

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA



Universidad
Tecnológica
del Perú

Inicio

Sílabo del curso



**Revisamos el sílabo en la
plataforma virtual de
aprendizaje.**



**Universidad
Tecnológica
del Perú**

LA RECTA EN \mathcal{R}^2

Plano cartesiano, puntos medios y distancia entre puntos.



**Universidad
Tecnológica
del Perú**

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante determina la distancia entre dos puntos o el punto medio, a partir de su ubicación en el plano cartesiano.



¿Qué tanto conoces del plano cartesiano?

¿Qué es un par ordenado?

¿Cuáles son los ejes en un plano cartesiano?

¿Cómo podemos nombrar también al eje Y?

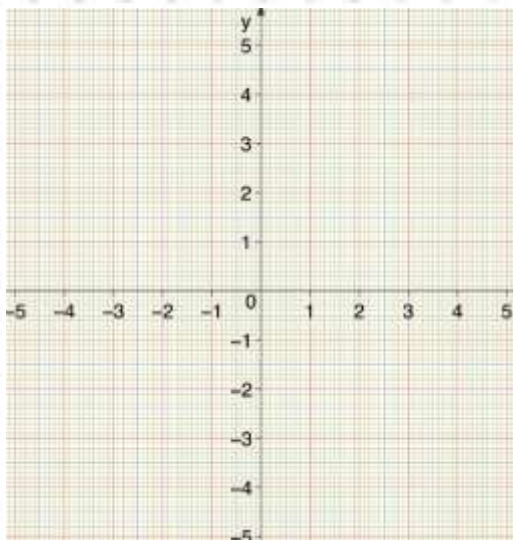


Utilidad

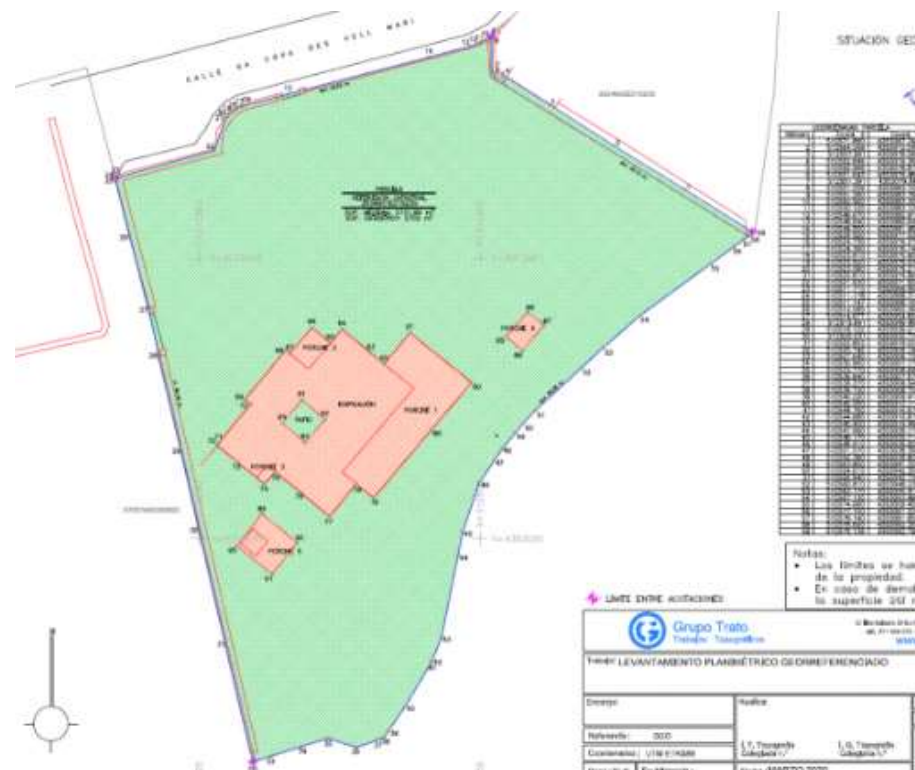
¿Para qué me sirven?

Sirve para ubicar puntos a partir de sus coordenadas, generar figuras geométricas regulares o irregulares, determinar longitudes o generar nuevos puntos

Podemos denotar y ubicar punto a partir de un punto de referencia



Me sirve para la Georreferenciación realizada en el ámbito de la Topografía para delimitar parcelas y construcciones sobre una cartografía catastral.



¿Alguna pregunta?

La recta en \mathcal{R}^2

**PLANO
CARTESIANO**

**DISTANCIA
ENTRE PUNTOS**



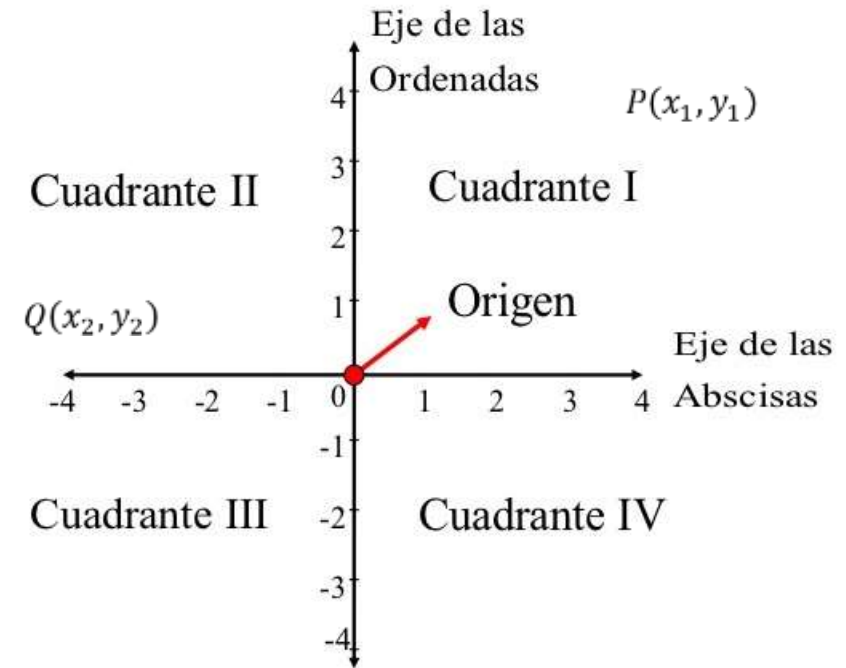
Desaprende lo que te limita

Transformación

1 PLANO CARTESIANO

Un plano se genera a partir de un conjunto de puntos, a cada punto se le asigna un par ordenado (x, y) de números reales llamados coordenadas cartesianas. Para generar dichas coordenadas se considera dos rectas, una recta horizontal llamada el eje de las X o eje de las abscisas y otra recta vertical llamada eje de las Y o eje de las ordenadas.

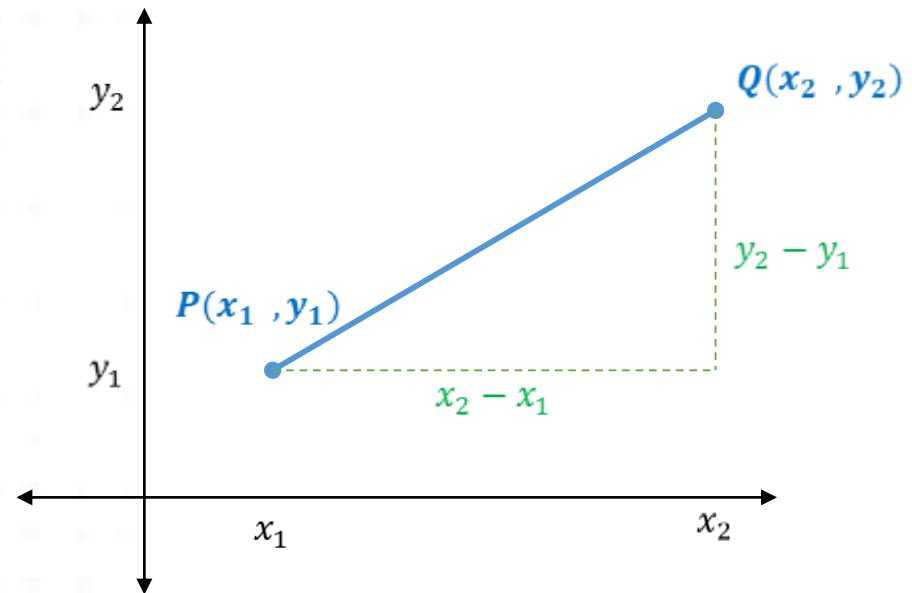
Los ejes coordenados dividen el plano cartesiano en cuatro cuadrantes.



2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la distancia entre P y Q se denota por $|PQ|$ que denota la longitud de dicho segmento que está definida por la siguiente formula:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ejemplo.

Hallar la distancia entre los puntos $P(-5, 2)$ y $Q(6, -2)$

SOLUCIÓN:

$$P(-5, 2) \rightarrow P(x_1, y_1)$$

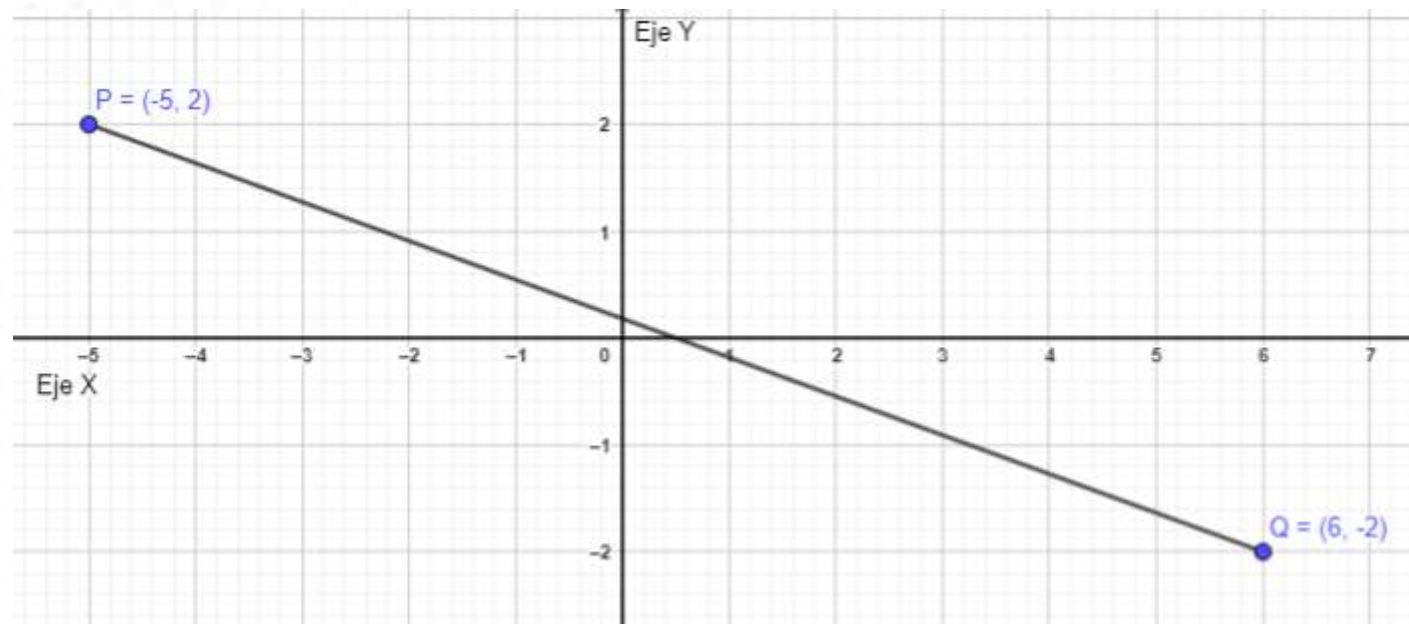
$$Q(6, -2) \rightarrow Q(x_2, y_2)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(6 - (-5))^2 + (-2 - 2)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(11)^2 + (-4)^2}$$

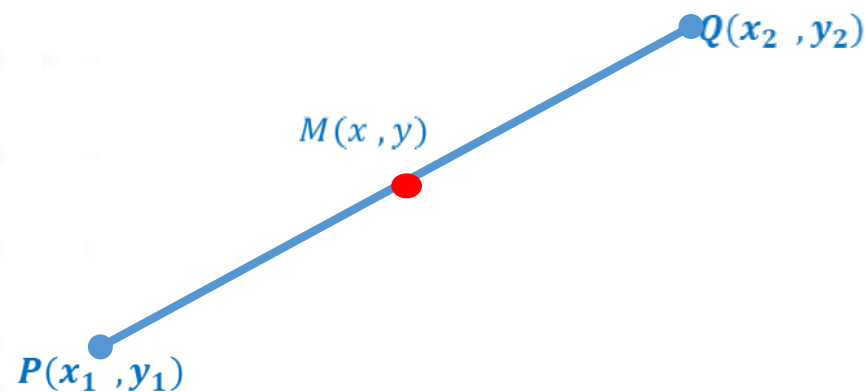
$$d(P, Q) = \sqrt{137}$$



3 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Siendo los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ extremos de un segmento de recta \overline{PQ} , el punto medio M que divide dicho segmento en dos partes iguales se determina por:

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



**Ejempl
o.**

Sean los puntos $P(8,6)$ y $Q(-4,7)$ extremos de un segmento de recta. Determine las coordenadas del punto medio y la longitud del segmento \overline{PM}

SOLUCIÓN:

$$P(8,6) \quad \longrightarrow \quad P(x_1, y_1)$$

$$Q(-4, -6) \quad \longrightarrow \quad Q(x_2, y_2)$$

$$M(x, y) = \left(\frac{8 + (-4)}{2}, \frac{6 + (-6)}{2} \right)$$

$$M(x, y) = (2, 0)$$

Luego:

$$d(P, M) = \sqrt{(x_m - x_1)^2 + (y_m - y_1)^2}$$

$$d(P, M) = \sqrt{(2 - 8)^2 + (0 - 6)^2}$$

$$d(P, M) = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$

$$d(P, M) = 6\sqrt{2}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Si la ordenada de un punto A es -6 y su distancia al punto $B(3,4)$ es de 10 unidades. Determine el valor de x .

SOLUCIÓN:

$$A(x, -6) ; B(3,4)$$

$$d(B, A) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$10 = \sqrt{(x - 3)^2 + (-6 - 4)^2}$$

$$100 = (x - 3)^2 + (-10)^2$$

$$100 = (x - 3)^2 + 100$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

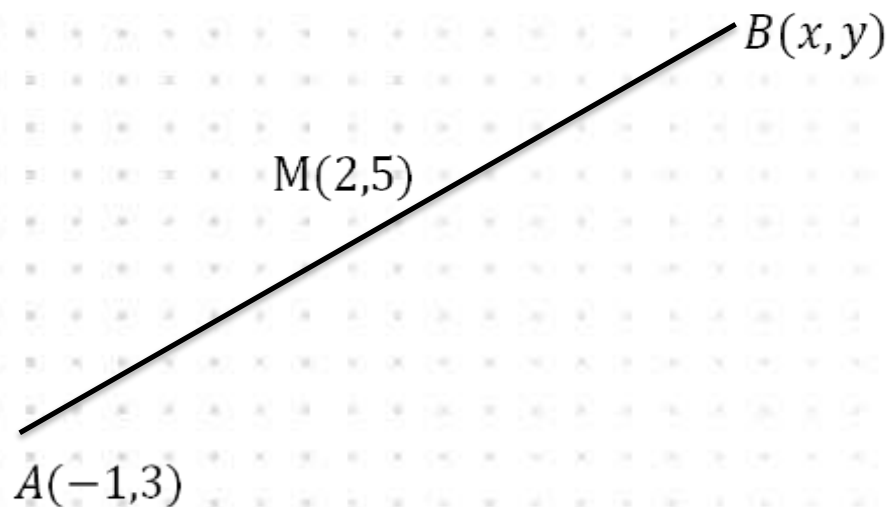
$$x = 3$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. El centro de gravedad de una varilla homogénea está situado en el punto $M(2,5)$ y uno de sus extremos es $A(-1,3)$. Determine las coordenadas del otro extremo.

SOLUCIÓN:



$$M(2,5) = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2} \right)$$

$$\frac{-1+x}{2} = 2$$

$$-1+x = 4$$

$$x = 5$$

$$\frac{3+y}{2} = 5$$

$$3+y = 5$$

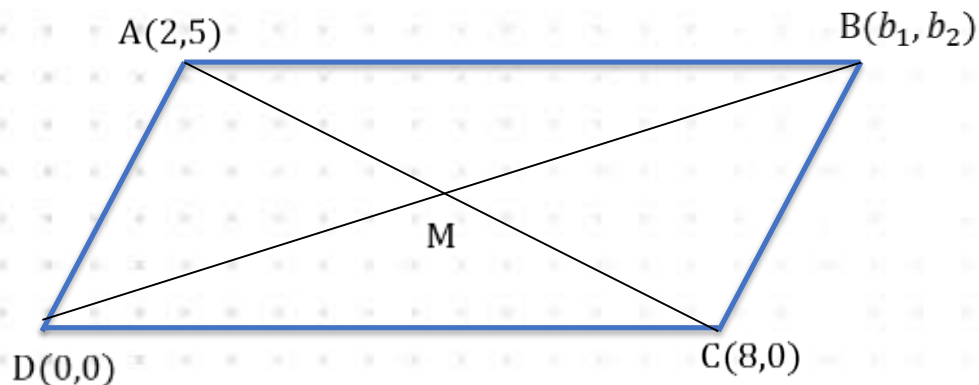
$$y = 2$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

3. Sean los puntos $A(2,5)$; B ; $C(8,0)$ y $D(0,0)$ los vértices del paralelogramo $ABCD$. Determine las coordenadas del vértice B

SOLUCIÓN:



M punto medio de AC , luego:

$$M(x, y) = \left(\frac{2 + 8}{2}, \frac{5 + 0}{2} \right)$$

$$M(x, y) = \left(5, \frac{5}{2} \right)$$

También, M punto medio de DB , luego:

$$M(x, y) = \left(\frac{0 + b_1}{2}, \frac{0 + b_2}{2} \right)$$

$$\left(5, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2} \right)$$

$$b_1 = 10 \quad , \quad b_2 = 5$$

Práctica

¡Ahora es tu turno!

A desarrollar los ejercicios propuestos



Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO



Universidad
Tecnológica
del Perú

EJERCICIOS RETO

1. Demostrar que los puntos $A(0,1)$; $B(3,5)$; $C(7,2)$; $D(4,-2)$ son los vértices de un cuadrado.
2. Dados los segmentos de recta \overline{AB} y \overline{PQ} cuyos extremos son $A(-4,6)$; $B(6,4)$; $P(0,8)$ y $Q(12,2)$. Determine la longitud del segmento que une sus puntos medios.
3. Los vértices de un triángulo son $A(3,8)$; $B(2,-1)$ y $C(6,-1)$. Sea M el punto medio del lado BC, determine la longitud de la mediana AM.
4. Si el punto $R(x, x + 1)$ es un punto equidistante de los puntos $A(2,1)$ y $B(-6,5)$. Determine el valor de x .
5. Si los vértices de un triángulo son $A(3,2)$; $B(-5,12)$ y $C(8,6)$. Determine si el triángulo es isósceles, equilátero o triángulo rectángulo

Cierre

RESPUESTAS

1. Es un cuadrado
2. $d(M, N) = \sqrt{5}$
3. $d(A, M) = \sqrt{82}$
4. $x = -6$
5. Es un triángulo rectángulo

No te quedes con las dudas



No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

¿Qué hemos aprendido hoy?

1. ¿Cómo se llaman los ejes del plano cartesiano?
2. ¿Cómo calculamos la distancia entre dos puntos?
3. ¿Qué es el punto medio?



Desaprende lo que te limita

FINALMENTE



Excelente tu
participación

Los retos sacan lo mejor de ti.



Ésta sesión quedará
grabada para tus
consultas.



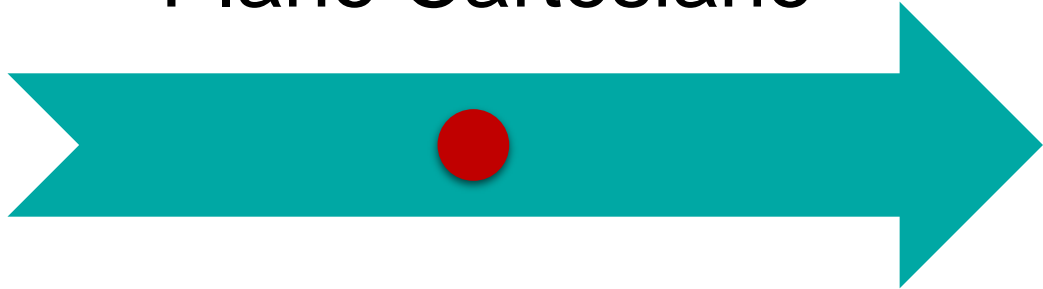
PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y sigue practicando
2. Consulta en el FORO tus dudas.



Desaprende lo que te limita

Plano Cartesiano



No logré



Desaprende lo que te limita



**Universidad
Tecnológica
del Perú**

LA RECTA EN \mathcal{R}^2

La recta y su ecuación. Ángulo y pendiente de una recta.



**Universidad
Tecnológica
del Perú**

Inicio

¿Alguna duda de la sesión anterior?



¿Recuerdas cómo se determina las coordenadas del punto medio entre estos puntos $A(-8,4)$ y $B(6, -\frac{1}{3})$?



LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante determina la ecuación de una recta, a partir de dos puntos o la pendiente de la recta.



¿Qué tanto conoces de la recta?

¿Cómo trazarías
una recta?

¿Puedes mencionar
algunas ecuaciones de
la recta?

¿Qué entiendes
por pendiente?

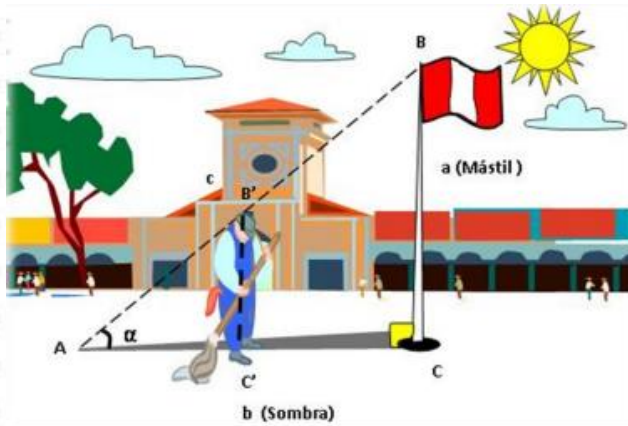


Utilidad

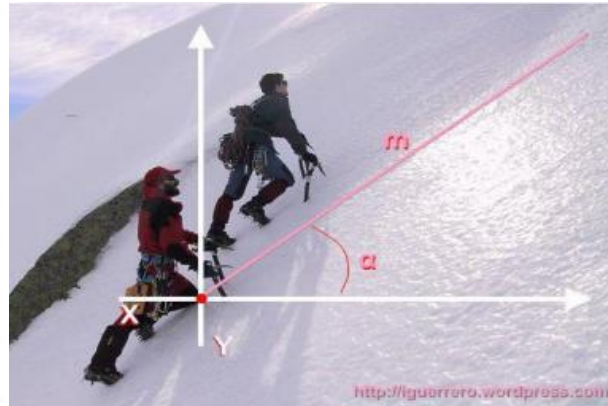
¿Para qué me sirven?

Sirve para determinar, representar y calcular la ecuación de la recta reconociendo sus principales características y nos permite resolver diferentes situaciones de la vida real, por ejemplo:

Podemos determinar las alturas de diferentes objetos en referencias a otras y sin necesidad de medirlas.



Podemos determinar la inclinación de un camino determinado.



Se puede encontrar la ubicación de un punto y calcular las distancias entre diferentes puntos de un mapa.



¿Alguna pregunta?

La recta en \mathcal{R}^2

**LA
RECTA**

ECUACIONES



Desaprende lo que te limita

Transformación

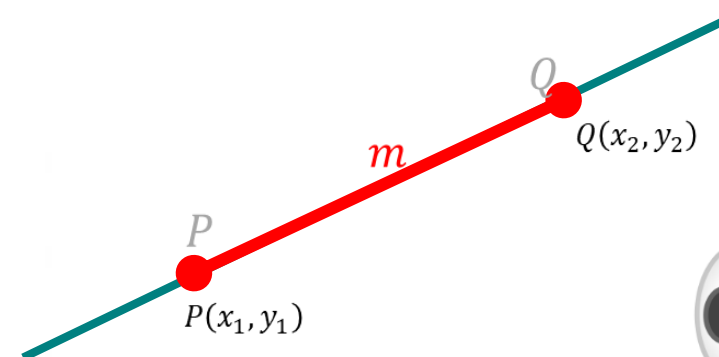
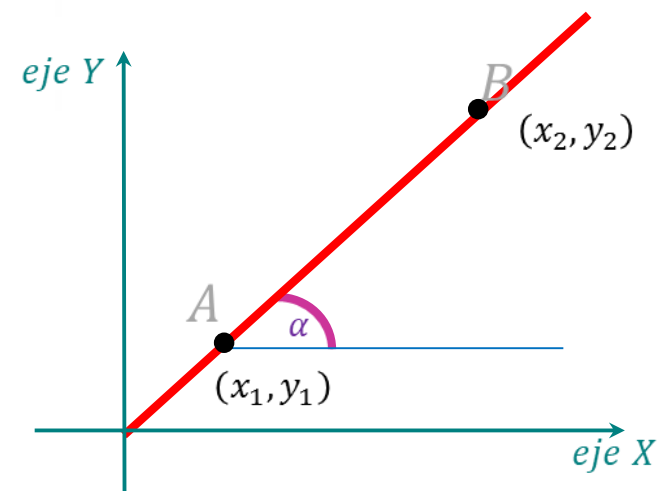
I. Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Al trazar una recta horizontal a cualquier recta L ; se forma un ángulo α ; el cual es llamado ángulo de inclinación. La tangente de dicho ángulo se conoce como la pendiente de la recta.

$$m = \tan(\alpha) \rightarrow \alpha = \arctan(m)$$

Dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, puntos cualesquiera de una recta, la pendiente se determina mediante:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ejemplo.

Determinen la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por las coordenadas $P(-4, 7)$ y $Q(6, -5)$

SOLUCIÓN:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-5 - 7}{6 - (-4)}$$

$$m = -\frac{12}{10}$$

$$m = -\frac{6}{5}$$

Luego, como: $\tan(\theta) = m$

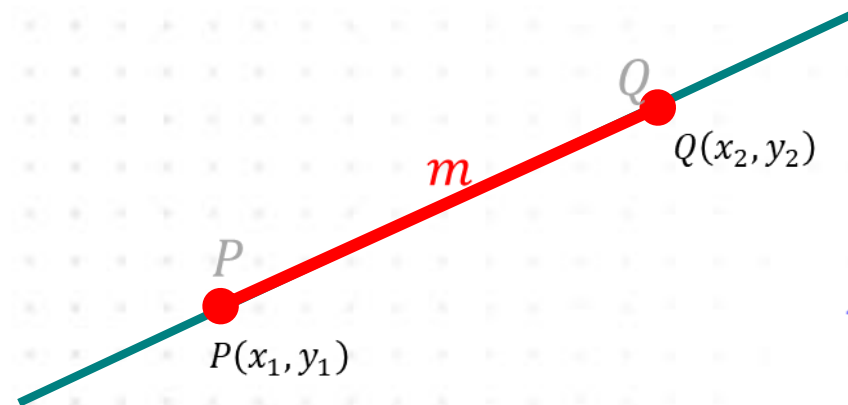
$$\theta = \arctan\left(-\frac{6}{5}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{6}{5}\right)$$

$$\theta = -50.19^\circ$$

II. La Recta

Para hallar la ecuación de una recta, es necesario conocer **un punto de paso** y **la pendiente** de la recta.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



1 ECUACIÓN ORDINARIA

Es aquella que pasa por un punto P_0 con pendiente m .

$$L: y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2 ECUACIÓN GENERAL

Resulta de resolver la ecuación anterior.

$$L: Ax + By + C = 0$$

$$m = -\frac{A}{B}$$



Ejemplo. Determine la Ecuación General de la Recta que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(7, -4)$ y halle sus puntos de intersección con los ejes coordenados. *Grafique*

SOLUCIÓN:

$$m = \frac{-4 - 2}{7 - (-1)} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Ecuación General $(y - y_0) = m(x - x_0)$

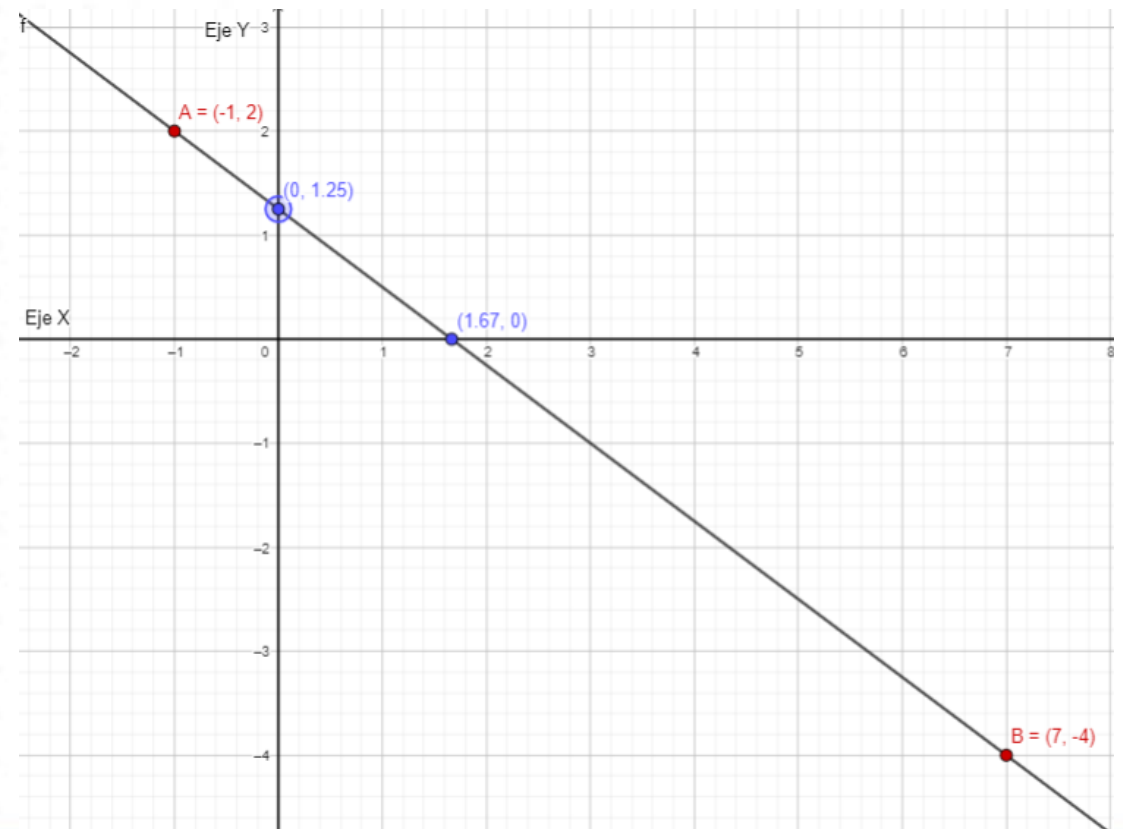
$$(y - 2) = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

$$4y - 8 = -3x - 3$$

$$\mathcal{L}: 3x + 4y - 5 = 0$$

Intersecciones con los ejes:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{4} \quad y = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$; $B\left(7, -\frac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN:



$$m = \frac{-\frac{1}{2} - 5}{7 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{11}{2}}{\frac{17}{2}} = -\frac{11}{17}$$

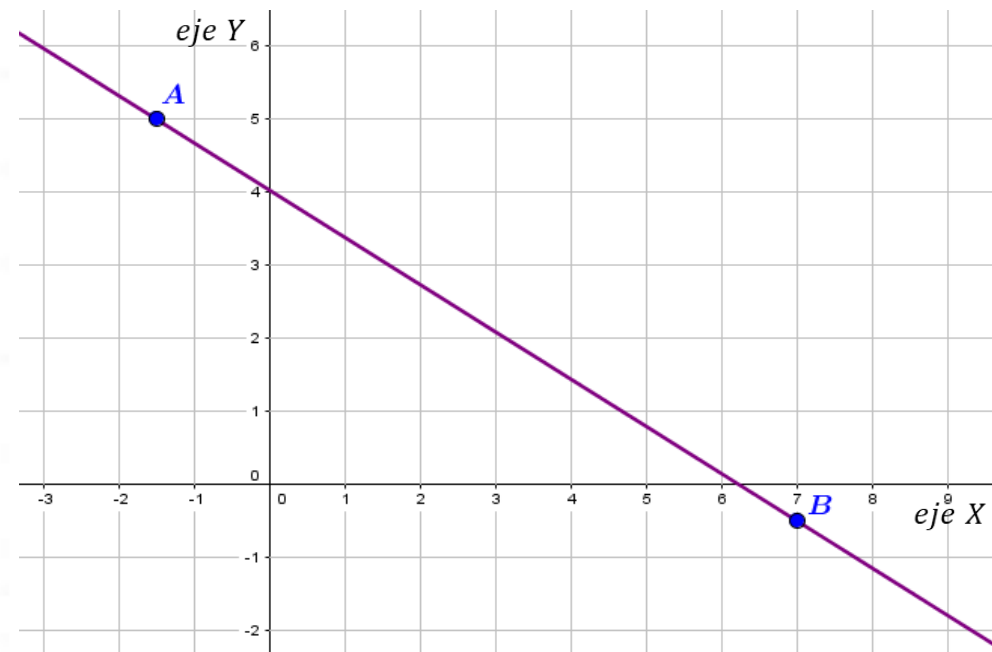
$$(y - 5) = -\frac{11}{17}\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$17y - 85 = -11x - \frac{33}{2}$$

$$\mathcal{L}: 11x + 17y - \frac{137}{2} = 0$$

RPTA:

$$\mathcal{L}: 22x + 34y - 137 = 0$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. En un paso a desnivel se observa que a los 3 metros de desplazamiento horizontal esta ya tiene 0.1 m de profundidad y a los 5 metros de desplazamiento horizontal esta ya tiene 0.4 m de profundidad.

- a) Determine una expresión que exprese la profundidad en función del desplazamiento horizontal sabiendo que profundidad y desplazamiento se relacionan de forma lineal.
- b) Si a los 50 metros de desplazamiento horizontal se halla un paso peatonal para cruzar la calle, ¿a qué profundidad se halla la pista?

SOLUCIÓN:

$A(3, -0.1)$; $B(5, -0.4)$



$$a) \quad m = \frac{-0.4 + 0.1}{5 - 3} = -\frac{0.3}{2} = -0.15$$

$$(y + 0.1) = -0.15(x - 3)$$

$$y + 0.1 = -0.15x + 0.45$$

$$y = -0.15x + 0.35$$

$$b) \quad x = 50 \Rightarrow y = -0.15(50) + 0.35$$

Rpta: - 7.15 metros

La pista se encuentra a una profundidad de 7.15 metros



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

3. Una recta de pendiente $m = -\frac{3}{2}$ está pasando por los puntos $A(6, -2)$; $B(x, x + 2)$; $C(x + 6, y)$.
Determine la distancia entre B y C .

SOLUCIÓN:

Para A y B:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{x + 2 - (-2)}{x - 6}$$

$$-3(x - 6) = 2(x + 4)$$

$$-3x + 18 = 2x + 8$$

$$x = 2$$

Para A y C:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{y - (-2)}{x + 6 - 6}$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{y - (-2)}{2}$$

$$-3 = y + 2$$

$$-5 = y$$

Luego $B(2, 4)$ y $C(8, -5)$, se tiene:

$$d(B, C) = \sqrt{(8 - 2)^2 + (-5 - 4)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{6^2 + (-9)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{117}$$



Práctica

¡Ahora es tu turno!

A desarrollar los ejercicios propuestos



Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO



Universidad
Tecnológica
del Perú

EJERCICIOS RETO

1. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-6, 2)$; $B(7, -12)$ y determine los puntos de intersección a los ejes coordenados.
2. Dadas las coordenadas $A(-3, 0.75)$ y $B(0.3, 8)$. Determine la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos y verifique si los puntos $C(0.99, 9.01)$ y $D(2, 15)$ pertenecen a dicha recta.
3. El precio de una laptop Core i7 es de 4255 soles, si se deprecia de manera lineal, de tal manera que después de 3 años de uso su precio es de 3645, hallar una expresión para el precio en función de los años de uso e indique el valor del equipo al cabo de 7 años de uso.
4. Sean $A(-10, -1)$; $C(-3, 7)$ y $N(2, 5)$ los vértices de un triángulo ACN . Determine la ecuación de la recta que contiene a la mediana que se traza del vértice C al lado opuesto AN .
5. Se tiene el punto $P(x, y)$ que equidista de los puntos $A(-2, 3)$ y $B(6, 1)$; además la pendiente de la recta que une dicho punto a $C(5, 10)$ es de 2 unidades. Determine las coordenadas de P .

Cierre

RESPUESTAS

1. $L: 14x + 13y - 54 = 0$; $(x, 0) = (3.85, 0)$; $(0, y) = (0, 4.15)$
2. $L: 145x - 66y + 484.5 = 0$
3. $y = 4255 - \frac{610}{3}x$; $y(x) = 2831.7$
4. $L: 5x - y + 22 = 0$
5. $P(x, y) = (3, 6)$



No te quedes con las dudas



No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

¿Qué hemos aprendido hoy?

1. ¿Qué necesitamos para encontrar la ecuación de la recta?
2. ¿Cuáles son las ecuaciones de la recta?
3. ¿Qué entiendes por pendiente?



Desaprende lo que te limita

FINALMENTE



Excelente tu
participación

Los retos sacan lo mejor de ti.



Esta sesión quedará
grabada para tus
consultas.



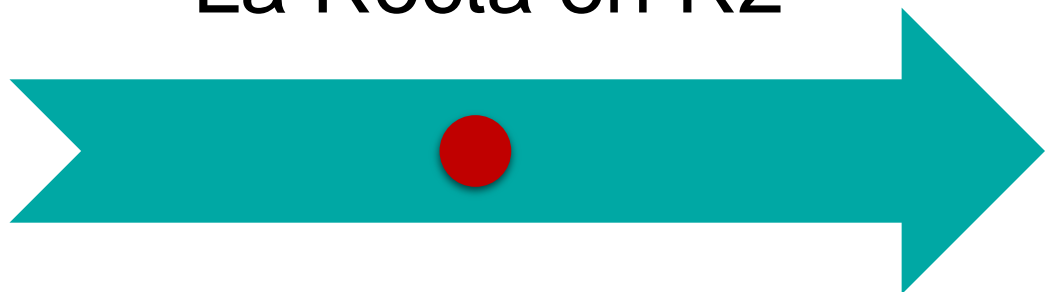
PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de esta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.



Desaprende lo que te limita

La Recta en R2



Lo logré



Desaprende lo que te limita



**Universidad
Tecnológica
del Perú**