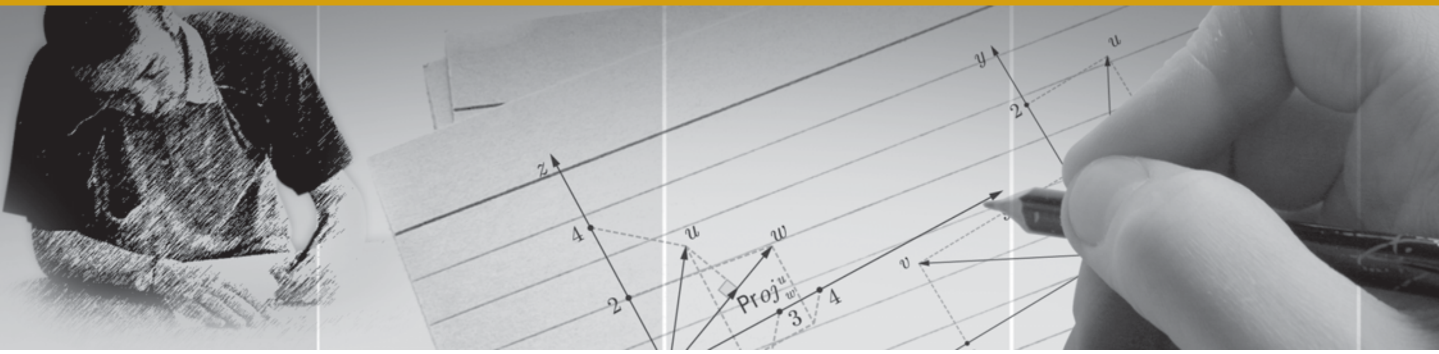
DISCIPLINA **Geometria Analítica e Números Complexos**

Produto escalar

Autores

Cláudio Carlos Dias

Neuza Maria Dantas



Programa Universidade a Distância
UNIDIS Grad

aula

11

Governo Federal

Presidente da República
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário de Educação a Distância – SEED
Ronaldo Motta

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Reitor
José Ivonildo do Rêgo

Vice-Reitor
Nilsen Carvalho Fernandes de Oliveira Filho

Secretária de Educação a Distância
Vera Lúcia do Amaral

Secretaria de Educação a Distância- SEDIS

Coordenadora da Produção dos Materiais
Célia Maria de Araújo

Coordenador de Edição
Ary Sergio Braga Olinisky

Projeto Gráfico
Ivana Lima

Revisores de Estrutura e Linguagem
Eugenio Tavares Borges
Marcos Aurélio Felipe

Revisora das Normas da ABNT
Verônica Pinheiro da Silva

Revisoras de Língua Portuguesa
Janaina Tomaz Capistrano
Sandra Cristinne Xavier da Câmara

Revisora Tipográfica
Nouraide Queiroz

Ilustradora
Carolina Costa

Editoração de Imagens
Adauto Harley
Carolina Costa

Diagramadores
Bruno de Souza Melo

Adaptação para Módulo Matemático
Thaisa Maria Simplício Lemos
Pedro Gustavo Dias Diógenes

Imagens Utilizadas
Banco de Imagens Sedis (Secretaria de Educação a Distância) - UFRN
Fotografias - Adauto Harley
MasterClips IMSI MasterClips Collection, 1895 Francisco Blvd, East, San Rafael, CA 94901,USA.
MasterFile – www.masterfile.com
MorgueFile – www.morguefile.com
Pixel Perfect Digital – www.pixelperfectdigital.com
FreeImages – www.freeimages.co.uk
FreeFoto.com – www.freefoto.com
Free Pictures Photos – www.free-pictures-photos.com
BigFoto – www.bigfoto.com
FreeStockPhotos.com – www.freestockphotos.com
OneOddDude.net – www.oneodddude.net
Stock.XCHG - www.sxc.hu

Divisão de Serviços Técnicos
Catalogação da publicação na Fonte. UFRN/Biblioteca Central “Zila Mamede”

Dias, Cláudio Carlos.
Geometria analítica e números complexos / Cláudio Carlos Dias, Neuza Maria Dantas. – Natal, RN : EDUFRN, 2006.

320 p. : il

1. Geometria analítica plana. 2. Geometria analítica espacial. 3. Números complexos. I. Dantas, Neuza Maria. II. Título.

ISBN 978-85-7273-331-1 CDU 514.12
RN/UF/BCZM 2006/88 CDD 516.3

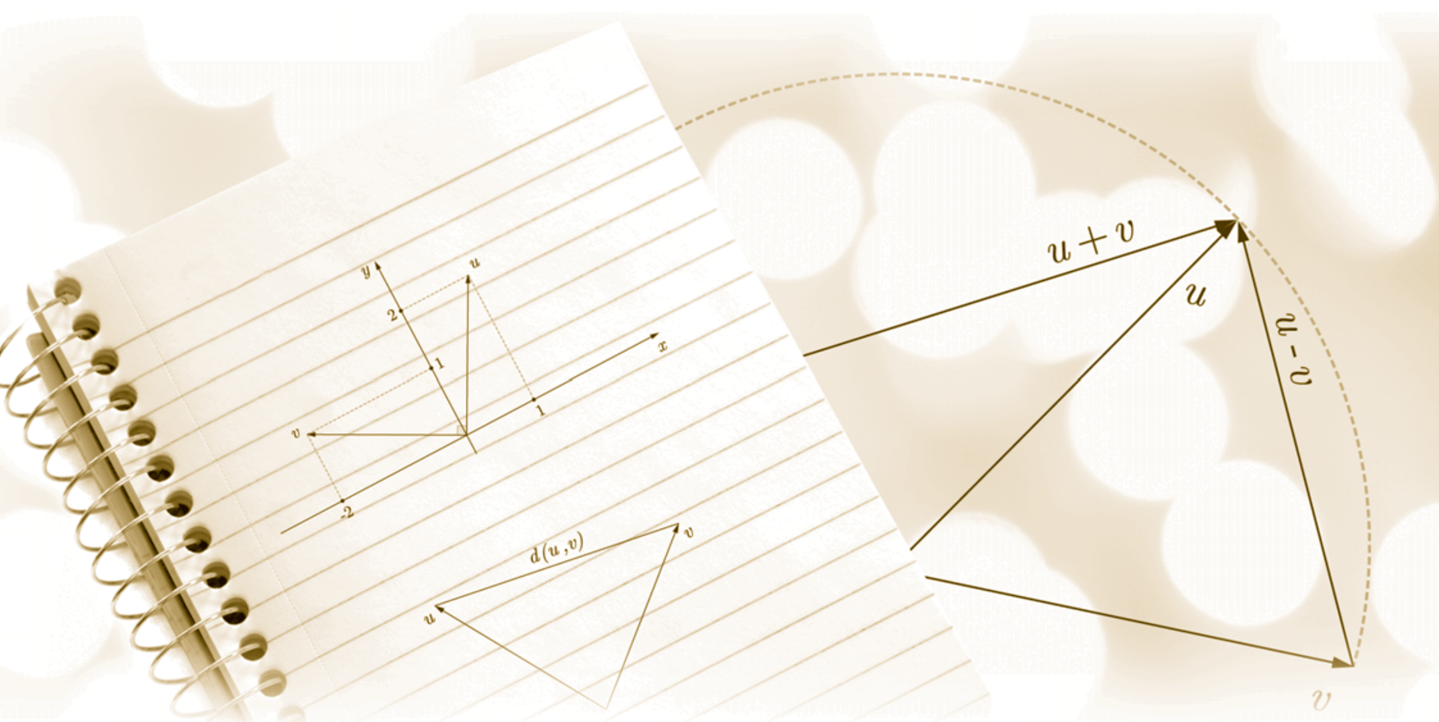
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste material pode ser utilizada ou reproduzida sem a autorização expressa da UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Apresentação

Nesta aula, iremos introduzir a noção de produto escalar para vetores no plano e no espaço, o que vai nos permitir usar métodos algébricos no cálculo de comprimento de vetores, de ângulos entre vetores e da distância entre vetores.

Objetivos

Ao final desta aula, esperamos que você seja capaz de: trabalhar com produtos escalares a partir de suas propriedades; calcular o produto escalar entre vetores, o ângulo entre vetores e a projeção de um vetor sobre outro vetor; e inferir que essas noções se estendem a espaços de dimensão maior.



Produto escalar no plano e no espaço

Iniciemos considerando um sistema de coordenadas retangulares no plano e $u_1 = (x_1,\ y_1)$ e $u_2 = (x_2,\ y_2)$ vetores nesse plano. O **produto escalar** entre u_1 e u_2 é uma operação que associa esse par de vetores ao número real $u_1 \cdot u_2$, dado por

$$u_1 \cdot u_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Exemplo 1

Se $u_1 = \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ e $u_2 = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$, então, $u_1 \cdot u_2 = (-1) \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot 2 = -\dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{2}{3}$.

De modo análogo, introduzindo um sistema de coordenadas retangulares no espaço para vetores $v_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $v_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, definimos o **produto escalar** entre esses vetores v_1 e v_2 por

$$v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Exemplo 2

Dados $v_1 = (-1, \sqrt{2}, 3)$ e $v_2 = (-2, \sqrt{6}, 5)$, então,

$$v_1 v_2 = (-1)(-2) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + 3 \cdot 5 = 2 + \sqrt{12} + 15 = 17 + 2\sqrt{3}.$$

Listaremos a seguir as propriedades mais importantes satisfeitas pelo produto escalar. Para quaisquer vetores $u,\ v,\ w$ no plano ou no espaço e qualquer escalar a, vale

P_1. $u \cdot v = v \cdot u$

P_2. $(au) \cdot v = a(u \cdot v)$

P_3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

P_4. $u \cdot u \geq 0$ e $u \cdot u = 0$ se, e somente se, $u = 0$

No intuito de provar essas propriedades, é suficiente considerar os vetores no espaço, pois fazendo suas terceiras coordenadas nulas obteremos a validade das mesmas no plano. Para tanto, sejam

$u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $w = (x_3, y_3, z_3)$

Temos:

- $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = v \cdot u$, o que demonstra P_1;

- $(au) \cdot v = (ax_1) \cdot x_2 + (ay_1) \cdot y_2 + (az_1) \cdot z_2 = a(x_1x_2) + a(y_1y_2) =$
  $= a(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = a(u \cdot v)$, logo P_2;

- $u \cdot (v + w) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3)$
  $= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + z_1z_2 + z_1z_3$
  $= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3)$
  $= u \cdot v + u \cdot w$, o que prova P_3;

- $u \cdot u = x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \geq 0$, por ser uma soma de quadrados.

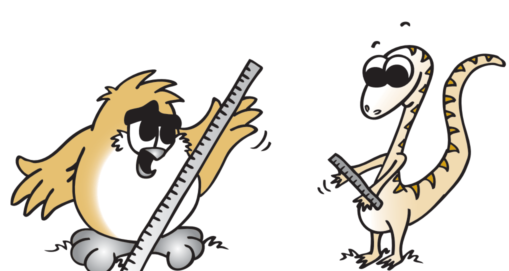
Por outro lado, se $u \cdot u = 0$, então, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$, o que só ocorre quando $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, isto é, $u = 0$. É claro que, se u é o vetor nulo $(0, 0, 0)$, então, $u \cdot u = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$, o que mostra P_4.

Observe que $\sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ é o comprimento de u ou a norma de u denotada por $||u||$, visto na aula 9 (Vetores no plano e no espaço tridimensional).

Caso u esteja no plano, ou seja, considerando $z_1 = 0$, fica

$$||u|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{u \cdot u}.$$

Em resumo, mesmo que o vetor u esteja no plano ou no espaço, seu comprimento é dado por $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$.



Exemplo 3

Vamos deduzir a lei do paralelogramo de uma maneira mais fácil da que fizemos na aula 10 (Vetores no plano e no espaço tridimensional) e do que geralmente é encontrado nos livros de Geometria Plana.

Num paralelogramo, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos seus lados.

Solução

Representando os lados do paralelogramo pelos vetores u e v, sabemos que suas diagonais são representadas pelos vetores $u + v$ e $u - v$. Desse modo, os lados têm comprimento $||u||$ e $||v||$, enquanto as diagonais têm comprimentos $||u + v||$ e $||u - v||$. Conforme ilustrado a seguir.

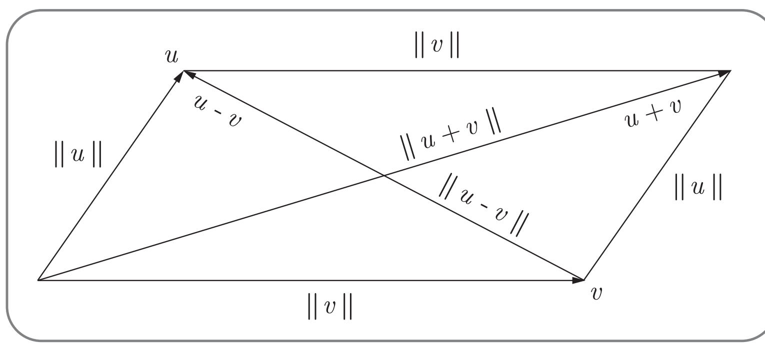


Figura 1 – A lei do paralelogramo: $\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2(\| u \|^2 + \| v \|^2$

Pelas propriedades do produto escalar, vemos que

- $$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= (u+v)\cdot(u+v) = (u+v)\cdot u + (u+v)\cdot v \\ &= u \cdot u + v \cdot u + u \cdot v + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \end{aligned}$$

De modo análogo,

- $$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= (u-v)\cdot(u-v) = (u-v)\cdot u - (u-v)\cdot v \\ &= u \cdot u - v \cdot u - u \cdot v + v \cdot v \\ & \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Assim, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$, o que comprova o exemplo 3.

Observação 1 – Vimos na demonstração anterior que

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$$
$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, obtemos

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4u \cdot v$$

ou seja,

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

Essa é a dita **identidade de polarização**. Note que ela representa o produto escalar em função da norma.

Voltando ao início desta aula, podemos observar que a definição de produto escalar depende do sistema de coordenadas retangulares introduzido no plano ou no espaço. Mas, essa dependência é apenas aparente, como veremos a seguir. Para tanto, precisamos da noção de ângulo entre vetores. Sejam, portanto, u e v vetores no plano com direções distintas e com a mesma origem. De acordo com a figura seguinte, eles determinam dois ângulos θ e θ', cuja soma vale 360°. O menor entre esses dois ângulos é dito o ângulo entre u e v. Na Figura 2 a seguir, vê-se que θ é o ângulo entre u e v.

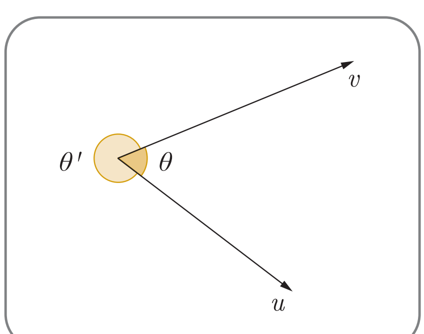


Figura 2 – O ângulo θ entre dois vetores u e v

No caso de u e v terem a mesma direção e o mesmo sentido, o ângulo entre eles é 0°, se eles têm a mesma direção, e se têm sentidos opostos, o ângulo é 180°. Veja a Figura 3.

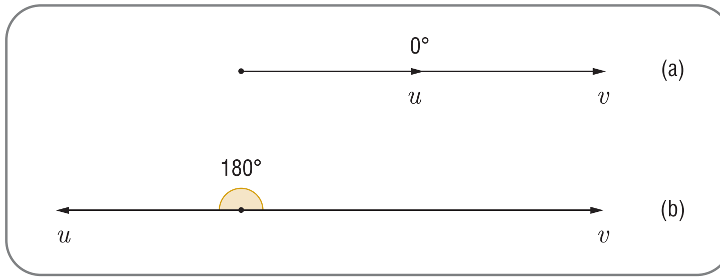


Figura 3 – a) Dois vetores u e v com ângulos entre eles de 0°. b) Dois vetores u e v com ângulos entre eles de 180°.

Agora, se u e v são vetores no espaço, como se define o ângulo entre eles? A resposta é dada tomando-se o único plano determinado pelas retas que contêm u e v. Assim, a definição do ângulo entre eles se reduz à definição anterior, considerando-se u e v como vetores desse plano.

Observação 2 – Revendo a Figura 2, observamos que $\theta + \theta' = 360°$. Como $\theta \leq \theta'$ fica $360° = \theta + \theta' \geq \theta + \theta = 2\theta$,

ou seja, $\theta \leq \dfrac{360^0}{2} = 180^0$.

Isso diz que o ângulo θ entre dois vetores varia de 0° a 180°.

Vamos mostrar agora que o produto escalar entre dois vetores não depende do sistema de coordenadas.

De fato, dados os vetores u e v no plano ou no espaço, consideremos o triângulo cujos lados são representados pelos vetores u, v e $u - v$. Representemos por θ o ângulo entre u e v, conforme ilustrado na Figura 4.

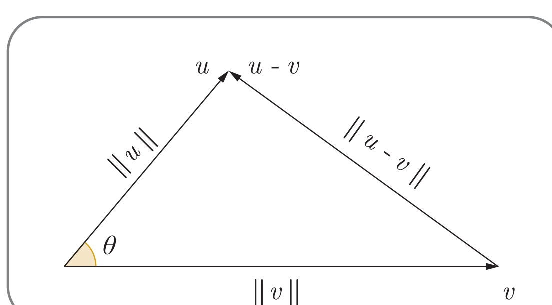


Figura 4 – A lei dos cosenos: $|| u - v ||^2 = || u ||^2 + || v ||^2 - 2 \, || u || \, || v || \cos \theta$

Lembre-se de que a lei dos cosenos diz que **o quadrado do lado oposto a um ângulo de um triângulo é a soma dos quadrados dos lados adjacentes a esse ângulo menos duas vezes o produto desses dois lados pelo coseno do ângulo entre eles** – conforme você viu na aula 8 de Geometria Plana e Espacial (Explorando a trigonometria nas formas geométricas).

No mesmo triângulo da Figura 4, o lado oposto ao ângulo θ tem comprimento $||u-v||$ e os lados adjacentes medem $\|u\|$ e $\|v\|$. Desse modo, usando a lei dos cosenos, obtemos

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\|\,cos\theta,$$

ou seja,

$$\|u\|^2 - 2u\cdot v + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\|\,cos\theta,$$

simplificando, vem

$$u\cdot v = \|u\|\|v\|\,cos\theta.$$

Essa fórmula diz que o produto escalar só depende do comprimento dos vetores e do ângulo entre eles, e não do sistema de coordenadas, como a definição original de produto escalar nos fez acreditar.

Observação 3 – Da fórmula $u\cdot v = \|u\|\|v\|\,cos\theta$, e do fato de $0 \le \theta \le 180^\circ$, vem que

a) se $u\cdot v > 0$, então, $cos\ \theta > 0$, logo, θ é agudo, e reciprocamente;

b) se $u\cdot v < 0$, então, $cos\ \theta < 0$, logo, θ é obtuso, e reciprocamente;

c) se $u\cdot v = 0$, então, $cos\ \theta = 0$, logo, θ é reto, e reciprocamente.

Exemplo 4

Dado o vetor $u = (1,\ 2)$, determine um vetor $v = (a,\ b)$ ortogonal a u.

Solução

Pela observação 3 c), se u e v são ortogonais, devemos ter $u\cdot v = 0$, ou seja,

$a + 2b = 0$, donde $a = -\,2b$ e $v = (-\,2b,\ b)$.

Isso diz que todos os vetores ortogonais a u são um múltiplo escalar do vetor $(-2, 1)$, ou seja, são colineares com o mesmo.

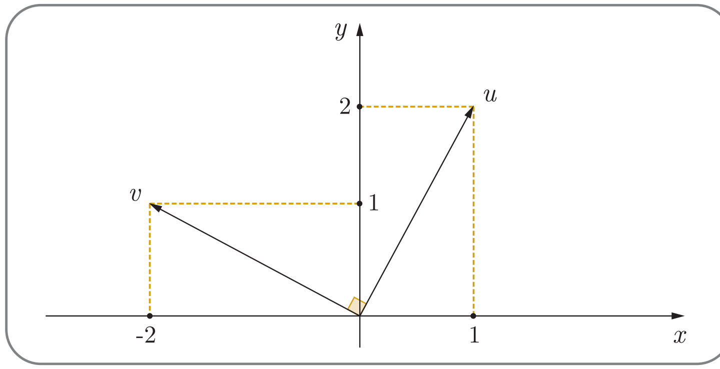


Figura 5 – Um vetor $v = (-2, 1)$ ortogonal a $u = (1, 2)$

Exemplo 5

Dados $u = (1, -1, 2)$ e $v = (0, 3, 1)$, encontre um vetor $w = (a, b, c)$ ortogonal a u e ortogonal a v.

Solução

Pela observação 3 c), devemos ter $w \cdot u = 0$ e $w \cdot v = 0$,

ou seja,

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases}$$

A segunda equação diz que $c = -3b$, o qual, fazendo-se a substituição na primeira equação, fornece $a = 7b$. Logo, $w = (7b, b, -3b) = b(7, 1, -3)$. Isso significa que qualquer vetor w ortogonal a u e v é colinear com o vetor $(7, 1, -3)$. A figura a seguir ilustra essa situação.

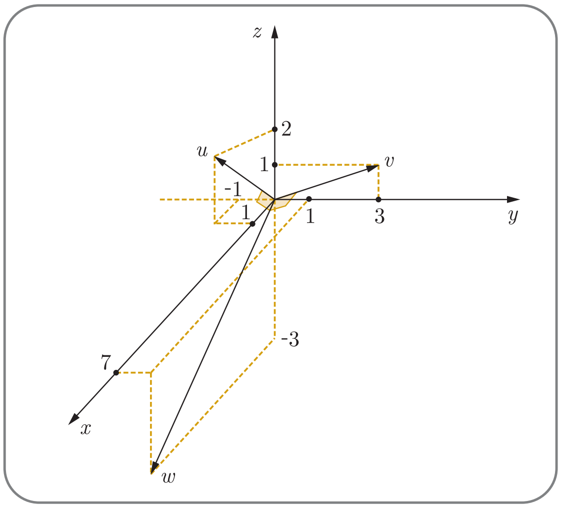


Figura 6 – Um vetor $w = (7,\ 1,\ –3)$ ortogonal aos vetores $u = (1,\ –1,\ 2)$ e $v = (0,\ 3,\ 1)$

A expressão $u \cdot v = \|u\|\ \|v\|\ \ cos\ \theta$ diz que $|u \cdot v| = \|u\|\|v\||cos\theta|$, como $|cos\theta| \leq 1$, conclui-se que

$$|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|,$$

a qual é dita a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

Exemplo 6

Usemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que $|s\ \ n\theta + cos\theta| \leq \sqrt{2}$ para todo ângulo θ.

Solução

Consideremos os vetores $u = (1{,}1)$ e $v = (cos\theta\ ,\ sen\theta\ )$. Como $u \cdot v = sen\ \theta + cos\ \theta$, $\|u\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\|v\| = \sqrt{cos^2\theta + s\ \ n^2\theta} = \sqrt{1} = 1$, sendo $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$, obtém-se $|s\ \ n\theta + cos\theta| \leq \sqrt{2}$.

Atividade 1

Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para concluir que, para todos os números reais x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 e z_2, tem-se

$$|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

Exemplo 7

Vamos determinar a equação da reta r no plano que passa por um ponto fixo $P_0\,(x_0, y_0)$ e tem $n = (a, b)$, como um vetor normal (vetor ortogonal à reta).

Solução

A figura a seguir ilustra essa situação.

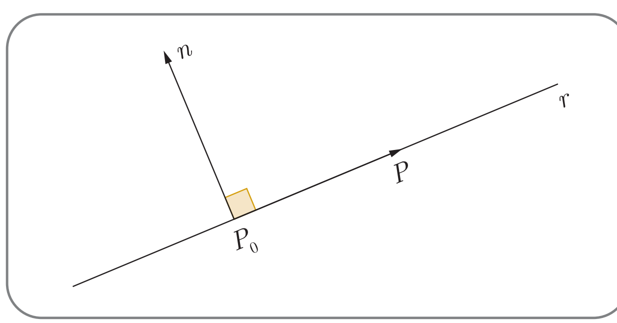


Figura 7 – A reta r que passa por P_0 e é perpendicular a n

Seja agora $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta r. Como $n = (a, b)$ é um vetor ortogonal à mesma, então, o vetor $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ é ortogonal ao vetor n (veja novamente a Figura 7). Isso significa que o produto escalar entre $\overrightarrow{P_0P}$ e u é nulo, isto é, $n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

Calculando esse produto, ficamos com

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, donde $ax - ax_0 + by - by_0 = 0$.

Fazendo

$c = -ax_0 - by_0$,

a equação procurada é

$ax + by + c = 0$, que é dita a equação normal da reta.

Você estudou na aula 4 (Relação entre ângulos internos e externos), de Geometria Plana e Espacial, que **a medida de um lado de um triângulo é sempre menor ou igual à soma dos outros dois** – esta é dita a desigualdade triangular. Vamos olhar essa desigualdade do ponto de vista de vetores, para tanto, representemos os lados de um triângulo pelos vetores u , v e $u + v$, como na Figura 8.

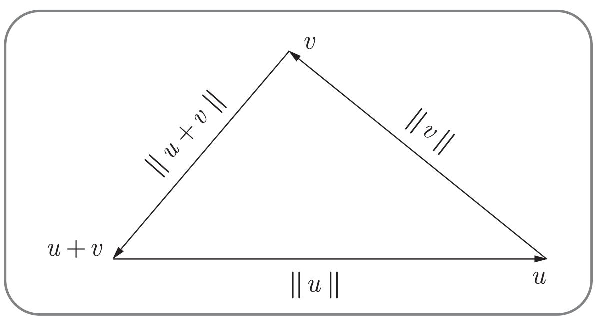


Figura 8 – A desigualdade triangular: $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$

Desse modo,

$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = \|u\|^2 + 2u\cdot v + \|v\|^2$.

Lembrando que qualquer número real é menor ou igual ao seu módulo, temos que $2\, u \cdot v \leq 2\,|u \cdot v|$. Por sua vez, $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, e levando isso à expressão anterior, obtemos

$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\;\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$.

Donde

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exercícios

1 Dê exemplos de vetores u, v, w com $u \neq 0$, tais que $u \cdot v = u \cdot w$ e, no entanto, $v \neq w$. Isso mostra que a lei do corte não é válida para o produto escalar de vetores.

2 Mostre, usando vetores, que qualquer ângulo inscrito em semi-círculos é reto.

3 Mostre que dois vetores u e v são ortogonais se, e somente se, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Isso diz que o Teorema de Pitágoras se aplica apenas ao triângulo retângulo.

4 Dados os vetores $u = (1, -2, 3)$ e $v = (-4, 2, -1)$, calcule $(u + v) \cdot (2u - 3v)$.

5 Calcule o ângulo entre os vetores $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $v = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6 Dados os vetores $u = (1, 2)$, $v = (-1, 0)$ e $w = \left(-3, \frac{1}{2}\right)$, encontre números a e b tais que $av + bw$ seja ortogonal a u.

7 Sejam $u = (x, y, z)$ um vetor não-nulo no espaço; α, β e γ, os ângulos que u faz com os eixos x, y e z, respectivamente. Mostre que:

a) $cos\ \alpha = \frac{x}{\|u\|}, cos\ \beta = \frac{y}{\|u\|}, cos\ \gamma = \frac{z}{\|u\|}$

b) $\frac{u}{\|u\|} = (cos\ \alpha, cos\ \beta, cos\ \gamma)$

c) $cos^2\ \alpha + cos^2\ \beta + cos^2\ \gamma = 1$

Nota – α, β e γ são ditos **ângulos diretores** do vetor u, e $cos\ \alpha$, $cos\ \beta$, $cos\ \gamma$, seus **cosenos diretores**.

Continuando os exercícios

8 Sejam $u = (x, -1, 2)$ e $v = (1, 0, -1)$, encontre o valor de x para que

a) u e v sejam ortogonais.

b) o ângulo entre u e v seja $\dfrac{\pi}{3}$.

9 Determine pelo menos quatro vetores diferentes ortogonais ao vetor $u = (1, 5, -2)$. Verifique que na realidade existe uma infinidade de tais vetores ortogonais a u.

A distância entre dois vetores

Dados os vetores u e v no plano ou no espaço, define-se a distância entre u e v como sendo o comprimento do vetor que liga as extremidades de u e v, a saber, o comprimento do vetor $u - v$.

Assim, se $d(u, v)$ simboliza a distância entre u e v, tem-se $d(u, v) = \|u - v\|$, conforme ilustrado na figura a seguir.

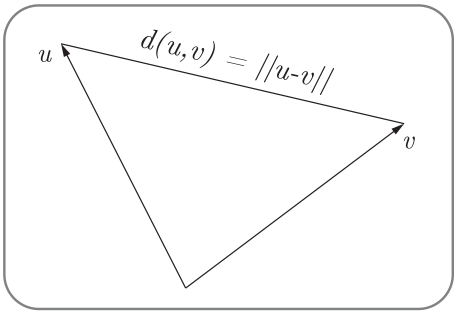


Figura 9 – A distância entre dois vetores u e v

Observe que, se $v = 0$, então, $d(u, v) = \|u\|$.

Listaremos a seguir as propriedades que são naturalmente esperadas para uma função distância. Para quaisquer vetores u, v e w valem:

D_1. $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$

D_2. $d(u, v) = d(v, u)$

D_3. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Faremos agora a verificação dessas propriedades.

Ora, $d(u, v) = \|u - v\| \geq 0$ por ser o comprimento do vetor $u - v$. Por outro lado, se $d(u, v) = 0$, então $\|u - v\| = 0$, donde $u - v = 0$, logo, $u = v$. E, se $u = v$, então, $u - v = 0$, donde $d(u, v) = \|u - v\| = 0$. Isso mostra D_1.

Para D_2, temos que $d(u, v) = \|u - v\| = \| -(v - u)\| = |-1|\,\|v - u\| = \|v - u\| = d(v, u)$. Finalmente, como $d(u, v) = \|u - v\| = \|(u - w) + (w - v)\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|$, pela desigualdade triangular e $\|u - w\| = d(u, w)$, $\|w - v\| = d(w, v)$, vem que $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, o que prova D_3.

Observação 4 – Se $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, então $d(u, v) = d(P, Q)$, em que $P\ (x_1, y_1, z_1)$ e $Q\ (x_2, y_2, z_2)$ são as extremidades de u e v, respectivamente. Conforme ilustrado na Figura 9.

Projeção ortogonal de um vetor sobre outro vetor

Como vimos anteriormente, dois vetores ortogonais são caracterizados pelo fato do produto escalar entre eles ser igual a zero. Isso diz que os cálculos simplificam bastante quando estamos lidando com vetores ortogonais.

Desse ponto de vista, é lícito perguntar: se w é um vetor fixado e u um vetor qualquer, é possível decompor u como uma soma de um vetor na direção de w com outro na direção ortogonal a w?

A figura a seguir sugere que geometricamente isso é possível.

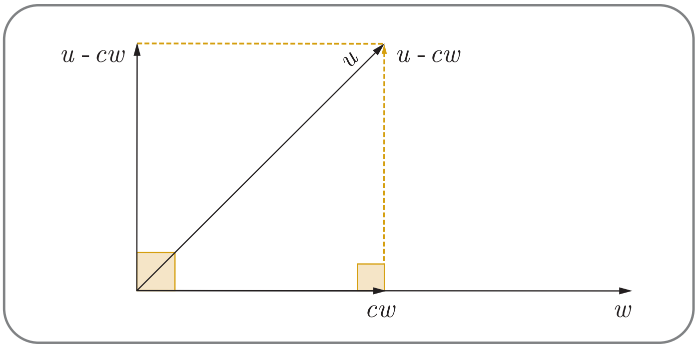


Figura 10 – Decomposição de um vetor u como soma de um vetor na direção de w com um vetor ortogonal a w

A Figura 10 nos mostra que $(u - cw)$ deve ser ortogonal a w, isto é,

$(u - cw) \cdot w = 0,$

o que dá $u \,.\, w - cw \cdot w = 0,$

ou ainda $c\|w\|^2 = u \cdot w$,

donde

$$c = \frac{u \cdot w}{\|w\|^2}.$$

Chamamos o vetor cw como sendo a **projeção ortogonal** de u sobre w e o denominamos por $Proj_w^u$. Desse modo, a componente de u na direção de w é $Proj_w^u = \dfrac{u \cdot w}{\|w\|^2}w$, enquanto $u - Proj_w^u = u - \dfrac{u \cdot w}{\|w\|^2}w$ é dita a componente ortogonal de w, pois

$$w \cdot \left(u - \frac{u \cdot w}{\|w\|^2}w \right) = w \cdot u - \frac{u \cdot w}{\|w\|^2}(w \cdot w) = u \cdot w - \frac{u \cdot w}{\|w\|^2}\|w\|^2 = u \cdot w - u \cdot w = 0.$$

Como $u = cw + (u - cw)$, fica $u = Proj_w^u + (u - Proj_w^u)$, que é a decomposição procurada.

Exemplo 8

Vamos encontrar a projeção de u sobre w, sendo $u = (2, 3, 4)$ e $w = (1, 4, 2)$.

Solução

Ilustraremos essa situação na figura seguinte.

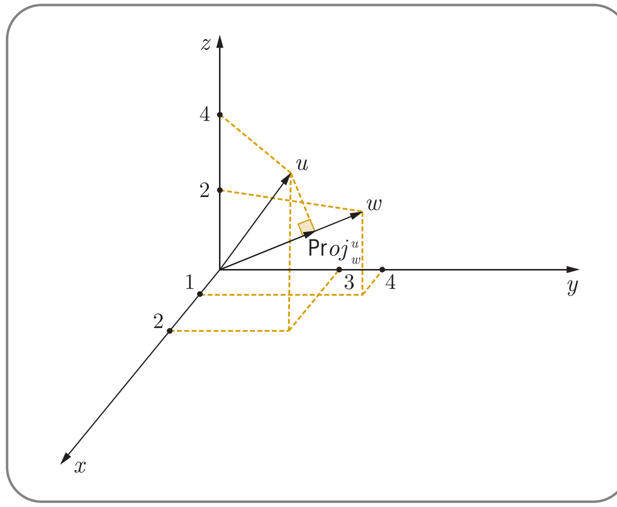


Figura 11 – A projeção ortogonal de $u = (2,\ 3,\ 4)$ sobre $w = (1,\ 4,\ 2)$

Sendo $Proj_w^u = \dfrac{u \cdot w}{\|w\|^2} w$, temos que

$u \cdot w = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 22$ e,

$\|w\|^2 = 1^2 + 4^2 + 2^2 = 21,$

logo, $\dfrac{u \cdot w}{\|w\|^2} = \dfrac{22}{21}$,

onde $Pro\ {}_w^u = \dfrac{22}{21}(1, 4, 2) = \left(\dfrac{22}{21}, \dfrac{88}{21}, \dfrac{2}{21}\right).$

Continuando os exercícios

10 Sejam u e w vetores unitários. Mostre que $Proj_w^u = Proj_u^w$ se, e somente se, u e w são ortogonais ou $u = w$.

11 Se $ax + by + c = 0$ é a equação de uma reta no plano, mostre que o vetor $n = (a,\ b)$ é ortogonal a essa reta, isto é, é ortogonal a todo vetor sobre a mesma.

Continuando os exercícios

12 Use a projeção ortogonal para achar a distância $d(P, r)$ de um ponto P à reta r de equação $ax + by + c = 0$. Compare com a fórmula dada na aula 2 desta disciplina.

Resumo

Nesta aula, introduzimos a definição de produto escalar entre vetores em função de suas coordenadas. Depois, vimos que essa definição não depende das coordenadas, mas apenas dos comprimentos dos vetores e do ângulo entre eles. Vimos também que a distância entre dois vetores, com a mesma origem, é a mesma que a distância entre os pontos de suas extremidades. Por fim, estudamos uma desigualdade muito importante chamada de Cauchy-Schwarz, a qual diz que o valor absoluto do produto escalar entre dois vetores é menor ou igual ao produto dos comprimentos desses vetores.

Auto-avaliação

Verifique que a noção de produto escalar estudada nesta aula pode ser estendida para vetores no espaço n-dimensional $\Re^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \in \Re,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Comprove que as propriedades que tínhamos antes, bem como os resultados que obtivemos, se mantêm nessa extensão.

(**Sugestão:** se $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina $u \,.\, v = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots, + x_ny_n$.)

Sugestões para a resolução dos exercícios

1. Considere a seguinte figura:

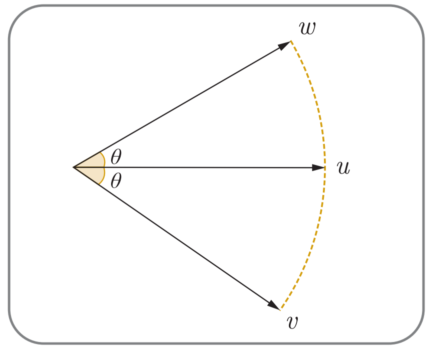


Figura 12 – Dois vetores v e w com $u \cdot v = u \cdot w$ e $v \neq w$

e conclua que $u \cdot v = u \cdot w$ e, no entanto, $v \neq w$.

2. Use a figura a seguir

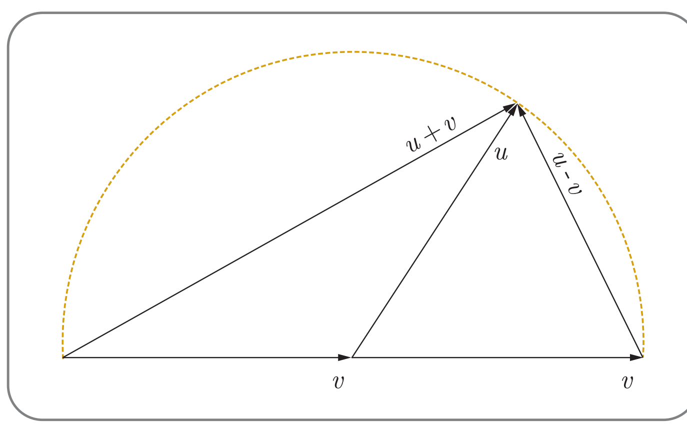


Figura 13 – Um triângulo (retângulo) inscrito num semi-círculo

para concluir que $u + v$ e $u - v$ são ortogonais e daí segue-se a conclusão. Note que $\|u\| = \|v\|$, que é igual ao raio do semi-círculo.

3. Desenvolva a expressão $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v)$ usando as propriedades de produto escalar. Lembre-se de que u e v são ortogonais se, e somente se, o produto escalar entre eles é nulo.

4. Determine as coordenadas de $u + v$ e $2u - 3v$ e aplique a definição de produto escalar.

5. Calcule os ângulos θ_1 e θ_2 entre u,v e $(1,0)$, respectivamente, e observe que o ângulo entre u e v é $\theta_2 - \theta_1$.

6. Para a determinação de a e b imponha a condição $u \cdot (av + bw) = 0$.

7. Se $i = (1, 0, 0)$; $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$, observe que α é o ângulo entre i e u, β é o ângulo entre j e u, e γ é o ângulo entre k e u.

8. Se θ é o ângulo entre u e v, lembre-se de que $cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.

9. Se $v = (x, y, z)$ é ortogonal a u, então, $u \cdot v = 0$, isto é, $x + 5y - 2z = 0$. Agora, encontre 4 soluções distintas para essa equação. Na verdade, tal equação admite infinitas soluções.

10. Aplique diretamente a fórmula para $Proj_w^u$, dada nesta aula.

11. Se v é um vetor sobre a reta, então, $v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, onde $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ estão sobre a reta e são, respectivamente, a origem e a extremidade de v. Mostre que $n \cdot v = 0$, impondo a condição de P e Q, satisfazerem a equação da reta. Para uma melhor compreensão, é conveniente que você faça uma figura ilustrando essa situação.

12. Pelo exercício anterior, o vetor $n = (a, b)$ é ortogonal à reta. Faça uma figura posicionando n com origem em um ponto $Q(x_1, y_1)$ sobre a reta. Chame $u = \overrightarrow{PQ}$ e observe que $d(P, r) = \|Proj_n^u\|$. Veja a Figura 14.

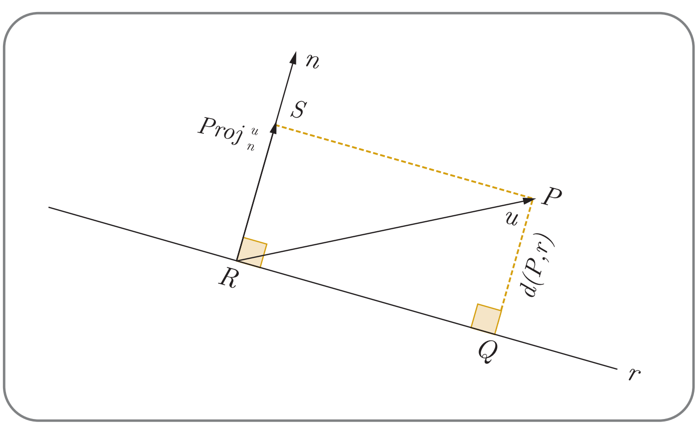


Figura 14 – A distância de um ponto P a uma reta r

Referências

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

Anotações

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério
da Educação