第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理

6.2 带重复的组合

6.3 错位排列

6.4 带有禁止位置的排列

6.5 另一个禁止位置问题

6.4 带有禁止位置的排列

设$X=\{1, 2,\ldots, n\}$，它的排列用$i_1i_2\ldots i_n$表示，错位排列是使得 $i_1\neq 1, i_2\neq 2,\ldots, i_n\neq n$ 的排列。

$i_1\notin\{1\}, i_2\notin\{2\},\ldots, i_n\notin\{n\}$

- 扩展：

令$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是$\{1, 2, \ldots, n\}$的子集 (可以为空集)，用 $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 表示$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列 $i_1i_2\ldots i_n$ 的集合，使得：$i_1\notin X_1$， $i_2\notin X_2$， …， $i_n\notin X_n$

记 $p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |P(X_1, X_2, \ldots, X_n)|$， 表示 $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 中排列的个数。

例：$X_1 = \{1, 2\}, X_2 = \{2, 3\}, X_3 = \{3, 4\}, X_4 = \{4,1\}$是$\{1, 2, 3, 4\}$的子集，求$p(X_1, X_2, X_3, X_4)$。

解：（方法1：直接计算）

$P(X_1, X_2, X_3, X_4)$中的排列$i_1i_2i_3i_4$满足下列条件：

$$i_1 \neq 1, 2;\ i_2 \neq 2, 3;\ i_3 \neq 3, 4;\ i_4 \neq 1, 4。$$

等价于i_1=3或4；i_2=1或4；i_3=1或2；i_4=2或3。

因此，$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = \{3412, 4123\}$

$$p(X_1, X_2, X_3, X_4) = 2$$

（方法2：容斥原理）

例：$X_1=\{1, 2\}, X_2=\{2, 3\}, X_3=\{3, 4\}, X_4=\{4,1\}$是 $\{1, 2, 3, 4\}$的子集，求$p(X_1, X_2, X_3, X_4)$。

解：（方法2：容斥原理）

设集合$\{1, 2, 3,4\}$的一个排列为 $i_1 i_2 i_3 i_4$，A_j表示 $i_j \in X_j$的排列的集合, j=1, 2, 3, 4, 则

$$p(X_1, X_2, X_3, X_4)=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|。$$

令 S表示$\{1, 2, 3, 4\}$的所有排列的集合，则$|S|=4!$。

$|A_1|=\binom{2}{1}3!=|A_2|=|A_3|=|A_4|$,

$|A_1\cap A_2|=(2+1)2!=|A_1\cap A_4|=|A_2\cap A_3|=|A_3\cap A_4|$

$|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_4|=\binom{2}{1}\binom{2}{1}2!$。

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\ldots$（略）。

例：假设同学们做课堂测试，每位同学选择一位同学给其评分，且不能给自己评分，问有多少种不同的选择方法?

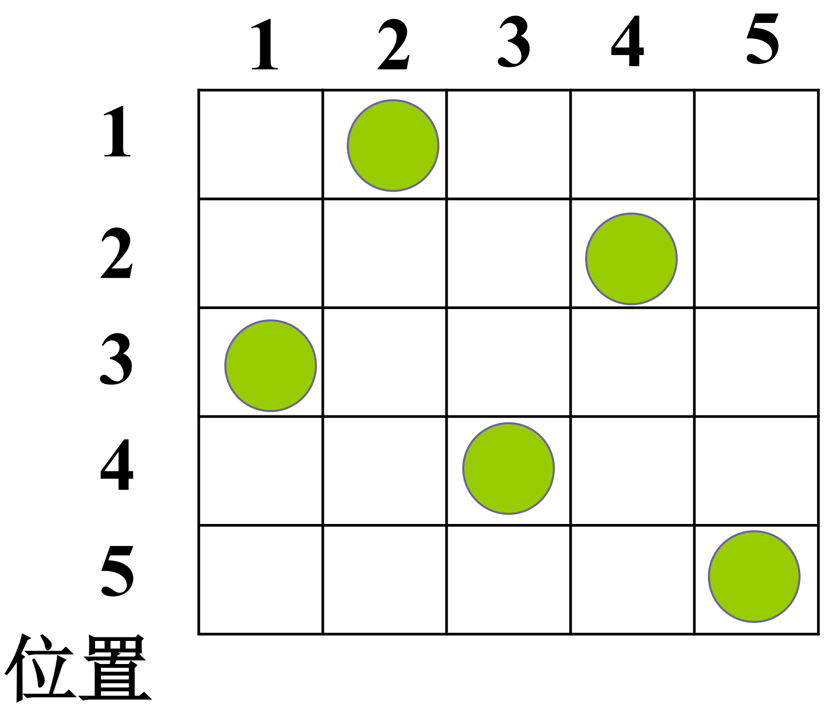
例：假设同学们做两次课堂测试，每次每位同学选择一位同学给其评分，且不能给自己评分，且在第二次课堂测试中，每位同学不能选择上次测试给自己评分的同学评分。问有多少种不同的选择方法安排两次课堂测的评分?

带禁止位置的“非攻击型车”

$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 对应于棋盘上以方格

$$(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (n, i_n)$$

为坐标的n个车的位置



n个车位于不同的行与不同的列

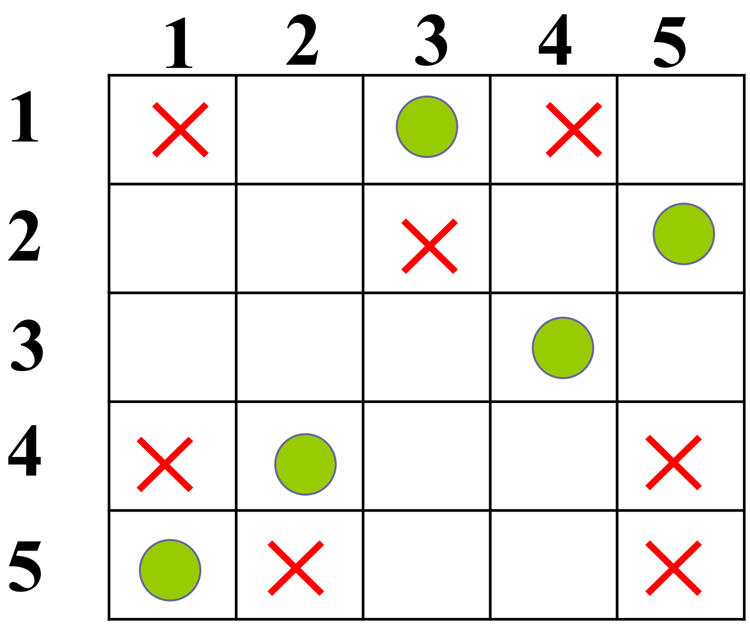
2 4 1 3 5

带禁止位置的“非攻击型车”

$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 对应于棋盘上以方格

$$(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (n, i_n)$$

为坐标的n个车的位置



设 $n=5$, $X_1=\{1, 4\}$, $X_2=\{3\}$, $X_3=\emptyset$, $X_4=\{1, 5\}$, $X_5=\{2, 5\}$,

则 $P(X_1, X_2, \ldots, X_5)$中的排列与左图所示的在棋盘上有禁止位置的5个非攻击型车的放置一一对应。

➡ 3 5 4 2 1

问题：满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，$j=1, 2, 3, 4, 5$，共有多少种放置非攻击型车的方法？

满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n， 共有多少种放置非攻击型车的方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

由容斥原理得，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$

$= n! - \sum |A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(1) $|A_j| = |X_j|(n-1)!$ (j=1, 2, …, n)

$\Sigma |A_j| = (|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|)(n-1)!$

令 $r_1 = (|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|)$

则 $\Sigma |A_j| = r_1 (n-1)!$

满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，共有多少种放置非攻击型车的方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

由容斥原理得，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$

$= n! - \sum|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(2)考虑 $A_i \cap A_j$：在第 i、j 行，车分别放入了 X_i 和 X_j 所给出的禁止位置中。

$|A_i \cap A_j| = |X_i| \cdot |X_j|$ ？

X_i 和 X_j 可能相交不为空

满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，共有多少种放置非攻击型车的方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

由容斥原理得，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$

$= n! - \sum|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(2)考虑 $A_i \cap A_j$：在第 i、j 行，车分别放入了 X_i 和 X_j 所给出的禁止位置中。

设 r_2 是把所有任意两个非攻击型车放到棋盘禁止位置上的方法数，

则 $\Sigma|A_i \cap A_j| = r_2(n-2)!$

如何计算 r_2？

满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，i=1, 2,…, n，共有多少种放置方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

由容斥原理得，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ \ldots \ \cap \overline{A_n}|$

$= n! - \sum|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(3) 令 r_k 为把所有任意 k 个非攻击型车放到棋盘的禁止放置的位置上（由 X_{i_k} 给出）的方法数（$k \le n$），则

$$\sum|A_{i_1} \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = r_k(n-k)!$$

定理6.4.1 将n个非攻击型不可区分的车放到带有禁止位置的$n\times n$的棋盘中，放法总数等于：

$r_1, r_2, \ldots, r_n$的计算依赖于具体的问题！

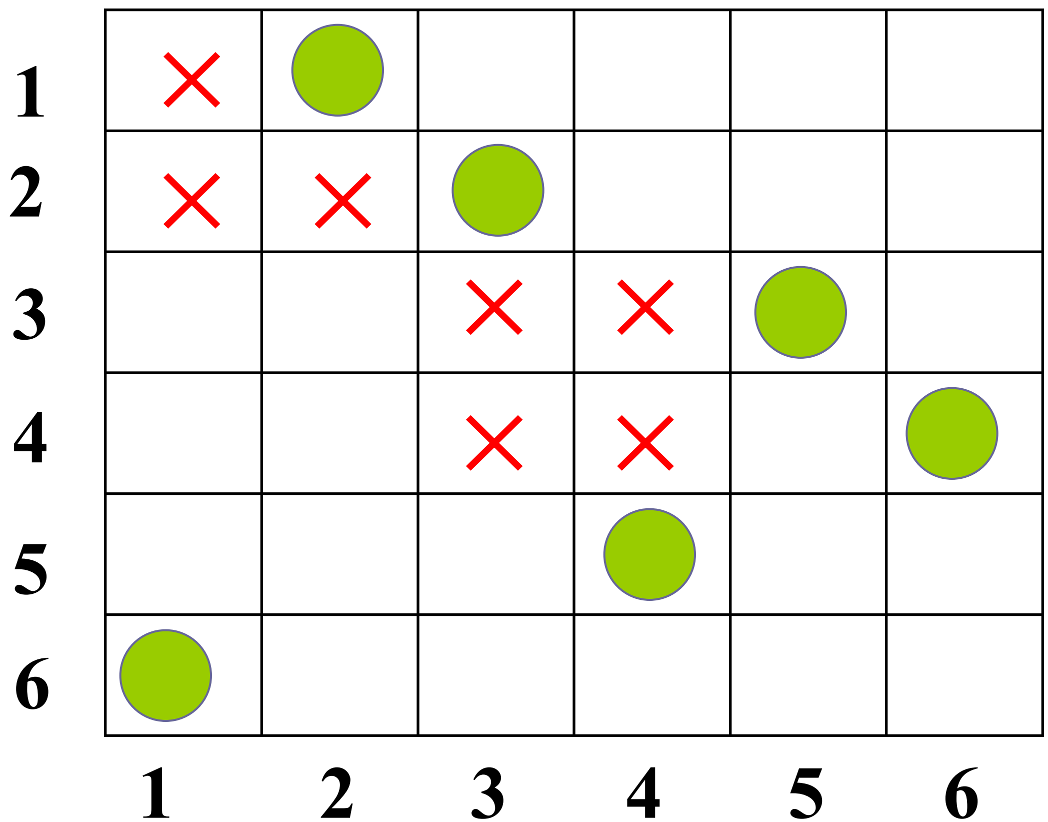
$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots + (-1)^k r_k(n-k)! + \ldots + (-1)^n r_n$$

定理6.4.1 将n个非攻击型不可区分的车放到带有禁止位置的$n*n$的棋盘中，放法总数等于：

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^k r_k(n-k)!+\ldots+(-1)^n r_n$$

- 任意两个车不在同一行或同一列
- r_k：所有的k个车放置在其禁止位置上的放置方法数，
  $k=1, 2, \ldots, n$
- r_k的计算不考虑剩下的$n-k$个车的放置

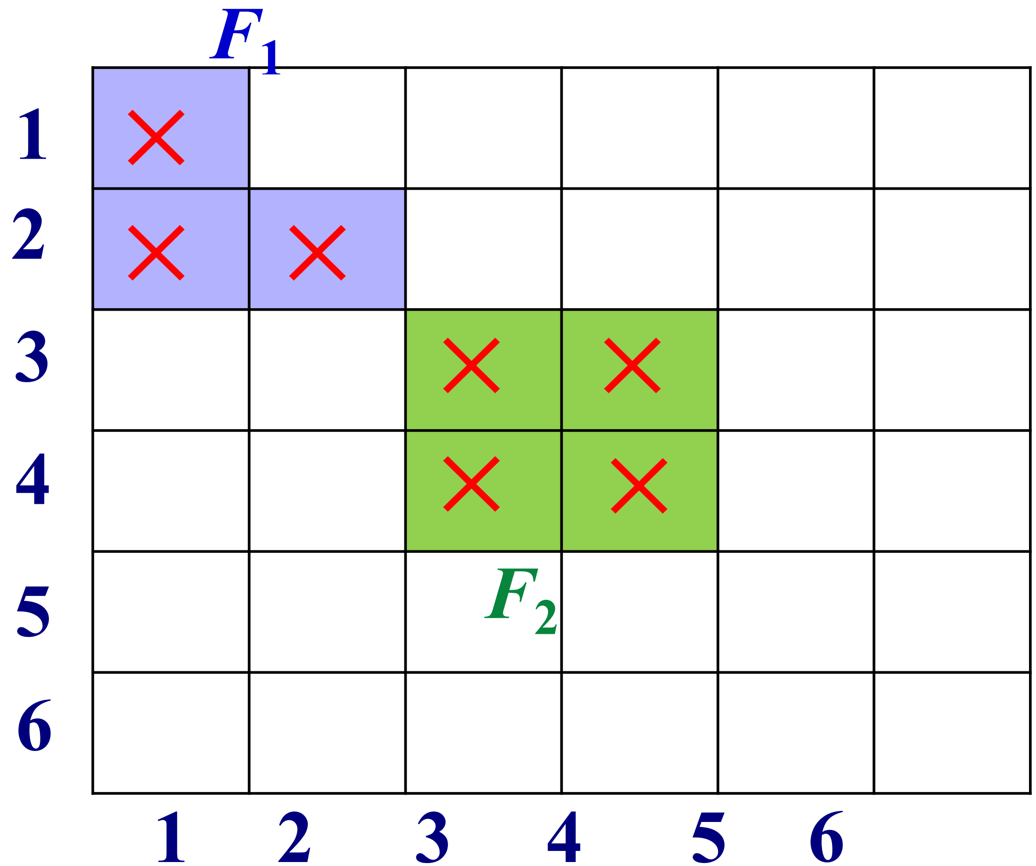
例：带禁止位置的“非攻击型车”



求r_k

- r_1： 所有1个非攻击车放入禁止位置的可能数
  - r_1=1+2+2+2=7
- r_2： 所有2个非攻击车放入禁放位置的方法数
  (分F_1 , $F2$讨论)
  - F_1 中放入两个：1
  - F_2 中放入两个：2
  - F_1，F_2 中分别放入一个：3·4=12

因此，r_2=1+2+12 =15。



r_3：3个非攻击车放入禁放位置的可能数

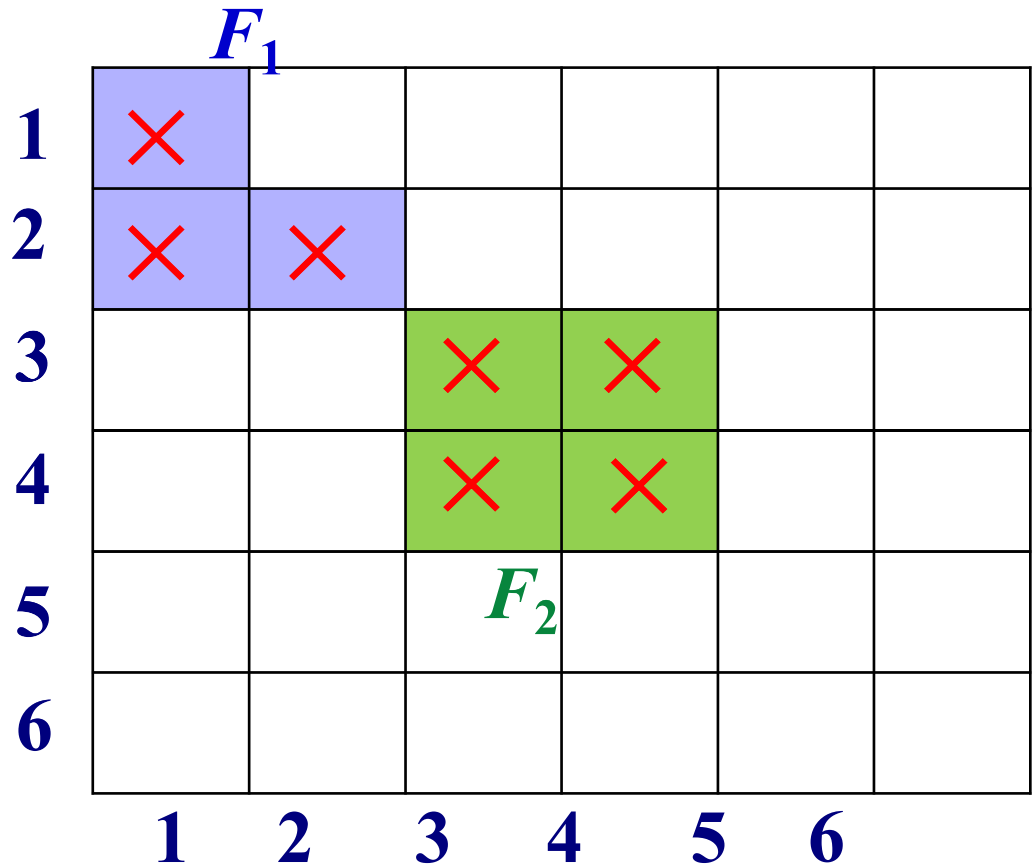
(分F_1, F_2讨论)

- F_1中放1个，F_2中放2个：
  $3 \cdot 2 = 6$
- F_1中放2个，F_2中放1个：
  $1 \cdot 4 = 4$

因此，$r_3 = 6 + 4 = 10$。

r_4：只能F_1与F_2中各放2个：
$1 \cdot 2 = 2$

$r_5 = r_6 = 0$



由定理6.4.1，在上述棋盘中放入6个不可区分的非攻击型车，且没有车占据禁放位置的方法数等于：

$$6! - 7 \cdot 5! + 15 \cdot 4! - 10 \cdot 3 + 2 \cdot 2! = 226$$

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题

另一个禁止位置问题

例：设一个班级 8个学生每天练习走步。这些学生站成一列纵队前行，第二天重新排队，使得没有一个学生前面的学生与第一天在他前面的学生是同一个人。他们有多少种方法交换位置？

第一天：1 2 3 4 5 6 7 8

第二天：3 1 4 5 8 2 7 6

确定｛1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8｝的排列中不会出现 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78的那些排列的数量。

存在相对禁止位置的排列的计数问题

3 2 1 4 8 5 7 6

相对禁止位置排列计数

Q_n：$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列中没有$12, 23, \ldots, (n-1)n$ 这些模式出现的排列的个数

$n=1$: 1 $\qquad Q_1=1$

$n=2$: 12, $\boxed{21}$ $\qquad Q_2=1$

$n=3$: 123, $\boxed{132}$, $\boxed{213}$, 231, 312, $\boxed{321}$ $\qquad Q_3=3$

$n=3$: $\quad Q_4=11$

用容斥原理计算Q_n:

令 S 为{1, 2, …, n}的全部排列,

Q_n是S中没有12, 23, …, (n-1)n 这些模式的排列的个数。

令 A_i是 i (i+1) 出现的排列的集合，i=1, 2,.., n-1，则有

$$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}|$$

$$= |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|$$

令 A_i是 $i\ (i+1)$ 出现的排列的集合，$i=1,2,..,n-1$

计算A_i: A_1可看作 12, 3, …, n 的所有排列的集合，因此$|A_1|=(n-1)!$。显然，由对称性，对任意 i，都有$|A_i|=(n-1)!$。

计算$A_i \cap A_j$：讨论两种情况：

(1) $A_i \cap A_{i+1}$ 可看作1, 2, …, (i, i+1, i+2), i+3, …, n 的所有排列的集合，因此 $|A_i \cap A_{i+1}|=(n-2)!$。

(2) $A_i \cap A_j$ ($j>i+1$)可看作 1, 2,…, (i, i+1), i+2, …, (j, j+1), …, n 的所有排列的集合，因此 $|A_i \cap A_j|=(n-2)!$。

由对称性，对任意 i,j，都有$|A_i \cap A_j|=(n-2)!$。

同理可证，对于每个k子集$\{i_1,\ldots, i_k\}$，有

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

用容斥原理计算Q_n:

令 S 为{1, 2, …, n}的全部排列,

Q_n 是 S 中没有12, 23, …, (n-1)n 这些模式的排列的个数。

令A_i是 $i(i+1)$ 出现的排列的集合，i=1, 2,…, n-1，则有

$$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}|$$

$$= |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

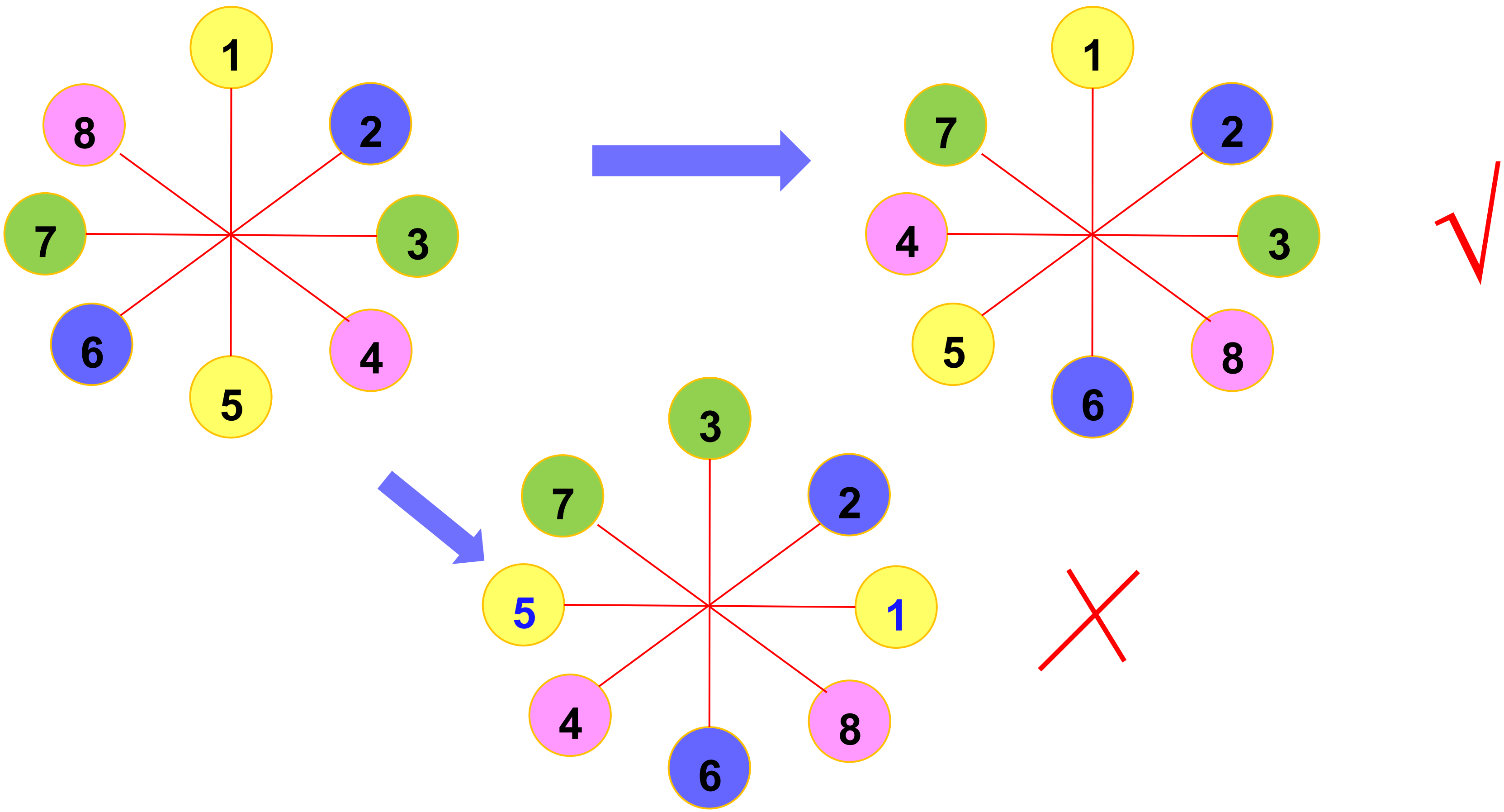
$$+ \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|$$

定理 6.5.1 对于n≥1,

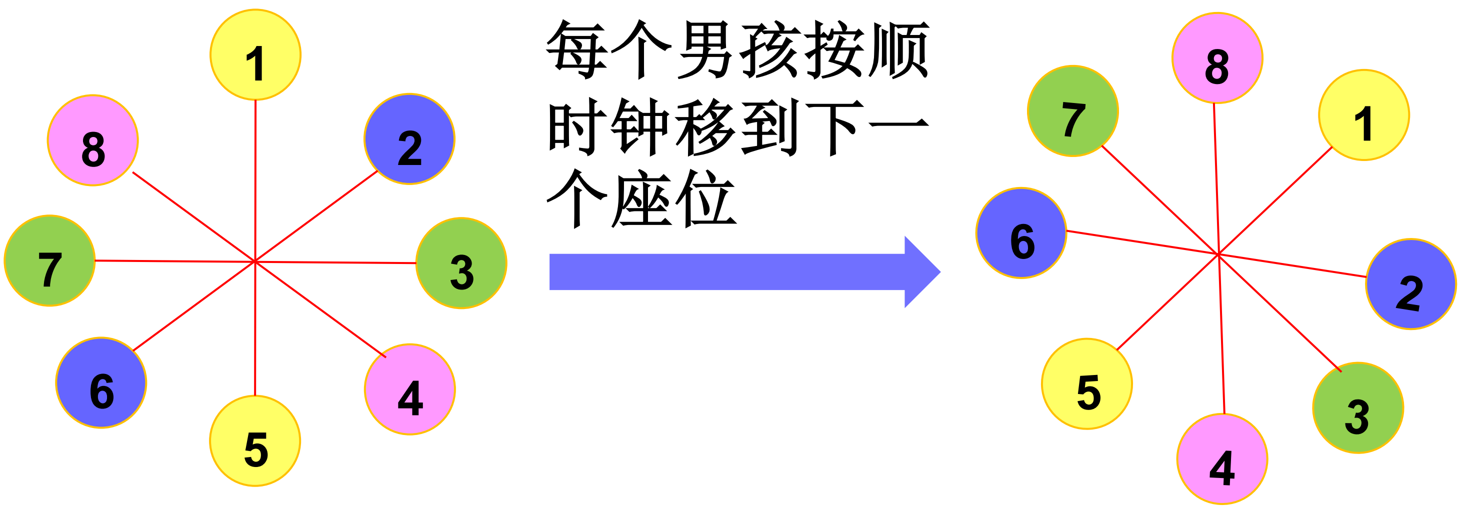
$$Q_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

$$= n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

例：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？

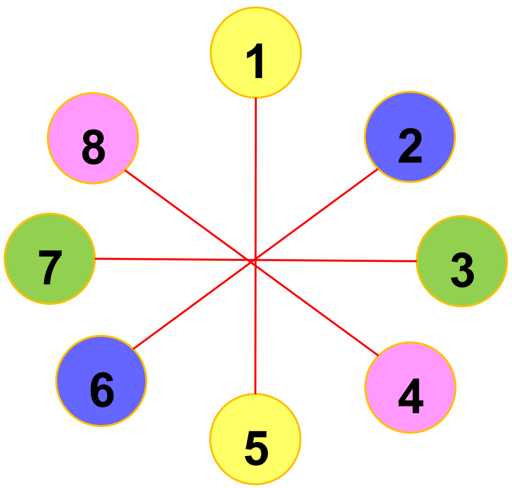


例：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



问题：两者是否是同一种坐法？不是

例：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



解：应用容斥原理

假设 8个男孩分成了四对：

(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)。

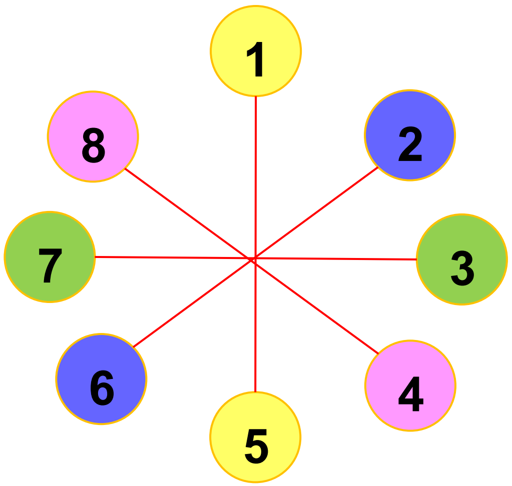
假设A_1, A_2, A_3, A_4分别表示仍然有(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)出现的坐法的集合。

则使得每人面对的男孩都不同的坐法的数目为：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$$

由于每个座位代表一种不同的动物， 8位男孩的排列总数为 8!。

例：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



计算$|A_1|$：因为每个座位都代表一种不同的动物，因此 $|A_1|= 8*6!$ 。

显然，由于对称性，$|A_i|= 8*6!, i=1,2,3,4.$

$|A_1 \cap A_2|= 8*6*4!=48*4!$，

同样，由于对称性，

$|A_i \cap A_j|=48*4!, i, j =1, 2, 3, 4, i \neq j.$

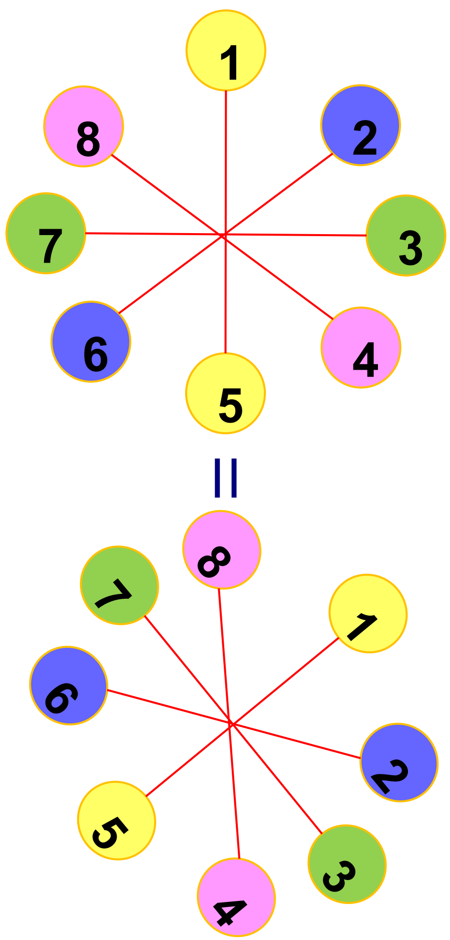
计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8*6*4*2!$,

同样，由于对称性,$|A_i \cap A_j \cap A_k|=192*2!, i, j, k =1, 2, 3, 4, i \neq j \neq k.$

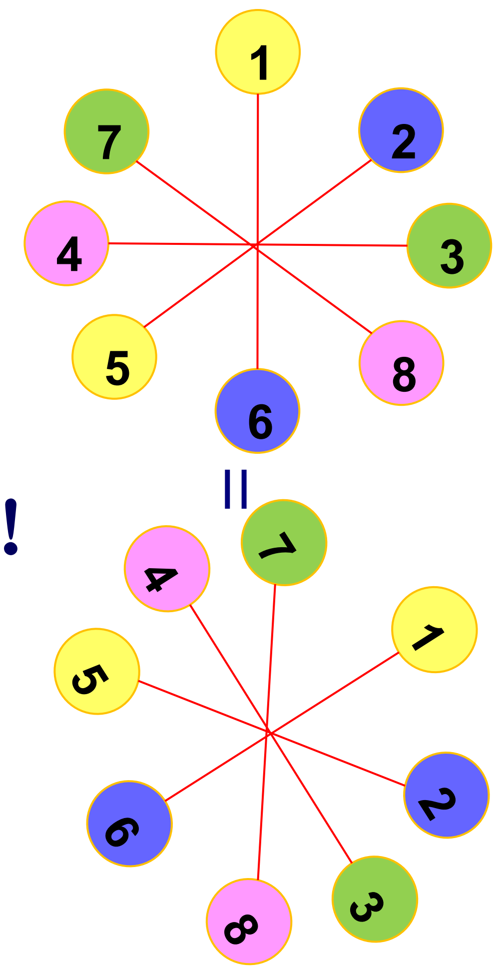
计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 | = 8*6*4*2$。

由容斥原理可得（略）。

例：旋转木马有8个座8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。假设所有的座位都是一样，有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



循环排列！



Q_n 与 D_n的关系

- $D_n = n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!})$
- $Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$

结论： $Q_n=D_n+D_{n-1}$

小结

- 容斥原理
- 带重复的组合
- 错位排列
- 带有（绝对）禁止位置的排列
- 带有（相对）禁止位置的排列

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$