

SECCIONES CÓNICAS

Circunferencia. Elementos. Ecuaciones de la circunferencia. Distancia de un punto a la circunferencia.



**Universidad
Tecnológica
del Perú**

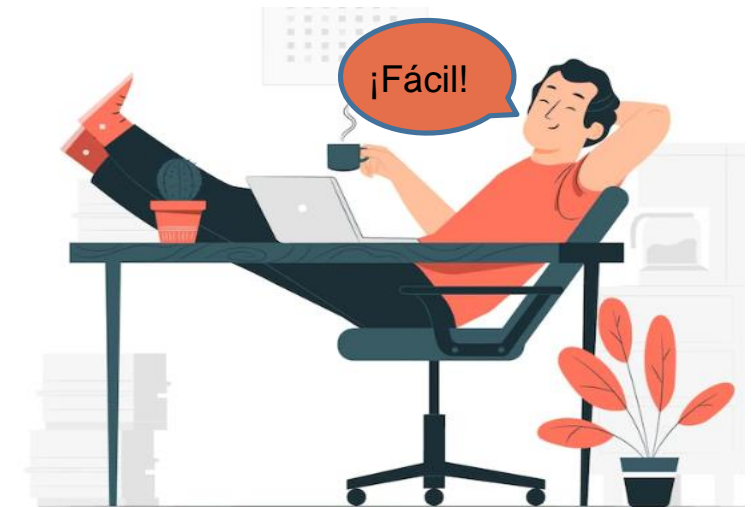
Inicio

¿Alguna duda de la sesión anterior?



Vamos a ver...

¿Cuál es la expresión
equivalente a $x^2 - 8x + 11$?



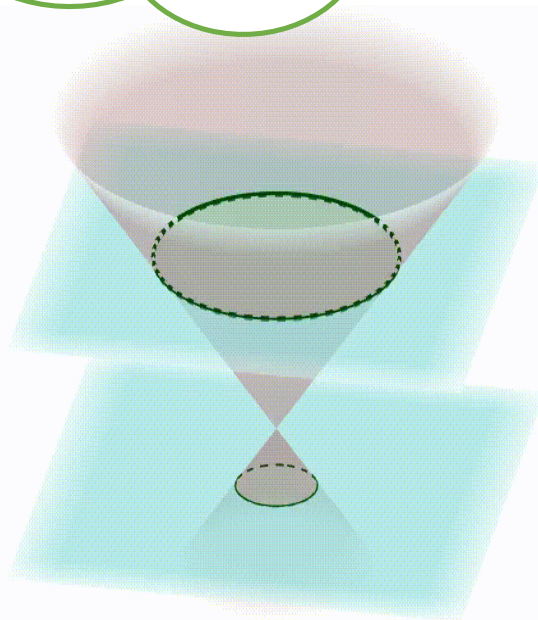
LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas sobre circunferencias, identificando sus ecuaciones, elementos y gráficas.



¿Qué sabes de la circunferencia?

*¿Puedes
mencionar algunos
elementos de la
circunferencia?*



*¿Cómo reconoces la
ecuación de una
circunferencia?*



*¿Por qué crees que
la circunferencia es
una sección
cónica?*

Utilidad

¿Cuál es la utilidad de la Circunferencia?

La circunferencia es uno de los elementos de la geometría más importantes que están normalmente en la vida, aunque no lo parezca y desde los tiempos antiguos que es usada.

En el transporte se utiliza principalmente en las ruedas.



En los relojes, en la antigüedad éstos eran circulares, y para dividir la circunferencia en 12 partes exactamente iguales, que a futuro podrán dar una medición de hora perfecta, es necesario usar criterios de ángulos de la circunferencia.



En los deportes la circunferencia por lo general está presente en la mayoría de las distintas disciplinas.



<https://concepto.de/vector/>

**SECCIONES
CÓNICAS**

CIRCUNFERENCIA



Desaprende lo que te limita

Transformación

1 CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que están a una misma distancia de otro punto fijo del mismo plano denominado centro $C(h, k)$.

Ecuación Ordinaria

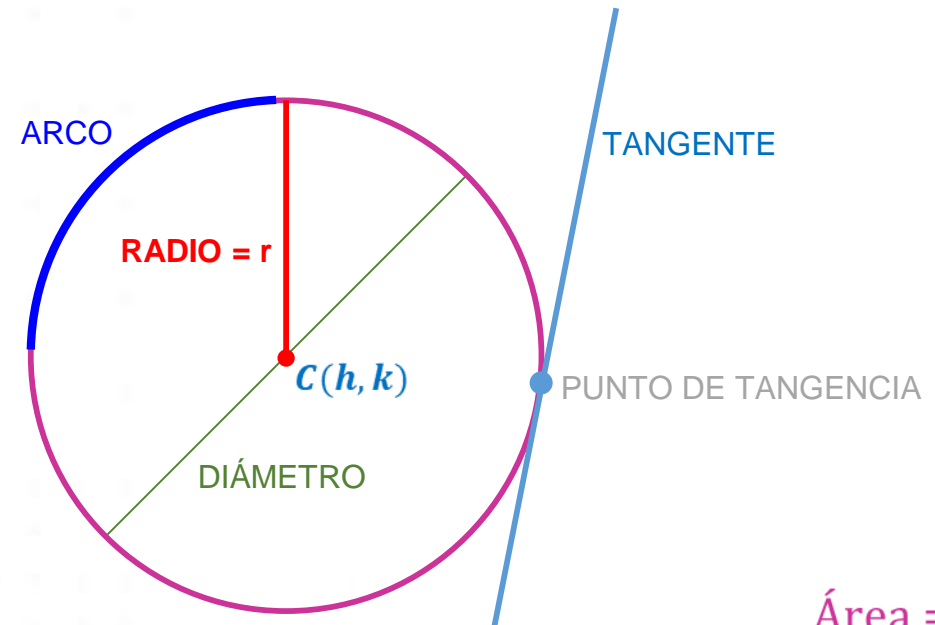
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación Canónica

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación General

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$



$$\begin{aligned}\text{Área} &= \pi r^2 \\ \text{Longitud} &= 2\pi r\end{aligned}$$

1.1 Elementos

Centro: Es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

Radio: Es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

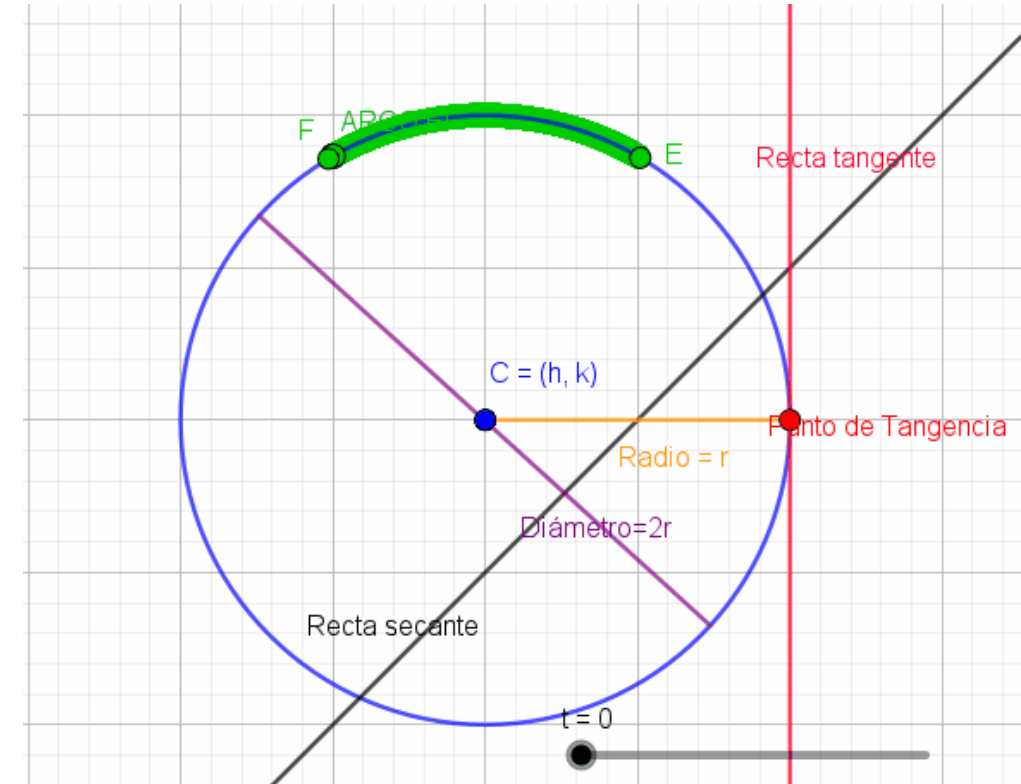
Cuerda: Es un segmento que une dos puntos cualesquiera que pertenecen a la circunferencia.

Diámetro: Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro es la mayor cuerda que se pueda trazar a una circunferencia.

Arco: Es la parte de una circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

Recta secante: Es la línea que corta a la circunferencia en dos puntos.

Recta tangente: Es la línea que toca a la circunferencia en un solo punto, conocido como punto de tangencia. Una recta tangente siempre es perpendicular al radio que va desde el punto de tangencia hasta el centro de la circunferencia.



Conversión de forma ordinaria a la forma general

Ecuación Ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación General

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

*Recordemos los binomios
al cuadrado*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Ejemplo

- a) Determine la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es $(1, -2)$ y pasa por el punto $(3, 5)$.
- b) Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados

SOLUCIÓN:

a) $d(C, P) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$r = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-2 - 5)^2}$$

$$r = \sqrt{4 + 49}$$

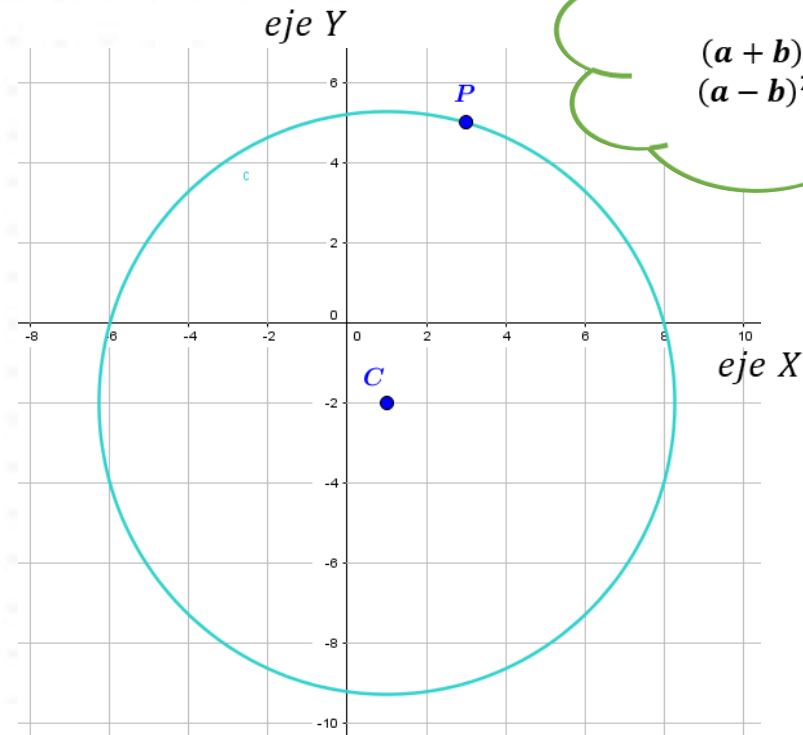
$$r = \sqrt{53}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = \sqrt{53}^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 53$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 53 = 0$$



Recordemos los binomios al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

C: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 48 = 0$



Ejemplo

- a) Determine la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es $(1, -2)$ y pasa por el punto $(3, 5)$.
- b) Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados



SOLUCIÓN:

b)

Hallando los puntos de corte al eje X:

Sea $y = 0$, tenemos:

$$C : x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$C : (x - 8)(x + 6) = 0$$

$$x = 8 ; \quad x = -6$$

$$\Rightarrow (8, 0) ; (-6, 0)$$

Hallando los puntos de corte al eje Y:

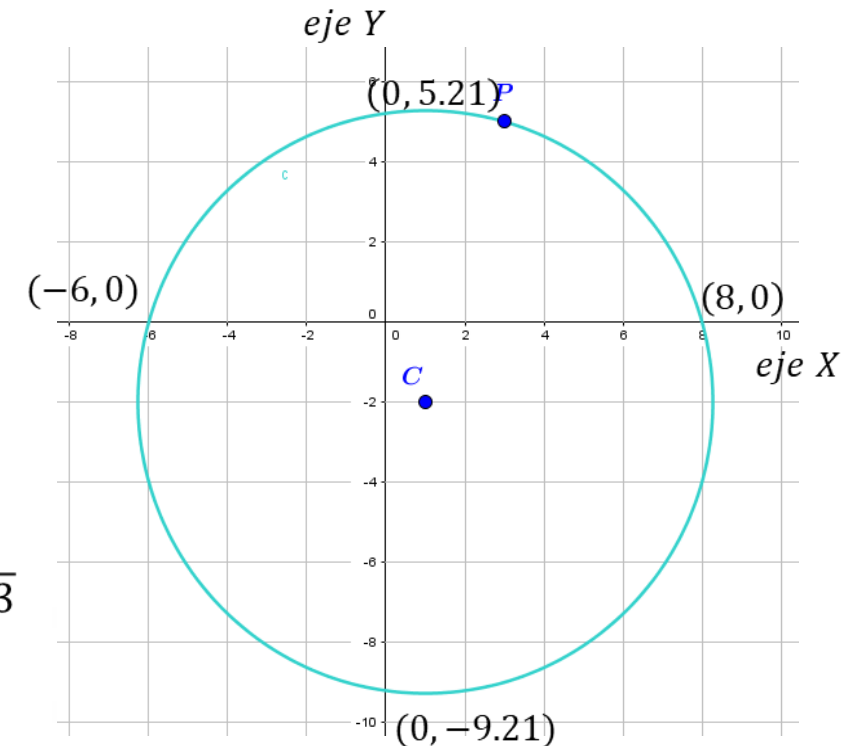
Sea $x = 0$, tenemos:

$$C : y^2 + 4y - 48 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$

$$y = -2 + 2\sqrt{13}; \quad y = -2 - 2\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow (0, 5.21) ; (0, -9.21)$$



Conversión de forma general a la forma ordinaria

Ecuación General

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ecuación Ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

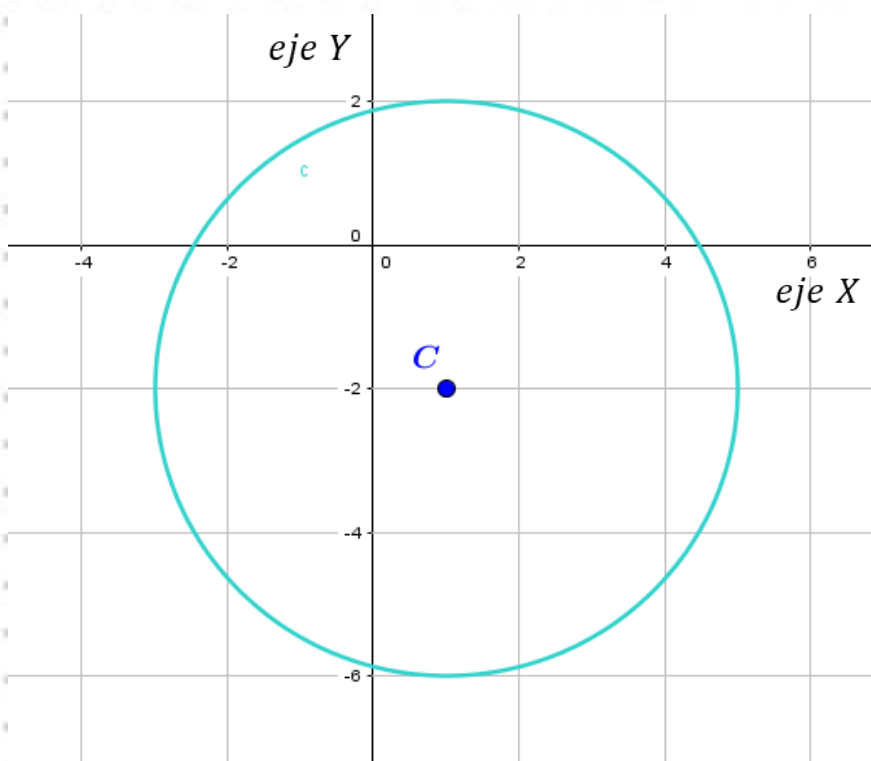
Se requiere factorizar mediante la técnica de completar cuadrados para expresar un trinomio en la forma de un binomio cuadrado.



Ejemplo. Determine la ecuación ordinaria de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$$

SOLUCIÓN:



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 11 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$C(h, k) = (1, -2) \quad ; \quad r = 4$$

$$(x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Es el número que estoy completando, y para mantener la igualdad debo aumentarlo en el otro miembro de la ecuación.



2 RECTA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA



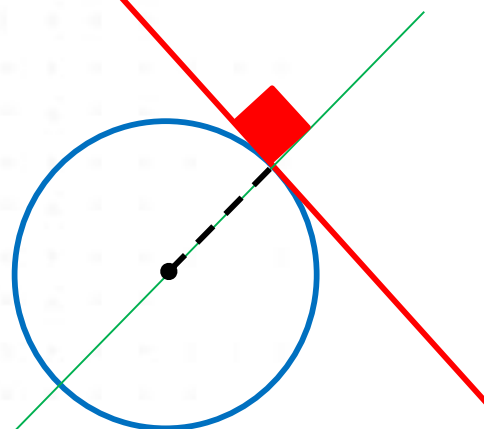
Universidad
Tecnológica
del Perú

Es una recta que toca a la circunferencia en un punto, forma un ángulo recto con el radio vector de la circunferencia, que a su vez puede estar contenida en una recta Normal a la recta Tangente. Ambas rectas son siempre perpendiculares.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_1 = -\frac{1}{5}$$

$$m_2 = 5$$



La Recta

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



Ejemplo.

Hallar la ecuación general de la recta tangente a la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$ en el punto $Q(5, 2)$

SOLUCIÓN:

Hallando la pendiente m_1 de la recta L_N que pasa por el centro C y el punto Q

$$m_1 = \frac{3 - 2}{2 - 5} = -\frac{1}{3}$$

La recta normal L_N y la recta tangente L_T son perpendiculares, luego:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

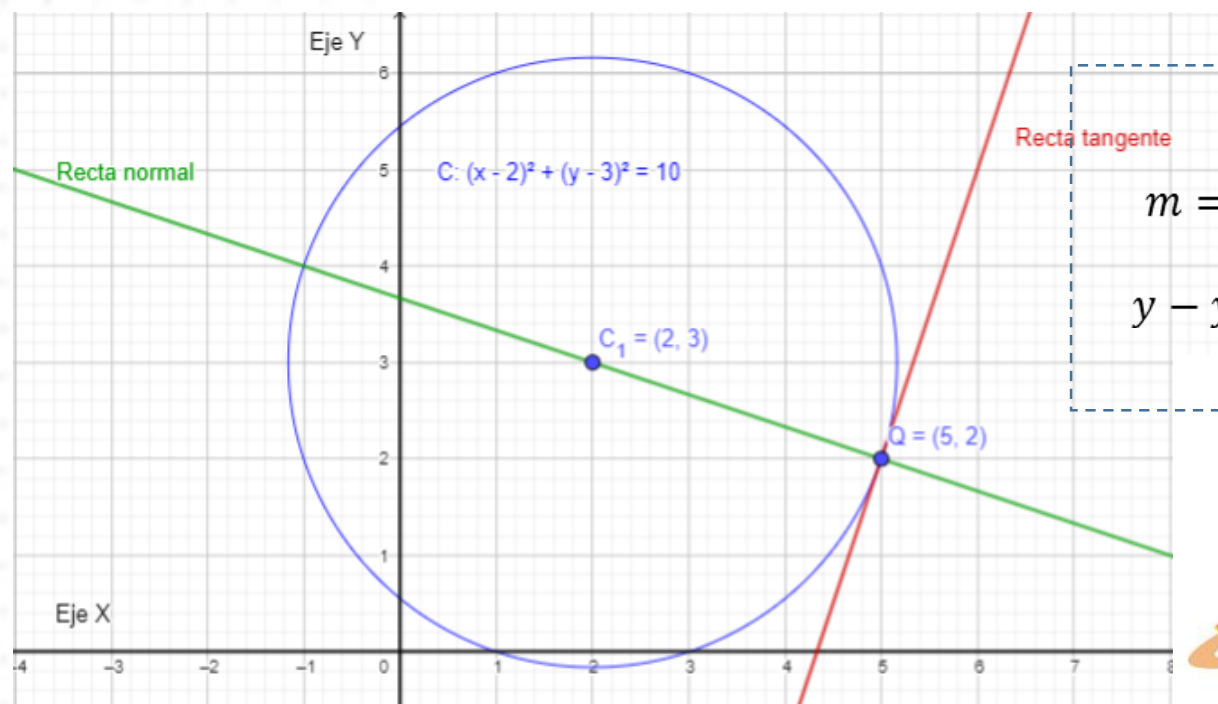
$$-\frac{1}{3} \cdot m_2 = -1 \quad m_2 = 3$$

Reemplazando en la ecuación de la recta tangente:

$$L_T: (y - 2) = 3(x - 5)$$

$$L_T: y - 2 = 3x - 15$$

$$L_T: 3x - y - 13 = 0$$



La Recta

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x}$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Dada $4x^2 + 4y^2 + 12x - 1 = 0$ determine si es un punto, una circunferencia o un conjunto vacío. Si es una circunferencia, encuentre su centro y radio.

SOLUCIÓN:

$$\frac{1}{4}(4x^2 + 4y^2 + 12x - 1 = 0)$$

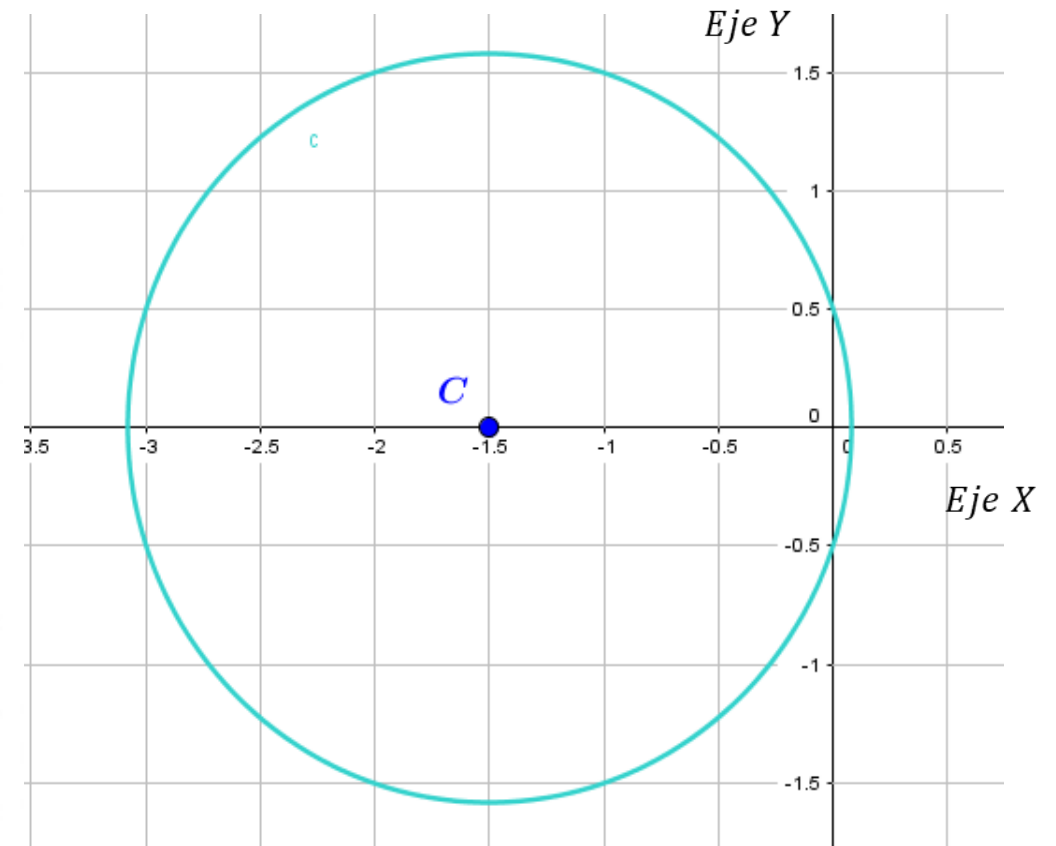
$$x^2 + y^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{2}$$

$$C\left(-\frac{3}{2}, 0\right) r = \sqrt{5/2}$$

RPTA: *Es una circunferencia*



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Determinar los valores de k para que la recta $L: 3x - 2y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia.

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 39 = 0$$

SOLUCIÓN:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 52$$

$$C(2, -3) ; r = \sqrt{52}$$

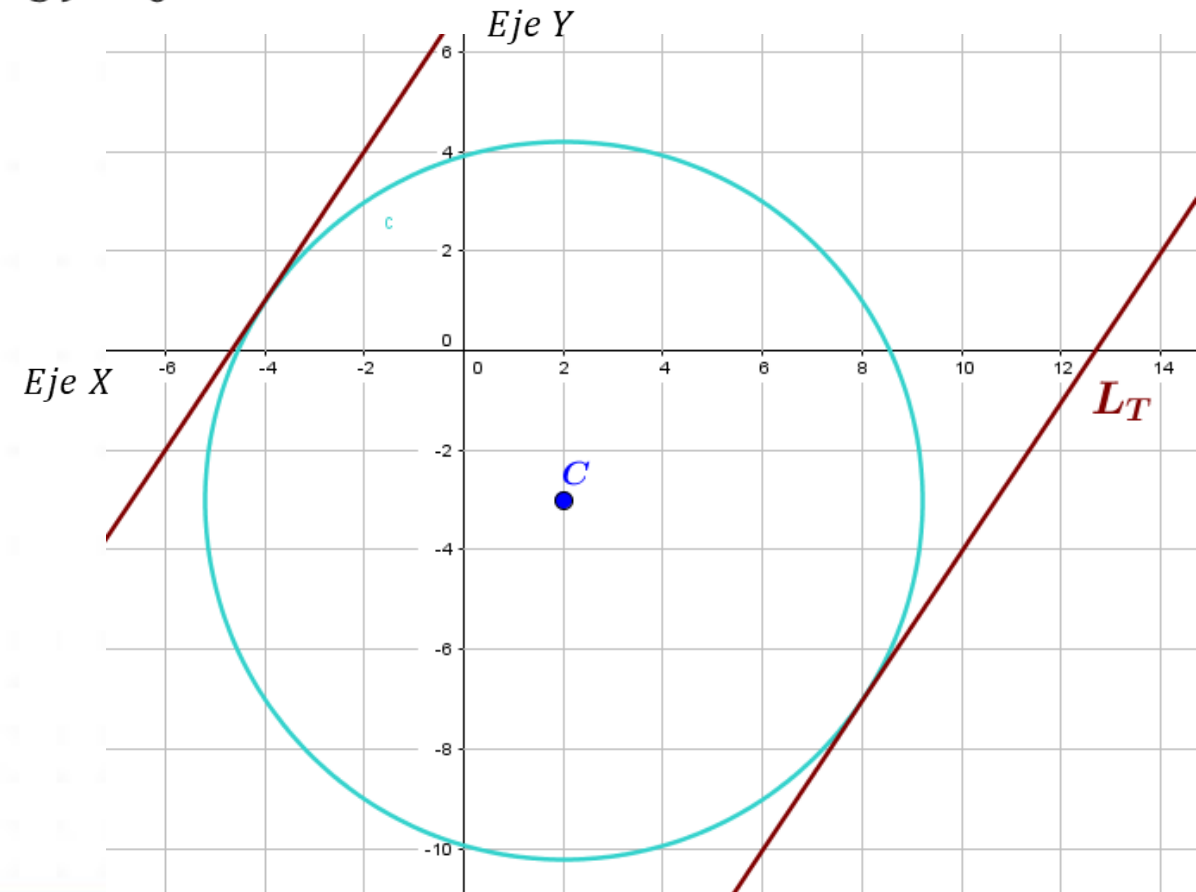
$$d(C, L) = r$$

$$\frac{|3(2) - 2(-3) + k|}{\sqrt{9 + 4}} = \sqrt{52}$$

$$|k + 12| = 26$$

$$k = 14 \quad k = -38$$

RPTA: $k = 14 ; k = -38$



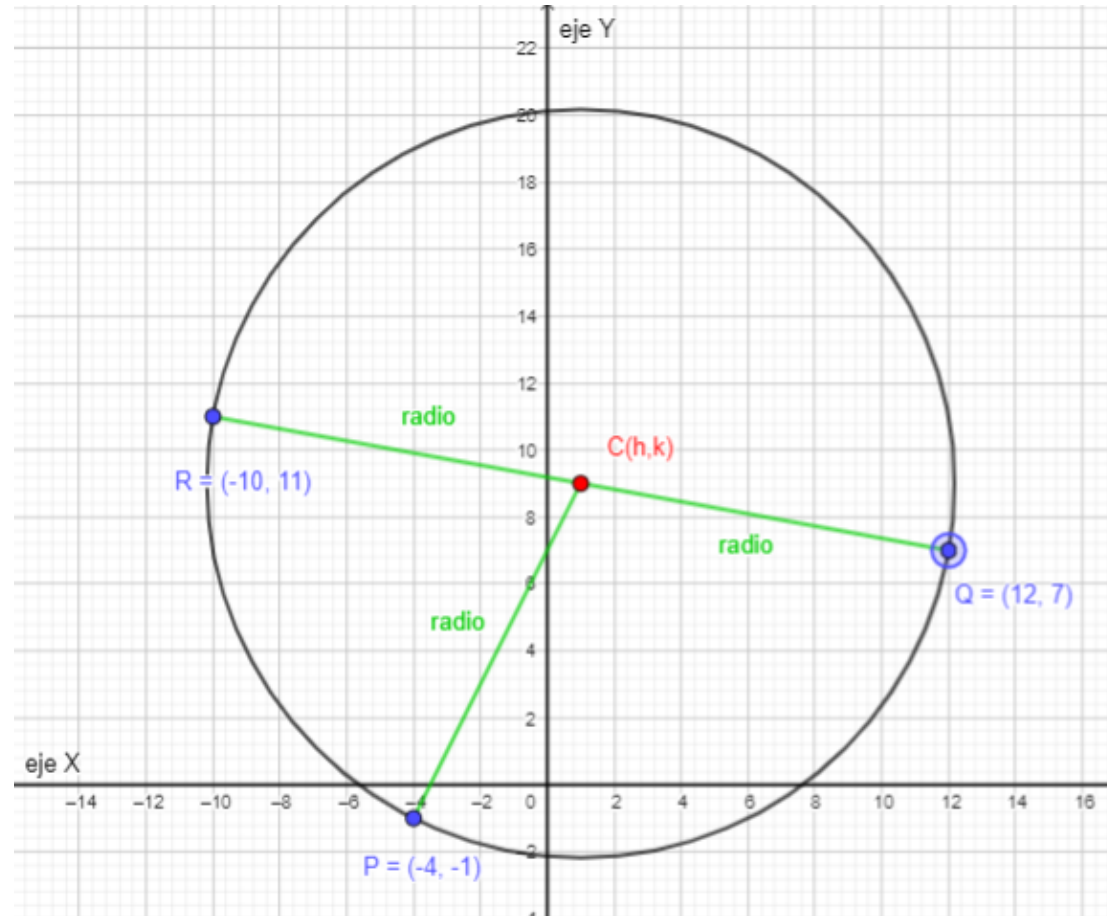
EJERCICIOS EXPLICATIVOS

3. Determine el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $P(-4, -1)$; $Q(12, 7)$ y $R(-10, 11)$

SOLUCIÓN:

Sea el centro $C(h, k)$, luego:

$$r = d(C, P) = d(C, Q) = d(C, R)$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

3. Determine el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $P(-4, -1)$; $Q(12, 7)$ y $R(-10, 11)$

SOLUCIÓN:

$$d(C, P) = d(C, Q)$$

$$\sqrt{(h+4)^2 + (k+1)^2} = \sqrt{(h-12)^2 + (k-7)^2}$$

$$(h+4)^2 + (k+1)^2 = (h-12)^2 + (k-7)^2$$

$$32h + 16k - 176 = 0$$

$$2h + k - 11 = 0 \quad \dots (1)$$

$$d(C, Q) = d(C, R)$$

$$\sqrt{(h-12)^2 + (k-7)^2} = \sqrt{(h+10)^2 + (k-11)^2}$$

$$(h-12)^2 + (k-7)^2 = (h+10)^2 + (k-11)^2$$

$$-44h + 8k - 28 = 0$$

$$-11h + 2k - 7 = 0 \quad \dots (2)$$

$$(-2) \begin{cases} 2h + k - 11 = 0 \\ -11h + 2k - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4h - 2k + 22 = 0 \\ -11h + 2k - 7 = 0 \end{cases}$$

$$h = 1 ; \quad k = 9$$

$$C(h, k) = (1, 9)$$

Práctica

¡Ahora es tu turno!

A desarrollar los ejercicios propuestos



Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO



Universidad
Tecnológica
del Perú

EJERCICIOS RETOS

1. Determinar los valores de k para que la recta $L: kx + y + k - 15 = 0$ sea tangente a la circunferencia $C: x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$
2. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro la porción de la recta $L: 2x - 3y + 12 = 0$, comprendida en el segundo cuadrante.
3. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje X en $S(4,0)$ y pasa por el punto $T(7,1)$.
4. Una circunferencia pasa por los puntos $A(-3,3)$ y $B(1,4)$, su centro está sobre la recta $L: 3x - 2y - 23 = 0$. Hallar su ecuación.
5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y es tangente a la recta $L: x - y - 4 = 0$ en el punto $B(3, -1)$.



Cierre

RESPUESTAS

1. $k_1 = 3.31; \quad k_2 = -1.31$
2. $C: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$
3. $C: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$
4. $C: (x - 2)^2 + (y - \frac{17}{2})^2 = \frac{629}{4}$
5. $C: (x - \frac{5}{8})^2 + (y - \frac{11}{8})^2 = \frac{401}{32}$



Espacio de Preguntas



No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

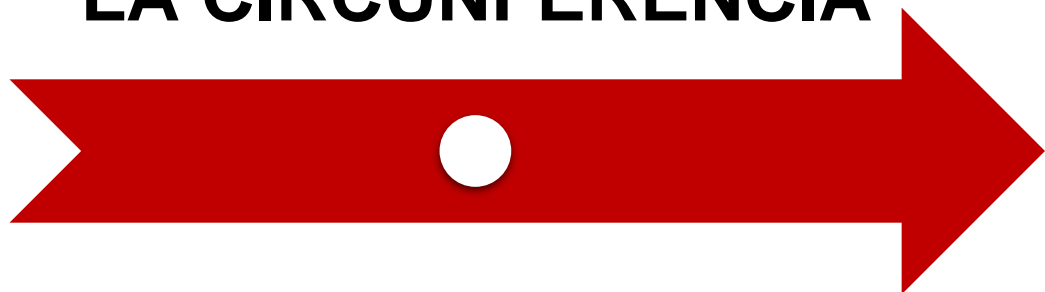
¿Qué hemos aprendido hoy?

1. ¿Cuáles son los principales elementos de una circunferencia?
2. ¿Qué relación existe entre la recta normal y la recta tangente?
3. ¿Qué ángulo forman el radio y la recta tangente a la circunferencia?



Desaprende lo que te limita

LA CIRCUNFERENCIA



Lo logré



Desaprende lo que te limita

FINALMENTE



Excelente tu
participación

Las dificultades me hacen
más fuerte.



Ésta sesión quedará
grabada para tus
consultas.



PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y sigue practicando.
2. Consulta en el FORO tus dudas.



Desaprende lo que te limita



**Universidad
Tecnológica
del Perú**

LUGAR GEOMÉTRICO

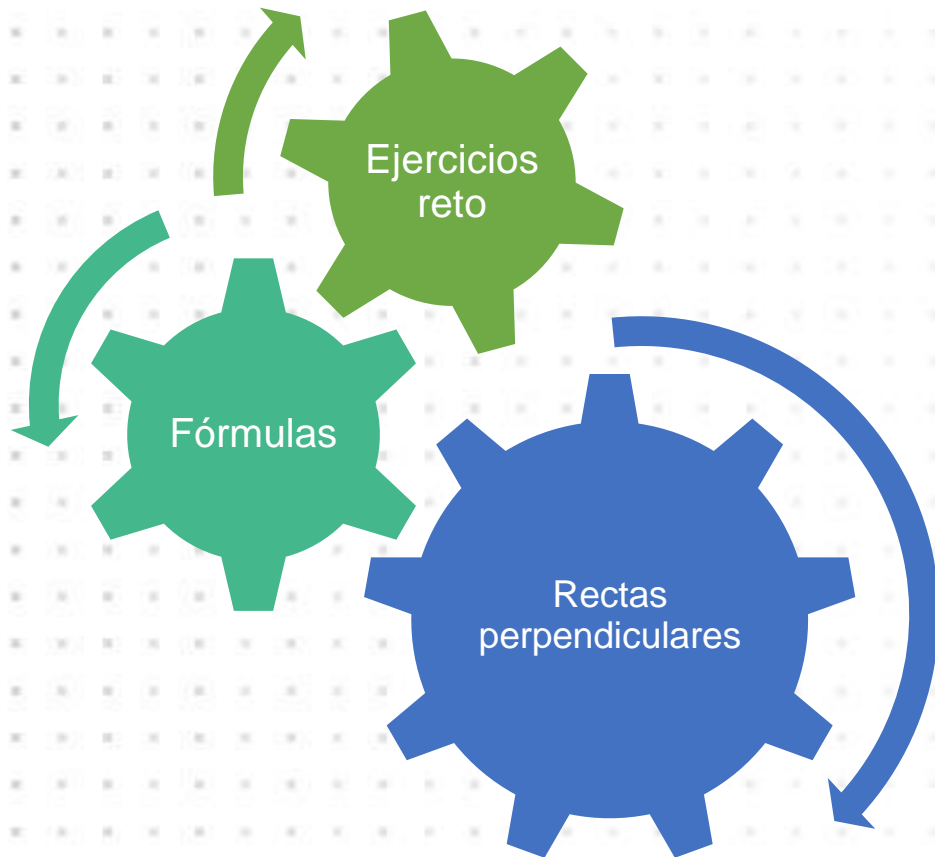
Secciones cónica. Lugar geométrico.



**Universidad
Tecnológica
del Perú**

Inicio

¿Alguna duda de la sesión anterior?



Vamos a ver...

¿Cuál es el valor de k si la recta $L_1: -3ky + (7 + k)x = 5$ es perpendicular a $L_2: 2y = x + 1$?



LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante reconoce los lugares geométricos que definen las secciones cónicas, a partir de operaciones algebraicas.



¿Qué sabes de secciones cónica?



Universidad
Tecnológica
del Perú

*¿Cómo se
representa un
cono?*

*¿Qué resulta de
intersecar un cono y un
plano horizontal?*



Utilidad

¿Para qué me sirve la ecuación de lugar geométrico?

La representación gráfica que tiene las cónicas en las estructuras que vemos en lugares con gran atractivo turístico es impresionante.

Desde hace muchos siglos estas figuras dominan el gusto del espectador.



CIRCUNFERENCIA



HIPÉRBOLA



PARÁBOLA



ELIPSE

**LUGAR
GEOMÉTRICO**

**SECCIONES
CÓNICAS**

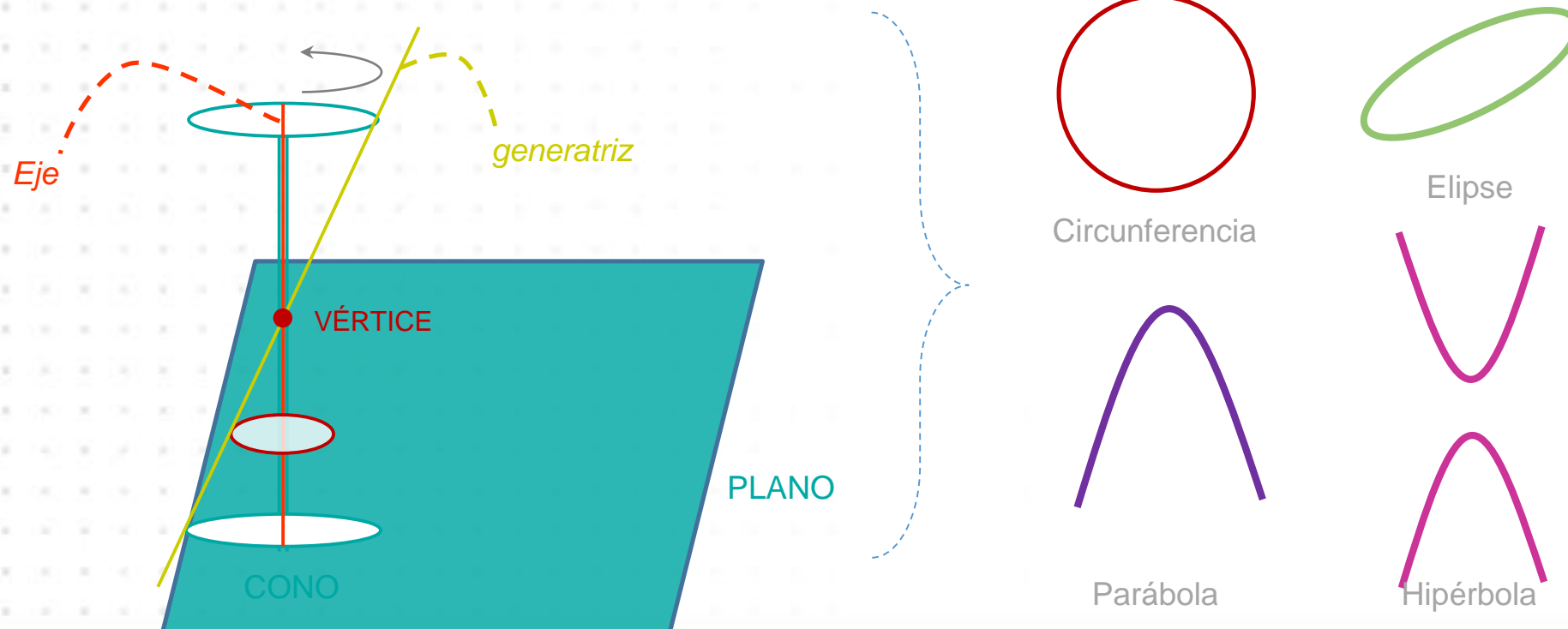


Desaprende lo que te limita

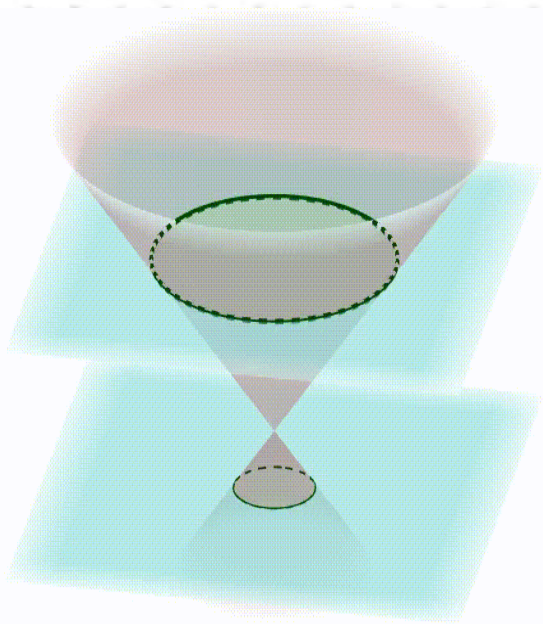
Transformación

1 SECCIONES CÓNICAS

El nombre de “secciones cónicas” se derivó del hecho de que estas figuras o lugares geométricos se encontraron originalmente en un cono. Cuando se hace intersectar un cono con un plano obtenemos distintas figuras. Cada una de ellas es una cónica.

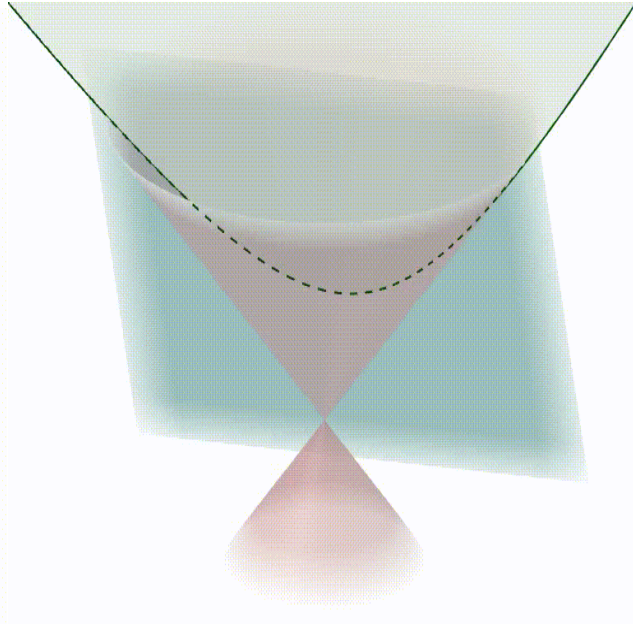


1 SECCIONES CÓNICAS



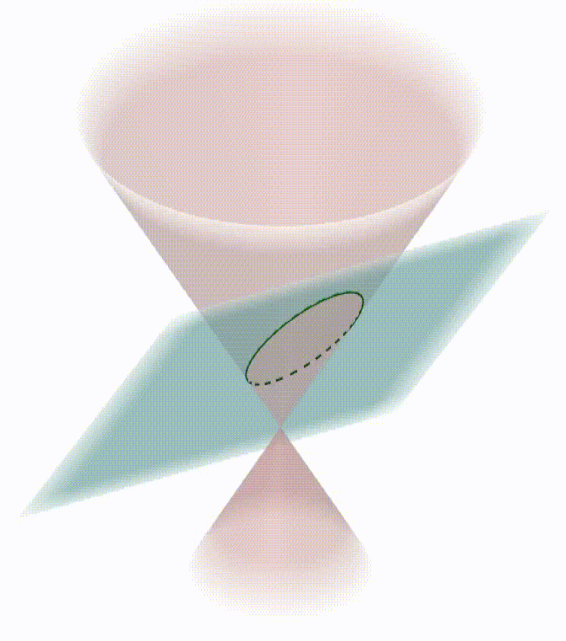
CIRCUNFERENCIA

$$C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$



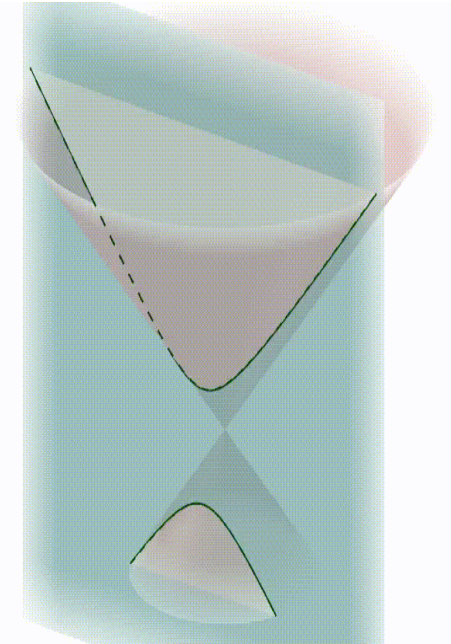
PARABOLA

$$P: x^2 + y^2 + Ey + F = 0$$



ELIPSE

$$E: Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$



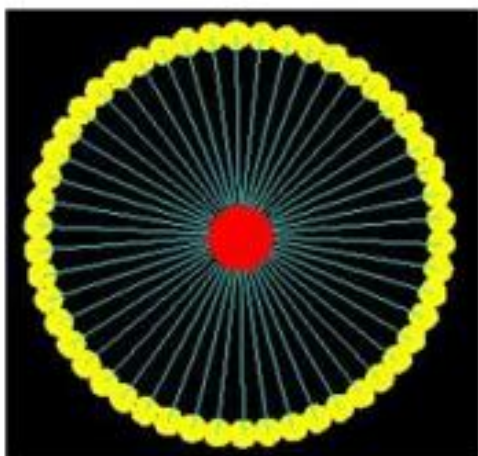
HIPERBOLA

$$H: Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2 LUGAR GEOMÉTRICO

Se define un lugar geométrico o grafica de una ecuación de dos variables $E(x, y) = 0$ al conjunto de puntos de un plano, en el cual todos ellos gozan de una misma propiedad o condición.

Por tanto, podemos afirmar que una ecuación $E(x, y) = 0$ es la expresión matemática de una curva si y solo si la ecuación queda satisfecha por las coordenadas de cada punto en la curva.



En la figura tienes 50 puntos muy grandes y redondos de color amarillo. Todos estos puntos amarillos gozan de la propiedad de estar a la misma distancia del centro, representado por un gran punto circular de color rojo. La distancia de cada punto al centro viene representada por una línea azul y es la misma para todos los puntos amarillos.

El lugar geométrico de los puntos amarillos representa a una circunferencia.



3

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

Los pasos a seguir pueden ser los siguientes:

1. Considerar un punto cualquiera $P(x, y)$ del lugar geométrico que satisface la condición o condiciones geométricas dadas.
2. Expresar analíticamente las condiciones dadas a través de una ecuación de variables x e y .
3. Efectuar las transformaciones necesarias para simplificar la ecuación, esta será considerada como la ecuación del lugar geométrico buscado.

Ejemplo.

Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de los puntos $A(-3, 2)$ y $B(2, -5)$.

SOLUCIÓN:

1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico
2. $P(x, y)$ tiene la misma distancia tanto al punto A como a B

$$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 5)^2}$$

3. Efectuando transformaciones necesarias para hallar la ecuación de lugar geométrico $E(x, y) = 0$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 5)^2$$

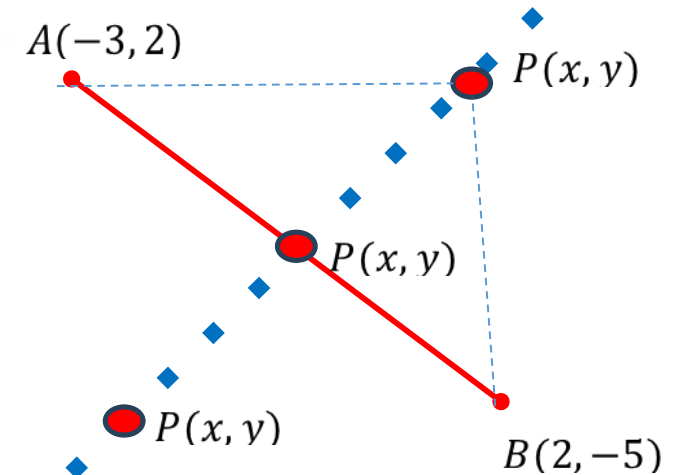
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25$$

$$6x + 9 - 4y + 4 = -4x + 4 + 10y + 25$$

$$10x - 14y - 16 = 0$$

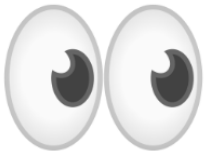


$$L: \quad \underline{5x - 7y - 8 = 0}$$



4 TÉCNICA PARA COMPLETAR CUADRADOS

Para el dominio de secciones cónicas es relevante la técnica de completar cuadrados, que es una técnica para factorizar expresiones cuadráticas $Ax^2 + Bx + C$, donde $A = 1$ y expresarlas de la forma $(x + a)^2 + b$, parte importante de las ecuaciones ordinarias de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.



OBS.: La técnica de completar cuadrados también permite resolver problemas de ecuaciones cuadráticas o determinar funciones inversas que es un tópico a tratar más adelante.

Ejemplo.

Dada la expresión cuadrática $x^2 - 14x + 11$.
Determine su expresión equivalente

SOLUCIÓN:

Aplicando la técnica para completar cuadrados:

$$x^2 - 14x + 11 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 14x + 7^2 - 7^2 + 11$$

$\frac{14}{2} = 7$

$$(x - 7)^2 - 49 + 11$$

Por tanto:

$$x^2 - 14x + 11 \approx (x - 7)^2 - 38$$

Con el número que estoy completando, se está generando un trinomio cuadrado perfecto que puede ser expresado como binomio al cuadrado.

$$(x - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sea el punto $P(x,y)$ que se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2,3)$ es siempre igual a su distancia al eje Y aumentada en 2 unidades. Hallar la ecuación del lugar geométrico

SOLUCIÓN:

$$d(A,P) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$d(Y,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2}$$

$$d(Y,P) = x \quad ; \quad x \geq 0$$

$$d(A,P) = d(Y,P) + 2$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = x + 2$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4$$

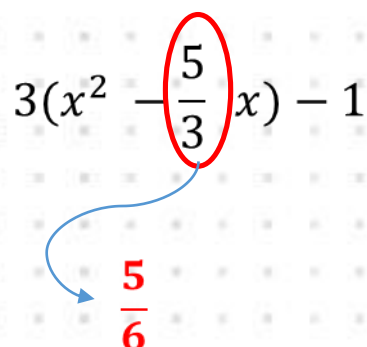
Lugar geométrico: ecuación de una parábola

$$y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Dada la expresión cuadrática $3x^2 - 5x - 1$. Determine su expresión equivalente

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x - 1 &= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) - 1 \\ 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) - 1 &= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} - 1 \\ 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{12} &\longrightarrow 3x^2 - 5x - 1 \approx 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{12} \end{aligned}$$


Práctica

¡Ahora es tu turno!

A desarrollar los ejercicios propuestos



Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO



Universidad
Tecnológica
del Perú

EJERCICIOS RETOS

1. Dada la expresión cuadrática $x^2 - 3x - 14$. Determine su expresión equivalente.
2. Dada la expresión cuadrática $2x^2 - 8x + 11$. Determine su expresión equivalente.
3. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-8, 5)$ es siempre igual a 7 unidades. Hallar la ecuación del lugar geométrico.
4. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-3, 5)$ es siempre igual a su distancia al eje X disminuida en una 1 unidad. Hallar la ecuación del lugar geométrico.
5. Dada la expresión cuadrática $5x^2 - 3x + 1$. Determine su expresión equivalente.



Cierre

RESPUESTAS

1. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{65}{4}$

2. $2(x - 2)^2 + 3$

3. $(x + 8)^2 + (y - 5)^2 = 49$

4. $(x + 3)^2 = 8(y - 3)$

5. $5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20}$



Espacio de Preguntas



No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

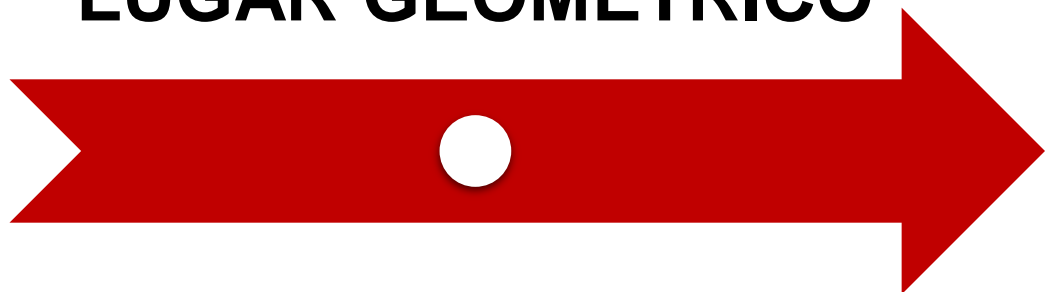
¿Qué hemos aprendido hoy?

1. ¿Qué es un lugar geométrico?
2. ¿Todos los lugares geométricos representan una cónica?
3. ¿Para que se realiza la técnica completar cuadrados?



Desaprende lo que te limita

LUGAR GEOMÉTRICO



Lo logré



Desaprende lo que te limita

FINALMENTE



Excelente tu
participación

Las dificultades me hacen
más fuerte.



Esta sesión quedará
grabada para tus
consultas.



PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de esta sesión y sigue practicando.
2. Consulta en el FORO tus dudas.



Desaprende lo que te limita



**Universidad
Tecnológica
del Perú**