

# Análise matemática I

Pedro H A Konzen

25 de junho de 2018

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas de análise matemática na reta. No primeiro capítulo, são discutidos alguns tópicos sobre funções e topologia, os quais são fundamentais nos desenvolvimentos dos demais capítulos. Na sequência são discutidos os conceitos e aplicações sobre limites e continuidade de funções, derivação e integração de funções, bem como sequências e séries de funções.

Assume-se que o leitor tenha domínio sobre lógica matemática e os tópicos de análise de números, sequências e séries.

Agradeço aos(às) estudantes que assiduamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
<b>1 Fundamentos da análise</b>	<b>1</b>
1.1 Funções	1
1.1.1 Definição de função	1
1.1.2 Classificações elementares	2
1.1.3 Operações elementares	4
<b>2 Limites</b>	<b>6</b>
2.1 Noções de topologia	6
2.2 Limites	8
2.2.1 Propriedades do limite	9
2.3 Limites laterais	12
2.4 Limites no infinito e limites infinitos	13
<b>3 Continuidade</b>	<b>16</b>
3.1 Função contínua	16
3.2 Propriedades de funções contínuas	18
3.3 Continuidade uniforme	20
<b>4 Diferenciação</b>	<b>22</b>
4.1 Derivada	22
4.2 Regras operacionais	24

4.3	Extremos e o teorema do valor médio . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Integração</b>	<b>28</b>
5.1	Integral de Riemann . . . . .	28
5.2	Integrabilidade de funções contínuas . . . . .	29
5.3	Teorema fundamental do cálculo . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Sequências e séries de funções</b>	<b>33</b>
6.1	Sequência de funções . . . . .	33
6.1.1	Convergência pontual . . . . .	33
6.1.2	Convergência uniforme . . . . .	34
6.2	Algumas consequências da convergência uniforme . . . . .	37
6.3	Séries de funções . . . . .	39
6.4	Séries de potências . . . . .	42
6.5	Funções analíticas . . . . .	45
	<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>49</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>51</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>52</b>

# Capítulo 1

## Fundamentos da análise

### 1.1 Funções

#### 1.1.1 Definição de função

**Definição 1.1.1.** (Função) Uma **função**  $f : D \rightarrow Y$  é uma relação que associa cada elemento de um dado conjunto  $D$  com um único elemento de um dado conjunto  $Y$ . O conjunto  $D$  é chamado de **domínio** da função e o conjunto  $Y$  é chamado de **contradomínio** da função.

Comumente, uma dada função  $f : D \rightarrow Y$  é acompanhada de sua **lei de correspondência**, a qual muitas vezes é denotada por  $y = f(x)$ . Neste caso, temos que a função  $f$  associa  $x \in D$  ao elemento  $y \in Y$ . Neste contexto,  $x$  é chamada de **variável independente** e  $y$  de **variável dependente**. Ainda, muitas vezes uma função é descrita apenas por sua lei de correspondência e, neste caso, os conjuntos domínio e imagem são inferidos no contexto em questão.

**Observação 1.1.1.** Neste livro, quando não especificado ao contrário, assumiremos que o domínio e o contradomínio das funções consideradas são subconjuntos dos números reais,

**Exemplo 1.1.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A relação  $f : \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x) := x^2 + 1$ , define uma função.
- b) A relação  $g : D = \{0,1,2,3,4\} \rightarrow \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 9$  com  $x \in D$  e  $y \in Y$ , não é uma função. Com efeito,  $0 \in D$  e relaciona-se com  $3 \in Y$  e  $-3 \in Y$  no seu contradomínio.

- c) Da equação  $y = \sqrt{x}$  pode-se inferir a função  $h : x \in D \rightarrow y \in \mathbb{R}$ , onde o domínio  $D$  é conjunto dos reais não negativos.

**Definição 1.1.2.** (Imagem de uma função) A **imagem**  $I_f$  de uma dada função  $f : D \rightarrow Y$  é o conjunto de todos os elementos de  $Y$  que se relacionam com algum elemento de  $D$ , i.e.:

$$I_f := \{y \in Y; \exists x \in D \text{ tal que } y = f(x)\}. \quad (1.1)$$

**Exemplo 1.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f : \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) := x^2 + 1$ , tem imagem  $I_f = \{1,4,9\}$ .  
b) A imagem da função  $f : \{0\} \cup \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = 2x + 1$ , é conjunto dos números ímpares.  
c) A imagem da função  $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \text{sen } x$ , é  $I_{\text{sen}} = [-1, 1]$ .

**Observação 1.1.2.** Dada uma função  $f : D \rightarrow Y$  e um conjunto  $A \subset D$ , definimos a imagem de  $A$  pela função  $f$  por

$$f(A) := \{y \in Y; \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}. \quad (1.2)$$

Por exemplo, dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt{x}$ , temos

$$f(\{0,1,4,9\}) = \{0,1,2,3\}. \quad (1.3)$$

**Definição 1.1.3.** (Gráfico) O **gráfico** de uma função  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , é o conjunto de todos os pares ordenados  $(x,y)$  tal que  $x \in D$  e  $y = f(x)$ , i.e.

$$G_f := \{(x,y) \in D \times Y; y = f(x)\}. \quad (1.4)$$

**Exemplo 1.1.3.** O gráfico da função  $f : \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) := x^2 + 1$ , é

$$G_f = \{(1,2), (2,5), (3,10)\}. \quad (1.5)$$

## 1.1.2 Classificações elementares

**Definição 1.1.4.** (Função limitada) Seja dada uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ . Dizemos que  $f$  é uma **função limitada inferiormente** (ou **limitada à esquerda**) quando existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq f(x)$  para todo  $x \in D$ . Analogamente, dizemos que  $f$  é uma **função limitada superiormente** (ou **limitada à direita**) quando existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \geq M$  para todo  $x \in D$ . Ainda,  $f$  é dita ser **limitada** quando é limitada inferiormente e superiormente.

**Exemplo 1.1.4.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = x^2 + 1$ , é limitada inferiormente. De fato, para cada  $x \in \mathbb{R}$  temos  $x^2 \geq 0$  e, portanto,  $y = x^2 + 1 \geq 1$ .
- b) A função seno é uma função limitada. Isto segue imediatamente da definição da função seno no círculo unitário (círculo trigonométrico).

**Definição 1.1.5.** Restrição/extensão de uma função Uma função  $g : A \rightarrow Y$ ,  $y = g(x)$ , é dita ser uma **restrição** da dada função  $f : D \rightarrow Y$  quando  $A \subset D$  e  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in A$ . Analogamente,  $f$  é uma **extensão** da função  $g$ .

**Exemplo 1.1.5.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = x + 1$ , é uma extensão da função  $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

**Definição 1.1.6.** (Função injetiva) Uma função  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , é dita ser **injetiva** (**injetora** ou **invertível**) quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 \neq x_2$  temos  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Observação 1.1.3.** Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é injetiva se, e somente se, para todo  $x_1, x_2 \in D$  tal que  $f(x_1) = f(x_2)$  temos  $x_1 = x_2$ .

**Exemplo 1.1.6.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f(x) = x^2$  não é injetiva, pois tomando  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 1$  temos  $x_1 \neq x_2$ , mas  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- b) A função  $f(x) = \sqrt{x+1}$  é injetiva. De fato, dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$  tal que  $f(x_1) = f(x_2)$ , então  $\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1}$ . Agora, tomando o quadrado dos dois lados, temos  $x_1 = x_2$ .

**Definição 1.1.7.** (Função sobrejetiva) Uma função  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , é **sobrejetiva** quando  $f(D) = Y$  (ou, equivalentemente,  $I_f = Y$ ).

**Exemplo 1.1.7.** A função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x)$ , é sobrejetiva. De fato, dado qualquer  $y \in \mathbb{R}$  basta escolhermos  $x = e^y$  para termos  $f(x) = y$ .

**Observação 1.1.4.** Uma função injetiva e sobrejetiva é dita ser **bijetiva**.

**Definição 1.1.8.** (Função inversa) Dada uma função invertível (i.e. injetora)  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , definimos sua **inversa** por  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$  que associa cada elemento  $y \in f(D)$  com  $x \in D$  tal que  $f(x) = y$ .



**Exemplo 1.1.8.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A inversa da função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \ln(x)$ , é a função  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $y = e^x$ .
- b) A inversa da função  $f : [-1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $y = \sqrt{x+1}$ , é a função  $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [-1, \infty]$ ,  $y = x^2 - 1$ . De fato,  $f$  é sobrejetiva e dado  $x \in [-1, \infty]$  temos  $f(x) = y = \sqrt{x+1}$  e, então  $y^2 = x+1$ , logo  $x = y^2 - 1$ .

**Definição 1.1.9.** (Função monótona) Seja dada uma função  $f : D \rightarrow Y$ . Dizemos que  $f$  é **crescente** quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 < x_2$ , temos  $f(x_1) < f(x_2)$ . Agora, quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 < x_2$  temos  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , dizemos que  $f$  é uma **função não-decrescente**. Analogamente, quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 < x_2$  temos  $f(x_1) > f(x_2)$  dizemos que  $f$  é uma função **decrescente**. Por fim, quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 < x_2$  temos  $f(x_1) \geq f(x_2)$  dizemos que  $f$  é uma função **não-crescente**.

**Exemplo 1.1.9.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = x^3$ , é uma função crescente.
- b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = e^{-x}$  é uma função decrescente.

**Definição 1.1.10.** (Paridade de uma função) Uma função  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , é dita ser **par** quando para todo  $x \in D$ , temos  $f(x) = f(-x)$ . Agora, quando para todo  $x \in D$ , temos  $f(x) = -f(-x)$ , então dizemos se tratar de uma função **ímpar**.

**Exemplo 1.1.10.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = |x|$ , é uma função par.
- b) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = x^3$ , é uma função ímpar.

### 1.1.3 Operações elementares

Operações elementares envolvendo funções são comumente definidas tomando o cuidado de restringir o domínio das funções operadas para um conjunto apropriado. Por exemplo, dadas as funções  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = g(x)$ , definimos a função soma de  $f$  com  $g$  por  $(f + g) : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ . Agora, para estas mesmas função, definimos a função quociente de  $f$  com  $g$  por  $(f/g) : A \cap B \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ .

**Exemplo 1.1.11.** A função  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt{x} - |x|$ , é a subtração da função  $f_1 : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt{x}$ , com a função  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = |x|$ , i.e.  $f(x) = (f_1 - f_2)(x) := f_1(x) - f_2(x)$ .

**Definição 1.1.11.** (Composição de funções) Sejam dadas as funções  $f : D_f \rightarrow Y_f$ ,  $y = f(x)$ , e  $g : D_g \rightarrow Y_g$ ,  $y = g(x)$ , com  $I_g \subset D_f$ . Definição a **função composta** de  $f$  com  $g$  por  $(f \circ g) : D_g \rightarrow Y_f$  com  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

**Exemplo 1.1.12.** A função  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ , é a composição da função  $f_1 : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt{x}$ , com a função  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = x^2 + 1$ .

## Exercícios

**E 1.1.1.** Sejam  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , e  $A, B \subset D$ . Mostre que  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

**E 1.1.2.** Construa uma função crescente, limitada superiormente e com domínio igual ao conjunto dos números reais.

**E 1.1.3.** Mostre que  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt{x^3 - 1}$ , é injetora e construa sua inversa.

**E 1.1.4.** Mostre que se  $f : D \rightarrow Y$  é injetora, então  $f$  não é par.

**E 1.1.5.** Mostre que uma dada função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é limitada quando existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| < c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

# Capítulo 2

## Limites

### 2.1 Noções de topologia

**Definição 2.1.1.** (Ponto interior) Diz-se que  $x$  é um **ponto interior** de um dado conjunto  $C$  quando existe um intervalo  $(a, b)$  que contém  $x$  e está contido em  $C$ , i.e.  $x \in (a, b) \subset C$ . O conjunto de todos os pontos interiores de  $C$  é chamado de seu **interior**.

**Exemplo 2.1.1.** a) Todo elemento de um intervalo aberto  $(a, b)$  é ponto interior deste.

b) O interior de um dado intervalo fechado  $[a, b]$  é o intervalo aberto  $(a, b)$ .

**Definição 2.1.2.** (Conjunto aberto) Diz se que  $C$  é **conjunto aberto** quando todos seus elementos são pontos interiores.

**Exemplo 2.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O intervalo  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$  é um conjunto aberto. De fato, dado  $x \in (a, b)$  podemos tomar  $0 < \varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$  de forma que  $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$ .
- b) O intervalo  $(a, b]$  não é aberto, pois  $b \in (a, b]$  não é ponto interior.
- c) O conjunto vazio  $\emptyset$  é um conjunto aberto. Com efeito, se o conjunto  $\emptyset$  não é aberto, então existe um elemento  $x \in \emptyset$  que não é ponto interior de  $\emptyset$ , o que é um absurdo pois  $\emptyset$  não contém elementos por definição.
- d) O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  não é aberto.

**Definição 2.1.3.** (Vizinhança) Uma **vizinhança** de um dado ponto  $x$  é qualquer conjunto  $V$  que contenha  $x$  como ponto interior. Também, a **vizinhança simétrica** de um ponto  $x \in \mathbb{R}$  é todo intervalo  $V_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  com  $\varepsilon > 0$ . Mais estrito, a **vizinhança perfurada** de  $x \in \mathbb{R}$  é uma vizinhança de  $x$  que não contém  $x$ . Aproveitamos para fixar a notação:

$$V'_\varepsilon(x) := V_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y \in \mathbb{R}; 0 < |x - y| < \varepsilon\}.$$

**Exemplo 2.1.3.** Podemos reescrever o Exemplo 2.1.2 da seguinte forma. Um intervalo  $(a, b)$  é um conjunto aberto, pois para cada  $x \in (a, b)$  podemos escolher  $0 < \varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$  tal que  $V_\varepsilon(x) \subset (a, b)$ .

**Definição 2.1.4.** (Ponto de acumulação) Um ponto  $x$  é chamado de **ponto de acumulação** de um dado conjunto  $C$  quando toda vizinhança de  $x$  contém infinitos pontos de  $C$ .

**Exemplo 2.1.4.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O número  $a$  é ponto de acumulação do intervalo  $(a, b]$  não degenerado. De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , temos  $(a, a + \varepsilon) \subset V_\varepsilon(a)$  e  $(a, a + \varepsilon) \cap (a, b]$  é um conjunto infinito.
- b) Zero é o único ponto de acumulação do conjunto  $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ .

**Definição 2.1.5.** (Ponto isolado) Diz que  $x$  é **ponto isolado** de um dado conjunto  $C$  quando  $x \in C$  não é ponto de acumulação de  $C$ . Diz-se que um conjunto é **discreto** quando todos seus elementos são pontos discretos.

**Exemplo 2.1.5.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  é discreto.
- b) O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  não é discreto.
- c) O conjunto  $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$  é discreto.

**Definição 2.1.6.** (Ponto aderente) Dizemos que  $x$  é **ponto aderente** de um dado conjunto  $C$  quando toda vizinhança de  $x$  contém algum ponto de  $C$ . O conjunto de todos os pontos aderentes de  $C$  é chamado de **fecho** (ou, conjunto de aderência) de  $C$ , o qual denotamos por  $\overline{C}$ .

**Observação 2.1.1.** Observe que todo ponto de um conjunto é aderente ao mesmo, bem como, todos os seus pontos de acumulação.

**Exemplo 2.1.6.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O fecho de  $(a, b]$  é o intervalo fechado  $[a, b]$ .
- b) O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é o fecho do conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ , i.e.  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.7.** Conjunto fechado Dizemos que um conjunto  $C$  é **fechado** quando é igual ao seu fecho, i.e.  $C = \overline{C}$ .

**Exemplo 2.1.7.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O intervalo  $[a, b]$  é um conjunto fechado.
- b) O conjunto vazio  $\emptyset$  é fechado. Por quê?
- c) O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é fechado.
- d) O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  não é fechado.

**Definição 2.1.8.** (Conjunto denso) Dizemos que um conjunto  $A$  é **denso** no conjunto  $B$ , quando todo ponto aderente de  $\overline{A} \subset B$ .

**Exemplo 2.1.8.** O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  é denso no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ .

## Exercícios

**E 2.1.1.** Seja dado um conjunto  $C$ . Mostre que  $x$  é ponto de acumulação de  $C$  se, e somente se, toda vizinhança de  $x$  contém pelo menos um elemento de  $C$  diferente de  $x$ .

**E 2.1.2.** Seja dado um conjunto  $C$ . Mostre que  $x$  é ponto isolado de  $C$  se, e somente se, existe uma vizinhança de  $x$  tal que  $(V(x) \setminus \{x\}) \cap C = \emptyset$ .

## 2.2 Limites

**Definição 2.2.1.** (Limite) Sejam uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , e  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ . Diz-se que  $L \in \mathbb{R}$  é o **limite** de  $f(x)$  com  $x$  tendendo a  $a$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad (2.2)$$

ou ainda, simplesmente,  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a$ .

**Exemplo 2.2.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a) Temos  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ . Isto segue imediatamente, pois, neste caso,  $f(x) = x - 1$ ,  $a = 1$ ,  $L = 0$  e, então, dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \varepsilon$  de forma que

$$x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1 - 0| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

- b) A função não precisa estar definida no ponto em o limite é tomado. Por exemplo,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$ . Verifique!

**Observação 2.2.1.** Quando nos referirmos a expressão “ $x$  tende a  $a$ ” (ou similares), estaremos sempre assumindo que  $a$  é um ponto de acumulação do domínio da função de interesse.

## 2.2.1 Propriedades do limite

**Teorema 2.2.1.** Se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ .

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Por hipótese, existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Tomando, então, um tal  $\delta$  e observando que  $||f(x)| - |L|| < |f(x) - L|$ , temos que para todo  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$ , ocorre  $||f(x)| - |L|| < \varepsilon$ .  $\square$

**Teorema 2.2.2.** Se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $A < L < B$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $A < f(x) < B$ .

*Demonstração.* De fato, por hipótese, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Então, o resultado segue escolhendo um tal  $\delta$  quando  $\varepsilon = \min\{L - A, B - L\}$ .  $\square$

**Corolário 2.2.1.** (Permanência do sinal) Se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$  ( $L < 0$ ), então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$ , implica  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).

*Demonstração.* Quando  $L > 0$  ( $L < 0$ ) basta escolher  $A = 0$  ( $B = 0$ ) no teorema anterior.  $\square$

**Teorema 2.2.3.** (Operações com limites) Sejam  $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2$ , então (omitindo que  $x \rightarrow a$ )

- a)  $\lim[f_1(x) + f_2(x)] = \lim f_1(x) + \lim f_2(x)$ .
- b) para todo  $k \in \mathbb{R}$ , temos  $\lim k f_1(x) = k \lim f_1(x)$ .
- c)  $\lim f_1(x) f_2(x) = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$ .
- d)  $\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}$ , quando  $L_2 \neq 0$ .

*Demonstração.* Seja dado  $\varepsilon > 0$ .

- a) Seja  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/2$  e  $|f_2(x) - L_2| < \varepsilon/2$ . Logo, para tais  $\delta$  e  $x$  temos

$$|(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (2.4)$$

- b) O resultado é imediato para  $k = 0$ . Sejam  $k \neq 0$  e  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/|k|$ . Então, para tais  $\delta$  e  $x$  temos  $|k f_1(x) - k L_1| = |k| |f_1(x) - L_1| < |k| \varepsilon / |k| = \varepsilon$ .
- c) Sejam  $M > 0$  e  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/(2|L_2|)$ ,  $|f_1(x)| < M$  (veja Teorema 2.2.2) e  $|f_2(x) - L_2| < \varepsilon/(2M)$ . Então

$$|f_1(x) f_2(x) - L_1 L_2| = |f_1(x) f_2(x) - f_1(x) L_2 + f_1(x) L_2 - L_1 L_2| \quad (2.5)$$

$$= |f_1(x)(f_2(x) - L_2) + (f_1(x) - L_1) L_2| \quad (2.6)$$

$$\leq |f_1(x)| |f_2(x) - L_2| + |f_1(x) - L_1| |L_2| \quad (2.7)$$

$$< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|L_2|} |L_2| = \varepsilon. \quad (2.8)$$

- d) De c), basta mostrar que  $1/f_2(x) \rightarrow 1/L_2$  quando  $x \rightarrow a$ . Para tanto, seja  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon L_2^2}{2}$  e

$|f_2(x)| > |L_2|/2$  (veja Teorema 2.2.2). Então, para tais  $\delta$  e  $x$  temos

$$\left| \frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \frac{|f_2(x) - L_2|}{|f_2(x)L_2|} \quad (2.9)$$

$$< \frac{\frac{\varepsilon L_2^2}{2}}{|L_2| \frac{|L_2|}{2}} = \varepsilon. \quad (2.10)$$

□

**Teorema 2.2.4.** *O limite de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é  $L$  quando  $x \rightarrow a$  se, e somente se, para toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$ , temos  $f(x_n) \rightarrow L$ .*

*Demonstração.* a) Primeiramente, mostraremos que se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então dada qualquer sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$ , temos  $f(x_n) \rightarrow L$ . De fato, sejam  $\varepsilon > 0$  e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$ . Então, por hipótese, existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Agora, como  $x_n \rightarrow a$ , existe  $N$  suficientemente grande tal que  $n > N$  implica  $|x_n - a| < \delta$  e, portanto,  $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ . Ou seja,  $f(x_n) \rightarrow L$ .

b) Aqui, provaremos por absurdo que se para toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$  temos  $f(x_n) \rightarrow L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Ou seja, vamos assumir que existe um  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe algum  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  com  $|f(x) - L| > \varepsilon$ . Sejam um tal  $\varepsilon$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$  um  $x'_n \in D$  com  $0 < |x'_n - a| < 1/n$  e  $|f(x'_n) - L| > \varepsilon$ . Com isso, temos formado uma sequência  $(x'_n) \subset D \setminus \{a\}$ ,  $x'_n \rightarrow a$ , mas  $f(x'_n) \not\rightarrow L$ .

□

**Corolário 2.2.2.** *Um função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , tem limite  $L$  quando  $x \rightarrow a$  se, e somente se, para toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$  temos que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente.*

*Demonstração.* Segue, imediatamente, do fato de que se  $(y_n)$  é uma sequência com  $y_n \rightarrow L$ , então toda subsequência de  $(y_n)$  é convergente e converge para  $L$ .

□

**Teorema 2.2.5.** (Critério de convergência de Cauchy) *Uma condição necessária e suficiente para que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , tenha limite  $L$  quando  $x \rightarrow a$  é que, para todo  $\varepsilon > 0$ , exista  $\delta > 0$  tal que*

$$x, y \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (2.11)$$



*Demonstração.* a) A suficiência segue do critério de convergência de Cauchy para sequências e do Corolário 2.2.2.

b) Exercício 2.2.4.

□

## Exercícios

**E 2.2.1.** Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , então  $f(a) = 0$ . Justifique sua resposta.

**E 2.2.2.** Mostre que se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ .

**E 2.2.3.** Demonstre o Teorema 2.2.3 como um corolário do Teorema 2.2.4.

**E 2.2.4.** Demonstre que se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , tem limite  $L$  quando  $x \rightarrow a$ , então para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in V'_\delta(a) \cap D$  implica  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

## 2.3 Limites laterais

**Definição 2.3.1.** (Limite lateral) Sejam uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , e  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ . Dizemos que  $L \in \mathbb{R}$  é o **limite** de  $f(x)$  com  $x$  tendendo a  $a$  **pela direita** se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (2.13)$$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \quad (2.14)$$

ou ainda, simplesmente,  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a^+$ . Analogamente, escreve-se  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a^-$ , ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (2.15)$$

**Exemplo 2.3.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$ . De fato, dado qualquer  $\varepsilon > 0$  podemos escolher, por exemplo,  $\delta = 1$  e, com isso, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < x - 0 < 1$  implica  $|x/|x| - 1| = 0 < \varepsilon$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$ . De fato, dado qualquer  $\varepsilon > 0$  podemos escolher, por exemplo,  $\delta = 1$  e, com isso, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < 0 - x < 1$  implica  $|x/|x| - (-1)| = |-1 + 1| = 0 < \varepsilon$ .

**Definição 2.3.2.** Ponto de acumulação lateral Seja  $C$  um conjunto. Dizemos que  $a \in C$  é **ponto de acumulação à esquerda** de  $C$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  o conjunto  $(a - \varepsilon, a) \cap C$  contém infinitos pontos de  $C$ . Analogamente, dizemos que  $a \in C$  é **ponto de acumulação à direita** de  $C$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  o conjunto  $(a, a + \varepsilon) \cap C$  contém infinitos pontos de  $C$ .

**Teorema 2.3.1.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é uma função monótona e limitada, definida em um intervalo  $I$  no qual  $a$  é ponto de acumulação à esquerda (ponto de acumulação à direita), então  $f$  tem limite com  $x \rightarrow a^-$  ( $x \rightarrow a^+$ ).

*Demonstração.* Consideremos o caso em que  $f$  é uma função não crescente e  $a$  seja ponto de acumulação à direita. Seja, então  $L$  o supremo do conjunto formado por  $f(x)$  com  $x \in I$  e  $x > a$ . Afirmamos que  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a^+$ . De fato, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $L - \varepsilon < f(a + \delta) \leq L$ . Agora, como  $f$  é não crescente, para todo  $x \in I$ ,  $0 < x - a < \delta$ , temos  $L - \varepsilon < f(a + \delta) \leq f(x) \leq L$  e, portanto,  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Os outros casos são análogos e deixados para o leitor (veja, também, Exercício 2.3.1).  $\square$

## Exercícios

**E 2.3.1.** Demonstre o Teorema 2.3.1 para o caso de uma função crescente e  $a$  ponto de acumulação à esquerda.

## 2.4 Limites no infinito e limites infinitos

**Definição 2.4.1.** (Limites infinitos) Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , e  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $+\infty$  quando  $x \rightarrow a$  se, para todo  $k > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  temos  $f(x) > k$ . Analogamente, dizemos que o limite de  $f(x)$  é

$-\infty$  quando  $x \rightarrow a$  se, para todo  $k > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  temos  $f(x) < -k$ . Nestes casos escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad (2.16)$$

respectivamente.

**Exemplo 2.4.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/|x| = +\infty$ . De fato, dado  $k > 0$  basta tomarmos  $\delta = 1/k$ . Com isso,  $0 < |x - 0| < \delta$  implica  $|x| < 1/k$  e, portanto,  $1/|x| > k$ , i.e.  $|1/|x| - 0| > k$ .
- b) Seja  $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) := 1/x$ . Neste caso,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ . Deixamos a verificação para o leitor.

**Definição 2.4.2.** (Limite no infinito) Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ . Quando  $D$  é ilimitado superiormente dizemos que  $f(x)$  tende a  $L$  quando  $x \rightarrow +\infty$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $k > 0$  tal que  $x > k$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Analogamente, quando  $D$  é ilimitado inferiormente dizemos que  $f(x)$  tende a  $L$  quando  $x \rightarrow -\infty$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $k > 0$  tal que  $x < -k$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Nestes casos escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \quad (2.17)$$

respectivamente.

**Exemplo 2.4.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$  escolhemos  $\delta = 1/\varepsilon$ . Com isso,  $x > \delta$  implica  $0 < 1/x < 1/\delta = \varepsilon$  e, portanto,  $|1/x - 0| < \varepsilon$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x = 0$ . Caso análogo ao anterior, verifique!

**Observação 2.4.1.** Observe que definições análogas às 2.3.1, 2.4.1 e 2.4.2 se aplicam para os casos:

$$\lim_{x \rightarrow a^{+/-}} f(x) = \pm/\mp \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L. \quad (2.18)$$

Também, consideramos definições análogas para os casos:

$$\lim_{x \rightarrow a^{+/-}} f(x) = L^{\pm/\mp} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +/-\infty} f(x) = L^{\pm/\mp}. \quad (2.19)$$

**Teorema 2.4.1.** *Toda função monótona e limitada superiormente (inferiormente), cujo domínio contenha  $[c, +\infty)$  ( $(-\infty, c]$ ), possui limite quando  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ).*

*Demonstração.* Consideremos o caso de  $f : [c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , função não decrescente e limitada superiormente. Seja, então  $L$  o supremo do conjunto imagem de  $f$ . Mostraremos que  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k > 0$  tal que  $L - \varepsilon < f(k) \leq L$ . Agora, como  $f$  é não decrescente, para todo  $x > k$  temos  $L - \varepsilon < f(k) < f(x) \leq k$  e, portanto,  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Isto demonstra o caso considerado e deixamos para o leitor a verificação dos demais (veja, também, Exercício 2.4.1).  $\square$

## Exercícios

**E 2.4.1.** ) Demonstre o Teorema 2.4.1 para o caso de uma função decrescente e limitada inferiormente.

# Capítulo 3

## Continuidade

### 3.1 Função contínua

**Definição 3.1.1.** (Continuidade) Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , e  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ . Dizemos que  $f$  é **contínua** no ponto  $a$  se as seguintes condições são satisfeitas:

- a)  $a \in D$ .
- b) existe o limite de  $f(x)$  com  $x \rightarrow a$ .
- c)  $f(x) \rightarrow f(a)$  quando  $x \rightarrow a$ .

Ainda, dizemos que  $f$  é uma **função contínua** (ou, simplesmente, contínua) quando  $f$  é contínua em todos os pontos de seu domínio.

**Exemplo 3.1.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f(x) = x - 1$  é contínua em todo o seu domínio.
- b) A função  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  é **descontínua** (i.e., não contínua) no ponto  $x = -1$ , pois este não é um ponto no domínio da função.
- c) A função

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & , x \neq -1, \\ 1, & x = -1 \end{cases} \quad (3.1)$$

é descontínua no ponto  $x = -1$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -2 \neq 1 = h(-1). \quad (3.2)$$

**Teorema 3.1.1.** *Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas no ponto  $x = a$ , então são contínuas nestes pontos as funções: (a)  $f + g$ , (b)  $kf$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ , (c)  $f/g$ , dado que  $g(a) \neq 0$ .*

*Demonstração.* Decorre imediatamente da definição de função contínua (Definição 3.1.1) e do Teorema 2.2.3.  $\square$

**Teorema 3.1.2.** (Continuidade da função composta) Sejam dadas funções  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(D_g) \subset D_f$ . Se  $g$  é contínua no ponto  $a$  e  $f$  é contínua no ponto  $g(a)$ , então a função composta  $f \circ g$  é contínua no ponto  $a$ .

*Demonstração.* É claro do enunciado que  $a$  pertence ao domínio de  $f \circ g$ . Como  $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ , nos resta mostrar que  $(f \circ g)(x)$  tende para  $f(g(a))$  quando  $x \rightarrow a$ . Seja, então,  $\varepsilon > 0$ . Pela continuidade da  $f$  no ponto  $g(a)$ , tomemos  $\delta' > 0$  tal que  $y \in V_{\delta'}(g(a)) \cap D_f$  implica  $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$ . Agora, pela continuidade da  $g$  no ponto  $a$ , tomemos  $\delta > 0$  tal que  $x \in V_{\delta}(a) \cap D_g$  implica  $|g(x) - g(a)| < \delta'$ . Logo, temos que se  $x \in V_{\delta}(a) \cap D_g$ , então  $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$ , o que completa a demonstração.  $\square$

**Definição 3.1.2.** (Continuidade lateral) Dizemos que  $f$  é **contínua à direita** (**contínua à esquerda**) no ponto  $a$ , se está definida neste ponto, onde seu limite à direita (à esquerda) é  $f(a)$ .

**Exemplo 3.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

a) A função

$$f_1(x) = \begin{cases} x/|x| & , x \neq 0, \\ -1 & , x = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

é contínua à esquerda no ponto  $x = 0$ . De fato,  $f_1(0) = -1$  e dado qualquer  $\epsilon > 0$  podemos escolher, por exemplo,  $\delta = \epsilon$  tal que  $0 < 0 - x < \delta$  implica  $|f_1(x) - (-1)| = |-1 - (-1)| = 0 < \epsilon$ .

b) A função

$$f_2(x) = \begin{cases} x/|x| & , x \neq 0, \\ 1 & , x = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

é contínua à direita no ponto  $x = 0$ . Verifique!

## Exercícios

**E 3.1.1.** Mostre que se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua no ponto  $a$  e  $f(a) > 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in V_\delta(a) \cap D$  implica  $f(x) > 0$ . Além disso, se removermos a hipótese de que  $f$  seja contínua no ponto  $a$  essa afirmação continua verdadeira? Justifique sua resposta.

**E 3.1.2.** Mostre que qualquer  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em no ponto  $a$  se, e somente se,  $f$  é contínua à esquerda e à direita neste ponto.

## 3.2 Propriedades de funções contínuas

**Teorema 3.2.1.** Teorema do valor intermediário Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua no intervalo fechado  $I = [a, b] \subset D$ , com  $f(a) \neq f(b)$ . Então, dado qualquer  $d$  compreendido entre  $f(a)$  e  $f(b)$  (inclusive), existe  $c \in I$  tal que  $f(c) = d$ .

*Demonstração.* 1. Primeiramente, notamos que o resultado é imediato para os casos de  $d = f(a)$  e de  $d = f(b)$ .

2. Suponhamos  $f(a) < 0 < f(b)$  e, mostraremos que se  $d = 0$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = d$ . Para tanto, usaremos o método da bisseção. Seja  $I^{(1)} := [a^{(1)}, b^{(1)}] = [a, b]$ ,  $l^{(1)}$  o comprimento do intervalo  $I^{(1)}$  e  $p^{(1)}$  o ponto médio deste. Se  $f(p^{(1)}) = 0$  temos demonstrado o que queríamos. Agora, se  $f(p^{(1)}) > 0$ , escolhemos  $I^{(2)} = [a, p^{(1)}]$ . Entretanto, se  $f(p^{(1)}) < 0$ , escolhemos  $I^{(2)} = [p^{(1)}, b]$ . Em qualquer um dos casos  $I^{(2)} := [a^{(2)}, b^{(2)}] \subset I^{(1)}$ ,  $l^{(2)} = l^{(1)}/2$  e  $f(a^{(2)}) < 0 < f(b^{(2)})$ . Com isso, repetimos o procedimento de bisseção para o intervalo  $I^{(2)}$  com  $p^{(2)}$  o ponto médio deste. Se  $f(p^{(2)}) = 0$  temos o resultado desejado, caso contrário escolhemos o intervalo fechado  $I^{(3)} := [a^{(3)}, b^{(3)}] \subset I^{(2)}$ ,  $l^{(3)} = l^{(2)}/2$  e  $f(a^{(3)}) < 0 < f(b^{(3)})$ . No pior dos casos, repetimos infinitamente este procedimento e, com isso, temos construído uma sequência de intervalos fechados  $I^{(1)} \subset I^{(2)} \subset I^{(3)} \subset \dots \subset I^{(n)} \subset \dots$  cujos comprimentos tendem a zero. Logo, pelo Teorema dos intervalos encaixados  $I^{(1)} \cap I^{(2)} \cap I^{(3)} \cap \dots \cap I^{(n)} \cap \dots = \{c\} \subset I$ , o qual é o limite da sequência  $a^{(n)}$  e da  $b^{(n)}$ . Daí, da continuidade da  $f$  e do fato de  $f(a^{(n)}) < 0 < f(b^{(n)})$  temos

$$0 \geq \lim f(a^{(n)}) = f(c) = \lim f(b^{(n)}) \geq 0, \quad (3.5)$$

donde segue que  $f(c) = 0$ , como queríamos demonstrar.

3. Suponhamos que  $f(a) < f(b)$  e  $d \in (f(a), f(b))$ . Neste caso, tomamos  $g(x) = f(x) - d$  e, portanto, temos  $g(a) < 0 < g(b)$ . Pelo demonstrado no item 2., existe  $c \in [a, b]$  tal que  $g(c) = 0$  e, por consequência,  $f(c) = d$ .
4. No caso de  $f(a) > f(b)$ , tomamos  $g(x) = -f(x)$ , de forma que  $g(a) < g(b)$ . Então, pelo item 3., temos o resultado desejado.

□

**Lema 3.2.1.** *Toda função contínua  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada.*

*Demonstração.* Demonstraremos por absurdo. Seja  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua não limitada. Denotemos  $I^{(1)} := I$ . Como  $f$  é não limitada em  $I^{(1)}$ , temos que  $f$  é não limitada em pelo menos uma das metades do intervalo  $I^{(1)}$ . Seja, então  $I^{(2)}$  uma das metades de  $I^{(1)}$  na qual  $f$  é não limitada. Sucessivamente, construímos uma sequência de intervalos fechados  $I^{(n)}$  nos quais  $f$  é ilimitada e cujos comprimentos tendem a zero. Então, pelo Teorema dos intervalos encaixados, existe um  $c \in I^{(1)} \cap I^{(2)} \cap I^{(3)} \cap \dots \cap I^{(n)} \cap \dots \subset I$ . Agora, pela continuidade de  $f$ , temos que  $f(x) \rightarrow f(c)$  quando  $x \rightarrow c$  e, portanto, existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in V_\delta(c)$  implica  $f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1$ , i.e.  $f$  é limitada no intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$ . Mas, como  $I^{(n)} \subset (c - \delta, c + \delta)$  para  $n$  suficientemente grande, temos  $f$  limitada em  $I^{(n)}$ , o que é um absurdo. □

**Teorema 3.2.2.** *Toda função contínua  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tem valor máximo e mínimo.*

*Demonstração.* Vamos, primeiramente, mostrar que  $f$  tem valor máximo em  $I$ . Por absurdo, seja  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua,  $M$  seu supremo (pelo Lema 3.2.1,  $f(I)$  é um conjunto limitado) e  $f(x) < M$  para todo  $x \in I$ . Então,  $1/(M - f(x))$  é uma função positiva e contínua em  $I$ . Seja, então,  $M' > 0$  seu supremo (novamente garantido pelo Lema 3.2.1) e, então, para todo  $x \in I$  temos

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq M' \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{M'}, \quad (3.6)$$

o que é um absurdo, pois isto contradiz o fato de  $M$  ser o supremo de  $f(I)$ . Logo, existe algum  $x \in I$  tal que  $f(x) = M$ . Analogamente, seja  $m$  o ínfimo de  $f(I)$ . Então,  $-m$  é o supremo da função  $g(x) = -f(x)$  no intervalo  $I$ .



Pelo que acabamos de demonstrar, existe  $x \in I$  tal que  $g(x) = -m$  e, por consequência,  $f(x) = m$ .  $\square$

**Teorema 3.2.3.** *Se  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então  $f(I)$  é um intervalo limitado e fechado.*

*Demonstração.* Do Teorema 3.2.2 sejam  $m$  e  $M$  os valores mínimo e máximo de  $f$ , respectivamente. Logo,  $f(I) \subset [m, M]$ . Agora, sejam  $c, d \in I$  tal que  $f(c) = m$  e  $f(d) = M$ . Pelo Teorema do valor intermediário, dado qualquer  $d \in [m, M]$  existe  $x \in I$  tal que  $f(x) = d$ , i.e.  $d \in f(I)$ . Portanto,  $[m, M] \subset f(I)$ .  $\square$

## Exercícios

**E 3.2.1.** Prove que todo o polinômio de grau ímpar  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  tem no mínimo uma raiz.

**E 3.2.2.** Dê um exemplo de:

- a) uma função contínua não limitada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $I$  um intervalo limitado.
- b) uma função contínua  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um intervalo ilimitado  $I$  no qual  $f$  tem valores mínimo e máximo.

## 3.3 Continuidade uniforme

**Definição 3.3.1.** (Continuidade uniforme) Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é dita ser uniformemente contínua se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

**Exemplo 3.3.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $f(x) = \sqrt{x}$  é uniformemente contínua. De fato, consideremos  $x, y > 0$  e  $|x - y| < \delta$  para  $\delta > 0$  arbitrário. Então, se  $y < \delta$  temos  $x < y + \delta < 2\delta$  e

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2\delta} + \sqrt{\delta} < 3\sqrt{\delta}. \quad (3.8)$$

Agora, se  $y \geq \delta$ , então

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{\delta}{\sqrt{y}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}. \quad (3.9)$$

Logo, em qualquer um dos casos  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 3\sqrt{\delta}$ . Por tanto, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher  $\delta = \varepsilon^2/9$  de forma que

$$x, y > 0, |x - y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon, \quad (3.10)$$

o que conclui o resultado.

- b) A função  $f(x) = 1/x$  não é uniformemente contínua. De fato, basta observar que, para qualquer escolha de  $\delta > 0$ , temos

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta} \right| = \left| \frac{\delta}{x^2 + \delta x} \right| \rightarrow +\infty \quad \text{com } x \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

**Teorema 3.3.1.** (de Heine) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[a, b] =: I$ , então  $f$  é uniformemente contínua.

*Demonstração.* Suponhamos, por contradição, que  $f$  não é uniformemente contínua. Então, para algum  $\epsilon > 0$  existem  $x_n, y_n \in I$  tal que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon, \quad (3.12)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora, como  $(x_n)_n$  é uma sequência limitada, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass ela possui uma subsequência convergente. Seja, então,  $(x_{n'})_{n'}$  uma tal subsequência e  $c$  o seu limite. Como  $x_{n'} \in [a, b]$  para todo  $n'$ , temos  $c \in [a, b]$ . Além disso, como  $|x_{n'} - y_{n'}| \rightarrow 0$ , temos  $y_{n'} \rightarrow c$ . Também, pela continuidade de  $f$ , temos  $f(x_{n'}) \rightarrow f(c)$  e  $f(y_{n'}) \rightarrow f(c)$ . Logo,  $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \rightarrow 0$ , o que é um absurdo.  $\square$

## Exercícios

**E 3.3.1.** Mostre que se  $f$  é uniformemente contínua em  $(a, b)$ , então existem os limites  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ .

# Capítulo 4

## Diferenciação

### 4.1 Derivada

**Definição 4.1.1.** (Derivada) Dizemos que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é **derivável** (ou **diferenciável**) no ponto  $x = x_0 \in D$ , se existe o limite da **razão fundamental**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (4.1)$$

quando  $x \rightarrow x_0$ . Neste caso, o valor do limite é chamado de derivada da função  $f$  no ponto  $x_0$  e denotado por  $f'(x_0)$ ,  $Df(x_0)$  ou  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

**Exemplo 4.1.1.** Para  $f(x) = \sqrt{x}$  temos  $f'(2) = 1/(2\sqrt{2})$ . De fato,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (4.2)$$

**Observação 4.1.1.** Observemos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (4.3)$$

usando a mudança de variável  $x = x_0 + h$ .

**Definição 4.1.2.** (Função derivada) Dizemos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função derivável** em todo o seu domínio (ou em toda parte) quando  $f$  é derivável em todos os pontos de seu domínio. Neste caso, definimos a função derivada de  $f$  por  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f'(x)$ , com

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (4.4)$$

**Observação 4.1.2.** A derivada lateral à direita ou à esquerda são definidas a partir da noção de limite lateral por

$$D_+f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (4.5)$$

e

$$D_-f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (4.6)$$

respectivamente. Além disso, é imediato que  $Df(x_0)$  existe se, e somente se, existem e são iguais as derivadas laterais  $D_+f(x_0)$  e  $D_-f(x_0)$ .

**Teorema 4.1.1.** *Toda função derivável num ponto  $x_0$  é contínua nesse ponto.*

*Demonstração.* Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , uma função derivável no ponto  $x_0 \in D$ . Vamos mostrar que  $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ . De fato, para  $x \neq x_0$  temos

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0). \quad (4.7)$$

Agora,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x - x_0 = 0, \quad (4.8)$$

logo  $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**Definição 4.1.3.** (Diferencial) A diferencial de uma função derivável  $f$  no ponto  $x_0$  é o produto  $dy := f'(x_0)\Delta x$ , onde  $\Delta x = x - x_0$ .

**Observação 4.1.3.** De sorte que o diferencial da função identidade  $y = x$  é  $dx = \Delta x$  e, portanto, o diferencial de uma dada função  $y = f(x)$  é  $dy = f'(x_0)dx$  e, também  $f'(x_0) = dy/dx$ .

## Exercícios

**E 4.1.1.** Dê um exemplo de uma função contínua num ponto  $x_0$  e não derivável neste mesmo ponto. Justifique sua resposta.

**E 4.1.2.** Mostre, a partir da definição da derivada de uma função (Definição 4.1.2) que

1.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $(1/x)' = -1/x^2$ .
3.  $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ .

## 4.2 Regras operacionais

**Teorema 4.2.1.** Regras operacionais Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis no ponto  $x \in D$ , então também são deriváveis no mesmo ponto as funções  $f + g$ ,  $kf$ ,  $fg$  e, no caso de  $g(x) \neq 0$ ,  $f/g$ . Além disso, temos:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (4.9)$$

$$(kf)'(x) = kf'(x), \quad (4.10)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad (4.11)$$

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{se } g(x) \neq 0. \quad (4.12)$$

*Demonstração.* Deixaremos como exercício a demonstração para as funções  $f + g$  e  $kf$  (veja, Exercício 4.2.1). Para o caso de  $fg$ , basta observar que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \quad (4.13)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \quad (4.14)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (4.15)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (4.16)$$

Agora, para mostrar que  $f/g$  é diferenciável no ponto  $x \in D$  basta mostrar para o caso de  $f \equiv 1$ . De fato,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \quad (4.17)$$

$$= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \quad (4.18)$$

□

**Teorema 4.2.2.** (Regra da cadeia) Sejam  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  derivável no ponto  $x \in D_g$ ,  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(D_g) \subset D_f$  e derivável no ponto  $y = g(x)$ . Nestas condições, a função composta  $f \circ g$  é diferenciável no ponto  $x$  e  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ .

*Demonstração.* Como  $f$  é derivável em  $y = g(x)$ , temos

$$\frac{f(y+k) - f(y)}{k} = f'(y) + \eta(k), \quad (4.19)$$

com  $\eta(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow 0$ . Rearranjando temos

$$f(y+k) - f(y) = k[f'(y) + \eta(k)] \quad (4.20)$$

inclusive para  $k = 0$ . Agora, para todo  $h$  suficientemente pequeno, pomos  $k = g(x+h) - g(x)$  e, então

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(y+k) - f(y)}{h} \quad (4.21)$$

$$= \frac{[f'(y) + \eta(k)]k}{h} \quad (4.22)$$

$$= [f'(y) + \eta(k)] \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (4.23)$$

$$\rightarrow f'(g(x))g'(x), \quad \text{com } h \rightarrow 0. \quad (4.24)$$

□

**Teorema 4.2.3.** (Derivada da função inversa) Seja  $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , uma função derivável em  $I$  com  $f'(x)$  sempre positiva ou sempre negativa. Então, sua inversa  $x = f^{-1}(y)$  é derivável no intervalo  $J = f(I)$  e  $(f^{-1})'(y) = 1/f'(g(x))$ .

*Demonstração.* Sejam  $y, y_0 \in J$ ,  $x = f^{-1}(y)$  e  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ . Notemos que

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]^{-1}. \quad (4.25)$$

Agora, basta observar que quando  $y \rightarrow y_0$ , temos  $x \rightarrow x_0$  pela continuidade da  $f^{-1}$ . Logo, tomando o limite nas expressões acima, temos o resultado desejado. □

## Exercícios

**E 4.2.1.** Mostre que se  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis num ponto  $x \in D$ , então também são as funções  $f + g$  e  $kf$ , sendo:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{e} \quad (kf)'(x) = kf'(x). \quad (4.26)$$

## 4.3 Extremos e o teorema do valor médio

**Teorema 4.3.1.** Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável num ponto  $c \in D$  no qual ela assume valor máximo ou mínimo local, então  $f'(c) = 0$ .

*Demonstração.* No caso de  $c$  ser ponto de mínimo local de  $f$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(c + h) - f(c) \geq 0$  para todo  $|h| < \delta$ . Logo, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0. \quad (4.27)$$

Mas, então, como  $f$  é diferenciável no ponto  $c$ , necessariamente  $f'(c) = 0$ . Um raciocínio análogo mostra o resultado para o caso de  $c$  ser ponto de máximo local (veja o Exercício 4.3.1).  $\square$

**Teorema 4.3.2.** (Teorema de Rolle) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em todo o seu domínio, derivável no intervalo aberto  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

*Demonstração.* Se  $f$  é constante, então  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in (a, b)$ . Caso contrário,  $f$  terá que assumir valores maiores ou menores que  $f(a) = f(b)$ . Como  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  ela assumirá valor máximo ou mínimo em algum ponto  $c \in (a, b)$  (veja Teorema 3.2.2). Então, pelo Teorema 4.3.1, temos  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**Teorema 4.3.3.** (Teorema do valor médio) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em todo o seu domínio e derivável no intervalo  $(a, b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (4.28)$$

*Demonstração.* Seja

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \quad (4.29)$$

Observamos que  $g$  é contínua em  $[a, b]$ , derivável em  $(a, b)$  e  $g(a) = g(b) = 0$ . Logo, pelo Teorema de Rolle, temos que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ , mas daí  $f'(c)$  satisfaz o resultado desejado.  $\square$

**Teorema 4.3.4.** (Teorema do valor médio generalizado) Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em todo o seu domínio e deriváveis no intervalo  $(a, b)$ . Além disso, suponhamos que  $g'(x) \neq 0$  e  $g(b) - g(a) \neq 0$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.30)$$

*Demonstração.* Veja o Exercício 4.3.4.  $\square$

## Exercícios

**E 4.3.1.** Mostre que se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável num ponto  $c \in D$  no qual ela assume valor máximo local, então  $f'(c) = 0$ .

**E 4.3.2.** Use o teorema do valor médio para mostrar que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em todo o seu domínio e  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é uma função crescente.

**E 4.3.3.** Mostre que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $(a, b)$  e  $f'$  é limitada em  $(a, b)$ , então  $f$  é uniformemente contínua.

**E 4.3.4.** Mostre o Teorema 4.3.4.



# Capítulo 5

## Integração

### 5.1 Integral de Riemann

**Definição 5.1.1.** (Partição de um intervalo) Uma **partição**  $P$  de um intervalo  $[a, b]$  é um conjunto ordenado da forma

$$P([a, b]) = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}. \quad (5.1)$$

O valor  $|P| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , é chamado de **norma da partição**.

**Definição 5.1.2.** (Refinamento de uma partição) Um refinamento de uma partição  $P_n([a, b]) := \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$  é uma partição  $P_m([a, b])$  com  $m > n$  tal que  $P_n([a, b]) \subset P_m([a, b])$ .

**Definição 5.1.3.** (Integral de Riemann) A **integral de Riemann** de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , num intervalo  $[a, b] \subset D$ , quando existe, é o número  $I$  tal que

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (5.2)$$

onde arbitrariamente  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  e  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  são tomados considerando todas as possíveis partições  $P([a, b]) = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ , com  $|P| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Quando um tal  $I$  existe, dizemos que  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

**Observação 5.1.1.** As somas parciais

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (5.3)$$

que aparecem na definição da integral de Riemann são chamadas de **somas de Riemann**.

## 5.2 Integrabilidade de funções contínuas

**Teorema 5.2.1.** *Toda função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $[a, b]$  é integrável.*

*Demonstração.* Seja dado  $\varepsilon > 0$ . Pelo teorema de Heine,  $f$  é uniformemente contínua e, portanto, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in I := [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (5.4)$$

Seja, agora,  $S_n$  uma sequência arbitrária de somas de Riemann com norma tendo a zero quando  $n \rightarrow \infty$ , i.e.

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (5.5)$$

com  $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Queremos provar que existe  $I \in \mathbb{R}$  tal que

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (5.6)$$

independentemente da escolha dos pontos  $x_i$  e  $\xi_i$ . Para tanto, iremos usar o critério de convergência de Cauchy. Para tanto, sejam

$$S_n := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (5.7)$$

a soma de Riemann para uma dada partição  $P_n := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  com  $|P_n| < \delta$  e

$$S_M := \sum_{i=1}^M f(\eta_i) \Delta y_i \quad (5.8)$$

a soma de Riemann para um refinamento  $P_M := \{a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_M = b\}$  de  $P_n$ . Como  $P_M$  é um refinamento de  $P_n$ , cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  é a união de certos subintervalos  $[y_{r-1}, y_r], \dots, [y_{s-1}, y_s]$  e, portanto  $\Delta x_i = \Delta y_r + \dots + \Delta y_s$ . Ainda, a diferença  $S_n - S_M$  conterà, então, termos da forma

$$f(\xi_i) \sum_{j=r}^s f(\eta_j) \Delta y_j = \sum_{j=r}^s [f(\xi_i) - f(\eta_j)] \delta y_j. \quad (5.9)$$

Agora, como  $|\xi_i - \eta_j| < \delta$ , temos  $|f(\xi_i) - f(\eta_j)| < \varepsilon$  e, portanto

$$\left| f(\xi_i) - \sum_{j=r}^s f(\eta_j) \Delta y_j \right| < \varepsilon \sum_{j=r}^s \Delta y_j = \varepsilon \Delta x_i. \quad (5.10)$$

Estendendo este resultado, temos

$$|S_n - S_M| \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon(b-a). \quad (5.11)$$

Por fim, sejam  $S_n$  e  $S_m$  somas de Riemann correspondentes às partições  $P_n$  e  $P_m$ , respectivamente, com  $|P_n| < \delta$  e  $|P_m| < \delta$ . Ainda, seja  $P_M$  um refinamento de ambas partições. Então

$$|S_n - S_m| \leq |S_n - S_M| + |S_M - S_m| < 2\varepsilon(b-a). \quad (5.12)$$

Isto mostra que, dada uma sequência arbitrária de partições  $P_n$  com  $|P_n| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então o limite das somas de Riemann  $S_n$  destas partições existe quando  $n \rightarrow \infty$ . Falta mostrar que este limite é único.

Sejam, agora,  $S_n$  e  $T_n$  diferentes sequências de somas de Riemann cujas partições têm norma tendendo a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Então, por exemplo, a sequência

$$S_1, T_1, S_2, T_2, S_3, T_3, \dots, S_n, T_n, \dots \quad (5.13)$$

também é uma sequência de somas de Riemann cujas partições têm norma tendendo a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo, pelo que mostramos acima, o limite desta sequência existe. Agora, como  $(S_n)_n$  e  $(T_n)_n$  são subsequências destas, elas convergem para o mesmo limite.  $\square$

## Exercícios

**E 5.2.1.** Mostre que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (5.14)$$

para qualquer  $c \in [a, b]$ .

## 5.3 Teorema fundamental do cálculo

**Teorema 5.3.1.** (Teorema da média) Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , contínua em  $I$  e  $m$  e  $M$  os valores mínimo e máximo de  $f$  em  $I$ , respectivamente. Então, existe um número  $c \in I$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a). \quad (5.15)$$

*Demonstração.* Observemos que toda a soma de Riemann satisfaz

$$m(b - a) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq M(b - a). \quad (5.16)$$

Passando ao limite quando  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a), \quad (5.17)$$

ou, equivalentemente, quando  $a \neq b$ ,

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M. \quad (5.18)$$

Agora, pelo teorema do valor intermediário (Teorema 3.2.1), existe  $c \in I$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.19)$$

□

**Teorema 5.3.2.** (Teorema fundamental do cálculo) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , contínua em  $I$ . Então, a função  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (5.20)$$

é derivável em  $(a, b)$  e  $F'(x) = f(x)$ .

*Demonstração.* Observemos que

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (5.21)$$

Agora, do teorema da média (Teorema 5.3.1), existe  $\xi \in [x, x+h]$  tal que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi_h). \quad (5.22)$$

Logo,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x). \quad (5.23)$$

□

## Exercícios

**E 5.3.1.** Seja  $f : [a, b] =: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , contínua em  $I$ . Então, a função  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (5.24)$$

é derivável à direita no ponto  $a$  e à esquerda no ponto  $b$  sendo, respectivamente,  $F'(a+) = f(a)$  e  $F'(b-) = f(b)$ .

# Capítulo 6

## Sequências e séries de funções

### 6.1 Sequência de funções

**Definição 6.1.1.** Uma sequência de funções  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é um conjunto de funções  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f_n(x)$ , indexadas por  $n \in \mathbb{N}$ . Comumente, utiliza-se a notação  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  (ou, simplesmente,  $f_n(x)$ ) para explicitar que trata-se de uma sequência de funções.

**Observação 6.1.1.** Salvo explicitado ao contrário, ao longo deste capítulo assumiremos que as funções que compõe uma dada sequência têm todas o mesmo domínio.

**Exemplo 6.1.1.** Vejamos os seguintes exemplos:

- a)  $f_n(x) = x + 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é uma sequência de funções afins.
- b)  $g_n(x) = x^n$  é uma sequência de polinômios.
- c)  $h_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$  é, também, uma sequência<sup>1</sup> de polinômios.

#### 6.1.1 Convergência pontual

**Definição 6.1.2.** Limite pontual Diz-se que uma sequência de funções  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ , **converge pontualmente** (ou simplesmente) para uma função

---

<sup>1</sup>Uma sequência deste tipo também é chamada de série de funções, como definiremos logo adiante no texto.

$f(x)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , para cada  $x \in D$ , existe  $N$  tal que

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (6.1)$$

**Exemplo 6.1.2.** Vejamos os seguintes casos.

- a) A sequência de funções  $f_n(x) = x + 1/n$  converge pontualmente para a função identidade  $f(x) = x$ . De fato, sejam  $\varepsilon > 0$  e  $x$  no domínio da  $f$ . Escolhendo  $N > 1/\varepsilon$ , temos

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left| x + \frac{1}{n} - x \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad (6.2)$$

- b) A sequência de funções  $g_n(x) = x/n$  converge pontualmente para a função nula  $f(x) \equiv 0$ . De fato, sejam  $\varepsilon > 0$  e  $x$  no domínio da  $f$ . Escolhendo  $N > |x|/\varepsilon$ , temos

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{x}{n} - 0 \right| < \frac{|x|}{n} < \frac{|x|}{N} < \varepsilon. \quad (6.3)$$

## 6.1.2 Convergência uniforme

**Definição 6.1.3.** Convergência uniforme Diz-se que uma sequência de funções  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{R}}$ ,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ , **converge uniformemente** para uma função  $f(x)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que

$$x \in D, n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (6.4)$$

**Exemplo 6.1.3.** Vejamos os seguintes casos:

- a) No Exemplo 6.1.2 a), vimos que a sequência de funções  $f_n(x) = x + 1/n$  é pontualmente convergente para a função  $f(x)$ . Agora, observando a demonstração vemos que a convergência é também uniforme. Verifique!
- b) A sequência de funções  $f_n(x) = x/n$  é pontualmente convergente para  $f(x) \equiv 0$ , mas não é uniformemente convergente. De fato, dado  $\varepsilon > 0$  e  $x$  no domínio, escolhemos  $N > |x|/\varepsilon$  e, então, temos

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} - 0 \right| \leq \frac{|x|}{N} < \varepsilon. \quad (6.5)$$

Isto mostra a convergência pontual. Entretanto, por exemplo, tomemos  $\varepsilon = 1$ . Então, dado qualquer  $n \in \mathbb{N}$  escolhemos  $x = 2/n$ . Logo, temos

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \right| = \frac{x}{n} = 2 > \varepsilon. \quad (6.6)$$

Isto mostra que a convergência de  $f_n \rightarrow 0$  não é uniforme.

**Teorema 6.1.1.** (Critério de convergência de Cauchy) Uma sequência de funções  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente convergente para uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , exista  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$x \in D, n, m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (6.7)$$

*Demonstração.* Mostraremos, separadamente, que a condição é necessária e suficiente.

a) Necessidade. Seja  $\varepsilon > 0$ . Por hipótese,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente, ou seja, existe  $N$  tal que

$$x \in D, n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.8)$$

Logo, para este mesmo  $N$ , temos

$$x \in D, n, m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (6.9)$$

Isto mostra que  $(f_n)$  satisfaz o critério de Cauchy.

b) Suficiência. Começemos construindo nosso candidato a limite. Para cada  $x \in D$ ,  $(f_n(x))$  é uma sequência de números reais que, pela hipótese, satisfaz o critério de Cauchy e, portanto,  $f_n(x)$  converge quando  $n \rightarrow \infty$ . Seja, então,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  a função tal que  $f(x)$  é o limite de  $f_n(x)$  para cada  $x \in D$ . Mostraremos, agora, que  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ . Seja dado  $\varepsilon > 0$ . Por hipótese, existe  $N$  tal que

$$x \in D, n, m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.10)$$

Agora, observemos que  $f_n(x) - f_m(x) \rightarrow f_n(x) - f(x)$  pontualmente quando  $m \rightarrow \infty$ . Logo, passando ao limite na afirmação (6.10), temos

$$x \in D, n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad (6.11)$$

o que mostra a convergência uniforme.



□

**Exemplo 6.1.4.** No exemplo anterior (Exemplo 6.1.3 a)) vimos que  $f_n(x) = x + 1/n$  converge uniformemente para  $f(x) = x$ . Aqui, mostraremos que  $f_n$  satisfaz o critério de Cauchy para sequência de funções. Seja  $\varepsilon > 0$ . Observemos que  $1/n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e, portanto, satisfaz o critério de Cauchy para sequências de números. A saber, existe  $N$  tal que

$$n, m > N \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon. \quad (6.12)$$

Daí, temos também que

$$x \in \mathbb{R}, n, m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| = \left| x + \frac{1}{n} - x - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon. \quad (6.13)$$

O que concluí que  $f_n$  satisfaz o critério de Cauchy.

## Exercícios

**E 6.1.1.** Mostre que a sequência de funções  $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f_n(x) = 1/(nx)$ , converge pontualmente para a função nula  $f(x) \equiv 0$ .

**E 6.1.2.** Mostre que a sequência de funções  $f_n(x) = \cos(x/n)$  converge pontualmente para função constante  $f(x) \equiv 1$ .

**E 6.1.3.** Mostre que a sequência de funções  $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$  é pontualmente convergente para  $f(x) \equiv 0$ .

**E 6.1.4.** Mostre que a sequência de funções  $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$  não é uniformemente convergente para  $f(x) \equiv 0$ .

**E 6.1.5.** Mostre que a sequência de funções  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = e^{x/n}$ , é uniformemente convergente para a função  $f(x) \equiv 1$ .

**E 6.1.6.** Mostre que a sequência de funções  $f_n(x) = x^2/(1 + nx^2)$  satisfaz o critério de convergência de Cauchy para sequências de funções. Dica: observe que  $0 \leq f_n(x) < 1/n$ .

## 6.2 Algumas consequências da convergência uniforme

**Teorema 6.2.1.** *Seja  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções contínuas. Se  $f_n$  converge uniformemente para uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $f$  é contínua.*

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que para quaisquer  $x, a \in D$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \quad (6.14)$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|. \quad (6.15)$$

Seja, então,  $\varepsilon > 0$ . Como  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > N$  temos

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.16)$$

Fixemos um  $n > N$ . Como  $f_n$  é contínua, para cada  $a \in D$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.17)$$

Portanto, usando a desigualdade em (6.14), vemos que para cada  $a \in D$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D, |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (6.18)$$

Isto mostra a continuidade de  $f$ . □

**Teorema 6.2.2.** *Seja  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções contínuas. Se  $f_n$  converge uniformemente para uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então*

$$\lim \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b [\lim f_n(x)] dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.19)$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ , temos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$x \in [a, b], n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}. \quad (6.20)$$

Além disso, do teorema anterior (Teorema 6.2.1), temos que  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e, portanto, assim como  $f_n$ , é integrável neste intervalo (veja Teorema 5.2.1). Por tudo isso, temos

$$n > N \Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \right| \quad (6.21)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon. \quad (6.22)$$

O que concluí a demonstração.  $\square$

**Teorema 6.2.3.** *Seja  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções com derivadas contínuas em  $[a, b]$ , tal que  $f'_n$  converge uniformemente para uma função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponhamos, ainda, para algum ponto  $c \in [a, b]$ ,  $f_n(c)$  é uma sequência convergente. Então,  $f_n$  converge uniformemente para uma função  $f$  para a qual  $f' = g$ , i.e.*

$$\frac{d}{dx} \lim f_n(x) = \lim \frac{d}{dx} f_n(x). \quad (6.23)$$

*Demonstração.* Do teorema fundamental do cálculo (Teorema 5.3.2), para todo  $x \in [a, b]$  temos

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t) dt. \quad (6.24)$$

Como, por hipótese,  $f_n(c)$  é convergente e  $f'_n$  é uniformemente convergente para a função  $g$ , temos, do teorema anterior (Teorema 6.2.2), que tomando o limite de  $n \rightarrow \infty$  nesta última equação, obtemos

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt. \quad (6.25)$$

Observemos que  $f' = g$ . Fica de exercício, mostrar que  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ , o que completa a demonstração.  $\square$

## Exercícios

**E 6.2.1.** Complete a demonstração do Teorema 6.2.3.

## 6.3 Séries de funções

**Definição 6.3.1.** (Séries de funções) Sejam dadas funções  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . A **série das funções**  $f_i$  é a sequência das **somas parciais**

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) := f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x). \quad (6.26)$$

Comumente, denotamos uma tal série por

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x). \quad (6.27)$$

Tendo em vista de uma série de funções  $\sum_i f_i(x)$  é uma sequência de funções, os conceitos de convergência de séries são aplicações diretas das definições de convergência de sequências de funções. Ou seja, dizemos que uma série de funções é **pontualmente convergente** para a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para cada  $\varepsilon > 0$  e para cada  $x \in D$ , existe  $N$  tal que

$$n > N \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n f_i(x) - f(x) \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x) \right| < \varepsilon. \quad (6.28)$$

Ainda, dizemos uma série de funções é **uniformemente convergente** quando, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que

$$x \in D, n > N \Rightarrow \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x) \right| < \varepsilon. \quad (6.29)$$

Assim como as definições de séries de funções, os seguintes teoremas são consequências diretas dos relacionados a sequências de funções.

**Teorema 6.3.1.** (Critério de Cauchy) Uma série de funções  $\sum f_i(x)$ ,  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ , é uniformemente convergente se, e somente se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que

$$x \in D, p \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_{n+i}(x) \right| < \varepsilon. \quad (6.30)$$

*Demonstração.* Do critério de convergência de Cauchy para seqüências de funções, temos que  $\sum f_i(x)$  é uniformemente convergente se, e somente se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que

$$x \in D, n, m > N \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n f_i(x) - \sum_{i=1}^m f_i(x) \right| < \varepsilon. \quad (6.31)$$

Agora, assumindo  $m > n$  s.p.g. e denotando  $p = m - n$  temos

$$\left| \sum_{i=1}^n f_i(x) - \sum_{i=1}^m f_i(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^m f_i(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| \quad (6.32)$$

$$= \left| \sum_{i=m+1}^n f_i(x) \right| \quad (6.33)$$

$$= \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| \quad (6.34)$$

$$= \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) \right|. \quad (6.35)$$

□

**Teorema 6.3.2.** *Seja  $\sum f_i(x)$  uma série de funções  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $D$ . Se  $\sum f_i(x)$  converge uniformemente para  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $f$  é contínua em  $D$ .*

*Demonstração.* Sejam

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (6.36)$$

as somas parciais da série  $\sum f_i(x)$ . Como a soma finita de funções contínuas em um conjunto  $D$  é uma função contínua no mesmo, temos que  $S_n$  é uma função contínua. Logo, como  $S_n \rightarrow f$  uniformemente, temos do Teorema 6.2.1 que  $f$  é contínua em  $D$ . □

**Teorema 6.3.3.** *Seja  $\sum f_i(x)$  uma série de funções  $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $[a, b]$ . Se  $\sum f_i(x)$  converge uniformemente para  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , então*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_i(x) dx = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) dx. \quad (6.37)$$

*Demonstração.* Exercício 6.3.1. □

**Teorema 6.3.4.** (Teste de Weierstrass) Seja  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções. Se  $|f_n(x)| \leq M_n$ ,  $\forall x \in D$ , com  $\sum M_n$  convergente, então  $\sum f_n(x)$  converge absoluta e uniformemente.

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\sum M_n$  é convergente, existe  $N$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{i=n}^{\infty} M_i \right| \leq \varepsilon. \quad (6.38)$$

Mas, então, temos

$$x \in D, n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{i=n}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{i=n}^{\infty} |f_n(x)| \quad (6.39)$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} M_i < \varepsilon. \quad (6.40)$$

Isto mostra que  $\sum f_n(x)$  é absoluta e uniformemente convergente. □

**Exemplo 6.3.1.** A série  $\sum \sin(nx)/n!$  é absoluta e uniformemente convergente. De fato, como  $|\sin(nx)| \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos que  $|\sin(nx)/n!| \leq 1/n!$ . Ainda, como  $\sum 1/n!$  é convergente, segue do Teste de Weierstrass 6.3.4, que  $\sum \sin(nx)/n!$  é absoluta e uniformemente convergente.

## Exercício

**E 6.3.1.** Mostre o Teorema 6.3.3.

**E 6.3.2.** Use o teste de Weierstrass para mostrar que

$$\sum \frac{\cos nx}{n!} \quad (6.41)$$

é absoluta e uniformemente convergente.

**E 6.3.3.** Seja  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções. Use o critério de Cauchy de séries de funções (Teorema 6.3.1) para mostrar que se  $|f_n(x)| \leq M_n$ ,  $\forall x \in D$ , com  $\sum M_n$  convergente, então  $\sum f_n(x)$  é uniformemente convergente.

## 6.4 Séries de potências

Séries de potências são séries da forma

$$\sum a_n x^n. \quad (6.42)$$

**Exemplo 6.4.1.** A expansão em série de Taylor da função  $f(x) = e^x$  em torno do ponto  $x = 0$  é

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad (6.43)$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (6.44)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n. \quad (6.45)$$

Mostraremos esta afirmação no decorrer desta seção.

**Lema 6.4.1.** *Se a série de potências  $\sum a_n x^n$  converge absolutamente para um dado  $x = x_0 \neq 0$ , então ela é absolutamente convergente para todo  $|x| < |x_0|$ . Agora, se ela diverge para um dado  $x = x_0 \neq 0$ , então ela diverge para todo  $|x| > |x_0|$ .*

*Demonstração.* Analisemos, primeiro, o caso em que  $\sum a_n x^n$  converge absolutamente para um dado  $x = x_0 \neq 0$ . Então,  $|a_n x_0^n| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Seja, então,  $M > 0$  tal que  $|a_n x_0^n| < M$ . Com isso, temos

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n. \quad (6.46)$$

Logo

$$\sum |a_n x^n| \leq M \sum \left| \frac{x}{x_0} \right|^n. \quad (6.47)$$

Esta última, é uma série geométrica e, portanto, converge sempre que  $|x| < |x_0|$ . Isto mostra que  $\sum a_n x^n$  é absolutamente convergente sempre que  $|x| < |x_0|$ .

Analisemos, agora, o caso em que  $\sum a_n x^n$  é divergente para um dado  $x = x_0 \neq 0$ . Neste caso, pelo que acabamos de mostrar, a série não pode convergir para nenhum  $x$  tal que  $|x| > |x_0|$  pois, caso contrário, ela teria de ser convergente para  $x = x_0$ .  $\square$

**Teorema 6.4.1.** *Para cada série de potência  $\sum a_n x^n$  que seja convergente em um ponto  $x' \neq 0$  e diverge em um ponto  $x''$ , existe  $r > 0$  tal que a série é absolutamente convergente se  $|x| < r$  e diverge se  $|x| > r$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  o supremo dos números  $|x|$  tal que a série de potências é convergente. Do lema anterior (Lema 6.4.1), temos  $|x'| \leq r \leq |x''|$ . Então, para cada  $x$  tal que  $|x| < r$ , existe  $x_0$  tal que  $|x| < |x_0| < r$  e no qual a série  $\sum a_n x^n$  é convergente. Logo, pelo lema anterior, esta série é absolutamente convergente em  $x$ . Isto mostra que a série de potências é absolutamente convergente para todo  $x$  tal que  $|x| < r$ . Por outro lado, se  $x$  é tal que  $|x| > r$ , então, também pelo lema anterior,  $\sum a_n x^n$  é divergente.  $\square$

**Definição 6.4.1.** (Raio de convergência) Dizemos que  $r \leq 0$  é o raio de convergência de uma dada série de potências  $\sum a_n x^n$  quando, esta é convergente para todo  $|x| < r$ .

**Observação 6.4.1.** O Teorema 6.4.1 nos garante a existência do raio de convergência, levando em conta de que quando a série é convergente para todo  $x \in \mathbb{R}$ , dizemos que seu raio de convergência é infinito.

**Teorema 6.4.2.** *Se  $r > 0$  é o raio de convergência da série de potências  $\sum a_n x^n$ , então esta converge uniformemente em todo intervalo  $[-c, c]$ , onde  $0 < c < r$ .*

*Demonstração.* Sejam  $c < r$  e  $x_0$  tal que  $c < x_0 < r$ . Então,  $\sum |a_n x_0^n|$  é convergente e, logo, existe  $M$  tal que  $|a_n x_0^n| < M$  para todo  $n$ . Assim sendo, para todo  $|x| < c$  temos

$$|a_n x^n| = |a_n x^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{c}{x_0} \right|^n. \quad (6.48)$$

Agora, como  $\sum M|c/x_0|^n$  é convergente, temos do teste de Weierstrass (Teorema 6.3.4), que  $\sum a_n x^n$  é uniformemente convergente em  $|x| < c$ .  $\square$

**Observação 6.4.2.** Do teste da raiz para séries de números, temos que para cada  $x$  tal que  $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  a série  $\sum a_n x^n$  é convergente. Também, para cada  $x$  tal que  $\limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  a série é divergente. Daí, temos que o raio de convergência de uma dada série  $\sum a_n x^n$  é

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (6.49)$$



**Teorema 6.4.3.** Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $r > 0$ , então

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad (6.50)$$

obtida da derivação termo a termo, também tem raio de convergência  $r$ .

*Demonstração.* Seja  $r$  o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Primeiramente, observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \quad (6.51)$$

Então, da Observação 6.4.2 temos que o raio de convergência desta série é

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|(n+1)a_{n+1}|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n a_n|}} \quad (6.52)$$

$$= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (6.53)$$

$$= \frac{1}{1 \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r. \quad (6.54)$$

□

**Teorema 6.4.4.** Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $r > 0$ , então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (6.55)$$

obtida da integração termo a termo, também tem raio de convergência  $r$ .

*Demonstração.* A demonstração é análoga a do teorema anterior (Teorema 6.4.3). Veja o Exercício 6.4.5. □

**Teorema 6.4.5.** (Unicidade de séries de potências) Sejam  $\sum a_n x^n$  e  $\sum b_n x^n$  duas séries de potências com raio de convergência  $r$ . Se  $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$  para todo  $x$  tal que  $|x| < r$ , então  $a_n = b_n$  para todo  $n$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  tenha as seguintes duas representações em séries de potências

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n \quad (6.56)$$

para todo  $x$  tal que  $|x| < r$ . Então, pelo Teorema 6.4.3, podemos derivar termo a termo estas representações para cada  $x$  tal que  $|x| < r$ , em particular em  $x = 0$ . Daí, segue o resultado desejado, veja Exercício 6.4.6. □

## Exercícios

**E 6.4.1.** Mostre que a série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  não é uniformemente convergente no intervalo  $|x| < 1$ .

**E 6.4.2.** Seja dada a série de potência  $\sum a_n x^n$ . Mostre que se existe  $N$  tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x_0^n| < \infty, \quad (6.57)$$

para algum  $x_0 \neq 0$ , então  $\sum a_n x^n$  é absolutamente convergente para todo  $|x| < |x_0|$ .

**E 6.4.3.** Mostre o teste da razão. Isto é, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x_0 \right| < 1, \quad (6.58)$$

então  $\sum a_n x$  é absolutamente convergente para todo  $|x| < |x_0|$ .

**E 6.4.4.** Mostre que se  $\sum a_n x^n$  satisfaz o teste da razão para algum  $x_0 \in \mathbb{R}$ , então existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\sum a_n x^n$  é uniformemente convergente em  $[-c, c]$ .

**E 6.4.5.** Demonstre o Teorema 6.4.4.

**E 6.4.6.** Complete a demonstração do Teorema 6.4.5.

## 6.5 Funções analíticas

Dizemos que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  admite representação em série de potências num ponto  $x_0 \in D$ , quando existe uma série  $\sum a_n (x - x_0)^n$  com raio de convergência  $r$  positivo (ou infinito) tal que

$$f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n, \quad (6.59)$$

para todo  $x$  tal que  $|x - x_0| < r$ .

**Definição 6.5.1.** (Funções analíticas) Dizemos que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é analítica num ponto  $x_0 \in D$ , quando ela admite uma representação em série de potências neste ponto.

**Observação 6.5.1.** Do Teorema 6.4.3, concluímos que toda função analítica em um dado ponto  $x_0$  de seu domínio é de classe  $C^\infty$  (infinitamente continuamente diferenciável) num intervalo  $|x - x_0| < r$ .

As representações de várias funções em séries de potências são muitas vezes obtidas de seus desenvolvimentos em série de Taylor, i.e.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (6.61)$$

Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Teorema 6.5.1.** (Desenvolvimento em série de Taylor) Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável até a ordem  $n + 1$  numa vizinhança  $|x - x_0| < r$ ,  $x_0 \in D$  e  $r > 0$ , então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \quad (6.62)$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (6.63)$$

onde  $R_n(x)$  é o chamado **resto de Lagrange**

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (6.64)$$

onde  $c$  é um número entre  $x_0$  e  $x$ .

*Demonstração.* Primeiramente, denotando  $G(x) = (x - x_0)^{n+1}$  observamos que

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{G(x) - G(x_0)}. \quad (6.65)$$

Então, do teorema do valor médio generalizado, existe  $x'$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(x')}{G'(x')} = \frac{f'(x') - p'_n(x')}{(n+1)(x' - x_0)^n}, \quad (6.66)$$

onde denotamos  $p_n(x) := f(x) - R_n(x)$ . Novamente, aplicando o teorema do valor médio generalizado para a razão do lado direito da equação acima, temos que existe  $x''$  entre  $x'$  e  $x_0$  e, portanto, entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n''(x'')}{G''(x'')} = \frac{f''(x'') - p_n''(x'')}{(n+1)n(x' - x_0)^{n-1}}. \quad (6.67)$$

Ou seja, da repetição deste procedimento  $n+1$  vezes, temos garantida a existência de  $c$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c) - p_n^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad (6.68)$$

o que mostra o resultado desejado, pois  $p_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$ .  $\square$

**Exemplo 6.5.1.** A função  $f(x) = e^x$  tem a seguinte representação em série de potências

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (6.69)$$

com raio de convergência infinito, ou seja,  $e^x$  é uma função analítica. De fato, sua representação em série de potências pode ser obtida de seu desenvolvimento por série de Taylor em torno de  $x_0 = 0$ . Daí, do teorema anterior (Teorema 6.5.1) segue que para cada  $x$ , existe  $c$  entre  $x$  e  $0$  tal que

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} \right| = e^c \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \rightarrow 0 \quad (6.70)$$

quando  $m \rightarrow \infty$ .

**Observação 6.5.2.** Toda função analítica é  $C^\infty$ , mas a recíproca não é verdadeira.

**Exemplo 6.5.2.** A função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ e^{-1/x} & , x > 0 \end{cases}, \quad (6.71)$$

é de classe  $C^\infty$ . Entretanto, ela não é analítica em  $x = 0$ , pois  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo o  $n$  e, então, pelo Teorema 6.4.5, teríamos que  $f(x) = 0$  em uma vizinhança de  $0$ .

## Exercícios

**E 6.5.1.** Mostre que  $f(x) = \sin(x)$  é analítica em  $x = 0$ .

**E 6.5.2.** Mostre que a seguinte função de classe  $C^\infty$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0, \\ e^{-1/x^2} & , x < 0 \end{cases} \quad (6.72)$$

não é analítica em  $x = 0$ .

# Resposta dos Exercícios

**E 2.1.1.** Basta considerar sucessivas vizinhanças  $V_{1/n}(x)$  com  $n \in \mathbb{R}$ .

**E 2.1.2.** A implicação segue imediatamente por negação.

**E 2.2.1.** Veja a Definição [2.2.1](#).

**E 2.2.2.** Use o Teorema [2.2.2](#) observando que

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| = |(\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}) \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}| = \frac{|f(x) - L|}{|\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}|}. \quad (2.12)$$

**E 2.2.3.** Basta usar as propriedades de limites de sequências.

**E 2.2.4.** Observe que  $x, y \in V'_{\delta/2}(a)$  implica  $|x - a| < \delta/2$  e  $|y - a| < \delta/2$ .

**E 2.3.1.** Análogo ao caso da considerado na demonstração do Teorema [2.3.1](#).

**E 2.4.1.** Análogo ao caso demonstrado no Teorema [2.4.1](#).

**E 3.1.1.** Segue imediatamente do Corolário [2.2.1](#).

**E 3.1.2.** Observe que  $f$  tem limite no ponto  $a$  se, e somente se, são iguais os limites à esquerda e à direita de  $f$  neste ponto.

**E 3.2.1.** Use o Teorema do valor intermediário.

**E 3.3.1.** Dica: 1) mostre que toda sequência  $x_n \in (a, b)$  com  $x_n \rightarrow a$  é tal que  $f(x_n)$  é convergente. Seja  $L$  o limite desta sequência; 2) mostre, então, que qualquer outra sequência  $y_n \in (a, b)$  com  $y_n \rightarrow a$  é tal que  $f(y_n) \rightarrow L$ .

**E 4.2.1.** Segue da definição de derivada.

**E 4.3.4.** Aplique o teorema de Rolle (Teorema [4.3.2](#)) para a função  $F(x) := f(x) - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] R.G. Bartle and D.R. Sherbert. *Introduction to real analysis*. John Wiley & Sons, 3. ed. edition, 2000.
- [2] C.I. Doering. *Introdução à análise matemática na reta*. SBM, 1. ed. edition, 2015.
- [3] E.L. Lima. *Análise real*. IMPA, 12. ed. edition, 2017.
- [4] G. Ávila. *Análise matemática para licenciatura*. Blucher, 3. ed. edition, 2006.



# Índice Remissivo

- Cauchy, [11](#), [29](#)
- conjunto
  - discreto, [7](#)
  - fechado, [8](#)
  - interior, [6](#)
- conjunto aberto, [6](#)
- conjunto de
  - aderência, [7](#)
- continuidade, [16](#)
  - lateral, [17](#)
  - uniforme, [20](#)
- contradomínio, [1](#)
- convergência
  - pontual, [33](#)
  - simples, [33](#)
  - uniforme, [34](#)
- critério de
  - Cauchy, [35](#), [39](#)
- definição de
  - função, [1](#)
- denso, [8](#)
- derivável, [22](#)
- derivada, [22](#)
  - lateral, [23](#)
- diferenciável, [22](#)
- diferenciação, [22](#)
- domínio, [1](#)
- extensão
  - de uma função, [3](#)
- fecho, [7](#)
- função, [1](#)
  - ímpar, [4](#)
  - bijetiva, [3](#)
  - composta, [5](#)
  - contínua, [16](#)
  - crescente, [4](#)
  - decrecente, [4](#)
  - descontínua, [16](#)
  - injetiva, [3](#)
  - inversa, [3](#)
  - não-decrecente, [4](#)
- função contínua
  - à direta, [17](#)
- função derivável, [22](#)
- função limitada, [2](#)
  - à direita, [2](#)
  - à esquerda, [2](#)
  - inferiormente, [2](#)
  - superiormente, [2](#)
- função par, [4](#)
- função sobrejetiva, [3](#)
- fundamentos da análise, [1](#)
- gráfico, [2](#)
- imagem de
  - uma função, [2](#)
- integração, [28](#)
- integral de
  - Riemann, [28](#)

- integral de Riemann, 28
- lei de correspondência, 1
- limite, 8
  - infinito, 13
  - no infinito, 14
  - pontual, 33
- limite de
  - função, 8
- limite lateral, 12
- limites
  - de funções, 6
- método da
  - bisseção, 18
- norma da partição, 28
- partição, 28
- ponto
  - isolado, 7
- ponto aderente, 7
- ponto de acumulação, 7
  - à direita, 13
  - à esquerda, 13
- ponto interior, 6
- raio de convergência, 43
- restrição
  - de uma função, 3
- séries de
  - funções, 39
- séries de funções, 33
- sequência de funções, 33
- somas de
  - Riemann, 29
- teorema
  - da média, 31
  - do valor intermediário, 20, 49
  - dos intervalos encaixados, 18
  - fundamental do cálculo, 31
- teorema de
  - Bolzano-Weierstrass, 21
  - Cauchy, 35
  - Rolle, 27
- Teorema do
  - valor intermediário, 18
- variável
  - dependente, 1
  - independente, 1
- vizinhança, 7
  - perfurada, 7
  - simétrica, 7