SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Método por determinantes.

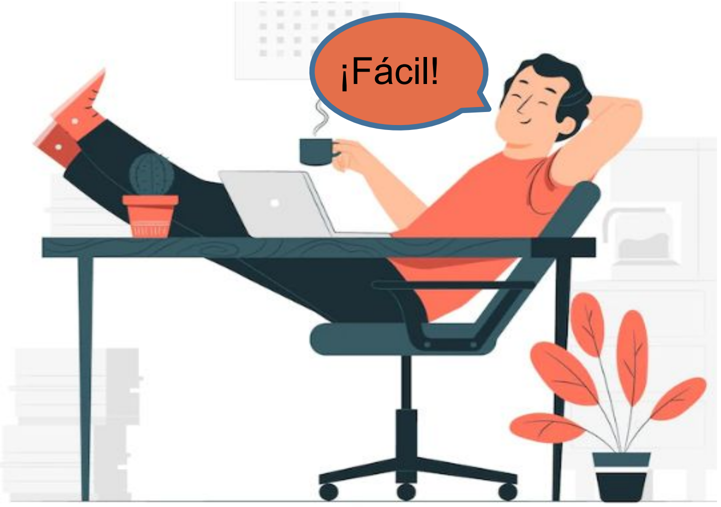
UTP Universidad Tecnológica del Perú

Inicio
¿Alguna duda de la sesión anterior?

¿Qué dices?

Cómo se determina la matriz de cofactores de:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$



LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve sistemas de ecuaciones lineales empleando el método de Cramer en casos aplicados.

Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué tanto conoces?

Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

¿Con qué métodos se pueden resolver los sistemas de ecuaciones lineales?

Utilidad

¿Para qué me sirve los sistemas de ecuaciones lineales?

En la mayoría de los problemas aplicativos intervienen variables que forman un sistema de ecuaciones, para los cuales existen métodos matriciales que facilitan el trabajo de encontrar los valores que satisfacen dichas ecuaciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO CRAMER

Transformación

UTP Universidad Tecnológica del Perú

Todo sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado como una ecuación matricial.

Sistema Lineal $\begin{cases} x + y - 3z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= 10 \\ 3x - y + 5z &= 14 \end{cases}$

Siendo:

A: Matriz de coeficientes.
X: Matriz de variables
B: Matriz de constantes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{\textbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\textbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}}_{\textbf{B}}$$

1 MÉTODO DE CRAMER

La regla de Cramer permite resolver sistemas de “n” ecuaciones lineales con “n” incógnitas usando determinantes

REGLA DE CRAMER PARA SISTEMAS CON DOS VARIABLES Y DOS INCOGNITAS

En todo sistema lineal $\begin{cases} ax + by = \boldsymbol{r} \\ cx + dy = \boldsymbol{s} \end{cases}$ expresado matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} \quad \approx \quad A \cdot X = B$$

se puede determinar su solución de cada variable como:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \quad ; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

Siendo $A_x = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} & b \\ \boldsymbol{s} & d \end{bmatrix}$; $A_y = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{r} \\ c & \boldsymbol{s} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y siempre que $|A| \neq 0$

EJEMPLO

Resolver el sistema de ecuaciones lineales empleando el método de Cramer

$$\begin{cases} x + 2y = -11 \\ -2x + y = -13 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x + 2y = -11 \\ -2x + y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

Aplicando el método de Cramer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 5$$

$$A_x = \begin{bmatrix} -11 & 2 \\ -13 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = 15$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -2 & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = -35$$

Luego:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{15}{5} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-35}{5}$$

$$x = 3 \qquad y = -7$$

$$C.S.;\ \{(3, -7)\}$$

REGLA DE CRAMER PARA SISTEMAS DE "n" ECUACIONES Y "n" INCOGNITAS

Universidad Tecnológica del Perú

Si un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es equivalente a la ecuación matricial $A \cdot X = B$, con $|A| \neq 0$, entonces se puede determinar su solución como:

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} \quad ; \quad x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} \quad ; \ \ldots \ ; x_n = \frac{|A_{x_n}|}{|A|}$$

Donde A_{x_i} es la matriz obtenida al sustituir la i-esima columna de A por los elementos de la matriz columna de términos independientes B

EJEMPLO Resolver el sistema de ecuaciones empleando el método de Cramer

$$\begin{cases} 8x - 2y + 4z = 12 \\ -7x + 2y - 5z = -4 \\ 4x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 8x - 2y + 4z = 12 \\ -7x + 2y - 5z = -4 \\ 4x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A \cdot X = B}$$

Aplicando el método de Cramer:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2$$

$$A_x = \begin{bmatrix} \mathbf{12} & -2 & 4 \\ \mathbf{-4} & 2 & -5 \\ \mathbf{5} & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = 14$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 8 & \mathbf{12} & 4 \\ -7 & \mathbf{-4} & -5 \\ 4 & \mathbf{5} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = 40$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 8 & -2 & \mathbf{12} \\ -7 & 2 & \mathbf{-4} \\ 4 & -1 & \mathbf{5} \end{bmatrix} \Rightarrow |A_z| = -2$$

Luego:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{14}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{40}{2} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-2}{2}$$

$$x = 7 \qquad y = 20 \qquad z = -1$$

$$C.S.;\ \{(7, 20, -1)\}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Universidad Tecnológica del Perú

1. Un médico recomienda que un paciente que tome 50 mg de Niacina, de Riboflavina y de Tiemina diariamente para aliviar una deficiencia vitamínica, En su maletín de medicinas en casa, el paciente encuentra tres marcas de píldoras de vitaminas. Las píldoras VitaMax contienen 5 mg de N, 15 mg de R y 10 mg de T, Vitron contiene 10 mg de N, 20 mg de R y 10 mg de T y Vitaplus contiene 15 mg de N y 10 mg de T. ¿Cuántas píldoras de cada tipo debe tomar el paciente diariamente para obtener los 50 mg de cada vitamina?. Plantear un sistema y resolver por el método de Cramer

Solución:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} VM & VT & VP \end{array} \\ \begin{array}{c} N \\ R \\ T \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow 50\,Niacina \\ \longrightarrow 50\,Rivoflavina \\ \longrightarrow 50\,Tiemina \end{array}$$

Podemos simplificar por fila y expresar el sistema como:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 3x + 4y \qquad = 10 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \approx \mathbf{A \cdot X = B}$$

Aplicando el método de Cramer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -5$$

$$A_x = \begin{bmatrix} \mathbf{10} & 2 & 3 \\ \mathbf{10} & 4 & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = -10$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{10} & 3 \\ 3 & \mathbf{10} & 0 \\ 1 & \mathbf{5} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = -5$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mathbf{10} \\ 3 & 4 & \mathbf{10} \\ 1 & 1 & \mathbf{5} \end{bmatrix} \Rightarrow |A_z| = -10$$

Luego:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-10}{-5} \qquad x = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-5}{-5} \qquad y = 1$$

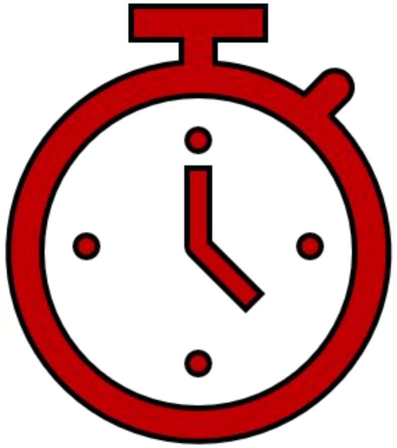
$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-10}{-5} \qquad z = 2$$

Por tanto, el paciente debe consumir 2 píldoras de Niacina, 1 de Riboflavina y 2 de Tiemina

Práctica

¡Ahora es tu turno

A desarrollar los ejercicios propuestos



Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO

Universidad Tecnológica del Perú

EJERCICIOS RETO

1. Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de Cramer

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 3y - 2z = 20 \end{cases}$$

2. Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de Cramer

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases}$$

3. Cinemark dispone de tres salas A, B, C. Los precios de las entradas a cada una de estas salas son 1, 2 y 3 dólares respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 425 dólares y el número total de espectadores que acudieron fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubiesen asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se obtendría una recaudación de 400 dólares. ¿Cuál es el número de espectadores que acudió a cada sala? Plantear un sistema de ecuaciones lineales y resuelva por el método de Cramer

4. Tres compuestos se combinan para formar tres tipos de fertilizantes. Una unidad del fertilizante del tipo I requiere 10 kg del compuesto A, 30 kg del compuesto B y 60 kg del compuesto C. Una unidad del fertilizante del tipo II requiere 20 kg del compuesto A, 30 kg del compuesto B y 50 kg del compuesto C. Una unidad del fertilizante del tipo III requiere 50 kg del compuesto A y 50 kg del compuesto C. Si hay disponibles 1600 kg del compuesto A, 1200kg del B y 3200 kg del C. ¿Cuantas unidades de los tres tipos de fertilizantes se pueden producir si se usa todo el material químico disponible?. Plantear un sistema de ecuaciones lineales y resuelva por el método de Cramer

Universidad Tecnológica del Perú

Cierre

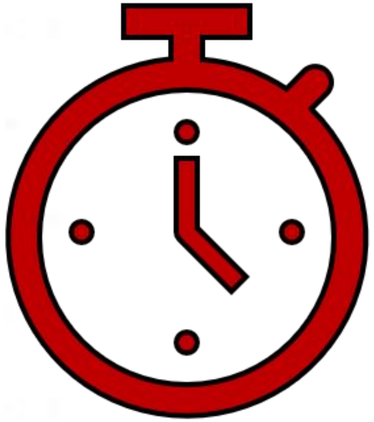
RESPUESTAS

1. $C.S.: \{(10, 10, 10)\}$
2. $C.S.: \{(15, 29, 6)\}$
3. Asistieron 50 espectadores a la sala A, 75 espectadores a la sala B y 75 espectadores a la sala C
4. Se puede producir 20 unidades de cada tipo de fertilizante

Universidad Tecnológica del Perú

Espacio de Preguntas

Pregunta a través del chat o levantando la mano en el Zoom. No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

UTP Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué aprendimos hoy?

1. ¿En qué consiste el método de Cramer?

2. ¿Cuándo no puedo aplicar el método de Cramer?

Método de Cramer

Lo logré

Desaprende lo que te limita

FINALMENTE

Gracias por tu participación

Recuerda: aprender feliz es aprender para siempre.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Resuelve los ejercicios de esta sesión y sigue practicando.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Universidad
Tecnológica
del Perú