RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DO MATERIAL BÁSICO DE ESTUDO

• LISTA DE EXERCÍCIOS – Operações com Vetores na Forma Algébrica [Analítica] no $\mathbb{R}^2$ [página 27]

5) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -3\vec{i}$, determine $\vec{t}$ de modo que: $3\vec{t} - (4\vec{u} - 2\vec{w}) = 5 \cdot \left(-\vec{t} + \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{w} \right)$

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, antes de substituir os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -3\vec{i}$ dados, vamos simplificar a expressão. Assim:

$3\vec{t} - (4\vec{u} - 2\vec{w}) = 5 \cdot \left(-\vec{t} + \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{w} \right)$ → Eliminando os parênteses:

$3\vec{t} - 4\vec{u} + 2\vec{w} = -5\vec{t} + \frac{5}{2}\vec{u} - \frac{15}{4}\vec{w}$ → Unindo os termos semelhantes:

$3\vec{t} + 5\vec{t} = 4\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{u} - \frac{15}{4}\vec{w} - 2\vec{w}$ → Realizando o m.m.c. no 2º membro da equação:

$8\vec{t} = \frac{16\vec{u} + 10\vec{u} - 15\vec{w} - 8\vec{w}}{4}$ → Reunindo os termos semelhantes:

$8\vec{t} = \frac{26\vec{u} - 23\vec{w}}{4}$ → Isolando o vetor $\vec{t}$:

$\vec{t} = \frac{26\vec{u} - 23\vec{w}}{32}$ → Agora, substituindo os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{w} = (-3, 0)$:

$\vec{t} = \frac{26(2, -1) - 23(-3, 0)}{32}$ → Multiplicando os vetores pelos respectivos escalares:

$\vec{t} = \frac{(52, -26) - (-69, 0)}{32}$ → Subtraindo os vetores e "ajustando" a expressão:

$\vec{t} = \frac{(121, -26)}{32} = \frac{1}{32} \cdot (121, -26)$ → Multiplicando o escalar pelo vetor:

$\vec{t} = \left(\frac{121}{32}, -\frac{26}{32} \right)$ → Simplificando a coordenada "y":

$\vec{t} = \left(\frac{121}{32}, -\frac{13}{16} \right)$ → Temos o vetor $\vec{t}$ procurado!

6) Determine algebricamente o vetor resultante nos casos a seguir e, ao final, represente-o graficamente:

a) RESOLUÇÃO:

Observando o gráfico **dado no exercício**, temos que: $\vec{u} = (0, 3)$, $\vec{v} = (4, -1)$, $\vec{t} = (0, -2)$ e $\vec{w} = (-3, -2)$.

E o vetor resultante procurado, que chamaremos de $\vec{R}$,

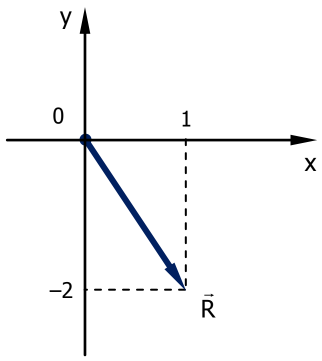
é dado por: $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{t} + \vec{w}$. Assim:

$\vec{R} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{t} + \vec{w}$

$\vec{R} = (0, 3) + (4, -1) + (0, -2) + (-3, -2)$

$\vec{R} = (1, -2)$

A representação gráfica de $\vec{R}$ está apresentada ao lado.



• LISTA DE EXERCÍCIOS – Paralelismo [ou Colinearidade] de Vetores [página 35]

2) Dado o vetor $\vec{w}$ = (3, 2, 5), determinar "a" e "b" de modo que os vetores $\vec{u}$ = (3, 2, –1) e $\vec{v}$ = (a, 6, b)+2$\vec{w}$ sejam paralelos.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, vamos calcular o vetor $\vec{v}$.

$$\vec{v}=(a,6,b)+2\vec{w} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}=(a,6,b)+2.(3,2,5) \quad\Rightarrow\quad \vec{v}=(a,6,b)+(6,4,10) \quad\Rightarrow\quad \vec{v}=(a+6,10,b+10)$$

Agora, como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ devem ser paralelos, aplicamos a condição de paralelismo:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=n \quad\Rightarrow\quad \frac{a+6}{3}=\frac{10}{2}=\frac{b+10}{-1}$$

Observe que: $n=5$

Resolvendo a expressão separadamente, temos:

$$\frac{a+6}{3}=\frac{10}{2}$$
$$2a+12=30$$
$$2a=18$$
$$\boxed{a=9}$$

$$\frac{10}{2}=\frac{b+10}{-1}$$
$$2b+20=-10$$
$$2b=-30$$
$$\boxed{b=-15}$$

→ Que são os valores procurados!

• LISTA DE EXERCÍCIOS – Cálculo do Módulo de um Vetor + Vetor Unitário [página 39]

6) Calcule a distância do ponto T(–12, 9) à origem.

RESOLUÇÃO:

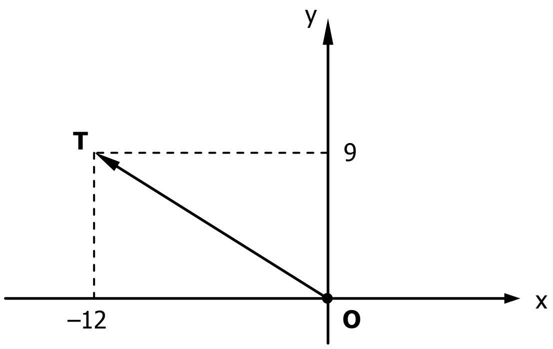
O problema solicita o cálculo da distância do ponto $T(-12,9)$ até a origem $O(0,0)$.
Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos no R^2, teremos:

$$d_{TO}=\sqrt{(x_T-x_O)^2+(y_T-y_O)^2}$$
$$d_{TO}=\sqrt{(-12-0)^2+(9-0)^2}$$
$$d_{TO}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}$$
$$d_{TO}=15\,\text{uc}$$

Observe na representação abaixo, que a distância do ponto $T(-12,9)$ até a origem $O(0,0)$ é, na verdade, o módulo do vetor posição $\overrightarrow{OT}$. Então poderíamos calcular diretamente, considerando o vetor posição $\overrightarrow{OT}=(-12,9)$.

Assim:

$$|\overrightarrow{OT}|=\sqrt{(-12)^2+(9)^2}$$
$$|\overrightarrow{OT}|=\sqrt{144+81}$$
$$|\overrightarrow{OT}|=15 \quad\therefore\quad d_{TO}=15\,\text{uc}$$



9) Dados os pontos A(3 , m – 1, – 4) e B(8 , 2m – 1, m), determinar "m" de modo que $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$ **.**

RESOLUÇÃO:

Inicialmente vamos definir o vetor $\overrightarrow{AB}$. Então: $\overrightarrow{AB} = B - A = (8,\, 2m-1,\, m) - (3,\, m-1, -4) = (5,\, m,\, m+4)$

Como $\overrightarrow{AB} = (5,\, m,\, m+4)$ e $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$, aplicando a fórmula do módulo de um vetor, teremos:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{35} = \sqrt{(5)^2 + (m)^2 + (m+4)^2}$

Desenvolvendo os quadrados... $\sqrt{35} = \sqrt{25 + m^2 + m^2 + 8m + 16}$

Elevando ambos os membros ao quadrado.... $\left(\sqrt{35}\right)^2 = \left(\sqrt{2m^2 + 8m + 41}\right)^2$

$35 = 2m^2 + 8m + 41$

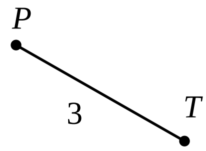
Organizando a equação do 2º grau... $2m^2 + 8m + 6 = 0 \quad (\div 2) \quad \Rightarrow \quad m^2 + 4m + 3 = 0$

Resolvendo-a, teremos: $m' = -3$ e $m'' = -1$.

Logo, os valores procurados para m formam o conjunto solução $S = \{-3, -1\}$.

11) Obter um ponto P, do eixo das cotas, cuja distância ao ponto T(–1, 2, –2) seja igual a 3.

RESOLUÇÃO:



Este exercício tem **duas maneiras** diferentes para ser resolvido, embora utilizem o mesmo raciocínio.

1ª MANEIRA: Se um ponto P pertence ao eixo da cotas (eixo "z") então ele tem a forma: $P(0, 0, z)$

Temos então que: $d_{PT} = 3$, conforme o enunciado da questão.

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, teremos: $d_{PT} = \sqrt{(x_P - x_T)^2 + (y_P - y_T)^2 + (z_P - z_T)^2}$

Então, substituindo os valores... $3 = \sqrt{(0+1)^2 + (0-2)^2 + (z+2)^2}$

Desenvolvendo os quadrados... $3 = \sqrt{1 + 4 + z^2 + 4z + 4}$ (*)

Elevando ambos os membros ao quadrado... $(3)^2 = \left(\sqrt{z^2 + 4z + 9}\right)^2$

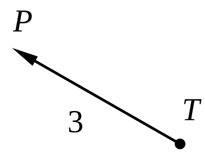
$9 = z^2 + 4z + 9 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 4z = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos: $z' = 0$ e $z'' = -4$

Logo, o ponto P poderá ser: $P(0, 0, 0)$ ou $P(0, 0, -4)$.

2ª MANEIRA: Se um ponto P pertence ao eixo da cotas (eixo "z") então ele tem a forma: $P(0, 0, z)$

Podemos considerar então o vetor $\overrightarrow{TP}$, entre os pontos dados, que escreveremos:



$$\overrightarrow{TP} = P - T = (0, 0, z) - (-1, 2, -2) = (1, -2, z-2)$$

A distância entre os pontos T e P também é o módulo do vetor $\overrightarrow{TP}$, ou seja, $d_{PT} = |\overrightarrow{TP}| = 3$.

Aplicando a fórmula do módulo de um vetor, temos: $|\overrightarrow{TP}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (z-2)^2}$

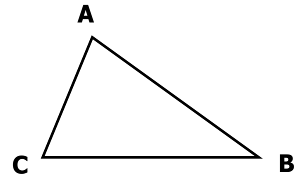
$3 = \sqrt{1 + 4 + z^2 + 4z + 4}$

E aí segue que a resolução é idêntica à anterior partindo da equação (*) – veja acima.

[Exercício Resolvido Bônus] Prove que o triângulo cujos vértices são os pontos A(0, 5), B(3, −2) e C(−3, −2) é isósceles; e calcule o seu perímetro.

RESOLUÇÃO:

Primeiramente, queremos provar que o triângulo ABC (veja o "esquema" ao lado) é isósceles.



Podemos então considerar os vetores sobre seus lados:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$.

Note que, inicialmente, não sabemos quais os lados do triângulo têm o mesmo comprimento, e também não estamos preocupados com a posição desse triângulo no sistema de coordenadas cartesianas.

Assim, o triângulo [acima] do nosso esquema de raciocínio é genérico!

Então:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,-2) - (0,5) \Rightarrow \vec{u} = (3,-7)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-3,-2) - (3,-2) \Rightarrow \vec{v} = (-6,0)$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{CA} = A - C = (0,5) - (-3,-2) \Rightarrow \vec{w} = (3,7)$$

Calculando as distâncias através dos módulos dos vetores, temos:

$$d_{AB} = |\vec{u}| = \sqrt{(3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$
$$d_{BC} = |\vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + (0)^2} = \sqrt{36+0} = 6$$
$$d_{CA} = |\vec{w}| = \sqrt{(3)^2 + (7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

Como $d_{AB} = d_{CA} \neq d_{BC}$ temos que o triângulo ABC é isósceles [como queríamos provar].

Agora, o seu perímetro $(2p)$ é:

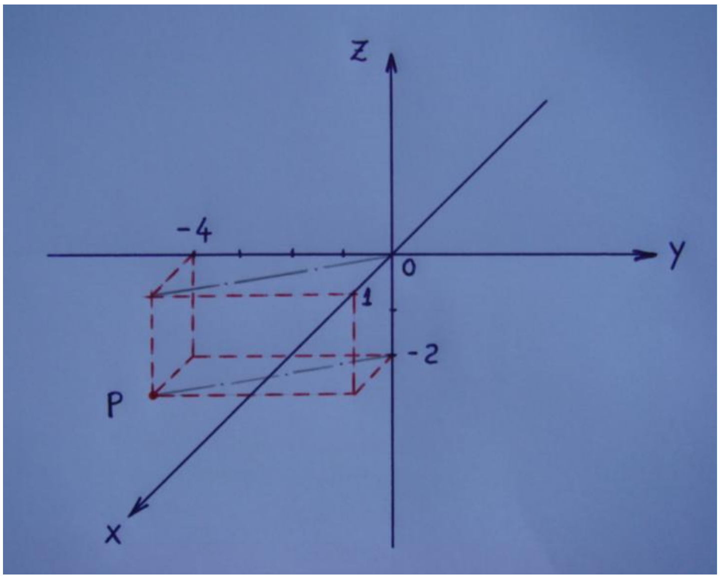
$$2p = d_{AB} + d_{BC} + d_{CA} = \sqrt{58} + 6 + \sqrt{58} \Rightarrow 2p = 6 + 2\sqrt{58}\, uc$$

16) Determine as distâncias do ponto P(1, – 4, −2) aos eixos coordenados x, y e z, representando "P" no $\mathbb{R}^3$.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente representaremos o ponto "P" no $\mathbb{R}^3$.

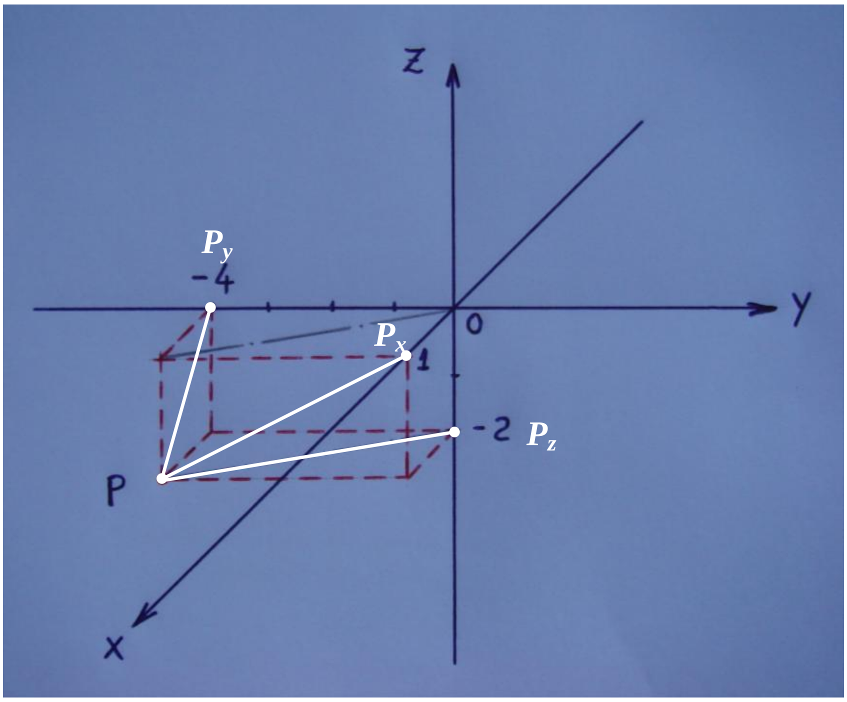
Veja:



Para determinarmos as distâncias solicitadas no exercício em questão, poderíamos utilizar uma relação [no $\mathbb{R}^3$] que calcule a distância entre um ponto "P" e uma reta qualquer (que neste caso seria um dos eixos coordenados x, y ou z). Entretanto, neste momento, ainda não conhecemos tal relação. Todavia temos que:

A distância do ponto P ao eixo x será a distância do ponto $P(1,-4,-2)$ ao ponto $P_x(1,0,0)$.
A distância do ponto P ao eixo y será a distância do ponto $P(1,-4,-2)$ ao ponto $P_y(0,-4,0)$.
A distância do ponto P ao eixo z será a distância do ponto $P(1,-4,-2)$ ao ponto $P_z(0,0,-2)$.

Veja na figura a seguir!



Desta forma, teremos os vetores:

$$\overrightarrow{PP_x} = P_x - P = (1, 0, 0) - (1, -4, -2)$$
$$\overrightarrow{PP_x} = (0, 4, 2)$$

$$\overrightarrow{PP_y} = P_y - P = (0, -4, 0) - (1, -4, -2)$$
$$\overrightarrow{PP_y} = (-1, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{PP_z} = P_z - P = (0, 0, -2) - (1, -4, -2)$$
$$\overrightarrow{PP_z} = (-1, 4, 0)$$

Calculando as distâncias através dos módulos dos vetores, temos:

$$d_{P\,ao\,eixo\,x} = |\overrightarrow{PP_x}| = \sqrt{(0)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20} \quad \therefore \quad d_{P\,ao\,eixo\,x} = 2\sqrt{5}\,uc$$

$$d_{P\,ao\,eixo\,y} = |\overrightarrow{PP_y}| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5} \quad \therefore \quad d_{P\,ao\,eixo\,y} = \sqrt{5}\,uc$$

$$d_{P\,ao\,eixo\,z} = |\overrightarrow{PP_z}| = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (0)^2} = \sqrt{1+16+0} = \sqrt{17} \quad \therefore \quad d_{P\,ao\,eixo\,z} = \sqrt{17}\,uc$$

PS: uma "boa" observação no $\mathbb{R}^3$ permite verificar os valores diretamente através do "Teorema de Pitágoras".

• LISTA DE EXERCÍCIOS – Versor de um Vetor [página 42]

2) Determinar o valor de "a" para que $\vec{u}$ = (a, –2a, 2a) seja um versor.

RESOLUÇÃO:

Para que um vetor qualquer seja um VERSOR, ele deverá inicialmente ser unitário, ou seja, ter módulo 1.

Se o vetor $\vec{u} = (a, -2a, a)$ é um VERSOR, então ele deverá ser **unitário**.

Assim, aplicando a fórmula do módulo de um vetor unitário, teremos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad (a)^2 + (-2a)^2 + (2a)^2 = 1$$
$$a^2 + 4a^2 + 4a^2 = 1$$
$$9a^2 = 1$$
$$a^2 = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \pm\frac{1}{3}}$$

3) Dados os pontos A(1 , 2 , 3), B(–6 , –2 , 3) e C(1 , 2 , 1), determinar o versor do vetor $\vec{w}$, tal que $\vec{w} = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

RESOLUÇÃO:

Precisamos definir o vetor $\vec{w}$. Para isso, escreveremos inicialmente os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Assim:

$\overrightarrow{BA} = A - B = (1,2,3) - (-6,-2,3) = (7,4,0)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (1,2,1) - (-6,-2,3) = (7,4,-2)$

Agora, calcularemos o vetor $\vec{w}$, pois:

$$\vec{w} = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$$
$$\vec{w} = 3.(7,4,0) - 2.(7,4,-2)$$
$$\vec{w} = (21,12,0) - (14,8,-4)$$
$$\vec{w} = (7,4,4)$$

O exercício solicita determinar o VERSOR de $\vec{w}$. Então, aplicando a fórmula do VERSOR de um vetor, teremos:

$$vers\,\vec{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{(7)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9$$

$$vers\,\vec{w} = \frac{(7,4,4)}{9}$$

$$vers\,\vec{w} = \left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$$ $\rightarrow$ Que é a resposta procurada!

5) Determinar o vetor de módulo 5, paralelo ao vetor $\vec{v}$ = (1, –1, 2).

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, vamos calcular o módulo do vetor dado $\vec{v}$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{1+1+4} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{6}$$

Agora, calcularemos o seu VERSOR, que é unitário (tem módulo 1), que tem mesma direção (paralelo) e mesmo sentido.

$$vers\,\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \Rightarrow \quad vers\,\vec{v} = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad vers\,\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Como queremos um vetor de módulo 5, multiplicamos o $vers\,\vec{v}$ por (5) e teremos o vetor pedido que chamaremos de $\vec{t}$.

$$\vec{t} = 5.vers\,\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{t} = 5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{t} = \left(\frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{-5}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{6}}\right)$$

Entretanto, como o sentido do vetor procurado $\vec{t}$ não foi definido no problema, poderíamos ter multiplicado o $vers\,\vec{v}$ por (–5), e assim teríamos um outro vetor que também satisfaz as condições dadas. Então:

$$\vec{t} = -5.vers\,\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{t} = \left(\frac{-5}{\sqrt{6}}, \frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{-10}{\sqrt{6}}\right)$$

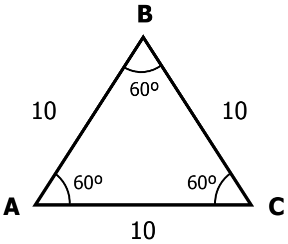
Portanto, os 2 vetores possíveis são: $\vec{t} = \left(\pm\frac{5}{\sqrt{6}}, \mp\frac{5}{\sqrt{6}}, \pm\frac{10}{\sqrt{6}}\right)$

• LISTA DE EXERCÍCIOS – Produto Escalar [página 50]

4) Os pontos A , B e C são vértices de um triângulo equilátero com lado de 10 cm. Calcule o produto escalar entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

RESOLUÇÃO:

Observando o esquema ao lado, podemos escrever:



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos\theta$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10.10.\cos 60^{\circ}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 100.(1/2)$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 50$$ $\rightarrow$ Que é a resposta procurada!

6) Calcular "n" para que seja de 30º o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ = (1, n, 2) e $\vec{j}$.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente vamos calcular o módulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{j}$. Então:

$$|\vec{u}|=\sqrt{(1)^2+(n)^2+(2)^2}$$
$$|\vec{u}|=\sqrt{1+n^2+4}$$
$$|\vec{u}|=\sqrt{n^2+5}$$

$$|\vec{j}|=\sqrt{(0)^2+(1)^2+(0)^2}$$
$$|\vec{j}|=\sqrt{(0)^2+(1)^2+(0)^2}$$
$$|\vec{j}|=\sqrt{0+1+0}=\sqrt{1}$$
$$|\vec{j}|=1$$

Obs.: Vale lembrar que o vetor $\vec{j}$ é o VERSOR do eixo y e, portanto é fato que $\vec{j}=(0,1,0)$ e $|\vec{j}|=1$, tornando o cálculo do seu módulo (ao lado) desnecessário.

Agora, calcularemos o produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{j}$. Então:

$$\vec{u}\cdot\vec{j}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$
$$\vec{u}\cdot\vec{j}=1.(0)+n.(1)+2.(0)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{j}=0+n+0$$
$$\vec{u}\cdot\vec{j}=n$$

Como sabemos (pelo enunciado) que o ângulo θ entre os vetores dados é de 30º, aplicamos os valores encontrados anteriormente na definição geométrica do produto escalar. Assim:

$$\vec{u}\cdot\vec{j} = |\vec{u}|.|\vec{j}|.\cos\theta$$

$$n = \sqrt{n^2+5}\,.(1).\cos 30^\circ$$

$$n = \sqrt{n^2+5}\,.\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad n = \frac{\sqrt{3n^2+15}}{2} \quad\Rightarrow\quad 2n = \sqrt{3n^2+15} \quad\Rightarrow\quad (2n)^2 = \left(\sqrt{3n^2+15}\right)^2$$

$$4n^2 = 3n^2+15 \quad\Rightarrow\quad n^2=15 \quad\Rightarrow\quad \boxed{n=\pm\sqrt{15}}$$ $\rightarrow$ Que é a resposta procurada!

7) Dados os vetores $\vec{a}$ = (2, 1, m), $\vec{b}$ = (m+2, –5, 2) e $\vec{c}$ = (2m, 8, m), determinar o valor de "m" para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente vamos calcular os vetores $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{c}-\vec{a}$. Então:

$$\vec{a}+\vec{b}=(2,1,m)+(m+2,-5,2)=(m+4,-4,m+2)$$
$$\vec{c}-\vec{a}=(2m\,,8\,,m)-(2,\,1,m)=(2m-2\;,\;7,0)$$

Agora, para que dois vetores sejam ortogonais, o produto escalar entre eles deve ser ZERO.
Conforme o enunciado $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{c}-\vec{a})$, então $[\vec{a}+\vec{b}]\cdot[\vec{c}-\vec{a}]=0$.
Aplicando a definição algébrica do produto escalar, teremos:

$$[\vec{a}+\vec{b}]\cdot[\vec{c}-\vec{a}] = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Substituindo os valores... $0=(m+4).(2m-2)+(-4).(7)+(m+2).(0)$

Efetuando as multiplicações... $0=2m^2-2m+8m-8-28+0$

Organizando... $0=2m^2+6m-36 \qquad (\div 2)$

$$m^2+3m-18=0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, teremos: $m'=3$ e $m''=-6$.

Logo, os valores procurados para m formam o conjunto solução $S=\{-6,3\}$.

9) Sabendo que o ângulo entre dois vetores $\vec{u} = (2,\ 1,\ -1)$ e $\vec{v} = (1, -1,\ m+2)$ é $\pi/3$, determinar "m".

$\boxed{9}$ $\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = (1, -1, m+2)\end{array}\right\}$ $\theta = \pi/3 \rightarrow \theta = 60^\circ$ $\quad m = ?$

$$* \ |\vec{u}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$* \ |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (m+2)^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+1+m^2+4m+4}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{m^2+4m+6}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{2.1 + 1.(-1) + (-1)(m+2)}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+4m+6}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\cancel{2} - 1 - m - \cancel{2}}{\sqrt{6m^2+24m+36}}$$

$$\left(\sqrt{6m^2+24m+36}\right)^2 = (-2-2m)^2$$

$$6m^2 + 24m + 36 = 4 + 8m + 4m^2$$

$$2m^2 + 16m + 32 = 0 \qquad (\div 2)$$

$$m^2 + 8m + 16 = 0$$

$$m' = m'' = -4$$

$$S = \{-4\}$$

To1000!

11) Qual o valor de "m" para que os vetores $\vec{a} = m\,\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (m+1)\,\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais?

$\boxed{11}$ $m = ?$ $\quad \left.\begin{array}{l}\vec{a} = m\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{b} = (m+1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}\end{array}\right\}$ $\vec{a} \perp \vec{b}$

Se $\vec{a} \perp \vec{b}$, então: $\vec{a}.\vec{b} = 0$. Assim:

$$\vec{a}.\vec{b} = m.(m+1) + 5.(2) + (-4).(4)$$

$$0 = m^2 + m + 10 - 16$$

$$m^2 + m - 6 = 0$$

$$\begin{cases} m' = 2 \\ m'' = -3 \end{cases}$$

$$S = \{-3, 2\}$$

13) Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

$\boxed{13}$ $\vec{w} = (x, y, z)$ [?] $\vec{w} \perp \vec{v} = (2, -1, 1)$

$|\vec{w}| = 1$

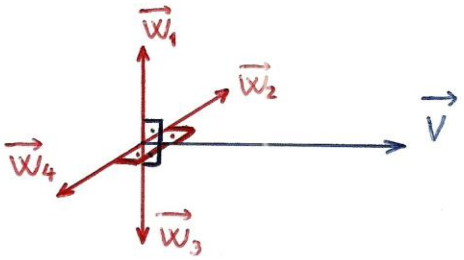
$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$ $*$

$x_1 x_2 + y_1 . y_2 + z_1 . z_2 = \vec{w} . \vec{v}$

$x(2) + y.(-1) + z.(1) = 0$

$**$ $\boxed{2x - y + z = 0}$

(2 equações e 3 incógnitas)
Existem infinitas soluções.
Veja 4 delas no esquema ao lado.



Escolheremos $x = 0$, pois $\vec{w}$ é unitário!
Assim:

$* \; 0^2 + y^2 + z^2 = 1$ $** \; \cancel{2(0)} - y + z = 0$

$0 + y^2 + y^2 = 1$ $-y + z = 0$

$z = y$

$2y^2 = 1$

$y^2 = \frac{1}{2}$

$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Encontramos 2 vetores que satisfazem o problema (dentre os infinitos existentes).

To1000!

Logo, um deles é $\vec{w} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ [para $x = 0$]

15) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $\vec{v}\cdot\vec{w} = 6$ e que $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

$\boxed{15}$ $\vec{v} = (x, y, z)$ [?]

$\vec{w} = (0, 2, 3)$

$|\vec{v}| = 5$

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5$

$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = (5)^2$

$x^2 + 3^2 + 0^2 = 25$

$x^2 + 9 = 25$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

$\vec{v} \perp Oz$

$(x, y, 0)$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 6$

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 6$

$\cancel{x\cdot(0)} + y\cdot(2) + z\cdot(3) = 6$

$2y + 3z = 6$

$2y + \cancel{3\cdot(0)} = 6$

$2y = 6$

$y = 3$

* Dois vetores satisfazem o problema!

São eles: $\boxed{\vec{v} = (4, 3, 0) \text{ ou } \vec{v} = (-4, 3, 0)}$

19) Dados os vetores $\vec{u} = (1,\ a, -2a-1)$, $\vec{v} = (a,\ a-1,\ 1)$ e $\vec{w} = (a, -1,\ 1)$, determine o valor de "a" de maneira que $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$.

$\boxed{19}$ $a = ?$ $\longrightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$

$\vec{u}+\vec{v} = (1+a,\ 2a-1,\ -2a)$

$\vec{u} = (1,\ a,\ -2a-1)$

$\vec{v} = (a,\ a-1,\ 1)$

$\vec{w} = (a,\ -1,\ 1)$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (1+a)\cdot a + (2a-1)\cdot(-1) + (-2a)\cdot(1)$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = a + a^2 - 2a + 1 - 2a$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = a^2 - 3a + 1$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1)\cdot(a) + a\cdot(a-1) + (-2a-1)\cdot(1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cancel{a} + a^2 - \cancel{a} - 2a - 1$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = a^2 - 2a - 1$

Assim: $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$

$\cancel{a^2} - 2a - 1 = \cancel{a^2} - 3a + 1 \longrightarrow \boxed{a = 2}$

To1000!

17) Na torre da figura ao lado [veja a figura no Material Básico de Estudo], determine o ângulo formado entre os cabos AB e AC, e o ângulo agudo que o cabo AD forma com a linha vertical.

17 Observando a figura, teremos os pontos:

$O(0, 0, 0)$

$A(0 ; 30{,}50 ; 0)$

$B(-6{,}10 ; 0 ; 7{,}62)$

$C(18{,}29 ; 0 ; 5{,}49)$

$D(-6{,}10 ; 0 ; -22{,}60)$

E os vetores:

$\vec{AB} = B - A = (-6{,}10 ; -30{,}50 ; 7{,}62)$

$\vec{AC} = C - A = (18{,}29 ; -30{,}50 ; 5{,}49)$

$\vec{AD} = D - A = (-6{,}10 ; -30{,}50 ; -22{,}60)$

$\vec{AO} = O - A = (0 ; -30{,}50 ; 0)$

$\alpha = [\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}]$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{(-6{,}10).(18{,}29) + (-30{,}50)(-30{,}50) + (7{,}62).(5{,}49)}{\sqrt{37{,}21 + 930{,}25 + 58{,}0644} \cdot \sqrt{334{,}5241 + 930{,}25 + 30{,}1401}}$$

$$\cos\alpha = \frac{-111{,}569 + 930{,}25 + 41{,}8338}{\sqrt{1025{,}5244} \cdot \sqrt{1294{,}9142}} = \frac{860{,}5148}{\sqrt{1.327.966{,}108}}$$

To1000!

$\cos\alpha \cong 0{,}7467 \;\therefore\; \boxed{\alpha \cong 41{,}69°}$ ângulo entre os cabos AB e AC.

$\beta = [\widehat{\vec{AD}, \vec{AO}}]$

$$\cos\beta = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AO}}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{AO}|} = \frac{(-6{,}10).(0) + (-30{,}50)(-30{,}50) + (-22{,}60).(0)}{\sqrt{37{,}21 + 930{,}25 + 510{,}76} \cdot \sqrt{0 + 930{,}25 + 0}}$$

$$\cos\beta = \frac{0 + 930{,}25 + 0}{\sqrt{1478{,}22} \cdot \sqrt{930{,}25}} = \frac{930{,}25}{\sqrt{1.375.114{,}155}}$$

$\cos\beta \cong 0{,}7933 \;\therefore\; \boxed{\beta \cong 37{,}51°}$

ângulo agudo que o cabo AD forma com a linha vertical.

Observação: Os eixos cartesianos aparecem na figura em posições diferentes das usuais na Geom. Analítica.