Задание 1

Пункт 1

Запишем метод максимального правдоподобия. Обозначим реализацию случайной величины с параметрами p за $X = (x_1, \cdots, x_5)$
Мультиноминальная случайная величина описывается выражением
$P(v_p^{(1)} = x^{(1)}, \cdots, v_p^{(l)} = x^{(l)}) = \frac{m!}{x^{(1)}! \ldots x^{(l)}!} p_1^{x^{(1)}} \cdots p_l^{x^{(l)}}$, причем $\sum x^{(i)} = m$
Тогда можно записать функцию правдоподобия для случайной величины с параметрами p:
$L = \frac{(\sum x_i)!}{x_1! \ldots x_5!} p_1^{x_1} \ldots p_4^{x_4} (1 - p_1 - \cdots - p_4)^{x_5}$
Удобнее работать с суммой, поэтому возьмем логарифм от L:
(переобозначим отношение факториалов за s)
$\ln(L) = \ln(s) + \sum x_i \ln(p_i) + x_5 \ln(1 - p_1 - \cdots - p_4)$
Условия первого порядка для p_i:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{p_1} - \frac{x_5}{1-p_1-p_2-p_3-p_4} = 0 \\ \frac{x_2}{p_2} - \frac{x_5}{1-p_1-p_2-p_3-p_4} = 0 \\ \frac{x_3}{p_3} - \frac{x_5}{1-p_1-p_2-p_3-p_4} = 0 \\ \frac{x_4}{p_4} - \frac{x_5}{1-p_1-p_2-p_3-p_4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p_i = \frac{x_i}{\sum x_i}, i = 1..4$$

Аналогично для случайной величины с параметром q.
Приходим к задаче проверки гипотезы $H_0 : p = q$ против альтернативы с $H_1 : p \neq q$ с заданным уровнем значимости α_0.
Тест правдоподобия:
$\phi(X, Y) = 1|\{max_p[(x_1 + y_1)\ln(p_1) + (x_2 + y_2)\ln(p_2) + \cdots + (x_5 + y_5)\ln(1 - p_1 - \cdots -_4)]$
$-max_{p,q}[x_1 \ln(p_1) + \cdots + x_5 \ln(1 - p_1 - \cdots - p_4) + y_1 \ln(q_1) + \cdots + y_5 \ln(1 - q_1 - \cdots - q_5)] > t_\alpha\}$
Задачу максимизации выражений в [] скобках мы уже решили. Остается вычислить методом Монте-Карло порог t. Оцениваем вероятности по исходным данным. Генерируем достаточно большое число выборок с данным в условии распределением и вероятностями из оценки и для каждой пары вычисляем найденную выше тестовую статистику. Упорядочиваем эти величины и выбираем значение в индексе $N * \alpha_0$, где N - число экспериментов.

Пункт 2

См. скрипт main.py с реализацией численной проверки гипотезы. На заданном уровне значимости α принимаем нулевую гипотезу, так как знаение статистики $< t_\alpha$.

Задание 2

Пункт 1

Запишем формулу для плотности в параметрическом представлении p(u,v).
Полуэллипсоид

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = \sqrt{2}\sin(\theta)\cos(\phi) \\ z = \cos(\theta) \end{cases}$$

$\theta \in [0, \pi/2], \phi \in [0, 2\pi]$
Отображение $f : D \subset R^2 \to M \subset R^3$
$g(x) = J_f^T(f^{-1}(x))J_f(f^{-1}(x))$ J_f - матрица Якоби отображения f в точке b

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(\theta)\cos(\phi) & -\sqrt{3}\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sqrt{2}\cos(\theta)\sin(\phi) & \sqrt{2}\sin(\theta)\cos(\phi) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

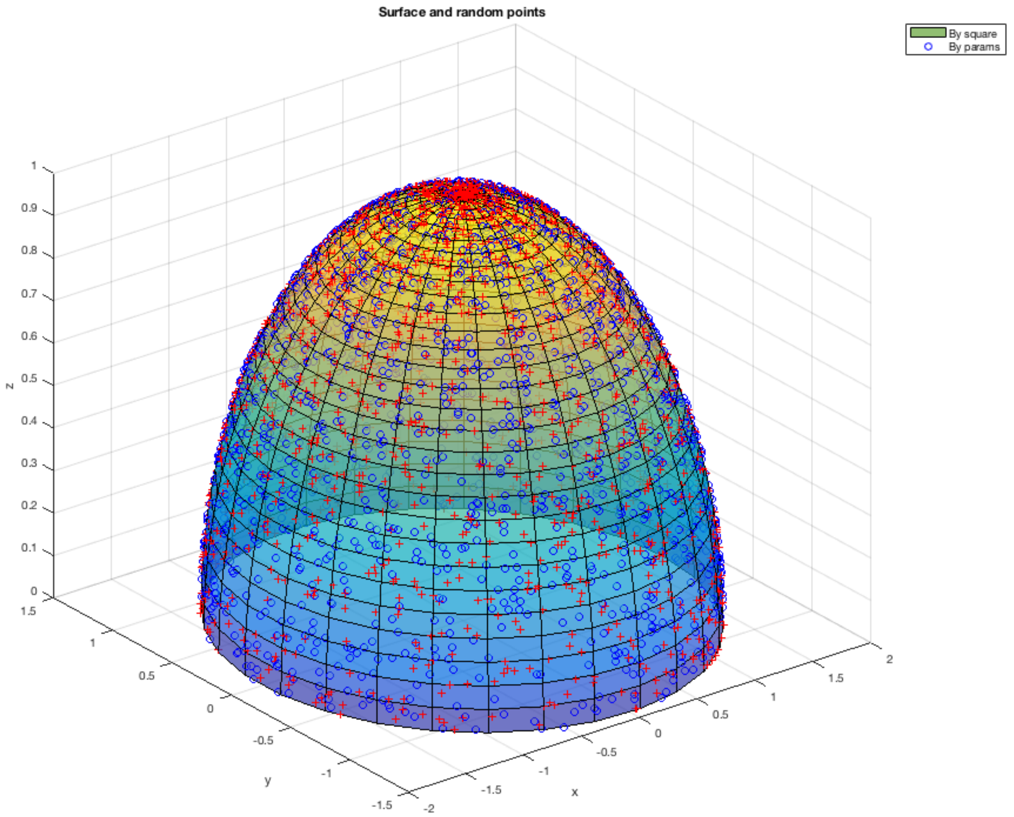
В результате

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 2\sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + 3\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & -\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\theta) & 3\sin^2(\phi)\sin^2(\theta) + 2\cos^2(\phi)\sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$b = (\theta, \phi)$
X$\sim$ $U[0, S] \Rightarrow p_x(f(b)) = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} |g(b)| d\phi d\theta} = \frac{1}{16.655}$,
где $|g(b)|$ - определитель матрицы g(b)
$p(\theta, \phi) = p_b(b) = p_x(f(b))\sqrt{|g(f^{-1}(b))|}$ - плотность распределения параметров
Знаем обе величины в формуле, подстановкой получаем искомое.

Пункт 2.1

Воспользуемся в качестве опорного распределения фукнцией $q(\theta, \phi) = const$ - равномерное распределение в пространстве параметров.
Алгоритм:
Выберем $q(\theta, \phi)$
$M > 1, \forall x \in X : p(x) \le Mq(x)$
Пока не успех
Генерируем $u \sim U[0, 1]$
Генерируем $\xi \sim q(x)$
Если $\frac{p(\xi)}{Mq(\xi)} \ge u$, то ξ искомое



Пункт 2.2 и 2.3

См. скрипт main.m с реализацией. В скрипте main происходят необходимые вычисления и функция plot_surface.m строит поверхность и точки на ней. Выше результат работы.