Funciones

Para el primer ciclo de introducción a la matemática para ingeniería

Luis Huatay

noggnzzz@gmail.com

U24218809

6 de julio de 2024

Resolución de las actividades propuestas en la sesión 1 y 2 de la semana 15.

1. Retos - Sesión 1

1.1. Determine el dominio y rango de la función:

$$f(x)=\left\{\left(4,n\right),\left(3,4\right),\left(4,n^2-12\right),\left(n,1\right),\left(5,2n\right)\right\}$$

- Considerando el concepto de función:

$$\left(4,n\right)=\left(4,n^2-12\right)\rightarrow n=n^2-12\rightarrow n^2-n-12=0$$

$$\begin{aligned} n^2-n-12&=0\\ n^2-4n+3n-12&=0\\ n\left(n-4\right)+3\left(n-4\right)&=0\\ \left(n+3\right)\left(n-4\right)&=0\\ n&=-3,4 \end{aligned}$$

- Considerando la función con $n=4$:

$$f(x)=\{\left(4,4\right),\left(3,4\right),\left(\mathbf{4{,}4}\right),\left(\mathbf{4{,}1}\right),\left(5,8\right)\}$$

Se puede observar que para un mismo valor del dominio se tiene diferentes valores del rango lo cual hace que f no sea función.

- Considerando la función con $n=-3$:

$$f(x)=\{\left(4,-3\right),\left(3,4\right),\left(4,-3\right),\left(-3,1\right),\left(5,-6\right)\}$$

Se observa que para un valor del dominio solo se tiene un valor del rango lo cual hace que f sea función.

$$\therefore Dom f:\{3,4,5,-3\} \qquad Ran f:\{4,-3,1,-6\}$$

1.2. Dada la función f calcula E:

$$f(x)=\begin{cases} x-9 & ; \quad 0<x<6\\ x^2-16 & ; \quad 6\le x<12\\ 26-2x & ; \quad 12\le x\le 20 \end{cases} \qquad E=\frac{2f\left(3\right)-f\left(6\right)}{5-\left(f\left(12\right)\right)^3}$$

- Evaluando:

$$\begin{aligned} f\left(3\right)&=3-9=-6\\ f\left(6\right)&=6^2-16=20\\ f\left(12\right)&=26-2\left(12\right)=2 \end{aligned}$$

- Calculando E:

$$E=\frac{2\left(-6\right)-20}{5-\left(2\right)^3}$$

$$E=\frac{-12-20}{5-8}$$

$$E=\frac{32}{3}$$

1.3. Dada la función determine su dominio y rango:

$$f=\{\left(3,2m+n\right),\left(5,m-13\right),\left(3,8\right),\left(5,n-6\right),\left(n,9\right)\}$$

- Considerando el concepto de función:

$$\left(3,2m+n\right)=\left(3,8\right) \qquad \rightarrow 2m+n=8$$
$$\left(5,m-13\right)=\left(5,n-6\right) \qquad \rightarrow m-n=7$$

- Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2m+n &= 8\\ m-n &= 7 \end{cases}$$

- Resolviendo el sistema:

$$3m=15\rightarrow \mathbf{m=5} \qquad \mathbf{n=-2}$$

- Considerando la función con $m=5$ y $n=-2$:

$$f=\{\left(3,8\right),\left(5,-8\right),\left(3,8\right),\left(5,-8\right),\left(-2,9\right)\}$$
$$\therefore Dom f:\{3,5,-2\} \qquad Ran f:\{8,-8,9\}$$

1.4. Dados los conjuntos $A=\{-3,6,7,12\}$ y $B=\{-1,3,5,9\}$, determine la relación: $R=\{(a,b)\in A\times B\ /\ 2a-b\le 10\}$

- Determinando $A\times B$:

$$A\times B=\left\{\begin{matrix} \left(-3,-1\right), & \left(-3,3\right), & \left(-3,5\right), & \left(-3,9\right),\\ \left(6,-1\right), & \left(6,3\right), & \left(6,5\right), & \left(6,9\right),\\ \left(7,-1\right), & \left(7,3\right), & \left(7,5\right), & \left(7,9\right),\\ \left(12,-1\right), & \left(12,3\right), & \left(12,5\right), & \left(12,9\right) \end{matrix}\right\}$$

- Por regla $2a-b\le 10$:

$$R=\left\{\begin{matrix} \left(-3,-1\right), & \left(-3,-3\right), & \left(-3,5\right), & \left(-3,9\right),\\ \left(6,3\right), & \left(6,5\right), & \left(6,9\right), & \left(7,5\right),\\ \left(7,9\right) & & & \end{matrix}\right\}$$

2. Retos - Sesión 2

2.1. La gráfica de la función: $y=\frac{2}{3}x^2+bx+c$, intersecta al eje x en los puntos $(-2,0)$ y $(5,0)$ y al eje y en el punto $(0,k)$. Halle el valor de: $R=b+c+k$.

- Por definición:

$$c=\text{Intersección con el eje } y\Rightarrow R=b+2c$$

- Para $(-2,0)$:

$$0=\frac{2}{3}\left(-2\right)^2-2b+c$$
$$c-2b=-\frac{8}{3}$$

- Para $(5,0)$:

$$0=\frac{2}{3}\left(5\right)^2+5b+c$$
$$c+5b=-\frac{50}{3}$$

- Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} c-2b &= -\frac{8}{3}\\ c+5b &= -\frac{50}{3} \end{cases}$$

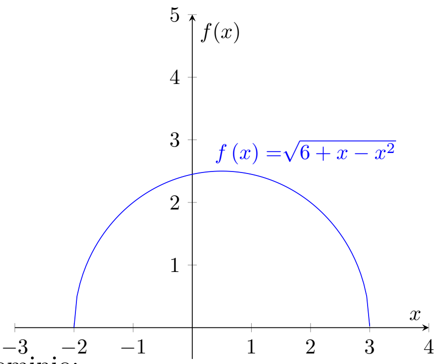
$$7b=-14\rightarrow b=-2 \qquad c=-\frac{50}{3}+10=-\frac{20}{3}$$

- Finalmente:

$$R=-2+2\left(\frac{-20}{3}\right)$$
$$R=-2-\frac{40}{3}$$
$$R=-\frac{46}{3}$$

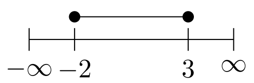
2.2. Halla el dominio, rango y gráfica de la función: $f\left(x\right)=\sqrt{6+x-x^2}$

- Gráfica de la función:



- Para el dominio:

$$\begin{aligned} 6+x-x^2&\ge 0\\ x^2-x-6&\le 0\\ \left(x-3\right)\left(x+2\right)&\le 0 \end{aligned}$$



- Para el rango:

Por valor medio del intervalo: $x = \dfrac{1}{2}$

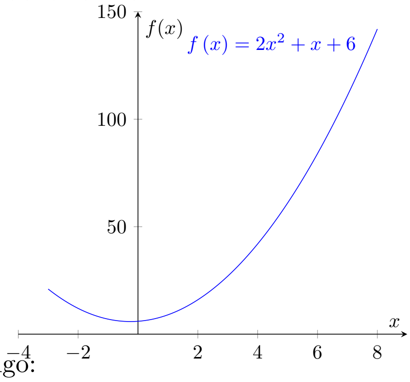
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{6 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{6 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

- Finalmente:

$$Domf : x \in [-2, 3] \qquad Ranf : y \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$$

2.3. Halla el dominio, rango y gráfica de la función: $f(x) = 2x^2 + x + 6$, con $x \in [-3, 8]$

- Gráfica de la función:



- Para el rango:

Considerando una función que dibuja una parábola positiva:

Vértice: $-\dfrac{b}{2a} \Rightarrow h = -\dfrac{1}{4}$

$$k = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 6$$
$$k = 2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4} + 6$$
$$k = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} + \frac{48}{8}$$
$$k = \frac{47}{8}$$

Considerando el valor de x más alejado de h:

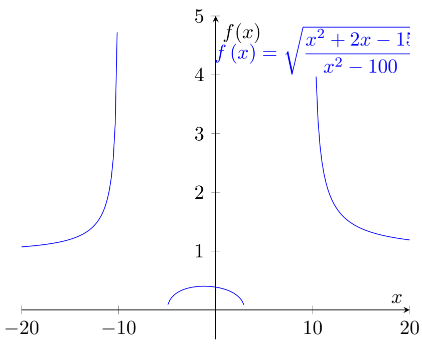
$$f(8) = 2(8)^2 + 8 + 6$$
$$f(8) = 2(64) + 8 + 6$$
$$f(8) = 128 + 8 + 6$$
$$f(8) = 142$$

- Finalmente:

$$Domf : x \in [-3, 8] \qquad Ranf : y \in \left[\frac{47}{8}, 142\right]$$

2.4. Halla el dominio, rango y gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 100}}$

- Gráfica de la función:



- Para el dominio:

Cnosiderando la restricción propia de un radical:

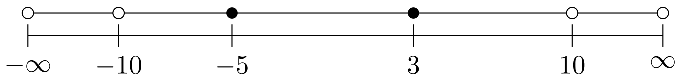
$$\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 100} \geq 0$$
$$\frac{(x+5)(x-3)}{(x+10)(x-10)} \geq 0$$

Puntos críticos:

$$x = 3$$
$$x = -5$$
$$x = 10$$
$$x = -10$$

Donde: $x = 10 \wedge x = -10$ son abiertos por formar parte del donominador.

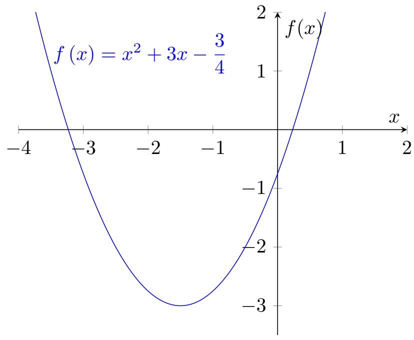
- Finalmente:



$$\therefore Domf : x \in (-\infty, -10) \cup [-5, 3] \cup (10, \infty)$$
$$Ranf : y \in \mathbb{R}$$

2.5. Halla el dominio, rango y gráfica de la función: $f(x) = x^2 + 3x - \dfrac{3}{4}$

- Gráfica de la función:



- Para el dominio:

Buscando la coordenada x del vértice:

$$f(x) = x^2 + 3x - \frac{3}{4}$$
$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$$

Evaluando en h:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4}$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - \frac{3}{4}$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{4} - \frac{18}{4}$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{12}{4}$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = k = -3$$

- Finalmente:

Considerando que no hay restricción para el dominio:

$$\therefore Domf : x \in \mathbb{R}$$
$$Ranf : y \in [-3, \infty)$$