SECCIONES CÓNICAS

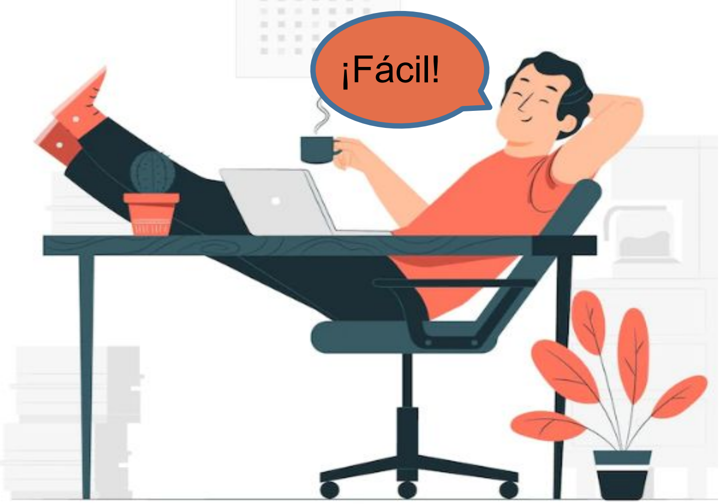
Elipse. Ecuación Ordinaria, Canónica y General. Gráficas con eje paralelo a eje “x”; “y”

Universidad Tecnológica del Perú

Inicio
¿Alguna duda de la sesión anterior?

Que dices…

¿Cuál es la coordenada del vértice de la parábola $x^2 + 6x - 10y + 9 = 0$?



LOGRO DE SESIÓN

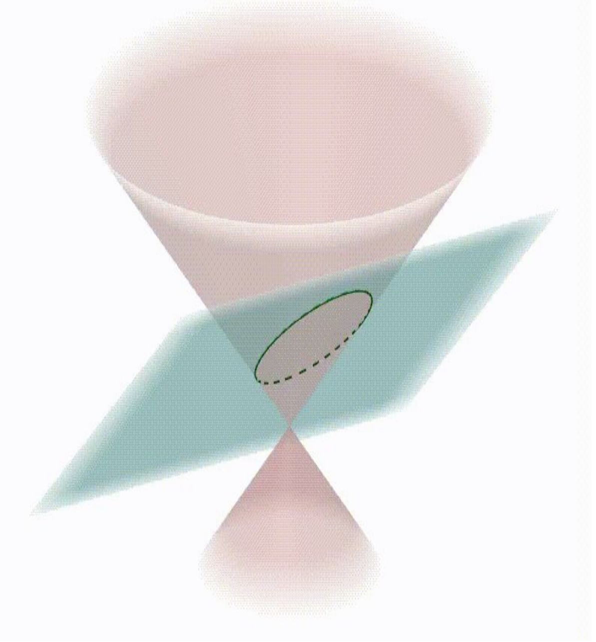
Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas sobre elipses identificando sus ecuaciones, elementos y gráficas.

Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué sabes de la elipse?

¿La elipse tiene un solo foco?

¿Has visto elipses en tu entorno?

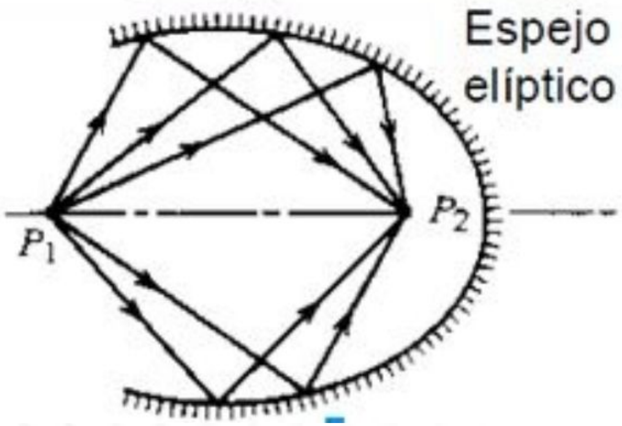


Utilidad
¿Cuál es la utilidad del estudio de la Elipse?

Sirve para determinar, representar puntos en el plano que cumplen unas condiciones especiales.

Mesa de billar elíptica Una bola que pasa por el foco, para sucesivamente por los focos y su trayectoria irá acercándose poco a poco al semieje mayor.

Un espejo elíptico refleja todos los rayos emitidos por uno de sus focos y los focaliza en el otro foco. Las distancias recorridas por la luz de los focos a lo largo de cualquier camino son iguales



Universidad Tecnológica del Perú

SECCIONES CÓNICAS

ELIPSE

Desaprende lo que te limita

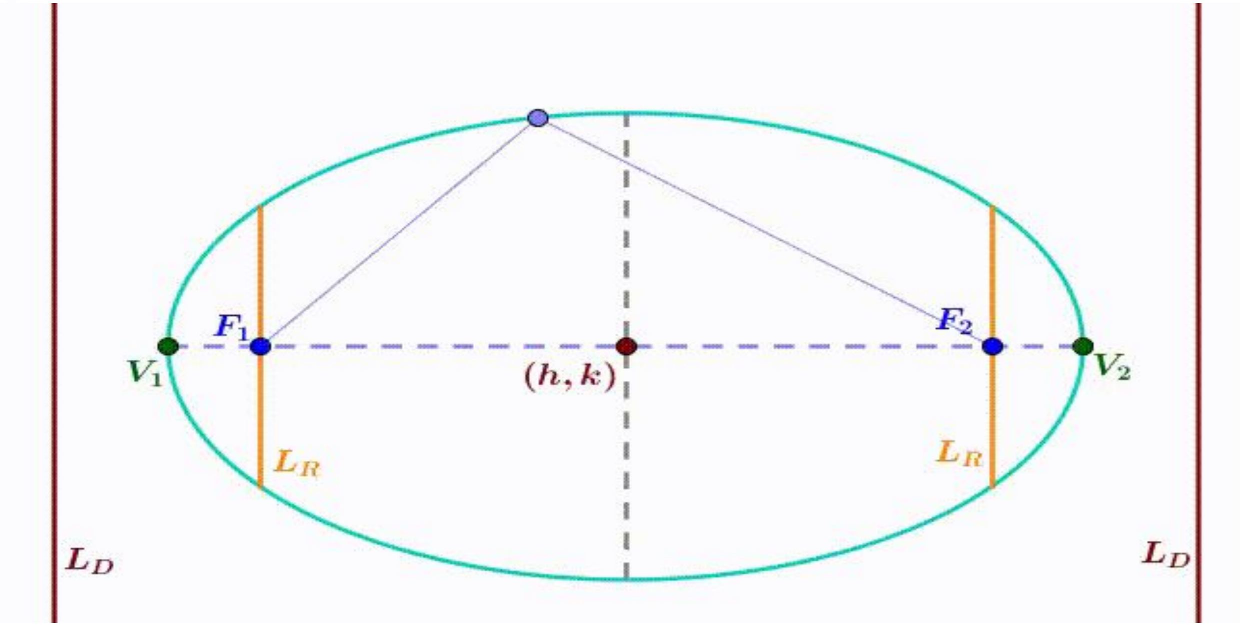
1 Transformación

Elipse

Es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre igual a una constante positiva $2a$.

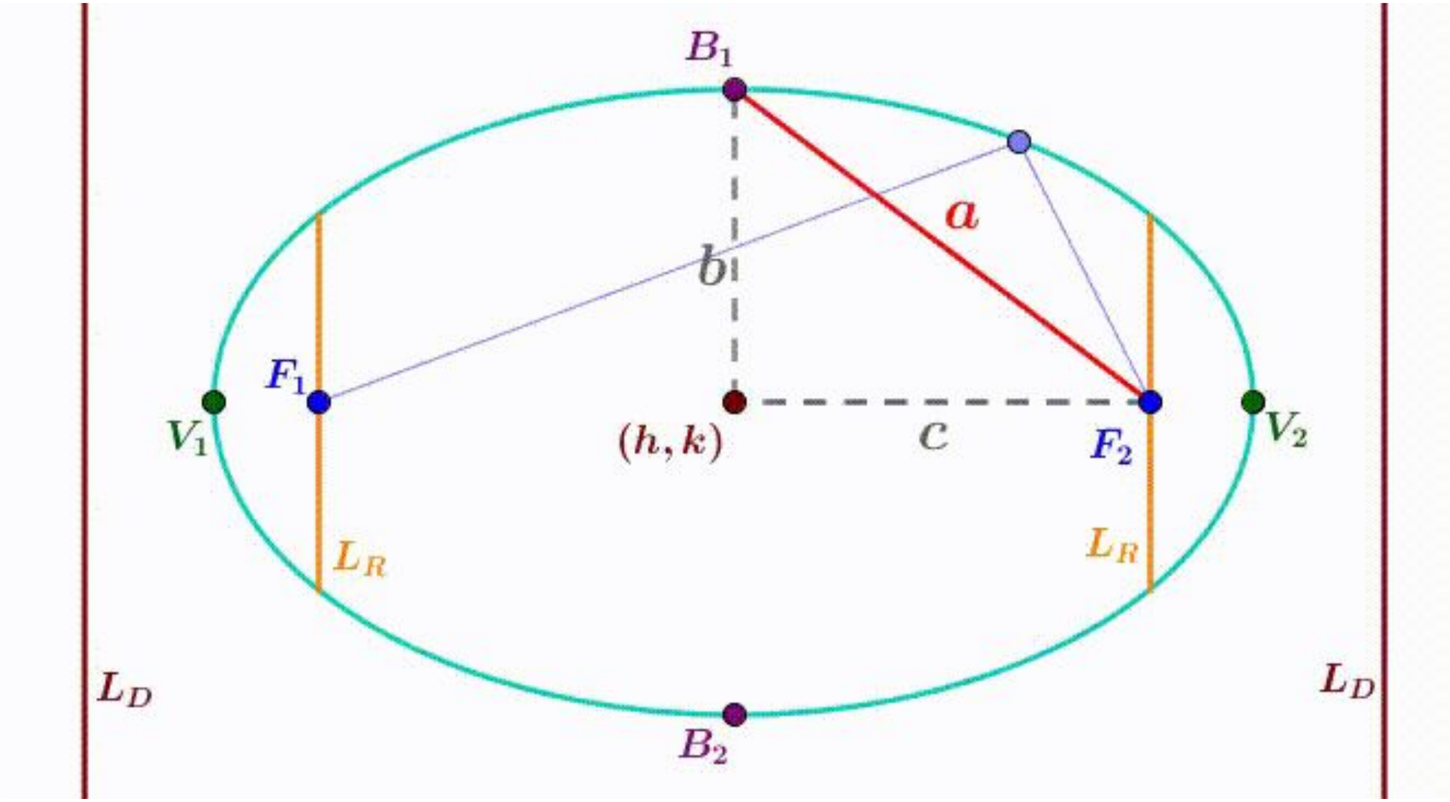
Elementos de una elipse

Eje Menor: *cuya longitud es de $2b$.*
Eje Mayor: *Recta perpendicular a la directriz L_D que pasa por los vértices y el focos.*
Vértice (V): *La elipse tiene 2 vértices, la distancia entre ellos es de $2a$.*
Foco (F): *La elipse tiene 2 focos, la distancia entre ellos es de $2c$.*
Directriz(L_D): *Recta fija que dista $\frac{a^2}{c}$ del centro.*
Y cuya distancia entre ambas rectas es $\frac{2a^2}{c}$.
Lado recto (LR): *Es una cuerda focal perpendicular al eje mayor, cuya longitud es de $\frac{2b^2}{a}$.*



$$a^2 = b^2 + c^2$$

1.1 Elementos



Eje mayor: $\overline{V_1V_2} = 2a$

Eje menor: $\overline{B_1B_2} = 2b$

Longitud del segmento focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$

Relación entre a, b y c: $a^2 = b^2 + c^2$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$

Distancia entre directrices: $\overline{DD'} = \frac{2a^2}{c}$

2 ELIPSE PARALELA AL EJE X

Observa la orientación y las ecuaciones de la elipse.

Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Centro

$\boldsymbol{C(h,k)}$

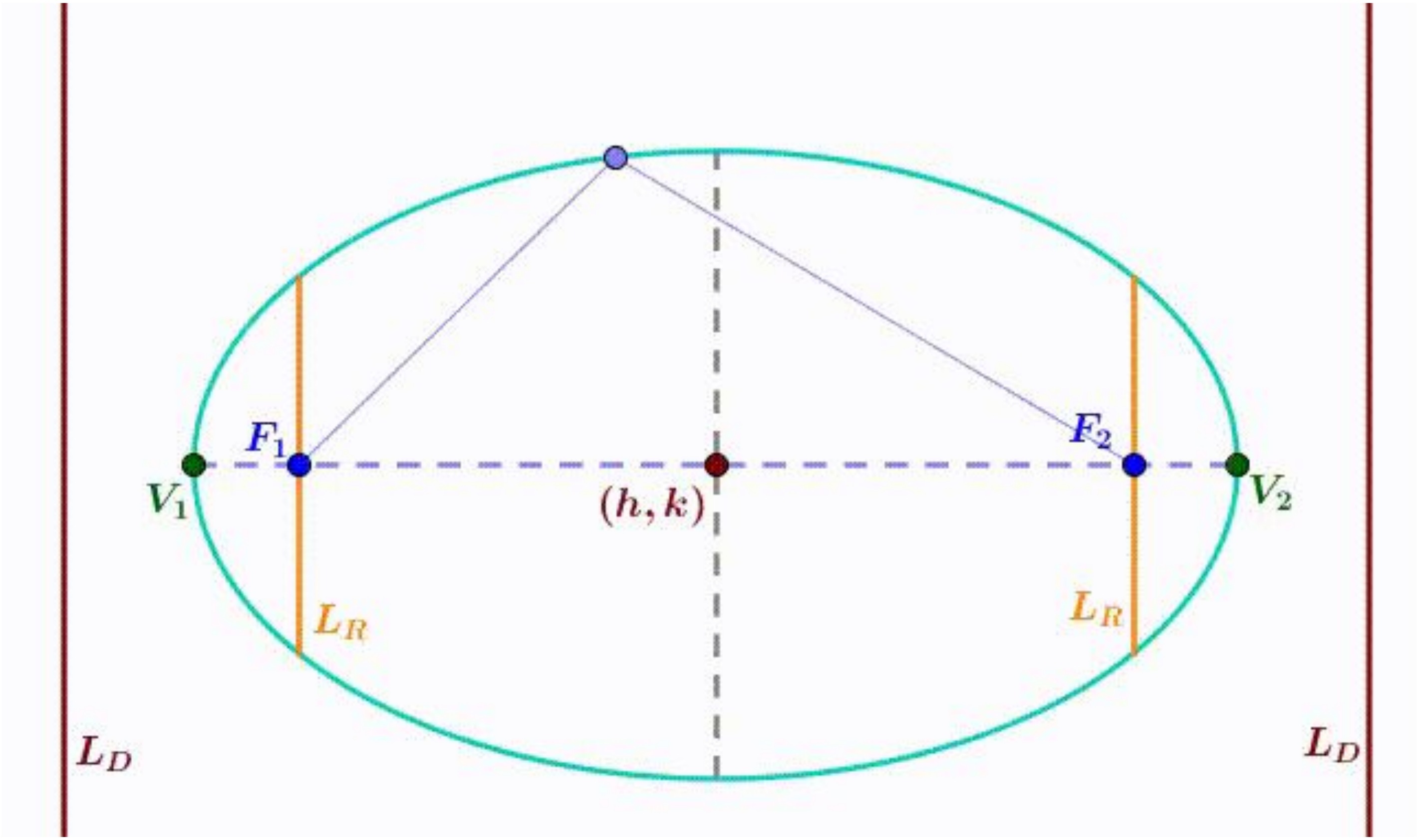
Ecuación Canónica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ecuación General

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$a > b$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

3 ELIPSE PARALELA AL EJE Y

Observa la orientación y las ecuaciones de la elipse.

Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Centro

$\boldsymbol{C(h,k)}$

Ecuación Canónica

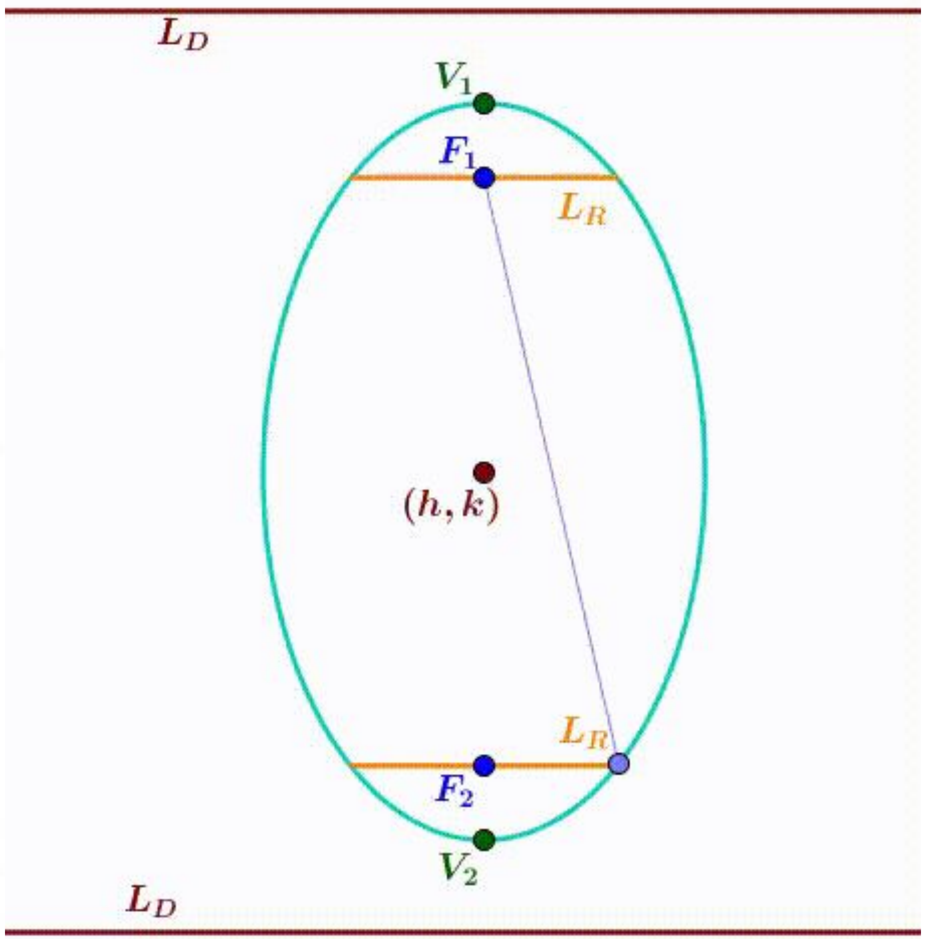
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Ecuación General

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$a>b$$

$$a^2=b^2+c^2$$



Ejemplo. *Bosqueje la gráfica de la ecuación $5x^2+9y^2+50x-18y+89=0$ y determine los vértices, focos, lado recto y la ecuación de las rectas directrices.*

SOLUCIÓN:

$$5(x^2+10x)+9(y^2-2y)=-89$$

$$5(x+5)^2+9(y-1)^2=-89+125+9$$

$$5(x+5)^2+9(y-1)^2=45$$

$$\frac{5(x+5)^2}{45}+\frac{9(y-1)^2}{45}=\frac{45}{45}$$

$$\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$$

$a^2=9 \quad b^2=5$

$a=3 \quad b=\sqrt{5}$

$$a^2=b^2+c^2$$

$9=5+c^2$

$c=2$

$C(-5,1)$

$V_1(-5-3,1)=(-8,1)$

$V_2(-5+3,1)=(-2,1)$

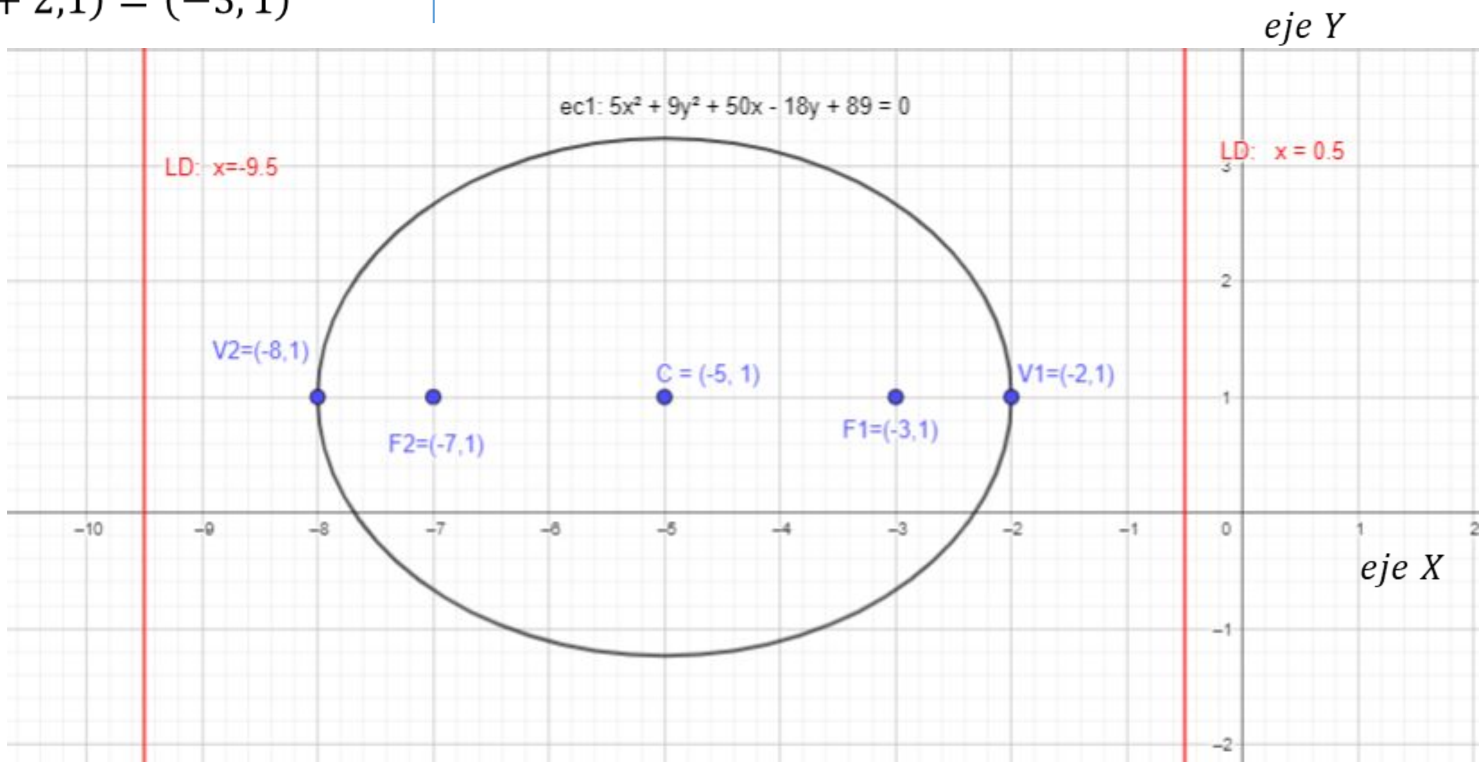
$F_1(-5-2,1)=(-7,1)$

$F_2(-5+2,1)=(-3,1)$

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{10}{3}$$

$x=-5\pm 4.5$

$x=-9.5 \qquad x=-0.5$



Ejemplo.

Bosqueje la gráfica de la ecuación $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$ y determine los vértices, focos, lado recto y la ecuación de las rectas directrices.

SOLUCIÓN:

$$25(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 6y) = 156$$

$$25(x+2)^2 + 16(y-3)^2 = 156 + 100 + 144$$

$$25(x+2)^2 + 16(y-3)^2 = 400$$

$$\frac{25(x+2)^2}{400} + \frac{16(y-3)^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

$a^2 = 25 \quad b^2 = 16$

$a = 5 \quad b = 4$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$25 = 16 + c^2$$

$$c = 3$$

$C(-2, 3)$

$V_1(-2, 3+5) = (-2\ 8)$

$V_2(-2, 3-5) = (-2, -2$

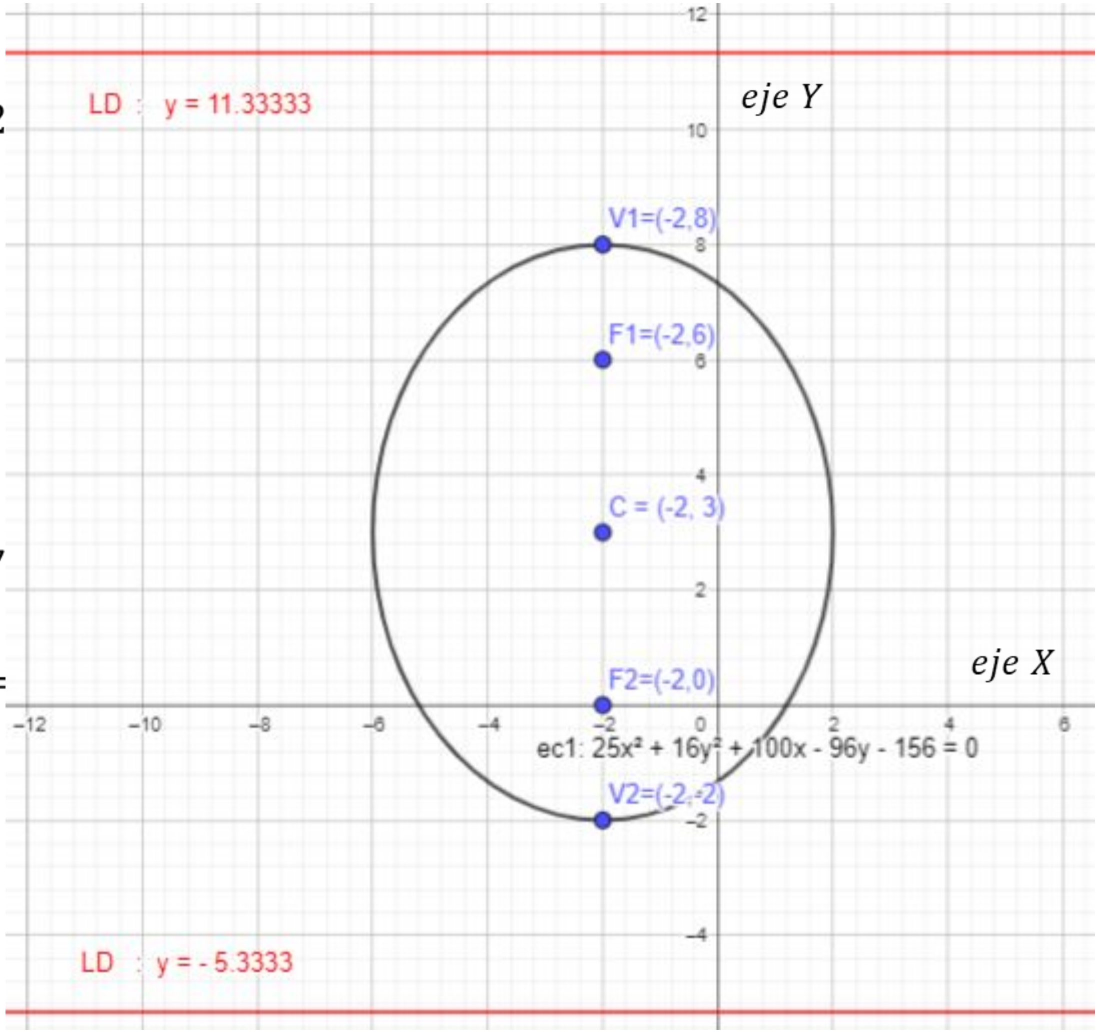
$F_1(-2, 3+3) = (-2, 6)$

$F_2(-2, 3-3) = (-2, 0)$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{5}$$

$$L_D: \frac{a^2}{c} = \frac{25}{3} = 8.\hat{3} \Rightarrow \quad y$$

$y = 11.\hat{3} \qquad y =$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Universidad Tecnológica del Perú

1. El centro de la elipse tiene por coordenadas $C(2,4)$. Si la distancia del centro a los focos es $3u$, su excentricidad $1/3$ y la elipse es de eje vertical, determine su ecuación ordinaria.

SOLUCIÓN:

$$c = 3$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

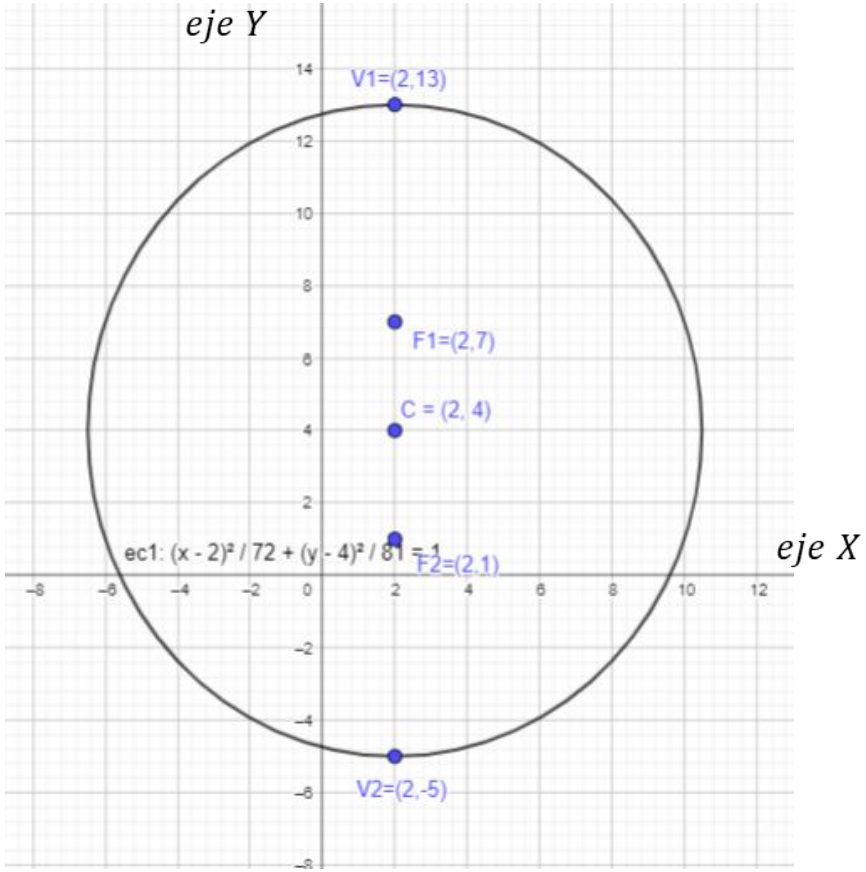
$$a = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$81 = b^2 + 9$$

$$b^2 = 72$$

$$\frac{(x-2)^2}{72} + \frac{(y-4)^2}{81} = 1$$



RPTA: $\mathcal{E}: \frac{(x-2)^2}{72} + \frac{(y-4)^2}{81} = 1$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. El centro de una elipse es el punto $(2,-4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2,-4)$ y $(-1,-4)$ respectivamente. Determine la ecuación general de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la longitud del lado recto.

SOLUCIÓN:

$a = 4$ $\qquad a^2 = b^2 + c^2$

$c = 3$ $\qquad 16 = b^2 + 9$

$b^2 = 7$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$$

$$\frac{7(x-2)^2 + 16(y+4)^2}{112} = 1$$

$$7x^2 - 28x + 28 + 16y^2 + 128y + 256 = 112$$

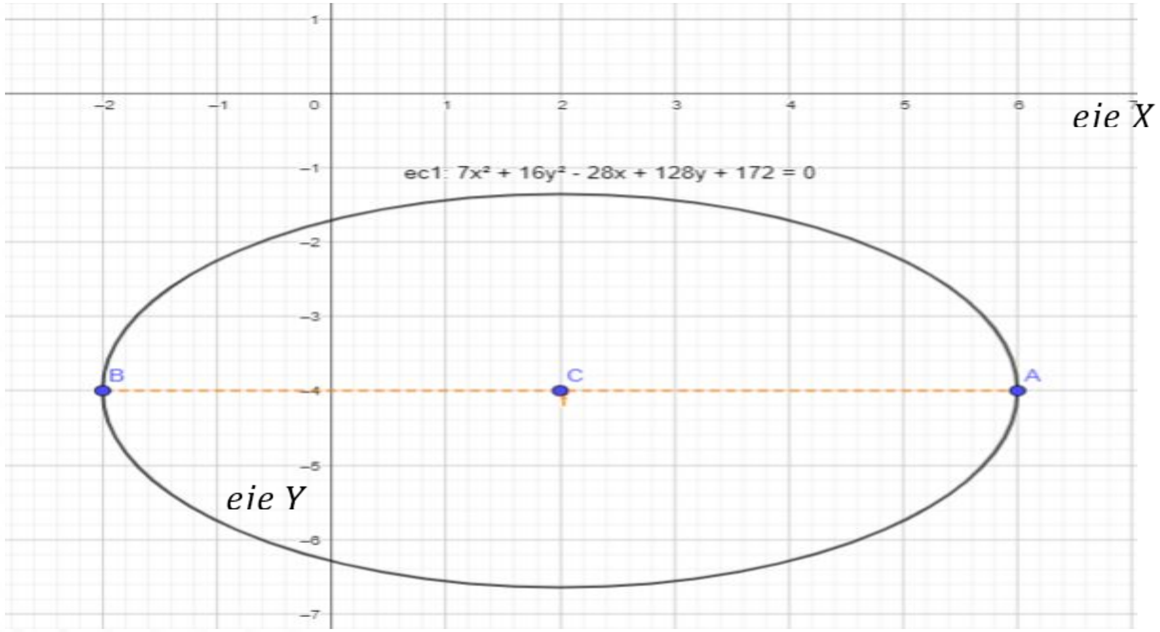
$$\mathcal{E}:\ 7x^2 + 16y^2 - 28x + 128y + 172 = 0$$

RPTA:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

$$Eje\ menor: 2b = 2\sqrt{7}$$

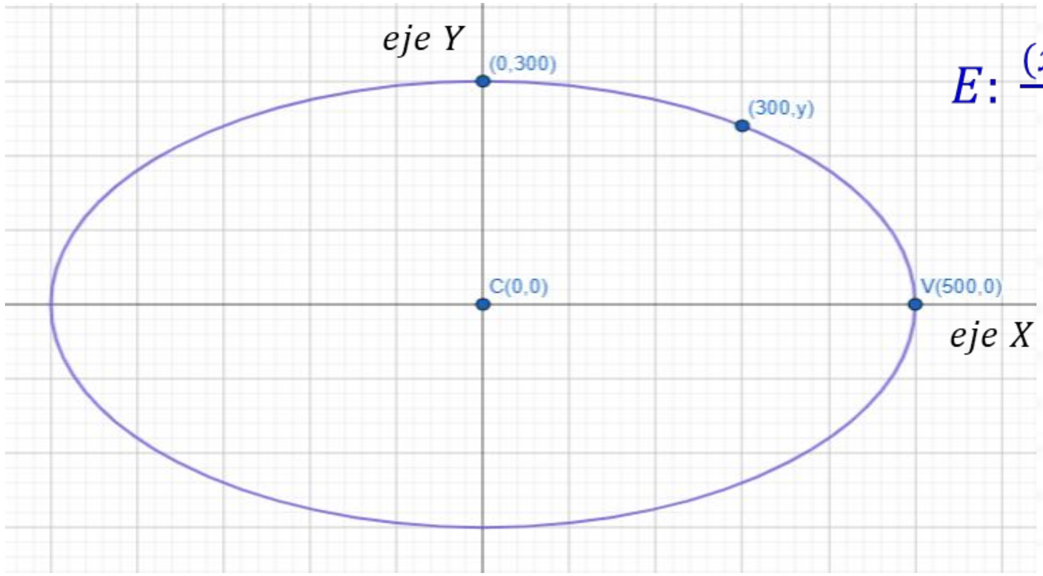
$$LR: \frac{2b^2}{a} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Una pista de carrera de galgos tiene forma elíptica, si la longitud del eje mayor es de $1000\ m$ y la de su eje menor es $600\ m$. Calcule la longitud de una cuerda perpendicular al eje focal ubicada a $200\ m$ de uno de sus vértices

SOLUCIÓN:



$$E: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{500^2} + \frac{y^2}{300^2} = 1$$

$$\frac{300^2}{500^2} + \frac{y^2}{300^2} = 1$$

$$y = 240$$

$$C(h,k) = (0,0)$$

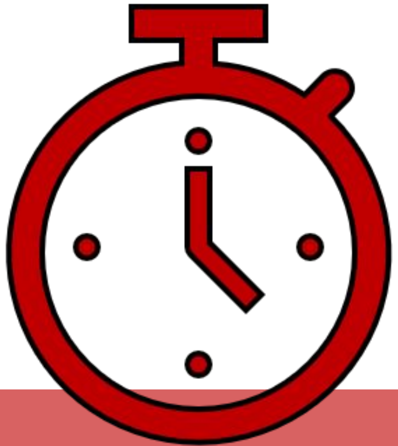
$a = 500 \quad b = 300$

Rpta: $480\ metros$

Práctica

¡Ahora es tu turno!

A desarrollar los ejercicios propuestos



Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO

Universidad Tecnológica del Perú

EJERCICIOS RETO

1. Determine los vértices, los focos, extremos del eje normal, el lado recto, excentricidad y las rectas directrices de $x^2 + 4y^2 + 6 = 12y - 2x$.

2. La ecuación de una elipse es $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ y en ella se traza una cuerda vertical $\overline{LA}$. Hallar el área del triángulo equilátero $0LA$ si $L \in IVC$ y $\mathrm{O}(0,0)$.

3. Calcular la longitud del lado excentricidad y lado recto de la cónica $9x^2 + 4y^2 = 36$.

4. Sabiendo que la excentricidad de una elipse es $\frac{1}{3}$ y sus vértices $V_1(7,1)$ y $V_2(1,1)$, señale la ecuación de la cónica mencionada.

5. Hallar la ecuación de la elipse canónica vertical, sabiendo que la distancia entre sus directrices es $\frac{50}{\sqrt{21}}$ y su excentricidad es $\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Universidad Tecnológica del Perú

Cierre

RESPUESTAS

1. $V_1(-3{,}1.5);\ V_2(1{,}1.5);\ \ F_1(0.7{,}1.5);\ V_2 - 2.7{,}1.5);$

$$2a = 4;\quad e = \sqrt{3}/2;\ L_D = 2.3$$

2. $Area = \frac{\sqrt{3}}{4}$

3. $LR = 4\quad ;\quad e = 6$

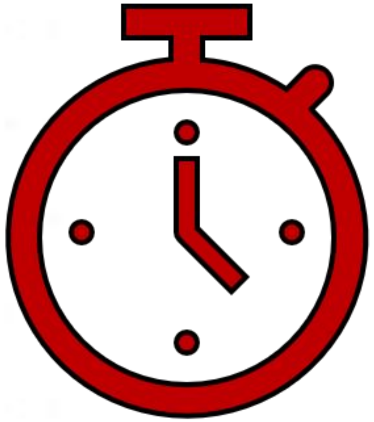
4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

5. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

Universidad Tecnológica del Perú

Espacio de Preguntas

No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 5 min

Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué hemos aprendido hoy?

Universidad Tecnológica del Perú

1. ¿Cuáles son los elementos principales para generar la ecuación de una elipse?

2. ¿Cuál es la relación entre “a”, “b” y “c”? ¿Qué es lo que miden?

ELIPSE

Lo logré

Desaprende lo que te limita

FINALMENTE

Universidad Tecnológica del Perú

Excelente tu participación

Triunfo porque no pongo excusas, pongo soluciones.

☺

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

👍

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y sigue practicando.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Universidad
Tecnológica
del Perú