第二章 排列与组合

2.4 多重集的排列
2.5 多重集的组合
2.6 有限概率

北航计算机学院：李建欣

Tel：82339274（G506）

E-mail：lijx@act.buaa.edu.cn

https://myjianxin.github.io/

例子：排列

- 模型：投球入盒模型（每盒1个）
- 编号为1、2、3各若干乒乓球
  - 如果各编号乒乓球无限多， 取出4个排列。
    - 排列数是3^4种

      (无限重复排列）
  - 如果1号乒乓球2个，2号1个，3号3个，4号1个
    - 全排列数？4排列数？

      (有限重复排列）

主要内容

- 2.4多重集**排列**及应用
  - 无限重复：
    - r排列（模型区别）---证明---实例
  - 有限重复：
    - 全排列—证明—实例，模型等价：排列 vs 划分？
    - r排列：思考？简单情形如何处理？
    - 典型应用：非攻击车的摆放

主要内容

- 2.5多重集**组合**及应用
  - 模型抽象：方程非负整数解个数
  - 求解方法：**数字法、隔板法、书籍证明**
  - 练习
    - 问题抽象转化：序列个数
    - 重复数转化：n_i的等价性
    - 约束条件：变量替换
    - 通用形式
- 2.6 有限概率（略）

2.4 多重集合

- 多重集：允许元素重复。例如：

  M＝{a,a, b, c,c,c}

  称2个类型a, 1个类型b, 3个类型c，也可写作

  M＝{$2\cdot a$, $1\cdot b$, $3\cdot c$}，2,1和3是重复集的重数。

  - 注：一般多重集不是集合。集合是重数为1的多重集。

多重集的排列–无限重复数

- 定理2.4.1：令S是多重集，它有k种不同的元素，每个元素都有无限重复次数，那么，S的r-排列个数为k^r

注：若S的每种元素的重数都大于或等于r？

结论同样成立。

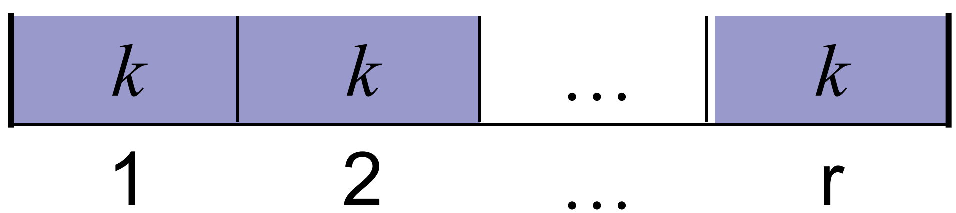
对比：有k个不同的元素，投入到r个不同盒子（容量大于等于0），有多少种？

r^k =每个球可以有r种选择

定理2.4.1的证明

- 证明：S的一个r-排列的第一项可选择k种元素中任何一种，其他$r-1$项同样有k种选择，由**乘法原理**共有k^r种。

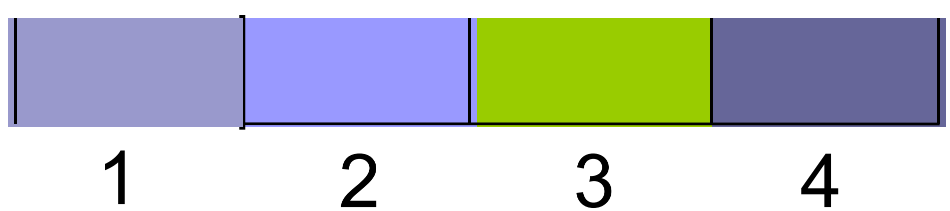
注：**问题等价于k个数字r–排列(允许重复)个数。**



小练习：无限重复数多重集

- **例1**：具有4位数字的三进制数的个数是多少？

  问题等价于：多重集$\{\infty\cdot 0, \infty\cdot 1, \infty\cdot 2\}$的4-排列个数。有$3^4$个。



多重集的排列–有限重复数（例）

- 数字1,1,1, 3, 8可以构造出多少个不同的5位数？
- 这是一个3重集的排列问题。
- 解：数字3可能位置选择数为5，3选定情况下，8选择可能数为4，故由乘法原理

$5 \times 4 = 20$种。

不等于3^5

（有限）多重集的排列

- **定理2.4.2：** 令S是多重集，它有k种不同的元素，每种元素的重复数分别为n_1，n_2，…，n_k，那么，S的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

其中$n= n_1+n_2+\ldots+n_k$

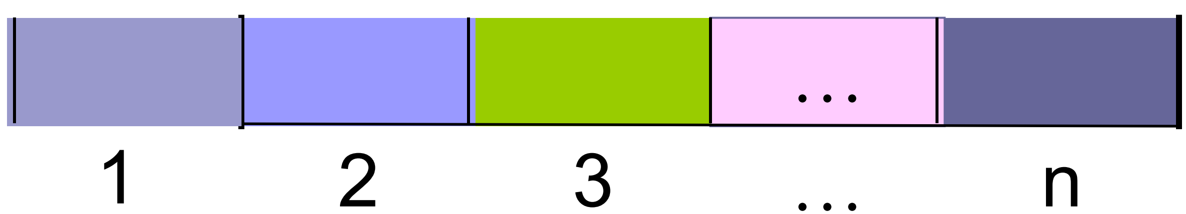
定理2.4.2证明

设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，$S$的$n$-排列。问题相当于将所有这些元素放到$n$个有序位置的方法。

n_1个a_1的放置方法有$\binom{n}{n_1}$种，

n_2个a_2的放置位置剩下$n-n_1$个，因此，有$\binom{n-n_1}{n_2}$种。

继续下去，运用乘法原理。



定理2.4.2证明（续）

S的排列总数为：

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$$

对角线项相约去！

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\ldots n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\ldots-n_k)!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

实例

- 例：求字母多重集$\{1\cdot M, 4\cdot I, 4\cdot S, 2\cdot P\}$的排列数。
- n=1+4+4+2=11，排列总数为：$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

2.4 多重集排列与集合划分

- **多重集排列的另一种解释**：对n个元素集合划分为指定大小的多个部分，每个部分指派标号。
- 例如：$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2\}$, 集合$S$的排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!}=\frac{n!}{n_1!(n-n_2)!}=\binom{n}{n_1}$$

也是n元素集合的n_1-组合数。

例：集合{a, b, c, d}将其中元素放入2个具有标号的盒子B_1和B_2, 这2个盒子分别装2个元素（即集合划分为两个有标号的部分），共有?种方法。

定理2.4.3 设$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$, 将n个元素集合划分为做了标签的k个盒子$B_1, B_1, \ldots, B_k$, 其中B_i盒子含有n_i个元素，方法数为

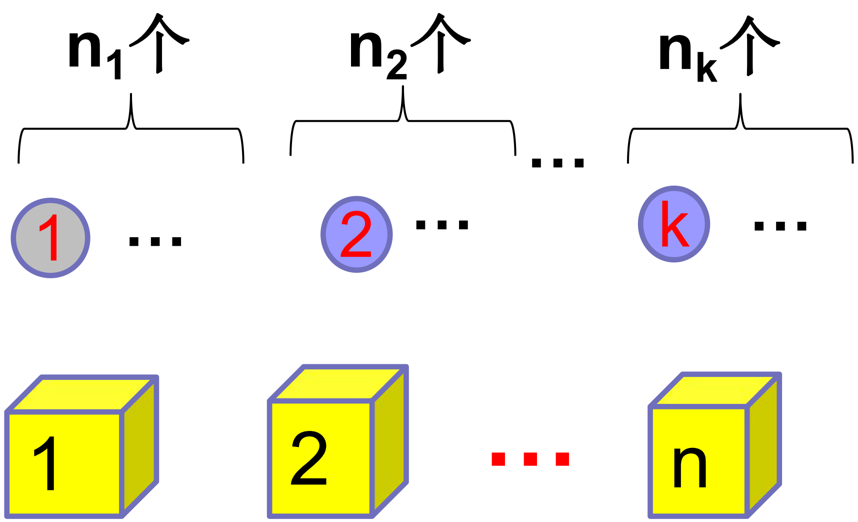
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

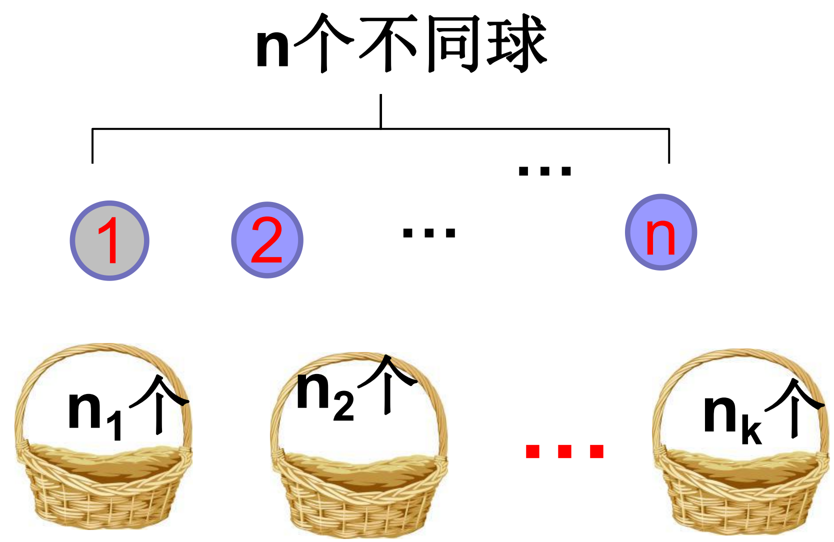
若盒子无标号，划分数为

$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

两种模型的等价性

- k种球，重复数依次是 $n_1,n_2,\ldots n_k$
- n种不同球，放入带标签k个篮子里（相应容量为n_i）





思考：当篮子内容量不设限制？（不指定大小）

进一步思考：有限重复？

- 无限重复集的r排列
- 有限重复的全排列。
- **有限重复的r排列？**

$M = \{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$ 的3排列？

	全排列	r排列
k种元素无限重复	✖	***k^r***
k种元素有限重复	$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$	?

进一步思考：有限重复?

- 多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，令$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，求$S$的***r*-排列数**？其中$r<n$.

1. 这个问题需要在第7章，生成排列的方法中给出求解方法。
2. 但对于某些特殊的r-排列，可以借助之前的方法进行计算。

例：一个多重集r排列的求解

- 多重集$S=\{3\cdot a, 2\cdot b, 4\cdot c\}$，求$S$的8-排列的个数。

解： S的8-排列是S除去一个元素的子集的排列。可分为三种情况：

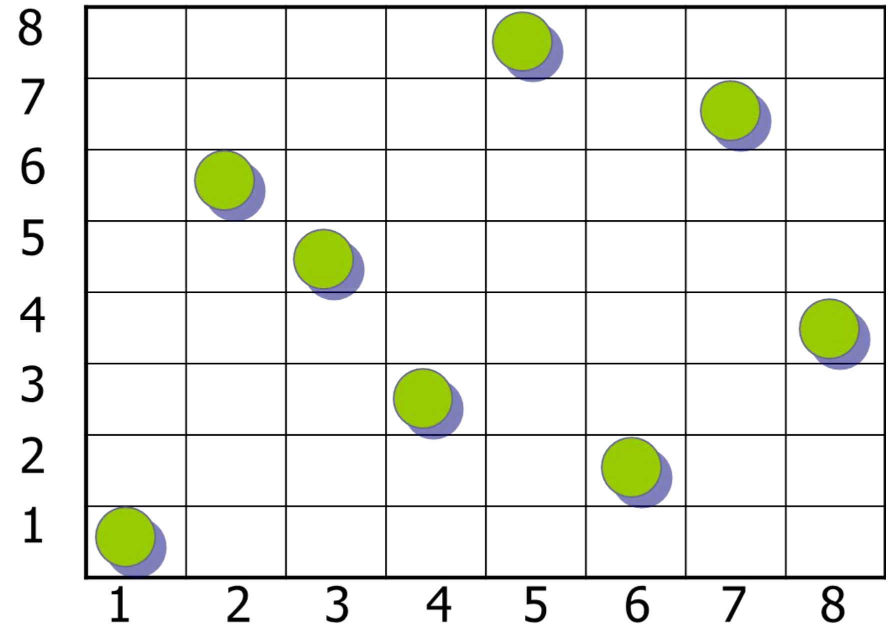
1）除去1个a即$\{2\cdot a, 2\cdot b, 4\cdot c\}$： $\frac{8!}{2!2!4!}=420$

2）除去1个b即$\{3\cdot a, 1\cdot b, 4\cdot c\}$： $\frac{8!}{3!1!4!}=280$

3）除去1个c即$\{3\cdot a, 2\cdot b, 3\cdot c\}$： $\frac{8!}{3!2!3!}=560$

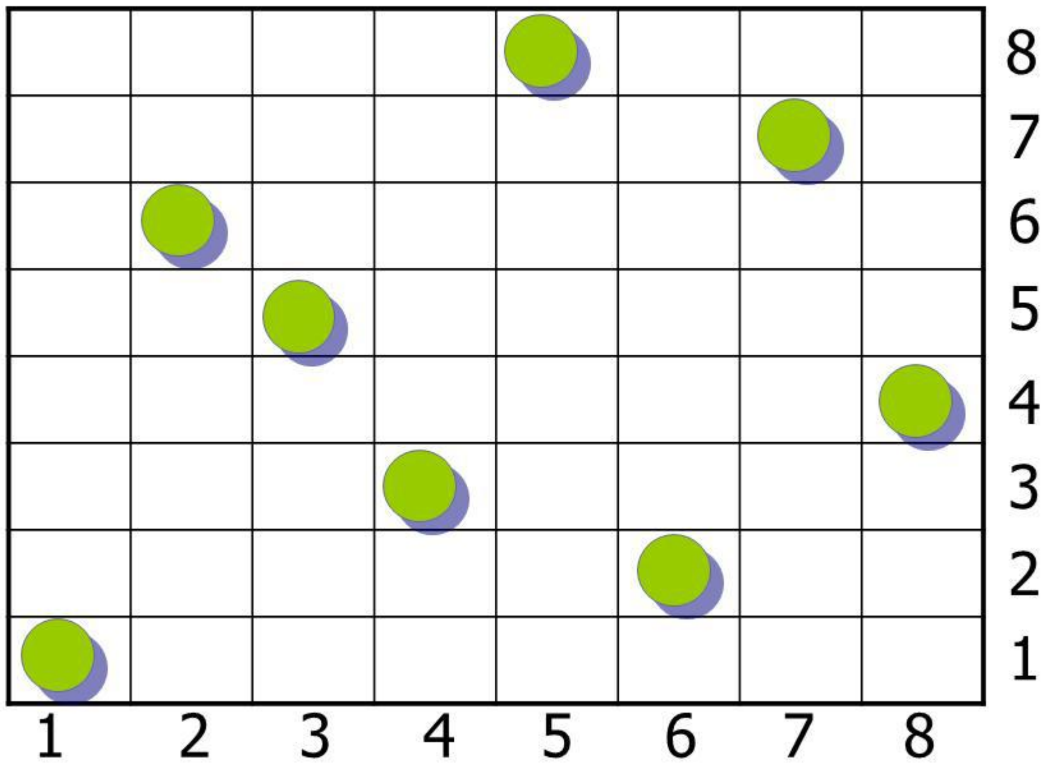
典型应用:非攻击性车摆放

- 问题1：非攻击性车摆放，等价于什么问题？
- 问题2：当8个车有8种颜色，方法数？
- 问题3：当8个车，1个红车，3个蓝车和4个黄车



典型应用

- 例：在8×8的棋盘上，对于8个非攻击型车有多少种可能的摆放法？



典型应用

- 8个车各占一行(列)，具有坐标

$$(1,\ j_1)，(2,\ j_2)，\ \ldots\ (8, j_8)$$

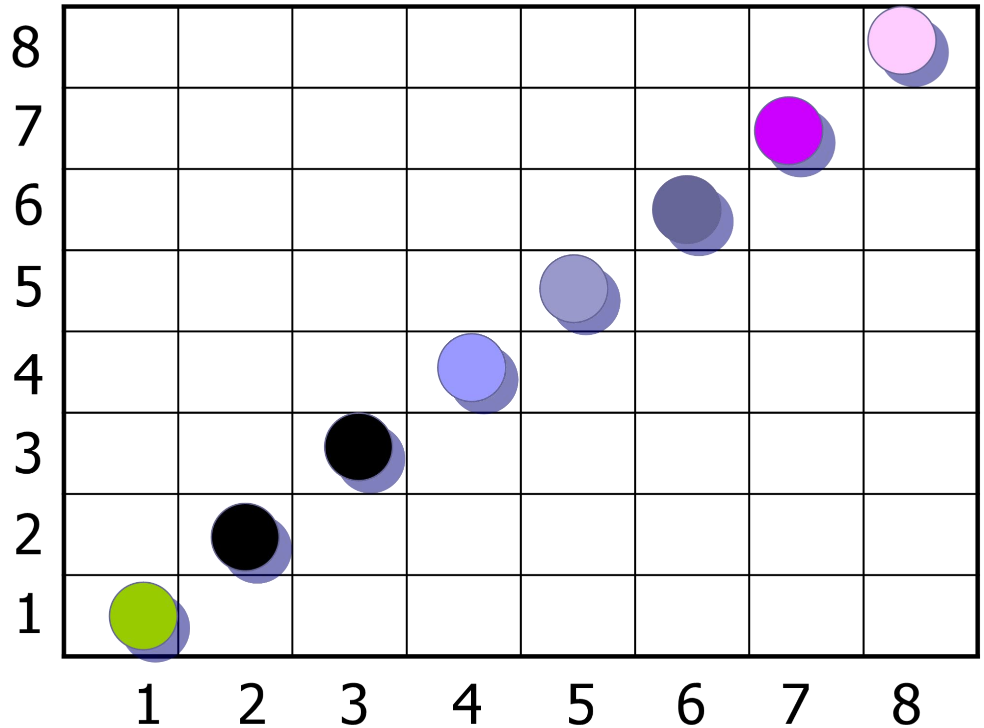
其中，$j_1, j_2,\ldots, j_8$互不相同，即是$\{1,2,\ldots,8\}$的一个排列，因此，总数为8!。

$\{1,2,\ldots,8\}$的排列$\leftrightarrow$非攻击型车的摆法

提示：一一对应

- “一一对应”概念是一个在计数中极为基本的概念。一一对应既是单射又是满射。
- 如我们说A集合有n个元素 |A|=n，无非是建立了将A中元与[1,n]元一一对应的关系。
- 在组合计数时往往借助于一一对应实现模型转换。
- 比如要对A集合计数，但直接计数有困难，于是可设法构造一易于计数的B，使得A与B一一对应。

（2）设上例设8各车互相不同，用不同颜色标记。



- 注意到区分8种颜色，实质上考虑8个车的有序排列，那么，共有8!种；由乘法原理共有$8!^2$种。

- 假设1个红车，3个蓝车和4个黄车，即是多重集$\{1\cdot R, 3\cdot B, 4\cdot Y\}$的排列，共有

$$\frac{8!}{1!3!4!}$$

- 因此，由乘法原理，这种情况下的方法：

$$8!\frac{8!}{1!3!4!}=\frac{(8!)^2}{3!4!}$$

- 定理2.4.4：有n个车共k种颜色，其中第一种颜色的车有n_1个，第二种颜色的车有n_2个, …,第k种颜色的车有n_k个，那么，把这些车放到$n\times n$的棋盘上，使得没有车能相互攻击的摆放方法数为：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\cdot n!$$

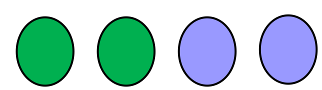
特别的，若颜色互不相同，则为$(n!)^2$

2.5 多重集组合--思考题

Q：本科同学4人一个宿舍，学生可能来之34个不同省市等（学生足够多）。1个宿舍室友能够多少种各类省市的组合？

1. 答案是C(34, 4)？

会缺少如下情形：



2. 答案是34的4次方？

会重复如下情形：

定义：多重集的组合

- 多重集S的一个r-组合是S的**子多重集**。
- 如$S=\{2\cdot a, 1\cdot b, 3\cdot c\}$的3-组合包括：

$$\{2\cdot a, 1\cdot b\}, \{2\cdot a, 1\cdot c\}, \{1\cdot a, 2\cdot c\}, \{1\cdot b, 2\cdot \mathrm{c}\}, \{3\cdot c\}, \{1\cdot a, 1\cdot b, 1\cdot c\}$$

2.5（无限）多重集的组合

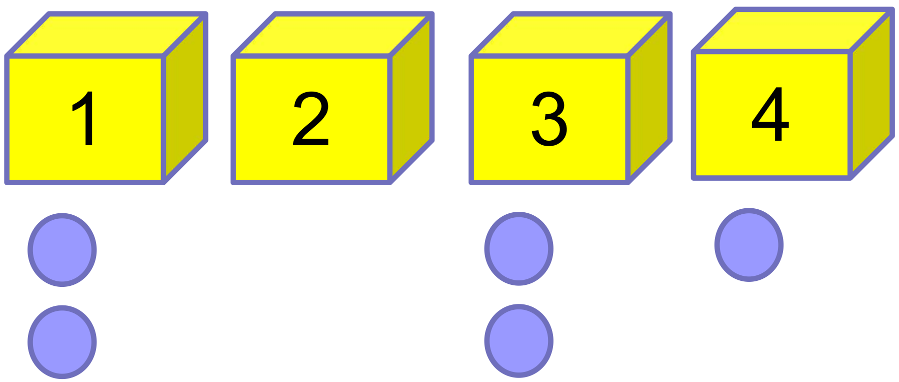
- 类似问题：
  - 某学院有8个研究方向，学生面试12人为一组，则能够多少种各类研究方向组合的答辩组？
  - 假设有k=4个数字，每个数字可以用无数次，其r=5组合数？
  - 方程： $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 的非负整数解的个数？
    - 满足条件 $0\le x_1$， $0\le x_2$， …, $0\le x_k$

  的整数解的个数？

有重组合-理解1

- 假设有k=4个数字，**每个数字可以用无数次**。其r=5组合数为多少？

0, 1, 2, 3, 4



- 例如：{1, 1, 3, 3, 4}

1, 2, 5, 6, 8

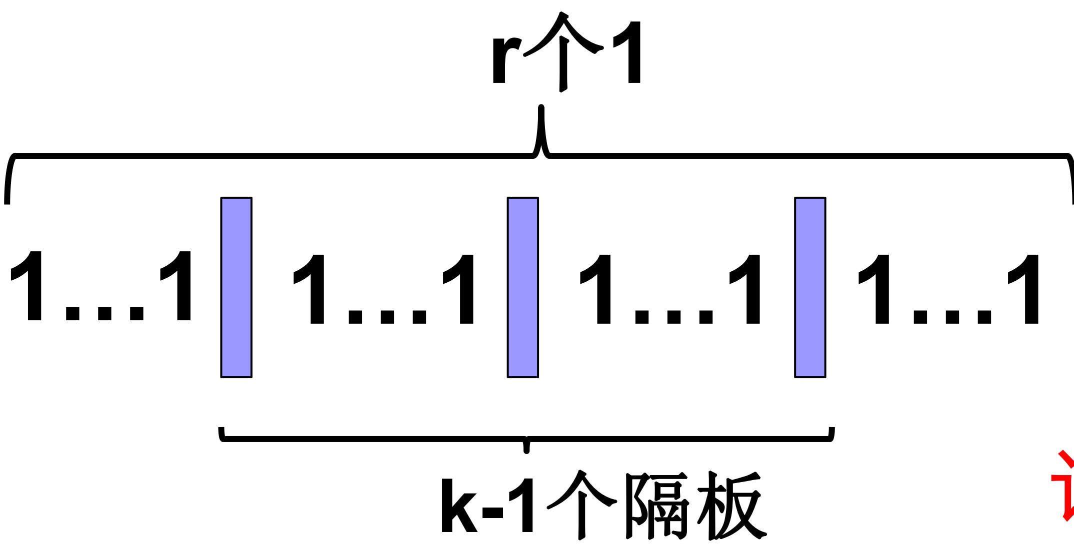
$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$,$1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_r \le$k

$\{a_1, a_2+1, \ldots, a_r+r\text{-}1\}$, 最大值为k+r-1

构造出一个无重组合C(r+k-1, r)

有重组合-理解2

- **隔板法**
  - 在k种不同的元素中取r的组合
    - 相当于将r个相同元素分成k个不同区域
    - 即在r个相同元素间插入k-1个隔板，分成k份



计数为C(k+r-1, r)

定理：无限重数的多重集组合

- **定理2.5.1：令S是多重集，它有*k*个不同的元素，每个元素都有无限重复次数，那么，*S*的*r*-组合个数为**

$$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$$

证明思路：

多重集组合 $\longleftrightarrow$ 不定方程解集 $\longleftrightarrow$ 多重集排列

2.5.1定理的证明

(1) 令S＝{$\infty\cdot a_1$, $\infty\cdot a_2$,…, $\infty\cdot a_k$}，那么S的一个r-组合具有形式{$x_1\cdot a_1$, $x_2\cdot a_2$,…, $x_k\cdot a_k$}，其中

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=r \qquad （3\text{-}1）$$

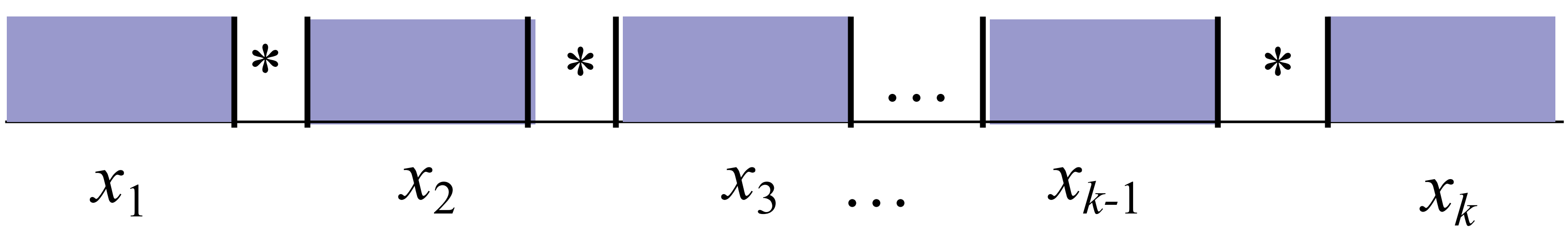
x_i是**非负整数**。

方程（3-1）的任何一个解确定S的一个r-组合，因此，S的r-组合个数等于方程（3-1）解的个数。

2.5.1定理的证明

（2）方程（3-1）解的个数等于多重集$T=\{r\cdot 1, (k-1)\cdot *\}$的排列数（***这是一个巧妙的构思***）。

首先，T的任一个排列中k-1个*把r个1分成k组，即将*的左边和两个*之间看作一个盒子，那么共有k个盒子，如下图所示：



2.5.1定理的证明

令第i个盒子的1的个数为x_i，那么确定了方程（3-1）的一个解；反之，方程（3-1）的任意一个解，将x_i个1放入第i个盒子，也构造出多重集T的一个排列。这样在T的排列和方程（3-1）的解集建立了一个一一对应。

（3）根据多重集排列计数公式得到T：

$$\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = \binom{r+k-1}{r}$$

例1：多重集组合——问题抽象

1. 取自1，2，…，k的长为r的非递减序列个数是多少？（允许重复）

解：（1）取自1，2，…，k的长为r的任一个非减序列，首先可以取r个数，然而有唯一非递减排列。

S的任何一个r-组合可以唯一确定一个长为r的排列。

（2）一一对应多重集S＝$\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \ldots, \infty\cdot k\}$的一个 r-组合。那么，个数为：

$$\binom{r+k-1}{r}$$

例2：多重集组合---重复数等价

1. 令S＝{12·*a*, 12·*b*, 12·*c*}求S的的12-组合个数。

2）重复数为12等价于无限重复：

由定理的证明得到：

$$\binom{12+3-1}{12} = \frac{14!}{12!\,(14-12)\,!}$$

例3：多重集组合---元素约束

?

2. 令S＝$\{12\cdot a, 12\cdot b, 12\cdot c\}$求S的使得3个元素都至少出现一次的12-组合个数。

解：（1）方程$x_1+x_2+x_3=12$（3-2）的正整数解的个数，x_1表示a的在组合出现次数，…$x_i\geq 1$

（2）重复数为12等价于无限重复：

由定理的证明得到：

$$\binom{12+3-1}{12}=\frac{14!}{12!\,(14-12)\,!}$$

例3：多重集组合---变量替换

!

2. 令S＝$\{12\cdot a, 12\cdot b, 12\cdot c\}$求S的使得3个元素都至少出现一次的12-组合个数。

解：（1）方程$x_1+x_2+x_3=12$ （3-2）的正整数解的个数，x_1表示a的在组合出现次数，…$x_i \geq 1$

（2）重复数为12等价于无限重复，变量代换：$y_i=x_i-1$（i=1,2,3），得到方程$y_1+y_2+y_3=9$（3-3），方程（3-3）的非负整数解的个数等于方程（3-2）的正整数解的个数。由定理的证明得到：

$$\binom{9+3-1}{9} = \frac{11!}{9!(11-9)!} = 55$$

例4：多重集组合---练习

3. 方程$x_1+x_2+x_3+x_4=20$的整数解的个数是多少？其中$x_1\geq 3, x_2\geq 1, x_3\geq 0, x_4\geq 5$.

解：作变量代换：$y_1=x_1-3$， $y_2=x_2-1$， $y_3=x_3$，$y_4=x_4-5$，那么，得到方程：$y_1+y_2+y_3+y_4=11$。原方程的解个数与该方程的非负整数解个数相同。故为：

$$\binom{11+4-1}{11}=\binom{14}{11}$$

例5：多重集组合-练习（上界约束）

- 方程$x_1+x_2+x_3+x_4=12$的整数解的个数是多少？其中$0 \le x_1 \le 3$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$.

通用问题：有限重复集r组合问题？

- 令多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，

$n= n_1+n_2+\ldots+n_k$，求S的r-组合数，其中$0\le r\le n$.

- 方程：$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 满足条件

$0\le x_1\le n_1$，$0\le x_2\le n_2$，$\ldots$, $0\le x_k\le n_k$

的整数解的个数。

第6章容斥原理部分介绍。

小结

- 选取模型

n个元素	r排列问题（choose a list）	r组合问题（choose a set）
无重复	P(n, r)	C(n, r)
允许重复（无限）	n^r	C(n+r-1, r)

小结

- $n_1+n_2+\ldots+n_k=r$ 的非负整数解个数**C(k+r-1, r)**
- $n_1+n_2+\ldots+n_k=r$ 的正整数解个数 **C(r-1, k-1)**

2.6有限概率

- 有限概率:相对于微积分为基础的连续概率
- 概述
  - 在一个实验ε中，在进行实验，产生的结果是某个集合之中。
  - 所有可能结果集合称为样本空间（sample space), 记作$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n)$
  - 则，在进行实验ε是，每个s_i的出现概率是1/n
    - $\mathrm{Prob}(s_i) = 1/n$ ($i=1,\ldots,n$)
    - 事件E：S的一个子集

例：

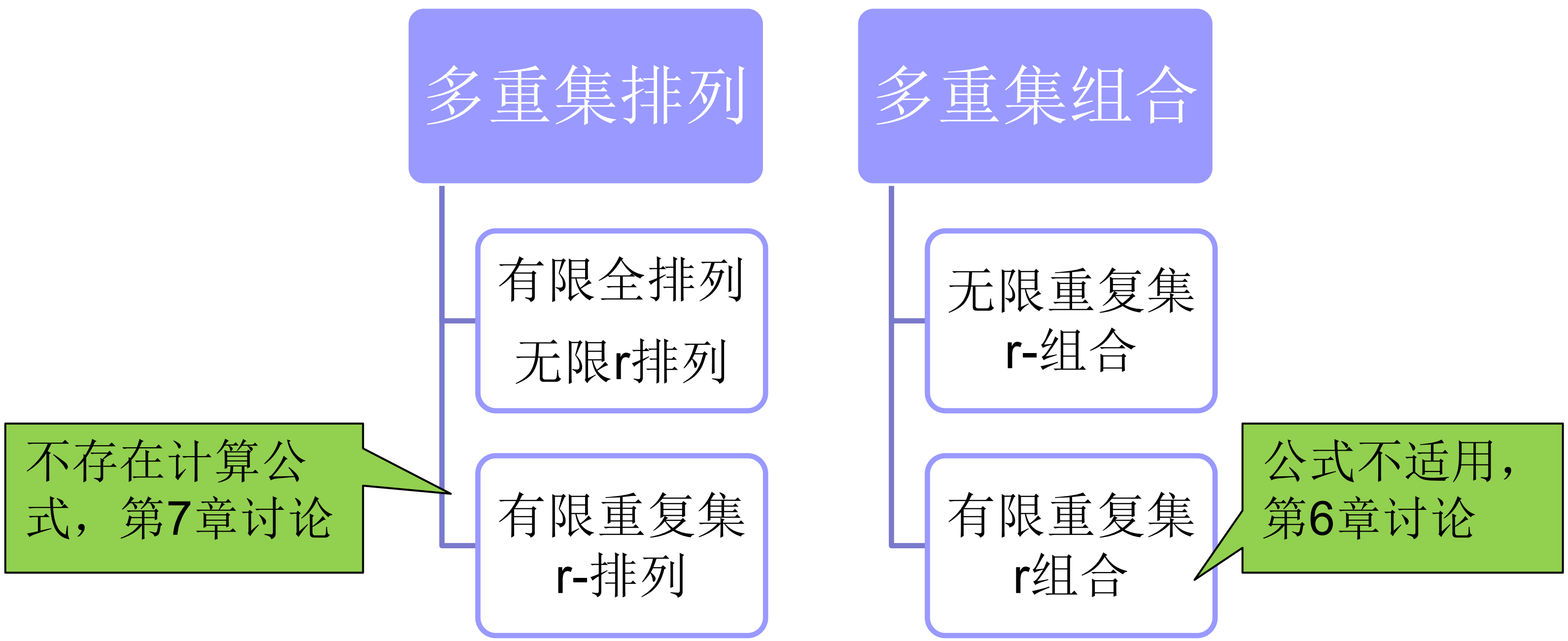
- 设n为正整数，假设在1和n之间随机选出一个整数序列$i_1,i_2,...,i_n$.
  - (1) 选出序列是1,2,..n,中排列概率？
  - (2) 序列中含有n-1个不同整数概率？
- 答：
  - 样本空间$|S|=n^n$
  - (1)序列的排列事件E满足$|E|=n!$, 因此 $\mathrm{Prob}(E)=n!/n^n$

例：

- (2) 设F是n-1个不同整数的序列事件
  - 选择1个整数，重复2次
    - 选择数n
    - 排列位置选择C(n,2)
  - 其他n-2个整数排列
    - 选择数n-1（已有1被选出）
    - 排列位置选择（n-2)!
  - 因此 $|F|=nC(n,2)\ (n-1)\ (n-2)!=(n!)^2/2!(n-2)!$

小结

- 多重集的排列计数问题
- 多重集的组合计数
  - 不定方程整数解个数



- 把2n个人分成**n组**，**每组2人**，有多少分法？
- 18. 2个红车，4个蓝车放入8X8的棋盘中，使得两个车没有相互攻击的放置方法有多少？
- 35. 确定下面多重集合的11排列数目
  - $S=\{3\cdot a, 3\cdot b, 3\cdot c, 3\cdot d\}$
- 36. 确定下面多重集合的所有组合数量（大小任意）
  - 有k种不同类型对象，且它们的有限重复数为$n_1, n_2, \ldots, n_k$
- 39. 有20根完全相同的棍列成一行，占据20个不同位置。从中选出6根
  - （1）有多少种选择？
  - （2）如果选出的棍子没有两根是相邻，有多少种选择？
  - （3）如果每一对选出的棍之间必须至少有2根棍，有多少选择？
- **51.考虑大小为2n的多重集合{n·a,1,2,3,…,n}, 确定他的n组合数**
- 52.考虑3n+1的多重集{n.a,n.b,1,2,…n+1}, 确定其n组合数。

知识点：等价性

练习题

- 把2n个人分成**n**组，**每组2人**，有多少分法？

解：**等价为分组问题**，相当于将2n个不同球投入n个相同的盒子中，每个盒子2个。

$$\frac{(2n)!}{(2!)^n n!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

知识点：等价性

小练习：

- 18. 2个红车，4个蓝车放入8X8的棋盘中，使得两个车没有相互攻击的放置方法有多少？
  - 答案：
    - C(8,6) P(8,6) C(6,2)
    - 分步，选行，排列，选颜色l

知识点：多重集r排列

小练习

- 35. 确定下面多重集合的11排列数目
  - $S=\{3\cdot a, 3\cdot b, 3\cdot c, 3\cdot d\}$
  - A.12!/2!3!3!3!
  - B. 4 *12!/2!3!3!3!
  - C. 11!/2!3!3!3!
  - D.4 *11!/2!3!3!3!

小练习

- 36. 确定下面多重集合的所有组合数量（大小任意）
  - 有k种不同类型对象，且它们的有限重复数为n_1, n_2, …, n_k
  - A. $(n_1)*(n_2)*\ldots*(n_k)$
  - B. $(n_1+1)*(n_2+1)*\ldots*(n_k+1)$

经典题目：不相邻选取问题

- 从｛1， 2，…， n｝中取出r 个不相邻的数，这样的组合有多少种？
- 注意区别多重集组合
  - 第一步：转化为0,1序列
  - 第二部：等价于有n-r+1数字间的位置，旁边插入隔板
  - C(n-r+1, r)

小练习

- 39. 有20根完全相同的棍列成一行， 占据20个不同位置。从中选出6根
  - （1）有多少种选择?
  - （2）如果选出的棍子没有两根是相邻，有多少种选择?
  - （3）如果每一对选出的棍之间必须至少有2根棍，有多少选择?
  - C(20,6)

小练习

- **2.7的51题？**
  - **考虑大小为2n的多重集合{n·a,1,2,3,…,n},确定他的n组合数**
- 2.7的52题？
  - 考虑3n+1的多重集{n.a,n.b,1,2,…n+1},确定其n组合数。
- 2^n
- $(n+1)2^n$

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\dots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\quad n\geq 1$$

p个球	k个盒	是否空	方　案　个　数
有区别	有区别	有空盒	k^p
	无区别	无空盒	$S(p,k)$
	有区别	无空盒	若不考虑盒子区别时得$S(p,k)$ 再对k个盒子排列得$k!S(p,k)$
	无区别	有空盒	$S(p,1)+S(p,2)+\ldots\ldots+S(p,k)\quad(p\geq k)$ $S(p,1)+S(p,2)+\ldots\ldots+S(p,p)\quad(p\leq k)$

选取模型

放球子模型

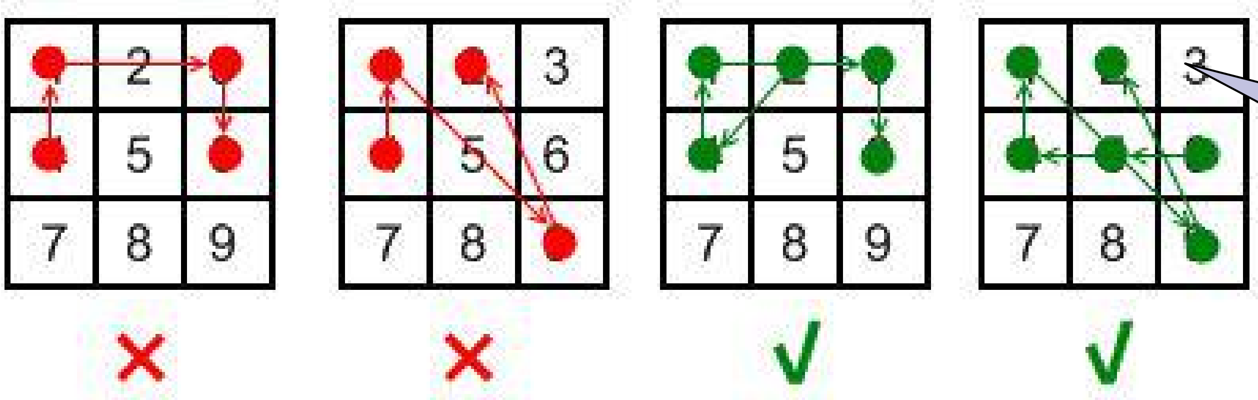
p个球	k个盒	是否空	方　案　个　数
无区别	有区别	有空盒	相当于p个有区别的元素 取k个作允许重复排列数
	有区别	无空盒	先取k个球每盒一个，余下的$p-k$个无区别的球放到k个盒子中。
	无区别	有空盒	
	无区别	无空盒	

不定方程解模型

正整数拆分

手机密码组合（建议编程）

- 早期iPhone手机4位密码
  - 密码空间？
- Android手机图案密码(最少4位)
  - 密码空间？



能否通过一段程序来计算？

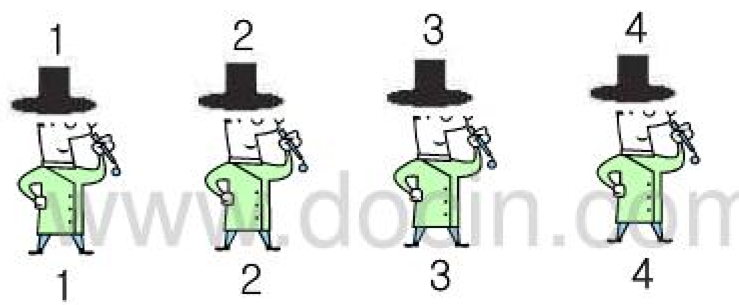
思考与作业题

- 2.7 作业题

30, 32，38, 40,47

练习：餐厅服务员问题

- 餐厅里的一个新服务员，在寄存n个人的帽子时，忘记表示寄存号。请问：当顾客取回帽子时，只能从身下的帽子中随机发放，则没有一人收到自己帽子的概率多大?



抽象表示：
集合{1，2，3，…,n}的全排列，
使得每个i都不在第i位上。