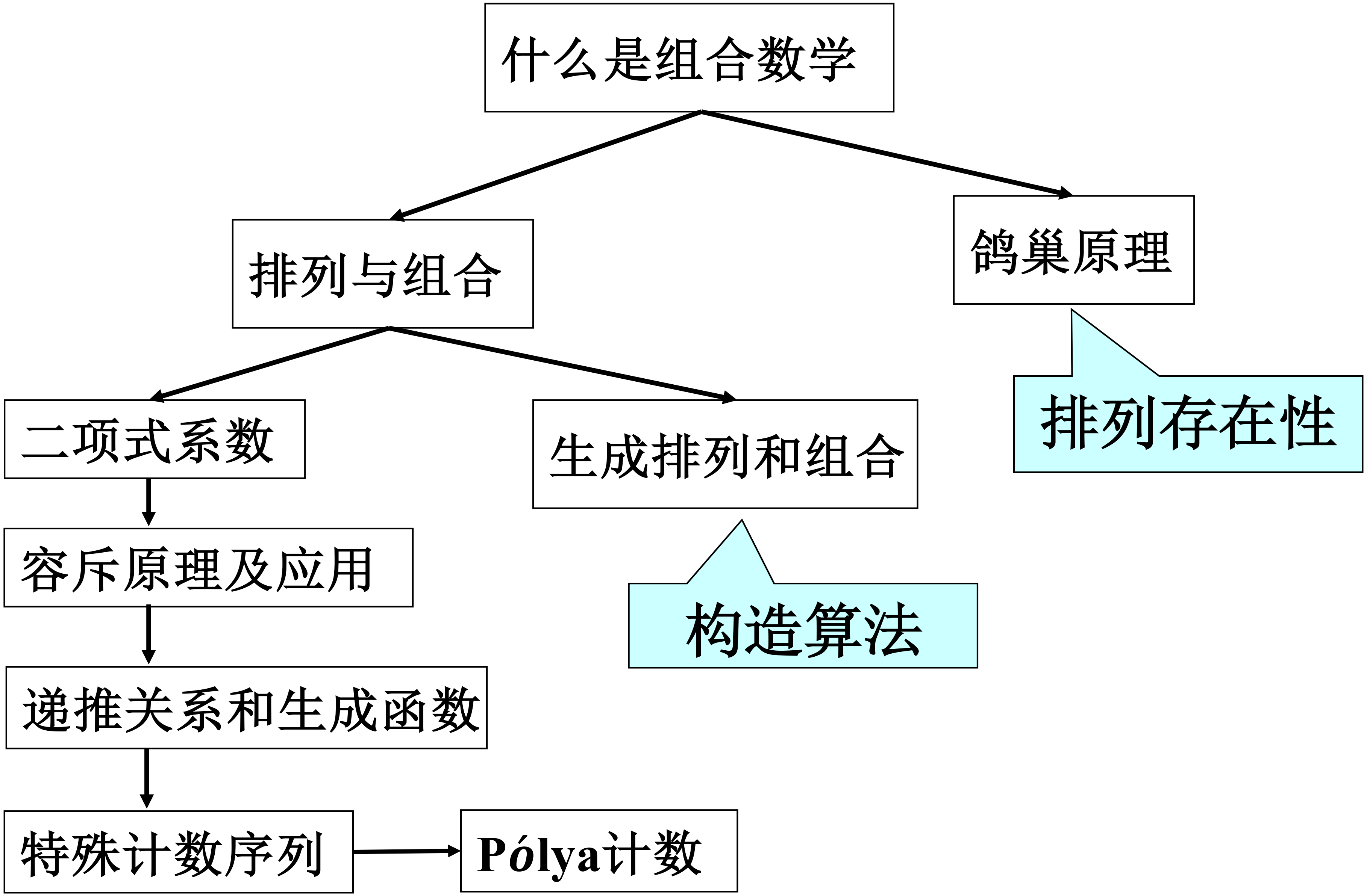
期末复习

知识结构



什么是组合数学
排列与组合
鸽巢原理
排列存在性
二项式系数
生成排列和组合
构造算法
容斥原理及应用
递推关系和生成函数
特殊计数序列
Pólya计数

组合、排列与循环排列

集合{1, 2, … , n}	计数
r 组合	$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$
全排列	$n!$
r 排列	$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)\ldots.(n-r+1)$
循环r 排列	$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$
循环全排列	$(n-1)!$
项链排列	$\frac{(n-1)!}{2}$

多重集的排列

多重集	r 排列的个数 h_r
$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$	k^r
	$h_0, h_1, h_2, \ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}(x) = (\sum_{e_1=0}^{\infty} \frac{x^{e_1}}{e_1!}) (\sum_{e_2=0}^{\infty} \frac{x^{e_2}}{e_2!}) \ldots (\sum_{e_k=0}^{\infty} \frac{x^{e_k}}{e_k!})$ 的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数.
$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$ $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$	$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\ (r=n)$
	$h_0, h_1, h_2, \ldots$的指数生成函数 $(r<n)$ $g^{(e)}(x) = (\sum_{e_1=0}^{n_1} \frac{x^{e_1}}{e_1!}) (\sum_{e_2=0}^{n_2} \frac{x^{e_2}}{e_2!}) \ldots (\sum_{e_k=0}^{n_k} \frac{x^{e_k}}{e_k!})$ 的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数.

多重集的排列：每类元素出现次数有约束

多重集	r 排列的个数 h_r
$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2\ \ldots, \infty\cdot a_k\}$	k^r
	$h_0, h_1, h_2,\ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}(x)=(\sum_{e_1=0}^{\infty}\frac{x^{e_1}}{e_1!})(\sum_{e_2=0}^{\infty}\frac{x^{e_2}}{e_2!})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty}\frac{x^{e_k}}{e_k!})$ 的展开式中x^r的系数.　　对应的因子进行约束
$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2\ \ldots, n_k\cdot a_k\}$ $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$	$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\ (r=n)$
	$h_0, h_1, h_2,\ldots$的指数生成函数　$(r<n)$ $g^{(e)}(x)=(\sum_{e_1=0}^{n_1}\frac{x^{e_1}}{e_1!})(\sum_{e_2=0}^{n_2}\frac{x^{e_2}}{e_2!})\ldots(\sum_{e_k=0}^{n_k}\frac{x^{e_k}}{e_k!})$ 的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数. 对应的因子进行约束

多重集的组合

<table>
<tr><th>多重集</th><th>r 组合的个数 h_r</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2 \dots, \infty\cdot a_k\}$</td><td>$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$</td></tr>
<tr><td>方程$x_1+x_2+\dots+x_k=r$的非负整数解的个数</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2,\dots$的生成函数
$g(x) = (\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1})\ (\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2})\dots(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k})$
的展开式中x^r的系数.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \dots, n_k\cdot a_k\}$
$n=n_1+n_2+\dots+n_k$</td><td>$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$ ($r\le n_i$,　$1\le i\le k$)</td></tr>
<tr><td>容斥原理：方程$x_1+x_2+\dots+x_k=r$的非负整数解的个数 ($0\le x_i\le n_i$, $1\le i\le k$)</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2,\dots$的生成函数 （$\exists i\ r > n_i$)
$g(x) = (\sum_{j=0}^{n_1} x^{e_1})\ (\sum_{j=0}^{n_2} x^{e_2})\dots(\sum_{j=0}^{n_k} x^{e_k})$
的展开式中 x^r的系数.</td></tr>
</table>

多重集的组合：每类元素出现次数有约束

<table>
<tr><th>多重集</th><th>r 组合的个数 h_r</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2 \ldots, \infty\cdot a_k\}$</td><td>$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$</td></tr>
<tr><td>方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$的非负整数解的个数</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2,\ldots$的生成函数
$g(x)=(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1})\ (\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k})$
的展开式中x^r的系数.对应的因子进行约束</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \ldots, n_k\cdot a_k\}$
$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$</td><td>$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$ ($r\le n_i$，$1\le i\le k$)</td></tr>
<tr><td>容斥原理：方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$的非负整数解的个数 ($0\le x_i\le n_i$, $1\le i\le k$)</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2,\ldots$的生成函数 （$\exists i\ r>n_i$)
$g(x)=(\sum_{j=0}^{n_1}x^{e_1})\ (\sum_{j=0}^{n_2}x^{e_2})\ldots(\sum_{j=0}^{n_k}x^{e_k})$
的展开式中 x^r的系数. 对应的因子进行约束</td></tr>
</table>

容斥原理

设集合 S中具有性质P_i 的元素的集合为 A_i

- 集合 S 不具有性质$P_1, P_2,\ldots,P_m$的物体的个数：

$$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

- 集合S中至少具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$之一的元素的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$$

其中，第一个和对$\{1, 2, \ldots, m\}$的所有的 1 子集 $\{ i \}$ 进行，第二个和对$\{1, 2,\ldots, m\}$的所有的 2 集合$\{ i, j \}$进行, 依此类推.

容斥原理的应用

- 多重集的组合
- 错位排列
- 带有绝对/相对禁止位置的排列
- 几何问题

容斥原理的应用：多重集的组合

多重集	r 组合的个数 h_r
$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \dots, n_k\cdot a_k\}$ 每个n_i 可能为整数或∞	方程$x_1+x_2+\dots+x_k=r$ 满足 $0\le x_1\le n_1$, $0\le x_2\le n_2$, …, $0\le x_k\le n_k$ 整数解的个数

- 不满足以上形式的方程进行变量代换转化为以上形式
  - $x_1+x_2+\dots+x_k=r$

    关键：x_i 系数不为1，则进行变量代换使得系数为1，使用生成函数方法

  - $0\le x_1\le n_1$, $0\le x_2\le n_2$, …, $0\le x_k\le n_k$

    关键：进行变量代换使之为非负整数

容斥原理的应用：错位排列

- 设 $X=\{1,2,\ldots,n\}$，它的排列用$i_1\ i_2\ldots\ i_n$表示，错位排列是使得 $i_1\neq 1,\ i_2\neq 2,\ldots,\ i_n\neq n$ 的排列。
- 用D_n表示错位排列个数。
  - □ $D_n= n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!})$， $n\geq 1$
- D_n满足如下递推关系:
  - □ $D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$， $n=3, 4,\ldots$
  - □ $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$， $n=2, 3,\ldots$

容斥原理的应用：绝对禁止位置排列

- 令$X_1, X_2, \ldots, X_n$是$\{1, 2, \ldots, n\}$的子集（可以为空集），用$P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$表示$\{1,2,\ldots,n\}$的排列$i_1 i_2 \ldots i_n$的集合，使得：

$$i_1\text{不在}X_1\text{内}，\quad i_2\text{不在}X_2\text{内}，\quad \ldots，\quad i_n\text{不在}X_n\text{内}$$

- 带禁止位置的“非攻击型车”

容斥原理的应用：相对禁止位置排列

- $\{1, 2, \ldots, n\}$的排列中没有12, 23, …, $(n-1)n$ 这些模式出现的排列的个数，记为 Q_n
- 对于$n\geq 1$,

$$Q_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

$$= n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

- $Q_n = D_n + D_{n-1}$

生成函数与指数生成函数

- 令$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$为一无穷数列, 其
  - 生成函数 $g(x)=h_0+ h_1x + h_2x^2 +\ldots+ h_nx^n+\ldots$
  - 指数生成函数 $g^{(e)}(x) = h_0 + h_1x + h_2\dfrac{x^2}{2!} +\ldots+ h_n\dfrac{x^n}{n!} +\ldots$
- $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，每个$n_i$可能为整数或$\infty$

r 组合的个数 h_r： $h_0, h_1, h_2,\ldots$的生成函数 $g(x) = (\sum_{j=0}^{n_1} x^{e_1}) (\sum_{j=0}^{n_2} x^{e_2})\ldots(\sum_{j=0}^{n_k} x^{e_k})$ 的展开式中 x^r的系数.
r 排列的个数 h_r: $h_0, h_1, h_2,\ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}(x) = (\sum_{e_1=0}^{n_1} \frac{x^{e_1}}{e_1!}) (\sum_{e_2=0}^{n_2} \frac{x^{e_2}}{e_2!})\ldots(\sum_{e_k=0}^{n_k} \frac{x^{e_k}}{e_k!})$ 的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数.

- 把对每类元素出现次数的约束加到（指数）生成函数对应的因子上。
- 生成函数的另一个应用：求解常系数线性递推关系

求解递推关系

- 从具体问题求递推关系
- 从递推关系求解一般项h_n
  - 迭代法＋数学归纳法证明
  - 常系数线性齐次递推关系
    - 特征方程方法
    - 生成函数法
  - 常系数线性非齐次递推关系
    - 特征方程方法
    - 生成函数法

常系数线性齐次递推关系

常系数线性齐次递推关系：

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (a_k\neq0,\ n\geq k)$$

- 特征方程法
  - 求特征方程 $x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\ldots-a_k=0$ 的特征根；
  - 分互异根及重根两种情形。
- 生成函数法
  - 求生成函数形如 $p(x)/q(x)$
  - 生成函数的展开式，通常化为代数分式和形式：$c/(1-rx)^t$，利用牛顿二项式展开。

求解常系数线性齐次递推关系

定理7.4.1：令 q为一个非零数，则 $h_n= q^n$ 是常系数线性齐次递推关系

$h_n - a_1h_{n-1} - a_2h_{n-2} - \ldots - a_kh_{n-k} = 0$

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (a_k\neq 0,\ n\geq k) \quad (1)$$

的解当且仅当 q 是多项式方程

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_{k-1}x - a_k=0 \quad (2)$$

的一个根.

若多项式方程 (2) 有 k个不同的根 $q_1, q_2,\ldots, q_k$, 则

$$h_n=c_1q_1^n+ c_2q_2^n+\ldots+ c_kq_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解：任意给定初始值$h_0, h_1, \ldots,h_{k-1}$, 都存在$c_1, c_2,\ldots, c_k$ 使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列。

求解常系数线性齐次递推关系

定理7.4.2 令$q_1, q_2,\ldots,q_t$为常系数线性齐次递推关系:

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (n\geq k) \quad (1)$$

的特征方程的互异的根。

如果 q_i 是 (1)的特征方程的 s_i 重根，那么该递推关系的通解中对应于q_i的部分为

$$H_n^{(i)}= c_1q_i^n+c_2nq_i^n+\ldots+c_{s_i}n^{s_i-1}q_i^n,$$

且该递推关系的通解为:

s_i项的和

$$h_n= H_n^{(1)} + H_n^{(2)} +\ldots+ H_n^{(t)}$$

常系数线性非齐次递推关系

非齐次线性递推关系：

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}+b_n，(a_k, b_n\neq 0, n\geq k)$$

- 特征函数法

(1) 求齐次关系的一般解

(2) 求非齐次关系的一个特解

(3) 将一般解和特解结合,通过初始条件确定一般解中出现的常系数值

- 生成函数法

特殊计数序列

- 差分数/序列
  - 计算一般项是多项式的序列的部分和
- 第二类**Stirling**数 $S(p, k)$：把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数
- $S^{\#}(p, k)$：把 p元素集合划分到 k个非空、可区分的盒子的划分数
- **BELL**数将 p元素集合分到非空且不可区分盒子的划分数
- 第一类**Stirling**数 $s(p, k)$是将p个有标志的物体排成 k个非空的循环排列方法数
- 分拆数
- **Catalan**数

排列和组合生成算法

- 排列生成算法
  - 递归方法
  - 邻位替换
  - 逆序生成算法
- 生成组合算法
  - 字典序
  - 组合压缩序
  - 反射**Gray**序（逐次法）
- 生成 r组合算法
  - 字典序 r组合生成算法

二项式系数

- 帕斯卡三角形
- 二项式定理
- 二项式系数的单峰性
- 多项式定理
- 牛顿二项式定理

鸽巢原理

- 主要内容
  - 鸽巢原理的简单形式
  - 鸽巢原理的加强形式
  - Ramsey定理

定理3.1.1 如果把$n+1$个物体放进 n个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或者更多的物体。

定理3.2.1 令q_1，q_2，…，q_n为正整数.若将

$$q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$$

个物体被放进n个盒子内，那么，

- 或者第1个盒子至少含有q_1个物体，
- 或者第2个盒子至少含有q_2个物体，…，
- 或者第n个盒子至少含有q_n个物体。

平均原理：设m和n都是正整数。如果m个物体放入n个盒子，则至少有一个盒子包含至少[m/n]个物体。

Pólya计数

- 非等价着色数的计算

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即，C中非等价的着色数等于在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

计算$|C(f)|$的方法：

- ✓ 直接计算
- ✓ 循环因子分解

- 各颜色使用特定次数时的非等价着色数的计算
  - ✓ 循环因子分解 → 循环指数 → 生成函数

题型介绍

- 填空题（10空，每空5分）
- 计算题、证明题

男主人有 7 位男性朋友和 5 位女性朋友，女主人有 5 位男性朋友和 7 位女性朋友，要办一个家庭宴会，各邀请 6 位朋友，其中男女各 6 位，一共有 267148 种方案。

对于大小为 $2n$ 的多重集 $\{n\cdot a, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$，它的 n-组合数为 2^n。

已知 $\{1,2,\ldots,8\}$ 的一个排列的逆序列为 5，1，4，0，3，2，1，0，则该排列为 42876135。

8 位男士参加宴会，进场时将帽子随机往帽架上放，散会时又随机拿了 1 顶帽子，问全部拿错的情况有 D_8 种，至少有一位男士拿对的情况有 $8! - D_8$ 种，至少有三位男士拿对的情况有 $8!-D_8-C_8^1D_7-C_8^2D_6$ 种。

1–9999 之间的整数中各位数字之和等于 7 的数共有 120 个。

（例如 1231 的各位数字之和为 7）。

ab ac ad ae
bc bd be cd ce de

已知 S = {a, b, c, d, e}，则 S 的最大反链为 ________

设 h_n 是把 1 行 n 列棋盘的方格用红、黄和蓝色着色，并使得没有着成红色的方格相邻的着色方法数，则 h_n 满足的递推关系为 $h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2}$ $(n \geq 2)$。

$h_0 = 1$ $h_1 = 3$

把 n 个不同颜色球分到 k 个无区别的盒子$(n \geq k)$，且盒子允许为空，方案数为 $S(p,1) + S(p,2) + \cdots + S(p,k)$。

二、证明：对任意的 $n+1$ 个整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ 存在两个整数 a_i 和 a_j，$i \neq j$，使得 $a_i - a_j$ 能够被 n 整除。（10 分） 简单

8192

三、8 个有区别的球放进 4 个有标志的盒子，要求第 1、2 两个盒子必须有奇数个球，第 4 个盒子有偶数个球，一共有多少种放法？（10 分）

四、求解非齐次递推关系 $h_n = h_{n-1} + 6h_{n-2} + 3^n$，其中 $h_0 = 5$，$h_1 = 2$。（10 分）

$\frac{51}{25}3^n + \frac{74}{25}(-2)^n + \frac{3n}{5}\cdot 3^n$

五、设 n 和 m 是非负整数且 $m \geq n$。有 $m+n$ 个人站成一队要进入剧场，入场费为 50 元。这 $m+n$ 个人中 m 个人有 50 元纸币，而 n 个人只有 100 元纸币。售票处开门时使用一个空的收银机。求解：这些人以某种方式排列使得在需要的时候总有零钱可以找的队列数目（需要给出计算过程）。（10 分） $\frac{m-n+1}{m+1}\binom{m+n}{n}$