Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método Gauss-Jordan

Para el primer ciclo de introducción a la matemática para ingeniería

Luis Huatay

noggnzzz@gmail.com

U24218809

15 de junio de 2024

Resolución de las actividades propuestas en la sesión 1 y 2 de la semana 13.

1. Retos - Sesión 1

1.1. Resolver utilizando el método de eliminación Gaussiana

$$\begin{cases} 2x+3y-z &= 9 \\ 3x+4y+2z &= 0 \\ x-6y-5z &= -9 \end{cases}$$

- **Sean las matrices:**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & -5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Donde:

A : Matriz de coeficientes
B : Matriz de términos independientes
X : Matriz de incógnitas

- **Sea la matriz aumentada:**

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & -5 & -9 \end{array}\right]$$

- **Aplicando operaciones elementales:**

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & -5 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow F_3(-1)+F_1 \\ \leftarrow F_3(-3)+F_2 \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 4 & 18 \\ 0 & 22 & 17 & 27 \\ 1 & -6 & -5 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow F_2\left(\frac{-9}{22}\right)+F_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-65}{22} & \frac{153}{22} \\ 0 & 22 & 17 & 27 \\ 0 & -6 & \frac{-45}{22} & \frac{-351}{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_2\left(\frac{1}{22}\right) \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-65}{22} & \frac{153}{22} \\ 0 & 1 & \frac{17}{22} & \frac{27}{22} \\ 0 & -6 & \frac{-45}{22} & \frac{-351}{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow F_2(6)+F_3 \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-65}{22} & \frac{153}{22} \\ 0 & 1 & \frac{17}{22} & \frac{27}{22} \\ 0 & 0 & \frac{57}{22} & \frac{-189}{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_3\left(\frac{-17}{57}\right)+F_2 \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-65}{22} & \frac{153}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{72}{19} \\ 0 & 0 & \frac{57}{22} & \frac{-189}{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow F_3\left(\frac{65}{57}\right)+F_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-54}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{72}{19} \\ 0 & 0 & \frac{57}{22} & \frac{-189}{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow F_3\left(\frac{65}{57}\right)+F_1 \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-54}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{72}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-63}{19} \end{array}\right]$$

- **Finalmente:**

$$B=\begin{bmatrix} \frac{-54}{19} \\ \frac{72}{19} \\ \frac{-63}{19} \end{bmatrix} \qquad = \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\therefore C.S.\,(x,y,z)=\left\{\left(\frac{-54}{19},\frac{72}{19},\frac{-63}{19}\right)\right\}$$

1.2. Una fábrica posee tres máquinas A, B, C, las cuales trabajan en un día, durante 15, 22 y 23 horas respectivamente. Se producen tres artículos X, Y, Z en estas máquinas, en un día y de la siguiente manera: la unidad X está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas y en C durante 1 hora; la unidad Y está en A durante 2 horas, en B durante 2 horas y en C durante 3 horas; la unidad Z está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas y en C durante 2 horas. Si las maquinas se usan a máxima capacidad, durante un día, Hallar el número de cada artículo que es posible producir.

- **Dada la tabla de composición:**

	x	y	z	Total
A	1	2	1	15
B	2	2	2	22
C	1	3	2	23

- **Sea el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x+2y+z &= 15 \\ 2x+2y+2z &= 22 \\ x+3y+2z &= 23 \end{cases}$$

- **Entonces las matrices:**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&2\\1&3&2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}15\\22\\23\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

Donde:

A : Matriz de coeficientes
B : Matriz de términos independientes
X : Matriz de incógnitas

- **Aplicando el método de Gauss-Jordan:**

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&15\\2&2&2&22\\1&3&2&23\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \leftarrow F_1(-2)+F_2\\ \leftarrow F_1(-1)+F_3\end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&15\\0&-2&0&-8\\0&1&1&8\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \leftarrow F_2\left(-\frac{1}{2}\right)\\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&15\\0&1&0&4\\0&1&1&8\end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow F_2(-2)+F_1\\ \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&7\\0&1&0&4\\0&1&1&8\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow F_3(-1)+F_1\end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&7\\0&1&0&4\\0&0&1&4\end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow F_3(-1)+F_1\\ \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&4\\0&0&1&4\end{array}\right]$$

- **Finalmente:**

$$B=\begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix} \qquad = \qquad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\therefore C.S.\,(x,y,z)=\{(3,4,4)\}$$

1.3. **Un nutriólogo desea alimentar a un sujeto con una dieta diaria de tres suplementos de dieta MiniCal, LiquiFast y SlimQuick. Es importante que el sujeto consuma exactamente 500 mg de potasio, 75 gr de proteína y 1150 unidades de vitamina D cada día. MiniCal contiene 50 mg de potasio, 5 g de proteína y 90 unidades de vitamina D; LiquiFast contiene 75 mg de potasio, 10 g de proteína y 100 unidades de vitamina D; SlimQuick contiene 10 mg de potasio, 3 g de proteína y 50 unidades de vitamina D. ¿Cuántas onzas de cada alimento debe consumir cada día para satisfacer exactamente las necesidades de nutrientes?**

- **Dada la tabla de composición:**

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick	Total
Potasio	50	75	10	500
Proteína	5	10	3	75
Vitamina D	90	100	50	1150

- **Sea el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} 10x + 15y + 2z &= 100 \\ 5x + 10y + 3z &= 75 \\ 9x + 10y + 5z &= 115 \end{cases}$$

- **Entonces las matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 2 \\ 5 & 10 & 3 \\ 9 & 10 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 75 \\ 115 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- **Método Gauss-Jordan:**

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & 2 & 100 \\ 5 & 10 & 3 & 75 \\ 9 & 10 & 5 & 115 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow F_3(-1) + F_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -15 \\ 5 & 10 & 3 & 75 \\ 9 & 10 & 5 & 115 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_1(-5) + F_2 \\ \leftarrow F_1(-9) + F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -15 \\ 0 & 5 & 6 & -50 \\ 0 & -35 & 32 & 250 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow F_2(-1) + F_1 \\ \\ \leftarrow F_2(7) + F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 35 \\ 0 & 5 & 6 & -50 \\ 0 & 0 & -10 & -100 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_3\left(-\frac{3}{5}\right) + F_2 \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 35 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -100 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_2\left(\frac{1}{5}\right) \\ \leftarrow F_2\left(-\frac{1}{10}\right) \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow F_3(-3) + F_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

- **Finalmente:**

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad = \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\therefore C.S.\,(x, y, z) = \{(5, 2, 10)\}$$

1.4. Un ingeniero dispone de 5000 horas hombre de mano de obra para tres proyectos. Los costos por hora hombre del primer, segundo y tercer proyecto son \$16, \$20, \$24 respectivamente y el costo total es de \$ 106000. Si el número horas hombre para el tercer proyecto es igual a la suma de las horas hombre requeridas por los dos primeros proyectos. Calcule el número de horas hombre que puede disponerse en cada proyecto.

- **Dado el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x+y+z &= 5000 \\ 16x+20y+24z &= 106000 \\ x+y-z &= 0 \end{cases}$$

- **Entonces las matrices:**

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\4&5&6\\1&1&-1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5000\\26500\\0\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

- **Método Gauss-Jordan:**

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5000\\4&5&6&26500\\1&1&-1&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \leftarrow F_1(-4)+F_2\\ \leftarrow F_1(-1)+F_3\end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5000\\0&1&2&6500\\0&0&-2&-5000\end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow F_2(-1)+F_1\\ \leftarrow F_3(1)+F_1\\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1500\\0&1&0&1500\\0&0&-2&-5000\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow F_3\left(-\frac{1}{2}\right)\end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1500\\0&1&0&1500\\0&0&1&2500\end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow F_3(1)+F_1\\ \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1000\\0&1&0&1500\\0&0&1&2500\end{array}\right]$$

- **Finalmente:**

$$B=\begin{bmatrix}1000\\1500\\2500\end{bmatrix} \qquad = \qquad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\therefore C.S.\,(x,y,z)=\{(1000,1500,2500)\}$$

2. Retos - Sesión 2

2.1. Resolver por eliminación Gaussiana

- **Sea el sistema:**

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z &= 4 \\ 4x + y - z &= 7 \\ x + 4y - 4z &= -2 \end{cases}$$

- **Sean las matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- **Eliminación Gaussiana:**

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow F_3\,(-2) + F_1 \\ \leftarrow F_3\,(-4) + F_2 \\ \\ \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 6 & 8 \\ 0 & -15 & 15 & 15 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow F_1\,(-1) + F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 6 & 8 \\ 0 & -15 & 15 & 15 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_2\left(-\frac{1}{15}\right) \\ \leftarrow F_3\left(\frac{1}{10}\right) \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow F_2\,(-1) + F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- **Finalmente:**

$$\begin{cases} x - 6y + 6z &= 8 \\ y &= t - 1 \\ z &= t \end{cases} \qquad z = t \qquad ; \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x - 6\,(t-1) + 6t &= 8 \\ x - 6t + 6 + 6t &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore C.S.\,(x, y, z) = \{(2, t-1, t)\}$$

2.2. Resolver por eliminación Gaussiana:

- **Sea el sistema:**

$$\begin{cases} x - y + z &= 1 \\ -x + y - z &= -1 \\ 2x - 2y + 2z &= 2 \end{cases}$$

- **Sean las matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **Eliminación Gaussiana:**

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_1\,(1) + F_2 \\ \leftarrow F_1\,(-2) + F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- **Finalmente:**

$$\begin{cases} x - y + z &= 1 \\ y &= r \\ z &= t \end{cases} \qquad t, r \in \mathbb{R}$$

$$x - r + t = 1$$
$$x = 1 + r - t$$

$$\therefore C.S.\,(x, y, z) = \{(r - t + 1, r, t)\}$$

2.3. **Una tienda se especializa en la preparación de mezclas de café para conocedores. El dueño desea preparar bolsas de 1 kg que se venderán a 120 dólares, usando café colombiano, brasileño y de Kenia. El costo por kilogramo de estos tres tipos de café es de 140, 70 y 100 dólares respectivamente. Determine la cantidad de cada tipo de café, si el dueño decide usar 1/8 de kilogramo del café brasilero.**

2.4. Una fábrica de muebles construye mesas, sillas y armarios, todas de madera. Cada pieza de mueble requiere tres operaciones: corte de madera, ensamblaje y acabado. Realizar una mesa requiere 30 min de corte, 30 min de ensamblaje y 1 h de acabado; una silla requiere 1 h de corte, 90 min de ensamblaje y 90 min de acabado; un armario requiere 1 h de corte, 1 h de ensamblaje y 2 h de acabado. Los trabajadores de la fábrica pueden realizar 300 h de corte, 400 h de ensamblaje y 590 horas de acabado en cada semana. ¿Cuántas mesas, sillas y armarios deben ser producidos para que se usen todas las horas de trabajo disponibles? ¿O esto es imposible?

•Dada la tabla de composición:

	Mesa	Silla	Armario	Total
Corte	30	60	60	300
Ensamblaje	30	90	60	400
Acabado	60	90	120	590

•Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z &= 10 \\ 3x + 9y + 6z &= 40 \\ 6x + 9y + 12z &= 59 \end{cases}$$

•Entonces las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \\ 59 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

•Por eliminación Gaussiana:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 3 & 9 & 6 & 40 \\ 6 & 9 & 12 & 59 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow F_1(-3) + F_2 \\ \leftarrow F_1(-6) + F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow F_2(1) + F_3 \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

•Finalmente:

$$\begin{cases} x + y + z &= 10 \\ 3y &= 10 \\ 0 &= 9 \end{cases}$$

$\therefore$ El sistema es inconsistente

$C.S.\,(x, y, z) = \{(\emptyset)\}$