

Finančni praktikum

Vizing type conjecture for k -total rainbow domination number

Avtorja:

Brina Pirc, Marcel Špehonja

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za matematiko in fiziko

November, 2019

Kazalo

1	Predstavitev problema	2
1.1	Naloga	2
1.2	Definicije	2
2	Pristop k reševanju	2
3	Testiranje	3
3.1	Vsi grafi do 5 vozlišč	3
3.2	Dvodelni grafi	9
3.3	Poti	21
3.4	Drevesa	22
3.5	Simulated annealing	23
4	Zaključek	24

1 Predstavitev problema

1.1 Naloga

Ukrajinski matematik Vadim G. Vizing je leta 1963 postavil znano domnevo, da je produkt dominantnih števil grafov G in H kvečjemu manjši od dominantnega števila kartezičnega produkta teh dveh grafov. Medtem ko dokaz te domneve še vedno ostaja eden večjih problemov v teoriji grafov, se bova v svojem projektu spraševala, ali lahko pridemo bližje potrditvi (oz. zavrnitvi) naslednje domneve Vizingovega tipa:

Domneva 4: Naj bosta G in H povezana, neusmerjena grafa in $k \geq 2$. Potem velja:

$$\gamma_{krt}(G) \cdot \gamma_{krt}(H) \geq 2 \cdot \gamma_{krt}(G \square H).$$

Pri tem je $\gamma_{krt}(G)$ oznaka za totalno dominantno število grafa G , kartezično pomnoženega s K -polnim grafom, torej $\gamma_{krt}(G) = \gamma_t(G \square K_k)$.

1.2 Definicije

DOMINANTNA MNOŽICA: dominantna množica grafa $G = (V, E)$ je podmnožica vozlišč $D \subset V$, za katero velja, da ima vsako vozlišče v iz $V \setminus D$ vsaj enega sosedo, ki je element D .

DOMINANTNO ŠTEVILO: dominantno število grafa G je število vozlišč v najmanjši dominantni množici dominantne množice.

TOTALNO DOMINANTNO ŠTEVILO: je enako dominantnemu številu, z izjemo tega, da morajo imeti elementi v totalni dominantni množici prav tako povezavo z enim iz te množice. Torej prav vsako vozlišče grafa G , brez izjeme, mora imeti sosedo v totalni dominantni množici (da je sam del te množice ne zadostuje).

KARTEZIJSKI PRODUKT: grafov $G = (V, E)$ in $H = (V', E')$ je graf $G \square H$ z naborom vozlišč $V \times V'$ ter povezavami med (v, v') in (u, u') , če je obstajala povezava med v in u ali med v' in u' .

TOTAL k -RAINBOW DOMINATION NUMBER: je totalno dominantno število grafa G , kartezijsko pomnoženega z grafom K_k , kar je oznaka za k -poln graf.

2 Pristop k reševanju

Za opravljanje projekta sva uporabljala programski jezik *Sage* na platformi *Cocalc*. Najina naloga je bila poiskati protiprimer domneve Vizingovega tipa, torej poiskati taka grafa G in H , kjer neenakost ne velja. Sprva sva definirala

funkcijo, ki sprejme dva grafa G in H ter koeficient k , vrne pa tako število c , za katero velja enakost $\gamma_{krt}(G) \cdot \gamma_{krt}(H) = c \cdot \gamma_{krt}(G \square H)$.

```
def konstanta(prvi, drugi, k):
    poln_graf = graphs.CompleteGraph(k)

    kartezijski_prvega_in_polnega = prvi.cartesian_product(poln_graf)
    kartezijski_drugega_in_polnega = drugi.cartesian_product(poln_graf)

    kartezijski_prvega_in_drugega = drugi.cartesian_product(prvi)
    kartezijski_kartezijskega = kartezijski_prvega_in_drugega.cartesian_product(poln_graf)

    krt_prvega = kartezijski_prvega_in_polnega.dominating_set(value_only=True, total=True)
    krt_drugega = kartezijski_drugega_in_polnega.dominating_set(value_only=True, total=True)
    krt_obeh = kartezijski_kartezijskega.dominating_set(value_only=True, total=True)

    return (krt_prvega * krt_drugega) / krt_obeh
```

Če torej dana domneva drži, mora biti $c \leq 2$ za poljuben par povezanih grafov ter podan k . Cilj projekta je bil poiskati primer, pri katerem bo $c > 2$. Seveda je to težek problem, zato sva sprva opazovala, kaj se dogaja pri manjših grafih G in H . Postopoma sva povečevala število vozlišč. Pri manjših grafih do 5 vozlišč sva skušala preizkusiti vse možnosti, pri večjih grafih pa sva s pomočjo heuristike dodajala ali odvezemala povezave in sistematično raziskovala izide. Tu sva uporabila metodo *simulated annealing*. Hkrati sva počasi povečevala tudi k . Posebej sva obravnavala tudi dvodelne grafe, poti in drevesa ter ugotavljala kako se obnašajo v dani neenakosti. Zanimalo naju je predvsem pri katerem paru grafov je c največji, če je k konstanten.

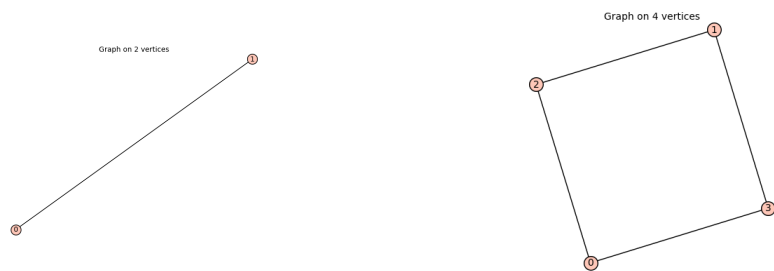
3 Testiranje

3.1 Vsi grafi do 5 vozlišč

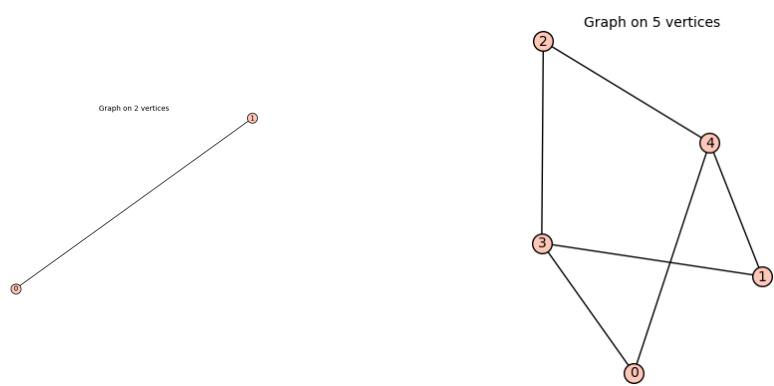
Najprej sva generirala vse povezane grafe od 2 do 5 vozlišč, ki jih je 30. Nato sva vzela vse možne kombinacije parov teh grafov, torej $\binom{31}{2} = 465$, ter vse te kombinacije vstavila v najino funkcijo, ki vrne iskan koeficient c . Dane rezultate sva nato vstavila v novi funkciji, ki sta poiskali maksimum in minimum izračunanih c -jev, ter izpisali pare grafov pri katerih je prišlo do teh ekstremov.

Pri prvem poskusu je bil $k = 2$: Maksimum iskanih koeficientov c je bil enak 2, število parov pri katerih je prišlo do maksimuma pa je bilo kar 10. Torej je pri desetih različnih parih grafov prišlo do enakosti domneve $\gamma_{krt}(G) \cdot \gamma_{krt}(H) = 2 \cdot \gamma_{krt}(G \square H)$. Minimum koeficienta c je bil $2/5$.

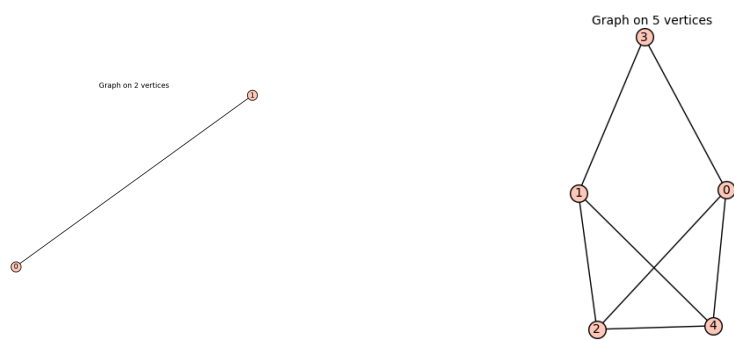
Spodaj so podani pari grafov pri katerih pride do maksimuma pri $k = 2$:



Slika 1: $\text{do5}[0]$ in $\text{do5}[6]$



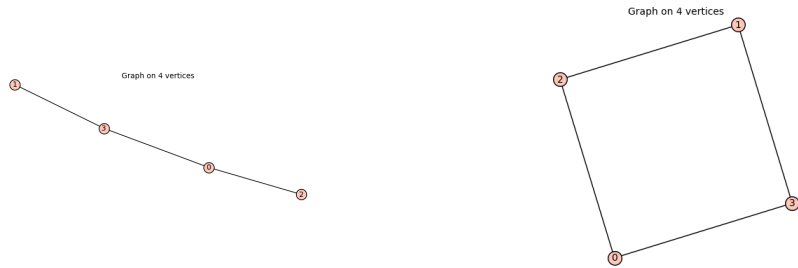
Slika 2: $\text{do5}[0]$ in $\text{do5}[15]$



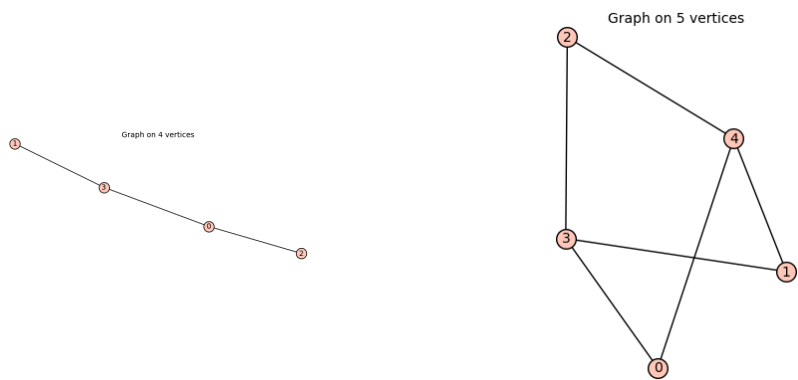
Slika 3: $\text{do5}[0]$ in $\text{do5}[26]$



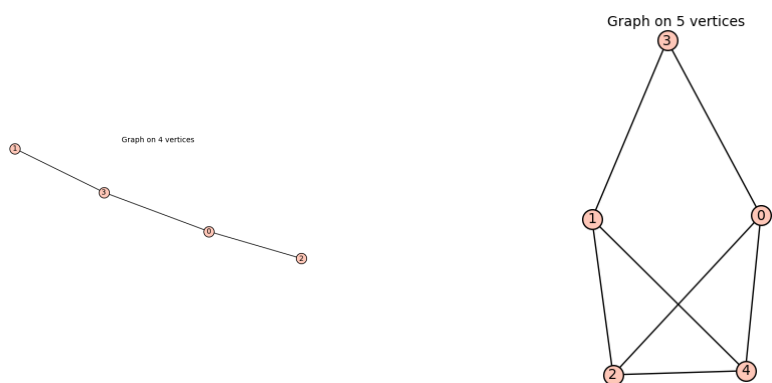
Slika 4: $\text{do5}[4]$ in $\text{do5}[4]$



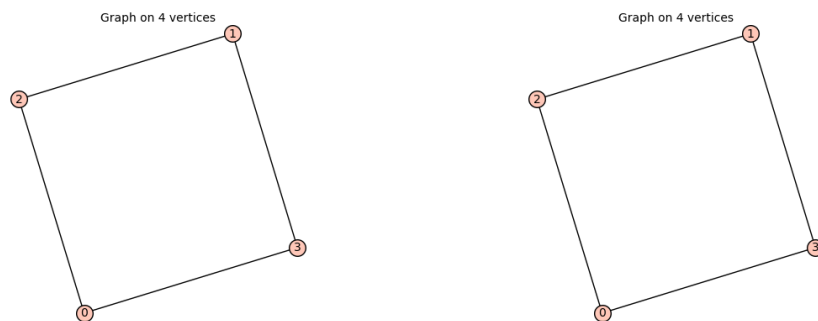
Slika 5: $\text{do5}[4]$ in $\text{do5}[6]$



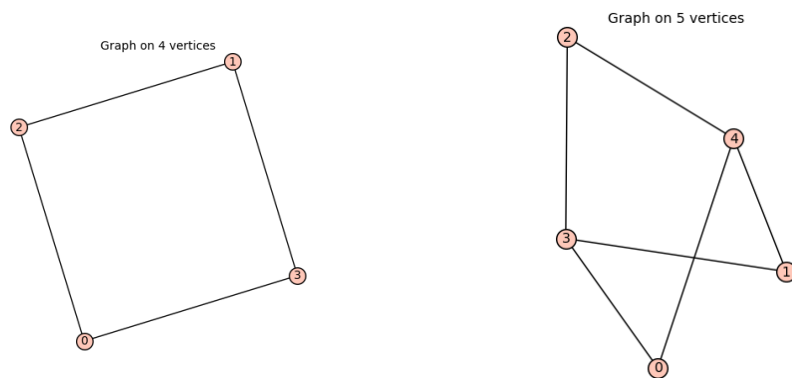
Slika 6: $\text{do5}[4]$ in $\text{do5}[15]$



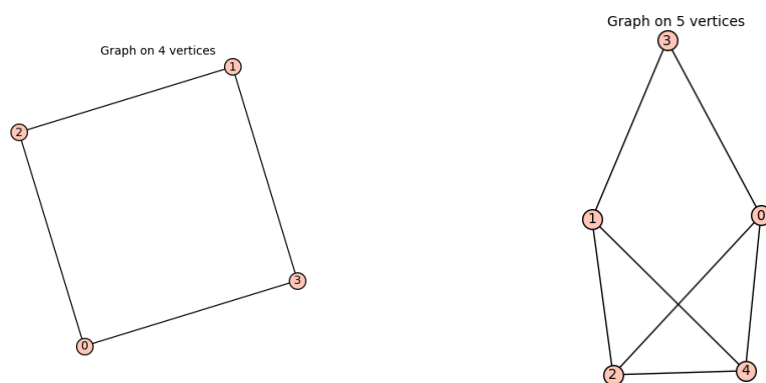
Slika 7: $\text{do5}[4]$ in $\text{do5}[26]$



Slika 8: $\text{do5}[6]$ in $\text{do5}[6]$



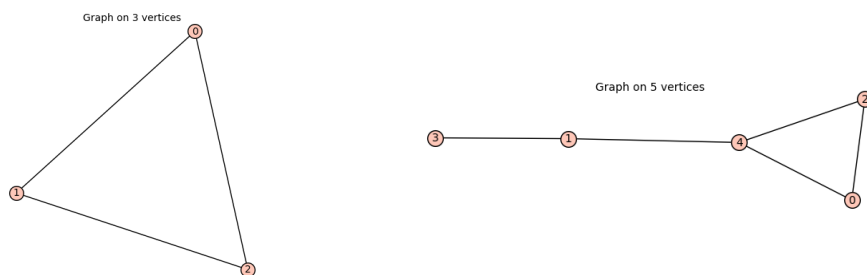
Slika 9: $\text{do5}[6]$ in $\text{do5}[15]$



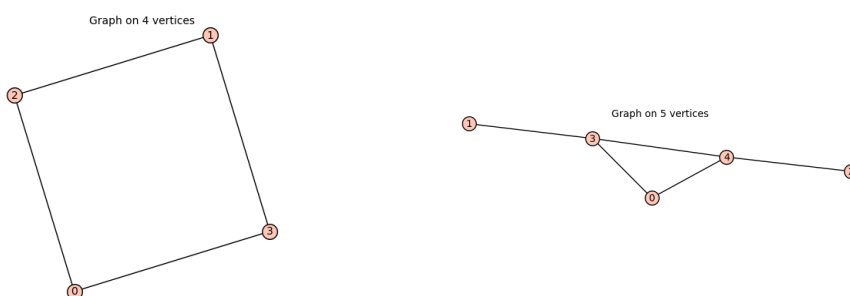
Slika 10: $\text{do5}[6]$ in $\text{do5}[26]$

$k = 3$: Maksimum c -ja je bil sedaj $5/3$, kar je manj od 2, število parov pri katerih je prišlo do maksimuma pa 6. To nakazuje na domnevo da, ko povečujemo število k se koeficient c manjša. Minimum koeficienta c je bil $9/13$.

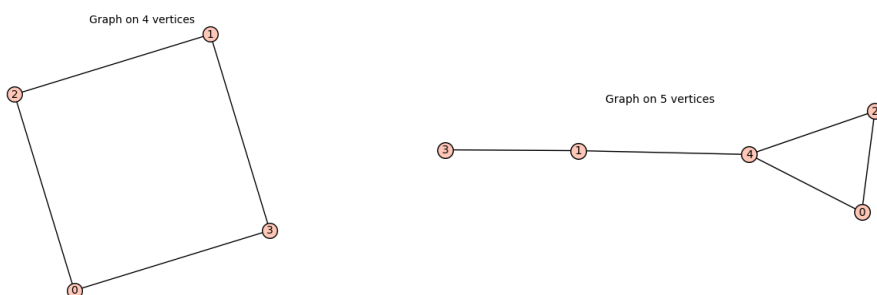
Spodaj so podani pari grafov pri katerih pride do maksimuma pri $k = 3$:



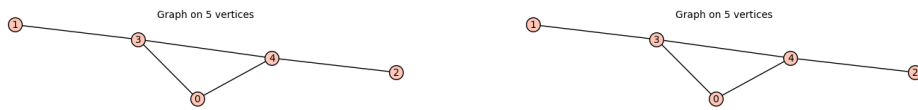
Slika 11: $\text{do5}[2]$ in $\text{do5}[18]$



Slika 12: $\text{do5}[6]$ in $\text{do5}[13]$



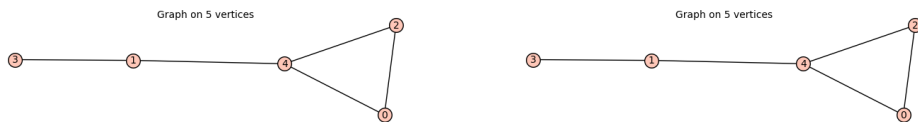
Slika 13: $\text{do5}[6]$ in $\text{do5}[18]$



Slika 14: $\text{do5}[13]$ in $\text{do5}[13]$

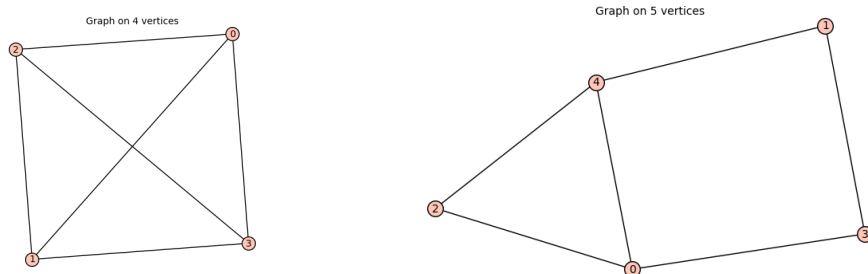


Slika 15: $\text{do5}[13]$ in $\text{do5}[18]$



Slika 16: $\text{do5}[18]$ in $\text{do5}[18]$

$k = 4$: Maksimum c -ja se je ponovno zmanjšal pri $k = 4$, saj je $20/13$, kar je manj od $5/3$. Minimum koeficienta c pa je 1. Spodaj je podan par grafov pri katerem pride do maksimuma pri $k = 4$:



Slika 17: $\text{do5}[8]$ in $\text{do5}[21]$

Zaenkrat bi lahko sklepali, da ko povečujemo k , se maksimum koeficienta c manjša, minimum pa več. Da bi to potrdili moramo testirati še grafe z več vozlišči.

3.2 Dvodelni grafi

Podobno, kot pri prejšnjem primeru sva generirala grafe, tokrat dvodelne povezane do 6 vozlišč. Teh je 27, torej vseh možnih kombinacij parov je $\binom{28}{2} = 378$. Tudi ta primer potrди naše sklepanje, da se maksimum c -ja zmanjša, minimum pa poveča, ob večanju k -ja, saj smo pri $k = 2$ dobili $\max(c)=2$, $\min(c)=1/3$, pri $k = 3$ smo dobili $\max(c)=5/3$, $\min(c)=9/16$, pri $k = 4$ pa $\max(c)=30/19$, $\min(c)=4/5$.

Pari grafov pri katerih pride do maksimuma pri $k = 2$ so naslednji:



Slika 18: tdo6[0] in tdo6[4]



Slika 19: tdo6[0] in tdo6[8]



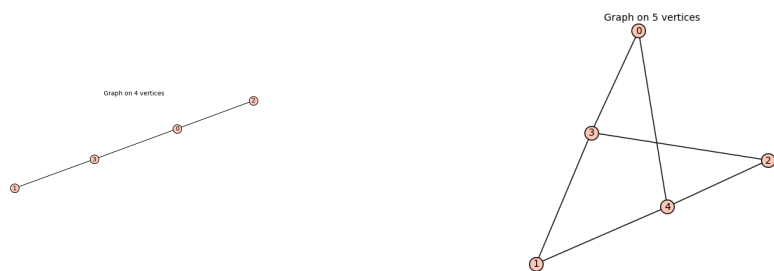
Slika 20: tdo6[0] in tdo6[17]



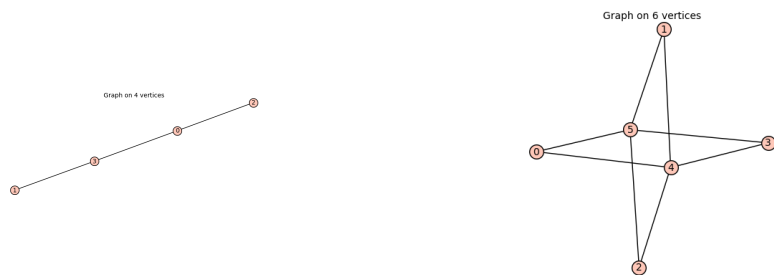
Slika 21: $\text{tdo6}[3]$ in $\text{tdo6}[3]$



Slika 22: $\text{tdo6}[3]$ in $\text{tdo6}[4]$



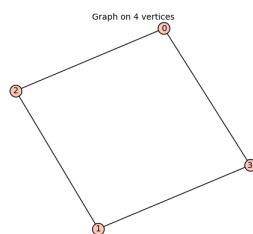
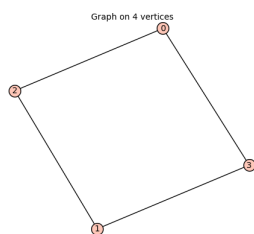
Slika 23: $\text{tdo6}[3]$ in $\text{tdo6}[8]$



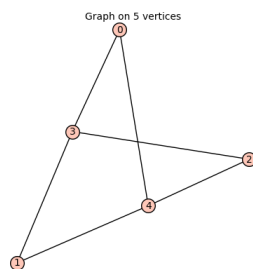
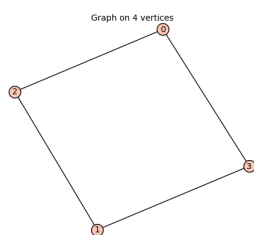
Slika 24: $\text{tdo6}[3]$ in $\text{tdo6}[17]$



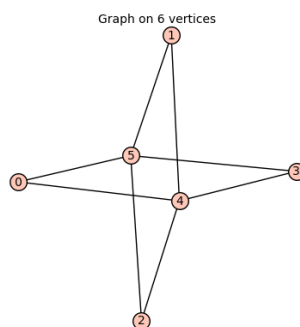
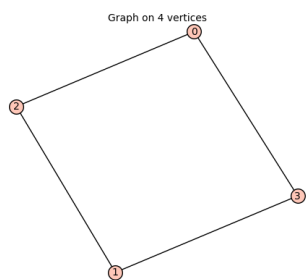
Slika 25: $\text{tdo6}[3]$ in $\text{tdo6}[18]$



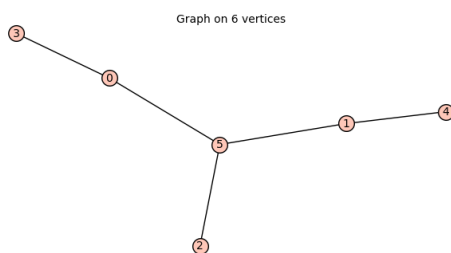
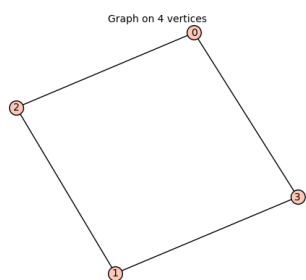
Slika 26: $\text{tdo6}[4]$ in $\text{tdo6}[4]$



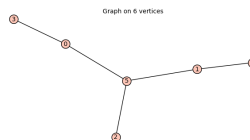
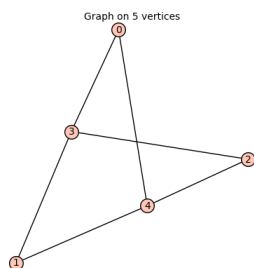
Slika 27: $\text{tdo6}[4]$ in $\text{tdo6}[8]$



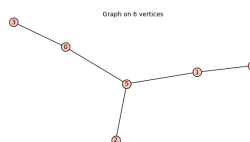
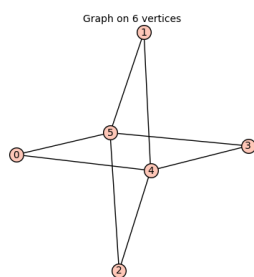
Slika 28: $\text{tdo6}[4]$ in $\text{tdo6}[17]$



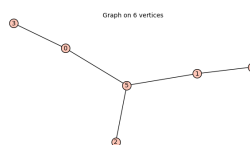
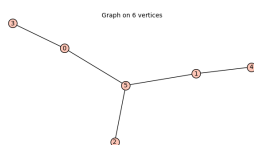
Slika 29: $\text{tdo6}[4]$ in $\text{tdo6}[18]$



Slika 30: tdo6[8] in tdo6[18]

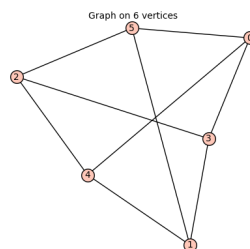
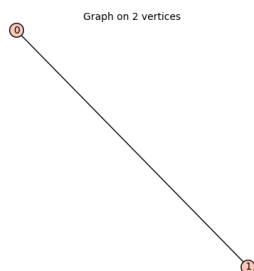


Slika 31: tdo6[17] in tdo6[18]



Slika 32: tdo6[18] in tdo6[18]

Pari grafov pri katerih pride do maksimuma pri $k = 3$ (torej $5/3$), so naslednji:



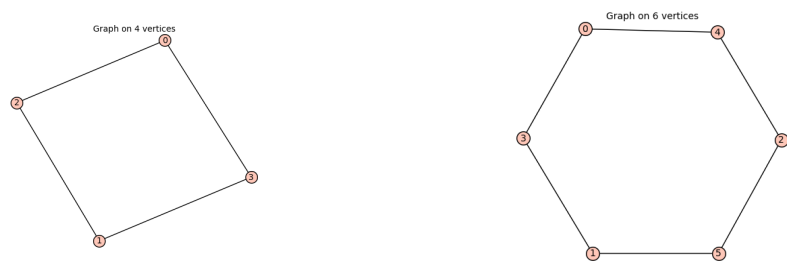
Slika 33: tdo6[0] in tdo6[26]



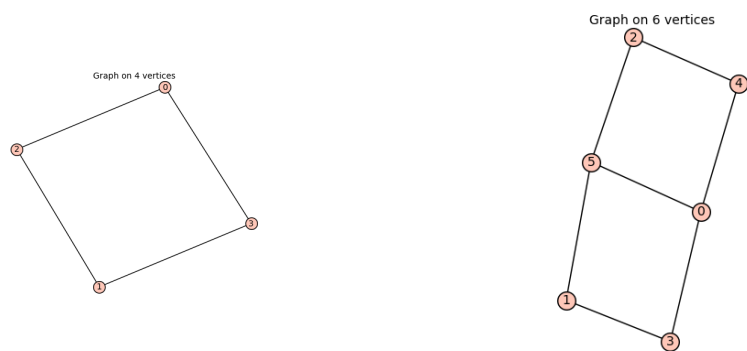
Slika 34: $\text{tdo6}[1]$ in $\text{tdo6}[26]$



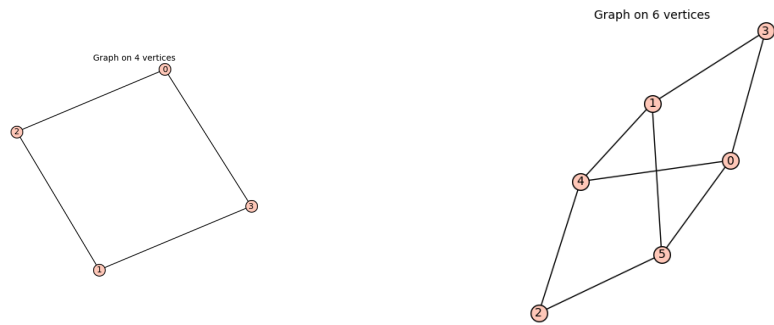
Slika 35: $\text{tdo6}[3]$ in $\text{tdo6}[26]$



Slika 36: $\text{tdo6}[4]$ in $\text{tdo6}[23]$



Slika 37: $\text{tdo6}[4]$ in $\text{tdo6}[24]$



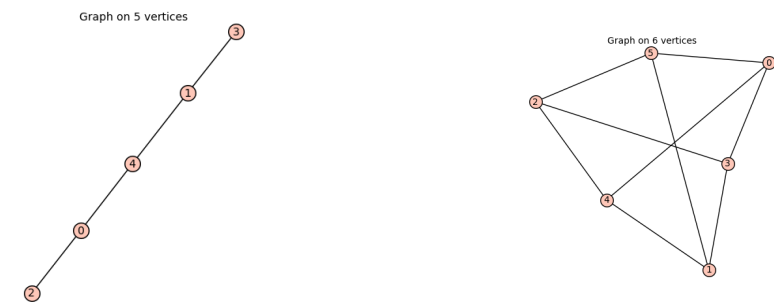
Slika 38: $\text{tdo6}[4]$ in $\text{tdo6}[25]$



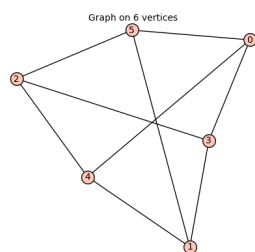
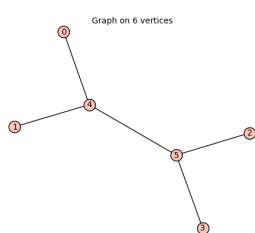
Slika 39: $\text{tdo6}[4]$ in $\text{tdo6}[26]$



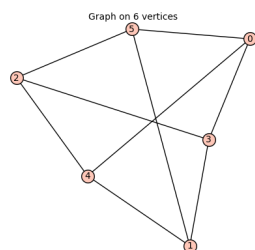
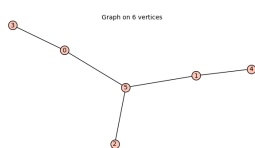
Slika 40: $\text{tdo6}[6]$ in $\text{tdo6}[26]$



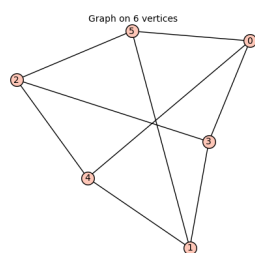
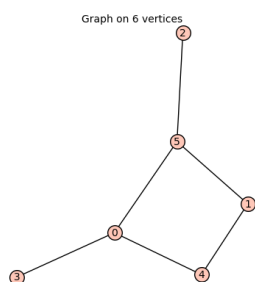
Slika 41: $\text{tdo6}[9]$ in $\text{tdo6}[26]$



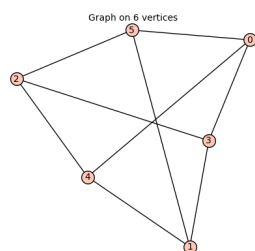
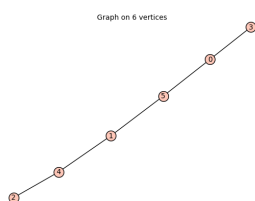
Slika 42: tdo6[14] in tdo6[26]



Slika 43: tdo6[18] in tdo6[26]

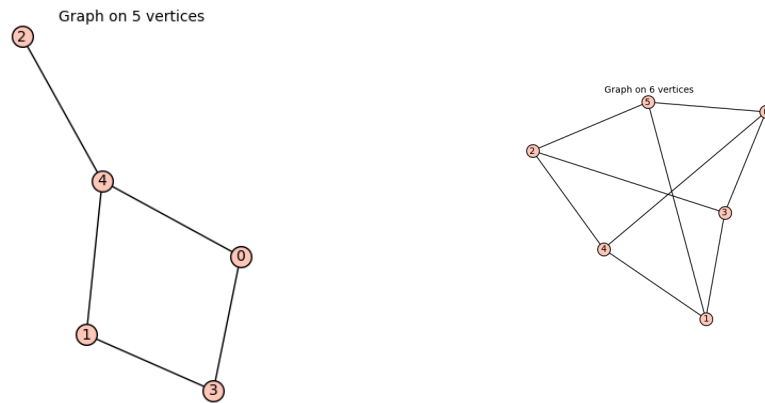


Slika 44: tdo6[19] in tdo6[26]

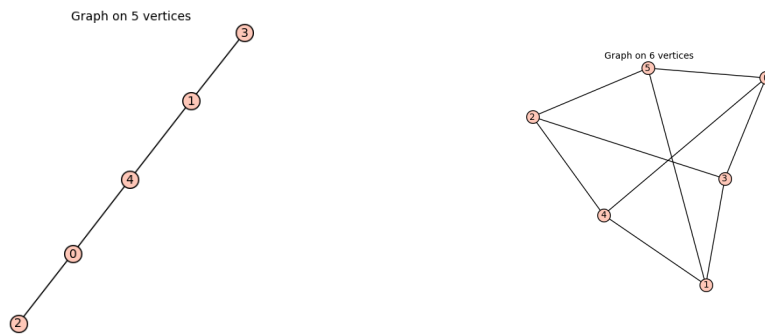


Slika 45: tdo6[20] in tdo6[26]

Para grafov pri katerih pride do maksimuma pri $k = 4$ (torej 30/19) pa sta naslednja:



Slika 46: tdo6[7] in tdo6[26]



Slika 47: tdo6[9] in tdo6[26]

Vidimo pri maksimum velja : $2 > 5/3 > 30/19$, se manjša,
pri minimum pa: $1/3 < 9/16 < 4/5$, se več.

Tudi število parov, ki dosežejo maksimum se zmanjša, saj je pri $k = 2$ maksimum doseglo 15 različnih parov, pri $k = 3$, 10 različnih, pri $k = 4$ pa le 2 različna para.

Vzela sva tudi dvodelne grafe do 7 vozlišč (71 možnih), kjer sva pri generiranju parov odzela tiste, ki so bili že obravnavani v prejšnjem primeru (kombinacij je torej $\binom{7^2}{2} - 378 = 2178$). Dobili smo sledeče:
 $k = 2$: $\max(c) = 2$, $\min(c) = 2/7$
 Pari grafov, kjer je dosežen maksimum so:



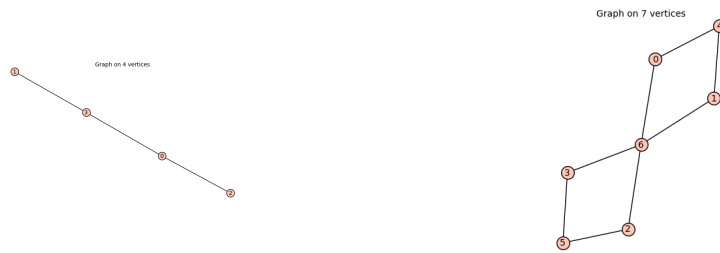
Slika 48: tdo7[0] in tdo7[37]



Slika 49: tdo7[0] in tdo7[55]



Slika 50: tdo7[3] in tdo7[37]



Slika 51: $\text{tdo7}[3]$ in $\text{tdo7}[55]$



Slika 52: $\text{tdo7}[4]$ in $\text{tdo7}[37]$



Slika 53: $\text{tdo7}[4]$ in $\text{tdo7}[52]$



Slika 54: $\text{tdo7}[4]$ in $\text{tdo7}[55]$



Slika 55: $\text{tdo7}[4]$ in $\text{tdo7}[68]$



Slika 56: $\text{tdo7}[18]$ in $\text{tdo7}[37]$



Slika 57: $\text{tdo7}[18]$ in $\text{tdo7}[55]$

$k = 3$: $\max(c) = 12/7$, $\min(c) = 9/19$
 Par grafov, kjer je dosežen maksimum $12/7$ je:



Slika 58: $\text{tdo7}[4]$ in $\text{tdo7}[60]$

Ponovno rezultati potrjujejo našo domnevo.

3.3 Poti

Sprva sva opazovala vse kartezijske produkte poti na i vozliščih (kar je znašalo $i \cdot (i - 1)/2$ rezultatov). Ugotovila pa sva, da se večinoma večje vrednosti za c nahajajo na začetku, torej da z večanjem vozlišč c v povprečju pada. S povečevanjem vozlišč bi tako dobivali le enake maksimume za c , saj se ti pojavijo pri manjših grafih. Zato sva se odločila, da z vsakim naslednjim poskusom zajameva le grafe, ki jih prej še nisva. Torej, da fiksiramo j (1. graf je torej P_j) in opazujemo obnašanje c -ja, ko število vozlišč 2. grafa teče od 2 do j . Dobila sva zanimive rezultate, predvsem je zanimiv pojav pri grafu P_4 . Kadar je $k = 2$, se največji c vedno pojavi v kombinaciji s slednjim grafom. Prišla sva do največ P_{12} , za izračun c -ja pri podanih P_9 in P_{12} je program potreboval več kot en dan, nato se je ustavil (ne da bi vrnil vrednost). Kljub temu bi lahko iz vzorca sklepali, da je največji c dosežen pri P_4 in P_{12} . Pri $k = 2$ je maksimalni $c = 2$, dobimo pa ga v kombinaciji z grafoma P_4 . Za $k = 3$ sva najdlje prišla na 9-poti, pa še to brez 8,8-poti, 7,9-poti, 8,9-poti in 9,9-poti. Največji c pri dobljenih rezultatih je znašal $20/13$ (za 4,5-poti). Pri $k = 4$ je c največji z grafoma 6,6-poti, in sicer $c = 4/3$ (do 6 vozlišč).

Ugotovila sva, da če sta n in k dovolj velika, bo k -totalno dominantno število enako n . To velja za $k \geq 4$ in $n \geq 2$. To pomeni, da je pri takih kartezijskih produktih število obarvanih vozlišč enako številu vozlišč poti. To je jasno iz skice takega grafa. Tudi pri 3-polnem grafu dobimo vzorec k -totalnega dominantnega števila za pot, in sicer so rezultati sledeči: $[2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 14, \dots]$, torej bo zmnožek $3 - rt$ števil grafov n in m poti v primerjavi s $k \geq 4$ padal, ko sta n in m vedno večja (v smislu da je pri $n = 7$ in $m = 3$ v prvem primeru $3 \cdot 7 = 21$, pri $k = 3$ pa $3 \cdot 6 = 18$). Pri $k = 2$ pa je $2 - rt$ število enako $[2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, \dots]$, kjer je indeks v seznamu enak številu vozlišč poti (prvi element ima indeks 1). Tu je zmnožek še manjši (za $n = 7$, $m = 3$ dobimo $2 \cdot 6 = 12$). To je tudi smiselno, saj večji kot je graf, večje število vozlišč bo v dominantni množici. Pri dotičnem primeru, torej 3-poti, 7-poti in k iz $(2, 3, 4)$, c z naraščanjem k pada.

Problem, s katerim sva se soočala vseskozi projekt, je bil zahtevnost računanja k -totalnih dominantnih števil. Za manjše grafe in manjše k , kar je pri poteh pomenilo do 10 vozlišč, sva si pri računanju »grafa« (kot se je imenovala funkcija, ki je vračala najin c) pomagala le s for zanko. Za splošne grafe pa sva za boljšo raziskovo uporabljala metodo simulated annealing. Za $k = 3$ je bilo že 9 vozlišč na meji zmogljivosti, saj je program po 7 urah računanja vrnil največ $(7,8)$ in $(6,9)$, torej ne pa kaj se zgodi, če opazujemo 8×8 , 7×9 , 8×9 in 9×9 poti.

3.4 Drevesa

Najprej sva naredila seznam neizomorfni dreves. Takšnih dreves na do 10 vozliščih je 201. Ker so bile že pri poteh na 12 vozliščih in $k = 2$ težave, sva tu pričakovala še počasnejše računanje. Pri $k = 2$ je bil največji $c = 2$. Skušala sva računati le za drevesa na 9 vozliščih, vendar jih je izračunal zelo malo, največ $T[48]$, $T[201]$. Pri $k = 3$ je izračunal največ drevesa na do 7 vozlišč, $c = 35/22$; pri $k = 4$ je $c = 4/3$ (vozlišča do 5); $k = 5$, $c = 5/4$ (do 5 vozlišč).

3.5 Simulated annealing

Za večje grafe sva definirala psevdokodo po metodi simulated annealing:

```
from sage.graphs.connectivity import is_connected
def spremeni_povezave(G):
    H = Graph(G)
    if random() < 0.5:
        p=0
        while True:
            H.delete_edge(H.random_edge())
            if is_connected(H):
                H
                break
            else:
                H = Graph(G)
                p += 1
                True
        if p > 20:          #če ne more odstraniti povezave mu jo doda
            H.add_edge(H.complement().random_edge())
            break
    else:
        if H.complement().size() == 0:
            H.delete_edge(H.random_edge())
        else:
            H.add_edge(H.complement().random_edge())
    return H

k = 2
p = 0
stevilo_korakov = 300
cost_grafa = konstanta(prvi_graf, drugi_graf, k)
for p in range(0, stevilo_korakov):
    Temp = stevilo_korakov / (p+1)
    a = random()
    if a < (1/3):
        novi_prvi_graf = spremeni_povezave(prvi_graf)
        novi_drugi_graf = spremeni_povezave(drugi_graf)
    elif (1/3)<a and a<(2/3):
        novi_prvi_graf = spremeni_povezave(prvi_graf)
        novi_drugi_graf = drugi_graf
    else:
        novi_prvi_graf = prvi_graf
        novi_drugi_graf = spremeni_povezave(drugi_graf)

    cost_nova_grafa = konstanta(novi_prvi_graf, novi_drugi_graf, k)
    razlika = cost_nova_grafa - cost_grafa      #če razlika pozitivna zamenjamo prvotna grafa z novimi
    if razlika > 0:
        prvi_graf = novi_prvi_graf
        drugi_graf = novi_drugi_graf
        cost_grafa = cost_nova_grafa
    elif exp((razlika * 200) / Temp) > random():
        prvi_graf = novi_prvi_graf
        drugi_graf = novi_drugi_graf
        cost_grafa = cost_nova_grafa
    p += 1
```

Ta algoritem sprejme dva naključna grafa na določenem številu vozlišč, ki jima nato spreminja povezave, s funkcijo *spremeni_povezave()* in ugotavlja kako morata biti ta dva grafa povezana, da dosežemo čim večji koeficient c . Tu sva vstavljala grafe velikosti od 8 do 10 vozlišč. Prav vsi poskusi so ponovno pokazali, da ko povečamo k se koeficient c zmanjša. Pri $k = 2$ algoritem večinoma vrne vrednost $c = 2$. Takoj ko k povečamo pa vrednost c -ja pade.

4 Zaključek

V vseh najinih poskusih vrednost koeficienta c nikoli ni bila večja od 2. To pomeni, da nisva našla protiprimera obravnavane domneve Vizingovega tipa. Sva pa prišla do ugotovitve, da kadar je $k \geq 3$, bo c vedno strogo manjši od 2. Torej, maksimalni c se pojavi le v kombinaciji s $k = 2$. Poleg tega sva ugotovila, da c v vseh obravnavanih grafih pada, ko večamo k , pri tem pa je pri dvodelnih grafih (kjer sva beležila tudi najmanjše vrednosti za c) minimalni c naraščal proti 1.