

Matemática numérica

Pedro H A Konzen

25 de maio de 2018

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Sumário

| | |
|-------------------------------------|-----|
| Capa | i |
| Licença | ii |
| Prefácio | iii |
| Sumário | iv |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Aproximação por mínimos quadrados | 2 |
| 2.1 Problemas lineares | 2 |
| 2.1.1 Equações normais | 2 |
| Referências Bibliográficas | 7 |

Capítulo 1

Introdução

Em construção ...

Capítulo 2

Aproximação por mínimos quadrados

2.1 Problemas lineares

Dado um conjunto de n pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, e uma família de $m \leq n$ funções $\{f_i(x)\}_{i=1}^m$, o problema linear de aproximação por mínimos quadrados consiste em determinar os m coeficientes $\{c_i\}_{i=1}^m$ tal que a função

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \cdots + c_m f_m(x) \quad (2.1)$$

aproxime o conjunto de pontos dados no sentido de mínimos quadrados, i.e. os coeficientes que são solução do seguinte problema linear de minimização

$$\min_{\{c_1, c_2, \dots, c_m\}} \sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x_i))^2. \quad (2.2)$$

2.1.1 Equações normais

Afim de resolver o problema de mínimos quadrados (2.2), observamos que o erro quadrático

$$E := \sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^m c_j f_j(x_i) \right)^2 \quad (2.3)$$

tem seu mínimo para os coeficientes c_k tais que

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.4)$$

Calculando estas derivadas parciais, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial c_k} &= \frac{\partial}{\partial c_k} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^m c_j f_j(x_i) \right)^2 \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^m c_j f_j(x_i) \right) f(x_k) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n y_i f(x_k) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m c_j f_j(x_i) f(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, m.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Desta forma, a equação (2.4) é equivalente a resolver o seguinte sistema linear

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m c_j f_j(x_i) f(x_k) = \sum_{i=1}^n y_i f(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, m. \tag{2.6}$$

Agora, denotando

$$A := \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

o sistema linear (2.6) pode ser escrito na seguinte forma matricial

$$A^T A c = A^T y, \tag{2.8}$$

onde $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ é o vetor dos coeficientes e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ é o vetor das abscissas dos pontos dados.

Exemplo 2.1.1. (Ajuste de polinômios) Considere o problema de ajustar o conjunto de pontos

| hline i | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------|-----|------|-----|-----|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 1,5 |
| y_i | 1,2 | -0,1 | 0,7 | 2,4 |

por um polinômio quadrático da forma

$$p(x) = p_1 x^2 + p_2 x + p_n \tag{2.9}$$

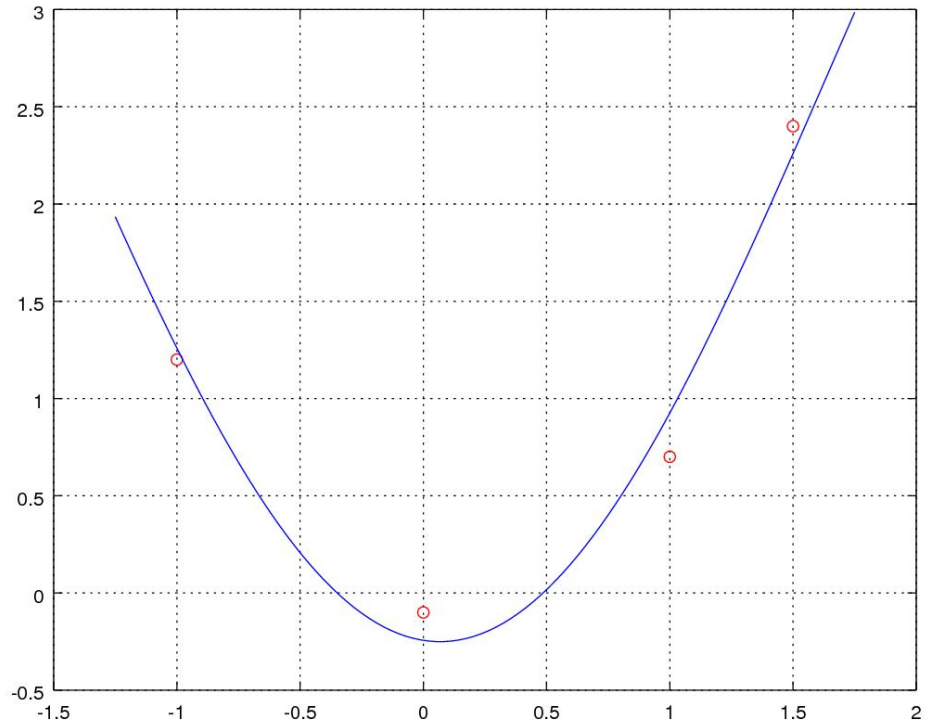


Figura 2.1: Esboço da curva ajustada no Exemplo 2.1.2.

no sentido de mínimos quadrados.

Neste caso, a família de funções do problema de mínimos quadrados é $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$ e $f_3(x) = 1$. Assim sendo, os coeficientes $p = (p_1, p_2, p_3)$ são solução do seguinte sistema linear

$$A^T A p = A^T y, \quad (2.10)$$

onde $y = (y_1, y_2, y_3)$ e

$$A := \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Emfim, resolvendo as equações normais (2.10), obtemos

$$p(x) = 1,25x^2 - 0,188x - 0,203. \quad (2.12)$$

A Figura 2.2 mostra um esboço dos pontos (em vermelho) e do polinômio ajustado (em azul).

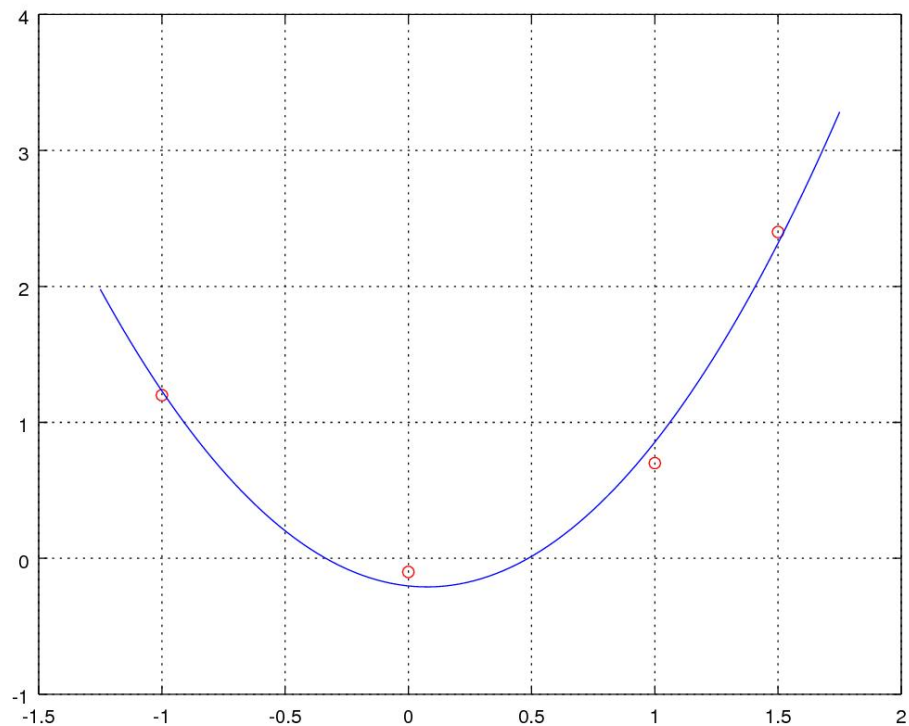


Figura 2.2: Esboço do polinômio ajustado no Exemplo 2.1.1.

Os coeficientes e um esboço do polinômio ajustado podem ser obtidos no GNU Octave com o seguinte código:

```
#pontos
x = [-1 0 1 1.5]';
y = [1.2, -0.1, 0.7, 2.4]';

#resol. as eqs. normais
A = [x.^2 x.^1 x.^0];
p = inv(A'*A)*A'*y

#esboco do pol. ajustado
xx = linspace(-1.25,1.75);
plot(x,y,'ro',...
```

```
xx,polyval(p,xx));grid
```

Exemplo 2.1.2. (Ajuste de curvas) Consideremos o mesmo conjunto de pontos do exemplo anterior (Exemplo 2.1.1). Aqui, vamos ajustar uma curva da forma

$$f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + c_3 \quad (2.13)$$

no sentido de mínimos quadrados. Para tanto, formamos a matrix

$$A := \begin{bmatrix} \sin(x_1) & \cos(x_1) & 1 \\ \sin(x_2) & \cos(x_2) & 1 \\ \sin(x_3) & \cos(x_3) & 1 \\ \sin(x_4) & \cos(x_4) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

e, então, resolvemos as equações normais $A^T A c = A^T y$ para o vetor de coeficientes $c = (c_1, c_2)$. Fazendo isso, obtemos $c_1 = -0,198$, $c_2 = -2,906$ e $c_3 = 2,662$. A Figura ?? mostra um esboço da curva ajustada (linha azul) aos pontos dados (círculos vermelhos).

Os coeficientes e um esboço do polinômio ajustado podem ser obtidos no GNU Octave com o seguinte código:

```
#pontos
x = [-1 0 1 1.5]';
y = [1.2, -0.1, 0.7, 2.4]';

#resol. as eqs. normais
A = [sin(x) cos(x) ones(4,1)];
c = inv(A'*A)*A'*y

#curva ajustada
f = @(x) c(1)*sin(x) + c(2)*cos(x) + c(3)

#esboco do pol. ajustado
xx = linspace(-1.25,1.75);
plot(x,y,'ro',...
      xx,f(xx));grid
```

Referências Bibliográficas

- [1] R.L. Burden, J.D. Faires, and A.M. Burden. *Análise Numérica*. CENGAGE Learning, 10. ed. edition, 2015.