Partial Differential Equations：偏微分方程

Gtm214 and Evans 笔记

作者：果果

ElegantLaTeX Program

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

目录

Introduction

算是自己的第一本 LaTeX 书，以前只是打一些小型笔记，希望可以对我的研究生生涯有所帮助，说是笔记，不如说抄书。

第 1 章 Laplace Eqution

拉普拉斯方程，是连接数学分析和偏微分方程的一个桥梁

本文记号如下

- 拉普拉斯算子: Δ
- 哈密顿算子：∇
- 梯度：$grad$
- 散度: div
- 方向导数：v
-
-
-
-

1.1 Recall math analysis and Study Partial differential equation

先回顾需要用到的数学分析的定理

1.1.1 integral formula

定理 1.1 (分部积分)

设 $u, v \in C^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

分部积分是一维的情况，通过考虑多元 (高维) 的情况，推广为下面的公式

定理 1.2 (格林第一公式)

设 $w, v \in C^2(\Omega)$, 则

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v dx + \int_\Omega v \Delta w dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial v} dS$$

证明

$$\int_a^b udv + \int_a^b vdu = uv\Big|_a^b \Longrightarrow \int_\Omega u\partial_i v dx + \int_\Omega v\partial_i u dx = \int_{\partial\Omega} uvdS$$

令 $\partial_i w = u$，带入上式，

$$\int_\Omega \partial_i w \partial_i v dx + \int_\Omega v\partial_{ii} w dx = \int_{\partial\Omega} v\partial_i w dS$$

再将 i 从 1 加到 n 则有，

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v dx + \int_\Omega v \Delta w dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial v} dS$$

证毕

定理 1.3 (格林第二公式)

设 $u, v \in C^2(\Omega)$, 则

$$\int_\Omega (v\Delta w - w\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial w}{\partial v} - w\frac{\partial v}{\partial v}dS$$

证明 由定理1.2得

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v dx + \int_\Omega v\Delta w dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial w}{\partial v}dS$$

由于 w, v 的对称性，交换 w, v 的位置，

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx + \int_\Omega w\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial v}{\partial v}dS$$

上式相减，获得了格林第二公式，证毕。

1.1.2 Laplace equation and Harmonic function

这节开始算是进入偏微分方程的内容了。

定义 1.1 (调和函数)

u is a harmonic function $\Longleftrightarrow \Delta u = 0$

引理 1.1

u is a harmonic function，A is an orthogonal matrix，then$V(x) = u(Ax)$ is a harmonic function.

即调和函数在正交变换下仍然调和，长度是调和的不变量。

引理 1.2

u is a harmonic function$\Longleftrightarrow u(x) = f(r), x \in R^n, r = |x|$

通过引 1.2 将关于 x 的偏微分方程转化为关于 r 的常微分方程，由链式法则得:

$$\partial_i u = f^{'}(r)\partial_i r = f^{'}(r)\frac{x_i}{r}, \partial_{ii} u = f^{''}(r)\frac{x_i^2}{r^2} + f^{'}(r)\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$$

$$\Delta u = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \partial_{ii} u = f^{''}(r) + f^{'}(r)(\frac{n-1}{r}) = 0 \Longleftrightarrow f^{'}(r)r^{n-1} = C_1$$

则可以解出 $f(r)$,

$$f(r) = \begin{cases} C_1 lnr + C_2, n = 2 \\ \dfrac{C_1}{2-n}r^{2-n} + C_2, n \geq 3 \end{cases}$$

定义 1.2 (基本解 fundamental soluation)

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}ln|x|, n = 2 \\ \frac{1}{2(2-1)w_n}|x|^{2-n}, n \geq 3 \end{cases}$$

$w_n = ||\partial B_1||_n$

基本解的性质:

- $x = 0$ 为奇点 singularity，且可积

- $\Delta\Gamma = 0 \quad \text{in} \quad R\backslash\{0\}$
- $$\int_{\partial B_r} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} dS = 1, r > 0$$

1.1.3 Dirichlet problem of laplace equation

定理 1.4 (格林恒等式 Green identity)

设 $u \in C^2[a, b]$, 则

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega} [\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial v} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial v}]dS_y$$

定理 1.5 (迪利克雷问题 Dirichlet problem)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, in \quad \Omega \\ u = \phi, on \quad the \quad \partial\Omega \end{cases}$$

我们先讲目光放在 Ω 为 balls 的问题上面

定义 1.3 (格林函数 Green' function 和 possion 核)

$$G(x, y) = \Gamma(x, y) - \Phi(x, y)$$

$$K(x, y) = \frac{\partial G}{\partial v}$$

然后 Φ 在内部拉普拉斯等于 0，在边界等于基本解。将边界上是任意函数转化为固定的函数. 再通过格林第二公式和格林恒等式能得到

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \phi(y)\frac{\partial G}{\partial v}dS_y$$

会产生两个问题，$G(x, y)$ 是否存在，如果存在，他是否真的是解。

1.2 Mean value principle

调和函数的平均值原则, 本文后面简称 MVP，Ω is a bounded domain in R^n,$u \in C(\Omega)$.

定理 1.6 (平均值原则 Mean value principle)

if $\forall B_{r(x)} \in \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_{r(x)}} u(y)dS_y$$

or

$$u(x) = \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_{r(x)}} u(y)dy$$

then u satisfies MVP

我们首先断言, 上面两个等式完全等价. 且 $||\partial B_r||_n = w_n r^n - 1$，$||B_r||_n = \frac{w_n r^n}{n}$

$$u(x) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_{r(x)}} u(y)dS_y$$

$$r^{n-1}u(x) = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_{r(x)}} u(y)dS_y$$

左右同时对 r 变上限积分

$$\int_0^r s^{n-1}u(x)ds = \frac{1}{w_n}\int_0^r\int_{\partial B_{s(x)}} u(y)dS_y ds$$

$$\frac{u(x)r^n}{n} = \frac{1}{w_n}\int_{B_{r(x)}} u(y)dy$$

证毕

定理 1.7

(1)if $u \in C^2(\Omega)$ is harmonic in Ω then u satifies the MVP in Ω

(2)if $u \in C(\Omega)$ satifies the MVP，then u is smooth and harmonic in Ω

(1)

证明 $\forall B_{r(x)} \in \Omega, \rho \in (0, r)$,

$$\int_{B_{\rho(x)}} \Delta u(y)dy = \int_{\partial B_{\rho(x)}} \frac{\partial u}{\partial v}dS = \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{\partial B_{\rho(x)}} u(x+\rho w)dS_w$$

u is harmonic,$\Delta u = 0$,

$$\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{\partial B_{1(x)}} u(x+\rho w)dS_w = 0$$

令 ρ 趋于 0

$$\int_{\partial B_{1(x)}} u(x+\rho w)dS_w = C = w_n u(x)$$

(2) 略

注 u is subharmonice

$$\Delta u > 0, u(x) < \frac{1}{w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_{r(x)}} u(y)dS_y$$

u is superharmonice

$$\Delta u < 0, u(x) > \frac{1}{w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_{r(x)}} u(y)dS_y$$

1.3 Interior gradient estimate

定理 1.8 (Interior gradient estimate)

u is harmonic $\in B_R(x_0)$,then

$$|Du| \le \frac{n}{R}\max_{\partial B}|u|$$

证明 通过旋转变换可以将 $Du(x_0) = \partial u = (\partial u(x_0), 0, 0, 0......)$,$\forall r > 0$, 根据 MVP 有

$$\partial u(x_0) = \frac{n}{w_n r^n}\int_{B_{r(x_0)}} \partial u(y)dy = \frac{n}{w_n r^n}\int_{\partial B_{r(x_0)}} u(y)v_1 dS_y$$

$$|\partial_i u| \le \frac{n}{w_n r^n}\int_{\partial B_{r(x_0)}} |u(y)|dS_y \le \frac{n}{w_n r^n}\max_{\partial B}|u| w_n r^{n-1} = \frac{n}{R}\max_{\partial B}|u|$$

并且可以推广到高维形式

定理 1.9

u is harmonic $\in B_R(x_0)$,then

$$|D^\alpha u| \le \frac{C}{R^k}\max_{\partial B}|u|$$

其中 $|\alpha| = k, C = C(n, k)$

定理 1.10 (Liouville theorem)

$u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be harmonic and bounded.Then u is constant.

证明 由导数估计不等式

$$|Du| \leq \frac{n}{R} \max_{\partial B} |u|$$

令 R 趋于正无穷，则

$$Du = 0, u = C$$

定理 1.11 (Harnack inequality)

u is harmonic，$u > 0$ in $B_{(x_0,r)}$,for every subdomain,$\Omega' \subset\subset \Omega$,there exists a constant with

$$\max_{\Omega'} u \leq c \inf_{\partial\Omega'} u$$

注 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 表示 Ω' 是 Ω 的子集并且 Ω' 的闭包是紧的

证明 我们考虑特殊的 $\Omega' = B_{(x_0,r)}$，$B_{(x_0,4r)} \subset \Omega \; \forall y_1, y_2 \in \Omega'$

$$\begin{aligned}
u(y_1) &= \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_{r(y_1)}} u(y)dy \\
&\leq \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_{2r(x_0)}} u(y)dy \\
&= \frac{n3^n}{w_n 3^n r^n} \int_{B_{2r(x_0)}} u(y)dy \\
&\leq \frac{n3^n}{w_n 3^n r^n} \int_{B_{3r(y_2)}} u(y)dy \\
&= 3^n u(y_2)
\end{aligned}$$

两个不等式是由区间的包含关系获得的，并且这里的 y_1, y_2 是任取的，特别的，取到最大值与最小值的时候 $Harnack \quad inequality$ 成立，说明了调和函数内部的任意两个点可以互相控制

第 2 章 Maximum prinple

这一章需要探究二阶线性椭圆算子的极大值原理,在拉普拉斯算子的内容中,我们运用了旋转不变性,所有我们需要寻求其他不同的方法来探究. 并且这一章我们的 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界子区域，并且 $f \in C^2(\Omega)$

2.1 Elliptic partial differential equation of second order

定义 2.1

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x^i y^j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x^i} + c(x)u(x)$$

♣

- Symmetry: 其中 $\mathbf{A}$ 是二次项系数矩阵, 我们要求 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵, 这个限定不是那么重要
- Ellipticity: 存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

  即系数矩阵中 $\mathbf{A}$ 对于任何 x 是正定的，且所有特征值大于 $\lambda > 0$
- Boundedness of the coefficients: 存在常数 K, 使得 $|a_{ij}|, |b_i|, |c(x)| \leq K$

则称 L 为二阶线性椭圆算子，显然，拉普拉斯算子的 $\mathbf{A} = \mathbf{E}, b_i = 0, c(x) = 0$，满足上列条件是一个特殊的椭圆算子. 并且我们需要对 c 加以限制，才能得到极大值原则.

2.2 weak and strong maximum prinple

定理 2.1 (次调和的弱极值原理)

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \Delta u \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$ then

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$$

♡

证明 先考虑 $\Delta u > 0$ 的情况, 如果极大值取到内部 x_0，知道 $\Delta u(x_0) \leq 0$ 矛盾
对于一般的情况构造 $v(x) = e^{x_1}$, 则 $\Delta v = v \geq 0$, 任取 $\varepsilon > 0$, 有 $\Delta(u + \varepsilon v) > 0$，得到

$$\max_{\Omega} u + \varepsilon v = \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon v$$

再令 ε 趋于 0, 得证

我们需要将拉普拉斯算子推广到一般的二阶椭圆算子

定理 2.2 (椭圆算子的弱极值原理)

假设 $c = 0$, 并且 $Lu \geq 0$, 那么

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$$

♡

证明 同上定理, 先考虑 $Lu > 0$ 的情况, 如果在内部取到最大值, 则 $u_{x_i}(x_0) = 0$, 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 半负定.$Lu \leq 0$, 矛盾
回到一般情况, 构造函数 $v(x) = e^{\alpha x_1}$,$\alpha > 0$

$$Lv = (\alpha^2 a_1 1 + \alpha b_1)v(x)$$

当 α 足够大时间,

$$Lv = L(u + \varepsilon v) > 0$$

同理得证

推论 2.1 (Dirichlet problem 解的唯一性)

$$Lu = f \ \ in \ \ \Omega$$
$$u = \psi \ \ on \ \ \partial\Omega$$

最多只有一个解

证明 假设有两个解 u_1, u_2, 令 $W = u_1 - u_2$, 则

$$Lw = 0 \ \ in \ \ \Omega$$
$$w = 0 \ \ on \ \ \partial\Omega$$

则 $w \leq 0, -w \leq 0, w = 0 u_1 = u_2$

引理 2.1 (Hopf)

$c(x) \leq 0$

$$Lu \geq 0 \quad in \ \ \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

取 $x_0 \in \partial\Omega$ 满足

- $u(x_0) \geq u(x)$
- $u(x_0) \geq 0$
- u 在 x_0 连续

那么

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) \geq 0$$

是显然的，我们要证不等关系严格成立。暂略

定理 2.3 (椭圆算子的强极值原理)

$c = 0, Lu \geq 0$ 则若 u 在内部取到最大值, 则 u 是常数

$c \leq 0, Lu \geq 0, u \geq 0$ 则若 u 在内部取到最大值, 则 u 是常数

第 3 章 Possion eqution

第 4 章 Sobolve space and Hölder space

进入比较现代的理论了，前面算古典理论.

4.1 Weak derivative

定义 4.1 (弱导数 weak derivative)

设 $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$，称 v 是 u 的 α 阶弱导数, 记为 $D^\alpha u = v$，若

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi dx$$

对任意的 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

♣

引理 4.1 (弱导数的唯一性)

若 α 阶弱导数存在，则在零测度外唯一

♡

4.2 sobolve space

固定 $1 \leq p \leq \infty$，k 是非负整数

定义 4.2 (sobolev space)

Sobolev space $W^{k,p}(\Omega)$ 包含了所有局部可积函数 $u : \Omega \to R$, 满足对任意的多重指标 α ,$|\alpha| \leq k, D^\alpha u$ 在弱导意义下存在，且 $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$

注 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的函数的等价类都只差一个零测集

♣

定义 4.3 (sobolev 空间的范数)

$u \in W^{k,p}(\Omega)$ 的范数为

$$||u||_{W^{k,p}} = (\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

$$||u||_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} ess \sup_\Omega |D^\alpha u|, p = \infty$$

♣

注 ess sup 称为本性上界, 且 $W^{k,p}(\Omega)$ 当 $p = 2$ 时，也写作

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$$

容易知道它是一个 Hilbert space. 且 $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

若 $n = 1$ 的时候, 且 Ω 是开区间, 则 $u \in W^{1,p}$ 当且仅当 u 是绝对连续函数 (导数几乎处处存在), 且属于 $L^(\Omega)$, 不幸的是, 这个结论只对 $n = 1$ 成立, 在一般情况下的函数要么不连续, 要么无界

定理 4.1

设 $u \in W^{1,p}((0,1))$ 则 u 几乎处处等于一个绝对连续函数, 存在 $1 \leq p < \infty$，且 u' 几乎处处存在，$u' \in L^p((0,1))$

♡

此外 sobolve space 是一个好空间, 把他看作函数空间，则是一个 Banach space

定义 4.4 (Hölder continues)

对于 $\gamma \in (0,1]$，如果函数 $u:\Omega \to R$，Ω 为开集，满足

$$|u(x)-u(y)| \le C|x-y|^{\gamma}$$

则称 u 为 γ 阶 Hölder 连续的。♣

容易发现,如果函数是 Hölder 连续，则函数是连续的，$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \le C, x \neq y$
定义 Hölder 半范数

$$[u]_{C^{0,r}(\Omega)} = \sup_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}}$$

(注意他不一定正定)
定义为 γ 阶 Hölder 范数

$$||u||_{C^{0,r}(\Omega)} = ||u||_{C(\Omega)} + [u]_{C^{0,r}(\Omega)}$$

PDE 中的函数经常是需要求微分的，于是我们做更一般的定义:

定义 4.5 (Hölder Space)

记为 $C^{k,r}(\Omega)$，他包含了所有函数 u 是 k 阶连续可微，且 u 的 k 阶偏导数有界且为为 γ 阶 Hölder 连续且他的范数为

$$||u||_{C^{k,r}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} ||D^{\alpha}u||_{C(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} [u]_{C^{0,r}(\Omega)}$$

♣

函数空间 $C^{k,r}(\Omega)$ 为 Banach 空间

定义 4.6

$W_0^{k,p}(\Omega)$ 为 C_c^{∞} 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包 ♣

4.3 Approximation

定义 4.7 (磨光算子)

取一个 $\phi \in C_c^{\infty}$, 满足

$$\int_{R^n} \phi dx = 1$$

$$spport(\phi) = B(0,1)$$

$$\phi_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$$

令 $f \in L^p_{loc}$,$f^{\varepsilon} = \phi_{\varepsilon} * f \longrightarrow f \quad in \quad L^p_{loc}$ ♣

定理 4.2 (光滑函数内部的局部逼近)

设 $u \in W^{k,p}(U), 1 \le p < \infty$. 令 $u^{\varepsilon} = \phi_{\varepsilon} * u$, 那么有

$$u^{\varepsilon} \in C^{\infty}(U_{\varepsilon})$$

$$u^{\varepsilon} \longrightarrow u \quad in \quad W^{k,p}_{loc}(U), \varepsilon \longrightarrow 0$$

♡

$U_{\varepsilon} = \{x \in U, dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$

定理 4.3 (光滑函数的整体逼近)
设 $u \in W^{k,p}(U)$,U 有界，$1 \le p < \infty$. 则存在 $u_m \in C^\infty \cap W^{k,p}(U)$ 使得

$$u_m \longrightarrow u \quad in \quad W^{k,p}(U)$$

♡

定理 4.4 (包含边界的光滑函数的整体逼近)
设 $u \in W^{k,p}(U)$,U 有界，且 ∂U 是 C^1 的 $1 \le p < \infty$. 则存在 $u_m \in C^\infty(\overline{U})$ 使得

$$u_m \longrightarrow u \quad in \quad W^{k,p}(U)$$

♡

4.4 Extensions

定理 4.5 (扩张定理)
U 有界，且 ∂U 是 C^1 的, 取有界开集 V, 使得 $U \subset\subset V$, 则存在有界线性算子 $\mathcal{E}$ 满足

$$\mathcal{E} : W^{1,p}(U) \longrightarrow W^{1,p}(R^n)$$

$$\mathcal{E}u = u \quad in \quad U \quad a.e.$$

$$spt(\mathcal{E}u) \subset V$$

存在常数 C 使得

$$||\mathcal{E}u||_{W^{1,p}(R^n)} \le C||u||_{W^{1,p}(U)}$$

♡

4.5 Trace

定理 4.6 (迹定理)
U 有界，且 ∂U 是 C^1 的, 则存在有界线性算子 $\mathcal{T}$ 满足

$$\mathcal{T} : W^{1,p}(U) \longrightarrow L^p(\partial U)$$

$$\mathcal{T}u = u|_{\partial U} \quad if \quad u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$$

$$||\mathcal{T}u||_{L^p(\partial U)} \le C||u||_{W^{1,p}(U)}$$

♡

且这个不等式称为迹不等式, 有一个重要的问题，什么样的函数的迹为零

定理 4.7
U 有界，且 ∂U 是 C^1 的, 设 $u \in W^{1,p}(U)$，则

$$\mathcal{T}u = 0 \Longleftrightarrow u \in W_0^{1,p}(U)$$

♡

4.6 Sobolev inequality

我们先令 $1 \le p < n$,u 是 n 元函数，我们来探究 p, q 取何值时, 会有

$$||u||_{L^q(R^n)} \le C||Du||_{L^p(U)}$$

我们先考虑特殊的情况,$u_k = u(kx)$ 带入计算

$$|u||_{L^q(R^n)} < Ck^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}||u||_{L^p(U)}$$

令指数为零,$1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}=0$, 解得 $q=\frac{np}{n-p}$, 且有关系 $\frac{1}{p}-\frac{1}{n}=\frac{1}{q}$, 我们定义 p 的 *sobolev* 共轭

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

定理 4.8 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式)

$1 \le p < n$, 则存在只依赖 p, n 的常数 C 使得

$$||u||_{L^{p^*}(R^n)} \le C||Du||_{L^p(R^n)}$$

for all $u \in C_c^1(R^n)$

定理 4.9 (估计 $W^{1,p}, 1 \le p < n$)

U 有界，且 ∂U 是 C^1 的, 令 $u \in W^{1,p}(U)$, 则 $u \in L^{p^*}(U)$, 且满足不等式

$$||u||_{L^{p^*}(U)} \le C||u||_{W^{1,p}(U)}$$

常数 C 只与 p, n, U 有关

证明 首先由延拓定理有

$$||\mathcal{E}u||_{W^{1,p}(R^n)} \le C||u||_{W^{1,p}(U)}$$

$$||\mathcal{E}u||_{L^{p^*}(R^n)} \le C||D\mathcal{E}u||_{L^p(R^n)}$$

则

$$||u||_{L^{p^*}(U)} \le ||\mathcal{E}u||_{L^{p^*}(R^n)} \le C||D\mathcal{E}u||_{L^p(R^n)} \le C||\mathcal{E}u||_{W^{1,p}(U)} \le C||u||_{W^{1,p}(U)}$$

定理 4.10 (估计 $W_0^{1,p}, 1 \le p < n$)

U 有界开集,$u \in W_0^{1,p}(U)$, 则对于任何 $q \in [1, p^*]$ 成立不等式

$$||u||_{L^q(U)} \le C||Du||_{L^p(U)}$$

常数 C 只与 p, q, n, U 有关

证明 由 $1 \le q \le p^*$, 由 Hölder 不等式

$$\int_U f^q dx = \int_U f^q \cdot 1 dx \le \left(\int_U f^{p^*} dx\right)^{\frac{q}{p^*}} \left(\int_U 1^{\frac{p^*}{p^*-q}} dx\right)^{\frac{p^*-q}{p^*}}$$

得到

$$||u||_{L^q(U)} \le C||u||_{L^{p^*}(U)} \le C||Du||_{L^p(U)}$$

$p = n$ 是一个边界条件, 我们希望 $u \in W^{1,n}(U)$, 那么 $u \in L^\infty(U)$, 然而事与愿违,$u = lnln(1+\frac{1}{|x|})$ 不满足

4.7 Morrey's inequality

本节研究另一种情况：$n < p < \infty$, 我们希望如果 $u \in W^{1,p}(U)$, 那么它是 Hölder 连续的.

定理 4.11 (Morrey's inequality,$n < p < \infty$)

$$||u||_{C^{0,\gamma}(U)} \le C||u||_{W^{1,p}(R^n)} \qquad \forall u \in C^1(R^n)$$

C 只与 n, p 有关, 且 $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$

定理 4.12 (拓展)

设 U 是有界集,∂U 是 C^1 的

$$||u^*||_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \leq C||u||_{W^{1,p}(R^n)} \quad u* = u \quad a.e. \quad \forall u \in C^1(R^n)$$

♡

4.8 General Sobolev inequality

定理 4.13 (General Sobolev inequalities)

设 U 是有界集,∂U 是 C^1 的, 设 $u \in W^{k,p}$

(1) 如果 $k < \frac{n}{p}$ 则

$$||u||_{L^q(U)} \leq C||u||_{W^{k,p}(U)}$$

其中 q 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$

(2) 如果 $k > \frac{n}{p}$, 令 $\alpha = \frac{n}{p}$

若 α 不是整数, 则 $u \in C^{k-[\alpha]-1,\gamma}(\overline{U}), \gamma = 1 - \{\alpha\}$

若 α 是整数, 则对任意 $\gamma \in (0,1)$ 都有 $u \in C^{k-[\alpha]-1,\gamma}(\overline{U})$

对上述 γ, 有

$$||u||_{C^{k-[\alpha]-1,\gamma}}(\overline{U}) \leq C||u||_{W^{k,p}(U)}$$

♡

这些不等式不仅研究 sobolev 空间, 也会在之后的微分方程中的应用起作用.

4.9 COMPACTNESS

Sobolev 不等式已经揭示了 $L^{p^*}(U)$ 与 $W^{1,p}(U)(1 \leq p < n)$ 之间的一些关系 $p^* = \frac{np}{n-p}$, 我们先给出紧嵌入 (compactly embedded) 的定义

定义 4.8 (紧嵌入)

设 X, Y 是 *Banach* 空间,$X \subset Y$. 如果

(1) 对任意 $u \in X$, 都有 $||u||_Y \leq C|u||_X$

(2) 任意 X 中的有界序列在 Y 中有收敛子列

则称 X 可以紧嵌入 Y, 记住 $X \subset\subset Y$

♣

我们的主要结果是:

定理 4.14 (Rellich-Kondrachov Compactness Theorem)

设 U 是有界开集,∂U 是 C^1 的, 设 $1 \leq p < n$. 则

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q$$

对任意的 $q \in [1, p^*)$

♡