Método de Elementos Finitos

Pedro H A Konzen

21 de agosto de 2018

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre o método de elementos finitos para a simulação de equações diferenciais. Como ferramenta computacional de apoio didático, faço uso de códigos em python com suporte da biblioteca FEniCS.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa i

Licença ii

Prefácio iii

Sumário iv

1 Método de elementos finitos em 1D 1

1.1 Fundamentos preliminares 1

1.1.1 Interpolação 2

1.1.2 Exercícios 8

Respostas dos Exercícios 10

Referências Bibliográficas 11

Índice Remissivo 12

Capítulo 1

Método de elementos finitos em 1D

1.1 Fundamentos preliminares

Seja dado um intervalo $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \neq x_1$. O espaço vetorial das funções lineares em I é definido por

$$P_1(I) := \{v : \ v(x) = c_0 + c_1 x, \, x \in I, \, c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

Observamos que dado $v \in P_1(I)$, temos que v é unicamente determinada pelos valores $\alpha_0 = v(x_0)$ e $\alpha_1 = v(x_1)$. Como consequência, existe exatamente uma única função $v \in P_1(I)$ para quaisquer dados valores α_0 e α_1. Desta observação, introduzimos a chamada base nodal $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ para $P_1(I)$, definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \tag{1.2}$$

com $i,j = 0,1$. Com esta base, toda função $v \in P_1(I)$ pode ser escrita como uma combinação linear das funções φ_0 e φ_1 com coeficientes α_0 e α_1 (**graus de liberdade**), i.e.

$$v(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x_1). \tag{1.3}$$

Além disso, observamos que

$$\varphi_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{1.4}$$

Uma extensão do espaço $P_1(I)$ é o espaço das funções lineares por partes. Dado $I = [l_0, l_1]$, $l_0 \neq l_1$, consideremos uma partição (**malha**) de I com $n+1$ pontos $\mathcal{I} = \{l_0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = l_1\}$ e, portanto, com n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de comprimento $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na malha $\mathcal{I}$ definimos o seguinte espaço das funções lineares por partes

$$V_h := \{v : \ v \in C^0(\mathcal{I}),\, v|_{I_i} \in P_1(I_i),\, i = 1{,}2, \ldots, n\}. \tag{1.5}$$

Observamos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinadas por seus valores nodais $\{\alpha_i = v(x_i)\}_{i=0}^n$. Reciprocamente, todo conjunto de valores nodas $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ determina unicamente uma função $v \in V_h$. Desta observação, temos que os valores nodais determinam os graus de liberdade com a base nodal $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ para V_h definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \tag{1.6}$$

com $i,j = 0{,}1, \ldots, n$. Podemos verificar que

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & , x \in I_i, \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & , x \in I_{i+1}, \\ 0 & , \text{noutros casos} \end{cases} \tag{1.7}$$

veja, Figura 1.1. É notável que $\phi_i(x)$ tem suporte compacto $I_i \cup I_{i+1}$.

1.1.1 Interpolação

A interpolação é uma das técnicas de aproximação de funções. Dada uma função contínua f em $I = [x_0, x_1]$, definimos o **operador de interpolação linear** $\pi : C^0(I) \to P_1(I)$ por

$$\pi f(x) = f(x_0)\varphi_0(x) + f(x_1)\varphi_1(x). \tag{1.8}$$

Observamos que πf é igual a f nos nodos x_0 e x_1.

Exemplo 1.1.1. A Figura 1.2 ilustra a interpolação da função $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço $P_1([1/4, 3/4)]$. Neste caso

$$\pi f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right)\frac{3/4 - x}{1/2} + f\left(\frac{3}{4}\right)\frac{x - 1/4}{1/2}. \tag{1.9}$$

Podemos computar a função interpolada πf e o gráfico da Figura 1.2 no `Python` com o seguinte código:

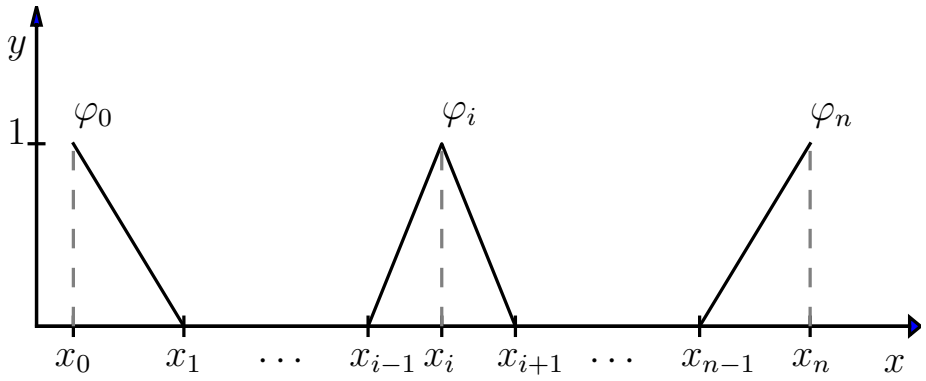

Figura 1.1: Base nodal para o espaço das funções lineares por parte.

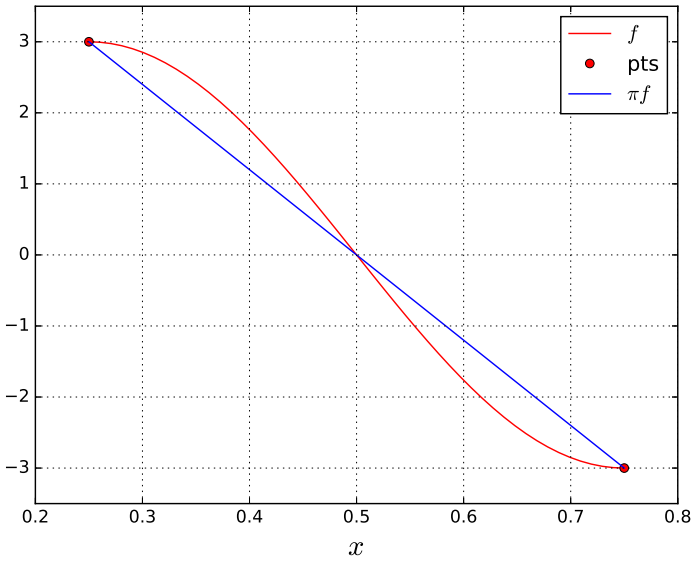

Figura 1.2: Interpolação linear de $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço $P_1([1/4, 3/4])$.

```
from __future__ import division
import numpy as np
from scipy import interpolate
```

```
import matplotlib.pyplot as plt

#fun obj
f = lambda x: 3*np.sin(2*np.pi*x)

#intervalo
x0=1/4
x1=3/4

#interp
pif = interpolate.interp1d([x0,x1],[f(x0),f(x1)])

#grafico
xpts = np.linspace(x0,x1)
plt.plot(xpts,f(xpts),color="red",label="$f$")
plt.plot([x0,x1],[f(x0),f(x1)],
         color="red",linestyle="",
         marker="o",label="pts")
plt.plot(xpts,pif(xpts),
         color="blue",label=r"$\pi f$")
plt.grid("on")
plt.xlabel(r"$x$",fontsize=20)
plt.ylim((-3.5,3.5))
plt.legend(numpoints=1)
plt.show()
```

Agora, vamos buscar medir o erro de interpolação, i.e. $f - \pi f$. Para tanto, podemos usar a norma L^2 definida por

$$\|v\|_{L^2(I)} = \left(\int_i v^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{1.10}$$

Lembramos que valem as desigualdades triangular

$$\|v + w\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{L^2(I)} + \|w\|_{L^2(I)} \tag{1.11}$$

e a de Cauchy-Schwarz

$$\int_I vw \, dx \leq \|v\|_{L^2(I)} \|w\|_{L^2(I)}, \tag{1.12}$$

para qualquer funções v,$w \in L^2(I)$.

Proposição 1.1.1. (Erro da interpolação linear) O interpolador πf satisfaz as estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}, \tag{1.13}$$
$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}, \tag{1.14}$$

onde C é uma constante e $h = x_1 - x_0$.

Demonstração. Denotemos o erro de interpolação por $e = f - \pi f$. Do teorema fundamental do cálculo, temos

$$e(y) = e(x_0) + \int_{x_0}^{y} e'(x)\, dx, \tag{1.15}$$

onde $e(x_0) = f(x_0) - \pi f(x_0) = 0$. Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.12), temos

$$\begin{aligned} e(y) &= \int_{x_0}^{y} e'\, dx && (1.16)\\ &\leq \int_{x_0}^{y} |e'|\, dx && (1.17)\\ &\leq \int_{I} 1 \cdot |e'|\, dx && (1.18)\\ &\leq \left(\int_I 1^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_I e'^2\, dx \right)^{1/2} && (1.19)\\ &= h^{1/2} \left(\int_I e'^2\, dx \right)^{1/2}, && (1.20) \end{aligned}$$

donde

$$e(y)^2 \leq h \int_I e'^2\, dx = h \|e'\|^2_{L^2(I)}. \tag{1.21}$$

Então, integrando em I obtemos

$$\|e\|^2_{L^2(I)} = \int_I e^2(y)\, dy \leq \int_I h \|e'\|^2_{L^2(I)}\, dy = h^2 \|e'\|^2_{L^2(I)}, \tag{1.22}$$

ou seja,

$$\|e\|_{L^2(I)} \leq h \|e'\|_{L^2(I)}. \tag{1.23}$$

Agora, observando que $e(x_0) = e(x_1) = 0$, o teorema de Rolle garante a existência de um ponto $\tilde{x} \in I$ tal que $e'(\tilde{x}) = 0$, donde do teorema fundamental

do cálculo e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$e'(y) = e'(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}}^{y} e''\,dx \tag{1.24}$$

$$= \int_{\tilde{x}}^{y} e''\,dx \tag{1.25}$$

$$\leq \int_{I} 1 \cdot |e''|\,dx \tag{1.26}$$

$$\leq h^{1/2} \left(\int_{I} e''^2 \right)^{1/2}. \tag{1.27}$$

Então, integrando em I, obtemos

$$\|e'\|^2_{L^2(I)} \leq h^2 \|e''\|^2_{L^2(I)}, \tag{1.28}$$

a qual, observando que $e'' = f''$, equivale a segunda estimativa procurada, i.e.

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch\|f''\|_{L^2(I)}. \tag{1.29}$$

Por fim, de (1.23) e de (1.23), obtemos a primeira estimativa desejada

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2\|f''\|_{L^2(I)}. \tag{1.30}$$

□

Vamos, agora, generalizar este resultado para a interpolação no espaço V_h das funções lineares por parte. Dada uma função contínua f em $I = [l_0, l_1]$, definimos o operador interpolador $\pi : C^0(I) \to V_h$ na malha $\mathcal{I}$ de I por

$$\pi f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x). \tag{1.31}$$

Exemplo 1.1.2. A Figura 1.3 ilustra a interpolação da função $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes em uma malha uniforme do intervalo $I = [1/4, 3/4]$ com $n = 4$ subintervalos (5 pontos).
Podemos computar a função interpolada πf e o gráfico da Figura 1.3 no `Python` com o seguinte código:

```
from __future__ import division
import numpy as np
from scipy import interpolate
import matplotlib.pyplot as plt
```

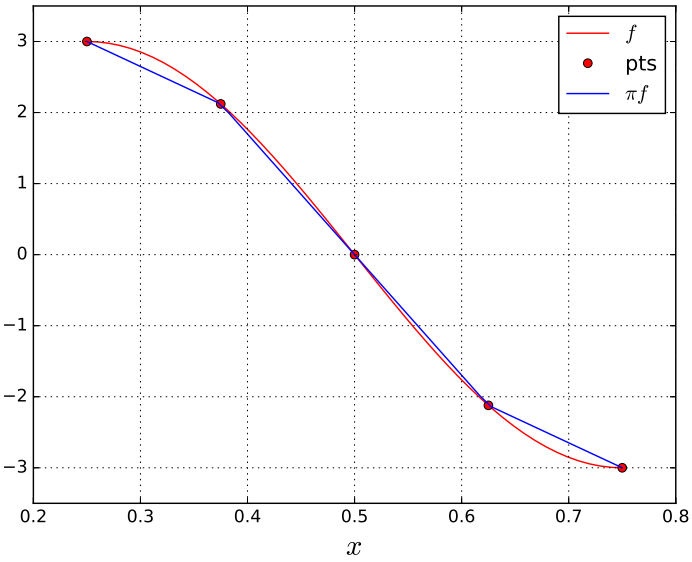

Figura 1.3: Interpolação linear de $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes sobre uma malha com 5 pontos.

```
#fun obj
f = lambda x: 3*np.sin(2*np.pi*x)

#malha
n=5
l0=1/4
l1=3/4
xx = np.linspace(l0,l1,n)

#interp
pif = interpolate.interp1d(xx,f(xx))

#grafico
xpts = np.linspace(l0,l1)
plt.plot(xpts,f(xpts),color="red",label="$f$")
plt.plot(xx,f(xx),
```

```
        color="red",linestyle="",
        marker="o",label="pts")
plt.plot(xpts,pif(xpts),
        color="blue",label=r"$\pi f$")
plt.grid("on")
plt.xlabel(r"$x$",fontsize=20)
plt.ylim((-3.5,3.5))
plt.legend(numpoints=1)
plt.show()
```

O seguinte resultado fornece uma estimativa do erro de interpolação em relação ao tamanho h_i de cada elemento da malha.

Proposição 1.1.2. *O interpolador πf satisfaz as estimativas*

$$\|f - \pi f\|^2_{L^2(I)} \leq C \sum_{i=1}^{n} h_i^4 \|f''\|^2_{L^2(I)}, \tag{1.32}$$

$$\|(f - \pi f)'\|^2_{L^2(I)} \leq C \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \|f''\|^2_{L^2(I)}. \tag{1.33}$$

$$\tag{1.34}$$

Demonstração. Ambas desigualdades seguem da desigualdade triangular e da Proposição 1.1.1. Por exemplo, para a primeira desigualdade, temos

$$\|f - \pi f\|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{i=1}^{n} \|f - \pi f\|^2_{L^2(I_i)} \tag{1.35}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} C h_i^4 \|f''\|^2_{L^2(I_i)}. \tag{1.36}$$

□

Em construção ...

1.1.2 Exercícios

E 1.1.1. Faça um código para verificar as estimativas da Proposição 1.1.1 no caso da interpolação da função $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço P_1 das funções lineares.

E 1.1.2. Faça um código para verificar as estimativas da Proposição 1.1.2 no caso da interpolação da função $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes.

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

Referências Bibliográficas

[1] Hans Petter Langtangen and Anders Logg. *Solving PDEs in Python*. Springer, 2017.

[2] M.G. Larson and F. Bengson. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. Springer, 2013.

Índice Remissivo

graus de liberdade, 1

malha, 2

operador
    interpolação linear, 2