

# Método de Elementos Finitos

Pedro H A Konzen

20 de agosto de 2018

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre o método de elementos finitos para a simulação de equações diferenciais. Como ferramenta computacional de apoio didático, faço uso de códigos em [python](#) com suporte da biblioteca [FEniCS](#).

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	iv
<b>1 Método de elementos finitos em 1D</b>	<b>1</b>
1.1 Fundamentos preliminares . . . . .	1
1.1.1 Interpolação . . . . .	2
1.1.2 Exercícios . . . . .	8
<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>10</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>11</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>12</b>

# Capítulo 1

## Método de elementos finitos em 1D

### 1.1 Fundamentos preliminares

Seja dado um intervalo  $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq x_1$ . O espaço vetorial das funções lineares em  $I$  é definido por

$$P_1(I) := \{v : v(x) = c_0 + c_1x, x \in I, c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

Observamos que dado  $v \in P_1(I)$ , temos que  $v$  é unicamente determinada pelos valores  $\alpha_0 = v(x_0)$  e  $\alpha_1 = v(x_1)$ . Como consequência, existe exatamente uma única função  $v \in P_1(I)$  para quaisquer dados valores  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ . Desta observação, introduzimos a chamada base nodal  $\{\varphi_0, \varphi_1\}$  para  $P_1(I)$ , definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad (1.2)$$

com  $i, j = 0, 1$ . Com esta base, toda função  $v \in P_1(I)$  pode ser escrita como uma combinação linear das funções  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  com coeficientes  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  (**graus de liberdade**), i.e.

$$v(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x). \quad (1.3)$$

Além disso, observamos que

$$\varphi_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (1.4)$$

Uma extensão do espaço  $P_1(I)$  é o espaço das funções lineares por partes. Dado  $I = [l_0, l_1]$ ,  $l_0 \neq l_1$ , consideremos uma partição (**malha**) de  $I$  com  $n + 1$  pontos  $\mathcal{I} = \{l_0 = x_0, x_1, \dots, x_n = l_1\}$  e, portanto, com  $n$  subintervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  de comprimento  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Na malha  $\mathcal{I}$  definimos o seguinte espaço das funções lineares por partes

$$V_h := \{v : v \in C^0(\mathcal{I}), v|_{I_i} \in P_1(I_i), i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.5)$$

Observamos que toda função  $v \in V_h$  é unicamente determinada por seus valores nodais  $\{\alpha_i = v(x_i)\}_{i=0}^n$ . Reciprocamente, todo conjunto de valores nodais  $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$  determina unicamente uma função  $v \in V_h$ . Desta observação, temos que os valores nodais determinam os graus de liberdade com a base nodal  $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$  para  $V_h$  definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad (1.6)$$

com  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Podemos verificar que

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & , x \in I_i, \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & , x \in I_{i+1}, \\ 0 & , \text{noutros casos} \end{cases} \quad (1.7)$$

veja, Figura 1.1. É notável que  $\phi_i(x)$  tem suporte compacto  $I_i \cup I_{i+1}$ .

### 1.1.1 Interpolação

A interpolação é uma das técnicas de aproximação de funções. Dada uma função contínua  $f$  em  $I = [x_0, x_1]$ , definimos o **operador de interpolação linear**  $\pi : C^0(I) \rightarrow P_1(I)$  por

$$\pi f(x) = f(x_0)\varphi_0(x) + f(x_1)\varphi_1(x). \quad (1.8)$$

Observamos que  $\pi f$  é igual a  $f$  nos nodos  $x_0$  e  $x_1$ .

**Exemplo 1.1.1.** A Figura 1.2 ilustra a interpolação da função  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço  $P_1([1/4, 3/4])$ . Neste caso

$$\pi f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right) \frac{3/4 - x}{1/2} + f\left(\frac{3}{4}\right) \frac{x - 1/4}{1/2}. \quad (1.9)$$

Podemos computar a função interpolada  $\pi f$  e o gráfico da Figura 1.2 no Python com o seguinte código:

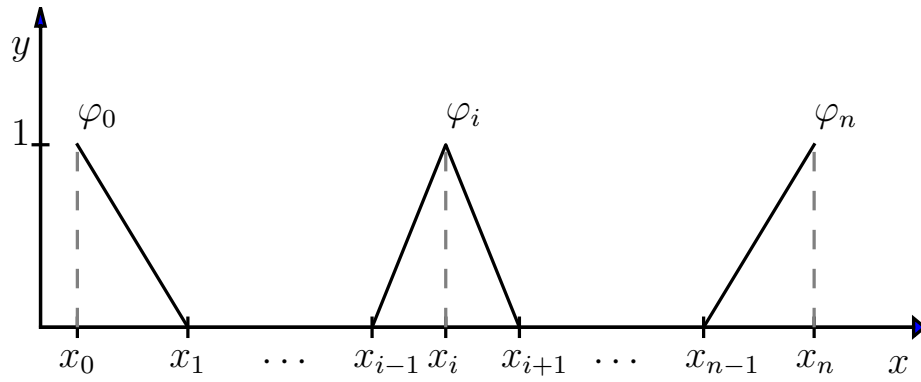


Figura 1.1: Base nodal para o espaço das funções lineares por parte.

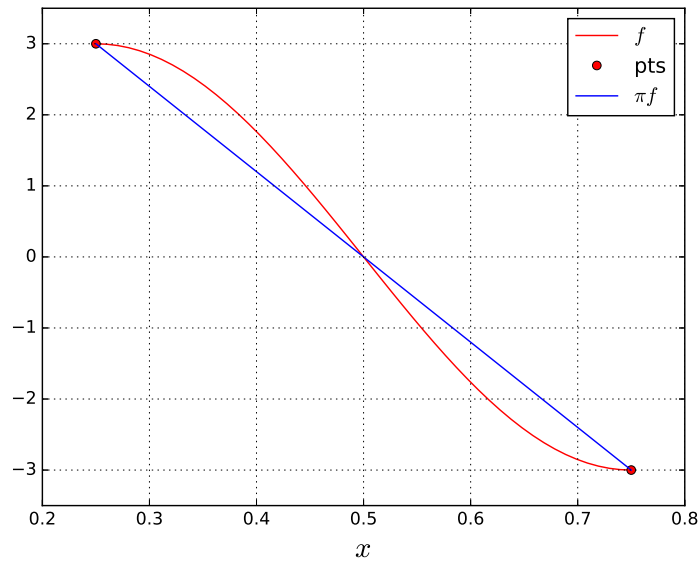


Figura 1.2: Interpolação linear de  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço  $P_1([1/4, 3/4])$ .

```
from __future__ import division
import numpy as np
from scipy import interpolate
```

```

import matplotlib.pyplot as plt

#fun obj
f = lambda x: 3*np.sin(2*np.pi*x)

#intervalo
x0=1/4
x1=3/4

#interp
pif = interpolate.interp1d([x0,x1],[f(x0),f(x1)])

#grafico
xpts = np.linspace(x0,x1)
plt.plot(xpts,f(xpts),color="red",label="$f$")
plt.plot([x0,x1],[f(x0),f(x1)],
         color="red",linestyle="",
         marker="o",label="pts")
plt.plot(xpts,pif(xpts),
         color="blue",label=r"$\pi$ f$")
plt.grid("on")
plt.xlabel(r"$x$",fontsize=20)
plt.ylim((-3.5,3.5))
plt.legend(numpoints=1)
plt.show()

```

Agora, vamos buscar medir o erro de interpolação, i.e.  $f - \pi f$ . Para tanto, podemos usar a norma  $L^2$  definida por

$$\|v\|_{L^2(I)} = \left( \int_I v^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Lembramos que valem as desigualdades triangular

$$\|v + w\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{L^2(I)} + \|w\|_{L^2(I)} \quad (1.11)$$

e a de Cauchy-Schwarz

$$\int_I vw dx \leq \|v\|_{L^2(I)} \|w\|_{L^2(I)}, \quad (1.12)$$

para qualquer funções  $v, w \in L^2(I)$ .



**Proposição 1.1.1.** (Erro da interpolação linear) O interpolador  $\pi f$  satisfaz as estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (1.13)$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (1.14)$$

onde  $C$  é uma constante e  $h = x_1 - x_0$ .

*Demonstração.* Denotemos o erro de interpolação por  $e = f - \pi f$ . Do teorema fundamental do cálculo, temos

$$e(y) = e(x_0) + \int_{x_0}^y e'(x) dx, \quad (1.15)$$

onde  $e(x_0) = f(x_0) - \pi f(x_0) = 0$ . Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.12), temos

$$e(y) = \int_{x_0}^y e' dx \quad (1.16)$$

$$\leq \int_{x_0}^y |e'| dx \quad (1.17)$$

$$\leq \int_I 1 \cdot |e'| dx \quad (1.18)$$

$$\leq \left( \int_I 1^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_I e'^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.19)$$

$$= h^{1/2} \left( \int_I e'^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.20)$$

donde

$$e(y)^2 \leq h \int_I e'^2 dx = h \|e'\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.21)$$

Então, integrando em  $I$  obtemos

$$\|e\|_{L^2(I)}^2 = \int_I e^2(y) dy \leq \int_I h \|e'\|_{L^2(I)}^2 dy = h^2 \|e'\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.22)$$

ou seja,

$$\|e\|_{L^2(I)} \leq h \|e'\|_{L^2(I)}. \quad (1.23)$$

Agora, observando que  $e(x_0) = e(x_1) = 0$ , o teorema de Rolle garante a existência de um ponto  $\tilde{x} \in I$  tal que  $e'(\tilde{x}) = 0$ , donde do teorema fundamental

do cálculo e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$e'(y) = e'(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}}^y e'' dx \quad (1.24)$$

$$= \int_{\tilde{x}}^y e'' dx \quad (1.25)$$

$$\leq \int_I 1 \cdot |e''| dx \quad (1.26)$$

$$\leq h^{1/2} \left( \int_I e''^2 \right)^{1/2}. \quad (1.27)$$

Então, integrando em  $I$ , obtemos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 \leq h^2 \|e''\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.28)$$

a qual, observando que  $e'' = f''$ , equivale a segunda estimativa procurada, i.e.

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}. \quad (1.29)$$

Por fim, de (1.23) e de (1.29), obtemos a primeira estimativa desejada

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}. \quad (1.30)$$

□

Vamos, agora, generalizar este resultado para a interpolação no espaço  $V_h$  das funções lineares por parte. Dada uma função contínua  $f$  em  $I = [l_0, l_1]$ , definimos o operador interpolador  $\pi : C^0(I) \rightarrow V_h$  na malha  $\mathcal{I}$  de  $I$  por

$$\pi f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x). \quad (1.31)$$

**Exemplo 1.1.2.** A Figura 1.3 ilustra a interpolação da função  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço  $V_h$  das funções lineares por partes em uma malha uniforme do intervalo  $I = [1/4, 3/4]$  com  $n = 4$  subintervalos (5 pontos). Podemos computar a função interpolada  $\pi f$  e o gráfico da Figura 1.3 no Python com o seguinte código:

```
from __future__ import division
import numpy as np
from scipy import interpolate
import matplotlib.pyplot as plt
```

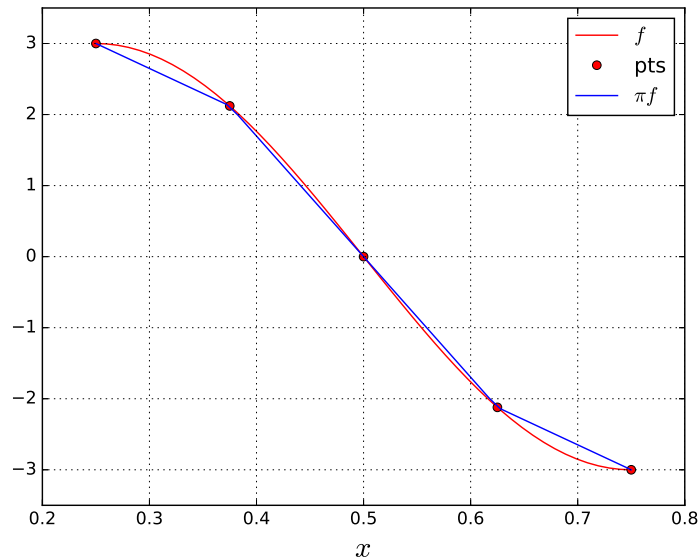


Figura 1.3: Interpolação linear de  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço  $V_h$  das funções lineares por partes sobre uma malha com 5 pontos.

```
#fun obj
f = lambda x: 3*np.sin(2*np.pi*x)

#malha
n=5
l0=1/4
l1=3/4
xx = np.linspace(l0,l1,n)

#interp
pif = interpolate.interp1d(xx,f(xx))

#grafico
xpts = np.linspace(l0,l1)
plt.plot(xpts,f(xpts),color="red",label="$f$")
plt.plot(xx,f(xx),
```

```

        color="red",linestyle="",
        marker="o",label="pts")
plt.plot(xpts,pif(xpts),
        color="blue",label=r"$\pi f$")
plt.grid("on")
plt.xlabel(r"$x$",fontsize=20)
plt.ylim((-3.5,3.5))
plt.legend(numpoints=1)
plt.show()

```

O seguinte resultado fornece uma estimativa do erro de interpolação em relação ao tamanho  $h_i$  de cada elemento da malha.

**Proposição 1.1.2.** *O interpolador  $\pi f$  satisfaz as estimativas*

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.32)$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|f''\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.33)$$

$$(1.34)$$

*Demonstração.* Ambas desigualdades seguem da desigualdade triangular e da Proposição 1.1.1. Por exemplo, para a primeira desigualdade, temos

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f - \pi f\|_{L^2(I_i)}^2 \quad (1.35)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n C h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.36)$$

□

Em construção ...

## 1.1.2 Exercícios

**E 1.1.1.** Faça um código para verificar as estimativas da Proposição 1.1.1 no caso da interpolação da função  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço  $P_1$  das funções lineares.

**E 1.1.2.** Faça um código para verificar as estimativas da Proposição [1.1.2](#) no caso da interpolação da função  $f(x) = 3 \operatorname{sen}(2\pi x)$  no espaço  $V_h$  das funções lineares por partes.

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

# Referências Bibliográficas

- [1] Hans Petter Langtangen and Anders Logg. *Solving PDEs in Python*. Springer, 2017.
- [2] M.G. Larson and F. Bengson. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. Springer, 2013.

# Índice Remissivo

graus de liberdade, [1](#)  
malha, [2](#)  
operador  
    interpolação linear, [2](#)