定理3.1.1 如果把 $n+1$ 个物体放进 n 个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或者更多的物体。

定理3.2.1 令 q_1，q_2，…，q_n 为正整数。如果将

$$q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$$

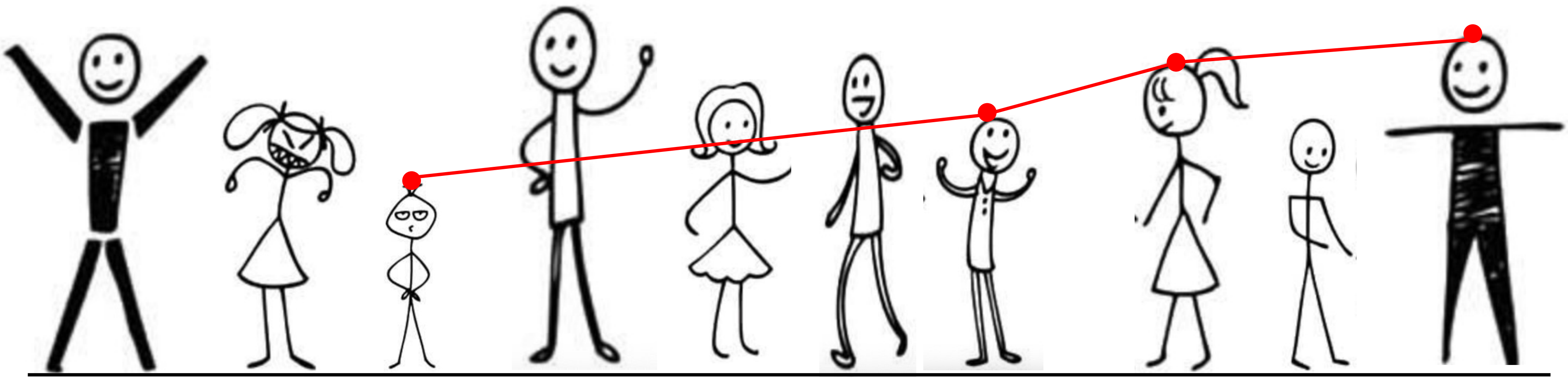
个物体被放进 n 个盒子内，那么，

- 或者第1个盒子至少含有 q_1 个物体，
- 或者第2个盒子至少含有 q_2 个物体，…，
- 或者第 n 个盒子至少含有 q_n 个物体。

设 m 和 n 都是正整数。如果 m 个物体放入 n 个盒子，则至少有一个盒子含有 $\lceil m/n \rceil$ 个或更多的物体。

例：设n^2+1个人并肩排成一条直线，是否一定能选出$n+1$个人向前迈出一步，使得从左至右他们的身高是递增的或递减的。

$n=3$



例：证明每个由 n^2+1个实数构成的序列$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ 或者含有长度为 $n+1$的递增序列，或者含有长度为$n+1$ 的递减子序列。

- 子序列：

设 $b_1, b_2, \ldots, b_n$是一个序列，则 $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ 是一个子序列，其中 $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$。

- 递增子序列：若子序列 $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ 满足

  （非递减） $b_{i_1} \le b_{i_2} \le \ldots \le b_{i_k}$
- 递减子序列：若子序列$b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ 满足

  （非递增） $b_{i_1} \ge b_{i_2} \ge \ldots \ge b_{i_k}$

例：证明每个由 n^2+1个实数构成的序列$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$或者含有长度为 $n+1$的递增序列，或者含有长度为$n+1$的递减子序列。

证：假设不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列，只需构造一个长度为 $n+1$的递减子序列。

设 m_k 是以 a_k 为起始的最长递增子序列长度，$k=1, 2, \ldots,$ n^2+1，则对$\forall k$有 $1\leq m_k\leq n$。

对序列 $m_1, m_2, \ldots, m_{n^2+1}$，运用鸽巢原理加强形式，一定存在 $\lceil(n^2+1)/n\rceil = n+1$个$m_i$相等。

设 $m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}}$，其中 $1\leq k_1< k_2<\ldots< k_{n+1}\leq n^2+1$。

下面证明$a_{k_1}, a_{k_2},\ldots, a_{k_{n+1}}$是长度为$n+1$的递减序列。

例：证明每个由 n^2+1个实数构成的序列$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$或者含有长度为 $n+1$的递增序列，或者含有长度为$n+1$的递减子序列。

证(续)：

下面证明$a_{k_1}, a_{k_2},\ldots, a_{k_{n+1}}$是长度为$n+1$的递减序列。

（反证法）假设存在k_i, k_{i+1}, 使得$a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$,

把a_{k_i}加到以$a_{k_{i+1}}$开始的最长递增子序列，则构成了以 a_{k_i}开始的递增子序列，得$m_{k_i} > m_{k_{i+1}}$, 与 $m_{k_i} = m_{k_{i+1}}$矛盾。

因此$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \ldots \geq a_{k_{n+1}}$构成了一条长度为$n+1$的递减序列。

证毕。

思考题. 设军乐队的mn个人按以下方式站成 m行 n 列的方队：在每一行中每个人都比他或她左边的人高。

假设指挥将每一列的人按身高从前至后增加的顺序重排。证明：各行仍然 是按身高从左至右增加的序列排列。

前

左

23	24	37	40	48
2	7	8	44	46
5	6	38	46	60

2	6	8	40	46
5	7	37	44	48
23	24	38	46	60

思考题. 设军乐队的mn个人按以下方式站成 m行 n 列的方队：在每一行中每个人都比他或她左边的人高。

假设指挥将每一列的人按身高从前至后增加的顺序重排。证明：各行仍然是按身高从左至右增加的序列排列。

证明: 假设 mn 个人构成的方阵记为矩阵 $A=(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为位于 第 i 行第 j 列的人的身高，则对任意第 i 行，

$$a_{i1} < a_{i2} < \ldots < a_{in} .$$

假设重排后的方阵记为 $B=(b_{ij})$，满足则对任意第 j 列，

$$b_{1j} \le b_{2j} \le \ldots \le b_{mj} .$$

只需对任意第 i 行的第 j-1与第 j 列元素 $b_{i,j-1}$与b_{ij}，证明

$$b_{i,j-1} < b_{ij}。$$

思考题. 设军乐队的mn个人按以下方式站成 m行 n 列的方队：在每一行中每个人都比他或她左边的人高。

假设指挥将每一列的人按身高从前至后增加的顺序重排。证明：各行仍然是按身高从左至右增加的序列排列。

b_{11}	b_{12}	…	$b_{1,j-1}$	$b_{1,j}$	$b_{1,j+1}$	…	$b_{1,n}$
b_{21}	b_{22}	…	$b_{2,j-1}$	$b_{2,j}$	$b_{2,j+1}$	…	$b_{2,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…
$b_{i-1,1}$	$b_{i-1,2}$	…	$b_{i-1,j-1}$	$b_{i-1,j}$	$b_{i-1,j+1}$	…	$b_{i-1,n}$
b_{i1}	b_{i2}	…	$b_{i,j-1}$	$b_{i,j}$	$b_{i,j+1}$	…	$b_{i,n}$
$b_{i+1,1}$	$b_{i+1,2}$	…	$b_{i+1,j-1}$	$b_{i+1,j}$	$b_{i+1,j+1}$	…	$b_{i+1,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…
b_{m1}	b_{m2}	…	$b_{m,j-1}$	$b_{m,j}$	$b_{m,j+1}$	…	$b_{m,n}$

假设 $b_{i,j-1} \geq b_{ij}$.

思考题. 设军乐队的mn个人按以下方式站成 m行 n 列的方队：在每一行中每个人都比他或她左边的人高。

假设指挥将每一列的人按身高从前至后增加的顺序重排。证明：各行仍然是按身高从左至右增加的序列排列。

b_{11}	b_{12}	…	$b_{1,j-1}$	$b_{1,j}$	$b_{1,j+1}$	…	$b_{1,n}$
b_{21}	b_{22}	…	$b_{2,j-1}$	$b_{2,j}$	$b_{2,j+1}$	…	$b_{2,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…
$b_{i-1,1}$	$b_{i-1,2}$	…	$b_{i-1,j-1}$	$b_{i-1,j}$	$b_{i-1,j+1}$	…	$b_{i-1,n}$
b_{i1}	b_{i2}	…	$b_{i,j-1} \geq$	$b_{i,j}$	$b_{i,j+1}$	…	$b_{i,n}$
$b_{i+1,1}$	$b_{i+1,2}$	…	$b_{i+1,j-1}$	$b_{i+1,j}$	$b_{i+1,j+1}$	…	$b_{i+1,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…
b_{m1}	b_{m2}	…	$b_{m,j-1}$	$b_{m,j}$	$b_{m,j+1}$	…	$b_{m,n}$

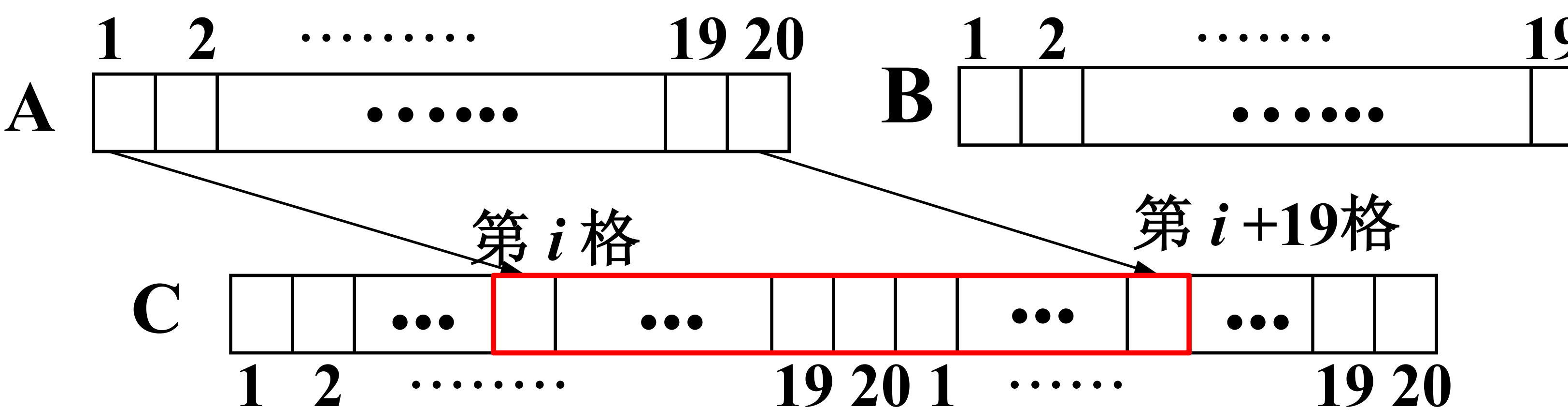
假设 $b_{i,j-1} \geq b_{ij}$.

因此，在A中只有 i-1个人 $b_{k,j-1}$ $(1 \leq k \leq i-1)$ 可能在 i 个人 $b_{k,j}$ $(1 \leq k \leq i)$ 的相邻左侧，与鸽巢原理矛盾，因此，假设不成立。

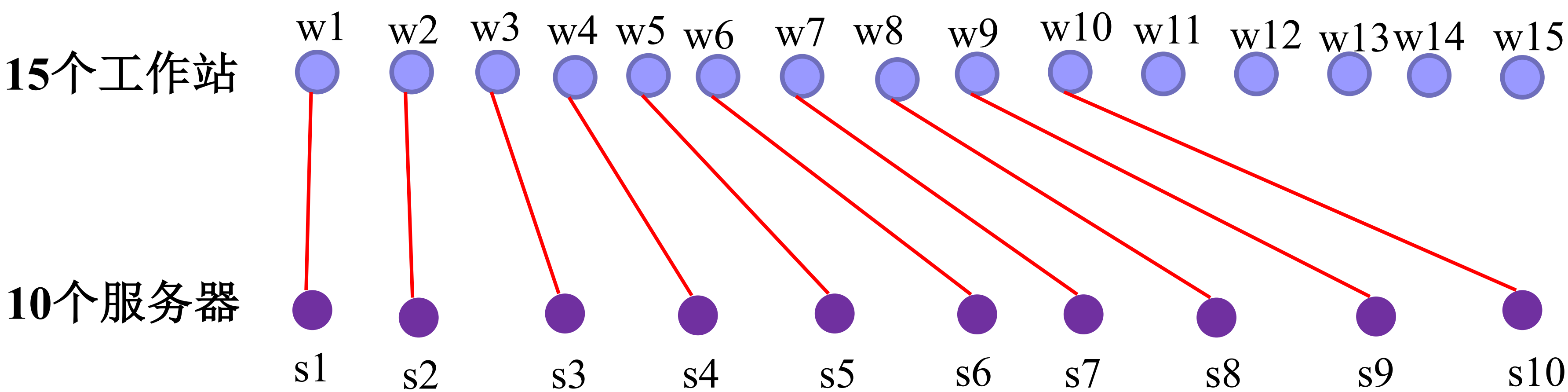
思考：设$A= a_1a_2\cdots a_{20}$是 10个 0 和10个 1 组成的 20 位 2 进制数。$B=b_1b_2\cdots b_{20}$是 任意的 20位 2 进制数。

令 $C = b_1b_2\cdots b_{20}\, b_1b_2\cdots b_{20} = c_1c_2\cdots c_{40}$。

则存在某个i, $1\le i \le 21$,使得 $c_i\, c_{i+1}\cdots c_{i+19}$ 与 $a_1a_2\cdots a_{20}$至少有10位对应数字相同。



思考：假设有15台工作站和10台服务器。可以用一条电缆直接把工作站连接到服务器。同一时刻只有一条到服务器的直接连接是有效的。如果想保证在任何时刻任何一组不超过10台工作站可以通过直接连接同时访问不同的服务器，所需的最少直接连线的数目是多少？



第三章 鸽巢原理

3.1鸽巢原理的简单形式

3.2 鸽巢原理的加强形式

3.3 Ramsey定理

Ramsey定理：一个简单形式

通俗实例： 在**6**个人中，

- 或者有**3**个人，他们中每两个人都互相认识；
- 或者有**3**个人，他们中的每两个人都彼此不认识。

Frank Plumpton Ramsey (1903-1930)
1930年发表“On a Problem in Formal Logic”证明了R(3,3)=6

- 传播很广的数学竞赛题，曾刊登在《美国数学月刊》上（**1958**年**6/7**月号)。
- **Ramsey**定理是组合论中一个重要的存在性定理，推动了组合论等数理科学的发展，形成了一个方向。
- 在计算机科学中的应用
  - 姚其智利用**Ramsey**定理证明了在信息检索中，二分搜索是最好的检索策略。
  - **Ramsey** 数对分组交换网络设计中通信设施数量选择等问题具有指导意义。

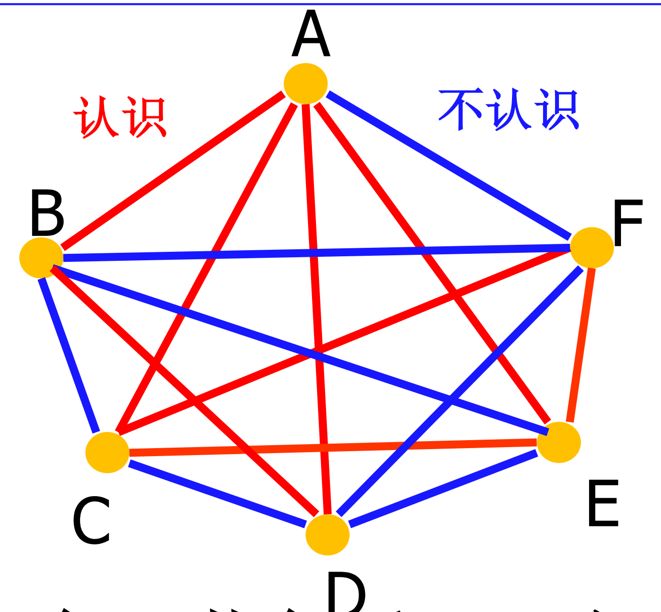
Ramsey定理：一个简单形式

通俗实例： 在6个人中，

- 或者有3个人，他们中每两个人都互相认识；
- 或者有3个人，他们中的每两个人都彼此不认识。

图形式：(6个顶点的完全图K_6)

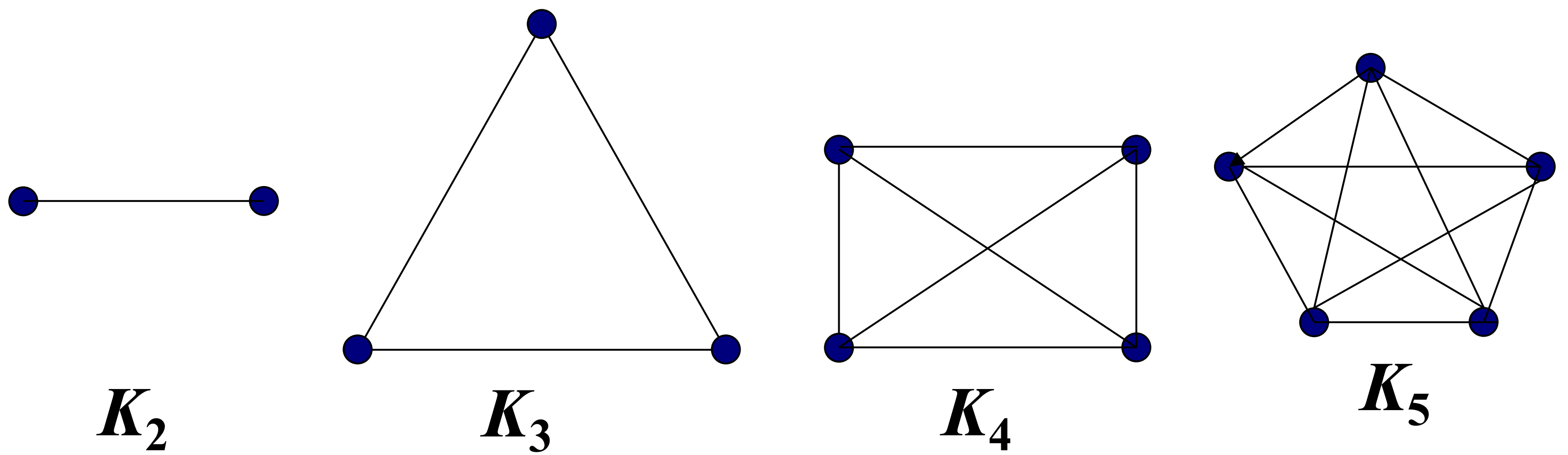
- 顶点：每个人
  边：两个人的认识关系
- 边着色：红边表示认识，
  蓝边表示不认识



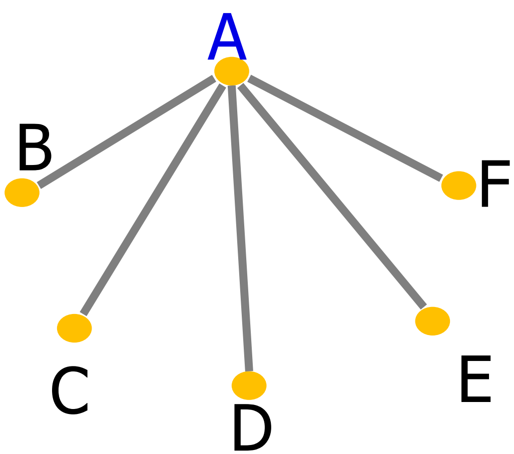
问题转化为: 给图K_6 的边任意着红色、蓝色后，一定存在一个红色三角形或蓝色三角形

n阶完全图

用K_n表示平面上没有3点共线的n个顶点构成的一个完全图 (n阶完全图)。



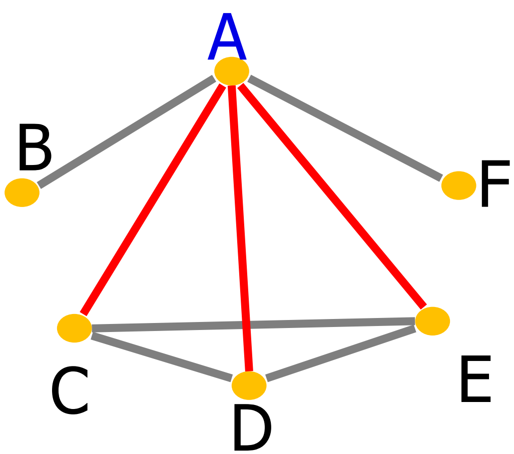
证明：给图K_6的边任意着红色、蓝色，一定存在一个红色 K_3或 蓝色 K_3，记为$K_6 \rightarrow K_3, K_3$



- ✓ K_6中任意一个结点A连接了5条边，由鸽巢原理的加强形式，至少有$\lceil 5/2 \rceil = 3$ 条边是同一个颜色；

假设以上3条边均为红色，且这三条红边连向点C, D, E。

证明：给图K_6的边任意着红色、蓝色，一定存在一个红色 K_3或 蓝色 K_3，记为$K_6 \to K_3, K_3$



- ✓ K_6中任意一个结点A连接了5条边，由鸽巢原理的加强形式，至少有

$\lceil 5/2 \rceil = 3$ 条边是同一个颜色；

假设以上3条边均为红色，且这三条红边连向点C, D, E。

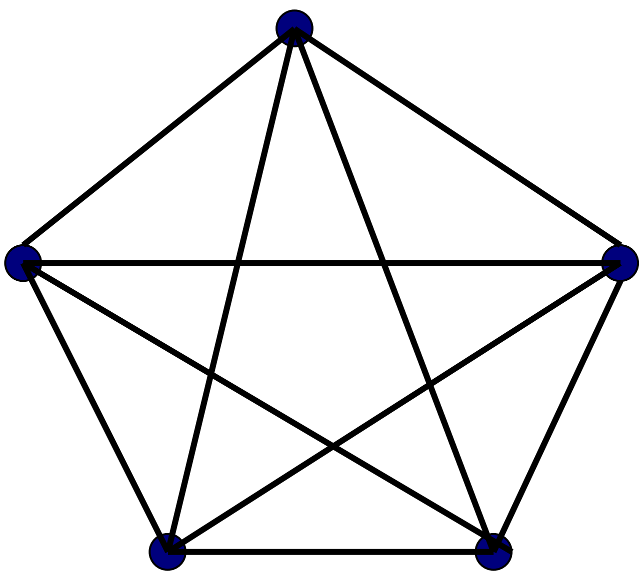
(1) 若C, D, E两两相连的边中存在一条红边，则与上述三条红边构成红色 K_3；

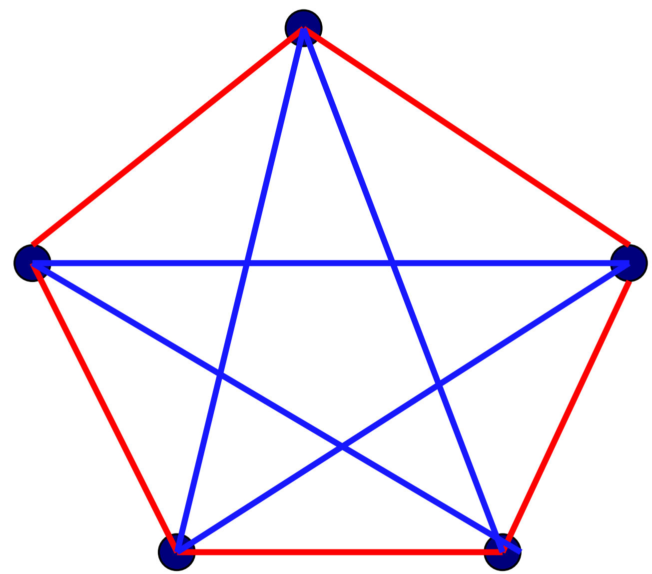
(2) 否则，C, D, E 两两相连的边均为蓝色，构成蓝色K_3。

证毕。

- 结论：$K_6 \to K_3, K_3$
  - 当$n>6$时，$K_n \to K_3, K_3$一定成立
  - $K_5 \to K_3, K_3$是否成立？不成立
  - 使得 $K_n \to K_3, K_3$ 成立的最小正整数 $n=6$

Ramsey数
$r(3, 3)=6$





定理 3.3.1 (Ramsey定理) 如果$m \geq 2$及$n \geq 2$是两个整数，则一定存在正整数 p，使得

$$K_p \to K_m，\ K_n$$

当把 K_p 的边着成红色或蓝色时，
- 或者存在一个红色 K_m，
- 或者存在一个蓝色 K_n。

定义 (Ramsey数) Ramsey数$r(m, n)$ 是使 $K_p \to K_m, K_n$ 成立的最小整数 p。

- $r(m, n)$一定存在 ($m \geq 2$及$n \geq 2$是整数)
- $r(m, n) = r(n, m)$

定理 3.3.1 (Ramsey定理) 如果$m \ge 2$及$n \ge 2$是两个整数，则一定存在正整数 p，使得

$$K_p \to K_m, \; K_n$$

平凡的Ramsey数：对于 整数 $m, n \ge 2$,

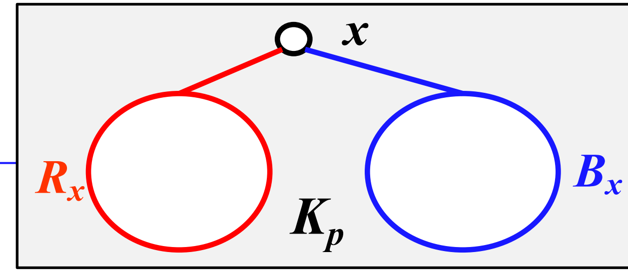
- $r(2, n) = n$
- $r(m, 2) = m$

或者存在一条边是红色，
或者所有边都是蓝色

定理3.3.1 可通过对m, n进行双重归纳证明。

定理 3.3.1 (Ramsey定理) 如果$m \ge 2$及$n \ge 2$是两个整数，则一定存在正整数 p，使得

$$K_p \to K_m,\ K_n$$



证明： 对m, n 进行如下双重归纳：

(1) 易证：当 m=2 时, $r(2, n)=n$; 当n=2时, $r(m, 2)=m$。

(2) 假设当 $m \ge 3, n \ge 3$ 时，$r(m\text{-}1, n)$与$r(m, n\text{-}1)$存在，

设 $p = r(m\text{-}1, n) + r(m, n\text{-}1)$, 下面证明

$$K_p \to K_m,\ K_n$$

(3) 假设 K_p 的边已用一种方式着成红色或蓝色。

考虑 K_p中一个点 x, 设 R_x 为通过红边与 x 相连的点的集合，B_x 为通过蓝边与 x 相连的点的集合，

则 $|R_x| + |B_x| = p\text{-}1 = r(m\text{-}1, n)+r(m, n\text{-}1)\text{-}1$,

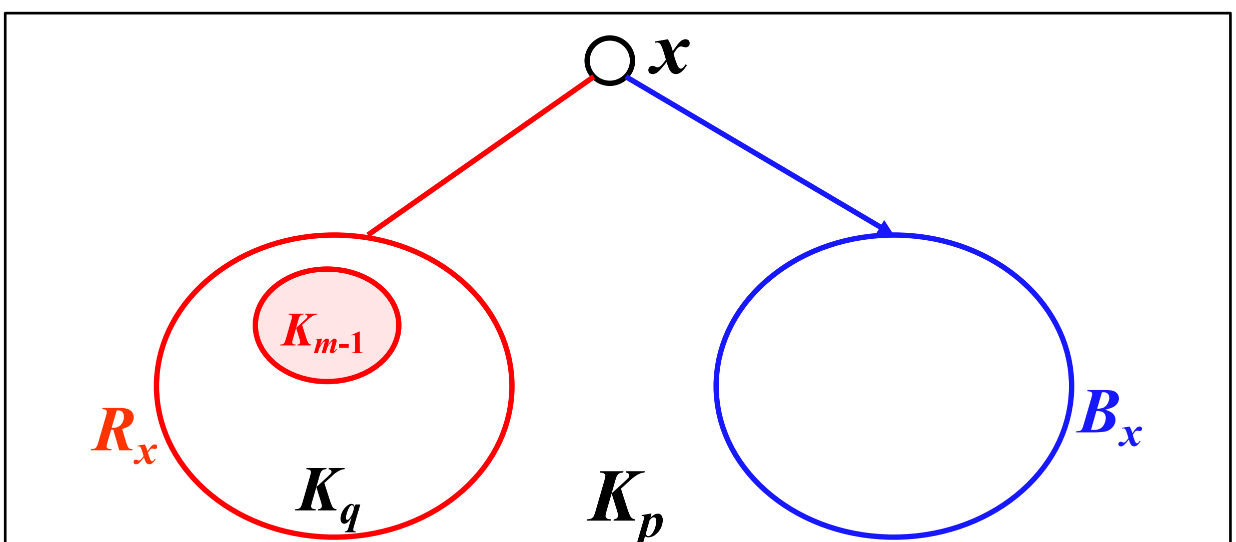
得： $|R_x| \ge r(m\text{-}1, n)$ 或者 $|B_x| \ge r(m, n\text{-}1)$。

证明（续）： $|R_x| \geq r(m\text{-}1, n)$ 或者 $|B_x| \geq r(m, n\text{-}1)$

(1) 当$|R_x| \geq r(m\text{-}1, n)$ 成立时，令$q = |R_x|$, 考虑 K_q，

则有$K_q \rightarrow K_{m\text{-}1}, K_n$, 即一定存在一个红色 $K_{m\text{-}1}$ 或蓝色 K_n。

a) 若存在一个红色 $K_{m\text{-}1}$，

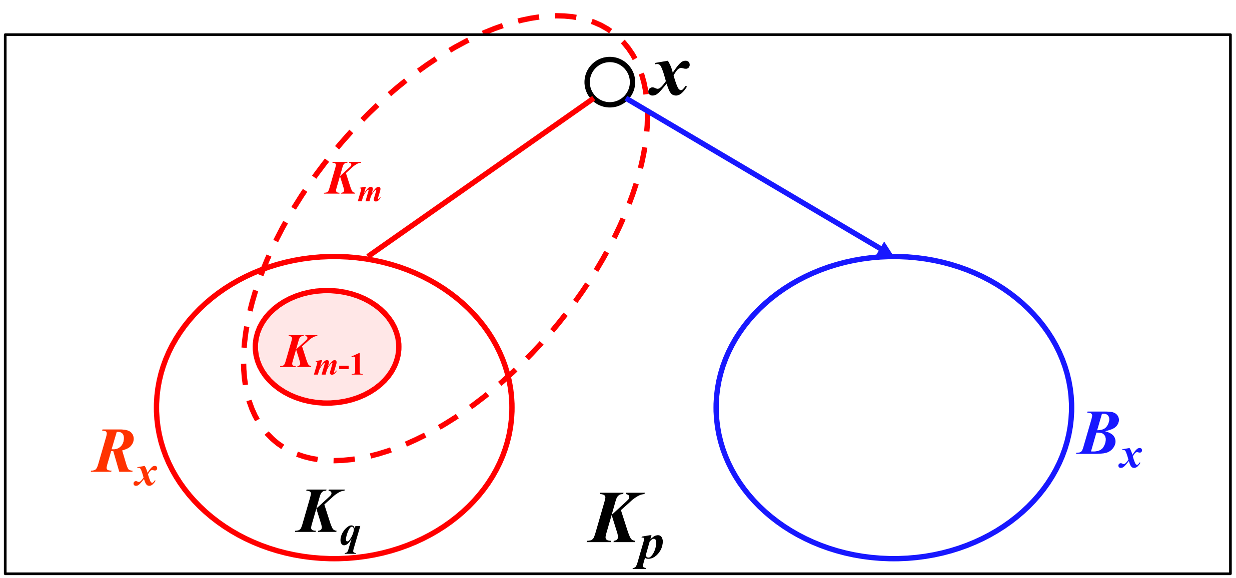


证明（续）：$|R_x| \geq r(m\text{-}1, n)$ 或者 $|B_x| \geq r(m, n\text{-}1)$

(1) 当$|R_x| \geq r(m\text{-}1, n)$ 成立时，令$q = |R_x|$, 考虑 K_q，

则有$K_q \rightarrow K_{m\text{-}1}, K_n$, 即一定存在一个红色 $K_{m\text{-}1}$ 或蓝色 K_n。

a) 若存在一个红色 $K_{m\text{-}1}$，



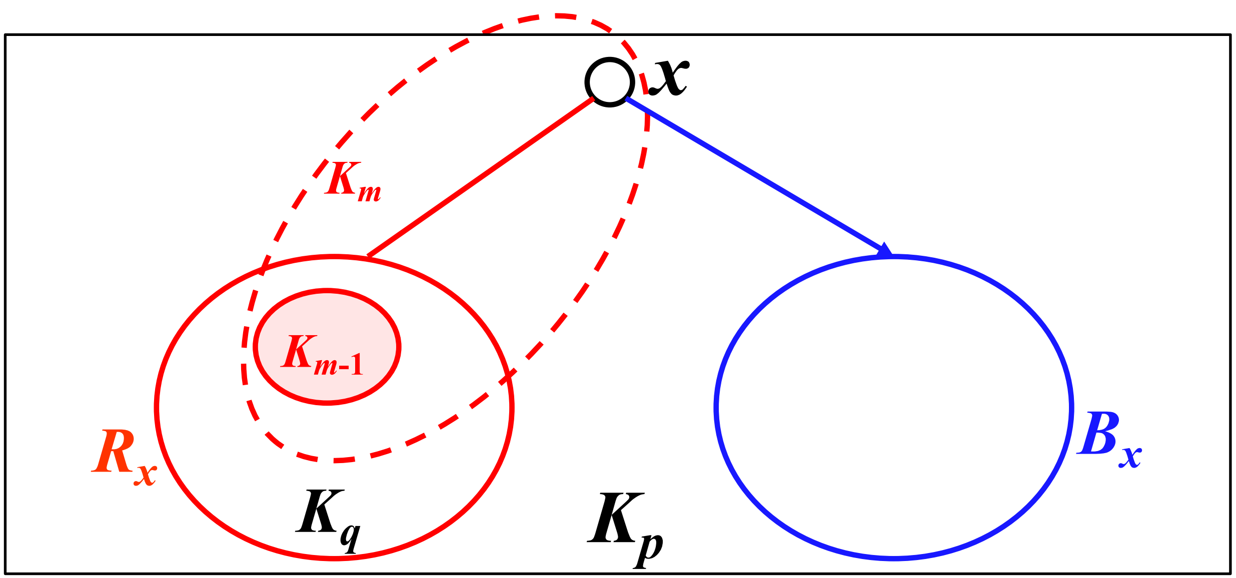
证明（续）： $|R_x| \ge r(m\text{-}1, n)$ 或者 $|B_x| \ge r(m, n\text{-}1)$

(1) 当 $|R_x| \ge r(m\text{-}1, n)$ 成立时，令 $q = |R_x|$, 考虑 K_q,

则有 $K_q \rightarrow K_{m\text{-}1}, K_n$, 即一定存在一个红色 $K_{m\text{-}1}$ 或蓝色 K_n。

a) 若存在一个红色 $K_{m\text{-}1}$，则增加点 x 后，构成红色 K_m，

此时有 $K_p \rightarrow K_m, K_n$。



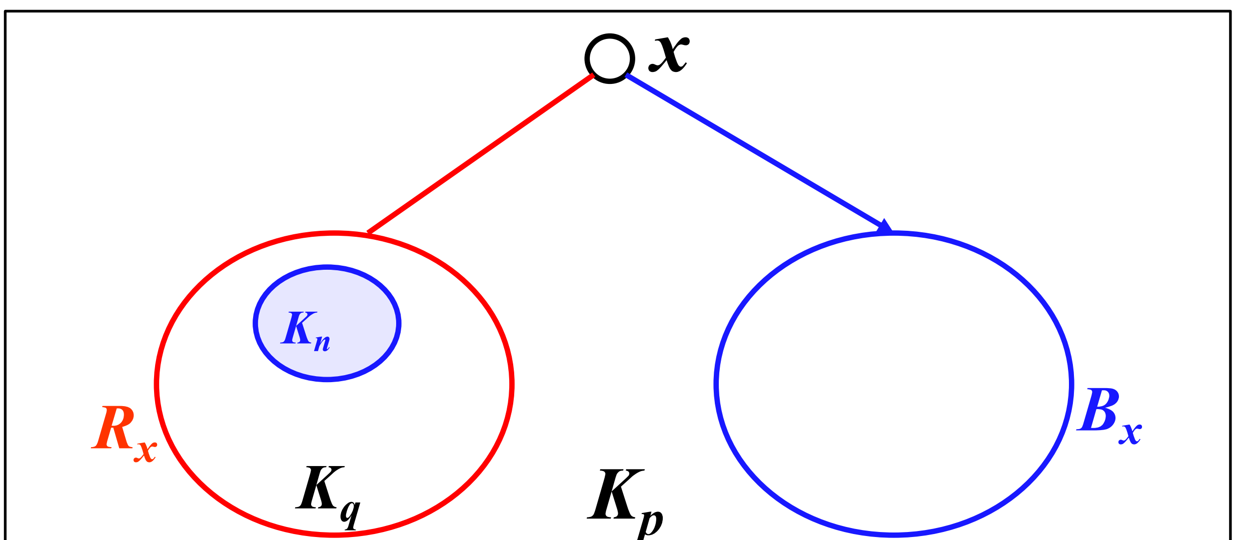
证明（续）： $|R_x| \geq r(m-1, n)$ 或者 $|B_x| \geq r(m, n-1)$

(1) 当 $|R_x| \geq r(m-1, n)$ 成立时，令 $q = |R_x|$, 考虑 K_q,

则有 $K_q \rightarrow K_{m-1}, K_n$, 即一定存在一个红色 K_{m-1} 或蓝色 K_n。

a) 若存在一个红色 K_{m-1}，则增加点 x 后，构成红色 K_m，此时有 $K_p \rightarrow K_m, K_n$。

b) 若存在一个蓝色 K_n, $K_p \rightarrow K_m, K_n$ 成立。



证明（续）： $|R_x| \geq r(m-1, n)$ 或者 $|B_x| \geq r(m, n-1)$

(1) 当$|R_x| \geq r(m-1, n)$ 成立时，令$q = |R_x|$, 考虑 K_q,

则有$K_q \to K_{m-1}, K_n$, 即一定存在一个红色 K_{m-1} 或蓝色 K_n。

a) 若存在一个红色 K_{m-1}，则增加点 x 后，构成红色K_m,

此时有 $K_p \to K_m, K_n$。

b) 若存在一个蓝色 K_n, $K_p \to K_m, K_n$ 成立。

(2) 同理可证当 $|B_x| \geq r(m, n-1)$ 时， $K_p \to K_m, K_n$ 成立。

由归纳法得，对于所有整数$m \geq 2$及$n \geq 2$, 存在正整数 p,

使得 $K_p \to K_m, K_n$ 成立。

证毕。

定理 3.3.1 (Ramsey定理) 如果$m \geq 2$及$n \geq 2$是两个整数，则存在正整数 p，使得

$$K_p \to K_m,\ K_n$$

归纳证明中：

设 $p = r(m\text{-}1, n) + r(m, n\text{-}1)$，从而证明

$$K_p \to K_m,\ K_n$$

推论：$r(m, n) \leq r(m\text{-}1, n) + r(m, n\text{-}1)$，$m, n \geq 3$。

例：试证 $r(3, 4) \leq 10$，即把 K_{10} 的边任意着红色或蓝色，则一定或者存在一个红色K_3，或者存在一个蓝色K_4。

$r(3, 4) \leq r(2, 4) + r(3, 3) = 4+6=10$　　$r(3, 4) \leq 9$?

Ramsey数r(m, n)

m,n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40–43
4	1	4	9	18	25	35–41	49–61	56–84	73–115	92–149
5	1	5	14	25	43–49	58–87	80–143	101–216	125–316	143–442
6	1	6	18	35–41	58–87	102–165	113–298	127–495	169–780	179–1171
7	1	7	23	49–61	80–143	113–298	205–540	216–1031	233–1713	289–2826
8	1	8	28	56–84	101–216	127–495	216–1031	282–1870	317–3583	317-6090
9	1	9	36	73–115	125–316	169–780	233–1713	317–3583	565–6588	580–12677
10	1	10	40–43	92–149	143–442	179–1171	289–2826	317-6090	580–12677	798–23556

Ramsey定理推广

- **Ramsey**定理可推广到任意多种颜色的情况。

l 种颜色：

如果 $n_1, n_2, \ldots, n_l$ 都是大于或等于 2 的整数，则一定存在正整数 p，使得

$$K_p \to K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_l}。$$

满足以上条件的最小整数 p 称为**Ramsey**数

$$r(n_1, n_2。, \ldots, n_l)。$$

例如：$K_{17} \to K_3, K_3, K_3$

例: 试证 $r(3, 3, 3) \le 17$

证：设有完全图K_{17}, 给其边任意着红色、蓝色或绿色。

对任意一个节点A, A连接了16条边。

由鸽巢原理的加强形式知，16条边至少存在$\lceil 16/3 \rceil = 6$条边同色，假设为红色，且这6条红边连向点B, C, D, E, F, G。

考虑由结点B, C, D, E, F, G构成的完全图 K_6。

(1) 若K_6中有一条边为红色，

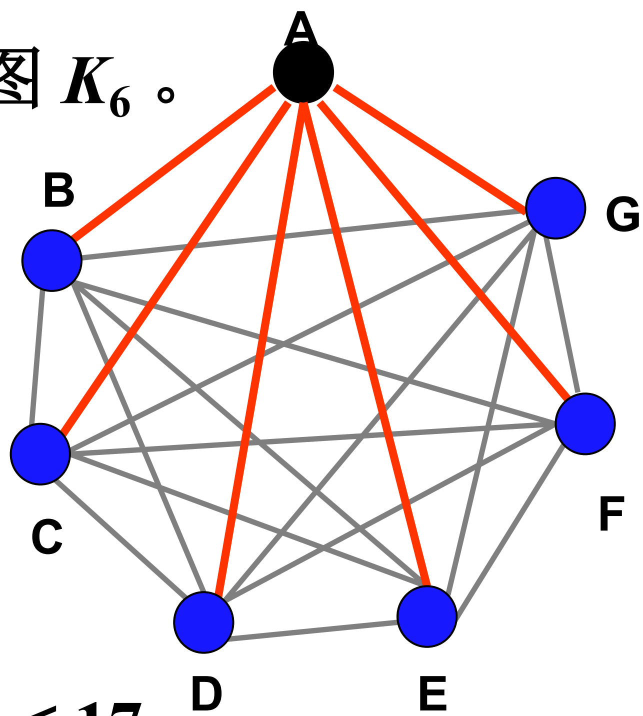
则K_{17}存在一个红K_3;

(2) 若K_6中无红边，

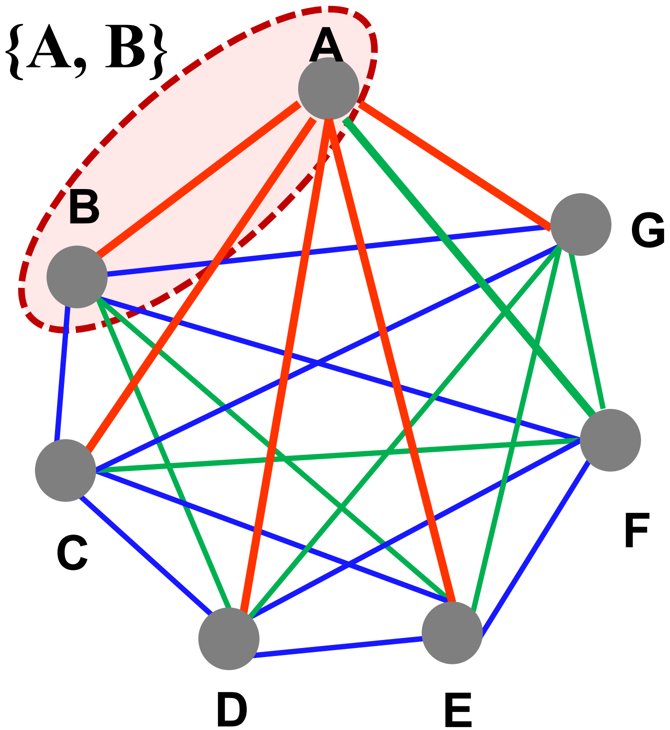
则 K_6仅用蓝黄两色着色。

由$K_6 \rightarrow K_3, K_3$, 得 K_{17}一定存在蓝色或绿色K_3。

综上，得$K_{17} \rightarrow K_3, K_3, K_3$, 从而$R(3, 3, 3) \le 17$.



Ramsey定理更一般形式



- 对每条边进行着色
- 一条边是两个顶点的子集

- 扩展：
  - 把点对扩展至 t 个元素的子集（ $t \geq 2$ ）
  - 对每个 t 个元素的子集指定颜色

Ramsey定理更一般形式

给定整数 $t \geq 2$ 及整数 $q_1, q_2, \ldots, q_k \geq t$，则存在一个整数 p，使得：如果将 p元素集合中每一个 t 元素子集指定为 k 种颜色$c_1, c_2, \ldots, c_k$中一种，那么

- 或者存在 q_1 个元素，其所有 t 子集被指定成颜色c_1，
- …… ….,
- 或者存在q_k个元素，其所有 t 子集被指定成颜色c_k。

满足结论的最小整数 p 为Ramsey数 $r_t(q_1, q_2, \ldots, q_k)$

令 K_n^t表示 n个元素集合中所有 t 个元素的子集的集合。

给定整数 $t \geq 2$ 及整数$q_1, q_2, \ldots, q_k \geq t$，存在一个整数 p, 使得$K_p^t \rightarrow K_{q_1}^t, K_{q_2}^t, \ldots, K_{q_k}^t$。

Ramsey定理是鸽巢原理的加强形式的扩展

给定整数 $t \geq 2$ 及整数$q_1, q_2, \ldots, q_k \geq t$，存在一个整数 p，使得$K_p^t \to K_{q_1}^t, K_{q_2}^t, \ldots, K_{q_k}^t$

t=1时，定理描述为：

存在一个整数 p，使得：如果 p 元素集合的每个元素指定为 k 种颜色 $c_1, c_2, \ldots, c_k$中一种，那么

- 或者存在 q_1个元素被指定为颜色c_1, …,
- 或者存在 q_k个元素被指定为颜色c_k。

由鸽巢原理的加强形式，

$$r_1(q_1, q_2, \ldots, q_k) = q_1+q_2+\ldots+q_k - k+1$$

Ramsey定理的应用

- 信息检索
- 分组交换网络设计

A. C. Yao. Should Tables be sorted? J.acm 28(1981), 615-628

Should Tables Be Sorted? */

Andrew Chi-Chih Yao

Computer Science Department
Stanford University
Stanford, California 94305

Abstract.

We examine optimality questions in the following information retrieval problem: Given a set S of n keys, store them so that queries of the form "Is $x \in S$?" can be answered quickly. It is shown that, in a rather general model including all the commonly-used schemes, $\lceil \lg(n+1) \rceil$ probes to the table are needed in the worst case, provided the key space is sufficiently large. The effects of smaller key space and arbitrary encoding are also explored.

Key Words and Phrases: Information retrieval, lower bound, optimality, query, Ramsey's theorem, search strategy, sorted table.

CR Categories: 3.74, 4.34, 5.25, 5.31.

*/ This research was supported in part by National Science Foundation under grant MCS-77-05313.