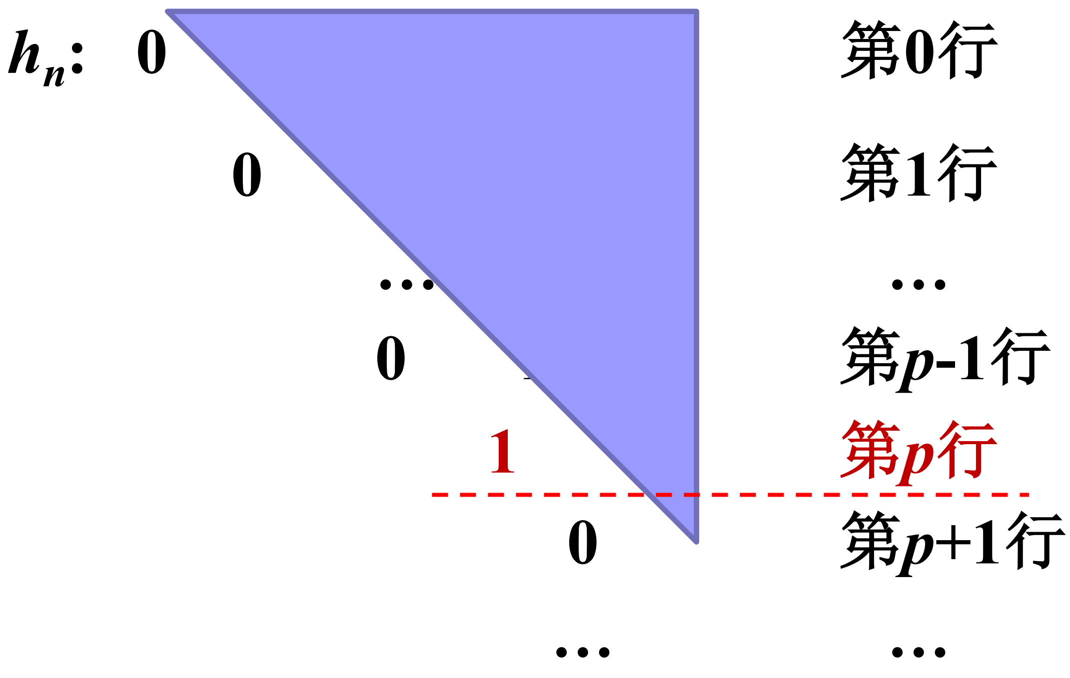
…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出$h_n$?

# 例：一种简单的差分表

第0条对角线除一个1外都是0：

- 1在第$p$行，前$p$个元素就都为0，从$p$+1行开始的所有行的元素都是0




问题：对应的差分表及$h_n$是什么形式？

# 例：一种简单的差分表：$p$=4 时

- 第0条对角线上的元素是：0,0,0,0,1,0,0,…….

| | | |
|---|---|---|
| $h_n$: | 0 | 第0行 |
| | 0 | 第1行 |
| | 0 | 第2行 |
| | 0 | 第3行 |
| | 1 | 第4行 |
| | 0 | 第5行 |
| | 0 | 第6行 |
| | 0 | 第7行 |

# 例：一种简单的差分表：$p$=4 时

- 第0条对角线上的元素是：0,0,0,0,1,0,0,…….

$h_n$:　0 0 0 0 1 5 15 35　第0行

0 0 0 1 4 10 20　第1行

0 0 1 3 6 10　第2行

第3行为等差序列

0 1 2 3 4　第3行

第4行全为0

1 1 1 1　第4行

0 0 0　第5行

第5行全为0

0 0　第6行

0　第7行

问题：怎么计算$h_n$?

# 例：一种简单的差分表：$p$=4 时

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 15 | 35 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | 20 | |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | |
| 0 | | | | | | | |

设$h_n = a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n+a_0$，满足

$$\Delta^{p+1}h_n = \Delta^5 h_n = 0$$

由于$h_0=h_1=h_2= h_3=0$ , $h_4=1$,

可知, 多项式 $h_n$有$n$ = 0, 1, 2, 3四个根;

于是， $h_n$的多项式中应该有$(n-0)$,$(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$这四个因子。

设待定系数$c$， 那么： $h_n= c\, n(n-1)(n-2)(n-3)$

将$h_4$=1 代入：$1=c\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1= c\cdot 4!$ ，因此 $c=1/4!$,

从而，$h_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \dbinom{n}{4}$

# 例：一种简单的差分表

假设对于任意的 $p$, 序列$\{h_n\}$差分表中第0条对角线为以下形式：

$$\underbrace{0,0,0,0\ldots0}_{p\text{个}0},1,0,\ldots,0,\ldots$$

则，$h_n$是 $n$的 $p$ 次多项式，表示如下：

$$h_n=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))}{p!}=\binom{n}{p}$$

问题：如果第0条对角线为：

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots \quad (\text{其中}c_p\neq 0)$$

是否有通项？通项是什么？

差分表的线性性

# 差分表的线性性

设 $g_n$ 和 $f_n$ 分别是两个序列的通项，如果 $h_n = g_n + f_n$ ，

则 $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n = (g_{n+1} + f_{n+1}) - (g_n + f_n)$

$$= (g_{n+1} - g_n) + (f_{n+1} - f_n) = \Delta g_n + \Delta f_n$$

对于任何常数 $c, d$ ，如果$b_h = c\, g_n + d\, f_n$

$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = (c\, g_{n+1} + d\, f_{n+1}) - (c\, g_n + d\, f_n)$

$$= (c\, g_{n+1} - c\, g_n) + (d\, f_{n+1} - d\, f_n) = c\, \Delta g_n + d\, \Delta f_n$$

- 一般的： $\Delta^p h_n = \Delta^p g_n + \Delta^p f_n$ ， $p \geq 0$
- 更一般的，对于任何常数 $c, d$ 来说，

$$\Delta^p(c\, g_n + d\, f_n) = c\, \Delta^p g_n + d\, \Delta^p f_n \quad (p \geq 0,\ n \geq 0)$$

**定理8.2.2** 差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots, \qquad \text{其中} c_p \neq 0$$

的序列的通项满足：

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots + c_p\binom{n}{p}$$

的关于$n$的$p$次多项式。

证明思想：(线性性+简单差分表)

$$\begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_p \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} = \begin{matrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} + \ldots + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ c_p \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} + \ldots$$

# $p$ 次多项式与差分表

定理8.2.1：设序列的通项 $h_n$是$n$的$p$次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有：$\Delta^{p+1} h_n = 0$。

定理8.2.2　差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots, \quad \text{其中} c_p \neq 0$$

的序列的通项满足：

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots + c_p\binom{n}{p}。$$

求序列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$,的部分和

例：考虑通项为$h_n=n^3+3n^2-2n+1(n\geq 0)$的序列。

计算差分，我们得到

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | 3 | 17 | 49 |
| $n=1$ | | 2 | 14 | 32 |
| $n=2$ | | | 12 | 18 |
| $n=3$ | | | | 6 |

$$\boxed{h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots\ldots + c_p\binom{n}{p}}$$

因为$h_n$是$n$的3次多项式，因此差分表的第0条对角线是：

1, 2, 12, 6, 0, 0,….

由定理8.2.2知，$h_n = 1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 12\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$

应用：求序列的部分和

例：求通项为$h_n=n^3+3n^2-2n+1(n\geq 0)$的序列的前$n+1$项和。

解：由上例知，$h_n = 1\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+12\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}$，

因此，

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 17 | 49 |
| | 2 | 14 | 32 |
| | | 12 | 18 |
| | | | 6 |

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = h_0 + h_1 + \ldots + h_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(1\binom{k}{0}+2\binom{k}{1}+12\binom{k}{2}+6\binom{k}{3}\right)$$

$$=1\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0}+2\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}+12\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2}+6\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{3}$$

$$= 1\binom{n+1}{1}+2\binom{n+1}{2}+12\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}。$$

(由于$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$ )

定理 8.2.3 假设序列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, \ldots, c_p, 0, 0, \ldots$$

那么

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + \ldots + c_p\binom{n+1}{p+1}$$

- 差分序列的应用
  - 一般项为多项式的序列的部分和

例：求前$n$个正整数的4次方的和。

解：设$h_n=n^4$, $n\geq 0$, 计算差分得

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 16 | 81 | 256 |
| | 1 | 15 | 65 | 175 |
| | | 14 | 50 | 110 |
| | | | 36 | 60 |
| | | | | 24 |

可推广到前$n$个正整数的$p$次方的和

因为$h_n$是4次多项式，其差分表第0条对角线是：

0, 1, 14, 36, 24, 0, 0,....

得 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1\binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5}$。

体现了一定的组合意义

# 差分表的第0条对角线的组合意义：$n^p$的表示

对于序列$h_n = n^p$ ,设其差分表中第0条对角线上的元素

为 $c_0, c_1, \ldots, c_p, 0, 0, \ldots$， 引入标记：

$$c(p, 0) = c_0, c(p, 1) = c_1, \ldots, c(p, p) = c_p, 0, 0, \ldots;$$

其中$c(p, k)$是差分表中第0条对角线上的 第$k$个元素；

则有：

$$h_n = n^p = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + \ldots\ldots + c_p\binom{n}{p}$$

$$= c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \ldots\ldots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

# $c(p, k)$的特殊值：$k = 0$

$$\boxed{h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 … |
| | 0 | 0 | 0 … |
| | | 0 | 0… |
| | | … | |

(1) 当 $p$=0 时，则 $h_n = n^p = n^0 = 1$ 是一个常数，$n \geq 0$

此时，差分表的第一行全为1，从第二行开始全为0

因此，$h_n = 1 = 1\binom{n}{0} = c(0,0)\binom{n}{0}$，

得 $c(0,0)=1$。

(2) 当 $p \geq 1$ 时，由于$h_0 = 0$，所以 $c(p,0)=0$。

因此，$c(p,0) = \begin{cases} 1, \text{当} p = 0\text{时} \\ 0, \text{当} p \geq 1\text{时} \end{cases}$

# $c(p, k)$的特殊值：$p = k \neq 0$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

上式右侧中 $n^p$ 项只出现在$c(p,p)\binom{n}{p} = c(p,p)\dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$ 中，

由上式两边 $n^p$ 项前系数相等得 $1 = \dfrac{c(p,p)}{p!}$，

因此，　$c(p, p) = p!$。

例如：$h_n = n^4$ 的差分表：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 16 | 81 | 256 |
| | 1 | 15 | 65 | 175 |
| | | 14 | 50 | 110 |
| | | | 36 | 60 |
| | | | | 24 |

$c(4,4) = 24 = 4!$

$$h_n = \boldsymbol{n}^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

令 $[n_k] = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,, 若\ k \geq 1 \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\,, 若\ k = 0 \end{cases}$

则，$[n]_k = n$个不同元素中取$k$个元素的排列数$P(n, k)$

$[n]_k$的递推关系：

$$[n]_{k+1} = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\ldots.\ (n\text{-}k\text{+}1)(n\text{-}(k\text{+}1)\text{+}1)$$

$$= n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\ldots.\ (n\text{-}k\text{+}1)(n\text{-}k)$$

$$= (n\text{-}k)[n]_k$$

$$\boxed{h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}}$$

由于，$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{[n]_k}{k!}$，

所以，$[n]_k = k!\binom{n}{k}$。则有

$$h_n = n^p = c(p,0)\frac{[n]_0}{0!} + c(p,1)\frac{[n]_1}{1!} + c(p,2)\frac{[n]_2}{2!} + \ldots\ldots + c(p,p)\frac{[n]_p}{p!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} c(p,k)\frac{[n]_k}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k$$

令 $S(p,k) = \frac{c(p,k)}{k!}$ $(0 \le k \le p)$，称为第二类Stirling数。

$h_n = n^p$ 的展开式就变为： $h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k$

# 第二类Stirling数

$$h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k$$

由于 $$S(p,0) = \frac{c(p,0)}{0!} = c(p,0)$$

因此有 $$S(p,0) = \begin{cases} 1 & \text{若 } p = 0 \\ 0 & \text{若 } p \geq 1 \end{cases}$$

由于 $[n]_k = k!\binom{n}{k}$是关于$n$的$k$次多项式，因此$[n]_p$是关于$n$的$p$次多项式，得 $S(p,p) = 1\ (p \geq 1)$

# 第二类Stirling的递推公式

**定理8.2.4：如果$1 \le k \le p-1$ 则**

$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

类比二项式公式中：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

定理8.2.4：如果$1\le k \le p-1$ 则

$$S(p, k) = k\, S(p-1,k) + S(p-1, k-1)$$

证明：已知

$$n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k，\quad n^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k$$

$$n^p = n\times n^{p-1} = n\sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)n[n]_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k+k)[n]_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k)[n]_k + \underline{\sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k$$

$$n^p = \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k$$

对上式等号右边的求和项 $\sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1}$，用$k$-1替换$k$后得到：

$$n^p = \sum_{k=1}^{p} \underline{S(p-1,k-1)[n]_k} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k$$

$$= S(p\text{-}1, p\text{-}1)[n]_p + \sum_{k=1}^{p-1} S(p-1,k-1)[n]_k + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k$$

$$= S(p-1,p-1)\,[n]_p$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \big(S(p-1,k-1) + kS(p-1,k)\big)[n]_k \qquad (*)$$

已知 $n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k = S(p,p)[n]_p + \sum_{k=0}^{p-1} S(p,k)[n]_k \quad (**)$

对于$1 \le k \le p\text{-}1$ 的每一个$k$，比较(*)式与(**)式中$[n]_k$的系数，得

$$S(p, k) = k\, S(p\text{-}1,k) + S(p\text{-}1, k\text{-}1)$$

# 第二类Stirling数的类Pascal三角形

$S(p, k) = k\, S(p-1,k) + S(p-1, k-1),\ 1 \le k \le p-1$

直接上方的元素乘以$k$再加上其左上方的元素

$25 = 6 \cdot 3 + 7$

| $p \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | |
| 7 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ |

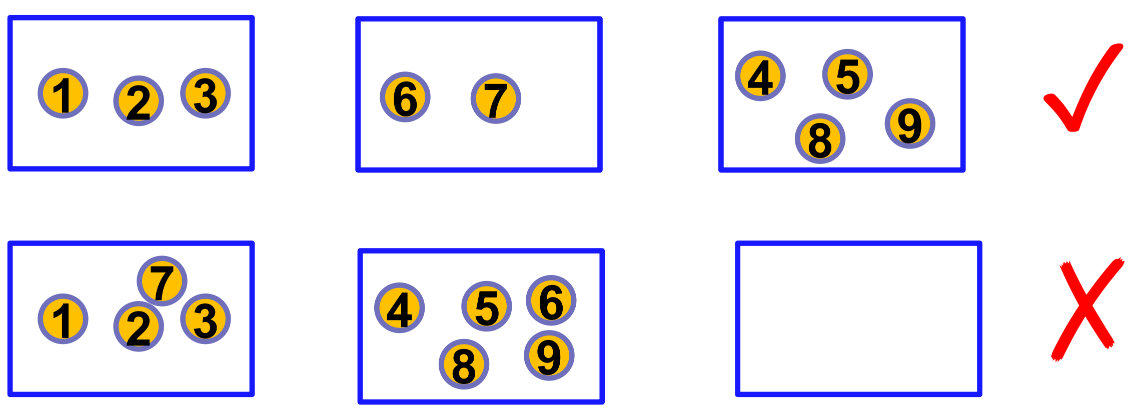
$S(p,1) = 1 \quad (p \geqslant 1)$

$S(p,2) = 2^{p-1} - 1 \quad (p \geqslant 2)$

$S(p,p-1) = \binom{p}{2} \quad (p \geqslant 1)$

# 第二类Stirling数的组合解释：投球入盒

**定理8.2.5**： 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 $p$元素集合划分到 $k$个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。



**定理8.2.5：** 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 $p$元素集合划分到 $k$个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明：令 $S^*(p, k)$ 是将$p$元素的集合划分到 $k$个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。下面证明： $S^*(p, k) = S(p, k)$。

显然$S^*(p, p) =1$ $(p\geq 0)$ 而且 $S^*(p, 0) =0$ $(p\geq 1)$ 。

下面只需证明$S^*(p, k)$ 满足递推式

$$S^*(p, k) =kS^*(p-1, k) + S^*(p-1, k-1)\ ,\ 1\leq k \leq p-1.$$

把$\{1, 2,\dots p\}$分到时 $k$个非空且不可区分的盒子有两种类型：

(1) $p$ 独占一个盒子的划分；或者

(2) $p$ 不独占一个盒子的划分。此时该盒子元素多于1个；

**定理8.2.5：** 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 $p$元素集合划分到 $k$个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明(续)： (1) 当 $p$独占一个盒子时，

当把 $p$ 从盒子中拿走时，得到剩下的$\{1, 2, \ldots, p-1\}$划分到$k-1$个非空且不可区分的盒子的划分。

因此，存在$S^*(p-1, k-1)$ 种对$\{1, 2, \ldots, p\}$的满足条件的划分。

(2) 当 $p$ 不独占一个盒子时，

相当于先将$\{1, 2,\ldots, p-1\}$ 放到 $k$ 个盒子，不允许空盒，

共有$S^*(p-1, k)$ 种方案，然后将 $p$ 放进其中一盒，由乘法原理得方案数为 $kS^*(p-1, k)$ 。

因此，$S^*(p, k) = kS^*(p-1, k) + S^*(p-1, k-1)$，$1 \leq k \leq p-1$。

证毕。

例：将红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里，且无空盒，共有多少种不同方案?

解：满足题意的方案数为第二类Stirling数$S(5, 2)$。

由递推关系 $S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$得：

$$
\begin{aligned}
S(5, 2) &= 2S(4, 2) + S(4,1) \\
&= 2(2S(3, 2) + S(3, 1)) +1 \\
&= 2(2\times3+1) +1 = 15
\end{aligned}
$$

因此，共有15种不同方案。

问题：1. 如果2个盒子颜色有区别，方案数是多少?

$2!\, S(5, 2)$

2. 如果盒子无区别，允许空盒方案数是多少?

**Bell 数**

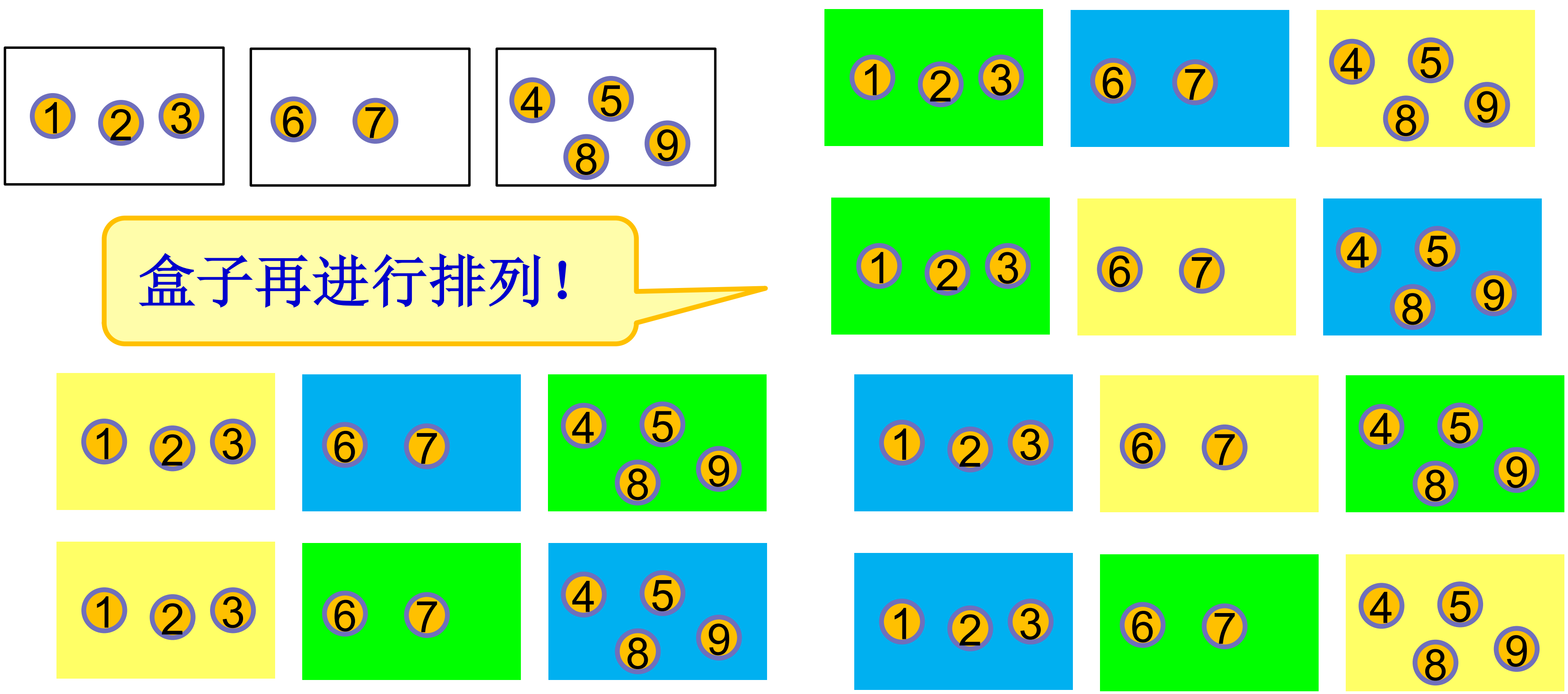
# 盒子无区别

**定理8.2.5：** 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 $p$元素集合划分到 $k$个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

# 盒子有区别

令$S^{\#}(p, k)$表示把$\{1, 2, \ldots, p\}$分到 $k$ 个非空且可区分的盒子的划分个数，则

$$S^{\#}(p, k) = k!\, S(p, k)。$$



定理8.2.6 对每一个满足 $0 \le k \le p$的整数 $k$，都有

$$S^{\#}(p, k) = \sum_{t=0}^{k}(-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^p,$$

从而 $S(p, k) = \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^p$。

$S^{\#}(p, k)$：把$\{1, 2, \ldots, p\}$分到 $k$ 个非空且可区分的盒子的划分个数

证明: (容斥原理) 设 $U$ 是把 $\{1, 2, \ldots, p\}$分到 $k$ 个可区分盒子$B_1$, $B_2, \ldots, B_k$的所有划分的集合。

设 $A_i$ 表示盒子 $B_i$ 是空盒的划分组成的子集。则

$$S^{\#}(p, k) = |\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_k|。$$

对任意 $0 \le t \le p$，$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}|$ 是把 $\{1, 2, \ldots, p\}$ 划分到 $k$-$t$ 个可区分盒子的划分个数（盒子可为空），得

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}| = (k-t)^p。$$

由容斥原理公式得 $S^{\#}(p, k) = \sum_{t=0}^{k}(-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^p$。

- $p$ 个有区别的物品放入$k$个无区别的盒子且没有空盒的放法：$S(n, k)$
- $p$ 个有区别的物品放入$k$个有区别的盒子且没有空盒的放法：$S^{\#}(p, k)=k!\, S(n, k)$

| $p$ 个物品 | $k$ 个盒子 | 空盒 | |
|---|---|---|---|
| 有区别 | 无区别 | 没有 | $S(p, k)$ |
| 有区别 | 有区别 | 没有 | $S^{\#}(p, k)$ |

# Bell数（以Eric Temple Bell命名）

- **Bell数是将 $p$个元素的集合划分到非空、不可区分的盒子的划分数，记为$B_p$，则**

$$B_p = S(p, 0)+S(p, 1)+\ldots+S(p, p),$$

至少一个盒子，最多$p$个盒子

是第二类Stirling数三角形的一行的元素和

| $p \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | |
| 7 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ |

$S(p, k)$

**定理 8.2.7** （Bell数的递推式）如果$p\geq 1$，则

$$B_p=\binom{p-1}{0}B_0+\binom{p-1}{1}B_1+\binom{p-2}{2}B_2\ldots+\binom{p-1}{p-1}B_{p-1}$$

证明：假设把 $\{1, 2, \ldots, p\}$划分到非空且不可区分的盒子，且包含 $p$的盒子还包含 $\{1, 2, \ldots, p-1\}$的子集 $X$（可能为空）。假设 $|X|=t$, 则 $0\leq t\leq p-1$。

由于选择子集 $X$有$\binom{p-1}{t}$种方式，把$\{1, 2, \ldots, p-1\}$中不属于$X$的 $p-1-t$ 个元素划分到非空且不可区分的盒子中有$B_{p-1-t}$种方式，

因此有 $B_p=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{t}B_{p-1-t}=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{p-1-t}B_{p-1-t}$

$$=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{t}B_t。$$

- $p$ 个有区别的物品放入$k$个无区别的盒子且没有空盒的放法：$S(n, k)$
- $p$ 个有区别的物品放入$k$个有区别的盒子且没有空盒的放法：$S^{\#}(p, k)=k!\, S(n, k)$
- $p$ 个有区别的物品放入非空无区别的盒子且没有空盒的放法： $B_p = S(p, 0)+S(p, 1)+\ldots+S(p, p)$

# 第一类Stirling数

$$h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k$$

- 第二类Stirling数 $S(n, p)$
  - 指出如何用$[n]_0, [n]_1, [n]_2, \ldots [n]_p$写出$n^p$。
  - 把 $p$个元素的集合划分到 $k$个不可区分的盒子且没有空盒的划分的个数
- 第一类Stirling数 $s(n, p)$
  - 如何用$n^0, n^1, n^2, \ldots, n^p$ 写出$[n]_p$。
  - 将$p$个物品排成 $k$个非空的循环排列方法数

# 第一类Stirling数

由于，$[n]_p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-(p-1))$

$= (n-0)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-(p-1))$

因此，$[n]_0 = 1$

$[n]_1 = n$

$[n]_2 = n(n-1) = n^2 - n$

$[n]_3 = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$

$[n]_4 = n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$

……………………

一般地，$[n]_p$展开式有$p$个因子。

乘开后得到$n$的幂多项式，$n^p, n^{p-1}, \ldots\ldots, n^1, n^0$，其系数的符号正负相间；故:

$$[n]_p = a_n^p n^p - a_n^{p-1} n^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{p-1} a_n^1 n^1 + (-1)^p a_n^0 n^0$$

# 第一类Stirling数

$$[n]_p = a_n^p n^p - a_n^{p-1} n^{p-1} + \dots\dots\dots + (-1)^{p-1} a_n^1 n^1 + (-1)^p a_n^0 n^0$$

$n^k$ 前的系数 $a_n^k$ 称为第一类Stirling数，记为 $s(p, k)$。

由 $[n]_0 = 1$和 $[n]_1 = n$，得到第一类Stirling数的初值:

$s(p, 0) = 0;\ (p \geq 1)$ $s(p, 1) = 1;\ (p \geq 0)$

**定理8.2.8如果 $1 \le k \le p-1$ 则:**

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

- **第二类Stirling数递推关系式的区别:**

$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

  - 初值一样，但递推关系不同。

**定理8.2.9 第一类Stirling数$S_1(p, k)$是将$p$个物品排成 $k$个非空的循环排列的方法数。**

证明：令$s^\#(p, k)$是将$p$个物品排成$k$个非空循环排列的方法数。

(1) 当$k = p$时，$p$个物品排成 $p$个非空的循环排列，

因此每个循环排列只有一个物品，因此 $s^\#(p, p) = 1$ $(p \geq 0)$。

(2) 当$k = 0$时，显然 $s^\#(p, 0) = 0$ $(p \geq 1)$。

下面只需证明$s^\#(p, k)$满足递推关系

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)。$$

**定理8.2.9 第一类Stirling数$S_1(p, k)$是将$p$个物品排成 $k$个非空的循环排列的方法数。**

证明:（续）(2) 当$k = 0$时， 显然 $s^{\#}(p, 0) = 0$ $(p \geq 1)$。

下面只需证明$s^{\#}(p, k)$满足递推关系

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)。$$

设$p$个物品记为 1, 2, 3, …, $p$。

将1, 2, 3, …, $p$ 排成 $k$ 个圆圈有两种类型:

(1) 有一个循环排列中只有$p$ 自己，则共有$s^{\#}(p-1, k-1)$种;

(2) $p$ 至少和另一个物品在一个循环排列中，

则可以通过把 1, 2, …, $p$-1 排成 $k$ 个循环排列，并把 $p$ 放在1, 2, …, $p$-1任何一个物品的左边得到，因此共有 $(p-1)\, s^{\#}(p-1, k)$种。

综上，把 $p$个物品排成 $k$ 个非空的循环排列的方法数为

$$s^{\#}(p, k) = (p-1)s^{\#}(p-1, k) + s^{\#}(p-1, k-1)。$$

证毕。

| $p$个球 | $k$个盒 | 是否空 | 方　案　个　数 |
|---|---|---|---|
| 有区别 | 有区别 | 有空盒 | ? |
| | 无区别 | 无空盒 | |
| | 有区别 | 无空盒 | |
| | 无区别 | 有空盒 | |

| $p$个球 | $k$个盒 | 是否空 | 方　案　个　数 |
|---|---|---|---|
| 无区别 | 有区别 | 有空盒 | ? |
| | 有区别 | 无空盒 | |
| | 无区别 | 有空盒 | |
| | 无区别 | 无空盒 | |

# 球有区别时

| $p$个球 | $k$个盒 | 是否空 | 方　案　个　数 |
|---|---|---|---|
| 有区别 | 有区别 | 有空盒 | $k^p$ |
| | 无区别 | 无空盒 | $S(p,k)$ |
| | 有区别 | 无空盒 | 若不考虑盒子区别时得$S(p,k)$<br>再对$k$个盒子排列得$k!S(p,k)$ |
| | 无区别 | 有空盒 | $S(p,1)+S(p,2)+\ldots..+S(p,k)$　$(p\geq k)$<br>$S(p,1)+S(p,2)+\ldots..+S(p,p)$　$(p\leq k)$ |

**Bell数$B_p$: $p$个球放入非空无区别盒子的方案数**

$B_p = S(p, 0)+S(p, 1)+\ldots+S(p, p)$

# 球有区别时

| *p*个球 | *k*个盒 | 是否空 | 方　案　个　数 |
|---|---|---|---|
| 无区别 | 有区别 | 有空盒 | 相当于*p*个有区别的元素取*k*个作允许重复排列数 $\binom{p+k-1}{p}$ |
| | 有区别 | 无空盒 | 先取*k*个球每盒一个，余下的*p-k*个无区别的球放到*k*个盒子中。 $\binom{k+(p-k)-1}{p-k}=\binom{p-1}{p-k}=\binom{p-1}{k-1}$ |
| | 无区别 | 有空盒 | $G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^k)}$ |
| | 无区别 | 无空盒 | $G(x)=\frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^k)}$ |

分拆数