

北京航空航天大学

2014 - 2015 学年 第二学期期末

离散数学 3

《组合数学》

班 级 _____ 学 号 _____

姓 名 _____ 成 绩 _____

2015 年 6 月 25 日

班号_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

《 组合数学 》期末考试卷

注意事项：1、考试时间 120 分钟、闭卷。

2、第一题的答案直接填写在题目留出的空白，第二题之后，答题写在后面的空白页上，请标明题号。

一、填空题（每空 5 分，共 35 分）

1. 有 8 种不同颜色的球，而且球的数量足够多，投入一个容量为 12 的盒子之中，一共有 $\binom{19}{7}$ 种组合方法.

2. 构造 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 的排列， 48165723 ，其逆序序列是 2, 5, 5, 0, 2, 1, 1, 0.

3. 方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 40$, 满足条件 $x_i \geq i (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$ 的整数解个数为 $\binom{11}{7} = 330$

4. $S = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, 令 X 为由 S 的互不相交的子集构成的集合，则 $|X|$ 的最大值为 $\binom{2n}{n}$.

5. 设 h_n 是方程 $e_1 + e_2 + \dots + e_k = n$ 的正奇数解的个数，序列 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 的生成函数为 $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - x^{2k+1})^{-1}$.

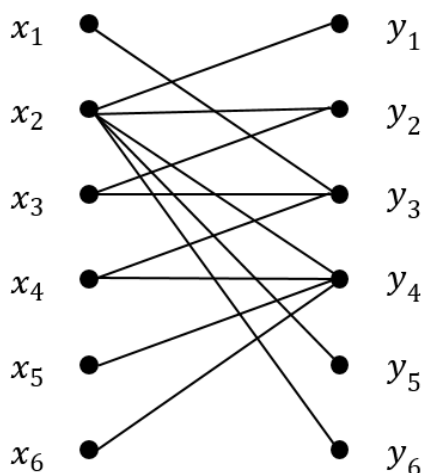
6. 正整数 n 拆分成仅有奇数类的分拆数 P_n 的生成函数是 $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - x^{2k+1})^{-1}$.

7. 对于下图所示的二分图，给出其一个最大匹配

二、某学生有 37 天来完成一个课外科技项目，而学生需要不超过 60 小时的课外时间，他还希望每天至少安排一小时。证明：无论如何安排工作时间（每天都是整数小时），都存在连续的若干天，在此期间他恰好工作了 13 个小时。

(10 分)

$[0, 73]$ 选 74 个
连续时间问题



三、将 7 个不同颜色的球放入 3 个无区别的盒子中，要求每盒球数不少于 2，求解放置方案数。(10 分)

$$\frac{7!}{3! 2! 2!} = 210$$

四、求 1-1000 的整数中，既不是完全平方数，也不是完全立方数，也不能被 8 整除的数的个数。

(13 分)

容斥

$$847$$

五、证明 $\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-2}$ (10 分)

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$[n-k] \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{n-k-1} = n \binom{n-1}{n-2-(k-1)}$$

易证

六、红、白、蓝和绿四种颜色的球取 n 个装入一个袋子，要求放入偶数个红色球，白色球最多放入 2 个，放入的蓝色球数量是 3 的倍数，放入最多 1 个绿色球。用 h_n 表示可能出现的不同装袋数量。求 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 的生成函数，并给出 h_n 的公式。(10 分)

$$g(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)^2$$

$$h_n = n + 1$$

七、应用延迟认可算法得出下列评定矩阵的稳定婚姻。(12 分)

| | a | b | c | d |
|---|-------|-------|-------|-------|
| A | (1,3) | (2,2) | (3,1) | (4,3) |
| B | (1,4) | (2,3) | (3,2) | (4,4) |
| C | (3,1) | (1,4) | (2,3) | (4,2) |
| D | (2,2) | (3,1) | (1,4) | (4,1) |