

# Análise matemática

Pedro Henrique de Almeida Konzen

27 de março de 2018

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	iv
<b>I    Análise de funções de uma variável real</b>	<b>1</b>
<b>1    Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2    Fundamentos da análise</b>	<b>4</b>
2.1    Funções . . . . .	4
2.1.1    Definição de função . . . . .	4
2.1.2    Classificações elementares . . . . .	5
2.1.3    Operações elementares . . . . .	7
<b>3    Limites</b>	<b>9</b>
3.1    Noções de topologia . . . . .	9
3.1.1    Exercícios . . . . .	11
3.2    Limites . . . . .	11
3.2.1    Propriedades do limite . . . . .	12
3.3    Limites laterais . . . . .	15
3.4    Limites no infinito e limites infinitos . . . . .	17
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>19</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>20</b>

# Parte I

## Análise de funções de uma variável real



# Capítulo 1

## Introdução

Em construção ...

# Capítulo 2

## Fundamentos da análise

### 2.1 Funções

#### 2.1.1 Definição de função

**Definição 2.1.1.** (Função) Uma **função**  $f : D \rightarrow Y$  é uma relação que associa cada elemento de um dado conjunto  $D$  com um único elemento de um dado conjunto  $Y$ . O conjunto  $D$  é chamado de **domínio** da função e o conjunto  $Y$  é chamado de **contradomínio** da função.

Comumente, uma dada função  $f : D \rightarrow Y$  é acompanhada de sua **lei de correspondência**, a qual muitas vezes é denotada por  $y = f(x)$ . Neste caso, temos que a função  $f$  associa  $x \in D$  ao elemento  $y \in Y$ . Neste contexto,  $x$  é chamada de **variável independente** e  $y$  de **variável dependente**. Ainda, muitas vezes uma função é descrita apenas por sua lei de correspondência e, neste caso, os conjuntos domínio e imagem são inferidos no contexto em questão.

**Observação 2.1.1.** Neste livro, quando não especificado ao contrário, assumiremos que o domínio e o contradomínio das funções consideradas são subconjuntos dos números reais,

**Exemplo 2.1.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A relação  $f : \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) := x^2 + 1$ , define uma função.
- b) A relação  $g : D = \{0,1,2,3,4\} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $x^2 + y^2 = 9$  com  $x \in D$  e  $y \in Y$ , não é uma função. Com efeito,  $0 \in D$  e relaciona-se com  $3 \in Y$  e  $-3 \in Y$  no seu contradomínio.
- c) Da equação  $y = \sqrt{x}$  pode-se inferir a função  $h : x \in D \rightarrow y \in \mathbb{R}$ , onde o domínio  $D$  é conjunto dos reais não negativos.



**Definição 2.1.2.** (Imagem de uma função) A **imagem**  $I_f$  de uma dada função  $f : D \rightarrow Y$  é o conjunto de todos os elementos de  $Y$  que se relacionam com algum elemento de  $D$ , i.e.:

$$I_f := \{y \in Y; \exists x \in D \text{ tal que } y = f(x)\}. \quad (2.1)$$

**Exemplo 2.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f : \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) := x^2 + 1$ , tem imagem  $I_f = \{1,4,9\}$ .
- b) A imagem da função  $f : \{0\} \cup \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = 2x + 1$ , é conjunto dos números ímpares.
- c) A imagem da função  $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \text{sen } x$ , é  $I_{\text{sen}} = [-1, 1]$ .

**Observação 2.1.2.** Dada uma função  $f : D \rightarrow Y$  e um conjunto  $A \subset D$ , definimos a imagem de  $A$  pela função  $f$  por

$$f(A) := \{y \in Y; \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}. \quad (2.2)$$

Por exemplo, dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt{x}$ , temos

$$f(\{0,1,4,9\}) = \{0,1,2,3\}. \quad (2.3)$$

**Definição 2.1.3.** (Gráfico) O **gráfico** de uma função  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , é o conjunto de todos os pares ordenados  $(x,y)$  tal que  $x \in D$  e  $y = f(x)$ , i.e.

$$G_f := \{(x,y) \in D \times Y; y = f(x)\}. \quad (2.4)$$

**Exemplo 2.1.3.** O gráfico da função  $f : \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) := x^2 + 1$ , é

$$G_f = \{(1,2), (2,5), (3,10)\}. \quad (2.5)$$

## 2.1.2 Classificações elementares

**Definição 2.1.4.** (Função limitada) Seja dada uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ . Dizemos que  $f$  é uma **função limitada inferiormente** (ou **limitada à esquerda**) quando existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq f(x)$  para todo  $x \in D$ . Analogamente, dizemos que  $f$  é uma **função limitada superiormente** (ou **limitada à direita**) quando existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \leq M$  para todo  $x \in D$ . Ainda,  $f$  é dita ser **limitada** quando é limitada inferiormente e superiormente.

**Exemplo 2.1.4.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = x^2 + 1$ , é limitada inferiormente. De fato, para cada  $x \in \mathbb{R}$  temos  $x^2 \geq 0$  e, portanto,  $y = x^2 + 1 \geq 1$ .

b) A função seno é uma função limitada. Isto segue imediatamente da definição da função seno no círculo unitário (círculo trigonométrico).

**Definição 2.1.5.** Restrição/extensão de uma função Uma função  $g : A \rightarrow Y$ ,  $y = g(x)$ , é dita ser uma **restrição** da dada função  $f : D \rightarrow Y$  quando  $A \subset D$  e  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in A$ . Analogamente,  $f$  é uma **extensão** da função  $g$ .

**Exemplo 2.1.5.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = x + 1$ , é uma extensão da função  $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

**Definição 2.1.6.** (Função injetiva) Uma função  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , é dita ser **injetiva** (**injetora** ou **inversível**) quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 \neq x_2$  temos  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Observação 2.1.3.** Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é injetiva se, e somente se, para todo  $x_1, x_2 \in D$  tal que  $f(x_1) = f(x_2)$  temos  $x_1 = x_2$ .

**Exemplo 2.1.6.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f(x) = x^2$  não é injetiva, pois tomando  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 1$  temos  $x_1 \neq x_2$ , mas  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- b) A função  $f(x) = \sqrt{x+1}$  é injetiva. De fato, dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$  tal que  $f(x_1) = f(x_2)$ , então  $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$ . Agora, tomando o quadrado dos dois lados, temos  $x_1 = x_2$ .

**Definição 2.1.7.** (Função sobrejetiva) Uma função  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , é **sobrejetiva** quando  $f(D) = Y$  (ou, equivalentemente,  $I_f = Y$ ).

**Exemplo 2.1.7.** A função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x)$ , é sobrejetiva. De fato, dado qualquer  $y \in \mathbb{R}$  basta escolhermos  $x = e^y$  para termos  $f(x) = y$ .

**Observação 2.1.4.** Uma função injetiva e sobrejetiva é dita ser **bijetiva**.

**Definição 2.1.8.** (Função inversa) Dada uma função invertível (i.e. injetora)  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , definimos sua **inversa** por  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$  que associa cada elemento  $y \in f(D)$  com  $x \in D$  tal que  $f(x) = y$ .

**Exemplo 2.1.8.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A inversa da função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \ln(x)$ , é a função  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $y = e^x$ .
- b) A inversa da função  $f : [-1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $y = \sqrt{x+1}$ , é a função  $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [-1, \infty]$ ,  $y = x^2 - 1$ . De fato,  $f$  é sobrejetiva e dado  $x \in [-1, \infty]$  temos  $f(x) = y = \sqrt{x+1}$  e, então  $y^2 = x+1$ , logo  $x = y^2 - 1$ .

**Definição 2.1.9.** (Função monótona) Seja dada uma função  $f : D \rightarrow Y$ . Dizemos que  $f$  é **crescente** quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 < x_2$ , temos  $f(x_1) < f(x_2)$ . Agora, quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 < x_2$  temos  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , dizemos que  $f$  é uma **função não-decrescente**. Analogamente, quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 < x_2$  temos  $f(x_1) > f(x_2)$  dizemos que  $f$  é uma função **decrescente**. Por fim, quando para todo  $x_1, x_2 \in D$  com  $x_1 < x_2$  temos  $f(x_1) \geq f(x_2)$  dizemos que  $f$  é uma função **não-crescente**.

**Exemplo 2.1.9.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^3$ , é uma função crescente.
- b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = e^{-x}$  é uma função decrescente.

**Definição 2.1.10.** (Paridade de uma função) Uma função  $f : D \rightarrow Y, y = f(x)$ , é dita ser **par** quando para todo  $x \in D$ , temos  $f(x) = f(-x)$ . Agora, quando para todo  $x \in D$ , temos  $f(x) = -f(-x)$ , então dizemos se tratar de uma função **ímpar**.

**Exemplo 2.1.10.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = |x|$ , é uma função par.
- b) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^3$ , é uma função ímpar.

### 2.1.3 Operações elementares

Operações elementares envolvendo funções são comumente definidas tomando o cuidado de restringir o domínio das funções operadas para um conjunto apropriado. Por exemplo, dadas as funções  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ , e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}, y = g(x)$ , definimos a função soma de  $f$  com  $g$  por  $(f + g) : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}, (f + g)(x) := f(x) + g(x)$ . Agora, para estas mesmas função, definimos a função quociente de  $f$  com  $g$  por  $(f/g) : A \cap B \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, (f/g)(x) := f(x)/g(x)$ .

**Exemplo 2.1.11.** A função  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, y = \sqrt{x} - |x|$ , é a subtração da função  $f_1 : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, y = \sqrt{x}$ , com a função  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = |x|$ , i.e.  $f(x) = (f_1 - f_2)(x) := f_1(x) - f_2(x)$ .

**Definição 2.1.11.** (Composição de funções) Sejam dadas as funções  $f : D_f \rightarrow Y_f, y = f(x)$ , e  $g : D_g \rightarrow Y_g, y = g(x)$ , com  $I_g \subset D_f$ . Definimos a **função composta** de  $f$  com  $g$  por  $(f \circ g) : D_g \rightarrow Y_f$  com  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

**Exemplo 2.1.12.** A função  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, y = \sqrt{x^2 + 1}$ , é a composição da função  $f_1 : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, y = \sqrt{x}$ , com a função  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^2 + 1$ .

## Exercícios

**E 2.1.1.** Sejam  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , e  $A, B \subset D$ . Mostre que  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

**E 2.1.2.** Construa uma função crescente, limitada superiormente e com domínio igual ao conjunto dos números reais.

**E 2.1.3.** Mostre que  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt{x^3 - 1}$ , é injetora e construa sua inversa.

**E 2.1.4.** Mostre que se  $f : D \rightarrow Y$  é injetora, então  $f$  não é par.

**E 2.1.5.** Mostre que uma dada função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é limitada quando existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| < c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

# Capítulo 3

## Limites

### 3.1 Noções de topologia

**Definição 3.1.1.** (Ponto interior) Diz-se que  $x$  é um **ponto interior** de um dado conjunto  $C$  quando existe um intervalo  $(a, b)$  que contém  $x$  e está contido em  $C$ , i.e.  $x \in (a, b) \subset C$ . O conjunto de todos os pontos interiores de  $C$  é chamado de seu **interior**.

**Exemplo 3.1.1.** a) Todo elemento de um intervalo aberto  $(a, b)$  é ponto interior deste.

b) O interior de um dado intervalo fechado  $[a, b]$  é o intervalo aberto  $(a, b)$ .

**Definição 3.1.2.** (Conjunto aberto) Diz-se que  $C$  é **conjunto aberto** quando todos seus elementos são pontos interiores.

**Exemplo 3.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O intervalo  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$  é um conjunto aberto. De fato, dado  $x \in (a, b)$  podemos tomar  $0 < \varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$  de forma que  $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$ .
- b) O intervalo  $(a, b]$  não é aberto, pois  $b \in (a, b]$  não é ponto interior.
- c) O conjunto vazio  $\emptyset$  é um conjunto aberto. Com efeito, se o conjunto  $\emptyset$  não é aberto, então existe um elemento  $x \in \emptyset$  que não é ponto interior de  $\emptyset$ , o que é um absurdo pois  $\emptyset$  não contém elementos por definição.
- d) O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  não é aberto.

**Definição 3.1.3.** (Vizinhança) Uma **vizinhança** de um dado ponto  $x$  é qualquer conjunto  $V$  que contenha  $x$  como ponto interior. Também, a **vizinhança simétrica** de um ponto  $x \in \mathbb{R}$  é todo intervalo  $V_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  com  $\varepsilon > 0$ . Mais estrito, a **vizinhança perfurada** de  $x \in \mathbb{R}$  é uma vizinhança de  $x$  que não contém  $x$ . Aproveitamos para fixar a notação:

$$V'_\varepsilon(x) := V_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y \in \mathbb{R}; 0 < |x - y| < \varepsilon\}.$$

**Exemplo 3.1.3.** Podemos reescrever o Exemplo 3.1.2 da seguinte forma. Um intervalo  $(a, b)$  é um conjunto aberto, pois para cada  $x \in (a, b)$  podemos escolher  $0 < \varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$  tal que  $V_\varepsilon(x) \subset (a, b)$ .

**Definição 3.1.4.** (Ponto de acumulação) Um ponto  $x$  é chamado de **ponto de acumulação** de um dado conjunto  $C$  quando toda vizinhança de  $x$  contém infinitos pontos de  $C$ .

**Exemplo 3.1.4.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O número  $a$  é ponto de acumulação do intervalo  $(a, b]$  não degenerado. De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , temos  $(a, a + \varepsilon) \subset V_\varepsilon(a)$  e  $(a, a + \varepsilon) \cap (a, b]$  é um conjunto infinito.
- b) Zero é o único ponto de acumulação do conjunto  $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ .

**Definição 3.1.5.** (Ponto isolado) Diz-se que  $x$  é **ponto isolado** de um dado conjunto  $C$  quando  $x \in C$  não é ponto de acumulação de  $C$ . Diz-se que um conjunto é **discreto** quando todos seus elementos são pontos discretos.

**Exemplo 3.1.5.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  é discreto.
- b) O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  não é discreto.
- c) O conjunto  $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$  é discreto.

**Definição 3.1.6.** (Ponto aderente) Dizemos que  $x$  é **ponto aderente** de um dado conjunto  $C$  quando toda vizinhança de  $x$  contém algum ponto de  $C$ . O conjunto de todos os pontos aderentes de  $C$  é chamado de **fecho** (ou, conjunto de aderência) de  $C$ , o qual denotamos por  $\overline{C}$ .

**Observação 3.1.1.** Observe que todo ponto de um conjunto é aderente ao mesmo, bem como, todos os seus pontos de acumulação.

**Exemplo 3.1.6.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O fecho de  $(a, b]$  é o intervalo fechado  $[a, b]$ .

- b) O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é o fecho do conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ , i.e.  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

**Definição 3.1.7.** Conjunto fechado Dizemos que um conjunto  $C$  é **fechado** quando é igual ao seu fecho, i.e.  $C = \overline{C}$ .

**Exemplo 3.1.7.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O intervalo  $[a, b]$  é um conjunto fechado.
- b) O conjunto vazio  $\emptyset$  é fechado. Por quê?
- c) O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é fechado.
- d) O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  não é fechado.

**Definição 3.1.8.** (Conjunto denso) Dizemos que um conjunto  $A$  é **denso** no conjunto  $B$ , quando todo ponto aderente de  $\overline{A} \subset B$ .

**Exemplo 3.1.8.** O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  é denso no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ .

### 3.1.1 Exercícios

**E 3.1.1.** Seja dado um conjunto  $C$ . Mostre que  $x$  é ponto de acumulação de  $C$  se, e somente se, toda vizinhança de  $x$  contém pelo menos um elemento de  $C$  diferente de  $x$ .

**Resposta.** Basta considerar sucessivas vizinhanças  $V_{1/n}(x)$  com  $n \in \mathbb{R}$ .

**E 3.1.2.** Seja dado um conjunto  $C$ . Mostre que  $x$  é ponto isolado de  $C$  se, e somente se, existe uma vizinhança de  $x$  tal que  $(V(x) \setminus \{x\}) \cap C = \emptyset$ .

**Resposta.** A implicação segue imediatamente por negação.

## 3.2 Limites

**Definição 3.2.1.** (Limite) Sejam uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , e  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ . Diz-se que  $L \in \mathbb{R}$  é o **limite** de  $f(x)$  com  $x$  tendendo a  $a$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad (3.2)$$

ou ainda, simplesmente,  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a$ .

**Exemplo 3.2.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a) Temos  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ . Isto segue imediatamente, pois, neste caso,  $f(x) = x - 1$ ,  $a = 1$ ,  $L = 0$  e, então, dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \varepsilon$  de forma que

$$x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1 - 0| < \varepsilon. \quad (3.3)$$

- b) A função não precisa estar definida no ponto em o limite é tomado. Por exemplo,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$ . Verifique!

**Observação 3.2.1.** Quando nos referirmos a expressão “ $x$  tende a  $a$ ” (ou similares), estaremos sempre assumindo que  $a$  é um ponto de acumulação do domínio da função de interesse.

### 3.2.1 Propriedades do limite

**Teorema 3.2.1.** Se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ .

**Demonstração.**

Seja  $\varepsilon > 0$ . Por hipótese, existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Tomando, então, um tal  $\delta$  e observando que  $||f(x)| - |L|| < |f(x) - L|$ , temos que para todo  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$ , ocorre  $||f(x)| - |L|| < \varepsilon$ .

■

**Teorema 3.2.2.** Se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $A < L < B$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $A < f(x) < B$ .

**Demonstração.**

De fato, por hipótese, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Então, o resultado segue escolhendo um tal  $\delta$  quando  $\varepsilon = \min\{L - A, B - L\}$ .

■

**Corolário 3.2.1.** (Permanência do sinal) Se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$  ( $L < 0$ ), então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$ , implica  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).

**Demonstração.**



Quando  $L > 0$  ( $L < 0$ ) basta escolher  $A = 0$  ( $B = 0$ ) no teorema anterior. ■

**Teorema 3.2.3.** (Operações com limites) Sejam  $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2$ , então (omitindo que  $x \rightarrow a$ )

- a)  $\lim[f_1(x) + f_2(x)] = \lim f_1(x) + \lim f_2(x)$ .
- b) para todo  $k \in \mathbb{R}$ , temos  $\lim k f_1(x) = k \lim f_1(x)$ .
- c)  $\lim f_1(x) f_2(x) = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$ .
- d)  $\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}$ , quando  $L_2 \neq 0$ .

**Demonstração.**

Seja dado  $\varepsilon > 0$ .

- a) Seja  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/2$  e  $|f_2(x) - L_2| < \varepsilon/2$ . Logo, para tais  $\delta$  e  $x$  temos

$$|(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (3.4)$$

- b) O resultado é imediato para  $k = 0$ . Sejam  $k \neq 0$  e  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/|k|$ . Então, para tais  $\delta$  e  $x$  temos  $|k f_1(x) - k L_1| = |k| |f_1(x) - L_1| < |k| \varepsilon / |k| = \varepsilon$ .

- c) Sejam  $M > 0$  e  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f_1(x) - L_1| < \varepsilon/(2|L_2|)$ ,  $|f_1(x)| < M$  (veja Teorema 3.2.2) e  $|f_2(x) - L_2| < \varepsilon/(2M)$ . Então

$$\begin{aligned} |f_1(x) f_2(x) - L_1 L_2| &= |f_1(x) f_2(x) - f_1(x) L_2 + f_1(x) L_2 - L_1 L_2| \\ &= |f_1(x)(f_2(x) - L_2) + (f_1(x) - L_1) L_2| \\ &\leq |f_1(x)| |f_2(x) - L_2| + |f_1(x) - L_1| |L_2| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|L_2|} |L_2| = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.5)$$

- d) De c), basta mostrar que  $1/f_2(x) \rightarrow 1/L_2$  quando  $x \rightarrow a$ . Para tanto, seja  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon L_2^2}{2}$  e  $|f_2(x)| > |L_2|/2$  (veja Teorema 3.2.2). Então, para tais  $\delta$  e  $x$  temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2} \right| &= \frac{|f_2(x) - L_2|}{|f_2(x) L_2|} \\ &< \frac{\frac{\varepsilon L_2^2}{2}}{|L_2| \frac{|L_2|}{2}} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.6)$$

■

**Teorema 3.2.4.** *O limite de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é  $L$  quando  $x \rightarrow a$  se, e somente se, para toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$ , temos  $f(x_n) \rightarrow L$ .*

**Demonstração.**

- a) Primeiramente, mostraremos que se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então dada qualquer sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$ , temos  $f(x_n) \rightarrow L$ . De fato, sejam  $\varepsilon > 0$  e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$ . Então, por hipótese, existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Agora, como  $x_n \rightarrow a$ , existe  $N$  suficientemente grande tal que  $n > N$  implica  $|x_n - a| < \delta$  e, portanto,  $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ . Ou seja,  $f(x_n) \rightarrow L$ .
- b) Aqui, provaremos por absurdo que se para toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$  temos  $f(x_n) \rightarrow L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Ou seja, vamos assumir que existe um  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe algum  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  com  $|f(x) - L| > \varepsilon$ . Sejam um tal  $\varepsilon$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$  um  $x'_n \in D$  com  $0 < |x'_n - a| < 1/n$  e  $|f(x'_n) - L| > \varepsilon$ . Com isso, temos formado uma sequência  $(x'_n) \subset D \setminus \{a\}$ ,  $x'_n \rightarrow a$ , mas  $f(x'_n) \not\rightarrow L$ .

■

**Corolário 3.2.2.** *Um função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , tem limite  $L$  quando  $x \rightarrow a$  se, e somente se, para toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$  com  $x_n \rightarrow a$  temos que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente.*

**Demonstração.**

Segue, imediatamente, do fato de que se  $(y_n)$  é uma sequência com  $y_n \rightarrow L$ , então toda subsequência de  $(y_n)$  é convergente e converge para  $L$ .

■

**Teorema 3.2.5.** (Critério de convergência de Cauchy) Uma condição necessária e suficiente para que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , tenha limite  $L$  quando  $x \rightarrow a$  é que, para todo  $\varepsilon > 0$ , exista  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

**Demonstração.**

- a) A suficiência segue do critério de convergência de Cauchy para sequências e do Corolário 3.2.2.
- b) Exercício 3.2.4.

■

## Exercícios

**E 3.2.1.** Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , então  $f(a) = 0$ . Justifique sua resposta.

**Resposta.** Veja a Definição 3.2.1.

**E 3.2.2.** Mostre que se  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ .

**Resposta.** Use o Teorema 3.2.2 observando que

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| = |(\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}) \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}| = \frac{|f(x) - L|}{|\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}|}. \quad (3.8)$$

**E 3.2.3.** Demonstre o Teorema 3.2.3 como um corolário do Teorema 3.2.4.

**Resposta.** Basta usar as propriedades de limites de seqüências.

**E 3.2.4.** Demonstre que se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , tem limite  $L$  quando  $x \rightarrow a$ , então para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in V'_\delta(a) \cap D$  implica  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**Resposta.** Observe que  $x, y \in V'_{\delta/2}(a)$  implica  $|x - a| < \delta/2$  e  $|y - a| < \delta/2$ .

## 3.3 Limites laterais

**Definição 3.3.1.** (Limite lateral) Sejam uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , e  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ . Dizemos que  $L \in \mathbb{R}$  é o **limite** de  $f(x)$  com  $x$  tendendo a  $a$  **pela direita** se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (3.9)$$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \quad (3.10)$$

ou ainda, simplesmente,  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a^+$ . Analogamente, escreve-se  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a^-$ , ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (3.11)$$

**Exemplo 3.3.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$ . De fato, dado qualquer  $\varepsilon > 0$  podemos escolher, por exemplo,  $\delta = 1$  e, com isso, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < x - 0 < 1$  implica  $|x/|x| - 1| = 0 < \varepsilon$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$ . De fato, dado qualquer  $\varepsilon > 0$  podemos escolher, por exemplo,  $\delta = 1$  e, com isso, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < 0 - x < 1$  implica  $|x/|x| - (-1)| = |-1 + 1| = 0 < \varepsilon$ .

**Definição 3.3.2.** Ponto de acumulação lateral Seja  $C$  um conjunto. Dizemos que  $a \in C$  é **ponto de acumulação à esquerda** de  $C$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  o conjunto  $(a - \varepsilon, a) \cap C$  contém infinitos pontos de  $C$ . Analogamente, dizemos que  $a \in C$  é **ponto de acumulação à direita** de  $C$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  o conjunto  $(a, a + \varepsilon) \cap C$  contém infinitos pontos de  $C$ .

**Teorema 3.3.1.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é uma função monótona e limitada, definida em um intervalo  $I$  no qual  $a$  é ponto de acumulação à esquerda (ponto de acumulação à direita), então  $f$  tem limite com  $x \rightarrow a^-$  ( $x \rightarrow a^+$ ).

**Demonstração.**

Consideremos o caso em que  $f$  é uma função não crescente e  $a$  seja ponto de acumulação à direita. Seja, então  $L$  o supremo do conjunto formado por  $f(x)$  com  $x \in I$  e  $x > a$ . Afirmamos que  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a^+$ . De fato, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $L - \varepsilon < f(a + \delta) \leq L$ . Agora, como  $f$  é não crescente, para todo  $x \in I$ ,  $0 < x - a < \delta$ , temos  $L - \varepsilon < f(a + \delta) \leq f(x) \leq L$  e, portanto,  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Os outros casos são análogos e deixados para o leitor (veja, também, Exercício 3.3.1).

■

## Exercícios

**E 3.3.1.** Demonstre o Teorema 3.3.1 para o caso de uma função crescente e  $a$  ponto de acumulação à esquerda.

**Resposta.** Análogo ao caso da considerado na demonstração do Teorema 3.3.1.

## 3.4 Limites no infinito e limites infinitos

**Definição 3.4.1.** (Limites infinitos) Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , e  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $+\infty$  quando  $x \rightarrow a$  se, para todo  $k > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  temos  $f(x) > k$ . Analogamente, dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $-\infty$  quando  $x \rightarrow a$  se, para todo  $k > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in D$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  temos  $f(x) < -k$ . Nestes casos escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad (3.12)$$

respectivamente.

**Exemplo 3.4.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/|x| = +\infty$ . De fato, dado  $k > 0$  basta tomarmos  $\delta = 1/k$ . Com isso,  $0 < |x - 0| < \delta$  implica  $|x| < 1/k$  e, portanto,  $1/|x| > k$ , i.e.  $|1/|x| - 0| > k$ .
- b) Seja  $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) := 1/x$ . Neste caso,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ . Deixamos a verificação para o leitor.

**Definição 3.4.2.** (Limite no infinito) Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ . Quando  $D$  é ilimitado superiormente dizemos que  $f(x)$  tende a  $L$  quando  $x \rightarrow +\infty$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $k > 0$  tal que  $x > k$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Analogamente, quando  $D$  é ilimitado inferiormente dizemos que  $f(x)$  tende a  $L$  quando  $x \rightarrow -\infty$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $k > 0$  tal que  $x < -k$  implica  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Nestes casos escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \quad (3.13)$$

respectivamente.

**Exemplo 3.4.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$  escolhemos  $\delta = 1/\varepsilon$ . Com isso,  $x > \delta$  implica  $0 < 1/x < 1/\delta = \varepsilon$  e, portanto,  $|1/x - 0| < \varepsilon$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x = 0$ . Caso análogo ao anterior, verifique!

**Observação 3.4.1.** Observe que definições análogas às 3.3.1, 3.4.1 e 3.4.2 se aplicam para os casos:

$$\lim_{x \rightarrow a^{+/-}} f(x) = \pm/\mp \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L. \quad (3.14)$$

Também, consideramos definições análogas para os casos:

$$\lim_{x \rightarrow a^{+/-}} f(x) = L^{\pm/\mp} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +/-\infty} f(x) = L^{\pm/\mp}. \quad (3.15)$$

**Teorema 3.4.1.** *Toda função monótona e limitada superiormente (inferiormente), cujo domínio contenha  $[c, +\infty)$  ( $(-\infty, c]$ ), possui limite quando  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ).*

**Demonstração.**

Consideremos o caso de  $f : [c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , função não decrescente e limitada superiormente. Seja, então  $L$  o supremo do conjunto imagem de  $f$ . Mostraremos que  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k > 0$  tal que  $L - \varepsilon < f(k) \leq L$ . Agora, como  $f$  é não decrescente, para todo  $x > k$  temos  $L - \varepsilon < f(k) < f(x) \leq L$  e, portanto,  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Isto demonstra o caso considerado e deixamos para o leitor a verificação dos demais (veja, também, Exercício 3.4.1).



## Exercícios

**E 3.4.1.** ) Demonstre o Teorema 3.4.1 para o caso de uma função decrescente e limitada inferiormente.

**Resposta.** Análogo ao caso demonstrado no Teorema 3.4.1.

# Referências Bibliográficas

- [1] R.G. Bartle and D.R. Sherbert. *Introduction to real analysis*. John Wiley & Sons, 3. ed. edition, 2000.
- [2] C.I. Doering. *Introdução à análise matemática na reta*. SBM, 1. ed. edition, 2015.
- [3] E.L. Lima. *Análise real*. IMPA, 12. ed. edition, 2017.
- [4] G. Ávila. *Análise matemática para licenciatura*. Blucher, 3. ed. edition, 2006.

# Índice Remissivo

- Cauchy, 14
- conjunto
  - discreto, 10
  - fechado, 11
  - interior, 9
- conjunto aberto, 9
- conjunto de
  - aderência, 10
- contradomínio, 4
- definição de
  - função, 4
- denso, 11
- domínio, 4
- extensão
  - de uma função, 6
- fecho, 10
- função, 4
  - ímpar, 7
  - bijetiva, 6
  - composta, 7
  - crescente, 7
  - decrecente, 7
  - injetiva, 6
  - inversa, 6
  - não-decrecente, 7
- função limitada, 5
  - à direita, 5
  - à esquerda, 5
  - inferiormente, 5
  - superiormente, 5
- função par, 7
- função sobrejetiva, 6
- fundamentos da análise, 4
- gráfico, 5
- imagem de
  - uma função, 5
- lei de correspondência, 4
- limite, 11
  - infinito, 17
  - no infinito, 17
- limite de
  - função, 11
- limite lateral, 15
- limites
  - de funções, 9
- ponto
  - isolado, 10
- ponto aderente, 10
- ponto de acumulação, 10
  - à direita, 16
  - à esquerda, 16
- ponto interior, 9
- restrição
  - de uma função, 6
- variável
  - dependente, 4
  - independente, 4
- vizinhança, 10
  - perfurada, 10
  - simétrica, 10