Análise matemática

Pedro Henrique de Almeida Konzen

26 de abril de 2018

Licença

Prefácio

Sumário

Parte I

Análise de funções de uma variável real

Capítulo 1

Introdução

Em construção ...

Capítulo 2

Fundamentos da análise

2.1 Funções

2.1.1 Definição de função

Definição 2.1.1. (Função) Uma **função** $f : D \to Y$ é uma relação que associa cada elemento de um dado conjunto D com um único elemento de um dado conjunto Y. O conjunto D é chamado de **domínio** da função e o conjunto Y é chamado de **contradomínio** da função.

Comumente, uma dada função $f : D \to Y$ é acompanhada de sua **lei de correspondência**, a qual muitas vezes é denotada por $y = f(x)$. Neste caso, temos que a função f associa $x \in D$ ao elemento $y \in Y$. Neste contexto, x é chamada de **variável independente** e y de **variável dependente**. Ainda, muitas vezes uma função é descrita apenas por sua lei de correspondência e, neste caso, os conjuntos domínio e imagem são inferidos no contexto em questão.

Observação 2.1.1. Neste livro, quando não especificado ao contrário, assumiremos que o domínio e o contradomínio das funções consideradas são subconjuntos dos números reais,

Exemplo 2.1.1. Vejamos os seguintes casos:

a) A relação $f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := x^2 + 1$, define uma função.

b) A relação $g : D = \{0,1,2,3,4\} \to \mathbb{Z}$, $x^2 + y^2 = 9$ com $x \in D$ e $y \in Y$, não é uma função. Com efeito, $0 \in D$ e relaciona-se com $3 \in Y$ e $-3 \in Y$ no seu contradomímio.

c) Da equação $y = \sqrt{x}$ pode-se inferir a função $h : x \in D \to y \in \mathbb{R}$, onde o domínio D é conjunto dos reais não negativos.

Definição 2.1.2. (Imagem de uma função) A **imagem** I_f de uma dada função $f : D \to Y$ é o conjunto de todos os elementos de Y que se relacionam com algum elemento de D, i.e.:

$$I_f := \{y \in Y;\ \exists x \in D \text{ tal que } y = f(x)\}. \tag{2.1}$$

Exemplo 2.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := x^2 + 1$, tem imagem $I_f = \{1,4,9\}$.

b) A imagem da função $f : \{0\} \cup \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $y = 2x + 1$, é conjunto dos números ímpares.

c) A imagem da função $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = \text{sen}\, x$, é $I_{\text{sen}} = [-1, 1]$.

Observação 2.1.2. Dada uma função $f : D \to Y$ e um conjunto $A \subset D$, definimos a imagem de A pela função f por

$$f(A) := \{y \in Y;\ \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}. \tag{2.2}$$

Por exemplo, dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x}$, temos

$$f(\{0,1,4,9\}) = \{0,1,2,3\}. \tag{2.3}$$

Definição 2.1.3. (Gráfico) O **gráfico** de uma função $f : D \to Y$, $y = f(x)$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) tal que $x \in D$ e $y = f(x)$, i.e.

$$G_f := \{(x, y) \in D \times Y;\ y = f(x)\}. \tag{2.4}$$

Exemplo 2.1.3. O gráfico da função $f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := x^2 + 1$, é

$$G_f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 10)\}. \tag{2.5}$$

2.1.2 Classificações elementares

Definição 2.1.4. (Função limitada) Seja dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Dizemos que f é uma **função limitada inferiormente** (ou **limitada à esquerda**) quando existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x)$ para todo $x \in D$. Analogamente, dizemos que f é uma **função limitada superiormente** (ou **limitada à direta**) quando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in D$. Ainda, f é dita ser **limitada** quando é limitada inferiormente e superiormente.

Exemplo 2.1.4. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^2 + 1$, é limitada inferiormente. De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ temos $x^2 \geq 0$ e, portanto, $y = x^2 + 1 \geq 1$.

b) A função seno é uma função limitada. Isto segue imediatamente da definição da função seno no círculo unitário (círculo trigonométrico).

Definição 2.1.5. Restrição/extensão de uma função Uma função $g : A \to Y$, $y = g(x)$, é dita ser uma **restrição** da dada função $f : D \to Y$ quando $A \subset D$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Analogamente, f é uma **extensão** da função g.

Exemplo 2.1.5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x + 1$, é uma extensão da função $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Definição 2.1.6. (Função injetiva) Uma função $f : D \to Y$, $y = f(x)$, é dita ser **injetiva** (**injetora** ou **inversível**) quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 \neq x_2$ temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observação 2.1.3. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é injetiva se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in D$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ temos $x_1 = x_2$.

Exemplo 2.1.6. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f(x) = x^2$ não é injetiva, pois tomando $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ temos $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$.

b) A função $f(x) = \sqrt{x + 1}$ é injetiva. De fato, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, então $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$. Agora, tomando o quadrado dos dois lados, temos $x_1 = x_2$.

Definição 2.1.7. (Função sobrejetiva) Uma função $f : D \to Y$, $y = f(x)$, é **sobrejetiva** quando $f(D) = Y$ (ou, equivalentemente, $I_f = Y$).

Exemplo 2.1.7. A função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$, é sobrejetiva. De fato, dado qualquer $y \in \mathbb{R}$ basta escolhermos $x = e^y$ para termos $f(x) = y$.

Observação 2.1.4. Uma função injetiva e sobrejetiva é dita ser **bijetiva**.

Definição 2.1.8. (Função inversa) Dada uma função invertível (i.e. injetora) $f : D \to Y$, $y = f(x)$, definimos sua **inversa** por $f^{-1} : f(D) \to D$ que associa cada elemento $y \in f(D)$ com $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 2.1.8. Vejamos os seguintes casos:

a) A inversa da função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y = \ln(x)$, é a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $y = e^x$.

b) A inversa da função $f : [-1, \infty] \to [0, \infty)$, $y = \sqrt{x + 1}$, é a função $f^{-1} : [0, \infty) \to [-1, \infty]$, $y = x^2 - 1$. De fato, f é sobrejetiva e dado $x \in [-1, \infty]$ temos $f(x) = y = \sqrt{x + 1}$ e, então $y^2 = x + 1$, logo $x = y^2 - 1$.

Definição 2.1.9. (Função monótona) Seja dada uma função $f : D \to Y$. Dizemos que f é **crescente** quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Agora, quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \leq f(x_2)$, dizemos que f é uma **função não-decrescente**. Analogamente, quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$ dizemos que f é uma função **decrescente**. Por fim, quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \geq f(x_2)$ dizemos que f é uma função **não-crescente**.

Exemplo 2.1.9. Vejamos os seguintes casos:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^3$, é uma função crescente.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = e^{-x}$ é uma função decrescente.

Definição 2.1.10. (Paridade de uma função) Uma função $f : D \to Y$, $y = f(x)$, é dita ser **par** quando para todo $x \in D$, temos $f(x) = f(-x)$. Agora, quando para todo $x \in D$, temos $f(x) = -f(-x)$, então dizemos se tratar de uma função **ímpar**.

Exemplo 2.1.10. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = |x|$, é uma função par.

b) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^3$, é uma função ímpar.

2.1.3 Operações elementares

Operações elementares envolvendo funções são comumente definidas tomando o cuidado de restringir o domínio das funções operadas para um conjunto apropriado. Por exemplo, dadas as funções $f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e $g : B \to \mathbb{R}$, $y = g(x)$, definimos a função soma de f com g por $(f + g) : A \cap B \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$. Agora, para estas mesmas função, definimos a função quociente de f com g por $(f/g) : A \cap B \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$.

Exemplo 2.1.11. A função $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x} - |x|$, é a subtração da função $f_1 : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x}$, com a função $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = |x|$, i.e. $f(x) = (f_1 - f_2)(x) := f_1(x) - f_2(x)$.

Definição 2.1.11. (Composição de funções) Sejam dadas as funções $f : D_f \to Y_f$, $y = f(x)$, e $g : D_g \to Y_g$, $y = g(x)$, com $I_g \subset D_f$. Definição a **função composta** de f com g por $(f \circ g) : D_g \to Y_f$ com $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$.

Exemplo 2.1.12. A função $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$, é a composição da função $f_1 : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x}$, com a função $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^2 + 1$.

Exercícios

E 2.1.1. Sejam $f : D \to Y$, $y = f(x)$, e $A, B \subset D$. Mostre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

E 2.1.2. Construa uma função crescente, limitada superiormente e com domínio igual ao conjunto dos números reais.

E 2.1.3. Mostre que $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x^3 - 1}$, é injetora e construa sua inversa.

E 2.1.4. Mostre que se $f : D \to Y$ é injetora, então f não é par.

E 2.1.5. Mostre que uma dada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é limitada quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Limites

3.1 Noções de topologia

Definição 3.1.1. (Ponto interior) Diz-se que x é um **ponto interior** de um dado conjunto C quando existe um intervalo (a, b) que contém x e está contido em C, i.e. $x \in (a, b) \subset C$. O conjunto de todos os pontos interiores de C é chamado de seu **interior**.

Exemplo 3.1.1. a) Todo elemento de um intervalo aberto (a, b) é ponto interior deste.

b) O interior de um dado intervalo fechado $[a, b]$ é o intervalo aberto (a, b).

Definição 3.1.2. (Conjunto aberto) Diz se que C é **conjunto aberto** quando todos seus elementos são pontos interiores.

Exemplo 3.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) O intervalo $(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ é um conjunto aberto. De fato, dado $x \in (a, b)$ podemos tomar $0 < \varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$ de forma que $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$.

b) O intervalo $(a, b]$ não é aberto, pois $b \in (a, b]$ não é ponto interior.

c) O conjunto vazio $\emptyset$ é um conjunto aberto. Com efeito, se o conjunto $\emptyset$ não é aberto, então existe um elemento $x \in \emptyset$ que não é ponto interior de $\emptyset$, o que é um absurdo pois $\emptyset$ não contém elementos por definição.

d) O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é aberto.

Definição 3.1.3. (Vizinhança) Uma **vizinhança** de um dado ponto x é qualquer conjunto V que contenha x como ponto interior. Também, a **vizinhança simétrica** de um ponto $x \in \mathbb{R}$ é todo intervalo $V_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$. Mais estrito, a **vizinhança perfurada** de $x \in \mathbb{R}$ é uma vizinhança de x que não contém x. Aproveitamos para fixar a notação:

$$V'_\varepsilon(x) := V_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y \in \mathbb{R};\ 0 < |x - y| < \varepsilon\}.$$

Exemplo 3.1.3. Podemos reescrever o Exemplo 3.1.2 da seguinte forma. Um intervalo (a, b) é um conjunto aberto, pois para cada $x \in (a, b)$ podemos escolher $0 < \varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$ tal que $V_\varepsilon(x) \subset (a, b)$.

Definição 3.1.4. (Ponto de acumulação) Um ponto x é chamado de **ponto de acumulação** de um dado conjunto C quando toda vizinhança de x contém infinitos pontos de C.

Exemplo 3.1.4. Vejamos os seguintes casos:

a) O número a é ponto de acumulação do intervalo $(a, b]$ não degenerado. De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos $(a, a + \varepsilon) \subset V_\varepsilon(a)$ e $(a, a + \varepsilon) \cap (a, b]$ é um conjunto infinito.

b) Zero é o único ponto de acumulação do conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$.

Definição 3.1.5. (Ponto isolado) Diz que x é **ponto isolado** de um dado conjunto C quando $x \in C$ não é ponto de acumulação de C. Diz-se que um conjunto é **discreto** quando todos seus elementos são pontos discretos.

Exemplo 3.1.5. Vejamos os seguintes casos:

a) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é discreto.

b) O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é discreto.

c) O conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ é discreto.

Definição 3.1.6. (Ponto aderente) Dizemos que x é **ponto aderente** de um dado conjunto C quando toda vizinhança de x contém algum ponto de C. O conjunto de todos os pontos aderentes de C é chamado de **fecho** (ou, conjunto de aderência) de C, o qual denotamos por $\overline{C}$.

Observação 3.1.1. Observe que todo ponto de um conjunto é aderente ao mesmo, bem como, todos os seus pontos de acumulação.

Exemplo 3.1.6. Vejamos os seguintes casos:

a) O fecho de $(a, b]$ é o intervalo fechado $[a, b]$.

b) O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é o fecho do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, i.e. $\overline{Q} = \mathbb{R}$.

Definição 3.1.7. Conjunto fechado Dizemos que um conjunto C é **fechado** quando é igual ao seu fecho, i.e. $C = \overline{C}$.

Exemplo 3.1.7. Vejamos os seguintes casos:

a) O intervalo $[a, b]$ é um conjunto fechado.

b) O conjunto vazio $\emptyset$ é fechado. Por quê?

c) O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é fechado.

d) O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é fechado.

Definição 3.1.8. (Conjunto denso) Dizemos que um conjunto A é **denso** no conjunto B, quando todo ponto aderente de $\overline{A} \subset B$.

Exemplo 3.1.8. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

3.1.1 Exercícios

E 3.1.1. Seja dado um conjunto C. Mostre que x é ponto de acumulação de C se, e somente se, toda vizinhança de x contém pelo menos um elemento de C diferente de x.

Resposta. Basta considerar sucessivas vizinhanças $V_{1/n}(x)$ com $n \in \mathbb{R}$.

E 3.1.2. Seja dado um conjunto C. Mostre que x é ponto isolado de C se, e somente se, existe uma vizinhança de x tal que $(V(x) \setminus \{x\}) \cap C = \emptyset$.

Resposta. A implicação segue imediatamente por negação.

3.2 Limites

Definição 3.2.1. (Limite) Sejam uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e a um ponto de acumulação de D. Diz-se que $L \in \mathbb{R}$ é o **limite** de $f(x)$ com x tendendo a a se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{3.2}$$

ou ainda, simplesmente, $f(x) \to L$ quando $x \to a$.

Exemplo 3.2.1. Vejamos os seguintes casos:

a) Temos $\lim_{x\to 1} x - 1 = 0$. Isto segue imediatamente, pois, neste caso, $f(x) = x - 1$, $a = 1$, $L = 0$ e, então, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ de forma que

$$x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1 - 0| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

b) A função não precisa estar definida no ponto em o limite é tomado. Por exemplo, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = 0$. Verifique!

Observação 3.2.1. Quando nos referirmos a expressão "x tende a a" (ou similares), estaremos sempre assumindo que a é um ponto de acumulação do domínio da função de interesse.

3.2.1 Propriedades do limite

Teorema 3.2.1. *Se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.*

Demonstração.

Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Tomando, então, um tal δ e observando que $||f(x)| - |L|| < |f(x) - L|$, temos que para todo $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$, ocorre $||f(x)| - |L|| < \varepsilon$.

■

Teorema 3.2.2. *Se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $A < L < B$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $A < f(x) < B$.*

Demonstração.

De fato, por hipótese, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Então, o resultado segue escolhendo um tal δ quando $\varepsilon = \min\{L - A, B - L\}$.

■

Corolário 3.2.1. (Permanência do sinal) Se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$ ($L < 0$), então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$, implica $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Demonstração.

Quando $L > 0$ ($L < 0$) basta escolher $A = 0$ ($B = 0$) no teorema anterior.

■

Teorema 3.2.3. (Operações com limites) Sejam f_1,$f_2 : D \to \mathbb{R}$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, com $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$, então (omitindo que $x \to a$)

a) $\lim[f_1(x) + f_2(x)] = \lim f_1(x) + \lim f_2(x)$.

b) para todo $k \in \mathbb{R}$, temos $\lim kf_1(x) = k \lim f_1(x)$.

c) $\lim f_1(x)f_2(x) = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$.

d) $\lim \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}$, quando $L_2 \neq 0$.

Demonstração.

Seja dado $\varepsilon > 0$.

a) Seja $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|f_2(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Logo, para tais δ e x temos

$$|(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (3.4)$$

b) O resultado é imediato para $k = 0$. Sejam $k \neq 0$ e $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/|k|$. Então, para tais δ e x temos $|kf_1(x) - kL_1| = |k||f_1(x) - L_1| < |k|\varepsilon/|k| = \varepsilon$.

c) Sejam $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/(2|L_2|)$, $|f_1(x)| < M$ (veja Teorema 3.2.2) e $|f_2(x) - L_2| < \varepsilon/(2M)$. Então

$$\begin{aligned} |f_1(x)f_2(x) - L_1L_2| &= |f_1(x)f_2(x) - f_1(x)L2 + f_1(x)L_2 - L_1L_2| \\ &= |f_1(x)(f_2(x) - L_2) + (f_1(x) - L_1)L_2| \\ &\leq |f_1(x)||f_2(x) - L_2| + |f_1(x) - L_1||L_2| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|L_2|}|L_2| = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.5)$$

d) De c), basta mostrar que $1/f_2(x) \to 1/L_2$ quando $x \to a$. Para tando, seja $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon L_2^2}{2}$ e $|f_2(x)| > |L_2|/2$ (veja Teorema 3.2.2). Então, para tais δ e x temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2}\right| &= \frac{|f_2(x) - L_2|}{|f_2(x)L_2|} \\ &< \frac{\frac{\varepsilon L_2^2}{2}}{|L_2|\frac{|L_2|}{2}} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.6)$$

■

Teorema 3.2.4. *O limite de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é L quando $x \to a$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset D\setminus\{a\}$ com $x_n \to a$, temos $f(x_n) \to L$.*

Demonstração.

a) Primeiramente, mostraremos que se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então dada qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$, temos $f(x_n) \to L$. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$. Então, por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Agora, como $x_n \to a$, existe N suficientemente grande tal que $n > N$ implica $|x_n - a| < \delta$ e, portanto, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Ou seja, $f(x_n) \to L$.

b) Aqui, provaremos por absurdo que se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$ temos $f(x_n) \to L$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Ou seja, vamos assumir que existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algum $x \in D$, $0 < |x_n - a| < \delta$ com $|f(x) - L| > \varepsilon$. Sejam um tal ε e para cada $n \in \mathbb{N}$ um $x'_n \in D$ com $0 < |x'_n - a| < 1/n$ e $|f(x'_n) - L| > \varepsilon$. Com isso, temos formado uma sequência $(x'_n) \subset D \setminus \{a\}$, $x'_n \to a$, mas $f(x'_n) \not\to L$.

■

Corolário 3.2.2. *Um função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tem limite L quando $x \to a$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$ temos que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.*

Demonstração.

Segue, imediatamente, do fato de que se (y_n) é uma sequência com $y_n \to L$, então toda subsequência de (y_n) é convergente e converge para L.

■

Teorema 3.2.5. (Critério de convergência de Cauchy) Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tenha limite L quando $x \to a$ é que, para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$x,y \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Demonstração.

a) A suficiência segue do critério de convergência de Cauchy para sequências e do Corolário 3.2.2.

b) Exercício 3.2.4.

■

Exercícios

E 3.2.1. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, então $f(a) = 0$. Justifique sua resposta.

Resposta. Veja a Definição 3.2.1.

E 3.2.2. Mostre que se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$, então $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Resposta. Use o Teorema 3.2.2 observando que

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| = |(\sqrt{f(x)} - \sqrt{L})\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}| = \frac{|f(x) - L|}{|\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}|}. \tag{3.8}$$

E 3.2.3. Demonstre o Teorema 3.2.3 como um corolário do Teorema 3.2.4.

Resposta. Basta usar as propriedades de limites de sequências.

E 3.2.4. Demonstre que se $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tem limite L quando $x \to a$, então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x,y \in V'_\delta(a) \cap D$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Resposta. Observe que $x,y \in V'_{\delta/2}(a)$ implica $|x - a| < \delta/2$ e $|y - a| < \delta/2$.

3.3 Limites laterais

Definição 3.3.1. (Limite lateral) Sejam uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o **limite** de $f(x)$ com x tendendo a a **pela direita** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L, \tag{3.10}$$

ou ainda, simplesmente, $f(x) \to L$ quando $x \to a^+$. Analogamente, escreve-se $f(x) \to L$ quando $x \to a^-$, ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Exemplo 3.3.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos escolher, por exemplo, $\delta = 1$ e, com isso, para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 < x - 0 < 1$ implica $|x/|x| - 1| = 0 < \varepsilon$.

b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos escolher, por exemplo, $\delta = 1$ e, com isso, para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 < 0 - x < 1$ implica $|x/|x| - (-1)| = |-1+1| = 0 < \varepsilon$.

Definição 3.3.2. Ponto de acumulação lateral Seja C um conjunto. Dizemos que $a \in C$ é **ponto de acumulação à esquerda** de C se, para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $(a-\varepsilon, a) \cap C$ contém infinitos pontos de C. Analogamente, dizemos que $a \in C$ é **ponto de acumulação à direita** de C se, para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $(a, a+\varepsilon) \cap C$ contém infinitos pontos de C.

Teorema 3.3.1. *Se $f : I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é uma função monótona e limitada, definida em um intervalo I no qual a é ponto de acumulação à esquerda (ponto de acumulação à direita), então f tem limite com $x \to a^-$ $(x \to a^+)$.*

Demonstração.

Consideremos o caso em que f é uma função não crescente e a seja ponto de acumulação à direita. Seja, então L o supremo do conjunto formado por $f(x)$ com $x \in I$ e $x > a$. Afirmamos que $f(x) \to L$ quando $x \to a^+$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $L - \epsilon < f(a+\delta) \leq L$. Agora, como f é não crescente, para todo $x \in I$, $0 < x - a < \delta$, temos $L - \epsilon < f(a+\delta) \leq f(x) \leq L$ e, portanto, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Os outros casos são análogos e deixados para o leitor (veja, também, Exercício 3.3.1).

■

Exercícios

E 3.3.1. Demonstre o Teorema 3.3.1 para o caso de uma função crescente e a ponto de acumulação à esquerda.

Resposta. Análogo ao caso da considerado na demonstração do Teorema 3.3.1.

3.4 Limites no infinito e limites infinitos

Definição 3.4.1. (Limites infinitos) Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que o limite de $f(x)$ é $+\infty$ quando $x \to a$ se, para todo $k > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ temos $f(x) > k$. Analogamente, dizemos que o limite de $f(x)$ é $-\infty$ quando $x \to a$ se, para todo $k > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ temos $f(x) < -k$. Nestes casos escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \tag{3.12}$$

respectivamente.

Exemplo 3.4.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x\to 0} 1/|x| = +\infty$. De fato, dado $k > 0$ basta tomarmos $\delta = 1/k$. Com isso, $0 < |x - 0| < \delta$ implica $|x| < 1/k$ e, portanto, $1/|x| > k$, i.e. $|1/|x| - 0| > k$.

b) Seja $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := 1/x$. Neste caso, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Deixamos a verificação para o leitor.

Definição 3.4.2. (Limite no infinito) Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Quando D é ilimitado superiormente dizemos que $f(x)$ tende a L quando $x \to +\infty$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $x > k$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Analogamente, quando D é ilimitado inferiormente dizemos que $f(x)$ tende a L quando $x \to -\infty$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $x < -k$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Nestes casos escrevemos

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L, \tag{3.13}$$

respectivamente.

Exemplo 3.4.2. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $\delta = 1/\varepsilon$. Com isso, $x > \delta$ implica $0 < 1/x < 1/\delta = \varepsilon$ e, portanto, $|1/x - 0| < \varepsilon$.

b) $\lim_{x\to -\infty} 1/x = 0$. Caso análogo ao anterior, verifique!

Observação 3.4.1. Observe que definições análogas às 3.3.1, 3.4.1 e 3.4.2 se aplicam para os casos:

$$\lim_{x\to a^{+/-}} f(x) = \pm/\mp\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = L. \tag{3.14}$$

Também, consideramos definições análogas para os casos:

$$\lim_{x\to a^{+/-}} f(x) = L^{\pm/\mp} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to +/-\infty} f(x) = L^{\pm/\mp}. \tag{3.15}$$

Teorema 3.4.1. *Toda função monótona e limitada superiormente (inferiormente), cujo domínio contenha* $[c, +\infty)$ *(*$(\infty, c]$*), possui limite quando* $x \to +\infty$ *(*$x \to -\infty$*).*

Demonstração.

Consideremos o caso de $f : [c, +\infty) \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, função não decrescente e limitada superiormente. Seja, então L o supremo do conjunto imagem de f. Mostraremos que $f(x) \to L$ quando $x \to +\infty$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $L - \varepsilon < f(k) \leq L$. Agora, como f é não decrescente, para todo $x > k$ temos $L - \varepsilon < f(k) < f(x) \leq k$ e, portanto, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Isto demostra o caso considerado e deixamos para o leitor a verificação dos demais (veja, também, Exercício 3.4.1).

■

Exercícios

E 3.4.1.) Demonstre o Teorema 3.4.1 para o caso de uma função decrescente e limitada inferiormente.

Resposta. Análogo ao caso demonstrado no Teorema 3.4.1.

Capítulo 4

Continuidade

4.1 Função contínua

Definição 4.1.1. (Continuidade) Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que f é **contínua** no ponto a se as seguintes condições são satisfeitas:

a) $a \in D$.

b) existe o limite de $f(x)$ com $x \to a$.

c) $f(x) \to f(a)$ quando $x \to a$.

Ainda, dizemos que f é uma **função contínua** (ou, simplesmente, contínua) quando f é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 4.1.1. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f(x) = x - 1$ é contínua em todo o seu domínio.

b) A função $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ é **descontínua** (i.e., não contínua) no ponto $x = -1$, pois este não é um ponto no domínio da função.

c) A função

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & , x \neq -1, \\ 1, x = -1 \end{cases} \tag{4.1}$$

é descontínua no ponto $x = -1$, pois

$$\lim_{x \to -1} h(x) = -2 \neq 1 = h(-1). \tag{4.2}$$

Teorema 4.1.1. *Se f e g são funções contínuas no ponto $x = a$, então são contínuas nestes pontos as funções: (a) $f + g$, (b) kf, $\forall k \in \mathbb{R}$, (c) f/g, dado que $g(a) \neq 0$.*

Demonstração.

Decorre imediatamente da definição de função contínua (Definição 4.1.1) e do Teorema 3.2.3.

■

Teorema 4.1.2. (Continuidade da função composta) Sejam dadas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ com $g(D_g) \subset D_f$. Se g é contínua no ponto a e f é contínua no ponto $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ é contínua no ponto a.

Demonstração.

É claro do enunciado que a pertence ao domínio de $f \circ g$. Como $(f \circ g)(a) = f(g(a))$, nos resta mostrar que $(f \circ g)(x)$ tende para $f(g(a))$ quando $x \to a$. Seja, então, $\varepsilon > 0$. Pela continuidade da f no ponto $g(a)$, tomemos $\delta' > 0$ tal que $y \in V'_{\delta'}(g(a)) \cap D_f$ implica $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$. Agora, pela continuidade da g no ponto a, tomemos $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D_g$ implica $|g(x) - g(a)| < \delta'$. Logo, temos que se $x \in V'_\delta(a) \cap D_g$, então $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$, o que completa a demonstração.

■

Definição 4.1.2. (Continuidade lateral) Dizemos que f é **contínua à direta** (**contínua à esquerda**) no ponto a, se está definida neste ponto, onde seu limite à direta (à esquerda) é $f(a)$.

Exemplo 4.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) A função

$$f_1(x) = \begin{cases} x/|x| & , x \neq 0, \\ -1 & , x = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

é contínua à esquerda no ponto $x = 0$. De fato, $f_1(0) = -1$ e dado qualquer $\epsilon > 0$ podemos escolher, por exemplo, $\delta = \epsilon$ tal que $0 < 0 - x < \delta$ implica $|f_1(x) - (-1)| = |-1 - (-1)| = 0 < \epsilon$.

b) A função

$$f_2(x) = \begin{cases} x/|x| & , x \neq 0, \\ 1 & , x = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

é contínua à direta no ponto $x = 0$. Verifique!

Exercícios

E 4.1.1. Mostre que se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função contínua no ponto a e $f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in V_\delta(a) \cap D$ implica $f(x) > 0$. Além disso, se removermos a hipótese de que f seja contínua no ponto a essa afirmação continua verdadeira? Justifique sua resposta.

Resposta. Segue imediatamente do Corolário 3.2.1.

E 4.1.2. Mostre que qualquer $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em no ponto a se, e somente se, f é contínua à esquerda e à direita neste ponto.

Resposta. Observe que f tem limite no ponto a se, e somente se, são iguais os limites à esquerda e à direita de f neste ponto.

4.2 Propriedades de funções contínuas

Teorema 4.2.1. Teorema do valor intermediário Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $I = [a, b] \subset D$, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer d compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ (inclusive), existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração.

1. Primeiramente, notamos que o resultado é imediato para os casos de $d = f(a)$ e de $d = f(b)$.

2. Suponhamos $f(a) < 0 < f(b)$ e, mostraremos que se $d = 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Para tanto, usaremos o método da bisseção. Seja $I^{(1)} := [a^{(1)}, b^{(1)}] = [a, b]$, $l^{(1)}$ o comprimento do intervalo $I^{(1)}$ e $p^{(1)}$ o ponto médio deste. Se $f(p^{(1)}) = 0$ temos demonstrado o que queríamos. Agora, se $f(p^{(1)}) > 0$, escolhemos $I^{(2)} = [a, p^{(1)}]$. Entretanto, se $f(p^{(2)}) < 0$, escolhemos $I^{(2)} = [p^{(1)}, b]$. Em qualquer um dos casos $I^{(2)} := [a^{(2)}, b^{(2)}] \subset I^{(1)}$, $l^{(2)} = l^{(1)}/2$ e $f(a^{(2)}) < 0 < f(b^{(2)})$. Com isso, repetimos o procedimento de bisseção para o intervalo $I^{(2)}$ com $p^{(2)}$ o ponto médio deste. Se $f(p^{(2)}) = 0$ temos o resultado desejado, caso contrário escolhemos o intervalo fechado $I^{(3)} := [a^{(3)}, b^{(3)}] \subset I^{(2)}$, $l^{(3)} = l^{(2)}/2$ e $f(a^{(3)}) < 0 < f(b^{(3)})$. No pior dos casos, repetimos infinitamente este procedimento e, com isso, temos construído uma sequência de intervalos fechados $I^{(1)} \subset I^{(2)} \subset I^{(3)} \subset \cdots \subset I^{(n)} \subset \cdots$ cujos comprimentos tendem a zero. Logo, pelo Teorema dos intervalos encaixados $I^{(1)} \cap I^{(2)} \cap I^{(3)} \cap \cdots \cap I^{(n)} \cap \cdots = \{c\} \subset I$, o qual é o limite da sequência $a^{(n)}$ e da $b^{(n)}$. Daí, da continuidade da f e do fato de $f(a^{(n)}) < 0 < f(b^{(n)})$ temos
$$0 \geq \lim f(a^{(n)}) = f(c) = \lim f(b^{(n)}) \geq 0, \tag{4.5}$$
donde segue que $f(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

3. Suponhamos que $f(a) < f(b)$ e $d \in (f(a), f(b))$. Neste caso, tomamos $g(x) = f(x) - d$ e, portanto, temos $g(a) < 0 < g(b)$. Pelo demonstrado no item 2., existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$ e, por consequência, $f(c) = d$.

4. No caso de $f(a) > f(b)$, tomamos $g(x) = -f(x)$, de forma que $g(a) < g(b)$. Então, pelo item 3., temos o resultado desejado.

■

Lema 4.2.1. *Toda função contínua $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada.*

Demonstração.

Demonstraremos por absurdo. Seja $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não limitada. Denotemos $I^{(1)} := I$. Como f é não limitada em $I^{(1)}$, temos que f é não limitada em pelo menos uma das metades do intervalo $I^{(1)}$. Seja, então $I^{(2)}$ uma das metades de $I^{(1)}$ na qual f é não limitada. Sucessivamente, construímos uma sequência de intervalos fechados $I^{(n)}$ nos quais f é ilimitada e cujos comprimentos tendem a zero. Então, pelo Teorema dos intervalos encaixados, existe um $c \in I^{(1)} \cap I^{(2)} \cap I^{(3)} \cap \cdots \cap I^{(n)} \cap \cdots \subset I$. Agora, pela continuidade de f, temos que $f(x) \to f(c)$ quando $x \to c$ e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V_\delta(c)$ implica $f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1$, i.e. f é limitada no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Mas, como $I^{(n)} \subset (c - \delta, c + \delta)$ para n suficientemente grande, temos f limitada em $I^{(n)}$, o que é um absurdo.

■

Teorema 4.2.2. *Toda função contínua $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ tem valor máximo e mínimo.*

Demonstração.

Vamos, primeiramente, mostrar que f tem valor máximo em I. Por absurdo, seja $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ função contínua, M seu supremo (pelo Lema 4.2.1, $f(I)$ é um conjunto limitado) e $f(x) < M$ para todo $x \in I$. Então, $1/(M - f(x))$ é uma função positiva e contínua em I. Seja, então, $M' > 0$ seu supremo (novamente garantido pelo Lema 4.2.1) e, então, para todo $x \in I$ temos

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq M' \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{M'}, \tag{4.6}$$

o que é um absurdo, pois isto contradiz o fato de M ser o supremo de $f(I)$. Logo, existe algum $x \in I$ tal que $f(x) = M$. Analogamente, seja m o ínfimo de $f(I)$. Então, $-m$ é o supremo da função $g(x) = -f(x)$ no intervalo I. Pelo que acabamos de demonstrar, existe $x \in I$ tal que $g(x) = -m$ e, por consequência, $f(x) = m$.

■

Teorema 4.2.3. *Se $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(I)$ é um intervalo limitado e fechado.*

Demonstração.

Do Teorema 4.2.2 sejam m e M os valores mínimo e máximo de f, respectivamente. Logo, $f(I) \subset [m, M]$. Agora, sejam $c,d \in I$ tal que $f(c) = m$ e $f(d) = M$. Pelo Teorema do valor intermediário, dado qualquer $d \in [m, M]$ existe $x \in I$ tal que $f(x) = d$, i.e. $d \in f(I)$. Portanto, $[m, M] \subset f(I)$.

■

Exercícios

E 4.2.1. Prove que todo o polinômio de grau ímpar $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ tem no mínimo uma raiz.

Resposta. Use o Teorema do valor intermediário.

E 4.2.2. Dê um exemplo de:

a) uma função contínua não limitada $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo limitado.

b) uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo ilimitado I no qual f tem valores mínimo e máximo.

4.3 Continuidade uniforme

Definição 4.3.1. (Continuidade uniforme) Uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é dita ser uniformemente contínua se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x,y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Exemplo 4.3.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua. De fato, consideremos $x,y > 0$ e $|x-y| < \delta$ para $\delta > 0$ arbitrário. Então, se $y < \delta$ temos $x < y + \delta < 2\delta$ e

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2\delta} + \sqrt{\delta} < 3\sqrt{\delta}. \tag{4.8}$$

Agora, se $y >= \delta$, então

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{\delta}{\sqrt{y}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}. \tag{4.9}$$

Logo, em qualquer um dos casos $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 3\sqrt{\delta}$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \varepsilon^2/9$ de forma que

$$x,y > 0, |x - y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon, \tag{4.10}$$

o que conclui o resultado.

b) A função $f(x) = 1/x$ não é uniformemente contínua. De fato, basta observar que, para qualquer escolha de $\delta > 0$, temos

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta}\right| = \left|\frac{\delta}{x^2 + \delta x}\right| \to +\infty \quad \text{com} \quad x \to 0. \tag{4.11}$$

Teorema 4.3.1. (de Heine) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b] =: I$, então f é uniformemente contínua.

Demonstração.

Suponhamos, por contradição, que f não é uniformemente contínua. Então, para algum $\epsilon > 0$ existem $x_n,y_n \in I$ tal que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon, \tag{4.12}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, como $(x_n)_n$ é uma sequência limitada, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass ela possui uma subsequência convergente. Seja, então, $(x_{n'})_{n'}$ uma tal subsequência e c o seu limite. Como $x_{n'} \in [a,b]$ para todo n', temos $c \in [a,b]$. Além disso, como $|x_{n'} - y_{n'}| \to 0$, temos $y_{n'} \to c$. Também, pela continuidade de f, temos $f(x_{n'}) \to f(c)$ e $f(y_{n'}) \to f(c)$. Logo, $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \to 0$, o que é um absurdo.

■

Exercícios

E 4.3.1. Mostre que se f é uniformemente contínua em (a,b), então existem os limites $\lim_{x\to a+} f(x)$ e $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Resposta. Dica: 1) mostre que toda sequência $x_n \in (a,b)$ com $x_n \to a$ é tal que $f(x_n)$ é converge. Seja L o limite desta sequência; 2) mostre, então, que qualquer outra sequência $y_n \in (a,b)$ com $y_n \to a$ é tal que $f(y_n) \to L$.

Capítulo 5

Diferenciação

5.1 Derivada

Definição 5.1.1. (Derivada) Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é **derivável** (ou **diferenciável**) no ponto $x = x_0 \in D$, se existe o limite da **razão fundamental**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{5.1}$$

quando $x \to x_0$. Neste caso, o valor do limite é chamado de derivada da função f no ponto x_0 e denotado por $f'(x_0)$, $Df(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Exemplo 5.1.1. Para $f(x) = \sqrt{x}$ temos $f'(2) = 1/(2\sqrt{2})$. De fato,

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \tag{5.2}$$

Observação 5.1.1. Observemos que

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5.3}$$

usando a mudança de variável $x = x_0 + h$.

Definição 5.1.2. (Função derivada) Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ é uma **função derivável** em todo o seu domínio (ou em toda parte) quando f é derivável em todos os pontos de seu domínio. Neste caso, definição a função derivada de f por $f' : D \to \mathbb{R}$, $y = f'(x)$, com

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5.4}$$

Observação 5.1.2. A **derivada lateral** à direita ou à esquerda são definidas a partir da noção de limite lateral por

$$D_+f(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{5.5}$$

e

$$D_-f(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \tag{5.6}$$

respectivamente. Além disso, é imediato que $Df(x_0)$ existe se, e somente se, existem e são iguais as derivadas laterais $D_+f(x_0)$ e $D_-f(x_0)$.

Teorema 5.1.1. *Toda função derivável num ponto x_0 é contínua nesse ponto.*

Demonstração.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, uma função derivável no ponto $x_0 \in D$. Vamos mostrar que $f(x) - f(x_0) \to 0$ quando $x \to x_0$. De fato, para $x \neq x_0$ temos

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0). \tag{5.7}$$

Agora,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} x - x_0 = 0, \tag{5.8}$$

logo $f(x) - f(x_0) \to 0$ quando $x \to x_0$.

■

Definição 5.1.3. (Diferencial) A diferencial de uma função derivável f no ponto x_0 é o produto $dy := f'(x_0)\Delta x$, onde $\Delta x = x - x_0$.

Observação 5.1.3. De sorte que o diferencial da função identidade $y = x$ é $dx = \Delta x$ e, portanto, o diferencial de uma dada função $y = f(x)$ é $dy = f'(x_0)dx$ e, também $f'(x_0) = dy/dx$.

Exercícios

E 5.1.1. Dê um exemplo de uma função contínua num ponto x_0 e não derivável neste mesmo ponto. Justifique sua resposta.

E 5.1.2. Mostre, a partir da definição da derivada de uma função (Definição 5.1.2) que

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $(1/x)' = -1/x^2$.
3. $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$.

5.2 Regras operacionais

Teorema 5.2.1. Regras operacionais Se $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis no ponto $x \in D$, então também são deriváveis no mesmo ponto as funções $f+g$, kf, fg e, no caso de $g(x) \neq 0$, f/g. Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
&(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),\\
&(kf)'(x) = kf'(x),\\
&(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\\
&(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{se } g(x) \neq 0.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Demonstração.

Deixaremos como exercício a demonstração para as funções $f+g$ e kf (veja, Exercício 5.2.1). Para o caso de fg, basta observar que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora, para mostrar que f/g é diferenciável no ponto $x \in D$ basta mostrar para o caso de $f \equiv 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\\
&= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

■

Teorema 5.2.2. (Regra da cadeia) Sejam $g : D_g \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $x \in D_g$, $f : D_f \to \mathbb{R}$ com $g(D_g) \subset D_f$ e derivável no ponto $y = g(x)$. Nestas condições, a função composta $f \circ g$ é diferenciável no ponto x e $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Demonstração.

Como f é derivável em $y = g(x)$, temos

$$\frac{f(y+k) - f(y)}{k} = f'(y) + \eta(k), \tag{5.12}$$

com $\eta(k) \to 0$ quando $k \to 0$. Rearranjando temos

$$f(y+k) - f(y) = k[f'(y) + \eta(k)] \tag{5.13}$$

inclusive para $k = 0$. Agora, para todo h suficientemente pequeno, pomos $k = g(x+h) - g(x)$ e, então

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(y+k) - f(y)}{h} \\ &= \frac{[f'(y) + \eta(k)]k}{h} \\ &= [f'(y) + eta(k)]\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\to f'(g(x))g'(x), \quad \text{com } h \to 0.\end{aligned} \tag{5.14}$$

■

Teorema 5.2.3. (Derivada da função inversa) Seja $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, uma função derivável em I com $f'(x)$ sempre positiva ou sempre negativa. Então, sua inversa $x = f^{-1}(y)$ é derivável no intervalo $J = f(I)$ e $(f^{-1})'(y) = 1/f'(g(x))$.

Demonstração.

Sejam y,$y_0 \in J$, $x = f^{-1}(y)$ e $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Notemos que

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]^{-1}. \tag{5.15}$$

Agora, basta observar que quando $y \to y_0$, temos $x \to x_0$ pela continuidade da f^{-1}. Logo, tomando o limite nas expressões acima, temos o resultado desejado.

■

Exercícios

E 5.2.1. Mostre que se f,$g : D \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis num ponto $x \in D$, então também são as funções $f + g$ e kf, sendo:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{e} \quad (kf)'(x) = kf'(x). \tag{5.16}$$

Resposta. Segue da definição de derivada.

5.3 Extremos e o teorema do valor médio

Teorema 5.3.1. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável num ponto $c \in D$ no qual ela assume valor máximo ou mínimo local, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração.

No caso de c ser ponto de mínimo local de f, então existe $\delta > 0$ tal que $f(c+h) - f(c) \geq 0$ para todo $|h| < \delta$. Logo, temos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0. \tag{5.17}$$

Mas, então, como f é diferenciável no ponto c, necessariamente $f'(c) = 0$. Um raciocínio análogo mostra o resultado para o caso de c ser ponto de máximo local (veja o Exercício 5.3.1.

■

Teorema 5.3.2. (de Rolle) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em todo o seu domínio, derivável no intervalo aberto (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Se f é constante, então $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$. Caso contrário, f terá que assumir valores maiores ou menores que $f(a) = f(b)$. Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ ela assumirá valor máximo ou mínimo em algum ponto $c \in (a, b)$ (veja Teorema 4.2.2). Então, pelo Teorema 5.3.1, temos $f'(c) = 0$.

■

Teorema 5.3.3. (do valor médio) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em todo o seu domínio e derivável no intervalo (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{5.18}$$

Demonstração.

Seja

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{5.19}$$

Observamos que g é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $g(a) = g(b) = 0$. Logo, pelo Teorema de Rolle, temos que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, mas daí $f'(c)$ satisfaz o resultado desejado.

■

Exercícios

E 5.3.1. Mostre que se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável num ponto $c \in D$ no qual ela assume valor máximo local, então $f'(c) = 0$.

E 5.3.2. Use o teorema do valor médio para mostrar que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em todo o seu domínio e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é uma função crescente.

E 5.3.3. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável em (a, b) e f' é limitada em (a, b), então f é uniformemente contínua.

Capítulo 6

Integração

6.1 Integral de Riemann

Definição 6.1.1. (Partição de um intervalo) Uma **partição** P de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto ordenado da forma

$$P([a, b]) = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}. \tag{6.1}$$

O valor $|P| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, é chamado de **norma da partição**.

Definição 6.1.2. (Refinamento de uma partição) Um refinamento de uma partição $P_n([a, b]) := \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ é uma partição $P_m([a, b])$ com $m > n$ tal que $P_n([a, b]) \subset P_m([a, b])$.

Definição 6.1.3. (Integral de Riemann) A **integral de Riemann** de uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, num intervalo $[a, b] \subset D$, quando existe, é o número I tal que

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{6.2}$$

onde arbitrariamente $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ são tomados considerando todas as possíveis partições $P([a, b]) = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$, com $|P| \to 0$ quando $n \to 0$. Quando um tal I existe, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Observação 6.1.1. As somas parciais

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{6.3}$$

que aparecem na definição da integral de Riemann são chamadas de **somas de Riemann**.

6.2 Integrabilidade de funções contínuas

Teorema 6.2.1. *Toda função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ é integrável.*

Demonstração.

Seja dado $\varepsilon > 0$. Pelo teorema de Heine, f é uniformemente contínua e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$x,y \in I := [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.4}$$

Seja, agora, S_n uma sequência arbitrária de somas de Riemann com norma tendo a zero quando $n \to \infty$, i.e.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{6.5}$$

com $\max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i \to 0$ quando $n \to \infty$. Queremos provar que existe $I \in \mathbb{R}$ tal que

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{6.6}$$

independentemente da escolha dos pontos x_i e ξ_i. Para tanto, iremos usar o critério de convergência de Cauchy. Para tanto, sejam

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6.7}$$

a soma de Riemann para uma dada partição $P_n := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ com $|P_n| < \delta$ e

$$S_M := \sum_{i=1}^{M} f(\eta_i)\Delta y_i \tag{6.8}$$

a soma de Riemann para um refinamento $P_M := \{a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_M = b\}$ de P_n. Como P_M é um refinamento de P_n, cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é a união de certos subintervalos $[y_{r-1}, y_r]$, …, $[y_{s-1}, y_s]$ e, portanto $\Delta x_i = \Delta y_r + \cdots + \Delta y_s$. Ainda, a diferença $S_n - S_M$ conterá, então, termos da forma

$$f(\xi_i)\sum_{j=r}^{s} f(\eta_i)\Delta y_j = \sum_{j=r}^{s}[f(\xi_i) - f(\eta_j)]\delta y_j. \tag{6.9}$$

Agora, como $|\xi_i - \eta_j| < \delta$, temos $|f(\xi_i) - f(\eta_j)| < \varepsilon$ e, portanto

$$\left| f(\xi_i) - \sum_{j=r}^{s} f(\eta_j)\Delta y_j \right| < \varepsilon \sum_{j=r}^{s} \Delta y_j = \varepsilon \Delta x_i. \tag{6.10}$$

Estendendo este resultado, temos

$$|S_n - S_M|\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b-a). \tag{6.11}$$

Por fim, sejam S_n e S_m somas de Riemann correspondentes às partições P_n e P_m, respectivamente, com $|P_n| < \delta$ e $|P_m| < \delta$. Ainda, seja P_M um refinamento de ambas partições. Então

$$|S_n - S_m| \leq |S_n - S_M| + |S_M - S_m| < 2\varepsilon(b-a). \tag{6.12}$$

Isto mostra que, dada uma sequência arbitrária de partições P_n com $|P_n| \to 0$ quando $n \to \infty$, então o limite das somas de Riemann S_n destas partições existe quando $n \to \infty$. Falta mostrar que este limite é único.

Sejam, agora, S_n e T_n diferentes sequências de somas de Riemann cujas partições têm norma tendendo a zero quando $n \to \infty$. Então, por exemplo, a sequência

$$S_1, T_1, S_2, T_2, S_3, T_3, \ldots, S_n, T_n, \ldots \tag{6.13}$$

também é uma sequência de somas de Riemann cujas partições têm norma tendo a zero quando $n \to \infty$. Logo, pelo que mostramos acima, o limite desta sequência existe. Agora, como $(S_n)_n$ e $(T_n)_n$ são subsequências destas, elas convergem para o mesmo limite.

■

Exercícios

E 6.2.1. Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6.14}$$

para qualquer $c \in [a,b]$.

6.3 Teorema fundamental do cálculo

Teorema 6.3.1. (Teorema da média) Sejam $f : [a{,}b] =: I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, contínua em I e m e M os valores mínimo e máximo de f em I, respectivamente. Então, existe um número $c \in i$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{6.15}$$

Demonstração.

Observemos que toda a soma de Riemann satisfaz

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq M(b-a). \tag{6.16}$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, temos

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a), \tag{6.17}$$

ou, equivalentemente, quando $a \neq b$,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M. \tag{6.18}$$

Agora, pelo teorema do valor intermediário (Teorema **??**), existe $c \in I$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.19}$$

■

Teorema 6.3.2. (Teorema fundamental do cálculo) Seja $f : [a,b] =: I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, contínua em I. Então, a função $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{6.20}$$

é derivável em (a,b) e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração.

Observemos que

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \tag{6.21}$$

Agora, do teorema da média (Teorema 6.3.1), existe $\xi \in [x, x+h]$ tal que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi_h). \tag{6.22}$$

Logo,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x). \tag{6.23}$$

■

Exercícios

E 6.3.1. Seja $f : [a,b] =: I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, contínua em I. Então, a função $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{6.24}$$

é derivável à direta no ponto a e à esquerda no ponto b sendo, respectivamente, $F'(a+) = f(a)$ e $F'(b-) = f(b)$.

Referências Bibliográficas

[1] R.G. Bartle and D.R. Sherbert. *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons, 3. ed. edition, 2000.

[2] C.I. Doering. *Introdução à análise matemática na reta.* SBM, 1. ed. edition, 2015.

[3] E.L. Lima. *Análise real.* IMPA, 12. ed. edition, 2017.

[4] G. Ávila. *Análise matemática para licenciatura.* Blucher, 3. ed. edition, 2006.

Índice Remissivo