Sesión integradora

Para el primer ciclo de introducción a la matemática para ingeniería

Luis Huatay

noggnzzz@gmail.com

U24218809

23 de junio de 2024

Resolución de las actividades de la sesión integradora de la semana 14.

1. Sesión integradora

1.1. El supermercado vende 3 tipos de conservas, Gloria, Laive y Cameo. El precio promedio de las 3 conservas es de S/9.00 . Un cliente compra 30 unidades de Gloria, 20 de Laive y 10 de Cameo, debiendo abonar S/560.00. Otro compra 20 unidades de Gloria y 25 de Cameo y abona S/310.00. Calcula el precio de una conserva Gloria, otra de Laive y otra de Cameo. Utiliza el método de Gauss-Jordan

Donde:
Gloria : a
Laive : b
Cameo : c

$$\begin{cases} a+b+c &= 27 \\ 3a+2b+c &= 56 \\ 4a+0y+5c &= 62 \end{cases}$$

• **Sean las matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 27 \\ 56 \\ 62 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Donde:

A : Matriz de coeficientes
B : Matriz de términos independientes
X : Matriz de incógnitas

• **Sea la matriz aumentada:**

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 27 \\ 3 & 2 & 1 & 56 \\ 4 & 0 & 5 & 62 \end{array}\right]$$

• **Aplicando operaciones elementales:**

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 27 \\ 3 & 2 & 1 & 56 \\ 4 & 0 & 5 & 62 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_1(-3)+F_2 \\ \leftarrow F_1(-4)+F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 27 \\ 0 & -1 & -2 & -25 \\ 0 & -4 & 1 & -46 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow F_2(-4)+F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 27 \\ 0 & -1 & -2 & -25 \\ 0 & 0 & 9 & 54 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_2(-1) \\ \leftarrow F_3\left(\frac{1}{9}\right) \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 27 \\ 0 & 1 & 2 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

• **Finalmente:**

$$c = 6 \qquad \begin{aligned} b+2(6) &= 25 \\ b &= 13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a+13+6 &= 27 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

$$\therefore C.S.\,(a,b,c) = \{(8,13,6)\}$$

1.2. En una reunión del club se juntan 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar el número de hombres, mujeres y niños. Resolver el sistema de ecuaciones planteado y comentar el resultado. Utiliza el método de la matriz inversa

Donde:
Hombre : h
Mujeres : m
Niños : n

$$\begin{cases} h+m-2n &= 0 & \text{Por condición con niños.} \\ h+3m-2n &= 20 & \text{Hombres y el triple de mujeres exceden en 20 al doble de niños.} \\ h+m+n &= 30 & \text{Por cantidad de asistentes.} \end{cases}$$

• **Entonces las matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} h \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

Donde:

A : Matriz de coeficientes
B : Matriz de términos independientes
X : Matriz de incógnitas

• **Aplicando el método de matriz inversa.**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\,(A)$$

• **Calculando el determinante:**

$$|A| = 3-2+6+2-1-2$$
$$|A| = 6$$

• **Calculando la matriz de cofactores:**

$$Cof\,(A) = \begin{bmatrix} +(3+2) & -(1+2) & +(1-3) \\ -(1+2) & +(1+2) & -(1-1) \\ +(-2+6) & -(-2+2) & +(3-1) \end{bmatrix}$$
$$Cof\,(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• **Calculando la matriz adjunta:**

$$adj\,(A) = (Cof\,(A))^T$$
$$adj\,(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• **Calculando la matriz inversa:**

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

• **Finalmente:**

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La cantidad de hombres, mujeres y niños es de 10 cada uno.

$$\therefore C.S.\,(h,m,n) = \{(10,10,10)\}$$

1.3. El país asiático de China compra 540,000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes del medio oriente que lo venden a $27, $28 y $31 el barril, respectivamente. La factura total asciende a $15,999,000. Si del primer suministrador recibe el 30 % del total del petróleo comprado, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador? Utiliza el método de Cramer.

- **Sea el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} 27x + 28y + 31z &= 15999000 \\ x + y + z &= 540000 \\ x &= 162000 \end{cases}$$

- **Entonces las matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 27 & 28 & 31 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 15999000 \\ 540000 \\ 162000 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- **Método de Cramer:**

Hallando el determinante de la matriz A:

$$|A| = 28 - 31$$
$$|A| = -3$$

Hallando el determinante para X:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 15999000 & 28 & 31 \\ 540000 & 1 & 1 \\ 162000 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$|A_x| = 4536000 - 5022000$$
$$|A_x| = -486000$$

Hallando el determinante para Y:

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 27 & 15999000 & 31 \\ 1 & 540000 & 1 \\ 1 & 162000 & 0 \end{vmatrix}$$
$$|A_y| = 21021000 - 16740000 - 4374000$$
$$|A_y| = -93000$$

Hallando el determinante para Z:

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 15999000 \\ 1 & 1 & 540000 \\ 1 & 0 & 162000 \end{vmatrix}$$
$$|A_z| = 4374000 + 15120000 - 15999000 - 4536000$$
$$|A_z| = -1041000$$

- **Finalmente:**

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-486000}{-3} = 162000$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-93000}{-3} = 31000$$
$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-1041000}{-3} = 347000$$

$$\therefore C.S.\,(x, y, z) = \{(162000, 31000, 347000)\}$$

La cantidad comprada a cada suministrador es de 162,000, 31,000 y 347,000 barriles respectivamente.

1.4. La empresa TOYOTA.SAC ha lanzado al mercado tres nuevos modelos de autos deportivos (A, B y C). El precio de venta de cada modelo es 1.5, 2 y 3 millones de dólares, respectivamente, ascendiendo el importe total de los autos vendidos durante el primer mes a 250 millones. Por otra parte, los costes de fabricación son de 1 millón por auto deportivo para el modelo A, de 1.5 para el modelo B y de 2 para el C. El coste total de fabricación de los autos deportivos vendidos en ese mes fue de 175 millones y el número total de autos deportivos vendidos 140. Determina el número total de autos deportivos que la marca TOYOTA.SAC ha vendido. Utiliza el método de Gauss-Jordan.

- **Dado el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x+y+z &= 140 & \text{Número total de autos vendidos.} \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)x+2y+3z &= 250 & \text{Importe total de los autos vendidos.} \\ x+\left(\dfrac{3}{2}\right)+2z &= 175 & \text{Coste total de fabricación.} \end{cases}$$

- **Entonces las matrices:**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 140 \\ 250 \\ 175 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- **Método Gauss-Jordan:**

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 140 \\ \frac{3}{2} & 2 & 3 & 250 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & 175 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_1\left(-\frac{3}{2}\right)+F_2 \\ \leftarrow F_1(-1)+F_3 \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 140 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 40 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 35 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow F_2(-1)+F_3 \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 140 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 40 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_2(2) \\ \leftarrow F_3(-2) \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 140 \\ 0 & 1 & 3 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

- **Finalmente:**

$$z = 10 \qquad \begin{aligned} y+3(10) &= 80 \\ y &= 50 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+50+10 &= 140 \\ x &= 80 \end{aligned}$$

$$\therefore C.S.\,(x,y,z)=\{(80,50,10)\}$$

La cantidad total de autos vendidos es de 140.

1.5. Un almacén distribuye cierto producto que fabrican 3 marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 gramos y su precio es de S/100.00, la marca B lo envasa en cajas de 500 gramos a un precio de S/180.00 y la marca C lo hace en cajas de 1 kilogramo a un precio de S/330.00. El almacén vende a un cliente 2.5 kilogramos de este producto por un importe de S/890.00. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, plantea un sistema para determinar cuántas cajas de cada tipo se han comprado y resuelve el problema. Utiliza el método de la matriz inversa.

- **Sea el sistema:**

Donde:
Marca A : a
Marca B : b
Marca C : c

$$\begin{cases} 10a + 18b + 33c = 89 & \text{Precio de las marcas.} \\ a + 2b + 4c = 10 & \text{Por peso} \\ a + b + c = 5 & \text{Cantidad de cajas.} \end{cases}$$

- **Sean las matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 33 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 89 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

- **Aplicando el método de matriz inversa.**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\,(A)$$

- **Calculando el determinante:**

$$|A| = 20 + 72 + 33 - 66 - 40 - 18$$
$$|A| = 1$$

- **Calculando la matriz de cofactores:**

$$Cof\,(A) = \begin{bmatrix} +(2-4) & -(1-4) & +(1-2) \\ -(18-33) & +(10-33) & -(10-18) \\ +(72-66) & -(40-33) & +(20-18) \end{bmatrix}$$
$$Cof\,(A) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 15 & -23 & 8 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Calculando la matriz adjunta:**

$$adj\,(A) = (Cof\,(A))^T$$
$$adj\,(A) = \begin{bmatrix} -2 & 15 & 6 \\ 3 & -23 & -7 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Calculando la matriz inversa:**

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 15 & 6 \\ 3 & -23 & -7 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 15 & 6 \\ 3 & -23 & -7 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Finalmente:**

$$X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = \begin{bmatrix} -2 & 15 & 6 \\ 3 & -23 & -7 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 89 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore C.S.\,(a, b, c) = \{(2, 2, 1)\}$$

La cantidad de cajas de cada marca es de 2, 2 y 1 respectivamente.

1.6. Una editorial dispone de tres textos diferentes para Matemáticas de 2o de Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanas. El texto A se vende a 9 € el ejemplar; el texto B a 11 € y el C a 13 €. En la campaña correspondiente a un curso académico la editorial ingresó, en concepto de ventas de estos libros de Matemáticas 8400 €. Sabiendo que el libro A se vendió tres veces más que el C, y que el B se vendió tanto como el A y el C juntos, plantea un sistema de ecuaciones que te permita averiguar cuántos se vendieron de cada tipo y resuelve el problema. Utiliza el método de Cramer.

- **Sea el sistema:**

Donde:
Libro A : a
Libro B : b
Libro C : c

$$\begin{cases} 9a + 11b + 13c = 8400 & \text{Precio de las marcas.} \\ -a + b - c = 0 & \text{Por cantidad.} \\ a + 0b - 3c = 0 & \text{Por condición.} \end{cases}$$

- **Entonces las matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 13 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8400 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

- **Método de Cramer:**

Hallando el determinante de la matriz A:

$$|A| = -27 - 11 - 13 - 33$$
$$|A| = -84$$

Hallando el determinante para A:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8400 & 11 & 13 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$
$$|A_x| = -25200 + 0 + 0$$
$$|A_x| = -25200$$

Hallando el determinante para B:

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 9 & 8400 & 13 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$
$$|A_y| = -8400 - 25200$$
$$|A_y| = -33600$$

Hallando el determinante para C:

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 9 & 11 & 8400 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$|A_z| = -8400$$

- **Finalmente:**

$$a = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-25200}{-84} = 300$$
$$b = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-33600}{-84} = 400$$
$$c = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-8400}{-84} = 100$$

$$\therefore C.S.\,(a, b, c) = \{(300, 400, 100)\}$$

La cantidad de libros vendidos de cada tipo es de 300, 400 y 100 respectivamente.

1.7. Determina el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones bajo el método Gass-Jordan.

1. **Sea el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x+2y+4z &= 3 \\ 2x+4y+8z &= 1 \\ 0x-y+z &= -2 \end{cases}$$

•Entonces las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ -2\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

•Por Gauss-Jordan:

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 8 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_1(-2)+F_2 \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_2(-1) \\ \\ \end{array}$$

•Finalmente:

$$\therefore \text{ El sistema es inconsistente}$$
$$C.S.(x,y,z)=\{(\emptyset)\}$$

2. **Sea el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+3y+4z2 &= 1 \\ -2x-y-8z &= -7 \end{cases}$$

•Entonces las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ -2 & -1 & -8\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -7\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

•Por Gauss-Jordan:

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ -2 & -1 & -8 & -7\end{array}\right] \begin{array}{r} \\ \leftarrow F_1(-2)+F_2 \\ \leftarrow F_1(2)+F_3 \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -6 & -3\end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow F_2(-1)+F3 \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -8 & 0\end{array}\right]$$

•Finalmente:

$$z = 0 \qquad \begin{aligned} y+2(0) &= -3 \\ y &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-3+0 &= 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\therefore C.S.(x,y,z)=\{(5,-3,0)\}$$