SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE GAUSS – JORDAN

INFINITAS SOLUCIONES

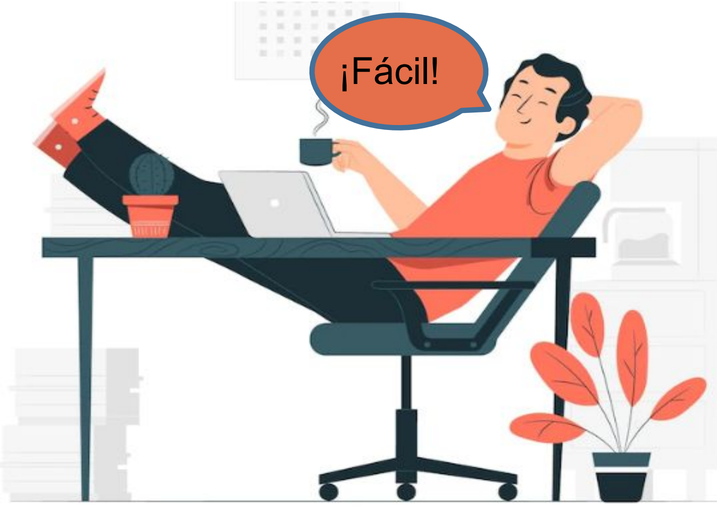
Universidad Tecnológica del Perú

Inicio
¿Alguna duda de la sesión anterior?

Que dices…

¿Qué tipo de solución presenta la matriz aumentada $[A \mid B]$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$



LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante determina el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales empleando el método de Gauss - Jordan.

¿Qué tanto conoces?

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

¿Todos los sistemas de ecuaciones lineales se pueden resolver?

Utilidad

¿Para qué me sirve los sistemas de ecuaciones lineales?

En la mayoría de los problemas aplicativos intervienen variables que forman un sistema de ecuaciones, para los cuales existen métodos matriciales que facilitan el trabajo de encontrar los valores que satisfacen dichas ecuaciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE GAUSS - JORDAN

Desaprende lo que te limita

Transformación

Todo sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado como una ecuación matricial.

Sistema Lineal $\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$

Siendo:

A: Matriz de coeficientes.
X: Matriz de variables
B: Matriz de constantes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

1 MÉTODO ELIMINACIÓN DE GAUSS - JORDAN

Universidad Tecnológica del Perú

El método de eliminación gaussiana es aplicado a cualquier tipo de sistemas de ecuaciones lineales ("n" ecuaciones, "m" incógnitas) y no es necesario que $|A| \neq 0$, o que exista A^{-1}

Dada la ecuación

$$A \cdot X = B$$

El método consiste en ***generar la matriz aumentada***

$$[A \ \vdots \ B]$$

la cual se reducirá a una matriz canónica o de forma escalonada por filas, para luego con ésta nueva matriz escribir un nuevo sistema de ecuaciones.

Todo sistema reducido puede presentar tres tipos de soluciones:

$$Unica\ solución$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$No\ hay\ solución$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Infinitas\ soluciones$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estos son casos mucho mas reales y que ocurren con frecuencia en las ingenierías y otros campos de estudio...

1.2 MÉTODO ELIMINACIÓN DE GAUSS – JORDAN

Universidad Tecnológica del Perú

NO HAY SOLUCIÓN

Un sistema no tiene solución si la forma escalonada por reglones contiene un reglón que representa la ecuación $0 = k$, donde k es un número distinto de cero, entonces el sistema no tiene solución y es denominado INCONSISTENTE

$$\textit{No hay solución}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Universidad Tecnológica del Perú

EJEMPLO Resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando eliminación gaussiana

$$\begin{cases} x-3y+2z=12 \\ 2x-5y+5z=14 \\ x-2y+3z=20 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x-3y+2z=12 \\ 2x-5y+5z=14 \\ x-2y+3z=20 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

Generamos la matriz aumentada $[A \,\vdots\, B]$

$$\begin{array}{r} \\ \xrightarrow{-2F_1+F_2} \\ \xrightarrow{-F_1+F_3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 5 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \xrightarrow{-F_2+F_3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x-3y+2z=12 \\ y+z=-10 \\ 0=18 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución

$$\boldsymbol{C.S.} = \emptyset$$

1.3 MÉTODO ELIMINACIÓN DE GAUSS – JORDAN

INFINITAS SOLUCIONES

Un sistema tiene infinitas soluciones si las incógnitas en la forma escalonada por reglones no son todas ellas incógnitas iniciales y si el sistema no es inconsistente, entonces tiene un número infinito de soluciones. En este caso el sistema es llamado CONSISTENTE INDETERMINADO

$$\begin{gathered} Infinitas\ soluciones \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{gathered}$$

Para determinar la solución expresamos las incógnitas iniciales en términos de las incógnitas no iniciales

EJEMPLO Resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando eliminación gaussiana

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A \cdot X = B}$$

Generamos la matriz aumentada $[A \mid B]$

$$\begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-3F_1 + F_2} \\ \xrightarrow{-F_1 + F_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-4F_2 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Infinitas soluciones

Luego:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ y - z = 1 \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases} \qquad z = t \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$y - t = 1$$
$$y = 1 + t$$

$$x - (1 + t) + 2t = -4$$
$$x = -3 - t$$

Rpta.:

$$\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Una fábrica de ropa produce tres estilos de camisas T_1, T_2 , T_3, cada prenda pasa por un proceso de cortado, cosido, planchado y empaquetado. Las camisas se elaboran por lotes. Para producir un lote de tipo 1 se necesitan 30min para cortarlas, 40min para coserlas y 50min para plancharlas y empaquetarlas. Para el tipo 2 se necesitan 50min para cortarlas, 50min para coserlas y 50min para plancharlas y empaquetarlas. Para el tipo 3 se necesitan 65min para cortarlas, 40min para coserlas y 15min para plancharlas y empaquetarlas. ¿Cuántos lotes se pueden producir si se trabajan 8 horas en cortar, 8 en coser y 8 en planchar y empaquetar?.

a) Exprese como un sistema y determine su tipo de solución

b) Si se producen 2 lotes del estilo T_3, ¿Cuántos se debe producir de los otros lotes?

Solución:

$$\begin{cases} 30x + 50y + 65z = 480 \\ 40x + 50y + 40z = 480 \\ 50x + 50y + 15z = 480 \end{cases}$$

Simplificando por fila, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 & 13 \\ 4 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 48 \\ 96 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A \cdot X = B}$$

Generamos la matriz aumentada $[A \,\vdots\, B]$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10}F_3} \begin{bmatrix} 10 & 10 & 3 & 96 \\ 4 & 5 & 4 & 48 \\ 6 & 10 & 13 & 96 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{-4F_1 + F_2} \\ \xrightarrow{-6F_1 + F_3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/10 & 96/10 \\ 4 & 5 & 4 & 48 \\ 6 & 10 & 13 & 96 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/10 & 96/10 \\ 0 & 1 & 14/5 & 48/5 \\ 0 & 4 & 56/5 & 192/5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4F_2 + F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/10 & 96/10 \\ 0 & 1 & 14/5 & 48/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infinitas soluciones

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Universidad Tecnológica del Perú

a) Exprese como un sistema y determine su tipo de solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/10 & 96/10 \\ 0 & 1 & 14/5 & 48/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + \dfrac{3}{10}z = \dfrac{96}{10} \\ y + \dfrac{14}{5}z = \dfrac{48}{5} \\ 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = \dfrac{48}{5} - \dfrac{14}{5}t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \left\langle 0, \dfrac{24}{7} \right\rangle$$

Infinitas soluciones

b) Si se producen 2 lotes del estilo T_3, ¿Cuántos se debe producir de los otros lotes?

Sea $t = 2$, tenemos:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

- ✓ Los valores de X, Y, Z deben ser positivos y están representados por el parámetro t, por tanto, $\frac{5}{2}t > 0$; $\frac{48}{5} - \frac{14}{5}t > 0$; $t > 0$.
- ✓ De ello se obtiene $t > 0$ y $t < \frac{24}{7}$

Por tanto, se debe producir 5 lotes del estilo T_1, 4 lotes del estilo T_2 y 2 lotes del estilo T_3

Práctica

¡Ahora es tu turno

A desarrollar los ejercicios propuestos

Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO

EJERCICIOS RETO

1. Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de eliminación gaussiana

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = -2 \end{cases}$$

2. Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de eliminación gaussiana

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + y - z = -1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

3. Una tienda se especializa en la preparación de mezclas de café para conocedores. El dueño desea preparar bolsas de 1 kg que se venderán a 120 dólares, usando café colombiano, brasileño y de Kenia. El costo por kilogramo de estos tres tipos de café es de 140, 70 y 100 dólares respectivamente. Determine la cantidad de cada tipo de café, si el dueño decide usar 1/8 de kilogramo del café brasilero.

3. Una fábrica de muebles construye mesas, sillas y armarios, todas de madera. Cada pieza de mueble requiere tres operaciones: corte de madera, ensamblaje y acabado. Realizar una mesa requiere 30 min de corte, 30 min de ensamblaje y 1 h de acabado; una silla requiere 1 h de corte, 90 min de ensamblaje y 90 min de acabado; un armario requiere 1 h de corte, 1 h de ensamblaje y 2 h de acabado. Los trabajadores de la fábrica pueden realizar 300 h de corte, 400 h de ensamblaje y 590 horas de acabado en cada semana. ¿Cuántas mesas, sillas y armarios deben ser producidos para que se usen todas las horas de trabajo disponibles? ¿O esto es imposible?

Cierre

RESPUESTAS

1. $C.S. = \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

2. $C.S. = \begin{cases} x = 1 + t - r \\ y = t \\ z = r \quad ; \quad t, r \in \mathbb{R} \end{cases}$

3. $C.S. = \begin{cases} x = \frac{5}{7} - \frac{3}{7}t \\ y = \frac{2}{7} - \frac{4}{7}t \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$.

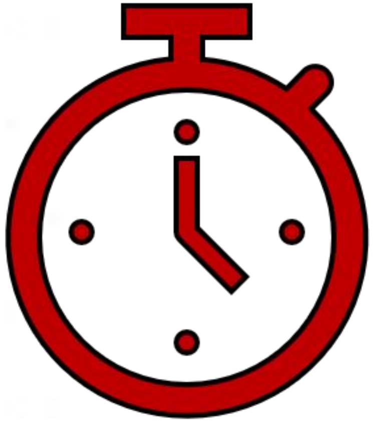
Así también, si $y = \frac{1}{8} \Rightarrow t = \frac{9}{32}$, luego, si se usa $1/8$ de café brasileño, se de usar $19/32$ de café colombiano y $9/32$ kg de café de Kenia.

4. No es posible su solución

Universidad Tecnológica del Perú

Espacio de Preguntas

No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

UTP Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué aprendimos hoy?

Universidad Tecnológica del Perú

1. ¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones?

2. ¿De qué manera se expresa la solución de un sistema de ecuaciones lineales de infinitas soluciones?

Método de Gauss Jordan

Lo logré

Desaprende lo que te limita

FINALMENTE

Universidad Tecnológica del Perú

Gracias por tu participación

Recuerda aprender feliz es aprender para siempre.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Resuelve los ejercicios de esta sesión y sigue practicando.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

UTP

Universidad Tecnológica del Perú