Finančni praktikum

Vizing type conjecture for k-total rainbow domination number

Avtorja:

Brina Pirc, Marcel Špehonja

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za matematiko in fiziko

November, 2019

Kazalo

1 Predstavitev problema

1.1 Naloga

Ukrajinski matematik Vadim G. Vizing je leta 1963 postavil znano domnevo, da je produkt dominantnih števil grafov G in H kvečjemu manjši od dominantnega števila kartezičnega produkta teh dveh grafov. Medtem ko dokaz te domneve še vedno ostaja eden večjih problemov v teoriji grafov, se bova v svojem projektu spraševala, ali lahko pridemo bližje potrditvi (oz. zavrnitvi) naslednje domneve Vizingovega tipa:

Domneva 4: Naj bosta G in H povezana, neusmerjena grafa in $k \geq 2$. Potem velja:

$$\gamma_{krt}(G) \cdot \gamma_{krt}(H) \geq 2 \cdot \gamma_{krt}(G \square H).$$

Pri tem je $\gamma_{krt}(G)$ oznaka za totalno dominantno število grafa G, kartezično pomnoženega s K-polnim grafom, torej $\gamma_{krt}(G) = \gamma_t(G \square K_k)$.

1.2 Definicije

<u>Dominantna množica</u>: dominantna množica grafa $G = (V, E)$ je podmnožica vozlišč $D \subset V$, za katero velja, da ima vsako vozlišče v iz $V \backslash D$ vsaj enega soseda, ki je element D.
<u>Dominantno število</u>: dominantno število grafa G je število vozlišč v najmanjši dominantni množici dominantne množice.
<u>Totalno dominantno število</u>: je enako dominantnemu številu, z izjemo tega, da morajo imeti elementi v totalni dominantni množici prav tako povezavo z enim iz te množice. Torej prav vsako vozlišče grafa G, brez izjeme, mora imeti soseda v totalni dominantni množici (da je sam del te množice ne zadostuje).
<u>Kartezijski produkt</u>: grafov $G = (V, E)$ in $H = (V', E')$ je graf $G \square H$ z naborom vozlišč $V \times V'$ ter povezavami med (v, v') in (u, u'), če je obstajala povezava med v in u ali med v' in u'.
<u>Total k-rainbow domination number</u>: je totalno dominantno število grafa G, kartezijsko pomnoženega z grafom K_k, kar je oznaka za k-poln graf.

2 Pristop k reševanju

Za opravljanje projekta sva uporabljala programski jezik *Sage* na platformi *Cocalc*. Najina naloga je bila poiskati protiprimer domneve Vizingovega tipa, torej poiskati taka grafa G in H, kjer neenakost ne velja. Sprva sva definirala funkcijo, ki sprejme dva grafa G in H ter koeficient k, vrne pa tako število c, za katero velja enakost $\gamma_{krt}(G) \cdot \gamma_{krt}(H) = c \cdot \gamma_{krt}(G \Box H)$.

```
def konstanta(prvi, drugi, k):

    poln_graf = graphs.CompleteGraph(k)

    kartezijski_prvega_in_polnega = prvi.cartesian_product(poln_graf)
    kartezijski_drugega_in_polnega = drugi.cartesian_product(poln_graf)

    kartezijski_prvega_in_drugega = drugi.cartesian_product(prvi)
    kartezijski_kartezijskega = kartezijski_prvega_in_drugega.cartesian_product(poln_graf)

    krt_prvega = kartezijski_prvega_in_polnega.dominating_set(value_only=True, total=True)
    krt_drugega = kartezijski_drugega_in_polnega.dominating_set(value_only=True, total=True)
    krt_obeh = kartezijski_kartezijskega.dominating_set(value_only=True, total=True)

    return (krt_prvega * krt_drugega) / krt_obeh
```

Če torej dana domneva drži, mora biti $c \leq 2$ za poljuben par povezanih grafov ter podan k. Cilj projekta je bil poiskati primer, pri katerem bo $c > 2$. Seveda je to težek problem, zato sva sprva opazovala, kaj se dogaja pri manjših grafih G in H. Postopoma sva povečevala število vozlišč. Pri manjših grafih do 5 vozlišč sva skušala preizkusiti vse možnosti, pri večjih grafih pa sva s pomočjo hevristike dodajala ali odvzemala povezave in sistematično raziskovala izide. Tu sva uporabila metodo *simulated annealing*. Hkrati sva počasi povečevala tudi k. Posebej sva obravnavala tudi dvodelne grafe, poti in drevesa ter ugotavljala kako se obnašajo v dani neenakosti. Zanimalo naju je predvsem pri katerem paru grafov je c največji, če je k konstanten.

3 Testiranje

3.1 Vsi grafi do 5 vozlišč

Najprej sva generirala vse povezane grafe od 2 do 5 vozlišč, ki jih je 30. Nato sva vzela vse možne kombinacije parov teh grafov, torej $\binom{31}{2} = 465$, ter vse te kombinacije vstavila v najino funkcijo, ki vrne iskan koeficient c. Dane rezultate sva nato vstavila v novi funkciji, ki sta poiskali maksimum in minimum izračunanih c-jev, ter izpisali pare grafov pri katerih je prišlo do teh ekstremov.

Pri prvem poskusu je bil $k = 2$: Maksimum iskanih koeficientov c je bil enak 2, število parov pri katerih je prišlo do maksimuma pa je bilo kar 10. Torej je pri desetih različnih parih grafov prišlo do enakosti domneve $\gamma_{krt}(G) \cdot \gamma_{krt}(H) = 2 \cdot \gamma_{krt}(G \Box H)$. Minimum koeficienta c je bil $2/5$.

$k = 3$: Maksimum c-ja je bil sedaj $5/3$, kar je manj od 2, število parov pri katerih je prišlo do maksimuma pa 6. To nakazuje na domnevo da, ko povečujemo število k se koeficient c manjša. Minimum koeficienta c je bil $9/13$.

$k = 4$: Maksimum c-ja se je ponovno zmanjšal pri $k = 4$, saj je 20/13, kar je manj od 5/3. Minimum koeficienta c pa je 1. Zaenkrat bi lahko sklepali, da ko povečujemo k, se maksimum koeficienta c manjša, minimum pa veča. Da bi to potrdili moramo testirati še grafe z več vozlišči.

3.2 Dvodelni grafi

Podobno, kot pri prejšnjem primeru sva generirala grafe, tokrat dvodelne povezane do 6 vozlišč. Teh je 27, torej vseh možnih kombinacij parov je $\binom{28}{2} = 378$. Tudi ta primer potrdi naše sklepanje, da se maksimum c-ja zmanjša, minimum pa poveča, ob večanju k-ja, saj smo pri $k = 2$ dobili max(c)=2, min(c)=1/3, pri $k = 3$ smo dobili max(c)=5/3, min(c)=9/16, pri $k = 4$ pa max(c)=30/19, min(c)=4/5.
Vidimo pri maksimum velja : $2 > 5/3 > 30/19$, se manjša,
pri minimum pa: $1/3 < 9/16 < 4/5$, se veča.
Tudi število parov, ki dosežejo maksimum se zmanjša, saj je pri $k = 2$ maksimum doseglo 15 različnih parov, pri $k = 3$, 10 različnih, pri $k = 4$ pa le 2 različna para.
Vzela sva tudi dvodelne grafe do 7 vozlišč (71 možnih), kjer sva pri generiranju parov odvzela tiste, ki so bili že obravnavani v prejšnjem primeru (kombinacij je torej $\binom{72}{2} - 378 = 2178$). Dobili smo sledeče:
$k = 2$: max(c) = 2 , min(c) = 2/7
$k = 3$: max(c)= 12/7, min(c)=9/19
Ponovno rezultati potrjujejo našo domnevo.

3.3 Poti

Sprva sva opazovala vse kartezijske produkte poti na i vozliščih (kar je znašalo $i \cdot (i-1)/2$ rezultatov). Ugotovila pa sva, da se večinoma večje vrednosti za c nahajajo na začetku, torej da z večanjem vozlišč c v povprečju pada. S povečevanjem vozlišč bi tako dobivali le enake maksimume za c, saj se ti pojavijo pri manjših grafih. Zato sva se odločila, da z vsakim naslednjim poskusom zajameva le grafe, ki jih prej še nisva. Torej, da fiksiramo j (1. graf je torej P_j) in opazujemo obnašanje c-ja, ko število vozlišč 2. grafa teče od 2 do j. Dobila sva zanimive rezultate, predvsem je zanimiv pojav pri grafu P_4. Kadar je $k = 2$, se največji c vedno pojavi v kombinaciji s slednjim grafom. Prišla sva do največ P_{12}, za izračun c-ja pri podanih P_9 in P_{12} je program potreboval več kot en dan, nato se je ustavil (ne da bi vrnil vrednost). Kljub temu bi lahko iz vzorca sklepali, da je največji c dosežen pri P_4 in P_{12}. Pri $k = 2$ je maksimalni $c = 2$, dobimo pa ga v kombinaciji z grafoma P_4. Za

$k = 3$ sva najdlje prišla na 9-poti, pa še to brez 8,8-poti, 7,9-poti, 8,9-poti in 9,9-poti. Največji c pri dobljenih rezultatih je znašal $20/13$ (za 4,5-poti). Pri $k = 4$ je c največji z grafoma 6,6-poti, in sicer $c = 4/3$ (do 6 vozlišč).
Ugotovila sva, da če sta n in k dovolj velika, bo k-totalno dominantno število enako n. To velja za $k \geq 4$ in $n \geq 2$. To pomeni, da je pri takih kartezijskih produktih število obarvanih vozlišč enako številu vozlišč poti. To je jasno iz skice takega grafa. Tudi pri 3-polnem grafu dobimo vzorec k-totalnega dominantnega števila za pot, in sicer so rezulati sledeči: $[2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 14, ...]$, torej bo zmnožek $3 - rt$ števil grafov n in m poti v primerjavi s $k \geq 4$ padal, ko sta n in m vedno večja (v smislu da je pri $n = 7$ in $m = 3$ v prvem primeru $3 \cdot 7 = 21$, pri $k = 3$ pa $3 \cdot 6 = 18$). Pri $k = 2$ pa je $2 - rt$ število enako $[2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, ...]$, kjer je indeks v seznamu enak številu vozlišč poti (prvi element ima indeks 1). Tu je zmnožek še manjši (za $n = 7$, $m = 3$ dobimo $2 \cdot 6 = 12$). To je tudi smiselno, saj večji kot je graf, večje število vozlišč bo v dominantni množici. Pri dotičnem primeru, torej 3-poti, 7-poti in k iz (2, 3, 4), c z naraščanjem k pada.
Problem, s katerim sva se soočala vseskozi projekt, je bil zahtevnost računanja k-totalnih dominantnih števil. Za manjše grafe in manjše k, kar je pri poteh pomenilo do 10 vozlišč, sva si pri računanju »grafa« (kot se je imenovala funkcija, ki je vračala najin c) pomagala le s for zanko. Za splošne grafe pa sva za boljšo raziskovo uporabljala metodo simulated annealing. Za $k = 3$ je bilo že 9 vozlišč na meji zmogljivosti, saj je program po 7 urah računanja vrnil največ (7,8) in (6,9), torej ne pa kaj se zgodi, če opazujemo 8×8, 7×9, 8×9 in 9×9 poti.

3.4 Drevesa

Najprej sva naredila seznam neizomorfnih dreves. Takšnih dreves na do 10 vozliščih je 201. Ker so bile že pri poteh na 12 vozliščih in $k = 2$ težave, sva tu pričakovala še počasnejše računanje. Pri $k = 2$ je bil največji $c = 2$. Skušala sva računati le za drevesa na 9 vozliščih, vendar jih je izračunal zelo malo, največ $T[48]$, $T[201]$. Pri $k = 3$ je izračunal največ drevesa na do 7 vozlišč, $c = 35/22$; pri $k = 4$ je $c = 4/3$ (vozlišča do 5); $k = 5$, $c = 5/4$ (do 5 vozlišč).

3.5 Simulated annealing

Za večje grafe sva definirala psevdokodo po metodi simulated annealing:

```
from sage.graphs.connectivity import is_connected
def spremeni_povezave(G):
    H = Graph(G)
    if random() < 0.5:
        p=0
        while True:
            H.delete_edge(H.random_edge())
            if is_connected(H):
                H
                break
            else:
                H = Graph(G)
                p += 1
                True
            if p > 20:         #če ne more odstraniti povezave mu jo doda
                H.add_edge(H.complement().random_edge())
                break
    else:
        if H.complement().size() == 0:
            H.delete_edge(H.random_edge())
        else:
            H.add_edge(H.complement().random_edge())
    return H
```

```
k = 2
p = 0
stevilo_korakov = 300
cost_grafa = konstanta(prvi_graf, drugi_graf, k)
for p in range(0, stevilo_korakov):
    Temp = stevilo_korakov / (p+1)
    a = random()
    if a < (1/3):
        novi_prvi_graf = spremeni_povezave(prvi_graf)
        novi_drugi_graf = spremeni_povezave(drugi_graf)
    elif (1/3)<a and a<(2/3):
        novi_prvi_graf = spremeni_povezave(prvi_graf)
        novi_drugi_graf = drugi_graf
    else:
        novi_prvi_graf = prvi_graf
        novi_drugi_graf = spremeni_povezave(drugi_graf)

    cost_nova_grafa = konstanta(novi_prvi_graf, novi_drugi_graf, k)
    razlika = cost_nova_grafa - cost_grafa     #če razlika pozitivna zamenjamo prvotna grafa z novimi
    if razlika > 0:
        prvi_graf = novi_prvi_graf
        drugi_graf = novi_drugi_graf
        cost_grafa = cost_nova_grafa
    elif  exp((razlika * 200) / Temp) > random():
        prvi_graf = novi_prvi_graf
        drugi_graf = novi_drugi_graf
        cost_grafa = cost_nova_grafa
    p += 1
```

Ta algoritem sprejme dva naključna grafa na določenem številu vozlišč, ki jima nato spreminja povezave, s funkcijo *spremeni_povezave*() in ugotavlja kako morata biti ta dva grafa povezana, da dosežemo čim večji koeficient c. Tu sva vstavljala grafe velikosti od 8 do 10 vozlišč. Prav vsi poskusi so ponovno pokazali, da ko povečamo k se koeficient c zmanjša. Pri $k = 2$ algoritem večinoma vrne vrednost $c = 2$. Takoj ko k povečamo pa vrednost c-ja pade.

4 Zaključek

V vseh najinih poskusih vrednost koeficienta c nikoli ni bila večja od 2. To pomeni, da nisva našla protiprimera obravnavane domneve Vizingovega tipa. Sva pa prišla do ugotovitve, da kadar je $k \geq 3$, bo c vedno strogo manjši od 2. Torej, maksimalni c se pojavi le v kombinaciji s $k = 2$. Poleg tega sva ugotovila, da c v vseh obravnavanih grafih pada, ko večamo k, pri tem pa je pri dvodelnih grafih (kjer sva beležila tudi najmanjše vrednosti za c) minimalni c naraščal proti 1.