北京航空航天大学

2020－2021 学年 第二学期期末

离 散 数 学3

《组 合 数 学》

班 级\_\_\_\_192511\_\_\_\_学 号 \_79066012\_

姓 名\_\_\_\_陈劲安\_\_\_\_\_成 绩 \_\_\_\_\_\_\_\_\_

2021年6月15日

班号 学号 姓名 成绩

**离散数学3《组 合 数 学》期末考试卷**

注意事项：1、考试时间120分钟、闭卷。

2、第一题的答案直接填写在题目留出的空白，第二至六题，答题写在试卷后面的空白页上，请标明**题号**。

**一**、填空题（每空5分，共50分）

1. 5颗有标记的红球，6颗有标记的蓝球，排成一行，满足相邻两个球不是相同颜色，共有 86400 种方案，若排成一圆圈，共有 17280种方案。
2. 1−99999之间的整数中各位数字之和等于6的数共有 210 个。（例如2130的各位数字之和为6）。
3. 设3*n*个物品中只有*n*个物品是相同的，从中取*n*+1个物品进行排列的排列数为 。
4. 大学生运动会共有10个项目，学生可以任意参赛。一个学校至少派出 21 名学生参赛才能保证至少有3名学生参加同一个项目。
5. 已知{1, 2, …, 9}的一个排列的逆序列为 4 3 6 2 2 1 0 1 0，则该排列为 7,6,4,2,1,5,9,8,3 。
6. 序列*hn*的一般项是*n*的一个2次多项式。如果其差分表的第0行的前3个数是2，1，2, 则*hn*为 ，等于 。
7. {1, 2, …., 9}的排列中恰有1个奇数和2个偶数在它们的自然位置上的排列数为 30 。
8. 设*hn*是*n*位三进制数中相邻3位不出现111的数的个数，则*hn*满足的递归关系为 。

二、令 *b*1, *b*2, …, *b*101 为 101个长度不超过9的二进制串。证明存在两个二进制串*bi* 和 *bj* ( *ij*)，包含同样数目的0和1。（如, 001001和101000包含同样数目的0和1) （10分）

1位二进制串范围[0,1]，可容纳2个

2位二进制串范围[0,2]，可容纳3个

3位二进制串范围[0,3]，可容纳4个

4位二进制串范围[0,4]，可容纳5个

5位二进制串范围[0,5]，可容纳6个

6位二进制串范围[0,6]，可容纳7个

7位二进制串范围[0,7]，可容纳8个

8位二进制串范围[0,8]，可容纳9个

9位二进制串范围[0,9]，可容纳10个

因此101个二进制串必然出现两个相同数目0和1的串。

三、对12个不同的元素 *a*1, *a*2, *a*3, *a*4, *b*1, *b*2, *b*3, *b*4, *c*1, *c*2, *c*3, *c*4进行全排列，求每一对*ai*和*bi* （*i*=1, 2, 3, 4）都不相邻的全排列数。 （10分）

总排列数有

一对相邻的排列数有

两对相邻的排列数有

三对相邻的排列数有

四对相邻的排列数有

根据容斥原理有

四、设10个有区别的球放进5个有标记的盒子，要求第1、4个盒子有奇数个球，第2、3个盒子有偶数个球，第5个盒子至少有1个球，一共有多少种放法？ （10分）

根据题目要求，生成函数为

五、求解非齐次线性递推关系*hn =* 6*hn−*1*−* 9 *hn−*2+2*n,* 其中*h*0*=*1，*h*1*=*0。 （10分）

齐次方程组为

特征方程为

解为

一般解为

设

因此，特解为

结合一般解和特解，得

，

，

递推式为

六、用20颗不同颜色的珠子穿成一条项链，问有多少种方法？ （10分）

假设为20种不同的颜色在正20边形的顶点进行着色。

由于20颗不同颜色的珠子，所以无论怎么旋转和翻转都会出现不同的组合

显然G的恒等变换保持C种所有20!种着色不变。

再根据项链的对称性，所以，根据Burnside定理得

种方法。