SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE GAUSS – JORDAN

SOLUCIONES DETERMINADAS

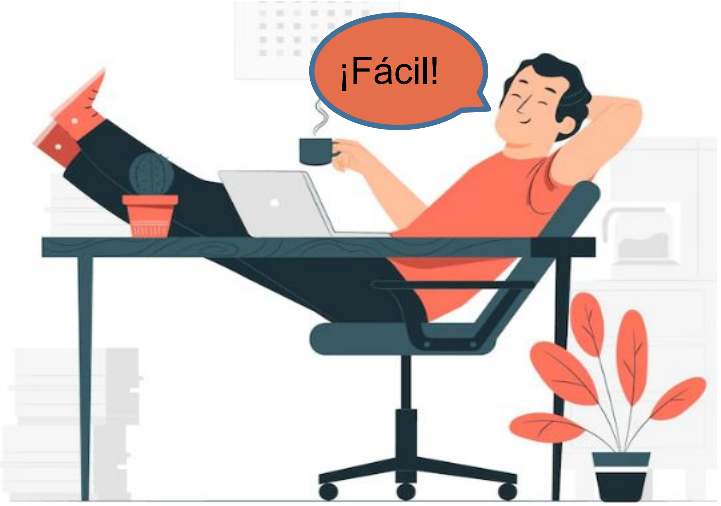
Universidad Tecnológica del Perú

Inicio
¿Alguna duda de la sesión anterior?

Que dices…

¿La siguiente matriz tiene inversa?

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$



LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve sistemas de ecuaciones lineales empleando el método de Gauss - Jordan en casos aplicados a ingenierías.

¿Qué tanto conoces?

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

¿Con qué métodos se pueden resolver los sistemas de ecuaciones lineales?

Utilidad

¿Para qué me sirve los sistemas de ecuaciones lineales?

En la mayoría de los problemas aplicativos intervienen variables que forman un sistema de ecuaciones, para los cuales existen métodos matriciales que facilitan el trabajo de encontrar los valores que satisfacen dichas ecuaciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE GAUSS - JORDAN

Transformación

Todo sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado como una ecuación matricial.

Sistema Lineal $\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$

Siendo:

A: Matriz de coeficientes.
X: Matriz de variables
B: Matriz de constantes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

1 MÉTODO ELIMINACIÓN DE GAUSS - JORDAN

El método de eliminación gaussiana es aplicado a cualquier tipo de sistemas de ecuaciones lineales (“n” ecuaciones, “m” incógnitas) y no es necesario que $|A| \neq 0$, o que exista A^{-1}

Dada la ecuación

$$A \cdot X = B$$

El método consiste en ***generar la matriz aumentada***

$$[A \,\vdots\, B]$$

la cual se reducirá a una matriz canónica o de forma escalonada por filas, para luego con ésta nueva matriz escribir un nuevo sistema de ecuaciones.

Todo sistema reducido puede presentar tres tipos de soluciones:

Unica solución

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

No hay solución

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estos son casos mucho mas reales y que ocurren con frecuencia en las ingenierías y otros campos de estudio..

1.1 MÉTODO ELIMINACIÓN DE GAUSS – JORDAN

Universidad Tecnológica del Perú

UNA ÚNICA SOLUCIÓN

Un sistema tiene una única solución si cada una de las incógnitas en la forma escalonada por reglones es una incógnita inicial, entonces el sistema tiene exactamente una solución y es llamado CONSISTENTE

$$\text{Unica solución}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

Resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando eliminación gaussiana

$$\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A \cdot X = B}$$

Generamos la matriz aumentada $[A \quad B]$

$$\xrightarrow{-1F_1 + F_2} \xrightarrow{-3F_1 + F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{4F_2 + F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{18}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 13/9 \end{bmatrix}$$

existe una solución única

$$\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ y + z = 6 \\ z = 13/9 \end{cases}$$

$$y + \left(\frac{13}{9}\right) = 6$$

$$y = \frac{41}{9}$$

$$x + \left(\frac{41}{9}\right) - 3\left(\frac{13}{9}\right) = 6$$

$$x = \frac{34}{9}$$

$$\boldsymbol{C.S. = \left\{\left(\frac{34}{9}, \frac{41}{9}, \frac{13}{9}\right)\right\}}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Plaza Vea quiere ofertar tres tipos de paquetes A, B y C. El paquete A contiene $1kg$ de azúcar, $3kg$ de arroz y $2kg$ de fideo extra light; el paquete B contiene $2kg$ de azúcar, $1kg$ de arroz y $6kg$ fideo extra light; el paquete C contiene $1kg$ de cada uno de los anteriores ¿Cuántos paquetes se podrá elaborar si se cuenta con $36kg$ de azúcar, $45kg$ de arroz, $90kg$ de fideo extra light?

   Exprese el sistema y resuelva por el método de eliminación gaussiana.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} Azucar \\ Arroz \\ Fideo \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 36 \\ 3x + y + z = 45 \\ 2x + 6y + z = 90 \end{cases}$$

$$[A \,\vdots\, B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 36 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 45 \\ 2 & 6 & 1 & \vdots & 90 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 36 \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 36 \\ 0 & -5 & -2 & \vdots & -63 \end{bmatrix}$$

$$21 \Rightarrow \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 45 \\ -3 & -6 & -3 & -108 \\ \hline \end{array}$$

$$31 \Rightarrow \begin{array}{cccc} 2 & 6 & 1 & 90 \\ -2 & -4 & -2 & -72 \\ \hline \end{array}$$

$$32 \Rightarrow \begin{array}{cccc} 0 & 10 & -5 & 90 \\ 0 & -10 & -4 & -126 \\ \hline \end{array}$$

$$-9z = -36$$
$$z = 4$$

$$-5y - 2(4) = -63$$
$$y = 11$$

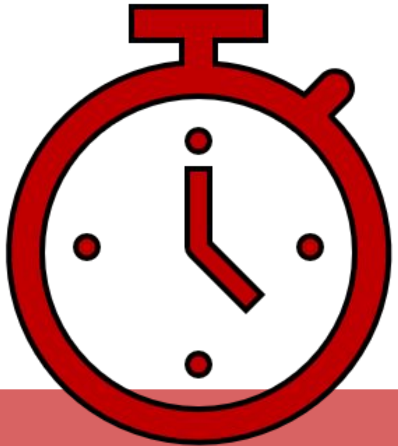
$$x + 2(11) + 4 = 36$$
$$x = 10$$

Se podrá elaborar 10 paquetes de tipo A, 11 paquetes de tipo B y 4 paquetes de tipo Z

Práctica

¡Ahora es tu turno

A desarrollar los ejercicios propuestos



Tiempo : 25 min

INICIAMOS LOS EJERCICIOS RETO

Universidad Tecnológica del Perú

EJERCICIOS RETO

1. Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de eliminación gaussiana

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \\ x - 6y - 5z = -9 \end{cases}$$

2. Una fábrica posee tres máquinas A, B, C, las cuales trabajan en un día, durante 15, 22 y 23 horas respectivamente. Se producen tres artículos X, Y, Z en estas máquinas, en un día y de la siguiente manera: la unidad X está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas y en C durante 1 hora; la unidad Y está en A durante 2 horas, en B durante 2 horas y en C durante 3 horas; la unidad Z está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas y en C durante 2 horas. Si las maquinas se usan a máxima capacidad, durante un día, Hallar el número de cada artículo que es posible producir.

3. Un nutriólogo desea alimentar a un sujeto con una dieta diaria de tres suplementos de dieta MiniCal, LiquiFast y SlimQuick. Es importante que el sujeto consuma exactamente 500 mg de potasio, 75 gr de proteína y 1150 unidades de vitamina D cada día. MiniCal contiene 50 mg de potasio, 5 g de proteína y 90 unidades de vitamina D; LiquiFast contiene 75 mg de potasio, 10 g de proteína y 100 unidades de vitamina D; SlimQuick contiene 10 mg de potasio, 3 g de proteína y 50 unidades de vitamina D. ¿Cuántas onzas de cada alimento debe consumir cada día para satisfacer exactamente las necesidades de nutrientes?

4. Un ingeniero dispone de 5000 horas hombre de mano de obra para tres proyectos. Los costos por hora hombre del primer, segundo y tercer proyecto son \$16, \$20, \$24 respectivamente y el costo total es de \$ 106000. Si el número horas hombre para el tercer proyecto es igual a la suma de las horas hombre requeridas por los dos primeros proyectos. Calcule el número de horas hombre que puede disponerse en cada proyecto.

Cierre

RESPUESTAS

1. $\text{C.S.}: \left\{\left(-\frac{54}{19}, \frac{72}{19}, -\frac{63}{19}\right)\right\}$

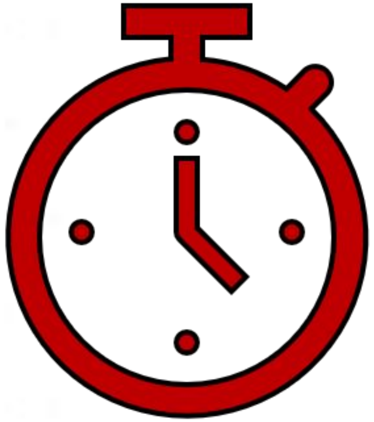
2. Se puede producir 3 artículos X, 4 artículos Y y 4 artículos Z.

3. El sujeto debe consumir diariamente 5 oz de MiniCal, 2oz de LiquiFast y 10 oz de SlimQuick

4 Se requiere 1000 horas hombre para el primer proyecto, 1500 horas hombre para el segundo y 2500 horas hombre para el tercer proyecto

Universidad Tecnológica del Perú

Espacio de Preguntas



Tiempo : 5 min

No te quedes con tus dudas, si quieres preguntar o comentar algo respecto a lo que hemos trabajado, es momento de hacerlo y así poder ayudarte. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas

Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué aprendimos hoy?

1. ¿Qué métodos podemos aplicar para resolver un sistema de ecuaciones lineales?

2. ¿Cuándo un sistema de ecuaciones presenta solución única?

Método de Gauss Jordan

Lo logré

FINALMENTE

Gracias por tu participación

Recuerda: aprender feliz es aprender para siempre.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Resuelve los ejercicios de esta sesión y sigue practicando.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Universidad
Tecnológica
del Perú