LA RECTA EN $\mathcal{R}^2$

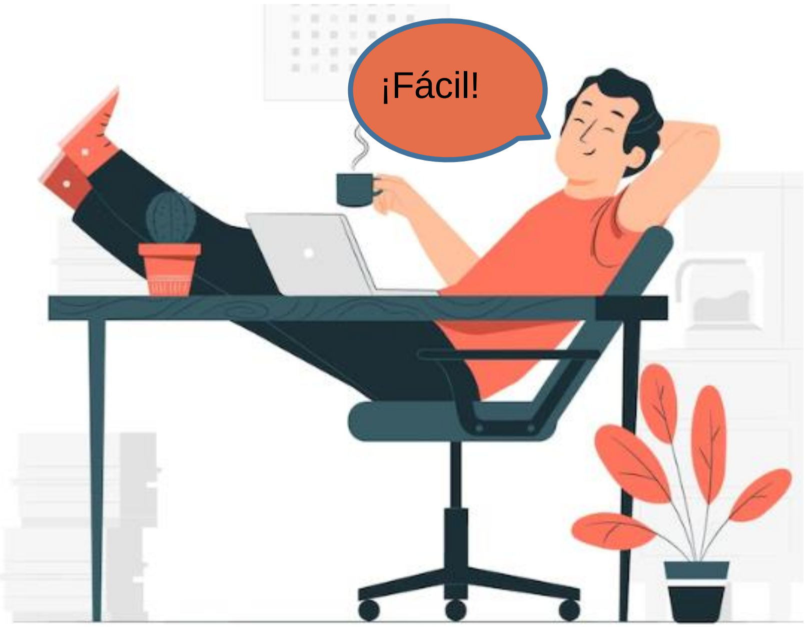
Rectas Perpendiculares. Intersección de rectas. Ángulo entre rectas.

Universidad Tecnológica del Perú

Inicio
¿Alguna duda de la sesión anterior?

Vamos a ver…

¿Cuál es el valor de k si la recta
L_1: $-y + (7+k)x = 5$ es paralela a
L_2: $y = x + 1$?



LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios de recta, empleando los conceptos de rectas perpendiculares, intersección y ángulo entre rectas.

¿Qué entiendes por rectas perpendiculares?

¿Qué ángulo presentan dos rectas perpendiculares?

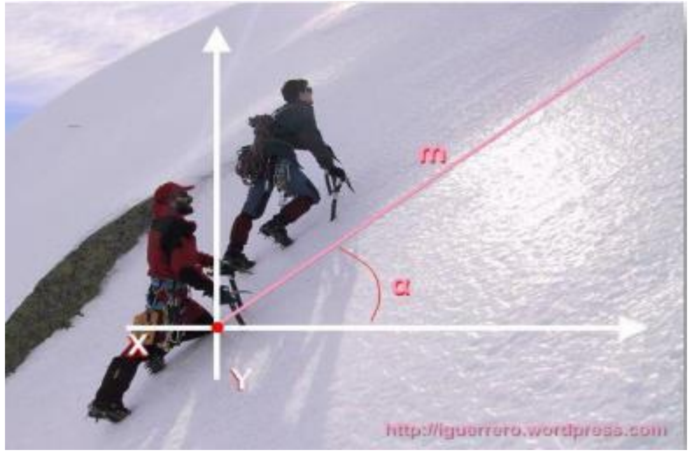
¿Los ejes coordenados son perpendiculares?

Utilidad
¿Para qué me sirven?

Sirven para establecer diseños de formas perpendiculares relacionando las pendientes de las rectas. También podemos encontrar la pendiente de una recta en función a otra recta.

Podemos determinar rectas paralelas o perpendiculares teniendo como referencia una recta fija.

Podemos establecer pendiente de una recta en referencia a otra recta que no necesariamente este en forma horizontal



RECTA EN $\mathcal{R}^2$

RECTAS PERPENDICULARES

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

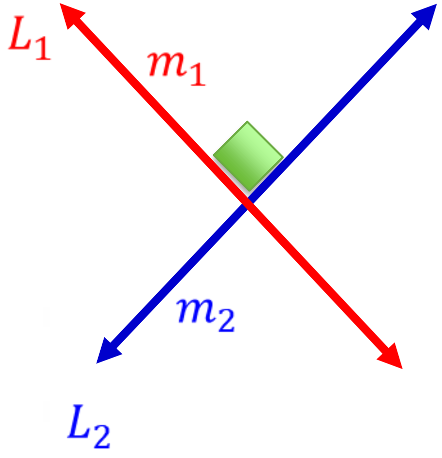
Desaprende lo que te limita

Transformación

1 RECTAS PERPENDICULARES

Dadas la recta L_1 y L_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente. La recta L_1 es **perpendicular** a la recta L_2 ($L_1 \perp L_2$) si y solo si **el producto de sus pendientes es igual a -1**.

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$



Ejemplo. *Encontrar el valor de* k *para que las rectas* $L_1: 3kx + 9y = 5$ y $L_2:\ 6x - 4y\ =\ 0$ *sean perpendiculares.*

$$L:\ Ax + By + C = 0$$

$$m_1 = -\frac{A}{B}$$

SOLUCIÓN:

$$L_1: 3kx + 9y = 5 \qquad\qquad L_2: 3x - 2y = \ 0$$

$$Si\ L_1 \perp L_2 \Longrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

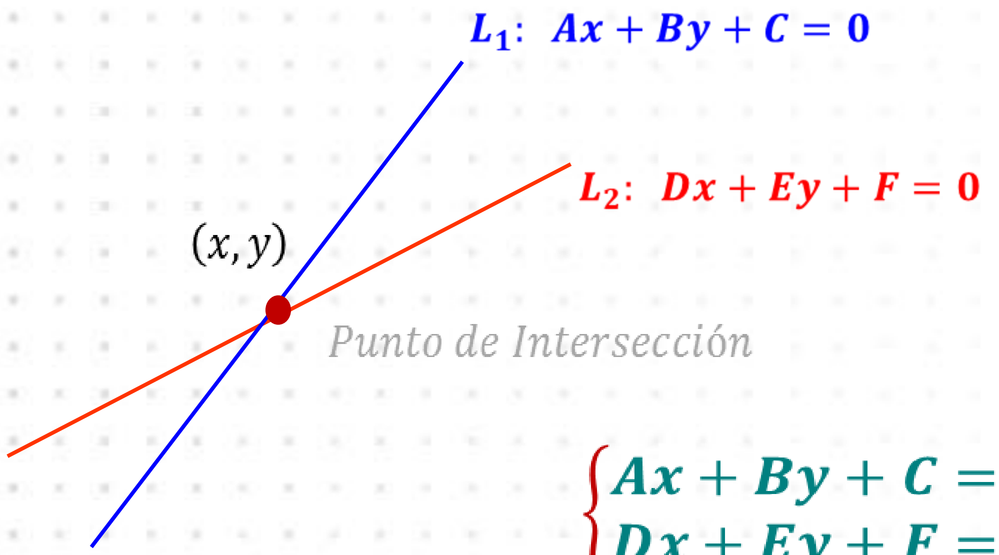
$$-\frac{3k}{9} \cdot \frac{3}{2} = -1$$

$$-k = -2$$

$$k = 2$$

2 INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Si dos rectas no son paralelas, estás se podrán cortar o intersecar en algún punto del plano cartesiano. Dicho punto ***se podrá hallar mediante la resolución de un sistema de ecuaciones****, considerando las ecuaciones generales de ambas rectas.*



$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

Ejemplo . *Determine el punto de intersección de las rectas* $L_1: 2x - 5y + 4 = 0$ y $L_2: 4x - 3y + 1 = 0$

SOLUCIÓN:

$$(-2)\begin{cases} 2x - 5y + 4 = 0 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 10y - 8 = 0 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$7y - 7 = 0$$

$$y = 1$$

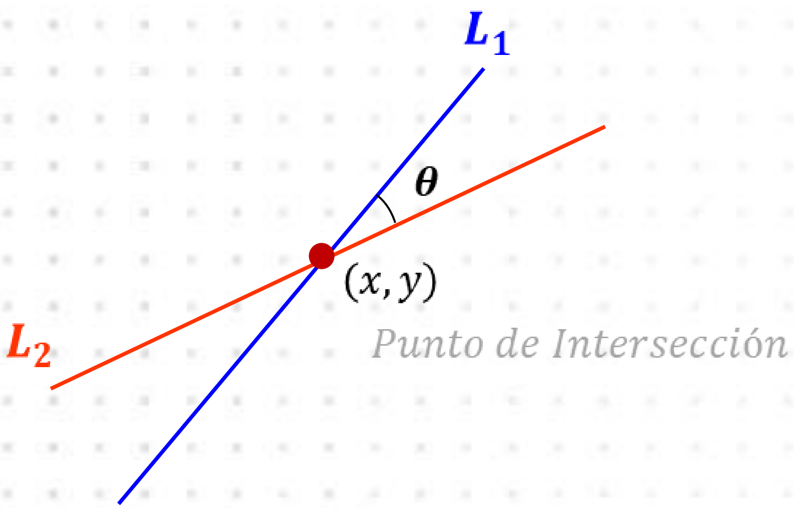
$$4x - 3(1) + 1 = 0$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

3 ÁNGULO ENTRE RECTAS

Sea m_1 pendiente de la recta L_1 y m_2 pendiente de la recta L_2, entonces el ángulo agudo comprendido entre las rectas es:



$$\theta = arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right)$$

Ejemplo . *Determine el ángulo que forman las siguientes rectas* $L_1: 2x - 5y + 4 = 0$ y $L_2: 4x - 3y + 1 = 0$

SOLUCIÓN:

$$L_1: 2x - 5y + 4 = 0 \qquad L_1:\ m_1 = \frac{2}{5}$$

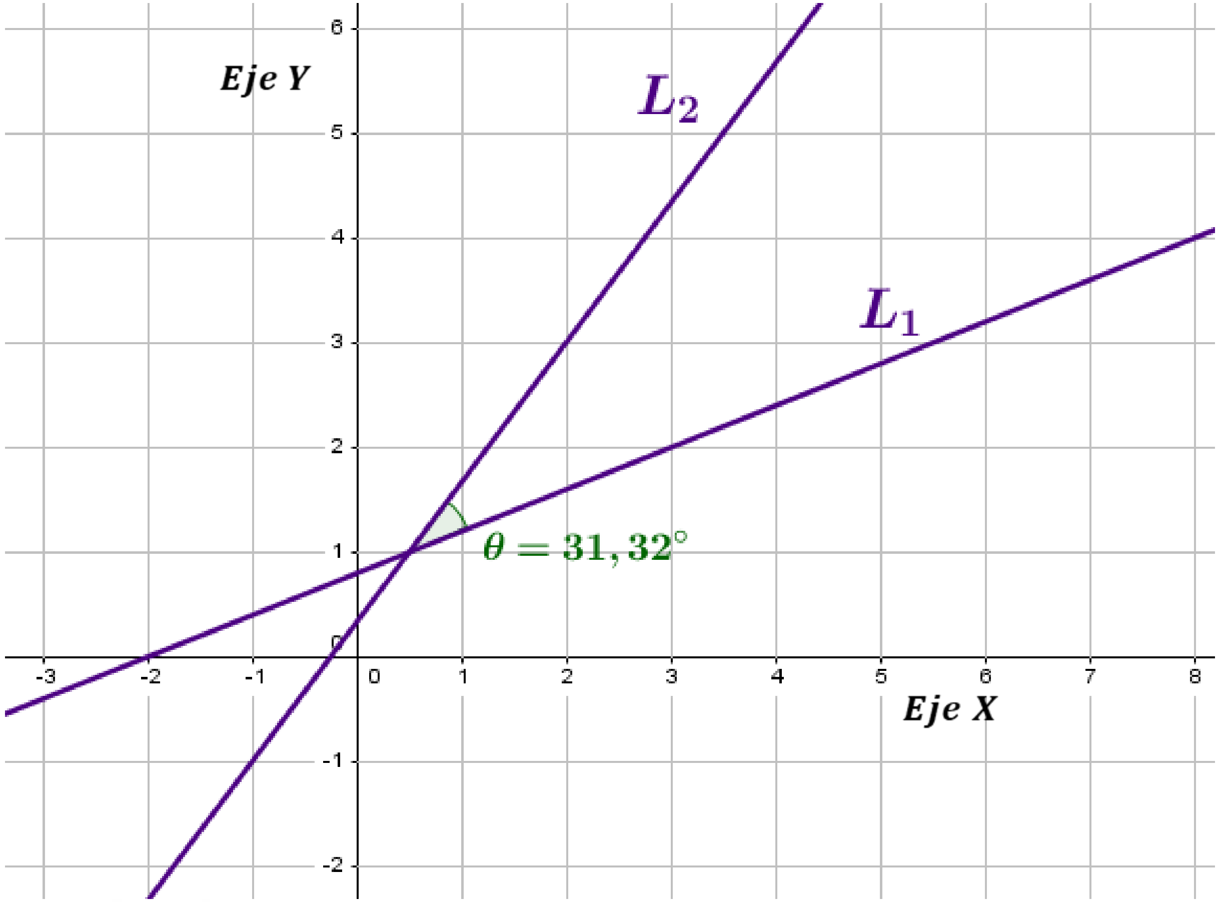
$$L_2: 4x - 3y + 1 = 0 \qquad L_2:\ m_2 = \frac{4}{3}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right)$$

$$\theta = arctan\left(\frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{5}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)}\right)$$

$$\theta = arctan\left(\frac{14}{23}\right)$$

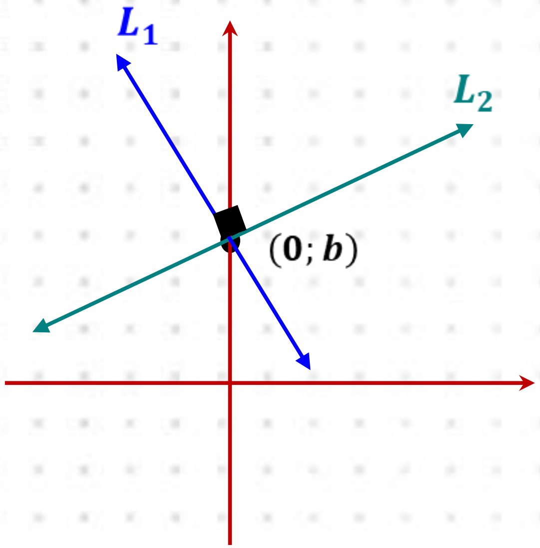
$$\theta = 31{,}32°$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sea la recta L_1 perpendicular a la recta L_2: $5y + 3x = 2$; además se sabe que dichas rectas L_1 y L_2 se intersecan en un punto sobre el eje de las ordenadas. Hallar la ecuación general de dicha recta

SOLUCIÓN:



Si $L_1 \perp L_2 \Longrightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1$

$$m_1 \cdot \frac{-3}{5} = -1$$

$$m_1 = \frac{5}{3}$$

$(0;b) \in L_2 \Longrightarrow \quad L_2$: $5b + 3(0) = 2$

$$b = \frac{2}{5}$$

$$m_1 = \frac{5}{3} \;;\; \left(0, \frac{2}{5}\right)$$

$$\left(y - \frac{2}{5}\right) = m(x - 0)$$

$$y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{5}$$

$$\frac{5}{3}x + \frac{2}{5} - y = 0$$

RPTA: $L_1: 25x - 15y + 6 = 0$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Dada la recta $L_1: 2y - 3x = 4$ y el punto $\mathrm{M}(1, -3)$. Determine la distancia más corta del punto M a la recta L_1 y la ecuación general de la recta que la contiene, que además es perpendicular L_1.

SOLUCIÓN:

$$d(M, L_1) = \frac{|2(-3) - 3(1) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

$$d(M, L_1) = \frac{|-13|}{\sqrt{13}}$$

$$d(M, L_1) = \sqrt{13}$$

$$Si\ L_1 \perp L_2 \Longrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\frac{3}{2} \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{2}{3}$$

$$L_2: y - y_0 = m_2(x - x_0)$$

$$L_2: y - (-3) = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

$$3y + 9 = -2x + 2$$

$$L_2 \ : \ \ 2x + 3y + 7 = 0$$

Práctica

¡Ahora es tu turno!

A desarrollar los ejercicios propuestos

Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO

EJERCICIOS RETO

1. Hallar la ecuación general de la recta que contiene al punto $(-2,7)$ y es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $L: 5y + 2x + 1 = 0$.

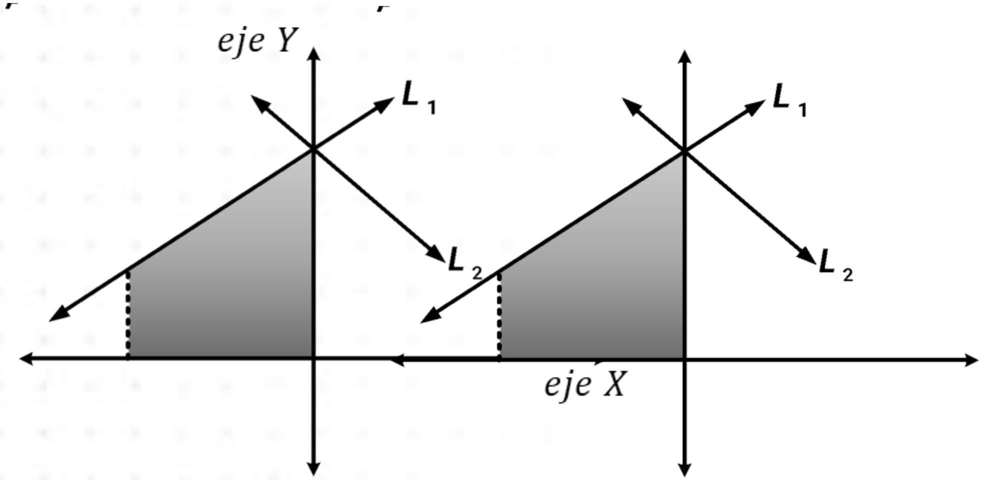
2. Determine la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de las rectas $L_1 : 5x - 2y + 6 = 0$ y $L_2 : 2x + y + 6 = 0$ que además es perpendicular a la recta $L_3: \ 3y + 10x - 11 = 0$.

3. Dada la recta $L_1 : 3x + (m + 1)y = 7 - 2n$, la cual pasa por el punto $(3, -1)$ y que es perpendicular a la recta $L_2 : 4y = x - 4$. Determine los valores de m y n.

4. Sean $U(3,3); N(1,-3)$ y $P(-1,2)$ los vértices de un triángulo. Calcula el ángulo que forma con la mediana relativa a $\overline{UN}$ y la mediatriz correspondiente $\overline{UP}$.

EJERCICIOS RETO

5. En la figura mostrada, se tiene que L_1 y L_2 son perpendiculares y el área de la región mostrada es de $16\ u^2$. Hallar la ecuación de la recta L_2 sabiendo que la intersección entre L_1 y la línea punteada ocurre en $A(-4,2)$.



Universidad Tecnológica del Perú

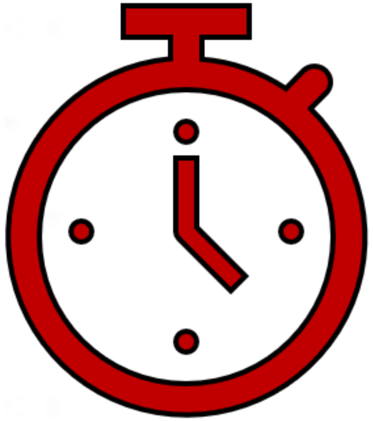
Cierre

RESPUESTAS

1. $L_1: \; 5x - 2y + 24 = 0$
2. $L: 3x - 10y - 14 = 0$
3. $m = \frac{7}{4}; \; n = \frac{-5}{8}$
4. $\theta = 4.39°$
5. $L_2: \; y = -x + 6$

Espacio de Preguntas

No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

¿Qué hemos aprendido hoy?

1. ¿A través de qué se relacionan las rectas perpendiculares?

2. ¿Cómo se halla el punto de intersección entre dos rectas no paralelas?

3 FINALMENTE

Excelente tu participación

Un problema lo convierto en una oportunidad.

Esta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de esta sesión y sigue practicando.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

UTP

Universidad Tecnológica del Perú

LA RECTA EN $\mathcal{R}^2$

Distancia de un punto a una recta. Rectas Paralelas. Distancia entre rectas paralelas.

Universidad Tecnológica del Perú

Inicio
¿Alguna duda de la sesión anterior?

Te consulto…

¿Cuál es la pendiente de la recta
$L\!: -8y + 7x = 56$?

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios de recta, empleando los conceptos de rectas paralelas y distancia punto recta.

Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué entiendes por rectas paralelas?

¿Qué ángulo de inclinación presentan dos rectas paralelas?

¿Se puede decir, que las rectas paralelas tienen la misma pendiente?

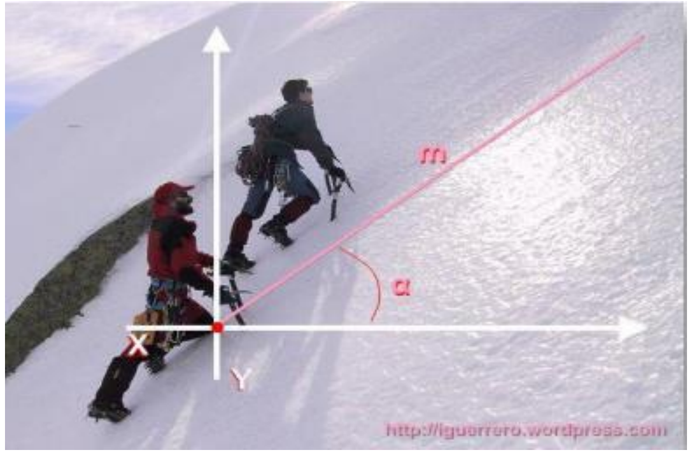
¿Pueden coincidir en algún punto dos rectas paralelas?

Utilidad
¿Para qué me sirven?

Sirven para establecer diseños de formas paralelas relacionando las pendientes de las rectas. También podemos encontrar la pendiente de una recta en función a otra recta.

Podemos determinar rectas paralelas teniendo como referencia una recta fija.

Podemos establecer pendiente de una recta en referencia a otra recta que no necesariamente este en forma horizontal



RECTA EN $\mathcal{R}^2$

RECTAS PARALELAS

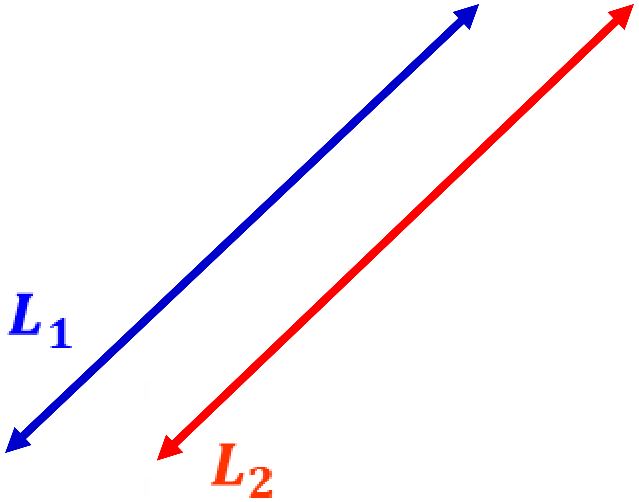
DISTANCIA PUNTO RECTA

Transformación

1 RECTAS PARALELAS

La recta L_1 es paralela a la recta L_2 $(L_1 \,//\, L_2)$ si y solo si sus pendientes son iguales

$$L_1 // L_2 \;\Leftrightarrow\; m_1 = m_2$$



Ejemplo. *Encontrar el valor de* k *para que las rectas* $L_1:\ (3k+1)x+9y=5$ y $L_2:\ 4y-6x=0$ *sean paralelas.*

$$L:\ Ax+By+C=0$$

$$m_1=-\frac{A}{B}$$

SOLUCIÓN:

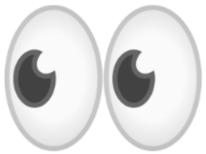
$$L_1:\ (3k+1)x+9y=5 \qquad L_2: 3x-2y=0$$

$$Si\ L_1 // L_2 \Longrightarrow m_1=m_2$$

$$-\frac{3k+1}{9}=\frac{3}{2}$$

$$-6k-2=27$$

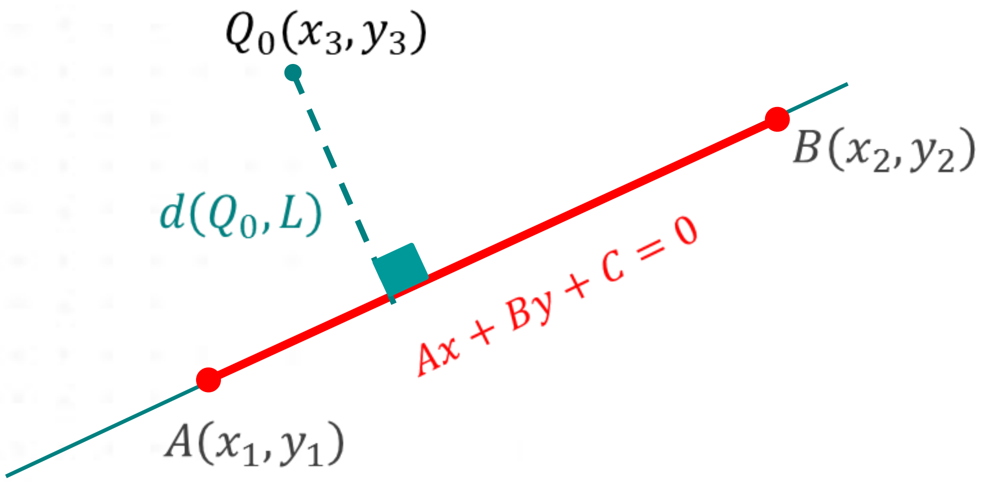
$$k=-\frac{29}{6}$$



2 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La distancia de un punto $Q_0(x_3, y_3)$ *a la recta* $L: Ax + By + C = 0$ *está determinada por:*

$$\boldsymbol{d(Q_0, L) = \frac{|Ax_3 + By_3 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$



Ejemplo.

Hallar la distancia del punto $P(6, 12)$ a la recta que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(8, 9)$.

SOLUCIÓN:

$$m = \frac{9-5}{8-2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$(y-5) = \frac{2}{3}(x-2)$$

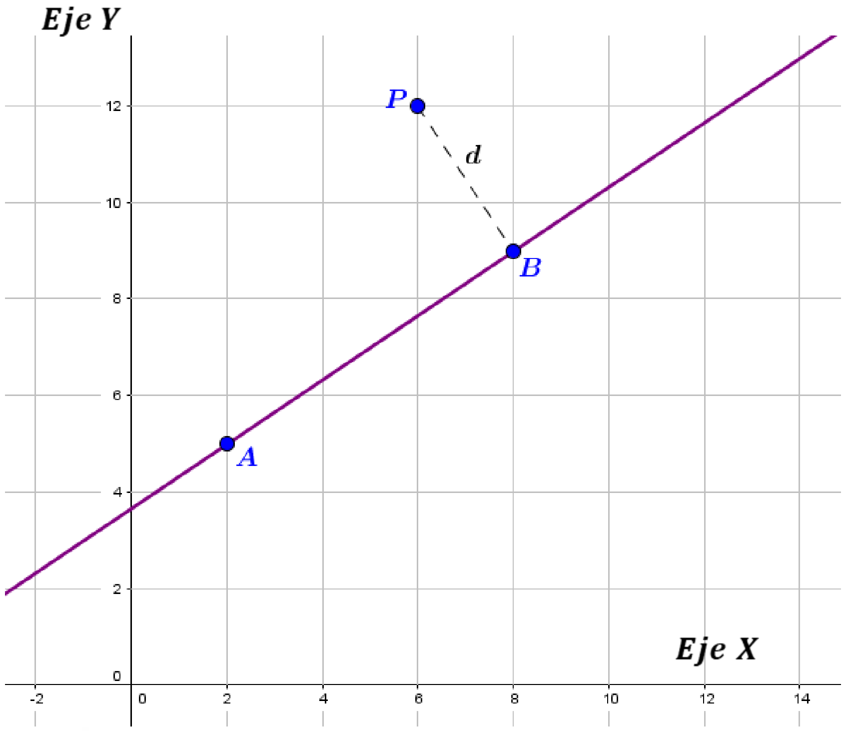
$$3y - 15 = 2x - 4$$

$$\mathcal{L}: 2x - 3y + 11 = 0$$

$$d(P, \mathcal{L}) = \frac{|2(6) - 3(12) + 11|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

$$d(P, \mathcal{L}) = \frac{|2(6) - 3(12) + 11|}{\sqrt{13}} = \frac{|-13|}{\sqrt{13}}$$

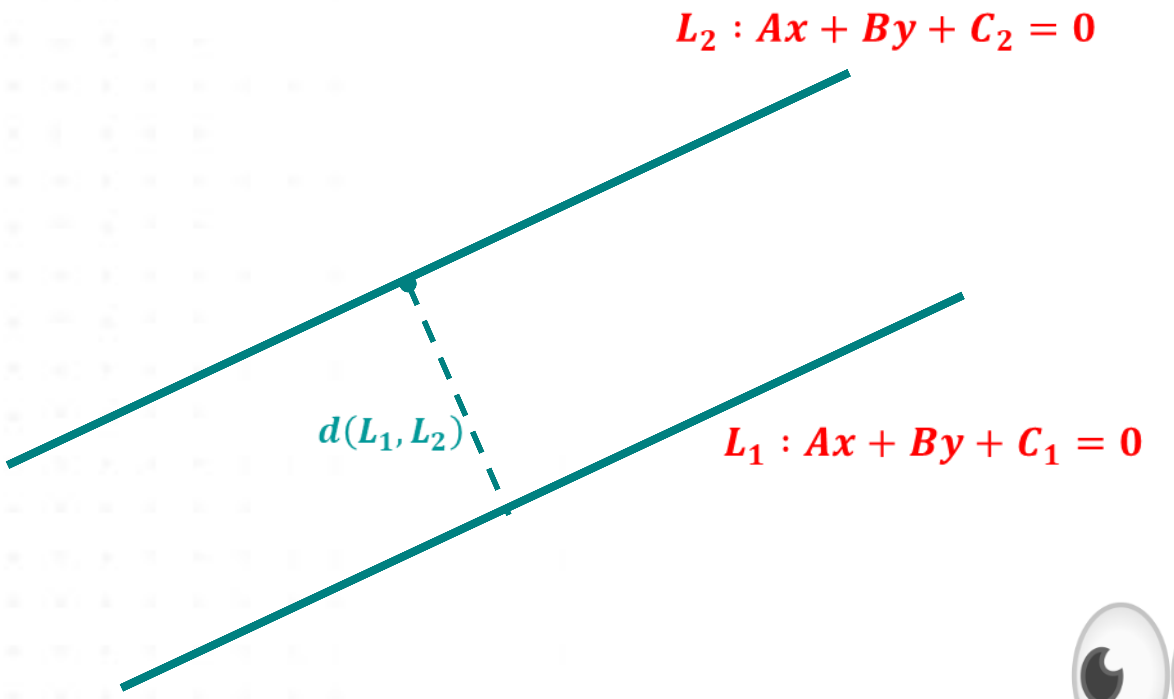
$$d(P, \mathcal{L}) = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$



3 DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

Sean las rectas $L_1 : Ax + By + C_1 = 0$ *y* $L_2 : Ax + By + C_2 = 0$, *rectas paralelas, la distancia entre ellas está determinada por:*

$$\boldsymbol{d(L_1, L_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$



Ejemplo.

Determine la distancia mínima entre las rectas paralelas

$L_1: -6x + 14y - 13 = 0$ y $L_2: 3x - 7y + 3 = 0$

SOLUCIÓN:

Ambas rectas deben de tener el mismo coeficiente tanto con x como y

$$(-2)(3x - 7y + 3 = 0)$$

$$L_2: \quad -6x + 14y - 6 = 0$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|-6 - (-13)|}{\sqrt{(-6)^2 + (14)^2}}$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|7|}{\sqrt{232}}$$

$$d(L_1, L_2) = 0.459$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Universidad Tecnológica del Perú

1. Si $L_1: 2y + ax + 6 + b = 0$ pasa por el punto $(2, -5)$ y es paralela a la recta $L_2: 3x + y - 8 = 0$. Determine el valor de $a + b$.

SOLUCIÓN:

$$(2\,;-5\,) \in L_1 \Longrightarrow L_1:\ 2(-5) + a(2) + 6 + b = 0$$

$$-4 + 2a + b = 0$$

$$Si\ L_1 \,//\, L_2 \Longrightarrow m_1 = m_2$$

$$-\frac{a}{2} = -\frac{3}{1}$$

$$a = 6$$

$$-4 + 2(6) + b = 0$$

$$b = -8$$

RPTA: $a + b = -2$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Determine el o los valores de k para que la recta $L_1: 4x + k - 2 = 3y$ diste del punto $(2,-3)$ en 5 unidades.

SOLUCIÓN:

Consideremos: $(x_3\,, y_3) = (2,-3)$

Reemplazando en la fórmula de distancia:

$$d(Q, L_1) = \frac{|Ax_3 + By_3 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$5 = \frac{|4(2) - 3(-3) + k - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$5 = \frac{|k + 15|}{5}$$

$$|k + 15| = 25$$

$$|a| = \mathrm{b} \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad \vee \quad a = -b$$

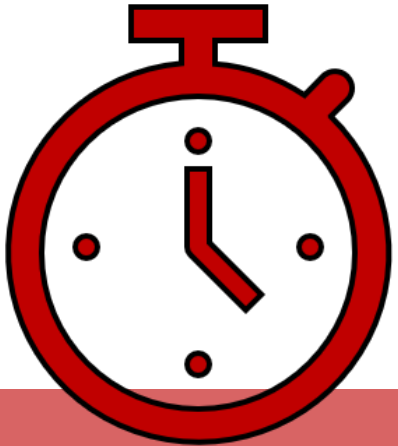
$$k + 15 = 25 \quad o \quad k + 15 = -25$$

$$k = 10 \quad o \quad k = -40$$

Práctica

¡Ahora es tu turno!

A desarrollar los ejercicios propuestos



Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO

EJERCICIOS RETO

1. Hallar la ecuación general de la recta que contine al punto $(-2, 7)$ y es paralela a la recta que tiene por ecuación $-3x + 1 = 5y$.
2. Dada la recta $L_1: 3x + (m-1)y = 7 - 2n$, la cual pasa por el punto $(3, -1)$ y que es paralela a la recta $L_2: 4y = x - 4$. Determine los valores de m y n.
3. Determine la distancia mínima del punto $M(-5, -7)$ a la recta que pasa por los puntos $P\left(-4, \frac{3}{2}\right)$; $Q(5, -2)$.
4. Dadas las rectas paralelas $L_1: 5x + 3y = k + 2$ y $L_2:\ 2k - 10x = 6y + 1$. Determine el o los valores que puede tomar, dado que la distancia entre dichas rectas es 5.
5. Dadas las rectas paralelas $L_1: (-k + 2)x + 3y = 2$ y $L_2:\ 10kx = 6y + 1$. Determine el o los valores que puede tomar k.

Universidad Tecnológica del Perú

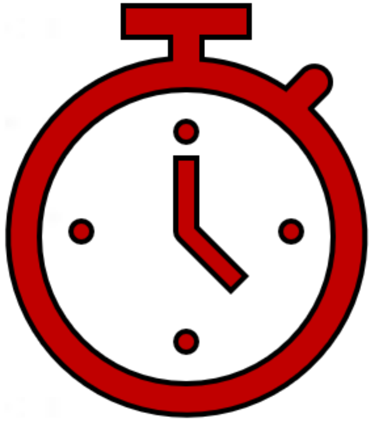
Cierre

RESPUESTAS

1. $L: \ 3x + 5y - 29 = 0$
2. $m = -11; \ n = -7$
3. $d(P, L) = 5.15$
4. $k = 0$
5. $k = -\frac{1}{2}$

Espacio de Preguntas

No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué hemos aprendido hoy?

1. ¿A través de qué se relacionan las rectas paralelas?

2. ¿Cómo se halla la distancia entre dos rectas paralelas?

3 FINALMENTE

Universidad Tecnológica del Perú

Excelente tu participación

Un problema lo convierto en una oportunidad.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y sigue practicando.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Universidad Tecnológica del Perú