Aspectos Teóricos da Computação

Prof. Rodrigo Martins
rodrigo.martins@francomontoro.com.br

Cronograma da Aula

- Máquinas de Turing
- Exemplos
- Exercícios

Máquina de Turing

- É um dispositivo imaginário que formou a estrutura para fundamentar a ciência da computação moderna.

- Seu inventor, o matemático Alan Mathison Turing, mostrou que a computação das operações de leitura, escrita e exclusão de símbolos binários poderiam ser satisfeitas por uma máquina que continha uma fita de comprimento ilimitado, com quadrados de tamanho definido sobre ela e um dispositivo com um número finito de estados, que realizava as operações na fita.

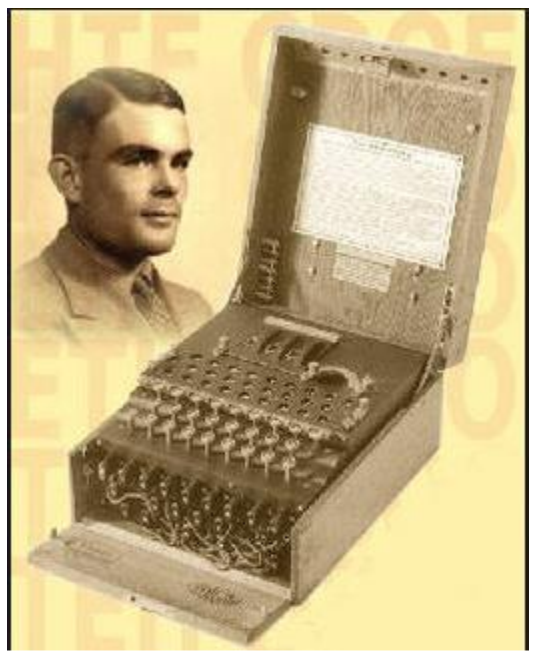
Máquina de Turing

- Em 1936 foi formalizado o termo **algoritmo**: um conjunto finito de instruções simples e precisas, que são descritas com um número finito de símbolos.

- “Qualquer processo aceito por nós homens como um **algoritmo** é precisamente o que uma máquina de Turing pode fazer” (Alonzo Church, matemático).

Máquina de Turing

- A máquina de Turing é um dispositivo teórico conhecido como **máquina universal**, que foi concebido pelo matemático britânico Alan Turing (1912-1954), muitos anos antes de existirem os modernos computadores digitais.



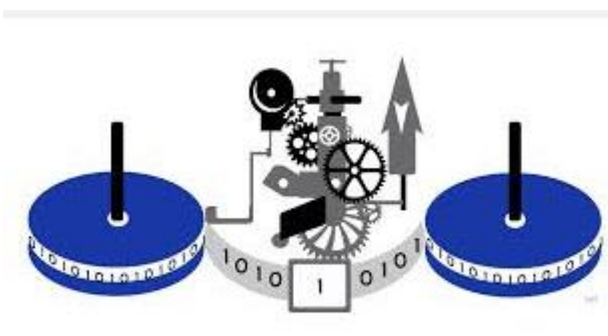
Máquina de Turing

Uma máquina de Turing consiste em:

1. Uma fita que é dividida em células, uma adjacente à outra. Cada célula contém um símbolo de algum alfabeto finito. O alfabeto contém um símbolo especial branco e um ou mais símbolos adicionais. Assume-se que a fita é arbitrariamente extensível para a esquerda e para a direita, isto é, a máquina de Turing possui tanta fita quanto é necessário para a computação. Assume-se também que células que ainda não foram escritas estão preenchidas com o símbolo branco.

Máquina de Turing

2. Um cabeçote, que pode ler e escrever símbolos na fita e mover-se para a esquerda e para a direita.
3. Um registrador de estados, que armazena o estado da máquina de Turing. O número de estados diferentes é sempre finito e há um estado especial denominado estado inicial com o qual o registrador de estado é inicializado.
4. Uma tabela de ação (ou função de transição) que diz à máquina que símbolo escrever, como mover o cabeçote (←para esquerda e → para direita) e qual será seu novo estado, dados o símbolo que ele acabou de ler na fita e o estado em que se encontra. Se não houver entrada alguma na tabela para a combinação atual de símbolo e estado então a máquina para.



Vídeo 1

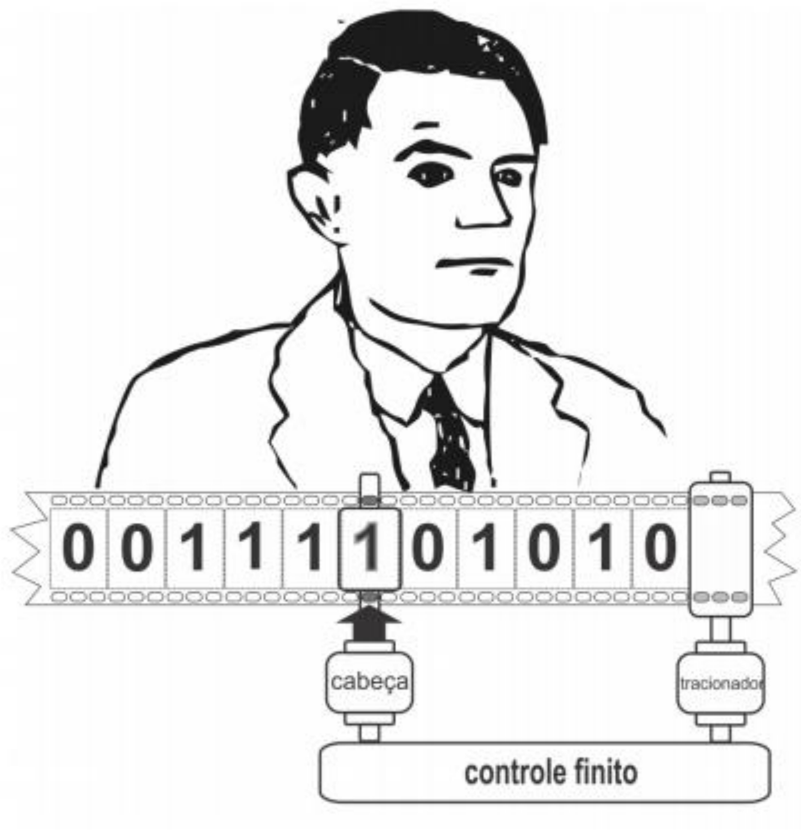
Vídeo 2

Máquina de Turing

- O conceito de máquina de Turing é semelhante ao de uma fórmula ou equação. Assim, há uma infinidade de possíveis máquinas de Turing, cada uma correspondendo a um método definido ou algoritmo. Turing propôs que cada algoritmo, formalizado como um conjunto finito de instruções bem definidas, pudesse ser interpretado e executado por um processo mecânico.

Máquina de Turing

- O que torna uma máquina de Turing capaz de executar uma tarefa é a tabela de regras de transição que compõem o programa da máquina e um determinado estado inicial. O conjunto de instruções conhecidas e processadas pelo módulo de controle finito.



Máquinas de Turing

- Semelhante a um **autômato finito** mas com uma memória ilimitada e irrestrita, uma **máquina de Turing** é um modelo muito mais preciso de um computador de propósito geral.

- Uma **máquina de Turing** pode fazer tudo o que um computador real pode fazer. Entretanto, mesmo uma máquina de Turing não pode resolver certos problemas.

- Num sentido muito real, esses problemas estão além dos limites teóricos da computação.

Máquinas de Turing

- O modelo da máquina de Turing usa uma fita infinita como sua memória ilimitada. Ela tem uma cabeça que pode ler e escrever símbolos e mover sobre a fita. Inicialmente a fita contém somente a cadeia de entrada e está em branco em todo o restante.

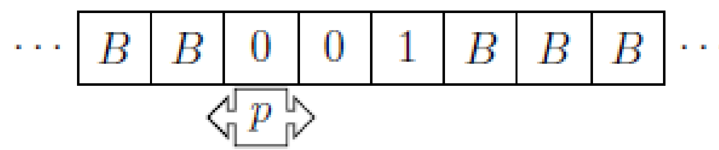
- Se a máquina precisa de armazenar informação, ela pode escrever essa informação sobre a fita. Para ler a informação que ela escreveu, a máquina pode mover sua cabeça de volta sobre a posição onde a informação foi escrita.

- A máquina continua a computar até que ela decide produzir uma saída. As saídas aceita e rejeita são obtidas pela entrada em estados de aceitação e de rejeição.

- Se ela não entrar em estado de aceitação ou de rejeição, ela continuará para sempre, nunca parando.

Máquinas de Turing

- Podemos ver a máquina de Turing como uma fita infinita e um controlador (cabeçote) que está em uma determinada posição da fita e registrando um dos finitos estados possíveis.



- A string de entrada é escrita na fita e o restante das posições contêm o símbolo B. O cabeçote está inicialmente na posição mais à esquerda que contém um símbolo da string de entrada.

- O movimento da máquina de Turing consiste em:
  - ir para o próximo estado;
  - escrever um símbolo na posição atual da fita;
  - mover o cabeçote para a esquerda ou para a direita.

Máquinas de Turing

- Uma máquina de Turing é uma 7-tupla:

$$M = (Q, \sum, \Gamma, \delta, q0, B, F), \text{ onde:}$$

  - Q é um conjunto finito de estados;
  - $\sum$ é o alfabeto de entrada que não contém o símbolo especial branco B.
  - Γ é o alfabeto da fita, onde $\sum$ é um subconjunto.
  - δ é uma função parcial δ : Q X $\Gamma \rightarrow$ Q X Γ X {L, R}, chamada de função de transição.
  - q0 é o estado inicial;
  - B é o símbolo que representa um branco.
  - F é o subconjunto de estados finais.

Máquinas de Turing

- Uma máquina de Turing $M = (Q, \sum, \Gamma, \delta, q0, B, F)$, computa da seguinte forma. Inicialmente M recebe sua entrada $w = w_1w_2...w_n \in \sum^*$ nas células mais a esquerda da fita, e o restante da fita é branco (preenchido com símbolos em branco).

- A cabeça começa na célula mais a esquerda da fita. Note que $\sum$ não contém o símbolo branco, portanto o símbolo branco aparecendo na fita marca o final da entrada. Uma vez que M começa, a computação prossegue conforme as regras descritas pela função de transição. Se M em algum momento tenta mover sua cabeça para a esquerda do final a esquerda da fita, a cabeça permanece no mesmo lugar para aquele movimento, muito embora a função de transição indique E.

- A computação continua até que ela entre nos estados de aceitação ou rejeição nos quais ela para. Se nenhum desses casos ocorre, M continua para sempre.

Máquinas de Turing

- A medida que uma máquina de Turing computa, mudanças ocorrem no estado atual, no conteúdo da fita, e na localização da cabeça. Uma combinação dessas três informações é chamada uma configuração da máquina de Turing.

- Configurações frequentemente são representadas de uma maneira especial. Para um estado q e duas u e v sobre o alfabeto da fita Γ escrevemos u q v para a configuração onde o estado atual é q, o conteúdo da fita uv e a localização atual da cabeça é o primeiro símbolo de v. A fita contém apenas brancos a partir do último símbolo de v.

- Por exemplo, $1011q_7 01111$ representa a configuração¸ quando a fita é 101101111, o estado atual é q_7 , e a cabeça está atualmente sobre o segundo 0.

Legado na Criptografia Moderna

1. Definição de: função unidirecional, função pseudoaleatória, indistinguibilidade.

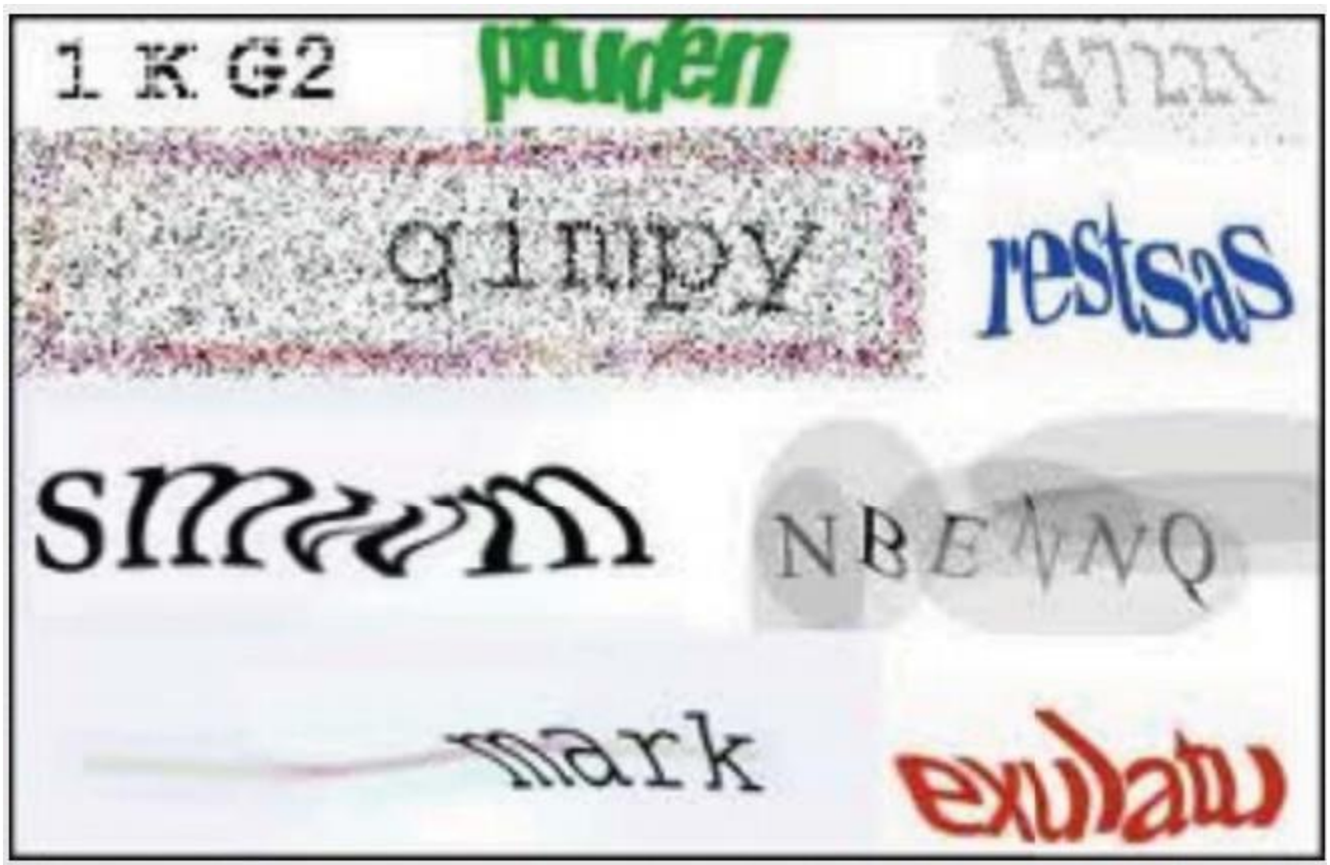
2. Definição da noção de experimento, permitindo a definição matemática de:
   sigilo computacional, resistência à colisão, inforjabilidade existencial.

3. Provas de segurança relativa (por redução)

Legado na Inteligência Artificial

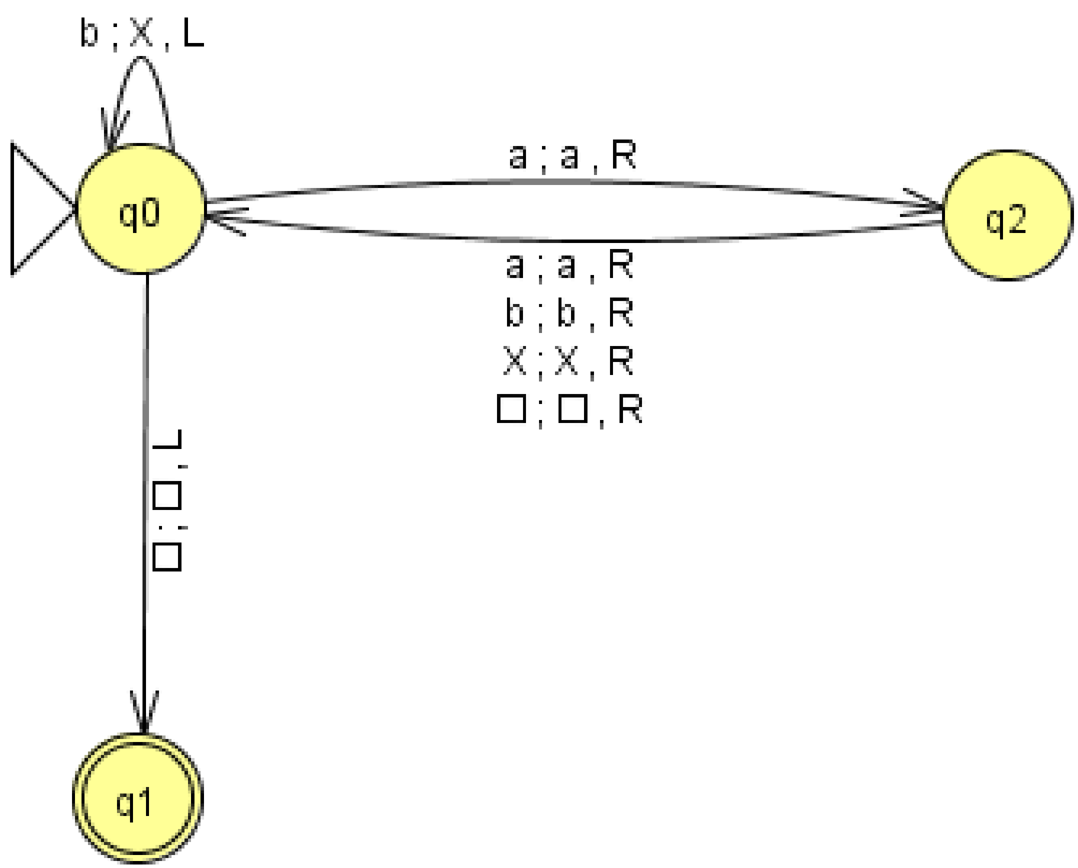
- Em 1950, Turing procura uma resposta científica à pergunta:
  - Máquinas podem pensar?
- Jogo da Imitação: humano conversando, por meio de terminal, com uma máquina e um humano, sem saber quem é a máquina, pretende distingui-los, podendo fazer qualquer tipo de pergunta a cada um deles, cuja resposta pode ou não ser verdadeira.

Teste de Turing Reverso



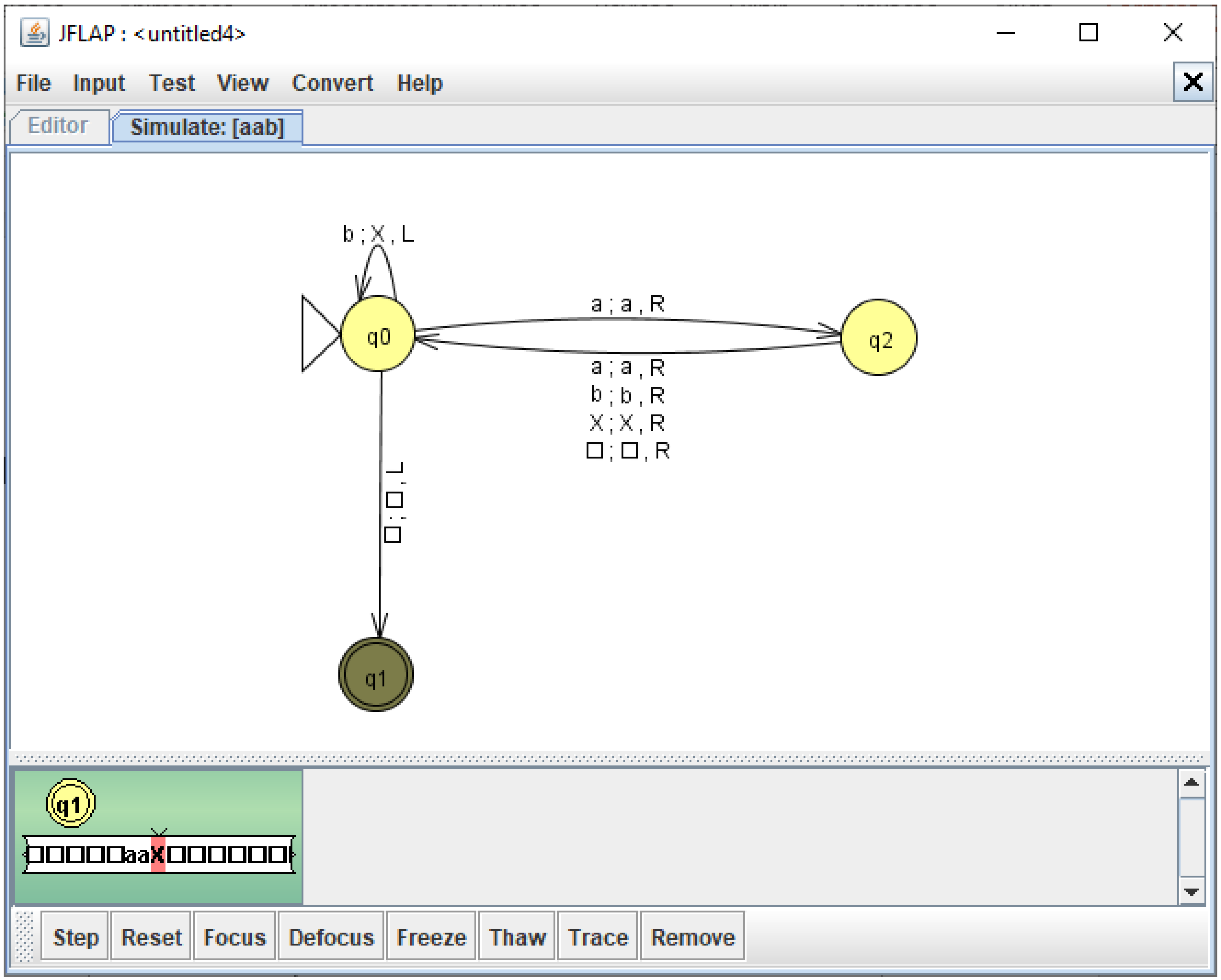
Máquinas de Turing

Exemplo 1: MT, que aceita palavras sobre o alfabeto {a,b}:



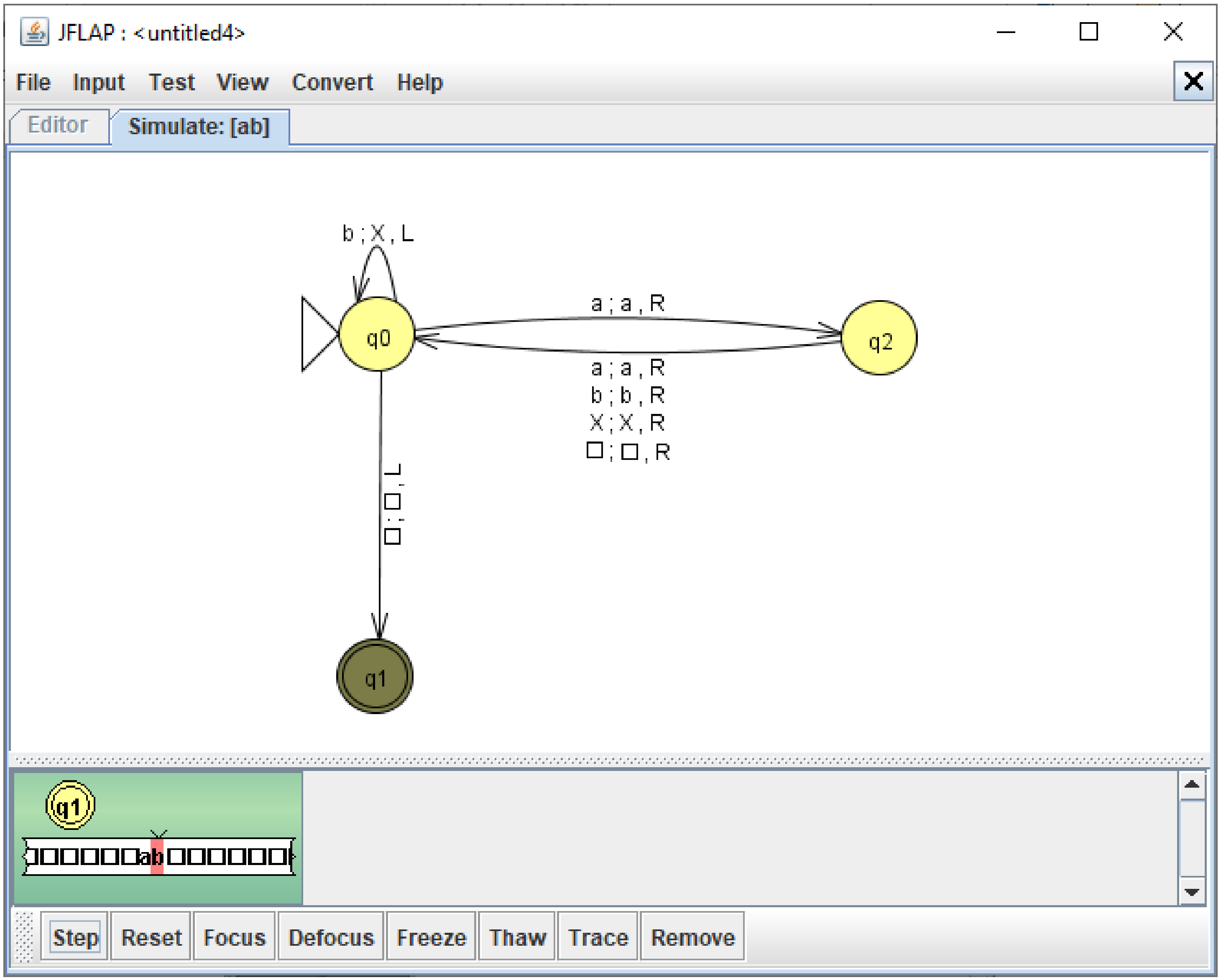
Máquinas de Turing

Exemplo 1: MT, que aceita palavras sobre o alfabeto {a,b}:



Máquinas de Turing

Exemplo 1: MT, que aceita palavras sobre o alfabeto {a,b}:



Máquinas de Turing

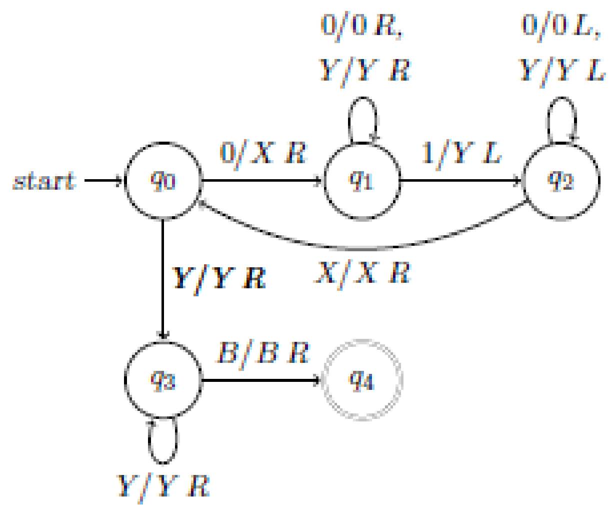
Exemplo 2:

Considere a máquina de Turing $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$ *com a função de transição* δ *definida abaixo.*

δ	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)			(q_3, Y, R)	
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)		(q_1, Y, R)	
q_2	$(q_2, 0, L)$		(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	
q_3				(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4					

Máquinas de Turing

Exemplo 2:



Dada a string 0011. *A computação da máquina será*

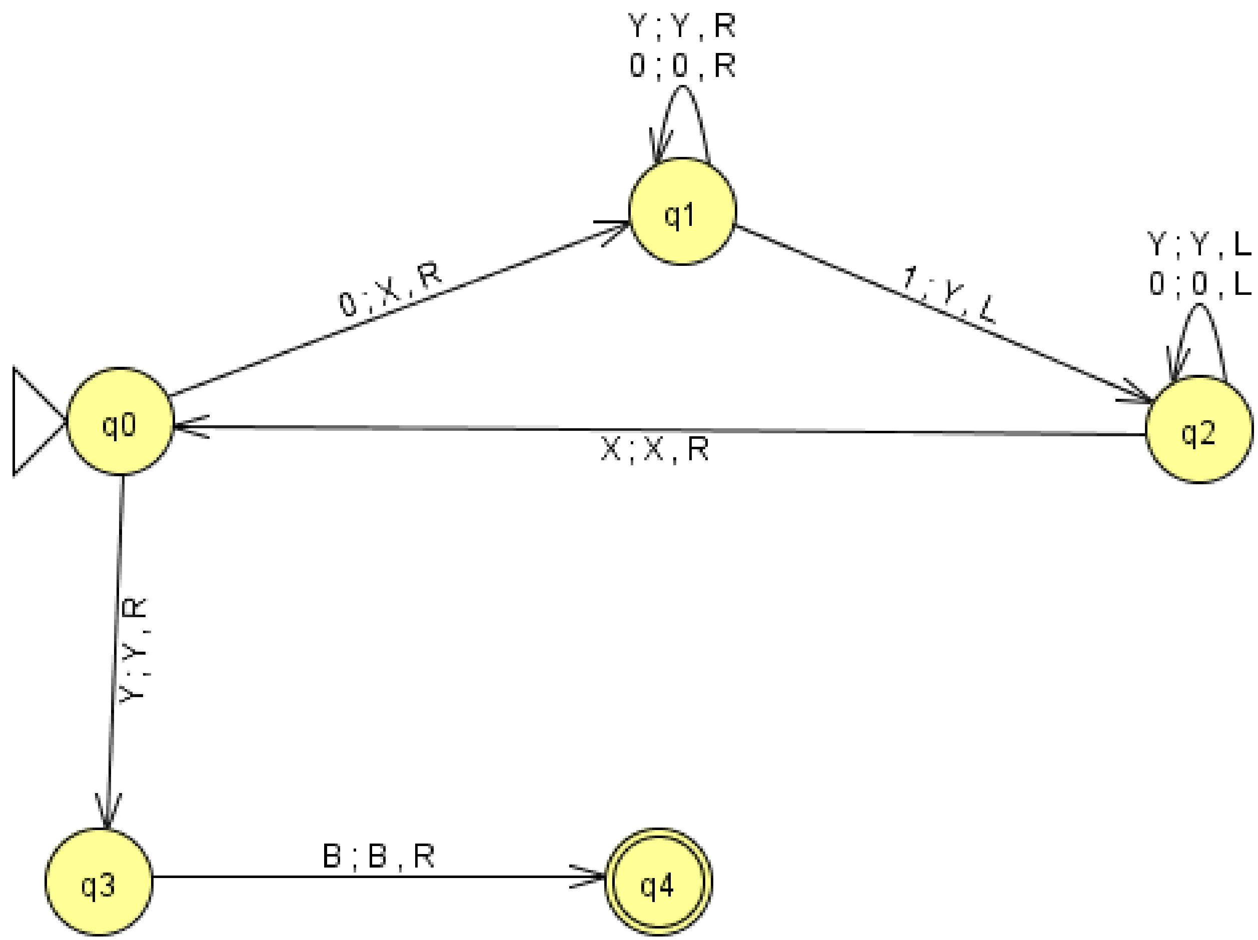
$$
\begin{aligned}
Bq_00011B &\vdash BXq_1011B \vdash BX0q_111B \vdash BXq_20Y1B \vdash Bq_2X0Y1B \\
&\vdash BXq_00Y1B \vdash BXXq_1Y1B \vdash BXXYq_11B \vdash BXXq_2YYB \\
&\vdash BXq_2XYYB \vdash BXXq_0YYB \vdash BXXYq_3YB \\
&\vdash BXXYYq_3B \vdash BXXYYBq_4B
\end{aligned}
$$

Dada a string 0010. *A computação da máquina será*

$$
\begin{aligned}
Bq_00010B &\vdash BXq_1010B \vdash BX0q_110B \vdash BXq_20Y0B \vdash Bq_2X0Y0B \\
&\vdash BXq_00Y0B \vdash BXXq_1Y0B \vdash BXXYq_10B \vdash BXXY0q_1B
\end{aligned}
$$

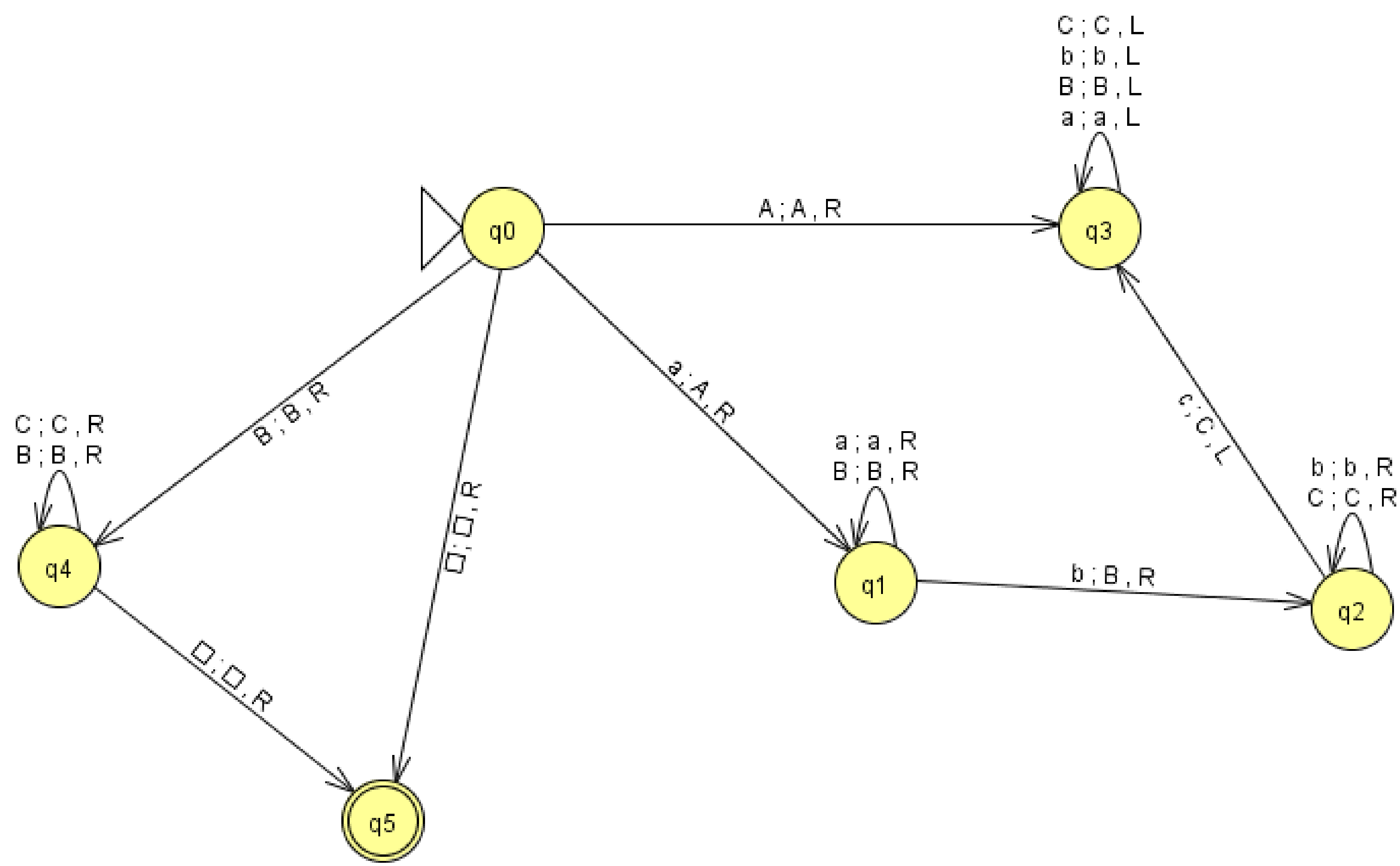
Máquinas de Turing

No JFlap



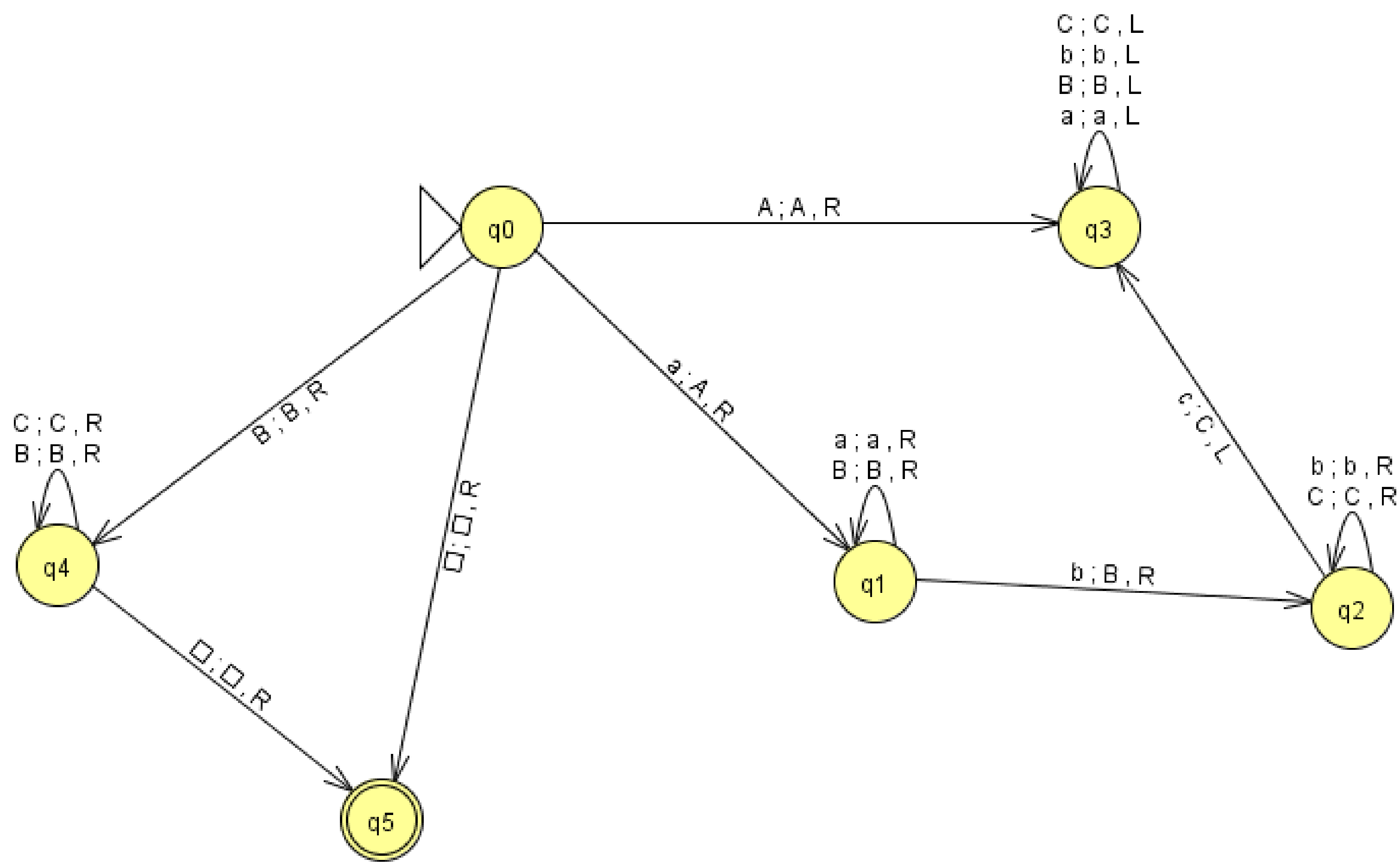
Máquinas de Turing

Exemplo 3:



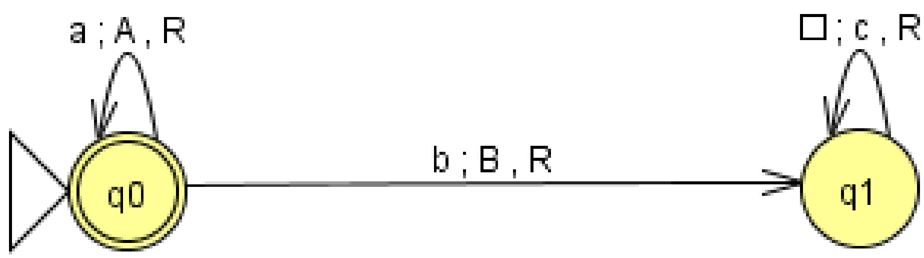
Exercício

1) Palavra abc é aceita? Palavra aabc é aceita? Palavra aabbc é aceita? Palavra BB é aceita?



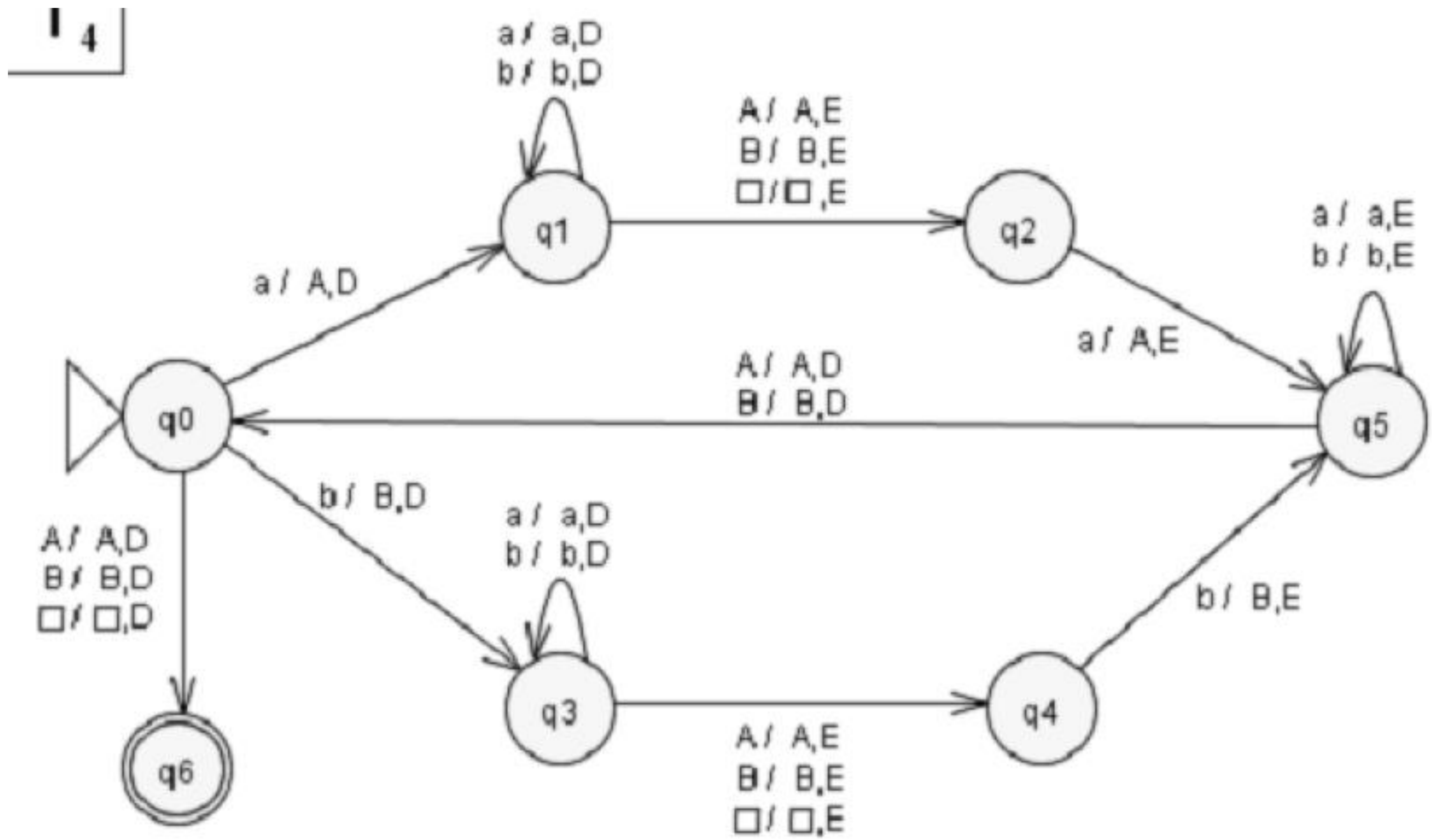
Exercício

2) Faça a tabela de transição da MT abaixo:



Exercício

3) Faça a MT no JFlap:



Exercício

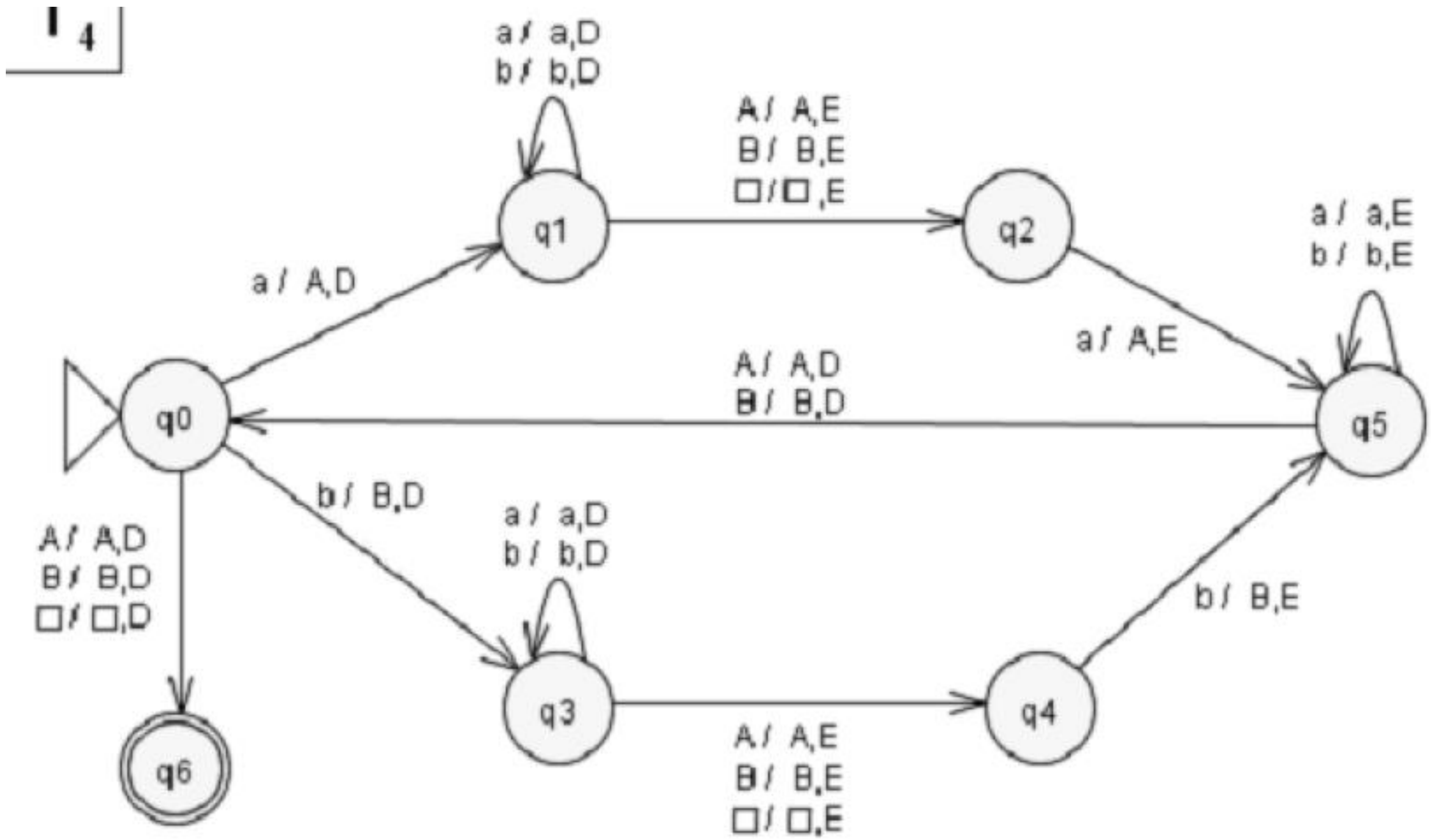
4) Mostre a computação de cada uma das seguintes cadeias e diga se cada cadeia é aceita:

a) aa

b) abba

c) aab

d) bb



Referências desta aula

- LEWIS, Harry R. & PAPADIMITRION, Christos H. - Elementos de Teoria da Computação. 2.ed. – Ed. Bookman, 2000.

- MENEZES, Paulo Blauth. - Linguagens formais e autômatos. 2.ed. – Ed. Sagra Luzzatto, 1998.

FIM

Obrigado

Rodrigo