



第8章 特殊计数序列

8.1 Catalan数

8.2 差分序列和Stirling数

8.3 分拆数



第8章 特殊计数序列

8.1 Catalan数

8.2 差分序列和Stirling数

8.3 分拆数



■ 相关应用

- 矩阵相乘的括号化问题
- 出栈次序问题
- 给定顶点的二叉树组成问题
- 买票找零问题
- 走方格问题
-

■ 主要内容

- Catalan数的定义和必要条件
- 一般项是Catalan数的计数问题

回顾

定理7.6.1 设 h_n 表示用下面方法把凸多边形区域分成三角形区域的方法数:

在有 $n+1$ 条边的凸多边形区域内通过插入不相交的对角线, 而把它分成三角形区域。

定义 $h_1=1$ 。则 h_n 满足如下递推关系:

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \dots + h_{n-1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \quad (n \geq 2)$$

该递推关系的解为: $h_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

Catalan数 C_{n-1}

- 由比利时数学家欧仁·查理·卡塔兰 (1814–1894) 提出

Catalan数列

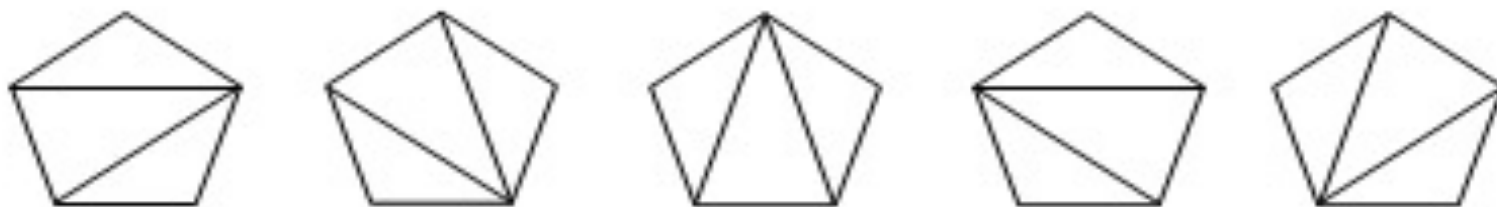
Catalan数列是序列 $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$, 其中

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, n=0,1,2,\dots$$

是第 n 个Catalan数。

□ $C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$: 凸 $n+1$ 边形被在其内部不相交的对角线划分成三角形区域的方法数

$C_3=5$



Catalan数列的递推式

把凸 $n+1$ 多边形区域分成三角形区域的方法数 h_n 的递推式为

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \dots + h_{n-1} h_1$$

由于 $C_{n-1} = h_n$ ($n \geq 1$), 得Catalan数列 $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ 的递推式为

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0,$$

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, \dots$$

- 递推关系是非线性的
- 许多有意义的计数问题都导致这样的递推关系。

例. (括号化问题) 矩阵连乘 $P = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$, 依据乘法结合律, 不改变其顺序, 只用括号表示成对的乘积, 试问有几种括号化的方案?

思路: 通过括号化, 将 P 分成两个部分, 然后分别对两个部分再进行括号化: $1 \leq k \leq n-1$

$$(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k) \times (a_{k+1} \times \dots \times a_n)$$

$$k = 1: (a_1) \times (a_2 \times a_3 \dots \times a_n)$$

$$k = n-1: (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1}) \times (a_n)$$

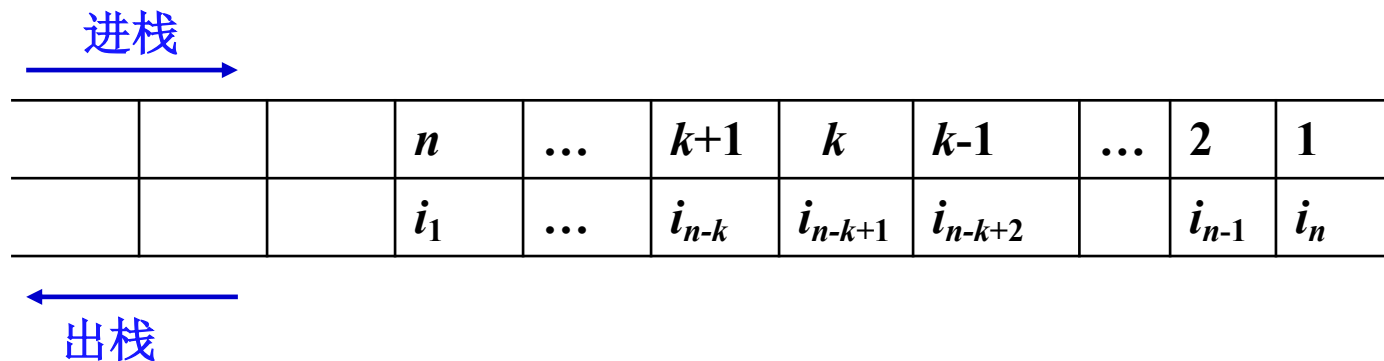
设 n 个矩阵连乘的括号化方案的种数为 h_n , 则

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + h_3 h_{n-3} + \dots + h_{n-1} h_1。$$

计算开始几项, $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 2, h_4 = 5。$

结合递归式, 不难发现 $h_n = C_{n-1}。$

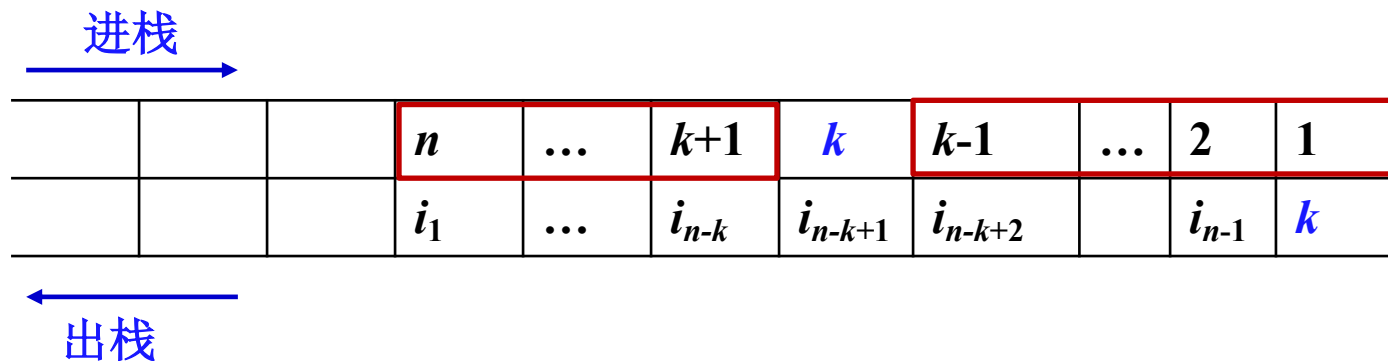
例. (出栈次序问题) 一个栈(无穷大)的进栈序列为1, 2, 3, ..., n , 有多少个不同的出栈序列? (后进先出)



解: 记出栈序列数目为 h_n 。

假设一个出栈序列的最后一个出栈元素为 k ($1 \leq k \leq n$), 则有

例. (出栈次序问题) 一个栈(无穷大)的进栈序列为1, 2, 3, ..., n , 有多少个不同的出栈序列? (后进先出)



解: 记出栈序列数目为 h_n 。

假设一个出栈序列的最后一个出栈元素为 k ($1 \leq k \leq n$), 则有

- (1) 元素1, 2, ..., $k-1$ 的进栈与出栈在 k 入栈前全部完成; 且
- (2) 元素 $k+1$, ..., n 的进栈与出栈在 k 入栈后直至 k 出栈前全部完成。

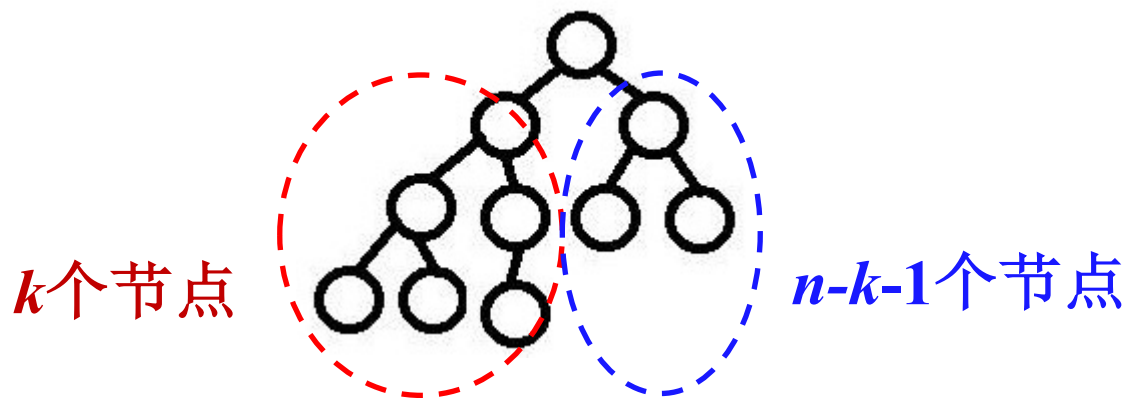
因此, 由乘法原理, 最后一个出栈元素为 k 的出栈序列的个数为 $h_{k-1}h_{n-k}$ 。

由加法原理得, $h_n = \sum_{k=1}^n h_{k-1}h_{n-k}$ 。

令 $h_0=1$, 且知 $h_1=1, h_2=2$, 由递推关系知 $h_n = C_n$ 。

例： n 个节点构成的二叉树，共有多少种情形？

思路：考虑左右子树的分布情况



设 n 个节点构成二叉树的情形有 h_n 种。

则有 $h_n = h_0 h_{n-1} + h_1 h_{n-2} + \dots + h_{n-2} h_1 + h_{n-1} h_0$

令 $h_0 = 1$ ，有 $h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 5$ 。

结合递推式，知 $h_n = C_n$ 。

Catalan数列小结

- Catalan数列是序列 $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$, 其中

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, n=0,1,2,\dots$$

是第 n 个Catalan数。

- Catalan数列 $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ 的递推式为

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0$$

问题：是否还有判断Catalan数列的方法？

定理8.1.1. 考虑由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的 $2n$ 项序列

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n},$$

其部分和总满足:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2n)$$

的序列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

证明: 设满足条件的数列称为可接受的, 其个数记为 A_n ; 否则称为不可接受的, 其个数记为 U_n 。

由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的序列的总数为

$$A_n + U_n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n \cdot (2n-1) \dots (n+1)}{n!} = \binom{2n}{n}。$$

下面计算 U_n , 从而得到 A_n 。

定理8.1.1. 考虑由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的 $2n$ 项 a_1, a_2, \dots, a_{2n} , 其部分和满足: $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) 的数列的个数等于第 n 个 Catalan 数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

假设序列 $S=a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 是不可接受的

$$S_k = a_1 + \dots + a_k, k = 1, 2, \dots, 2n$$

令 S_k 是第一个为负的和式, 即 k 是满足 $S_k < 0$ 的最小的 k ,

则 $S_{k-1}=0$, k 一定为奇数且 $a_k=-1$;

Diagram illustrating a sequence $S = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2n})$. The sequence is enclosed in a box. Above the box, a blue bracket spans from a_1 to a_k , and a red bracket spans from a_{k+1} to a_{2n} . Below the box, a blue bracket spans from a_1 to a_k , and a red bracket spans from a_{k+1} to a_{2n} . Below the blue bracket, the expression is $\frac{k-1}{2} \uparrow +1$. Below the red bracket, the expression is $\frac{k+1}{2} \uparrow -1$. Below the entire sequence, the expression is $\frac{2n-k+1}{2} \uparrow +1$, followed by $\frac{2n-k-1}{2} \uparrow -1$. To the right of the sequence, the text "满则" (If full) is written vertically.

[illegible]

定理8.1.1. 考虑由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的 $2n$ 项
 a_1, a_2, \dots, a_{2n} , 其部分和满足: $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0$
 $(k = 1, 2, \dots, 2n)$ 的数列的个数等于第 n 个 Catalan 数

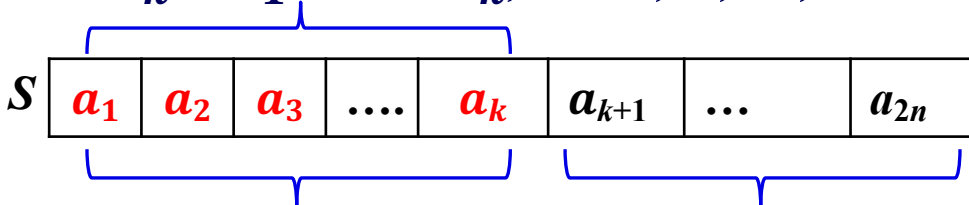
$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

假设序列 $S = a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 是不可接受的

$$S_k = a_1 + \dots + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

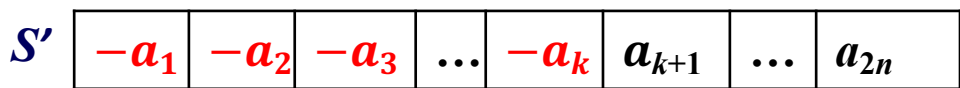
令 S_k 是第一个为负的和式, 即 k 是满足 $S_k < 0$ 的最小的 k ,

则 $S_{k-1} = 0$, k 一定为奇数且 $a_k = -1$;



$$\frac{k-1}{2} \uparrow +1, \quad \frac{k+1}{2} \uparrow -1, \quad \frac{2n-k+1}{2} \uparrow +1, \quad \frac{2n-k-1}{2} \uparrow -1$$

把 S 的前 k 项 $+1$ 和 -1 相替换, 得到 S'



$$\frac{k+1}{2} \uparrow +1, \quad \frac{k-1}{2} \uparrow -1, \quad \frac{2n-k+1}{2} \uparrow +1, \quad \frac{2n-k-1}{2} \uparrow -1$$

得 S' 有 $n+1$ 个 $+1$ 和 $n-1$ 个 -1 , 且 S'_k 是 S' 的第一个为正的 and 式。
 因此, 由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的不可接受的序列 S 对应一个由 $n+1$ 个 $+1$ 和 $n-1$ 个 -1 构成的序列 S' 。

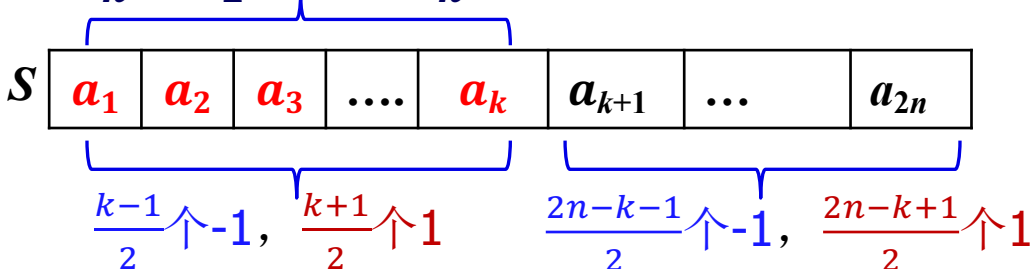
反之是否成立?

定理8.1.1. 考虑由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的 $2n$ 项 a_1, a_2, \dots, a_{2n} , 其部分和满足: $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) 的数列的个数等于第 n 个 Catalan 数

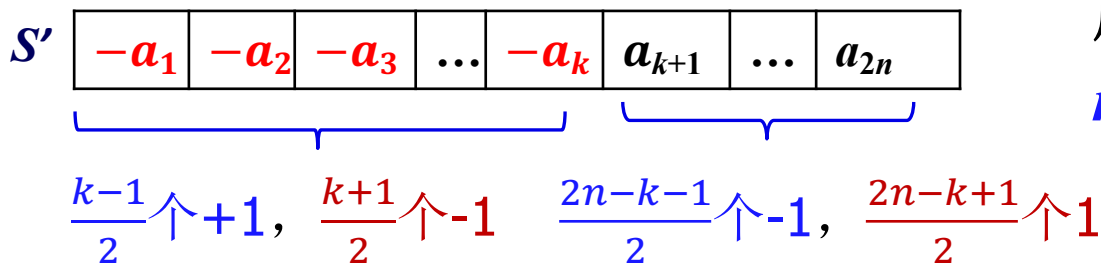
$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

假设序列 $S = a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 是由 $n+1$ 个 1 和 $n-1$ 个 -1 构成的序列, 且 S_k 是第一个为正的子序列和, 则 k 为奇数, $S_{k-1} = 0$, 且 a_k 为 $+1$

$$s_k = a_1 + \dots + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$



把 S 的前 k 项 $+1$ 和 -1 相替换, 得到 S'



得 S' 中有 n 个 1 和 n 个 -1 , 且 $S'_k = -1 < 0$, 即 S' 为不可接受的。

因此, 由 $n+1$ 个 1 和 $n-1$ 个 -1 构成的序列对应一个由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的不可接受的序列。

定理8.1.1. 考虑由 n 个+1和 n 个-1构成的 $2n$ 项
 a_1, a_2, \dots, a_{2n} , 其部分和满足: $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0$
($k = 1, 2, \dots, 2n$) 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

因此, 由 n 个+1和 n 个-1构成的不可接受序列的个数
 U_n 与由 $n+1$ 个+1和 $n-1$ 个-1构成的序列的个数相等,

$$\text{即 } U_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

$$\text{得 } A_n = \frac{(2n)!}{n!n!} - U_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

因此, 定理得证。

例. (购票找零钱问题) 有 $2n$ 个人排成一对进电影院, 门票 50元, $2n$ 个人中的 n 个人有50元纸币, n 个人有100元纸币。电影院设置售票点, 假设未备有零钱, 有多少种排队方法使得只要有100元的人买票, 售票处就有50元的纸币找零?

情况1: 若把 $2n$ 个人看成不可区分的, 将50元用 +1表示, 100元用-1表示。

则满足条件的排队序列 a_1, \dots, a_{2n} 一定满足 $a_1 + \dots + a_k \geq 0$, $k=1, \dots, 2n$ 。

假设 a_1, \dots, a_k 是最短的一个 $a_1 + \dots + a_k < 0$ 的序列, 则 k 为奇数, 且 $a_k = -1$, 则第 k 个人付款100时, 无法找零。

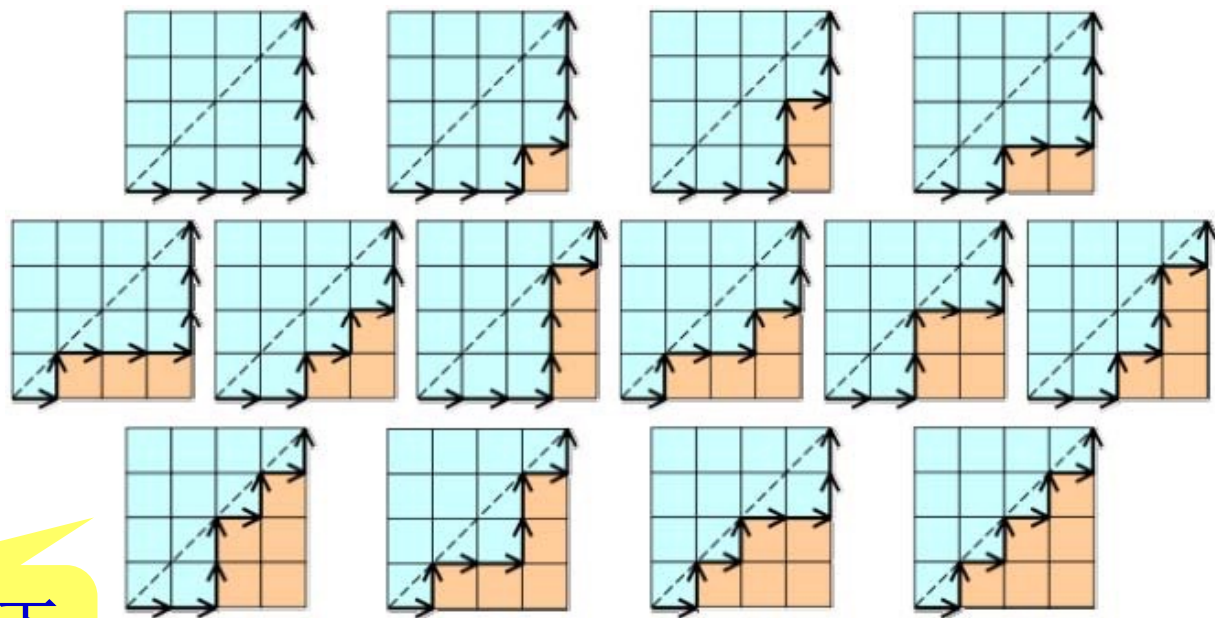
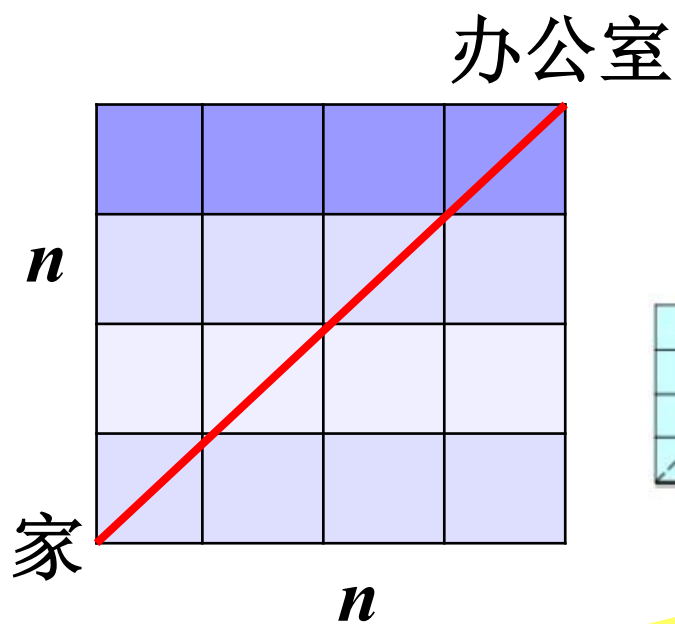
因此满足条件的排队方法数为 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$

例. (购票找零钱问题) 有 $2n$ 个人排成一对进电影院, 门票 50元, $2n$ 个人中的 n 个人有50元纸币, n 个人有100元纸币。电影院设置售票点, 假设未备有零钱, 有多少种排队方法使得只要有100元的人买票, 售票处就有50元的纸币找零?

情况2: 若把 $2n$ 个人看成可区分的, 则需要考虑 n 个有50元纸币的人的排列, 以及 n 个有100元纸币的人的排列。

因此排队方法数为 $(n! n!) \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$

例. (城市穿越问题) 一位大城市的律师在她住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作。每天她走 $2n$ 个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线，有多少可能的道路？

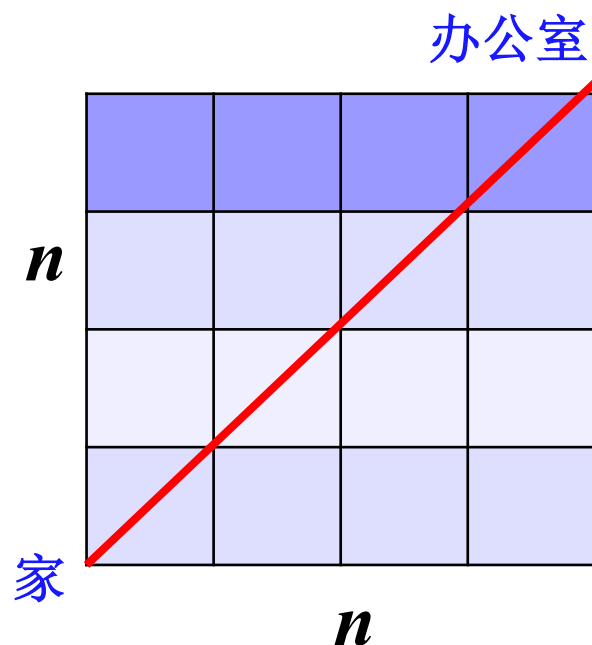


全在对角线
下方的路径

例. (城市穿越问题) 一位大城市的律师在她住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作。每天她走 $2n$ 个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线，有多少可能的道路？

解：由于不穿越从家到办公室的对角线，因此一条路径要么全在对角线上方，或者全在对角线下方。

记全在对角线下方的路径数为 B_n ，全在对角线上方的路径数为 C_n ，由路径的对称性，得 $B_n = C_n$ 。



例. (城市穿越问题) 一位大城市的律师在她住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作。每天她走 $2n$ 个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线, 有多少可能的道路?

解 (续): 用 $+1$ 表示向东, -1 表示向北。

则每条路径对应一个 $+1, -1$ 的序列 a_1, a_2, \dots, a_{2n} 。

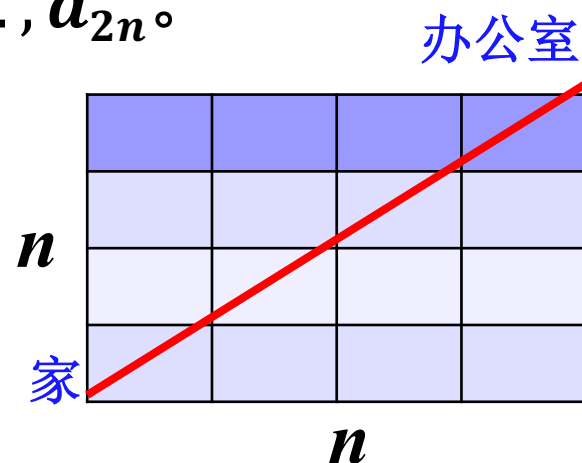
显然, B_n 为所有满足 $a_1 + \dots + a_k \geq 0$,

$k=1, \dots, 2n$, 的路径条数,

否则将有路径穿越对角线。

因此, $B_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$,

得满足条件的道路总数为 $\frac{2}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$ 。



Catalan数的递推关系

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$$

两式相除得 $\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1}$

因此, Catalan序列递推关系和初始条件为:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad C_0 = 1$$

拟Catalan数（一般表达式）

定义一个新的数列：

$$C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*, \dots$$

其中, $C_n^* = n! C_{n-1}$, $n=1, 2, \dots, n, \dots$

$$\begin{aligned} C_n^* &= n! C_{n-1} \\ &= n! \cdot \frac{1}{(n-1)+1} \binom{2(n-1)}{n-1} \\ &= (n-1)! \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

拟-Catalan数（递推关系和初值）

- 将Catalan数的递推关系代入得到拟Catalan数的递推关系：

$$\begin{aligned} C_n^* &= n! C_{n-1} = n! \times \frac{4(n-1)-2}{(n-1)+1} C_{n-2} = n! \times \frac{4n-6}{n} C_{n-2} \\ &= (4n-6)[(n-1)! C_{n-2}] = (4n-6)C_{n-1}^* \end{aligned}$$

因此，拟-Catalan数的递推关系和初值如下：

$$\begin{aligned} C_n^* &= (4n-6)C_{n-1}^* & (n \geq 2) \\ C_1^* &= 1 \end{aligned}$$

例:令 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 为 n 个数, 这些数的乘法格式是指进行 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 的乘法的方案, 求乘法格式的数目。

解: 显然, 一个乘法格式需要两数间的 $n-1$ 次乘法, 其中两个数或者是 a_1, a_2, \dots, a_n 中的之一, 或者是他们的部分乘积。

令 h_n 表示 n 个数的乘法格式的数目。

则有 $h_1=1$ 。

$h_2=2$, 两个乘法格式为 $(a_1 \times a_2)$ 和 $(a_2 \times a_1)$ 。

例:令 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个数, 这些数的乘法格式是指进行 a_1, a_2, \dots, a_n 的乘法的方案, 求乘法格式的数目。

解(续): $h_3 = 12$, 其中3个数的乘法格式为:

$(a_1 \times (a_2 \times a_3)), (a_1 \times (a_3 \times a_2)), ((a_1 \times a_3) \times a_2),$
 $((a_3 \times a_1) \times a_2), ((a_1 \times a_2) \times a_3), (a_3 \times (a_1 \times a_2)),$
 $(a_2 \times (a_1 \times a_3)), (a_2 \times (a_3 \times a_1)), ((a_2 \times a_3) \times a_1),$
 $(a_3 \times (a_2 \times a_1)), ((a_2 \times a_1) \times a_3), ((a_3 \times a_2) \times a_1)$

观察到:

- (1) 3个数的乘法格式都需要两个乘号, 每个乘号对应一组括号因子
- (2) 每种乘法方案考虑了数字的顺序: 对 a_1, a_2, \dots, a_n 的每个排列插入 $n-1$ 组括号, 使得每一对括号都指定两个因子

例:令 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个数, 这些数的乘法格式是指进行 a_1, a_2, \dots, a_n 的乘法的方案, 求乘法格式的数目。

解(续) (递归定义):

任取 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 的一种乘法格式, 它有 $n-2$ 次乘法和 $n-2$ 组括号。两种方法构造 a_1, a_2, \dots, a_n 的的乘法格式:

- (1) 将 a_n 插入到 $n-2$ 个乘法运算中任一个 \times 号的两个因子中的任一个因子的任一侧, 一共是 $(n-2) \cdot 2 \cdot 2 = 4(n-2)$ 种方案;
- (2) 把该乘法格式作为一个因子, 把 a_n 插入到因子的任一侧, 一共2种方案。

$$\begin{array}{ccc}
 & (a_3 \times a_1) \times a_2 & \\
 a_1 \times a_2 \rightarrow & (a_1 \times a_3) \times a_2 & a_3 \times (a_1 \times a_2) \\
 & a_1 \times (a_3 \times a_2) & (a_1 \times a_2) \times a_3 \\
 & a_1 \times (a_2 \times a_3) &
 \end{array}$$

例:令 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个数, 这些数的乘法格式是指进行 a_1, a_2, \dots, a_n 的乘法的方案, 求乘法格式的数目。

解(续) (递归定义):

任取 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 的一种乘法格式, 它有 $n-2$ 次乘法和 $n-2$ 组括号。两种方法构造 a_1, a_2, \dots, a_n 的乘法格式:

- (1) 将 a_n 插入到 $n-2$ 个乘法运算中任一个 \times 号的两个因子中的任一个因子的任一侧, 一共是 $(n-2) \cdot 2 \cdot 2 = 4(n-2)$ 种方案;
- (2) 把该乘法格式作为一个因子, 把 a_n 插入到因子的任一侧, 一共2种方案。

因此, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 的每个乘法格式产生 $4(n-2)+2 = 4n-6$ 个 a_1, a_2, \dots, a_n 的乘法格式, 得 $h_n = (4n-6)h_{n-1}, n \geq 2$ 。

由初始值 $h_1=1$ 得 $h_n = C_n^* = (n-1)! \binom{2n-2}{n-1}$

总结

- Catalan数列是序列 $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$, 其中 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, $n=0,1,2,\dots$ 是第 n 个Catalan数。

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0$$

定理8.1.1. 考虑由 n 个+1和 n 个-1构成的 $2n$ 项 a_1, a_2, \dots, a_{2n} , 其部分和满足: $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

- 拟Catalan数列是序列 $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*, \dots$

其中, $C_n^* = n! C_{n-1}$, $n=1, 2, \dots, n, \dots$

$$C_n^* = (4n-6)C_{n-1}^*, n \geq 2, C_1^* = 1$$