Vizing type conjecture for k-total rainbow domination number

Brina Pirc & Marcel Špehonja

November, 2019

1 Predstavitev problema

Ukrajinski matematik Vadim G. Vizing je leta 1963 postavil znano domnevo, da je produkt dominantnih števil grafov G in H kvečjemu manjši od dominantnega števila kartezičnega produkta teh dveh grafov. Medtem ko dokaz te domneve še vedno ostaja eden večjih problemov v teoriji grafov, se bova v svojem projektu spraševala, ali lahko pridemo bližje potrditvi (oz. zavrnitvi) naslednje domneve Vizingovega tipa:

Domneva 4: Naj bosta G in H grafa in $k \geq 2$. Potem velja:

$$\gamma_{krt}(G) \cdot \gamma_{krt}(H) \geq 2 \cdot \gamma_{krt}(G \Box H).$$

Pri tem je $\gamma_{krt}(G)$ oznaka za totalno dominantno število grafa G, kartezično pomnoženega s K-polnim grafom, torej $\gamma_{krt}(G) = \gamma_t(G \Box K_k)$.

2 Definicije

<u>Dominantna množica</u>: dominantna množica grafa $G = (V, E)$ je podmnožica vozlišč $D \subset V$, za katero velja, da ima vsako vozlišče v iz $V \backslash D$ vsaj enega soseda, ki je element D.
<u>Dominantno število</u>: dominantno število grafa G je število vozlišč v najmanjši dominantni množici dominantne množice.
<u>Totalno dominantno število</u>: je enako dominantnemu številu, z izjemo tega, da morajo imeti elementi v totalni dominantni množici prav tako povezavo z enim iz te množice. Torej prav vsako vozlišče grafa G, brez izjeme, mora imeti soseda v totalni dominantni množici (da je sam del te množice ne zadostuje).
<u>Kartezijski produkt</u>: grafov $G = (V, E)$ in $H = (V', E')$ je graf $G \Box H$ z naborom vozlišč $V \times V'$ ter povezavami med (v, v') in (u, u'), če je obstajala povezava med v in u ali med v' in u'.
<u>Total k-rainbow domination number</u>: je totalno dominantno število grafa G, kartezijsko pomnoženega z grafom K_k, kar je oznaka za k-poln graf.
<u>k-poln graf</u>: graf na k vozliščih, za vsako vozlišče pa velja, da je povezano z vsemi ostalimi vozlišči. To pomeni, da ima K_k graf k vozlišč in $k(k-1)/2$ povezav.

3 Cilj

Najin glavni cilj je najti taka grafa G in H, da naša *Domneva* 4 ne bo veljala. Seveda je to težek problem, zato bova sprva opazovala, kaj se dogaja pri manjših grafih G in H. Postopoma bova povečevala število vozlišč. Pri manjših grafih bova skušala preizkusiti vse možnosti, pri večjih grafih pa bova s pomočjo hevristike dodajala nove povezave in sistematično raziskovala izide. Zraven bova počasi povečevala tudi k. Na tak način bova želela ovreči *Domnevo* 4. Poleg tega pa se bova posvetila tudi obravnavanju konstante, ki je v naši domnevi enaka 2. Zanimalo naju bo, ali se lahko s povečevanjem k število 2 morda zmanjša (oz. celo poveča) in katera je ta vrednost, s katero bi nadomestili 2. Zadnji del poskusa, ki bo zajet skupaj s preostalima dvema, bo iskanje takega k za k-poln graf, da bo veljala enakost med levo in desno stranjo domneve.