Universidad Tecnológica del Perú

Cálculo II

Sesión Integradora, PC1 Taller 1

Huatay Salcedo, Luis Elías	U24218809
Pilarto Condezo, Cesar Augusto	U20311970
Camacho Daga, Dylan Matthew	U23265168
Roman Huaman, Luis Arturo	U24221771

14 de septiembre de 2025

Docente: **Victor, Papuico Bernardo**

1. Determine si las siguientes integrales convergen o divergen:

1.
$$\int_3^7 \frac{2}{x-3}\,dx$$

La función $f(x) = \frac{2}{x-3}$ tiene una discontinuidad en $x = 3$ que además se encuentra dentro de los límites de initegración. Por lo tanto, esta es una integral impropia.

$$\int_3^7 \frac{2}{x-3}\,dx = 2\lim_{a\to 3^+}\int_a^7 \frac{1}{x-3}\,dx$$

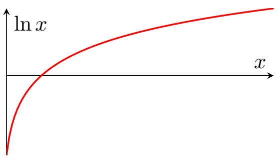
Hallando la antiderivada:

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3| + C$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2\lim_{a\to 3^+}\int_a^7 \frac{1}{x-3}\,dx &= 2\lim_{a\to 3^+}\left[\ln|x-3|\right]_a^7 \\ &= 2\lim_{a\to 3^+}\left[\ln|4| - \ln|x-3|\right]_a^7 \\ &= 2\left(\ln 4 - \lim_{a\to 3^+}\ln|a-3|\right) \end{aligned}$$

Considerando:



Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2\left(\ln 4 - \lim_{a\to 3^+}\ln|a-3|\right) &= 2(\ln 4 - (-\infty)) \\ &= 2(\ln 4 + \infty) = \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral diverge.

2.
$$\int_0^1 \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$$

Tratando algebraicamente:

$$\begin{aligned} x^2+x-2 &= (x+2)(x-1) \\ \frac{3}{x^2+x-2} &= \frac{3}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \\ 3 &= A(x-1) + B(x+2) \\ 3 &= (A+B)x + (-A+2B) \end{aligned}$$

De aquí se concluye:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+2B=3 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3}{x^2+x-2}\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx \end{aligned}$$

De la integral, se tiene que la función que se integra tiene discontinuidad en $x = 1$ y en $x = -2$. Sin embargo, solo la discontinuidad en $x = 1$ se encuentra dentro de los límites de integración. Por lo tanto, esta es una integral impropia.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{x-1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx \end{aligned}$$

Hallando las antiderivadas:

- $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1| + C$$
- $$\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln|x+2| + C$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{x-1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \lim_{b\to 1^-}\left[\ln|x-1|\right]_0^b - \left[\ln|x+2|\right]_0^1 \\ &= \lim_{b\to 1^-}\left(\ln|b-1|\right) - \ln 1 - \ln 3 + \ln 2 \\ &= -\infty - 0 - \ln 3 + \ln 2 = -\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral diverge.

3.
$$\int_{-\infty}^{\infty} 3|x|e^{-x^2}\,dx$$

Por la definición de valor absoluto, se tiene:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} 3|x|e^{-x^2}\,dx \\ &= 3\left(\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx\right) \end{aligned}$$

Considerando que en los límites de integración hay infinito, esta es una integral impropia. Entonces,

$$3\left(\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx\right)$$
$$= 3\left(\lim_{b\to\infty^-}\int_0^{b} xe^{-x^2}\,dx - \lim_{a\to-\infty^+}\int_a^{0} xe^{-x^2}\,dx\right)$$

Consideremos el cambio de variable,

$$u = x^2 \implies du = 2x\,dx \implies \frac{1}{2}du = x\,dx$$

Luego,

$$3\left(\lim_{b\to\infty^-}\int_0^{b} xe^{-x^2}\,dx - \lim_{a\to\infty^+}\int_a^{0} xe^{-x^2}\,dx\right)$$
$$= 3\left(\lim_{b\to\infty^-}\int_0^{b} \frac{1}{2}e^{-u}\,du - \lim_{a\to\infty^+}\int_a^{0} \frac{1}{2}e^{-u}\,du\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\lim_{b\to\infty^-}\int_0^{b} e^{-u}\,du - \lim_{a\to\infty^+}\int_a^{0} e^{-u}\,du\right)$$

Obs: *Se consideró también el cambio en los límites de integración.*

Calculando las antiderivadas:

$$\int e^{-u}\,du = -e^{-u} + C$$

Entonces,

$$\frac{3}{2}\left(\lim_{b\to\infty^-}\int_0^{b} e^{-u}\,du - \lim_{a\to\infty^+}\int_a^{0} e^{-u}\,du\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\lim_{b\to\infty^-}\left[-e^{-u}\right]_0^b - \lim_{a\to\infty^+}\left[-e^{-u}\right]_a^0\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\lim_{b\to\infty^-}(-e^{-b}+1) - \lim_{a\to\infty^+}(-1+e^{-a})\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left((0+1)-(-1+0)\right) = \frac{3}{2}(1+1) = 3$$

Por lo tanto, la integral converge y su valor es 3.

2. Usando la definición de función Gamma, evalúe las siguientes integrales:

Función Gamma:

$$\boxed{\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx}$$

1.

$$\int_0^{\infty} e^{-10x}\sqrt{x^5}\,dx$$

Considerando el cambio de variable,

$$u = 10x \implies du = 10\,dx \implies dx = \frac{1}{10}du$$

Entonces,

$$\int_0^{\infty} e^{-10x}\sqrt{x^5}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{10}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{10}\,du$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-u}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{10^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{1}{10}\,du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10^7}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{5}{2}}\,du$$

Por la definición de función Gamma, se tiene:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{7}{2}-1}\,du$$

Entonces,

$$\int_0^{\infty} e^{-10x}\sqrt{x^5}\,dx = \frac{1}{\sqrt{10^7}}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$$

De acuerdo con la propiedad de la función Gamma:

$$\frac{1}{\sqrt{10^7}}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10^7}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8\sqrt{10^7}}$$

2.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x^9}}{e^{3x}}\,dx$$

Reescribiendo la integral:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x^9}}{e^{3x}}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-3x}x^{\frac{9}{2}}\,dx$$

Considerando el cambio de variable,

$$u = 3x \implies du = 3\,dx \implies dx = \frac{1}{3}du$$

Entonces,

$$\int_0^{\infty} e^{-3x}x^{\frac{9}{2}}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{3}\right)^{\frac{9}{2}}\frac{1}{3}\,du$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-u}\frac{u^{\frac{9}{2}}}{3^{\frac{9}{2}}}\cdot\frac{1}{3}\,du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3^{11}}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{9}{2}}\,du$$

Por la definición de función Gamma, se tiene:

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{11}{2}-1}\,du$$

Entonces,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x^9}}{e^{3x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3^{11}}}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$$

De acuerdo con la propiedad de la función Gamma:

$$\frac{1}{\sqrt{3^{11}}}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3^{11}}}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{945\sqrt{\pi}}{32\sqrt{3^{11}}}$$

3. Usando la definición de función Beta, evalúe las siguientes integrales:

Función Beta:

$$\boxed{B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx}$$

1.
$$\int_0^5 \frac{x^3}{\sqrt{5-x}}\,dx$$

Considerando el intervalo de integración:

$$0 \leq x \leq 5 \implies 0 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

Con ello el cambio de variable:

$$u = \frac{x}{5} \implies x = 5u$$
$$dx = 5\,du$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{x^3}{\sqrt{5-x}}\,dx &= \int_0^1 \frac{(5u)^3}{\sqrt{5-5u}} \cdot 5\,du \\ &= 125\sqrt{5}\int_0^1 \frac{u^3}{\sqrt{1-u}}\,du \\ &= 125\sqrt{5}\int_0^1 u^3(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du\end{aligned}$$

Por la definición de función Beta, se tiene:

$$B(4, \tfrac{1}{2}) = \int_0^1 u^{4-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\,du$$

Según la propiedad de la función Beta:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Entonces,

$$\int_0^5 \frac{x^3}{\sqrt{5-x}}\,dx = 125\sqrt{5}B(4, \tfrac{1}{2}) = 125\sqrt{5} \cdot \frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})}$$

Por lo tanto,

$$125\sqrt{5} \cdot \frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})} = 125\sqrt{5} \cdot \frac{3!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

2.
$$\int_0^6 \frac{x^4}{\sqrt{6-x}}\,dx$$

Considerando el intervalo de integración:

$$0 \leq x \leq 6 \implies 0 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

Con ello el cambio de variable:

$$u = \frac{x}{6} \implies x = 6u$$
$$dx = 6\,du$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^6 \frac{x^4}{\sqrt{6-x}}\,dx &= \int_0^1 \frac{(6u)^4}{\sqrt{6-6u}} \cdot 6\,du \\ &= 6^3\sqrt{6}\int_0^1 \frac{u^4}{\sqrt{1-u}}\,du \\ &= 6^3\sqrt{6}\int_0^1 u^4(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du\end{aligned}$$

Por la definición de función Beta, se tiene:

$$B(5, \tfrac{1}{2}) = \int_0^1 u^{5-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\,du$$

Entonces,

$$\int_0^6 \frac{x^4}{\sqrt{6-x}}\,dx = 6^3\sqrt{6}B(5, \tfrac{1}{2}) = 6^3\sqrt{6} \cdot \frac{\Gamma(5)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})}$$

Por lo tanto,

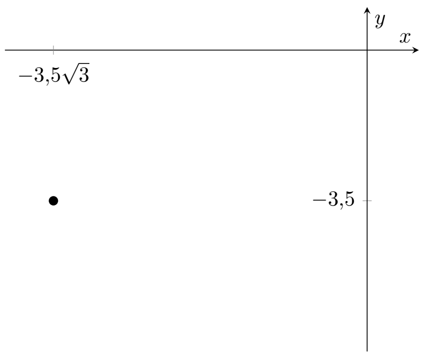
$$6^3\sqrt{6} \cdot \frac{\Gamma(5)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} = 6^3\sqrt{6} \cdot \frac{4!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

4. Dada las siguientes coordenadas cartesianas, determine sus coordenadas polares y grafíquelas en el plano polar.

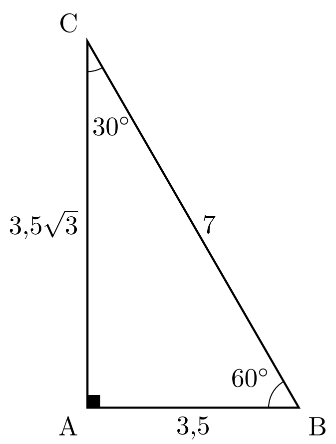
1.

$$\left(-3{,}5\sqrt{3}; -3{,}5\right)$$

Graficando el punto en el plano cartesiano:



Aprovechando el triángulo notable:



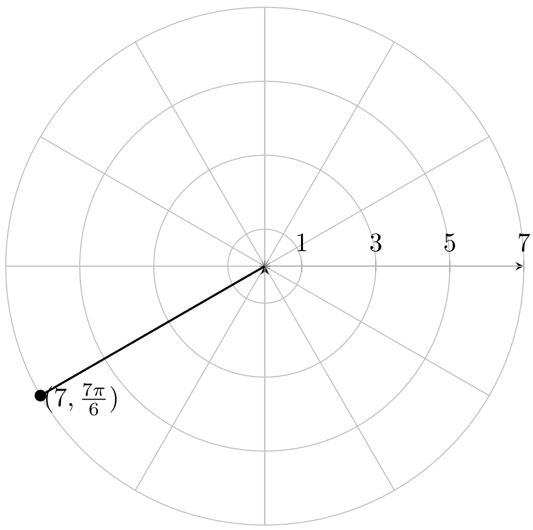
Por ser un triángulo rectángulo, se tiene:

$$\tan\theta = \frac{-3{,}5}{-3{,}5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Considerando que el punto se encuentra en el tercer cuadrante, se tiene:

$$\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$$

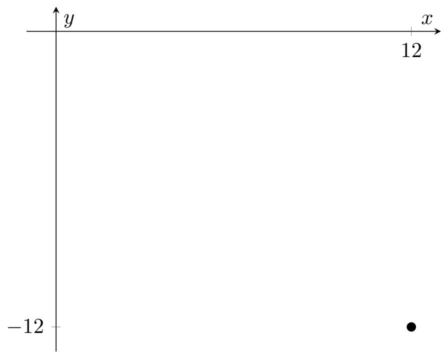
Dibujando en el plano polar,



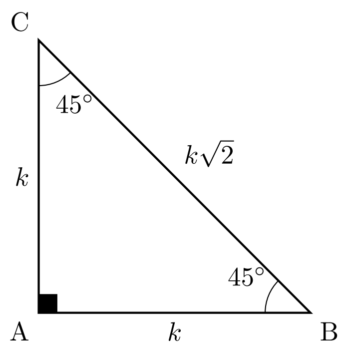
2.

$$(12; -12)$$

Graficando el punto en el plano cartesiano:



Considerando el triángulo rectángulo:



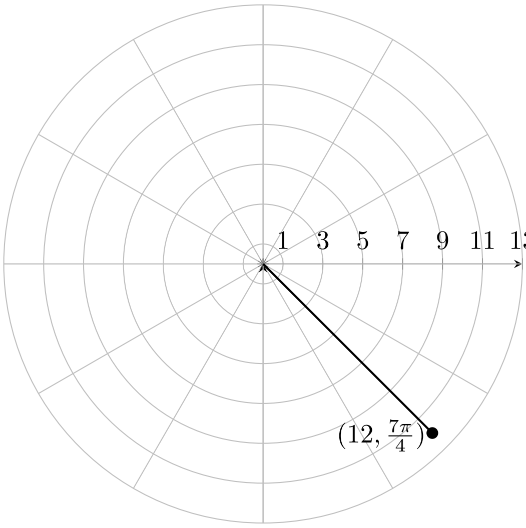
Por ser un triángulo rectángulo isósceles, se tiene:

$$\tan\theta = \frac{-12}{12} = -1 \implies \theta = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$$

Considerando que el punto se encuentra en el cuarto cuadrante, se tiene:

$$\theta = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ = \frac{7\pi}{4}$$

Dibujando en el plano polar,



5. Determina la gráfica de las siguientes ecuaciones polares:

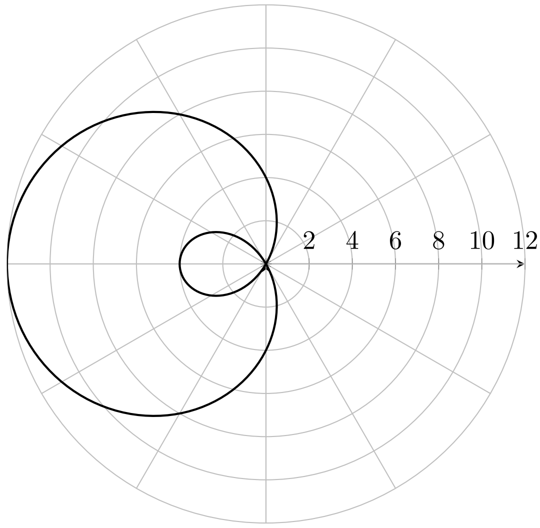
1.

$$r = 4 - 8\cos\theta$$

Tabulando valores desde 0 hasta 2π con incrementos de $\frac{\pi}{12}$:

θ	r	θ	r
0	-4	$\frac{\pi}{12}$	$-2{,}071$
$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$1{,}172$
$\frac{\pi}{3}$	2	$\frac{5\pi}{12}$	$2{,}598$
$\frac{\pi}{2}$	4	$\frac{7\pi}{12}$	$5{,}402$
$\frac{2\pi}{3}$	6	$\frac{3\pi}{4}$	$6{,}828$
$\frac{5\pi}{6}$	8	$\frac{11\pi}{12}$	$9{,}071$
π	12	$\frac{13\pi}{12}$	$9{,}071$
$\frac{7\pi}{6}$	8	$\frac{5\pi}{4}$	$6{,}828$
$\frac{4\pi}{3}$	6	$\frac{17\pi}{12}$	$5{,}402$
$\frac{3\pi}{2}$	4	$\frac{19\pi}{12}$	$2{,}598$
$\frac{11\pi}{6}$	2	$\frac{7\pi}{4}$	$1{,}172$
$\frac{5\pi}{3}$	0	$\frac{19\pi}{12}$	$-2{,}071$
$\frac{3\pi}{2}$	-4	$\frac{17\pi}{12}$	$-6{,}598$
$\frac{4\pi}{3}$	-8	$\frac{5\pi}{4}$	$-9{,}656$
$\frac{7\pi}{6}$	-12	$\frac{13\pi}{12}$	$-14{,}071$

Graficando en el plano polar:



2.

$$r = 2 - 5\sin\theta$$

Tabulando valores desde 0 hasta 2π con incrementos de $\frac{\pi}{12}$:

θ	r	θ	r
0	2	$\frac{\pi}{12}$	$-0{,}295$
$\frac{\pi}{6}$	$-0{,}5$	$\frac{\pi}{4}$	$-1{,}536$
$\frac{\pi}{3}$	$-2{,}5$	$\frac{5\pi}{12}$	$-3{,}536$
$\frac{\pi}{2}$	-3	$\frac{7\pi}{12}$	$-1{,}964$
$\frac{2\pi}{3}$	$-1{,}5$	$\frac{3\pi}{4}$	$-0{,}464$
$\frac{5\pi}{6}$	$0{,}5$	$\frac{11\pi}{12}$	$1{,}705$
π	2	$\frac{13\pi}{12}$	$1{,}705$
$\frac{7\pi}{6}$	$0{,}5$	$\frac{5\pi}{4}$	$-0{,}464$
$\frac{4\pi}{3}$	$-1{,}5$	$\frac{17\pi}{12}$	$-1{,}964$
$\frac{3\pi}{2}$	-3	$\frac{19\pi}{12}$	$-3{,}536$
$\frac{11\pi}{6}$	$-2{,}5$	$\frac{7\pi}{4}$	$-1{,}536$
$\frac{5\pi}{3}$	$-0{,}5$	$\frac{19\pi}{12}$	$-0{,}295$
$\frac{3\pi}{2}$	2		

Graficando en el plano polar: