$\ln 2 < 0.7$ 的估值与探索

——一篇陪伴我一年的文章

笔者 1molchuan

2026 年 1 月 5 日

“温斯顿斟满酒杯，说：‘过去更重要。’”

——乔治·奥威尔《*1984*》

目录

写在前面

第二次提笔，准备写下这篇陪伴我一年的文章。第一本送给了珍视的过去，也化作了过去，流下的仅是回忆罢了。当我跑过思源湖的星星灯火，我也穿梭进了回忆，在封存的记忆中找到了想再写一遍的愿望。或许我只是一个活在过去的幽魂。

重温过去，第一篇文章写在前同桌偶然打错的 $\ln 2$ 之后。至此 $\ln 2 < 0.7$ 的命题，或对 $\ln 2$ 的估值便成了我高中愉快的印记。也正是这一命题，让我看见高数代数背后的逻辑思路，或许这是美的。

我曾质疑我这一爱好是否合理。但有人有一天告诉我："你真觉得你没有你喜欢的东西吗？"我突然明白，爱好本身没有合理与否，不打扰他人，做自己喜欢的事，这就是正常的爱好。

所以犹豫再三，再一次提笔，重新写下这篇文章，可能想为之前的文章写下一个句号，也可能是为我的记忆作序……

1　切线放缩

1.1　基本的切线放缩（切点改变）

高中阶段，教科书中给出不等式

$$\ln x \le x - 1 \quad \mathrm{e}^x \ge x + 1$$

证明简单，这里就不过多阐述。

回到这个不等式本身，我们是如何发现这个式的。很明显，切线放缩 $y = x - 1$ 作为 $y = \ln x$ 的切线。$y = x + 1$ 作为 $y = \mathrm{e}^x$ 的切线。那么一般地，什么函数我们可以进行切线放缩?

答案是凸函数或凹函数（即 $f(x)$ 恒大于 0 或 $f(x)$ 恒小于 0）。以 $\ln x$ 为例，

令 $f(x) = \ln x$，$f'(x) = \frac{1}{x}$，$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ 显然 $\ln x$ 是凹函数（这里的凹函数不同于凸函数反转中的凹函数）。那么对于 $\ln x$ 上任意一点 $(x_0, \ln x_0)$ 都有

$$\ln x \le \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0$$

这里我们需要代入 $x = 2$，倘若我们所取切点 x_0 越接近 2，那么不等式越精确。这里我们取 $x_0 = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$（由于 $\mathrm{e}^2 \approx 7.389$，$2^3 \approx 8$）代入 $x = 2$ 得

$$\ln 2 \le 2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \approx 0.6933009$$

显然这相当精确

1.2　基本不等式放缩（取点改变）

在上一小节中我们初步尝试了改变的切点，获得了针对 $x = 2$ 的不等式，那么我们是否可以改变取点，在不改变切线不等式的基础上完成比较精准的方式? 答案当然是肯定，即只利用 $\ln x < x - 1$ 完成对 $\ln 2$ 较精准估值。我们可以利用 $\ln x$ 的性质：　$\ln x^n = n \ln x$ $(x > 0)$;　$\ln ab = \ln a + \ln b$。

那么我可以借助 2, e 和根号构造一个接近于 1 的不等式数字让不等式发挥最大作用，这里可以代入 $x = \frac{\mathrm{e}^2}{8}$ 和 $x = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^2}{8}}$ 得

$$\ln 2 < \frac{8 + \mathrm{e}^2}{3\mathrm{e}^2} \approx 0.694$$
$$\ln 2 < \frac{4\sqrt{\mathrm{e}}}{3\mathrm{e}} \approx 0.6936$$

确实相当精确了。

1.3 小结

本节我们并没有专注于升级我们的不等式，而是借助 $\ln x$ 的性质对 $\ln 2$ 进行估值。但是也需要承认它存在局限性。它还是需要对 e 值和一些无理数值进行估计。倘若改变的估计的数值，可能并不好取点。因此这类方法失去了自己的一部分普遍性。

2 积分构造

2.1 不等式加强（积分构造）

构造 1. 构造基础：构造 $f(x)$，使得 $f(x) \geq \ln x$，当且仅当 $x = 1$ 时取等。

- 在 $(0, 1]$ 上，$f'(x) \leq \frac{1}{x}$；
- 在 $[1, +\infty)$ 上，$f'(x) \geq \frac{1}{x}$。

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可导。则构造函数令 $[P(x)]' = f(x)$（注：本质是求不定积分）。

1. 构造推导

记符号 $\sim$ 代表比较关系：

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \ln x \\
\Rightarrow P(x) - P(1) - 1 &\sim x\ln x - x \quad (-P(1)-1 \text{ 用于调整系数使 } x=1 \text{ 时取等}) \\
= 1 + \frac{P(x) - P(1) - 1}{x} &\sim \ln x
\end{aligned}
$$

设辅助函数 $g(x)$：

$$
\begin{aligned}
\text{令}\frac{g(x)}{x} &= \frac{P(x)}{x} + 1 - \frac{P(1)+1}{x} - \ln x \\
\Rightarrow g(x) &= P(x) + x - P(1) - 1 - x\ln x \\
\Rightarrow g'(x) &= f(x) - \ln x \geq 0
\end{aligned}
$$

则在 $(0,1]$ 上 $g(x) \leq 0$，在 $[1,+\infty)$ 上 $g(x) \geq 0$。即得到：

$$
\begin{cases}
\ln x \geq \frac{P(x)}{x} + 1 - \frac{P(1)}{x}, & 0 < x \leq 1 \\
\ln x \leq \frac{P(x)}{x} + 1 - \frac{P(1)+1}{x}, & x > 1
\end{cases}
$$

2. 不等式加强证明（讨论 $x > 1$ 段）

令 $\frac{h(x)}{x} = f(x) - \frac{P(x)}{x} + 1 + \frac{P(1)+1}{x}$，则有：

$$
\begin{aligned}
h(x) &= xf(x) - P(x) - x + P(1) + 1 \\
\Rightarrow h'(x) &= f(x) + xf'(x) - f(x) - 1 \\
&= xf'(x) - 1 \geq 0 \quad (\text{因为 } x>1 \text{ 时 } f'(x) \geq \frac{1}{x})
\end{aligned}
$$

则 $h(x) \geq 0$，即不等式得到加强。

3. 总结：积分构造变换 S

以上是构造基本原理，定义积分构造的变换为 S：

$$\ln x \leq f(x) \xrightarrow{S} \begin{cases} \ln x \geq g(x), & 0 < x \leq 1 \\ \ln x \leq g(x), & x > 1 \end{cases}$$

同时也有反向加强：

$$\begin{cases} \ln x \geq g(x), & 0 < x \leq 1 \\ \ln x \leq g(x), & x > 1 \end{cases} \xrightarrow{S} \ln x \leq h(x)$$

那么以 $\ln x \leq x - 1$ 开始迭代

取 $\ln x \sim x - 1$

由于 $[x\ln x - x]' = \ln x$，$\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]' = x - 1$ 由此构造

$$\begin{aligned} (\ln x - 1)x &\sim \frac{1}{2}x^2 - x + k \quad \text{（前后保持}x > 1\text{ 取等条件）} \\ k &= -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \ln x &\sim \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \ln x \geq \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), & 0 < x \leq 1 \\ \ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), & x > 1 \end{cases}$$

此式正是基本 AC 不等式，但精度不够则重复上述变换。

取 $[(\ln x - 1)x]' = \ln x$，$\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2\right]' = \frac{1}{2}x^2 - x$

重复变换

$$\ln x \leq \frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$$
$$\text{满足所证命题}\ln 2 \leq 0.7$$

有兴趣者可继续往下推理，这里给出答案

这

$$\begin{cases} \ln x \geq \frac{(x-1)\left(x^2+10x+1\right)}{6x(x+1)}, & 0 < x \leq 1 \\ \ln x < \frac{(x-1)\left(x^2+10x+1\right)}{6x(x+1)}, & x > 1 \end{cases}$$

2.2 更一般的不等式积分构造

在前一小节中的积分构造是大多数模拟卷对函数的构造，这一节则讲述更一般的构造，即通过积分构造由 x 常数项、分式项的适合拟合函数

仅由 $\ln x \sim \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 开始，这里我们提取 x 分母后再开始积分

$$\begin{gathered} x \ln x \sim \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) \\ \text{积分后}\frac{1}{2}x^4 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \sim \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \\ \text{化简有}\ln x \sim \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x^2 \end{gathered}$$

以此类推，可以得到一连串式子。在这里列出表格。

表 1: 拟合系数表

最低项次数-n	项次数-n						
	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
0	1	−1					
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$				
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	−1	$\frac{1}{6}$			
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$		
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{12}$	−2	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{20}$	
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{71}{60}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{30}$

可以发现存在规律，通过数学归纳法可得拟合函数 $(n \geq 1)$

$$\varphi^n(x) = \frac{1}{n+1}x + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{1}{i(i+1)} C_n^i x^{-i} + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right) - 1$$

不难证明：n 为偶数时，$\ln x \le \varphi^n(x)$；n 为奇数，$x > 1$ 时 $\ln x \le \varphi^n(x)$，$x < 1$ 时 $\ln x \ge \varphi^n(x)$。

在 $n = 3$ 时代入 $x = 2$，$\ln 2 \le \frac{67}{96} \approx 0.6979167$；在 $n = 4$ 时代入 $x = 2$，$\ln 2 < \frac{667}{960} \approx 0.6948$；在 $n = 5$ 时代入 $x = 2$，$\ln 2 < \frac{111}{160} = 0.69375$。

显然增加了极大的精确程度。

2.3　小结

本章大致讲了积分构造的两种路径：前一种是模拟卷曲构造函数法，后一种是作者原创的函数拟合法，并给出通项公式相对计算量没有前一种大，而且在对 $\ln 2$ 估计时都是有理数比较，相对方便。

3　根式加强不等式

3.1　引用根式加强函数补全

在高中阶段，模拟卷中经常出现一种不等式

$$\ln x \le \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 其中 x \ge 1$$

其来源于将 $\sqrt{x}$ 代入基本不等式

$$\ln x \le \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), \quad 其中 x \ge 1$$

以得到加强式。那么，为什么代入 $\sqrt{x}$ 会使不等式加强？我们是否可以得到一种不等式加强的通法？答案是肯定的。

首先，我们先将 $x = 2$ 代入上述两个不等式进行比较：

$$\ln 2 \le \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$
$$\ln 2 \le \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 0.75$$

显然，第一个不等式比第二个更精确。下面解释加强的原因。

令 $f(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) - \ln t$，则

$$f'(t) = \frac{t-1}{2t^2} > 0, \quad 其中t > 1$$

因此 $f(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增，又由于 $f(1) = 0$，则 $f(t) > 0$（$t > 1$）。显然在 $t > 1$ 时 $t > \sqrt{t}$，则

$$f(t) > f\left(\sqrt{t}\right) > 0$$

这说明不等式加强。

那么我们为什么利用 $\sqrt{x}$ 这一类的函数来进行不等式加强？首先，$\sqrt{x}$ 具有良好性质：在 $x > 1$ 时 $x > \sqrt{x} > 1$，在 $0 < x < 1$ 时 $1 > \sqrt{x} > x$；其次形式简便，$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ 为后续不等式化简提供便利。

一般地，对于 $x > 1$ 时，若 $f(x) \geq \ln x$，那么

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{x}\right) &\geq \frac{1}{2} \ln x \\ \ln x &\leq 2f\left(\sqrt{x}\right) \end{aligned}$$

那么从 $\ln x \leq x - 1$ 开始，代入 $\sqrt{x}$ 得

$$\ln x \leq 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$$

更一般地，有

$$\ln x \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

令 $x = 2$ 代入化简得

$$\ln 2 \leq n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

我们研究函数 $g(n) = n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$，则

$$g'(n) = 2^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{\ln 2}{n} 2^{\frac{1}{n}} < 0$$

因此 $g(n)$ 单调递减，且

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) &= \lim_{n \to \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

则函数在 n 趋近于 $+\infty$ 时收敛于 $\ln 2$。

倘若我们需要借助 $\ln x \le n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ 得出 $\ln 2 < 0.7$，只需要得到

$$n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)=0.7$$

的大致解。借助 MATLAB 的数学工具，$n \approx 35.2$。即 $\ln x \le 36\left(\sqrt[36]{x}-1\right)$ 可以得出 $\ln 2 < 0.7$ 的结论。

必须要承认 $g(n)=n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$ 的收敛速度太慢。可以使用 $\ln x \le \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ 的衍生式

$$\ln x \le \frac{n}{2}\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{-\frac{1}{n}}\right)$$

代入 $x=2$ 得

$$\begin{aligned}\left(2^{\frac{1}{n}}-2^{-\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{n}{2} &\ge \ln 2\\ \left(2^{\frac{1}{n}}-2^{-\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{n}{2} &= 0.7\quad \text{（借助 MATLAB 求解）}\end{aligned}$$

得 $n \approx 2.85$。即

$$\ln x \le \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

可以达到放缩效果。

事实上，根号放缩对本书提到的大部分不等式均可使用，有兴趣者可以尝试。这里不过多赘述。

3.2 根式函数拟合

灵感主要来自于 2019 年的浙江压轴导数大题，需要证明出不等式

$$\ln x \le 4\sqrt{x}-2\sqrt{2x+2}$$

对其进行证明令 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln x+\sqrt{2x}-\sqrt{2}x$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{2}x}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}x-2\sqrt{x+x}}{2x\sqrt{2x+2}}\quad(x>0)$$

令 $p(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{2}x-2\sqrt{x^2+x}$

$$p'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\sqrt{2}-\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{\sqrt{x}+2\sqrt{2x^2+2x}-(4x+2)}{2\sqrt{x^2+x}}\quad(x>0)$$

要证 $p'(x) < 0 \Rightarrow 2\sqrt{2x+2x} < 4x + 2 - \sqrt{x} \quad (x > 0)$

令 $\sqrt{x} = t$，则 $2t\sqrt{2t+2} < 4t^2 - t + 2$，平方得

$$\left(2t\sqrt{2t+2}\right)^2 < \left(4t^2 - t + 2\right)^2 \Rightarrow 8t^4 - 8t^3 + 9t^2 - 4t + 4 > 0 \quad (t > 0)$$

显然 $8t^4 - 8t^3 + 9t^2 - 4t + 4 = 2t^2\left[(2t-1)^2 + 3\right] + (t-2)^2 \geq 0$ 则 $p'(x) < 0$，$p(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，又因为 $p(1) = 0$，则 $p(x) > 0$（$x \in (0,1)$）。从计算机 MATLAB 的拟合来看 $4\sqrt{x} - 2\sqrt{2x+2}$ 不同于之前介绍的不等式
笔者尝试构造类似不等式即

$$\ln x \leq a\sqrt{x} + b\sqrt{x+1} + c\sqrt{x+2}$$

由待定系数法解得

$$\ln x \leq 7\sqrt{x} - 8\sqrt{2x+2} + 3\sqrt{3x+6}$$

下面给出证法（感谢富阳中学华哲文）。要证 $7\sqrt{x} + 3\sqrt{3x+6} - 8\sqrt{2x+2} - \ln x \geq 0$，令 $F(x) = 7\sqrt{x} + 3\sqrt{3x+6} - 8\sqrt{2x+2} - \ln x$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{x+2}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x}\right)$$

记 $G(t) = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{t+2}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} - \sqrt{t}$

$$G'(t) = t^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{t}{(t+2)\sqrt{t}} + 2\sqrt{2}\frac{1}{(t+2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\right)$$

记 $H(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{x}{(x+2)^{\frac{3}{2}}} + 2\sqrt{2}\frac{x}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}$

$$H'(x) = \frac{\sqrt{2}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{9\sqrt{3}}{4(x+2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}(x+1)\left[\frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\sqrt{3}}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

当 $x > 0$ 时 $1 - x < 0$ $\frac{\sqrt{2}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} < \frac{9\sqrt{3}}{4(x+2)^{\frac{3}{2}}}$ $\therefore H'(x) < 0 \therefore H'(x) < H'(1) = 0$ 当 $0 < x \leq 1$ 时 $\frac{(x+2)^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} > 2\sqrt{2}$ 则 $\frac{\sqrt{2}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} \geq \frac{9\sqrt{3}}{4(x+2)^{\frac{3}{2}}}$ 又 $1 - x \geq 0$ 则 $H'(x) \leq 0$ 则 $H'(x) < H'(1) = 0$ 则

$\forall x > 0$，$H'(x) < 0$，$\therefore G'(t) < 0$。又因为 $G(1) = 0$，则 $G(t)$ 在 $(0,1)$ 上为正，在 $(1,+\infty)$ 上为负。$\therefore F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上 $\searrow$，在 $(1,+\infty)$ 上 $\nearrow \therefore F(x) \geq F(1) = 0$

那么是否可以构造类似函数

$$\ln x \leq a_0\sqrt{x} + a_1\sqrt{2x+2} + a_2\sqrt{3x+6} + \cdots + a_n\sqrt{nx+n^2-n}$$

答案是可以，这里感谢知友用户杏花雨她提出，对于 $f(x) = 7\sqrt{x} - 8\sqrt{2x+2} + 3\sqrt{3x+6} - \ln x$，则 $f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}} - \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{x}$ 构造定义域 $(0,+\infty)$ 上的四个函数 $f_0(x) = \frac{1}{x}$，$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$，$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$，$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$。注意到 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ 构成一个 Extended Complete Chebyshev System (扩展完全切比雪夫系统)，于是任意非平凡的线性组合 $c_0f_0 + c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3$ 最多有 3 零点。定义:

$$F(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2}f_3(t) - 4\sqrt{2}f_2(t) + \frac{7}{2}f_1(t) - f_0(t)$$

注意到 $F(1) = F'(1) = F''(1) = 0$ 所以 $t = 1$ 是一个三阶零点，而 $F(2) > 0$ 故 $f(x)$ 在 $(0,1) \cup (1,+\infty)$ 上 $\nearrow$ 则 $f(x) > 0$ 证毕这里我们不深究 ECCS 背后原理，我们只需知道我们可以求解 $f_0 = 0$ 和 $f_1^{(n)} = 0 \cdots f_n^{(n)} = 0$ 联立 n 个方程求解问题。那么 $f_0 \cdots f_n = 0$ 化简

$$a_1 + a_2\frac{2}{2n} + a_3\frac{n}{3n} + \cdots = \frac{2(n+1)!}{(2n-3)!!}(\text{定义 (-1)!! } = 1)$$

则我们以 $\ln x \leq a_0\sqrt{x} + a_1\sqrt{2x+2} + a_2\sqrt{3x+6} + a_3\sqrt{4x+12} + a_4\sqrt{5x+20}$ 列出方程组

$$f_0 = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0$$

$$f_1^{(1)} = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2$$

$$f_2^{(2)} = 0 \Rightarrow a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{4}a_4 + \frac{1}{5}a_5 = 4$$

$$f_3^{(3)} = 0 \Rightarrow a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{9}a_3 + \frac{1}{16}a_4 + \frac{1}{25}a_5 = \frac{16}{3}$$

$$f_4^{(4)} = 0 \Rightarrow a_1 + \frac{1}{8}a_2 + \frac{1}{27}a_3 + \frac{1}{64}a_4 + \frac{1}{125}a_5 = 64$$

借助 `MATLAB` 可以计算得出，

$$a_1 = \frac{76}{9}, a_2 = -\frac{280}{9}, a_3 = 81, a_4 = -\frac{832}{9}, a_5 = \frac{325}{9}$$

则

$$\ln x \leq \frac{76}{9}\sqrt{x} - \frac{280}{9}\sqrt{2x+2} + 81\sqrt{3x+6} - \frac{832}{9}\sqrt{4x+12} + \frac{325}{9}\sqrt{5x+20}$$

代 $x = 2$ 可以证明

$$\ln 2 \leq \begin{cases} \ln x \leq \frac{76}{9}\sqrt{x} - \frac{280}{9}\sqrt{2x+2} + 81\sqrt{3x+6} - \frac{832}{9}\sqrt{4x+12} + \frac{325}{9}\sqrt{5x+20}, & 0 < x < 1 \\ \ln x \leq \frac{76}{9}\sqrt{x} - \frac{280}{9}\sqrt{2x+2} + 81\sqrt{3x+6} - \frac{832}{9}\sqrt{4x+12} + \frac{325}{9}\sqrt{5x+20}, & x > 1 \end{cases}$$

代入 $x = 2$

$$\ln 2 \approx 0.6927$$

与 $\ln 2 \approx 0.6931471806$ 相距很近

3.3 小结

本文大致交代了两种根式放缩方法，第一种是在原函数基础上通过根式加强不等式，第二种则是通过多个根式的线性拟合，本质上允许多重展开。限制点有： 根式容易带来无理数，存在误差。 第二种方法需要计算多个系数，可以通过矩阵解矩阵求解，但运算复杂。

4　系数加权的放缩

4.1　两道港中深题目的引入

我们先来看两道题

$x \in [0, \frac{\pi}{2})$,$\lambda \sin x + (1-\lambda)\tan x \ge x$ 求 λ 范围　$x \in [0, \frac{\pi}{2})$,$\sin^{\lambda} x \tan^{1-\lambda} x \ge x$ 求 λ 范围

原题是港中深自主招生题，实质是解决　两个命题（感谢同桌夏阳供稿题）这里先直接给出答案　$\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x \ge x$ 即 $0 \le \lambda \le \frac{2}{3}$　$\sin^{\frac{2}{3}} x \tan^{\frac{1}{3}} x \ge x$ 即 $0 \le \lambda \le \frac{2}{3}$

我们先思考为什么会出现这两个不等式? 很显然, 这两个不等式通过过将

$\sin x \le x$（$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$）与 $\tan x \ge x$（$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$）组合使不等式加强。不等式　是通过加法线性组合，不等式　是通过乘法组合。

那么我们是否可以用相同的方式构造加强不等式? 答案是可以

4.2　构造不等式

这里作者采用 $\ln x \ge \frac{2(x-1)}{x+1}$（$x \ge 1$）与 $\ln x \le \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 进行处理，是通过加法线性处理。

令

$$f(x) = \ln x - \left[\lambda \frac{2(x-1)}{x+1} + (1-\lambda) \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right], \quad x \ge 1$$

进行讨论。很显然 $f(1) = 0$，接下来讨论 $f'(x)$：

$$f'(x) = \frac{(x-1)\left(x^2+4x+1\right)}{2x^2(x+1)^2}\left(\lambda - 1 + \frac{2}{x + \frac{1}{x} + 4}\right), \quad x \ge 1$$

则当 $\lambda - 1 + \frac{2}{x+\frac{1}{x}+4} = 0$ 即 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时

$$\ln x < \frac{2}{3} \cdot \frac{2(x-1)}{x+1} + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{x}\right), \quad x \ge 1$$

代入 $x = 2$ 得

$$\ln 2 < \frac{25}{36} \approx 0.6944$$

但是并不是所有的不等式都可以用这种方法加强。

再通过乘法处理。令

$$g(x)=\ln x-\left[\frac{2(x-1)}{x+1}\right]^{\lambda}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]^{1-\lambda}$$

可以得出

$$\ln x<\left[\frac{2(x-1)}{x+1}\right]^{\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]^{\frac{1}{3}},\quad x\geq 1$$

代入 $x=2$ 得

$$\ln 2<\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\approx 0.6933$$

显然不等式增强。

但并不是所有的不等式都可以采取这种方式加强。例如,

采用 $\ln x\leq x-1$ 与 $\ln x\geq \frac{2(x-1)}{x+1}$ 构造 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda(x-1)}{x+1}+(1-\lambda)(x-1)-\ln x,\quad x\geq 1$$

得 $\lambda=1$，显然没有起到加强效果。

所以我们需要思考什么样的函数可以组合加强。

4.3 不等式分类

对于加法组合的不等式，令

$$\varphi_1(x)=\frac{1+\lambda}{2}f(x)+\frac{1-\lambda}{2}g(x)-\ln x$$

由于 $\lim_{x\to 1}\varphi(x)=0$，分离变量后

$$\lambda=\lim_{x\to 1}\frac{[g(x)-\ln x]+[f(x)-\ln x]}{[g(x)-\ln x]-[f(x)-\ln x]}$$

对于乘法组合的不等式

令 $\varphi_2(x)=[f(x)]^{\frac{1+\lambda}{2}}[g(x)]^{\frac{1-\lambda}{2}}-\ln x$

由于 $\lim_{x\to 1}\varphi_2(x)=0$

分离变量后

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left[\frac{g(x)-\ln x}{\ln x}+1\right]+\ln\left[\frac{f(x)-\ln x}{\ln x}+1\right]}{\ln\left[\frac{f(x)-\ln x}{\ln x}+1\right]-\ln\left[\frac{g(x)-\ln x}{\ln x}+1\right]}$$

结果表明只有当 $\lim_{x\to 1}[g(x)-\ln x]$ 与 $\lim_{x\to 1}[f(x)-\ln x]$ 是同阶无穷小时才可以加强。

下结论给出部分不等式的无穷小级别

- **一阶无穷小**

$$x-1-\ln x = o(x-1)$$
$$1-\frac{1}{x}-\ln x = o(x-1)$$

- **二阶无穷小**

$$\frac{2(x-1)}{x+1}-\ln x = o((x-1)^2)$$
$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\ln x = o((x-1)^2)$$
$$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\ln x = o((x-1)^2)$$

- **三阶无穷小**

$$\frac{(x-1)(x+5)}{4x+2}-\ln x = o((x-1)^3)$$

- **四阶无穷小**

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]+\frac{2}{3}\left[\frac{2(x-1)}{x+1}\right]-\ln x = o((x-1)^4)$$
$$\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]^{\frac{1}{3}}\left[\frac{2(x-1)}{x+1}\right]^{\frac{2}{3}}-\ln x = o((x-1)^4)$$
$$\ln\left(\frac{8x^3-1}{3(x+1)^3}\right)-\ln x = o((x-1)^4)$$

在之前演示中，可以发现我们成功将 $\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x$ 与 $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \ln x$ 组合得到加强不等式，而对于 $-1 + x - \ln x$ 与 $\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x$ 的组合失败了，原因在于 $\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x$ 与 $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \ln x$ 是同阶无穷小，与 $x - 1 - \ln x$ 是不同阶无穷小

注 4.1. 这一小节采用高数的符号，这里写 $f(x)$ 为 $o(x-1)^n$ 是指 $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^n} = 0$

4.4 小结

本章讲述基于现有不等式构造加强不等式的方法。从 MATLAB 的函数拟合效果来看的确很好，也达到我们预期效果放缩强度。同时细心的读者会发现，对于我们组合出的两个不等式

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] + \frac{2}{3}\left[\frac{2(x-1)}{x+1}\right] - \ln x \\
\varphi_2(x) &= \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{2(x-1)}{x+1}\right]^{\frac{2}{3}} - \ln x
\end{aligned}
$$

均属于 $o(x-1)^4$，也就是说 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 仍然可以进行再次组合，构造不等式。有兴趣的读者可以接着尝试。

总而言之，此类方法是适用性极广的方法且效果显著，经常在模拟卷中出现。

5 数值积分

5.1 梯形法则

在之前的章节我们注重于对强不等式的构造，在本章节我们将注意力放回到数值估算上。

梯形法则顾名思义，它的主要思想是将曲线在区间上的图形近似为一条梯形的面积，从而由梯形面积公式来计算函数在某个区间的积分近似值。

即我们认为 $(f(x) \geq 0, x \geq 0)$

$$\frac{-m+n}{2}\left[f(m)+f(n)\right] \approx \int_m^n f(x)\ \mathrm{d}x$$

更特殊地，我们认为当 $f(x) \geq 0$ 即 $f(x)$ 是凹函数时

$$\int_m^n f(x)\ \mathrm{d}x \leq \frac{-m+n}{2}\left[f(m)+f(n)\right]$$

下给出证明

$$\int_m^n f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{n-m}{2}\left[f(m)+f(n)\right] \geq 0$$

视 n 为主元

令 $p(n) = \int_m^n f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{n-m}{2}\left[f(m)+f(n)\right]$

$$\begin{aligned}
p'(n) &= f(n) - \frac{f(n)}{2} - \frac{n-m}{2}f'(n) - \frac{f(n)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[f(n) - f(m) - (n-m)f'(n)\right] \\
p''(n) &= \frac{1}{2}\left[f'(n) - f'(m) - nf''(n)\right] \\
&= -nf''(n) < 0
\end{aligned}$$

则 $p'(n) < p'(m) = 0, p(n) < p(m) = 0$ 证毕。则在这里，要证明 $\ln 2 < 0.7$ 可将 $\ln 2$ 视为 $\int_1^2 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$，则将 $[1,2]$ 区间分为 n 个等长的子区间则可表示为

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x < \frac{1}{2n}\left[1 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\frac{i}{n}+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4n} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n+i}$$

当 $n=2$，$\ln 2 < \frac{17}{24}$；当 $n=3$，$\ln 2 < 0.7$；当 $n=4$，$\ln 2 < \frac{1171}{1680} \approx 0.697$。命题显然得证。这里是我们取 $f(x) = \frac{1}{x}$，$[m,n] = [1,2]$。实际上 $\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \ln 2$ 并不仅仅只有这一种组合，读者可以自行尝试

5.2 标准辛普森公式

我们反思梯形法，则实质上我们是把光滑的函数拟合为分段直线后积分，那么我们为什么一定要选择直线？是否可以选取三个点，拟合为二次函数？答案是可以。这便是标准辛普森公式的核心思想：在每相邻三个点之间，用一个二次多项式来近似原函数，从而估算积分。我们先考虑区间 $[x_0, x_2]$，在区间上找二次函数逼近。设 x_0, x_1, x_2 是均匀分布的点，间隔为 h：

$$x_0 = x_1 + h$$
$$x_2 = x_0 + 2h$$

则根据构造过这三点的二次函数

$$P(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

令 $x = x_0 + ht$ （$x_1 \to t = 1$，$x_2 \to t = 2$），则

$$l_0(t) = \frac{(t-1)(t-2)}{2}$$
$$l_1(t) = -t(t-2)$$
$$l_2(t) = \frac{t(t-1)}{2}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} P(x)\ \mathrm{d}x &= h\left[f(x_0)\int_0^2 l_0(t)\ \mathrm{d}t + f(x_1)\int_0^2 l_1(t)\ \mathrm{d}t + f(x_2)\int_0^2 l_2(t)\ \mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\right]\end{aligned}$$

当整个区间 $[a, b]$ 分为 n 个小区间时，由于每个抛物线需要 2 个小区间，所以 n 为偶数又则容易得到

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + \cdots\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \cdots\right)\right]$$

一般认为，若 $f''(x) < 0$，估算值 $<$ 实际值，若 $f''(x) > 0$，估算值 $>$ 实际值这里我们选取 $f(x) = \frac{1}{x}$，$a = 1$，$b = 2$，$h = \frac{1}{4}$ 代入

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x < \frac{8.319}{12} \approx 0.69325$$

与 $\ln 2 \approx 0.69314$ 相当接近。

5.3 三段复合辛普森方法

前一节介绍标准辛普森公式，要求区间被分割数为偶数。事实上，辛普森家庭中存在处理奇数段，尤其是三的倍数段的方法，这便是三段复合辛普森方法。其方法与标准公式唯一不同点，是在三个等距点上构造三次多项式。具体推导方式与前种相似，这里不过多赘述。公式为

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{3h}{8}\left[f\left(x_0\right) + 3f\left(x_1\right) + 3f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right)\right]$$

代入有

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \approx \frac{3\cdot\frac{1}{3}}{8}\left[f(1) + 3f\left(\frac{4}{3}\right) + 3f\left(\frac{5}{3}\right) + f(2)\right] = \frac{5.35}{8} = 0.69375$$

相当接近标准值

5.4 小结

本章介绍了三种估值方式，核心是借助积分的几何意义估值，便利之处在于结果为有理数便于估值计算。实际上，这几种方法均可用于编程，适合计算难以给出解析解的定积分上。

6 级数展开

6.1 泰勒展开

从本章开始，笔者要开始介绍一些陌生的老朋友。泰勒展开常常出现在模拟卷中。笔者在查阅文献时部分作者认为泰勒展开能是高中必修知识。尽管有些偏不被负，但也可以看出泰勒展开的重要意义。

那么泰勒展开是如何得到的？我们要用一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 在点 x_0 附近表示 $f(x)$，那么它们在点 x_0 附近的各阶导数也必然相等

为求 $P_n(x)$ 表达式，设

$$P_n(x)=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+\cdots+a_{n-1}\left(x-x_0\right)^{n-1}+a_n\left(x-x_0\right)^n$$

则各阶导数为

$$\begin{aligned}
P_n^{(k)}\left(x_0\right)=k!a_k, \quad k=0,1,\cdots,n \\
a_k=\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}, \quad k=0,1,\cdots,n \\
P_n(x)&=f\left(x_0\right)+\frac{f^{\prime}\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n \\
&=\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k
\end{aligned}$$

那么由泰勒定理可得

$$f(x)=O\left(x-x_0\right)^n+\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k$$

或 $f(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}+\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k \quad (\xi \in\left[x_0, x\right])$

前者 $O((x-x_0)^n)$ 称为佩亚诺余项，后者 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项。

证明略，感兴趣的读者可自行证明

6.2 麦克劳林公式

麦克劳林公式实质是 $x_0=0$ 时带有拉格朗日余项的泰勒展开（其实麦克劳林也认为这毫无新意，但是历史仍固执地将一部分功劳给了麦克劳林），下给出 $\ln(1+x)$ 与 e^x 的麦克劳林公式：

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+(-1)^n\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

其中 $\theta \in (0,1)$，$x>-1$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

其中 $\theta \in (0,1)$

那么我们对 $\ln 2$ 进行估值则有

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

那么往里面代入数值欣喜发现，当 $i = 73$ 时，$\ln 2 < 0.69949 < 0.7$（上述结果来自 CASIO fx-991CN）

方法不错，但是需要计算较多阶数，原因在于此公式的收敛速度极慢，因此需要改进

我们可以取 $\ln(1+x)$ 在 $x = 2$ 处的泰勒展开

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^3}{3!} - \cdots$$

令 $x = \frac{1}{2}$ 时，则有

$$-\ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} - \cdots$$

即

$$\ln 2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

收敛速度比前者快得多：

$$\ln 2 > \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.692946$$

而 $\ln 2 \approx 0.6931$，误差极近

其实还有一种数形结合的方法，我们将 $x = \ln 2$ 看作 $\mathrm{e}^x = 2$ 的解

而 $\mathrm{e}^{0.7} > 1 + 0.7 + \frac{1}{2} \times 0.7^2 + \frac{1}{6} \times 0.7^3 = \frac{12013}{6000} > 2$

则可证明出 $\ln 2 < 0.7$

6.3 反双曲正切函数的麦克劳林公式

由 2024 年新旧课标一卷的导数题引入。最后需要证明不等式为 $(1 \leq x)$

$$\ln \frac{x}{2-x} - 2(x-1) - \frac{2}{3}(x-1)^3 \geq 0$$

令 $x = 1 + t$

$$\ln \frac{1+t}{1-t} - 2t - \frac{2}{3}t^3 \geq 0$$

细心的读者可以发现

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \cdots$$
$$\ln(1-t) = -t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$$

则

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + \cdots$$

这便是这道导数压轴题的出处，函数 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 的麦克劳林展开的本质是 $\ln(1+x)$ 表麦克劳林展开的复合。我们把 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 叫做反双曲正切函数的，记作 $\operatorname{arctanh} x$，即

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

则

$$\ln 2 = 2 \operatorname{arctanh} \frac{1}{3} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

此式收敛速度较快：

$$\ln 2 > 2\sum_{n=0}^{3} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} = 0.693134$$

6.4 帕德近似

从泰勒展开到泰勒展开，就必须要提及帕德近似。由于泰勒展开存在局限性，在某些时候收敛速度过慢，因此数学家们思考：能不能用一个有理函数来代替这个泰勒多项式？这便是逼近帕德近似最初动机。

帕德近似的思想是构造一个有理函数 $R(x) = \frac{P_r(x)}{Q_s(x)}$ (r, s 分别是分子、分母多项式次数)

使得 $f(x) - R(x) = O\left(x^{r+s+1}\right)$

即有理函数在 $x = 0$ 附近与原函数泰勒展开一致到 $r + s$ 项为止

我们计算 [2/2] 型的 $\ln(x+1)$ 的帕德近似

令 $\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O\left(x^5\right) \sim \frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{b_0+b_1x+b_2x^2}$

对于右边等式处理 $(b_0 + b_1x + b_2x^2)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + O\left(x^3\right) + O\left(x^4\right)$ (更高阶忽略)

$$\begin{aligned} b_0 &= a_1 \\ b_1 - \frac{1}{2}b_0 &= a_2 \\ a_0 &= 0 \\ \frac{1}{3}b_0 - \frac{1}{2}b_1 + b_2 &= 0 \\ \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{4}b_0 &= 0 \end{aligned}$$

得

$$b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_1 = 1, \quad b_0 = 1$$
$$a_0 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 1$$

代入 $\ln(x+1) \sim \frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$

易证明：当 $x > 0$，$\ln(x+1) \geq \frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$；当 $-1 < x < 0$，$\ln(x+1) < \frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$。

则当 $x = 1$ 时 $\ln 2 \geq \frac{9}{13}$。

同理对 e^x 研究，可以得到

$$\mathrm{e}^x \geq \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 - 6x + 12}, \quad x > 0$$

代入 $x = \ln 2$ 可得

$$\ln 2 \le 9 - \sqrt{69} \approx 0.69337$$

6.5 连分式展开

连分式展开最早由 19 世纪希腊数学家提出。$\ln(1+x)$ 的连分式展开式由拉格朗日提出，下面给出结论与证明

$$\ln(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4+\cfrac{2^2x}{5+\cfrac{3^2x}{6+\cfrac{3^2x}{7+\cdots}}}}}}}$$

证明设（感谢知乎张成）设

$$F(a,b,c,z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!(c+1)}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!(c+1)(c+2)}z^3 + \cdots$$

则有

$$F(1,1,2,-z) = \frac{1}{2}\ln(1+z) \quad \text{（泰勒展开）}$$

比较交与前系数可证

$$F(a,b,c,z) = F(a,b+1,c+1,z) - \frac{a(c-b)}{c(c+1)}zF(a+1,b+1,c+2,z)$$

$$\frac{F(a,b+1,c+1,z)}{F(a,b,c,z)} = \frac{1}{1-\frac{a(c-b)}{c(c+1)}z\frac{F(a+1,b+1,c+2,z)}{F(a,b+1,c+1,z)}}$$

交换 a 和 b，然后用 $b+1, c+1$ 代替 b 和 c 得到等式

$$\frac{F(a+1,b+1,c+2,z)}{F(a,b+1,c+1,z)} = \frac{1}{1-\frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} z \frac{F(a+1,b+2,c+3,z)}{F(a+1,b+1,c+2,z)}}$$

同样若将 a, b, c 替代为 $a+1, b+1, c+2$ 便可重复迭代得到高斯连分式

$$\frac{F(a,b+1,c+1,z)}{F(a,b,c,z)} = \frac{1}{1-\frac{a(c-b)}{c(c+1)} z\left(1-\frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} z\left(1-\frac{(a+1)(c-b+1)}{(c+2)(c+3)} z\left(1-\frac{(b+2)(c-a+2)}{(c+3)(c+4)} z-\cdots\right)\right)\right)}$$

令 $a=1$，$b=0$，$c=-2$，$z=-z$，则

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1+\frac{1^2 z}{2+\frac{1^2 z}{3+\frac{2^2 z}{4+\cdots}}}}$$

证毕。当 $x=1$ 时代入

$$\ln 2 = \frac{1}{1+\frac{1^2}{2+\frac{1^2}{3+\frac{2^2}{4+\cdots}}}}$$

计算到 3 阶

$$\ln 2 < \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \frac{7}{10}$$

证毕。

6.6 小结

本章大致讲了多种级数展开，通过各种方式对 $\ln 2$ 进行有理数逼近，对 $\ln 2$ 给出许多有效的逼近，贯穿始终的正是我们“高中必修”的泰勒展开。本章是完全高等数学的内容，或显晦涩，望读者理解。

致谢

任何美好，都会有结束的时候。现在为未来留下的正是美好的过去罢了。$\ln 2 < 0.7$ 的证明或许简单，但内部的逻辑并不简单。文章一点一点从高中水平走到高等数学的门槛，也许便是印证。

- 感谢何其多老师的鼓励和支持，正是老师的启发让我有写完的动力。
- 感谢同桌夏阳提供的题目与改进的意见。
- 感谢陆奕冰同学、夏屹晨同学、赵志鹏同学等提的读者反馈，为这篇文章提供宝贵意见。
- 感谢所有为这篇文章提供帮助的人。

受限于作者知识，这篇文章多有不足，还望读者斧正。