Análise matemática

Pedro Henrique de Almeida Konzen

28 de março de 2018

Licença

Prefácio

Sumário

Parte I

Análise de funções de uma variável real

Capítulo 1

Introdução

Em construção ...

Capítulo 2

Fundamentos da análise

2.1 Funções

2.1.1 Definição de função

Definição 2.1.1. (Função) Uma **função** $f : D \to Y$ é uma relação que associa cada elemento de um dado conjunto D com um único elemento de um dado conjunto Y. O conjunto D é chamado de **domínio** da função e o conjunto Y é chamado de **contradomínio** da função.

Comumente, uma dada função $f : D \to Y$ é acompanhada de sua **lei de correspondência**, a qual muitas vezes é denotada por $y = f(x)$. Neste caso, temos que a função f associa $x \in D$ ao elemento $y \in Y$. Neste contexto, x é chamada de **variável independente** e y de **variável dependente**. Ainda, muitas vezes uma função é descrita apenas por sua lei de correspondência e, neste caso, os conjuntos domínio e imagem são inferidos no contexto em questão.

Observação 2.1.1. Neste livro, quando não especificado ao contrário, assumiremos que o domínio e o contradomínio das funções consideradas são subconjuntos dos números reais,

Exemplo 2.1.1. Vejamos os seguintes casos:

a) A relação $f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := x^2 + 1$, define uma função.

b) A relação $g : D = \{0,1,2,3,4\} \to \mathbb{Z}$, $x^2 + y^2 = 9$ com $x \in D$ e $y \in Y$, não é uma função. Com efeito, $0 \in D$ e relaciona-se com $3 \in Y$ e $-3 \in Y$ no seu contradomímio.

c) Da equação $y = \sqrt{x}$ pode-se inferir a função $h : x \in D \to y \in \mathbb{R}$, onde o domínio D é conjunto dos reais não negativos.

Definição 2.1.2. (Imagem de uma função) A **imagem** I_f de uma dada função $f : D \to Y$ é o conjunto de todos os elementos de Y que se relacionam com algum elemento de D, i.e.:

$$I_f := \{y \in Y;\ \exists x \in D \text{ tal que } y = f(x)\}. \tag{2.1}$$

Exemplo 2.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := x^2 + 1$, tem imagem $I_f = \{1,4,9\}$.

b) A imagem da função $f : \{0\} \cup \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $y = 2x + 1$, é conjunto dos números ímpares.

c) A imagem da função $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = \text{sen}\, x$, é $I_{\text{sen}} = [-1, 1]$.

Observação 2.1.2. Dada uma função $f : D \to Y$ e um conjunto $A \subset D$, definimos a imagem de A pela função f por

$$f(A) := \{y \in Y;\ \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}. \tag{2.2}$$

Por exemplo, dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x}$, temos

$$f\left(\{0,1,4,9\}\right) = \{0,1,2,3\}. \tag{2.3}$$

Definição 2.1.3. (Gráfico) O **gráfico** de uma função $f : D \to Y$, $y = f(x)$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) tal que $x \in D$ e $y = f(x)$, i.e.

$$G_f := \{(x, y) \in D \times Y;\ y = f(x)\}. \tag{2.4}$$

Exemplo 2.1.3. O gráfico da função $f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := x^2 + 1$, é

$$G_f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 10)\}. \tag{2.5}$$

2.1.2 Classificações elementares

Definição 2.1.4. (Função limitada) Seja dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Dizemos que f é uma **função limitada inferiormente** (ou **limitada à esquerda**) quando existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x)$ para todo $x \in D$. Analogamente, dizemos que f é uma **função limitada superiormente** (ou **limitada à direta**) quando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in D$. Ainda, f é dita ser **limitada** quando é limitada inferiormente e superiormente.

Exemplo 2.1.4. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^2 + 1$, é limitada inferiormente. De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ temos $x^2 \geq 0$ e, portanto, $y = x^2 + 1 \geq 1$.

b) A função seno é uma função limitada. Isto segue imediatamente da definição da função seno no círculo unitário (círculo trigonométrico).

Definição 2.1.5. Restrição/extensão de uma função Uma função $g : A \to Y$, $y = g(x)$, é dita ser uma **restrição** da dada função $f : D \to Y$ quando $A \subset D$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Analogamente, f é uma **extensão** da função g.

Exemplo 2.1.5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x + 1$, é uma extensão da função $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Definição 2.1.6. (Função injetiva) Uma função $f : D \to Y$, $y = f(x)$, é dita ser **injetiva** (**injetora** ou **inversível**) quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 \neq x_2$ temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observação 2.1.3. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é injetiva se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in D$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ temos $x_1 = x_2$.

Exemplo 2.1.6. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f(x) = x^2$ não é injetiva, pois tomando $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ temos $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$.

b) A função $f(x) = \sqrt{x + 1}$ é injetiva. De fato, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, então $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$. Agora, tomando o quadrado dos dois lados, temos $x_1 = x_2$.

Definição 2.1.7. (Função sobrejetiva) Uma função $f : D \to Y$, $y = f(x)$, é **sobrejetiva** quando $f(D) = Y$ (ou, equivalentemente, $I_f = Y$).

Exemplo 2.1.7. A função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$, é sobrejetiva. De fato, dado qualquer $y \in \mathbb{R}$ basta escolhermos $x = e^y$ para termos $f(x) = y$.

Observação 2.1.4. Uma função injetiva e sobrejetiva é dita ser **bijetiva**.

Definição 2.1.8. (Função inversa) Dada uma função invertível (i.e. injetora) $f : D \to Y$, $y = f(x)$, definimos sua **inversa** por $f^{-1} : f(D) \to D$ que associa cada elemento $y \in f(D)$ com $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 2.1.8. Vejamos os seguintes casos:

a) A inversa da função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y = \ln(x)$, é a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $y = e^x$.

b) A inversa da função $f : [-1, \infty] \to [0, \infty)$, $y = \sqrt{x + 1}$, é a função $f^{-1} : [0, \infty) \to [-1, \infty]$, $y = x^2 - 1$. De fato, f é sobrejetiva e dado $x \in [-1, \infty]$ temos $f(x) = y = \sqrt{x + 1}$ e, então $y^2 = x + 1$, logo $x = y^2 - 1$.

Definição 2.1.9. (Função monótona) Seja dada uma função $f : D \to Y$. Dizemos que f é **crescente** quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Agora, quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \leq f(x_2)$, dizemos que f é uma **função não-decrescente**. Analogamente, quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$ dizemos que f é uma função **decrescente**. Por fim, quando para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \geq f(x_2)$ dizemos que f é uma função **não-crescente**.

Exemplo 2.1.9. Vejamos os seguintes casos:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^3$, é uma função crescente.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = e^{-x}$ é uma função decrescente.

Definição 2.1.10. (Paridade de uma função) Uma função $f : D \to Y$, $y = f(x)$, é dita ser **par** quando para todo $x \in D$, temos $f(x) = f(-x)$. Agora, quando para todo $x \in D$, temos $f(x) = -f(-x)$, então dizemos se tratar de uma função **ímpar**.

Exemplo 2.1.10. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = |x|$, é uma função par.

b) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^3$, é uma função ímpar.

2.1.3 Operações elementares

Operações elementares envolvendo funções são comumente definidas tomando o cuidado de restringir o domínio das funções operadas para um conjunto apropriado. Por exemplo, dadas as funções $f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e $g : B \to \mathbb{R}$, $y = g(x)$, definimos a função soma de f com g por $(f + g) : A \cap B \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$. Agora, para estas mesmas função, definimos a função quociente de f com g por $(f/g) : A \cap B \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$.

Exemplo 2.1.11. A função $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x} - |x|$, é a subtração da função $f_1 : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x}$, com a função $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = |x|$, i.e. $f(x) = (f_1 - f_2)(x) := f_1(x) - f_2(x)$.

Definição 2.1.11. (Composição de funções) Sejam dadas as funções $f : D_f \to Y_f$, $y = f(x)$, e $g : D_g \to Y_g$, $y = g(x)$, com $I_g \subset D_f$. Definição a **função composta** de f com g por $(f \circ g) : D_g \to Y_f$ com $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Exemplo 2.1.12. A função $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$, é a composição da função $f_1 : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x}$, com a função $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^2 + 1$.

Exercícios

E 2.1.1. Sejam $f : D \to Y$, $y = f(x)$, e $A, B \subset D$. Mostre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

E 2.1.2. Construa uma função crescente, limitada superiormente e com domínio igual ao conjunto dos números reais.

E 2.1.3. Mostre que $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x^3 - 1}$, é injetora e construa sua inversa.

E 2.1.4. Mostre que se $f : D \to Y$ é injetora, então f não é par.

E 2.1.5. Mostre que uma dada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é limitada quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Limites

3.1 Noções de topologia

Definição 3.1.1. (Ponto interior) Diz-se que x é um **ponto interior** de um dado conjunto C quando existe um intervalo (a, b) que contém x e está contido em C, i.e. $x \in (a, b) \subset C$. O conjunto de todos os pontos interiores de C é chamado de seu **interior**.

Exemplo 3.1.1. a) Todo elemento de um intervalo aberto (a, b) é ponto interior deste.

b) O interior de um dado intervalo fechado $[a, b]$ é o intervalo aberto (a, b).

Definição 3.1.2. (Conjunto aberto) Diz se que C é **conjunto aberto** quando todos seus elementos são pontos interiores.

Exemplo 3.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) O intervalo $(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ é um conjunto aberto. De fato, dado $x \in (a, b)$ podemos tomar $0 < \varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$ de forma que $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$.

b) O intervalo $(a, b]$ não é aberto, pois $b \in (a, b]$ não é ponto interior.

c) O conjunto vazio $\emptyset$ é um conjunto aberto. Com efeito, se o conjunto $\emptyset$ não é aberto, então existe um elemento $x \in \emptyset$ que não é ponto interior de $\emptyset$, o que é um absurdo pois $\emptyset$ não contém elementos por definição.

d) O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é aberto.

Definição 3.1.3. (Vizinhança) Uma **vizinhança** de um dado ponto x é qualquer conjunto V que contenha x como ponto interior. Também, a **vizinhança simétrica** de um ponto $x \in \mathbb{R}$ é todo intervalo $V_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$. Mais estrito, a **vizinhança perfurada** de $x \in \mathbb{R}$ é uma vizinhança de x que não contém x. Aproveitamos para fixar a notação:

$$V'_\varepsilon(x) := V_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y \in \mathbb{R};\ 0 < |x - y| < \varepsilon\}.$$

Exemplo 3.1.3. Podemos reescrever o Exemplo 3.1.2 da seguinte forma. Um intervalo (a, b) é um conjunto aberto, pois para cada $x \in (a, b)$ podemos escolher $0 < \varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$ tal que $V_\varepsilon(x) \subset (a, b)$.

Definição 3.1.4. (Ponto de acumulação) Um ponto x é chamado de **ponto de acumulação** de um dado conjunto C quando toda vizinhança de x contém infinitos pontos de C.

Exemplo 3.1.4. Vejamos os seguintes casos:

a) O número a é ponto de acumulação do intervalo $(a, b]$ não degenerado. De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos $(a, a + \varepsilon) \subset V_\varepsilon(a)$ e $(a, a + \varepsilon) \cap (a, b]$ é um conjunto infinito.

b) Zero é o único ponto de acumulação do conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$.

Definição 3.1.5. (Ponto isolado) Diz que x é **ponto isolado** de um dado conjunto C quando $x \in C$ não é ponto de acumulação de C. Diz-se que um conjunto é **discreto** quando todos seus elementos são pontos discretos.

Exemplo 3.1.5. Vejamos os seguintes casos:

a) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é discreto.

b) O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é discreto.

c) O conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ é discreto.

Definição 3.1.6. (Ponto aderente) Dizemos que x é **ponto aderente** de um dado conjunto C quando toda vizinhança de x contém algum ponto de C. O conjunto de todos os pontos aderentes de C é chamado de **fecho** (ou, conjunto de aderência) de C, o qual denotamos por $\overline{C}$.

Observação 3.1.1. Observe que todo ponto de um conjunto é aderente ao mesmo, bem como, todos os seus pontos de acumulação.

Exemplo 3.1.6. Vejamos os seguintes casos:

a) O fecho de $(a, b]$ é o intervalo fechado $[a, b]$.

b) O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é o fecho do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, i.e. $\overline{Q} = \mathbb{R}$.

Definição 3.1.7. Conjunto fechado Dizemos que um conjunto C é **fechado** quando é igual ao seu fecho, i.e. $C = \overline{C}$.

Exemplo 3.1.7. Vejamos os seguintes casos:

a) O intervalo $[a, b]$ é um conjunto fechado.

b) O conjunto vazio $\emptyset$ é fechado. Por quê?

c) O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é fechado.

d) O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é fechado.

Definição 3.1.8. (Conjunto denso) Dizemos que um conjunto A é **denso** no conjunto B, quando todo ponto aderente de $\overline{A} \subset B$.

Exemplo 3.1.8. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

3.1.1 Exercícios

E 3.1.1. Seja dado um conjunto C. Mostre que x é ponto de acumulação de C se, e somente se, toda vizinhança de x contém pelo menos um elemento de C diferente de x.

Resposta. Basta considerar sucessivas vizinhanças $V_{1/n}(x)$ com $n \in \mathbb{R}$.

E 3.1.2. Seja dado um conjunto C. Mostre que x é ponto isolado de C se, e somente se, existe uma vizinhança de x tal que $(V(x) \setminus \{x\}) \cap C = \emptyset$.

Resposta. A implicação segue imediatamente por negação.

3.2 Limites

Definição 3.2.1. (Limite) Sejam uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e a um ponto de acumulação de D. Diz-se que $L \in \mathbb{R}$ é o **limite** de $f(x)$ com x tendendo a a se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{3.2}$$

ou ainda, simplesmente, $f(x) \to L$ quando $x \to a$.

Exemplo 3.2.1. Vejamos os seguintes casos:

a) Temos $\lim_{x\to 1} x - 1 = 0$. Isto segue imediatamente, pois, neste caso, $f(x) = x - 1$, $a = 1$, $L = 0$ e, então, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ de forma que

$$x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1 - 0| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

b) A função não precisa estar definida no ponto em o limite é tomado. Por exemplo, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = 0$. Verifique!

Observação 3.2.1. Quando nos referirmos a expressão "x tende a a" (ou similares), estaremos sempre assumindo que a é um ponto de acumulação do domínio da função de interesse.

3.2.1 Propriedades do limite

Teorema 3.2.1. *Se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.*

Demonstração.

Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Tomando, então, um tal δ e observando que $||f(x)| - |L|| < |f(x) - L|$, temos que para todo $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$, ocorre $||f(x)| - |L|| < \varepsilon$.

■

Teorema 3.2.2. *Se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $A < L < B$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $A < f(x) < B$.*

Demonstração.

De fato, por hipótese, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Então, o resultado segue escolhendo um tal δ quando $\varepsilon = \min\{L - A, B - L\}$.

■

Corolário 3.2.1. (Permanência do sinal) Se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$ ($L < 0$), então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$, implica $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Demonstração.

Quando $L > 0$ ($L < 0$) basta escolher $A = 0$ ($B = 0$) no teorema anterior.

■

Teorema 3.2.3. (Operações com limites) Sejam $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, com $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$, então (omitindo que $x \to a$)

a) $\lim[f_1(x) + f_2(x)] = \lim f_1(x) + \lim f_2(x)$.

b) para todo $k \in \mathbb{R}$, temos $\lim kf_1(x) = k \lim f_1(x)$.

c) $\lim f_1(x)f_2(x) = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$.

d) $\lim \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}$, quando $L_2 \neq 0$.

Demonstração.

Seja dado $\varepsilon > 0$.

a) Seja $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|f_2(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Logo, para tais δ e x temos

$$|(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (3.4)$$

b) O resultado é imediato para $k = 0$. Sejam $k \neq 0$ e $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/|k|$. Então, para tais δ e x temos $|kf_1(x) - kL_1| = |k||f_1(x) - L_1| < |k|\varepsilon/|k| = \varepsilon$.

c) Sejam $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/(2|L_2|)$, $|f_1(x)| < M$ (veja Teorema 3.2.2) e $|f_2(x) - L_2| < \varepsilon/(2M)$. Então

$$\begin{aligned}
|f_1(x)f_2(x) - L_1L_2| &= |f_1(x)f_2(x) - f_1(x)L2 + f_1(x)L_2 - L_1L_2| \\
&= |f_1(x)(f_2(x) - L_2) + (f_1(x) - L_1)L_2| \\
&\leq |f_1(x)||f_2(x) - L_2| + |f_1(x) - L_1||L_2| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|L_2|}|L_2| = \varepsilon.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

d) De c), basta mostrar que $1/f_2(x) \to 1/L_2$ quando $x \to a$. Para tando, seja $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon L_2^2}{2}$ e $|f_2(x)| > |L_2|/2$ (veja Teorema 3.2.2). Então, para tais δ e x temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2}\right| &= \frac{|f_2(x) - L_2|}{|f_2(x)L_2|} \\
&< \frac{\frac{\varepsilon L_2^2}{2}}{|L_2|\frac{|L_2|}{2}} = \varepsilon.
\end{aligned} \quad (3.6)$$

■

Teorema 3.2.4. *O limite de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é L quando $x \to a$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset D\setminus\{a\}$ com $x_n \to a$, temos $f(x_n) \to L$.*

Demonstração.

a) Primeiramente, mostraremos que se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então dada qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$, temos $f(x_n) \to L$. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$. Então, por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Agora, como $x_n \to a$, existe N suficientemente grande tal que $n > N$ implica $|x_n - a| < \delta$ e, portanto, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Ou seja, $f(x_n) \to L$.

b) Aqui, provaremos por absurdo que se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$ temos $f(x_n) \to L$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Ou seja, vamos assumir que existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algum $x \in D$, $0 < |x_n - a| < \delta$ com $|f(x) - L| > \varepsilon$. Sejam um tal ε e para cada $n \in \mathbb{N}$ um $x'_n \in D$ com $0 < |x'_n - a| < 1/n$ e $|f(x'_n) - L| > \varepsilon$. Com isso, temos formado uma sequência $(x'_n) \subset D \setminus \{a\}$, $x'_n \to a$, mas $f(x'_n) \not\to L$.

■

Corolário 3.2.2. *Um função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tem limite L quando $x \to a$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$ temos que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.*

Demonstração.

Segue, imediatamente, do fato de que se (y_n) é uma sequência com $y_n \to L$, então toda subsequência de (y_n) é convergente e converge para L.

■

Teorema 3.2.5. (Critério de convergência de Cauchy) Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tenha limite L quando $x \to a$ é que, para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$x,y \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Demonstração.

a) A suficiência segue do critério de convergência de Cauchy para sequências e do Corolário 3.2.2.

b) Exercício 3.2.4.

■

Exercícios

E 3.2.1. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: se $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x)=0$, então $f(a)=0$. Justifique sua resposta.

Resposta. Veja a Definição 3.2.1.

E 3.2.2. Mostre que se $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$, com $\lim_{x\to a} f(x)=L>0$, então $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Resposta. Use o Teorema 3.2.2 observando que

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{L}|=|(\sqrt{f(x)}-\sqrt{L})\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{L}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{L}}|=\frac{|f(x)-L|}{|\sqrt{f(x)}+\sqrt{L}|}. \tag{3.8}$$

E 3.2.3. Demonstre o Teorema 3.2.3 como um corolário do Teorema 3.2.4.

Resposta. Basta usar as propriedades de limites de sequências.

E 3.2.4. Demonstre que se $f:D\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$, tem limite L quando $x\to a$, então para qualquer $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $x,y\in V'_\delta(a)\cap D$ implica $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Resposta. Observe que $x,y\in V'_{\delta/2}(a)$ implica $|x-a|<\delta/2$ e $|y-a|<\delta/2$.

3.3 Limites laterais

Definição 3.3.1. (Limite lateral) Sejam uma função $f:D\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$, e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que $L\in\mathbb{R}$ é o **limite** de $f(x)$ com x tendendo a a **pela direita** se, para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$x\in D, 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon. \tag{3.9}$$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L, \tag{3.10}$$

ou ainda, simplesmente, $f(x)\to L$ quando $x\to a^+$. Analogamente, escreve-se $f(x)\to L$ quando $x\to a^-$, ou $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ se, para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$x\in D, 0<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon. \tag{3.11}$$

Exemplo 3.3.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos escolher, por exemplo, $\delta = 1$ e, com isso, para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 < x - 0 < 1$ implica $|x/|x| - 1| = 0 < \varepsilon$.

b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos escolher, por exemplo, $\delta = 1$ e, com isso, para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 < 0 - x < 1$ implica $|x/|x| - (-1)| = |-1 + 1| = 0 < \varepsilon$.

Definição 3.3.2. Ponto de acumulação lateral Seja C um conjunto. Dizemos que $a \in C$ é **ponto de acumulação à esquerda** de C se, para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $(a - \varepsilon, a) \cap C$ contém infinitos pontos de C. Analogamente, dizemos que $a \in C$ é **ponto de acumulação à direita** de C se, para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $(a, a+\varepsilon)\cap C$ contém infinitos pontos de C.

Teorema 3.3.1. *Se $f : I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é uma função monótona e limitada, definida em um intervalo I no qual a é ponto de acumulação à esquerda (ponto de acumulação à direita), então f tem limite com $x \to a^-$ $(x \to a^+)$.*

Demonstração.

Consideremos o caso em que f é uma função não crescente e a seja ponto de acumulação à direita. Seja, então L o supremo do conjunto formado por $f(x)$ com $x \in I$ e $x > a$. Afirmamos que $f(x) \to L$ quando $x \to a^+$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $L - \epsilon < f(a + \delta) \leq L$. Agora, como f é não crescente, para todo $x \in I$, $0 < x - a < \delta$, temos $L - \epsilon < f(a + \delta) \leq f(x) \leq L$ e, portanto, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Os outros casos são análogos e deixados para o leitor (veja, também, Exercício 3.3.1).

■

Exercícios

E 3.3.1. Demonstre o Teorema 3.3.1 para o caso de uma função crescente e a ponto de acumulação à esquerda.

Resposta. Análogo ao caso da considerado na demonstração do Teorema 3.3.1.

3.4 Limites no infinito e limites infinitos

Definição 3.4.1. (Limites infinitos) Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que o limite de $f(x)$ é $+\infty$ quando $x \to a$ se, para todo $k > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ temos $f(x) > k$. Analogamente, dizemos que o limite de $f(x)$ é $-\infty$ quando $x \to a$ se, para todo $k > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ temos $f(x) < -k$. Nestes casos escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \tag{3.12}$$

respectivamente.

Exemplo 3.4.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \to 0} 1/|x| = +\infty$. De fato, dado $k > 0$ basta tomarmos $\delta = 1/k$. Com isso, $0 < |x - 0| < \delta$ implica $|x| < 1/k$ e, portanto, $1/|x| > k$, i.e. $|1/|x| - 0| > k$.

b) Seja $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := 1/x$. Neste caso, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$. Deixamos a verificação para o leitor.

Definição 3.4.2. (Limite no infinito) Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Quando D é ilimitado superiormente dizemos que $f(x)$ tende a L quando $x \to +\infty$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $x > k$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Analogamente, quando D é ilimitado inferiormente dizemos que $f(x)$ tende a L quando $x \to -\infty$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $x < -k$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Nestes casos escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L, \tag{3.13}$$

respectivamente.

Exemplo 3.4.2. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $\delta = 1/\varepsilon$. Com isso, $x > \delta$ implica $0 < 1/x < 1/\delta = \varepsilon$ e, portanto, $|1/x - 0| < \varepsilon$.

b) $\lim_{x \to -\infty} 1/x = 0$. Caso análogo ao anterior, verifique!

Observação 3.4.1. Observe que definições análogas às 3.3.1, 3.4.1 e 3.4.2 se aplicam para os casos:

$$\lim_{x \to a^{+/-}} f(x) = \pm/\mp\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L. \tag{3.14}$$

Também, consideramos definições análogas para os casos:

$$\lim_{x \to a^{+/-}} f(x) = L^{\pm/\mp} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to +/-\infty} f(x) = L^{\pm/\mp}. \tag{3.15}$$

Teorema 3.4.1. *Toda função monótona e limitada superiormente (inferiormente), cujo domínio contenha $[c, +\infty)$ ($(\infty, c]$), possui limite quando $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).*

Demonstração.

Consideremos o caso de $f : [c, +\infty) \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, função não decrescente e limitada superiormente. Seja, então L o supremo do conjunto imagem de f. Mostraremos que $f(x) \to L$ quando $x \to +\infty$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $L - \varepsilon < f(k) \leq L$. Agora, como f é não decrescente, para todo $x > k$ temos $L - \varepsilon < f(k) < f(x) \leq k$ e, portanto, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Isto demostra o caso considerado e deixamos para o leitor a verificação dos demais (veja, também, Exercício 3.4.1).

■

Exercícios

E 3.4.1.) Demonstre o Teorema 3.4.1 para o caso de uma função decrescente e limitada inferiormente.

Resposta. Análogo ao caso demonstrado no Teorema 3.4.1.

Capítulo 4

Continuidade

Definição 4.0.1. (Continuidade) Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que f é **contínua** no ponto a se as sguintes condições são satisfeitas:

a) $a \in D$.

b) existe o limite de $f(x)$ com $x \to a$.

c) $f(x) \to f(a)$ quando $x \to a$.

Ainda, dizemos que f é uma **função contínua** (ou, simplesmente, contínua) quando f é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Referências Bibliográficas

[1] R.G. Bartle and D.R. Sherbert. *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons, 3. ed. edition, 2000.

[2] C.I. Doering. *Introdução à análise matemática na reta.* SBM, 1. ed. edition, 2015.

[3] E.L. Lima. *Análise real.* IMPA, 12. ed. edition, 2017.

[4] G. Ávila. *Análise matemática para licenciatura.* Blucher, 3. ed. edition, 2006.

Índice Remissivo