

第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列

7.2 生成函数

7.3 指数生成函数

7.4 求解线性齐次递推关系

7.5 非齐次递推关系

7.6 一个几何例子

回顾：斐波那契（Fibonacci）数列

设有数列 $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ 。如果

$f_0=0, f_1=1$, 且满足递推关系 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$

称该数列为斐波那契（Fibonacci）数列，这个数列的项称为斐波那契数。

定理7.1.1 斐波那契数 f_n 满足公式

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, n \geq 0$$

求解常系数线性齐次递推式

线性齐次递推关系

令 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 是一个数列。若存在量 a_1, a_2, \dots, a_k ($a_k \neq 0$) 和量 b_n (每个量是常数或依赖于 n 的数) 使得:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_{k-1} h_{n-k+1} + a_k h_{n-k} + b_n \quad (n \geq k)$$

则称该数列满足 k 阶线性递推关系。

若 $b_n = 0$, 则称该数列是 k 阶线性齐次递推关系。

若 a_1, a_2, \dots, a_k 都为常数, 则称该数列是 k 阶常系数线性递推关系。

例: 错位排列数列 $D_0, D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ 满足递推关系:

$$D_n = (n-1)D_{(n-1)} + (n-1)D_{(n-2)} \quad (2 \text{ 阶线性齐次递推关系})$$

$$D_n = nD_{(n-1)} + (-1)^n \quad (1 \text{ 阶线性递推关系})$$

线性齐次递推关系

令 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 是一个数列。若存在量 a_1, a_2, \dots, a_k ($a_k \neq 0$) 和量 b_n (每个量是常数或依赖于 n 的数) 使得:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_{k-1} h_{n-k+1} + a_k h_{n-k} + b_n \quad (n \geq k)$$

则称该数列满足 k 阶线性递推关系。

若 $b_n = 0$, 则称该数列是 k 阶线性齐次递推关系。

若 a_1, a_2, \dots, a_k 都为常数, 则称该数列是 k 阶常系数线性递推关系。

例: 阶乘数列 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$, (其中 $h_n = n!$) 满足

$$h_n = n h_{n-1} \quad (1 \text{ 阶线性齐次递推关系})$$

线性齐次递推关系

令 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 是一个数列。若存在量 a_1, a_2, \dots, a_k ($a_k \neq 0$) 和量 b_n (每个量是常数或依赖于 n 的数) 使得:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_{k-1} h_{n-k+1} + a_k h_{n-k} + b_n \quad (n \geq k)$$

则称该数列满足 k 阶线性递推关系。

若 $b_n = 0$, 则称该数列是 k 阶线性齐次递推关系。

若 a_1, a_2, \dots, a_k 都为常数, 则称该数列是 k 阶常系数线性递推关系。

例: 斐波那契序列 $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ 满足递推关系:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (2 \text{ 阶常系数线性齐次递推关系})$$

- 本节重点讨论 k 阶常系数线性齐次递推关系:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} \quad (n \geq k)$$

其中, a_1, \dots, a_k 都为常数, 且 $a_k \neq 0$ 。

- 递推关系从 $n=k$ 开始生效:

已知初始值 h_0, h_1, \dots, h_{k-1} , 则满足递推关系的数列 h_0, \dots, h_k, \dots 被唯一确定。

- 解法:

- 特征方程法
- 生成函数法

常系数线性齐次递推关系的解

定理7.4.1: 令 q 为一个非零数, 则 $h_n = q^n$ 是常系数线性齐次递推关系

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \dots - a_k h_{n-k} = 0$$

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} \quad (a_k \neq 0, n \geq k) \quad (1)$$

的解当且仅当 q 是多项式方程

特征根

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \dots - a_{k-1} x - a_k = 0 \quad (2)$$

的一个根.

特征方程

若多项式方程 (2) 有 k 个不同的根 q_1, q_2, \dots, q_k , 则

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解: 任意给定初始值 h_0, h_1, \dots, h_{k-1} , 都存在 c_1, c_2, \dots, c_k 使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列。

证明:

1. $h_n=q^n$ 满足递推关系 $h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\dots+a_kh_{n-k}$ ($a_k\neq 0$, $n\geq k$) 当且仅当

$$q^n - a_1q^{n-1} - a_2q^{n-2} - \dots - a_kq^{n-k} = q^{n-k} \underline{(q^k - a_1q^{k-1} - \dots - a_k)} = 0$$

因为 $q \neq 0$, 因此, $h_n=q^n$ 满足递推关系当且仅当 q 是方程 $x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \dots - a_k=0$ 的根。

2. 设 q_1, q_2, \dots, q_k 是方程 $x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \dots - a_k=0$ 的 k 个不同的根。

则对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 有

$$q_i^{n-k} (q_i^k - a_1q_i^{k-1} - \dots - a_{k-1}q_i - a_k) = 0$$

因此, $h_n=q_1^n, h_n=q_2^n, \dots, h_n=q_k^n$ 是递推关系的不同的解。

可以验证: $h_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\dots+c_kq_k^n$ 也满足递推关系(1) (略), 然后证明它是通解。

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n$$

3. 设 $h_0=b_0, h_1=b_1, \dots, h_{k-1}=b_{k-1}$ 是初始值, 那么满足初始条件的 c_1, c_2, \dots, c_k 是下面线性方程组的解:

$$(n=0 \text{ 时}) \quad c_1 + c_2 + \dots + c_k = b_0$$

$$(n=1 \text{ 时}) \quad c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_k q_k = b_1$$

...

$$(n=k-1 \text{ 时}) \quad c_1 q_1^{k-1} + c_2 q_2^{k-1} + \dots + c_k q_k^{k-1} = b_{k-1}$$

方程组的系数矩阵是范德蒙矩阵, 行列式不等于0, 因此, 方程组存在唯一解。

因此, 式(3)是递推关系的通解。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k \\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \dots & q_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

特征方程法

定理7.4.1: 令 q 为一个非零数, 则 $h_n = q^n$ 是常系数线性齐次递推关系

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} \quad (a_k \neq 0, n \geq k) \quad (1)$$

的解当且仅当 q 是多项式方程

特征根

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \dots - a_{k-1} x - a_k = 0 \quad (2)$$

的一个根.

特征方程

若多项式方程 (2) 有 k 个不同的根 q_1, q_2, \dots, q_k , 则

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解: 任意给定初始值 h_0, h_1, \dots, h_{k-1} , 都存在 c_1, c_2, \dots, c_k 使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列。

1. 列出特征方程

2. 求出特征根

3. 利用初始值求通解

斐波那契数 f_n 的计算公式

例：已知递推关系 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, $f_0 = 0, f_1 = 1$, 求通项 f_n 。

解：求解特征方程 $x^2 - x - 1 = 0$, 得 $q_1 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

则通解为 $f_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ 。

将 $f_0 = 0, f_1 = 1$ 代入 $f_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, 得到线性方程组：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases}$$

解得： $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ 。

因此，得通项 $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, $n \geq 2$

例：求满足初始值 $h_0=1$, $h_1=2$ 和 $h_2=0$ 的递推关系：

$$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2} - 2h_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

解：递推关系的特征方程为

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x^2(x-2) - (x-2) = (x^2-1)(x-2) \\ &= (x-1)(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

因此(1)的3个根分别是 $1, -1, 2$.

因此，通解为 $h_n = c_1 1^n + c_2 (-1)^n + c_3 2^n$

代入初始条件得方程组：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad (h_0 = 1) \\ c_1 - c_2 + 2c_3 = 2 \quad (h_1 = 2) \\ c_1 + c_2 + 4c_3 = 0 \quad (h_2 = 0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{解得 } c_1=2, c_2=\frac{2}{3}, c_3=-\frac{1}{3}, \\ \text{因此, } h_n = 2 - \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{1}{3} \cdot 2^n \end{array}$$

$(n \geq 0)$

例：由3个字母 a, b, c 组成长度为 n 的一些单词在通信信道传输，满足条件：不得有两个 a 连续出现在任一个单词中。确定信道允许传输的单词数。

解：设 h_n 表示允许传输的长度为 n 的单词数。

显然， $h_0=1$ （空单词）。

$h_1=3$ （即 a, b, c 三个单词）。

当 $n>1$ 时，

(1) 若单词的第一个字母是 b 或 c ，

那么各有 h_{n-1} 种方法构成该单词；

(2) 若单词的第一个字母是 a ，则第二个字母只能是 b 或 c ，

此时各有 h_{n-2} 种方式构成这个单词，

因此可以得到递推关系： $h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2} \ (n \geq 2)$

解(续): 递推关系的特征方程: $x^2-2x-2=0$

解得特征根: $x_1=1+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$

得通解为 $h_n=c_1(1+\sqrt{3})^n+c_2(1-\sqrt{3})^n, n\geq 3$

代入初始值 $h_0=1$ 和 $h_1=3$, 得到方程组:

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1(1+\sqrt{3})+c_2(1-\sqrt{3})=3 \end{cases}$$

解得: $c_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, c_2=\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

因此, $h_n=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n, n\geq 3$

生成函数法

令 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 为一无穷数列, 其生成函数 $g(x)$ 定义为:

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots + h_n x^n + \dots$$

牛顿二项式定理:

如果 n 是正整数, 而 r 是非零实数, $|rx| < 1$ 时, 则有

$$\begin{aligned}(1 - rx)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-rx)^k \\&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} (rx)^k \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (rx)^k\end{aligned}$$

例：求解下面的递推关系

$$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

其对应的初始条件为 $h_0=1$, $h_1=-2$ 。

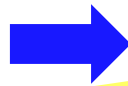
解：设数列 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 的生成函数为

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_nx^n + \dots \quad (1)$$

$$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} \quad (n \geq 2)$$



$$h_n - 5h_{n-1} + 6h_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$



$$h_2 - 5h_1 + 6h_0 = 0$$

$$h_3 - 5h_2 + 6h_1 = 0$$

$$h_4 - 5h_3 + 6h_2 = 0$$

$$h_5 - 5h_4 + 6h_3 = 0$$

...

思想：对 $g(x)$ 进行变换，使得 x^k 以这些等式为系数，从而系数为 0

$$(h_k - 5h_{k-1} + 6h_{k-2})x^k = 0 \quad (k \geq 2)$$

例：求解下面的递推关系

$$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

其对应的初始条件为 $h_0=1$, $h_1=-2$ 。

解：设数列 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 的生成函数为

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_nx^n + \dots \quad (1)$$

用 $-5x, 6x^2$ 分别乘以 $g(x)$, 得 $h_n - 5h_{n-1} + 6h_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$

$$-5x g(x) = -5h_0x - 5h_1x^2 - 5h_2x^3 + \dots - 5h_nx^{n+1} + \dots \quad (2)$$

$$6x^2 g(x) = 6h_0x^2 + 6h_1x^3 + 6h_2x^4 + \dots + 6h_nx^{n+2} + \dots \quad (3)$$

$$(1)+(2)+(3) \text{ 得, } (1-5x+6x^2)g(x) = h_0 + (h_1-5h_0)x + (h_2-5h_1+6h_0)x^2 \\ + \dots + (h_n-5h_{n-1}+6h_{n-2})x^n + \dots$$

$$\text{因此 } g(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} \circ \quad = h_0 + (h_1-5h_0)x \\ = 1-7x$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)} \\
 &= \frac{c_1}{1-2x} + \frac{c_2}{1-3x} = \frac{(c_1+c_2)+(-3c_1-2c_2)x}{(1-2x)(1-3x)}
 \end{aligned}$$

因此, $c_1+c_2=1$, $-3c_1-2c_2=7$, 解得 $c_1=5$, $c_2=-4$ 。

$$\text{得 } g(x) = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}。$$

$$\text{已知 } \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n,$$

$$\begin{aligned}
 \text{因此, } g(x) &= 5 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n) x^n
 \end{aligned}$$

故, 递推关系的一般项 $h_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$ 。

例：利用生成函数求解 $h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3} \ (n \geq 3), h_0=0, h_1=1, h_2=2$ 。

解：令生成函数为 $g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \dots + h_nx^n + \dots$ (1)

(1) 式两边分别同乘 $-x, -9x^2, 9x^3$, 得

$$-x g(x) = -h_0x - h_1x^2 - h_2x^3 - \dots - h_nx^{n+1} + \dots \quad (2)$$

$$-9x^2 g(x) = -9h_0x^2 - 9h_1x^3 - 9h_2x^4 - \dots - 9h_nx^{n+2} + \dots \quad (3)$$

$$9x^3 g(x) = 9h_0x^3 + 9h_1x^4 + 9h_2x^5 + \dots + 9h_nx^{n+3} + \dots \quad (4)$$

(1), (2), (3)与(4)四式左右两边分别相加得：

$$(1-x-9x^2+9x^3) g(x) = h_0 + (h_1-h_0)x + (h_2-h_1-9h_0)x^2 + (h_3-h_2-9h_1+9h_0)x + \dots = h_0 + (h_1-h_0)x + (h_2-h_1-9h_0)x^2 = x + x^2。$$

$$\text{得 } g(x) = \frac{x+x^2}{1-x-9x^2+9x^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)(1-3x)(1+3x)} \quad (\text{略})$$

利用生成函数求解线性齐次递推关系

(1) 利用递推关系求出序列的生成函数: $\frac{p(x)}{q(x)}$,

其中, $p(x)$ 是次数小于 k 的多项式, 而 $q(x)$ 是常数项等于 1 的 k 阶多项式;

(2) 用部分分式法, 把 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 表示为如下代数分式的和:
$$\frac{c}{(1-rx)^t};$$

(3) 利用牛顿二项式展开 $\frac{c}{(1-rx)^t}$, 并把所有项求和, 得到生成函数的幂级数。

特征方程有重根的情形

定理7.4.1: (1) 令 q 为一个非零数, 则 $h_n = q^n$ 是常系数线性齐次递推关系 $h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k}$ ($a_k \neq 0, n \geq k$) (1) 的解, 当且仅当 q 是多项式方程

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \dots - a_k = 0 \quad (2)$$

的一个根.

无重根

(2) 若多项式方程(2)有 k 个不同的根 q_1, q_2, \dots, q_k , 则

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解: 任意给定初始值 h_0, h_1, \dots, h_{k-1} , 都存在 c_1, c_2, \dots, c_k 使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列.

问题: 若特征方程有重根时, 如何求解?

特征方程有重根的情形

例. 递推关系 $h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2} \ (n \geq 2)$ 的特征方程是:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0.$$

因此, 2 是二重特征根。

可证明 $h_n = c_1 2^n + c_2 2^n = c 2^n$ 有时不是该递推关系的通解。

例如: 假设初始值 $h_0 = 1, h_1 = 3,$

得到: $c = 1$ ($n=0$ 时), $2c = 3$ ($n=1$ 时)

矛盾, 因此 h_n 不是通解。

结论: 定理7.4.1不适用于特征方程有重根的情况

常系数线性递推关系的通解

定理7.4.2 令 q_1, q_2, \dots, q_t 为常系数线性齐次递推关系:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} \quad (n \geq k) \quad (1)$$

的特征方程的互异的根。

如果 q_i 是(1)的特征方程的 s_i 重根, 那么该递推关系的通解中对应于 q_i 的部分为

$$H_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \dots + c_{s_i} n^{s_i-1} q_i^n,$$

且该递推关系的通解为:

s_i 项的和

$$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} + \dots + H_n^{(t)}$$

例. 求递推关系

$$H_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \dots + c_{s_i} n^{s_i-1} q_i^n$$

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 2h_{n-4}$$

满足初始值 $h_0=1, h_1=0, h_2=1, h_3=2$ 的解。

解： (1) 递推关系的特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

得特征根：重根 $x_1 = x_2 = x_3 = -1, x_4 = 2$ 。

(2) 通解中对应重根 -1 的部分为：

$$H_n^{(1)} = c_1 (-1)^n + c_2 n (-1)^n + c_3 n^2 (-1)^n$$

通解中对应根 2 的部分为： $H_n^{(2)} = c_4 2^n$

因此，通解为： $h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)}$

$$= c_1 (-1)^n + c_2 n (-1)^n + c_3 n^2 (-1)^n + c_4 2^n$$

因此，通解为：
$$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)}$$
$$= c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n$$

(3) 代入初始值 $h_0=1, h_1=0, h_2=1, h_3=2$ 得：

$$c_1 + c_4 = 1 \quad (n=0 \text{ 时})$$

$$-c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0 \quad (n=1 \text{ 时})$$

$$c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1 \quad (n=2 \text{ 时})$$

$$-c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 = 2 \quad (n=3 \text{ 时})$$

解线性方程组，得 $c_1 = \frac{7}{9}, c_2 = -\frac{3}{9}, c_3 = 0, c_4 = \frac{2}{9}$ 。

因此，通解为：
$$h_n = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{3}{9}n(-1)^n + \frac{2}{9}2^n$$

利用生成函数求解线性齐次递推关系

(1) 利用递推关系求出序列的生成函数: $\frac{p(x)}{q(x)}$,

其中, $p(x)$ 是次数小于 k 的多项式, 而 $q(x)$ 是常数项等于 1 的 k 阶多项式;

(2) 用部分分式法, 把 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 表示为如下代数分式的和:
$$\frac{c}{(1-rx)^t};$$

(3) 利用牛顿二项式展开 $\frac{c}{(1-rx)^t}$, 并把所有项求和, 得到生成函数的幂级数。

例. 求解递推关系

$$h_n + h_{n-1} - 16h_{n-2} + 20h_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

其中 $h_0=0, h_1=1, h_2=-1$.

解: 生成函数为

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \dots + h_nx^n + \dots$$

$$x g(x) = h_0x + h_1x^2 + h_2x^3 + \dots + h_{n-1}x^n + \dots$$

$$-16x^2 g(x) = -16h_0x^2 - 16h_1x^3 - \dots - 16h_{n-2}x^n + \dots$$

$$20x^3 g(x) = 20h_0x^3 + \dots + 20h_{n-3}x^n + \dots$$

把以上四个式子相加, 得到:

$$(1+x-16x^2+20x^3)g(x)$$

$$= h_0 + (h_1+h_0)x + (h_2+h_1-16h_0)x^2 + (h_3+h_2-16h_1+20h_0)x^3$$

$$+ \dots + (h_n+h_{n-1}-16h_{n-2}+20h_{n-3})x^n + \dots$$

$$= h_0 + (h_1+h_0)x + (h_2+h_1-16h_0)x^2$$

代入 $h_0=0, h_1=1, h_2=-1$ 得: $(1+x-16x^2+20x^3)g(x)=x$

$$\begin{aligned}\text{因此, } g(x) &= \frac{x}{1+x-16x^2+20x^3} = \frac{x}{(1-2x)^2(1+5x)} \\ &= \frac{c_1}{1-2x} + \frac{c_2}{(1-2x)^2} + \frac{c_3}{(1+5x)}\end{aligned}$$

下面确定 c_1, c_2, c_3 的值

$$\begin{aligned}x &= (1-2x)(1+5x)c_1 + (1+5x)c_2 + (1-2x)^2c_3 \\ &= (c_1+c_2+c_3) + (3c_1+5c_2-4c_3)x + (-10c_1+4c_3)x^2\end{aligned}$$

$$\text{有 } \begin{cases} c_1+c_2+c_3 = 0 \\ 3c_1+5c_2-4c_3 = 1 \\ -10c_1+4c_3 = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } c_1 = -2/49, c_2 = 7/49, c_3 = -5/49,$$

$$\text{因此, } g(x) = -\frac{2/49}{1-2x} + \frac{7/49}{(1-2x)^2} - \frac{5/49}{1+5x}$$

因此, $g(x) = -\frac{2/49}{1-2x} + \frac{7/49}{(1-2x)^2} - \frac{5/49}{1+5x}$

由牛顿二项式定理知,

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k, \quad \frac{1}{1-2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} 2^k x^k$$

$$\frac{1}{1+5x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-5)^k x^k$$

$$\begin{aligned} \text{得 } g(x) &= -\frac{2}{49} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k + \frac{7}{49} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} 2^k x^k \\ &\quad - \frac{5}{49} \sum_{k=0}^{\infty} (-5)^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{2}{49} 2^k + \frac{7}{49} (k+1) 2^k - \frac{5}{49} (-5)^k \right] x^k \end{aligned}$$

$$\text{因此, } h_n = -\frac{2}{49} 2^n + \frac{7}{49} (n+1) 2^n - \frac{5}{49} (-5)^n, \quad n \geq 0$$

特征方程的根: 2 (二重根), -5

例：求解递推关系

$$h_n + h_{n-1} - 16h_{n-2} + 20h_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

其中 $h_0=0, h_1=1, h_2=-1$.

两种方法的联系

生成函数形如 $\frac{p(x)}{q(x)}$ ，其中 $q(x)$ 由递推关系确定。

$$g(x) = \frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}$$

递推关系确定了唯一的特征方程，那么， $q(x)$ 与特征方程有何关系？

在上例中， $q(x)=1+x-16x^2+20x^3$ ，

而相应特征方程 $r(x)=x^3+x^2-16x+20=(x-2)^2(x+5)$ ，

$$\begin{aligned} \text{有 } x^3 r\left(\frac{1}{x}\right) &= x^3 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^2 \left(\frac{1}{x} + 5\right) \\ &= (1-2x)^2(1+5x) \end{aligned}$$

$$= 1+x-16x^2+20x^3 = q(x)$$

$$q(x) = x^k r(1/x)$$

将有理多项式函数写成代数分式和过程相当于求特征方程解以及确定系数过程。

一般的：数列与生成函数关系

一般的，设 k 阶递推关系

$$h_n + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} = 0 \quad (n \geq k)$$

的初始值 h_0, h_1, \dots, h_{k-1} .

根据上述方法，存在多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 使得

$$g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ 其中}$$

$$q(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

$$p(x) = h_0 + (h_1 + a_1 h_0)x + (h_2 + a_1 h_1 + a_2 h_0)x^2 + \dots + (h_{k-1} + a_1 h_{k-2} + \dots + a_{k-1} h_0)x^{k-1}$$

设相应特征方程 $r(x)=0$ ，其中 $q(x)=x^k r(\frac{1}{x})$ 。

若 $r(x)=0$ 的根为 q_1, q_2, \dots, q_k ，那么

$$r(x)=(x-q_1)(x-q_2)\dots(x-q_k)$$

$$q(x)=(1-q_1x)(1-q_2x)\dots(1-q_kx)$$

另一方面，任意给出 k 次多项式

$$q(x)=b_0+b_1x+\dots+b_kx^k \quad (b_0 \neq 0)$$

和小于 k 次多项式： $p(x)=d_0+d_1x+\dots+d_{k-1}x^{k-1}$

可以用部分分式法求出幂级数展开式：

$$p(x)/q(x)=h_0+h_1x+\dots+h_nx^n+\dots$$

得

$$d_0+d_1x+\dots+d_{k-1}x^{k-1}=(b_0+b_1x+\dots+b_kx^k)\times(h_0+h_1x+\dots+h_nx^n+\dots)$$

$$d_0 + d_1x + \dots + d_{k-1}x^{k-1} = (b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k) \times (h_0 + h_1x + \dots + h_nx^n + \dots)$$

■ 比较两边系数得到：

$$b_0h_0 = d_0$$

$$b_0h_1 + b_1h_0 = d_1$$

...

$$b_0h_{k-1} + b_1h_{k-2} + \dots + b_{k-1}h_0 = d_{k-1}$$

$$b_0h_n + b_1h_{n-1} + \dots + b_kh_{n-k} = 0 \quad (b_0 \neq 0)$$

(1)

因此，
$$h_n + \frac{b_1}{b_0} h_{n-1} + \dots + \frac{b_k}{b_0} h_{n-k} = 0$$

这是一个常系数线性齐次递推关系，初始值由方程组
(1)确定。

定理7.4.3 令 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 为满足 k 阶常系数线性齐次递推关系:

$$h_n + c_1 h_{n-1} + \dots + c_k h_{n-k} = 0 \quad (c_k \neq 0, n \geq k) \quad (1)$$

的数列, 则它的生成函数 $g(x)$ 形如:

$$g(x) = p(x)/q(x) \quad (2)$$

其中,

$q(x)$ 是具有非零常数项的 k 次多项式,
 $p(x)$ 是小于 k 次的多项式.

反之, 给定这样的多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$, 则存在序列 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 满足(1)式的 k 阶常系数线性齐次递推关系, 其生成函数由(2)式给出.

小结：常系数线性齐次递推关系

令 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 是一个数列, 若存在常数量 a_1, a_2, \dots, a_k ($a_k \neq 0$)使得

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} \quad (n \geq k)$$

则称该数列是 k 阶常系数线性齐次递推关系

□ 利用特征方程求解常系数线性齐次递推关系:

(1) 写出相应的特征方程;

(2) 求解特征方程:

(a) 如果没有重根, 则直接给出通解 (定理7.4.1);

(b) 如果有重根, 根据重根求出通解 (定理7.4.2);

(3) 将初始条件代入通解, 得到满足初始条件的解。

□ 利用生成函数求解: 使得 x^j ($j \geq k$)前的系数为0

本节主要讨论常系数线性非齐次递推关系的求解



第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列

7.2 生成函数

7.3 指数生成函数

7.4 求解线性齐次递推关系

7.5 非齐次递推关系

7.6 一个几何例子

常系数线性非齐次递推关系

■ 对于常系数线性递推关系

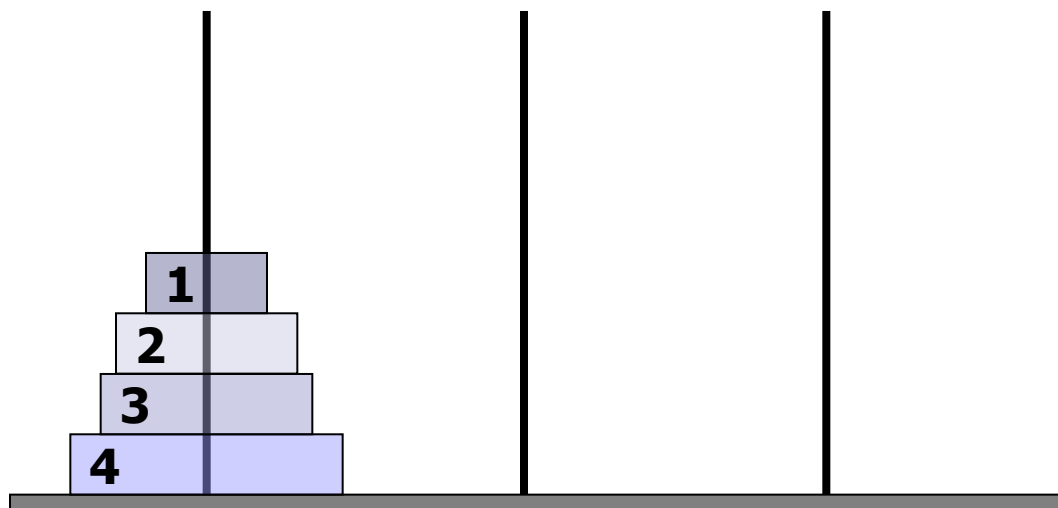
$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} + b_n \quad (a_k \neq 0, n \geq k),$$

若 $b_n \neq 0$ ，则称该递推关系为常系数线性非齐次递推关系。

例子：汉诺塔 (Hanoi)

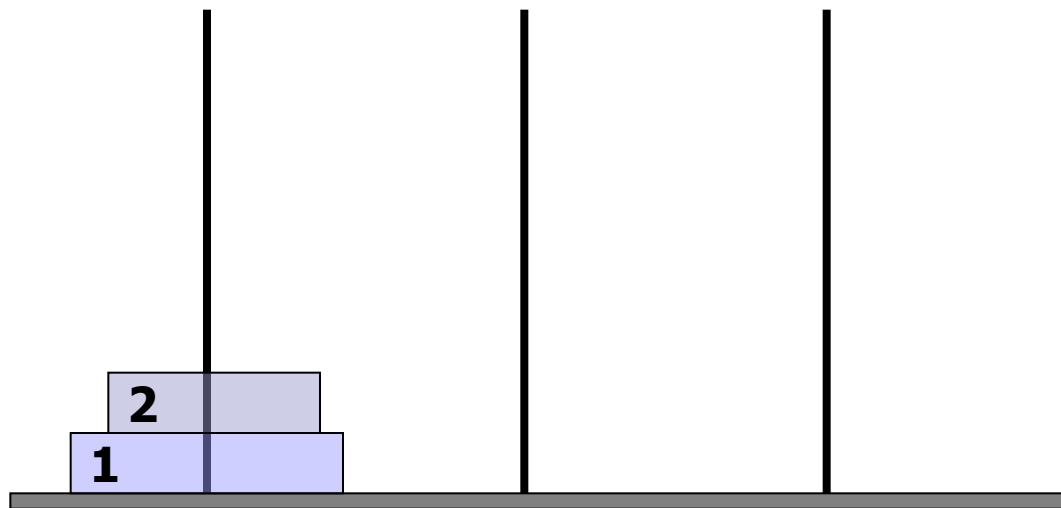
将所有盘子移到**右边**的柱子：

- ✓ 一次移动一个盘子，
- ✓ 每次移动时，**大盘子不能**放在小盘子上面。



问题：一共需要移动多少次盘子？

汉诺塔递推关系



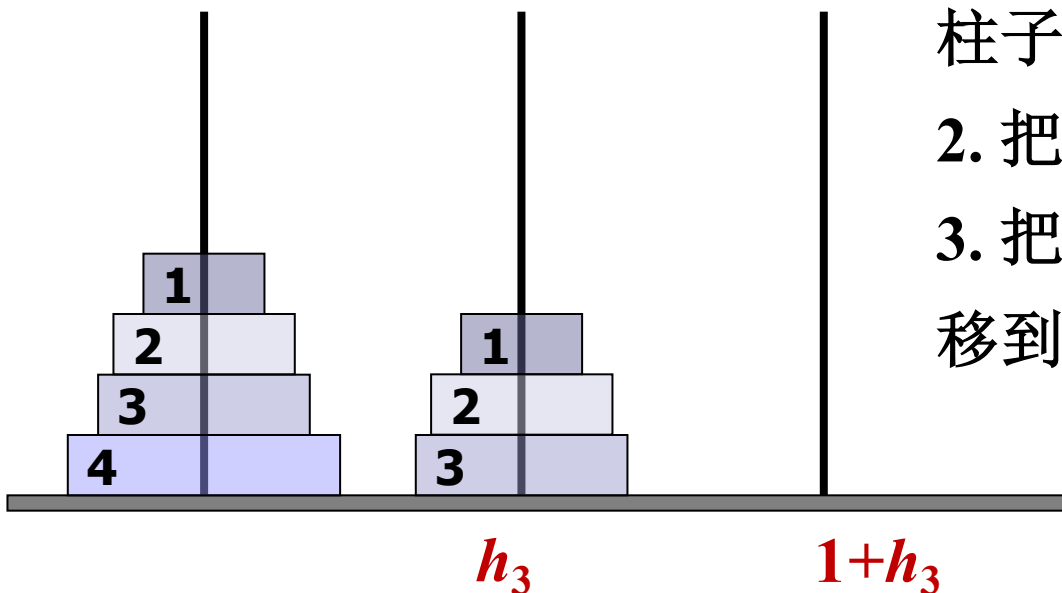
■ 设 h_n 是移动 n 个圆盘所需的移动次数。

✓ $h_0=0$

✓ $h_1=1$

✓ $h_2=3$

汉诺塔递推关系



$$h_4 = 2h_3 + 1$$

递推步骤:

1. 把顶部 $n-1$ 个盘子转移到中间柱子上 (h_{n-1})
2. 把最大的圆盘移到右边柱子上 (1)
3. 把中间柱子上的 $n-1$ 个盘子转移到右边柱子上 (h_{n-1})

■ 设 h_n 是移动 n 个圆盘所需的移动次数。

✓ 满足递推关系: $h_n = 2h_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$)

✓ $h_0 = 0$, $h_1 = 1$ 和 $h_2 = 3$,

非齐次

■ 迭代求解:

$$\begin{aligned}h_n &= 2h_{n-1} + 1 \\&= 2(2h_{n-2} + 1) + 1 = 2^2h_{n-2} + 2 + 1 \\&= 2^2(2h_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3h_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\&= \dots \\&= 2^{n-1}h_1 + 2^{n-2} \dots + 2^2 + 2 + 1 = \\&= \mathbf{2^n - 1} \quad (n \geq 0)\end{aligned}$$

下面对 n 进行数学归纳证明结果的正确性。

(1) $h_0=0, h_1=1$; 因此, $n=1$ 时, 结论成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时结论成立, 即 $h_k=2^k-1$ 。

当 $n=k+1$ 时, $h_{k+1}=2h_k+1=2 \cdot (2^k-1)+1=2^{k+1}-1$ 。

因此, $n=k+1$ 时, 结论成立。

由数学归纳法知, $h_n = 2^n - 1 \quad (n \geq 0)$

用生成函数求解汉梵塔递推关系

由 $h_n = 2h_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$) 得 $h_n - 2h_{n-1} = 1$ ($n \geq 1$)。

设 $g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_nx^n + \dots$ 是该数列的生成函数，

有 $-2xg(x) = -2h_0x - 2h_1x^2 + \dots - 2h_{n-1}x^n - 2h_nx^{n+1} \dots$

以上两式相加得：

$$\begin{aligned}(1-2x)g(x) &= h_0 + (h_1 - 2h_0)x + (h_2 - 2h_1)x^2 + \dots + (h_n - 2h_{n-1})x^n + \dots \\ &= x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{因此, } g(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n\end{aligned}$$

得 $h_n = 2^n - 1$ ($n \geq 0$)

一般非齐次递推关系的通解

假设有非齐次递推关系

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} + b_n, \quad (1)$$

若 f_n 是对应齐次递推关系

$$h'_n = h_n - b_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} \quad (2)$$

的通解, 而 c_n 是原非齐次递推关系 (1) 的一个特解,

那么: $h_n = c f_n + c_n$ 是原非齐次递推关系 (1) 的通解.

步骤:

1. 求齐次的通解
2. 求非齐次的特解
3. 组合通解和特解, 并利用初始项求常系数 c

例. 求递推关系 $h_n = 3h_{n-1} - 4n$, $h_0 = 2$.

解: (1) 首先求解对应的齐次递推关系 $h_n = 3h_{n-1}$ 的通解。
特征方程为 $x - 3 = 0$, 特征根为 $x = 3$, 因此通解为 $h_n = c3^n$ 。

(2) 求 $h_n = 3h_{n-1} - 4n$ 的一个特解:

猜测解的形式 $h_n = rn + s$, 代入递推关系得到:

$$rn + s = 3(r(n-1) + s) - 4n = (3r - 4)n + (-3r + 3s)$$

得到: $r = 3r - 4$, $s = -3r + 3s$

因此, $r = 2$ 和 $s = 3$, 从而 $h_n = 2n + 3$ 是递推关系的一个特解。

(3) 将齐次递推关系的一般解与特解结合:

$$h_n = c3^n + 2n + 3$$

(4) 代入初始关系, 确定系数: $h_0 = c3^0 + 2 \times 0 + 3 = 2$

因此, $c = -1$, 从而问题的解为: $h_n = -3^n + 2n + 3, n \geq 0$

非齐次递推关系求解方法小结

- (1) 求对应的齐次递推关系的通解；
- (2) 求该非齐次递推关系的一个特解；
- (3) 将一般解和特解结合得到该非齐次递推关系的通解；
- (4) 通过初始条件确定通解中出现的常系数值.

难点：

- 特征方程求解
- 找出一个特解

尝试特解的一些方法

但不是绝对的！

根据非齐次项 b_n 来尝试某些类型的特解：

(1) 如果 b_n 是 n 的 k 次多项式，尝试 h_n 也是 n 的 k 次多项式

① 若 $b_n = d$ (常数), 尝试 $h_n = r$ (常数)

② 若 $b_n = dn + c$ (d, c 是常数), 尝试 $h_n = rn + s$ (r, s 是常数)

③ 若 $b_n = an^2 + dn + c$ (a, d, c 是常数), 尝试 $h_n = rn^2 + sn + t$ (r, s, t 是常数)

(2) 若 $b_n = d^n$ (d 是常数) 是指数形式，尝试 $h_n = pd^n$ (p 是常数) 也是指数形式。

例：求解 $h_n = 2h_{n-1} + 3^n$ ($n \geq 1$), $h_0 = 2$.

解. (1) 首先求齐次关系 $h_n = 2h_{n-1}$ 的通解。其特征方程

$x - 2 = 0$ ，特征根 $x = 2$ ，得到通解： $h_n = c2^n$

(2) 下面求非齐次递推关系的一个特解。

尝试： $h_n = p3^n$ ，代入得 $p3^n = 2p3^{n-1} + 3^n$ 。

令 $n=1$ ，得 $p=3$ ，因此 $h_n = 3^{n+1}$ 是一个特解。

因此，非齐次关系的通解为 $h_n = c2^n + 3^{n+1}$ 。

(3) 代入初始条件 $h_0 = 2$ ，得 $c2^0 + 3^{0+1} = 2$ 。

得到： $c = -1$ ，因此 $h_n = -2^n + 3^{n+1}$ ($n \geq 0$)

例：求解 $h_n = 2h_{n-1} + 3^n$ ($n \geq 1$), $h_0 = 2$.

解（利用生成函数求解）设生成函数为

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_nx^n + \dots \quad (1)$$

(1)式左右两边乘以 $-2x$ 得

$$-2x g(x) = -2h_0x - 2h_1x^2 - 2h_2x^3 - \dots - 2h_nx^{n+1} + \dots \quad (2)$$

(1), (2)相加得

$$\begin{aligned} (1-2x)g(x) &= h_0 + (h_1 - 2h_0)x + (h_2 - 2h_1)x^2 + \dots + (h_n - 2h_{n-1})x^n + \dots \\ &= 2 + 3x + 3^2x^2 + \dots + 3^nx^n + \dots \\ &= 1 + (1 + 3x + 3^2x^2 + \dots + 3^nx^n + \dots) \\ &= 1 + \frac{1}{1-3x} \circ \end{aligned}$$

例：求解 $h_n = 2h_{n-1} + 3^n \ (n \geq 1), h_0 = 2$.

解 (续) $(1-2x)g(x) = 1 + \frac{1}{1-3x}$

$$\begin{aligned} \text{得 } g(x) &= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^{n+1} - 2^{n+1}) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (3^{n+1} - 2^n) x^n \end{aligned}$$

因此, $h_n = 3^{n+1} - 2^n \ (n \geq 0)$ 。

例：求解 $h_n = 3h_{n-1} + 3^n$ ($n \geq 1$), $h_0 = 2$.

解：首先解对应齐次关系 $h_n = 3h_{n-1}$ ，特征方程 $x - 3 = 0$ ，

特征根 $x = 3$ ，得到一般解： $h_n = c3^n$

求非齐次递推关系的一个特解，尝试： $h_n = p3^n$ ，

代入得 $p3^n = 3p3^{n-1} + 3^n$ ，解得： $3p = 3p + 3$ （矛盾）

尝试 $h_n = pn3^n$ ，代入得 $pn3^n = 3p(n-1)3^{n-1} + 3^n$

解得 $p = 1$ 。因此， $h_n = n3^n$ 是一个特殊解。

因此，通解为 $h_n = c3^n + n3^n$ 。

代入初始条件 $h_0 = 2$ ，得 $c = 2$ ，

因此， $h_n = 2 \cdot 3^n + n3^n = (2+n)3^n$ 。

一些特别情形

- **注意：**上述求非齐次关系的特解的方法并不具有一般性。
- 递推关系可由迭代直接求出，再用数学归纳法证明。

小结：常系数线性非齐次递推关系

令 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 是一个数列, 若存在常数量 $a_1, a_2, \dots, a_k, b_n$ ($a_k \neq 0, b_n \neq 0$) 使得

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} + b_n \quad (n \geq k)$$

则称该数列是 k 阶常系数线性非齐次递推关系

- 迭代求解 + 数学归纳法
- 生成函数
- 特征方程法
 - 对应的齐次递推关系的通解与原非齐次递推关系的特解相结合
 - 难点更在于找出特解