智能系统设计与应用

Homework 1-3 习题解答

刘旭辉

2021 年 6 月 18 日

Problem 1

用你自己的话定义下列术语: Agent, Agent函数, Agent程序, 理性, 自主, 反射Agent, 基于模型的Agent, 基于目标的Agent, 基于效用的Agent, 学习Agent.

Solution

- Agent: 一个可以感知和行动的实体
- Agent函数: 将任意给定感知序列映射到动作的函数
- Agent程序: Agent函数的具体实现
- 理性: Agent基于感知序列提供的证据和先验知识, 选择能够最大化效用的行动的性质
- 自主: Agent不仅基于初始设定还能基于其自身的经验选择行为的性质
- 反射Agent: 只根据当前感知行动的Agent
- 基于模型的Agent: 根据内在状态选择行为的Agent
- 基于目标的Agent: 选择能够实现目标状态的行为的Agent
- 基于效用的Agent: 选择最大化期望效用的行为的Agent
- 学习Agent: 可以根据经验提升自己行为的Agent

Problem 2

请写出基于目标的Agent和基于效用的Agent的伪代码Agent程序.

Solution

Algorithm 1 Goal-Based Agent

Require: *percept, model, action, goal*

state ← UPDATE-STATE(*state, action, percept, model*)
if GOAL-ACHIEVED(*state, goal*) **then**
    return null
end if
if *plan* is empty **then**
    plan ← PLAN(*state, goal, model*)
    action ← FIRST(*plan*)
end if
return *action*

Algorithm 2 Utility-Based Agent

Require: *percept, model, action, utility-function*

state ← UPDATE-STATE(*state, action, percept, model*)
if *plan* is empty **then**
    plan ← PLAN(*state, utility-function, model*)
    action ← FIRST(*plan*)
end if
return *action*

Problem 3

在火星上, 有50%的概率既有生命又有水, 有25%的概率有生命但没有水, 有25%的概率既没有生命又没有水. 问: 在给定有水的前提下, 火星上有生命的概率是多少?

Solution

$$
\begin{aligned}
&\text{P(有生命|有水)}\\
=&\frac{\text{P(有生命且有水)}}{\text{P(有水)}}\\
=&\frac{0.5}{0.5}\\
=&1
\end{aligned}
$$

Problem 4

给定一个状态序列为$s_{0:t}$和观察序列为$o_{0:t}$的隐马尔科夫模型, 试证明:

$$P(s_t|o_{0:t}) \propto P(o_t|s_t, o_{0:t-1})P(s_t|o_{0:t-1})$$

Problem 4 continued on next page.

并使用上式证明:

$$P(s_t|o_{0:t}) \propto P(o_t|s_t) \sum_{s_{t-1}} P(s_t|s_{t-1}) P(s_t|o_{0:t-1})$$

Solution

1.

$$P\left(s_t|o_{0:t}\right) \propto P\left(o_{0:t}|s_t\right) P\left(s_t\right) = P\left(o_t, o_{0:t-1}|s_t\right) P\left(s_t\right)$$

对第一项使用贝叶斯公式

$$P\left(s_t|o_{0:t}\right) \propto P\left(o_t|o_{0:t-1}, s_t\right) P\left(o_{0:t-1}|s_t\right) P\left(s_t\right)$$

再对后两项使用贝叶斯公式

$$P\left(s_t|o_{0:t}\right) \propto P\left(o_t|o_{0:t-1}, s_t\right) P\left(s_t|o_{0:t-1}\right)$$

2. 因为给定s_t时, o_t与$o_{0:t-1}$独立,

$$P(s_t|o_{0:t}) \propto P(o_t|s_t) P(s_t|o_{0:t-1})$$

根据全概率公式加入随机变量s_{t-1},

$$P\left(s_t|o_{0:t}\right) \propto P\left(o_t|s_t\right) \sum_{s_{t-1}} P\left(s_t, s_{t-1}|o_{0:t-1}\right)$$

对求和号内的项使用条件概率公式:

$$P\left(s_t|o_{0:t}\right) \propto P\left(o_t|s_t\right) \sum_{s_{t-1}} P\left(s_t|s_{t-1}, o_{0:t-1}\right) P\left(s_{t-1}|o_{0:t-1}\right)$$

因为给定s_{t-1}时, s_t与$o_{0:t-1}$独立, 即得到:

$$P(s_t|o_{0:t}) \propto P(o_t|s_t) \sum_{s_{t-1}} P(s_t|s_{t-1}) P(s_t|o_{0:t-1})$$

Problem 5

什么是分类任务? 朴素贝叶斯模型使用了什么假设? 使用盘式记法来画一个朴素的贝叶斯模型.

Solution

分类任务指基于观测进行类别预测的任务. 朴素贝叶斯假设给定类别后, 观测到的特征(证据变量)之间相互独立. 朴素贝叶斯模型的盘式记法如下:

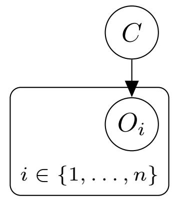


图 1: 朴素贝叶斯的盘式记法

Problem 6

有一位教授想知道学生是否睡眠充足. 每天, 教授观察学生在课堂上是否睡觉, 并观察他们是否红眼. 教授有如下的领域理论:

- 没有观察数据时, 学生睡眠充足的先验概率为0.7.
- 给定学生前一天睡眠充足为条件, 学生在晚上睡眠充足的概率是0.8;如果前一天睡眠不充足, 则是0.3.
- 如果学生睡眠充足, 则红眼的概率是0.2, 否则是0.7.
- 如果学生睡眠充足, 则在课堂上睡觉的概率是0.1, 否则是0.3.

将这些信息形式化为一个动态贝叶斯网络, 使教授可以使用这个网络从观察序列中进行滤波和预测. 然后再将其形式化为一个只有一个观察变量的隐马尔科夫模型. 给出这个模型的完整的概率表.

Solution

令S_t表示学生是否睡眠充足, R_t表示学生是否红眼, C_t表示学生是否在课堂上睡觉

$$
\begin{aligned}
P(s_0) &= 0.7 \\
P(s_{t+1}|s_t) &= 0.8 \\
P(s_{t+1}|\neg s_t) &= 0.3 \\
P(r_t|s_t) &= 0.2 \\
P(r_t|\neg s_t) &= 0.7 \\
P(c_t|s_t) &= 0.1 \\
P(c_t|\neg s_t) &= 0.3
\end{aligned}
$$

将R_t和C_t合并为一个4-值观察变量RC_t即可构造出一个只有一个观察变量的隐马尔科夫模型. 概率表如下:

	00	01	10	11
s_t	0.72	0.08	0.18	0.02
$\neg s_t$	0.21	0.09	0.49	0.21

Problem 7

对于上一道练习描述的动态贝叶斯网络以及证据变量值

- o_0=没有红眼, 没有在课堂上睡觉
- o_1=有红眼, 没有在课堂上睡觉
- o_2=有红眼, 在课堂上睡觉

执行下面的计算:

1. 状态估计: 针对每个$t=0,1,2$, 计算P(t时刻睡眠充足$|o_{0:t}$)
2. 平滑: 针对每个$t=0,1,2$, 计算P(t时刻睡眠充足$|o_{0:2}$)
3. 针对$t=0$和$t=1$, 比较滤波概率和平滑概率.

Solution

令S_t表示学生是否睡眠充足 (注: Z表示正则化因子)

1.
$$
\begin{aligned}
P(S) &= \langle 0.7, 0.3\rangle \\
P(S_0) &= \sum_s P(S_0|s)\, P(S) \\
&= 0.7\langle 0.8, 0.2\rangle + 0.3\langle 0.3, 0.7\rangle \\
&= \langle 0.65, 0.35\rangle \\
P(S_0|o_0) &= \frac{1}{Z} P(o_0|S_0)\, P(S_0) \\
&= \frac{1}{Z}\langle 0.8\times 0.9, 0.3\times 0.7\rangle\langle 0.65, 0.35\rangle \\
&= \frac{1}{Z}\langle 0.72, 0.21\rangle\langle 0.65, 0.35\rangle \\
&= \langle 0.8643, 0.1357\rangle \\
P(S_1|o_0) &= \sum_{s_0} P(S_1|s_0)\, P(s_0|o_0) \\
&= \langle 0.7321, 0.2679\rangle \\
P(S_1|o_{0:1}) &= \frac{1}{Z} P(o_1|S_2)\, P(S_2|o_0) \\
&= \langle 0.5010, 0.4990\rangle \\
P(S_2|o_{0:1}) &= \sum_{s_1} P(S_2|s_1)\, P(s_1|o_{0:1}) \\
&= \langle 0.5505, 0.4495\rangle \\
P(S_2|o_{0:2}) &= \frac{1}{Z} P(o_2|S_2)\, P(S_2|o_{0:1}) \\
&= \langle 0.1045, 0.8955\rangle
\end{aligned}
$$

Problem 7 continued on next page.

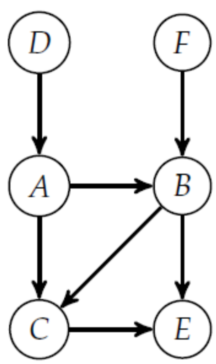
2.

$$
\begin{aligned}
P\left(o_2|S_2\right) &= \langle 0.2\times 0.1, 0.7\times 0.3\rangle \\
&= \langle 0.02, 0.21\rangle \\
P\left(o_2|S_1\right) &= \sum_{s_2} P\left(o_2|s_2\right) P\left(|s_2\right) P\left(s_2|S_1\right) \\
&= \langle 0.02\times 0.8+0.21\times 0.2, 0.02\times 0.3+0.21\times 0.7\rangle \\
&= \langle 0.0588, 0.153\rangle \\
P\left(o_{1:2}|S_0\right) &= \sum_{s_1} P\left(o_1|s_1\right) P\left(o_2|s_1\right) P\left(s_1|S_0\right) \\
&= \langle 0.0233, 0.0556\rangle \\
P\left(S_0|o_{0:2}\right) &= \frac{1}{Z} P\left(S_0|o_0\right) P\left(o_{1:2}|S_0\right) \\
&= \langle 0.7277, 0.2723\rangle \\
P\left(S_1|o_{0:2}\right) &= \frac{1}{Z} P\left(S_1|o_{0:1}\right) P\left(o_2|S_0\right) \\
&= \langle 0.2757, 0.7243\rangle \\
P\left(S_2|o_{0:2}\right) &= \langle 0.1045, 0.8955\rangle
\end{aligned}
$$

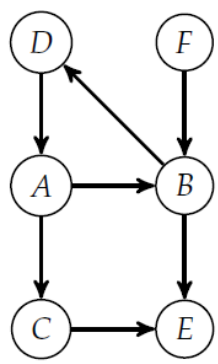
3. 平滑算出的学生睡眠充足的概率更低, 因为加入$t=2$的观察后表明学生更可能睡眠不足.

Problem 8

有如下两个有向图，请给出每个有向图的所有拓扑排序。如果拓扑排序不存在，试解释为什么。



(1)



(2)

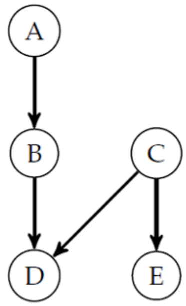
Solution

1. DFABCE FDABCE DAFBCE
2. 无拓扑排序，ABD构成环

Problem 9

假设有如左下图的贝叶斯网络，想要用似然加权方法推理出$P(e^1|b^0,d^1)$. 右下图通过似然加权方法得

到的一组样本。试写出（1）每个样本的权重表达式；（2）用样本权重w_i估计$P(e^1|b^0, d^1)$的方程。



A	B	C	D	E
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1

Solution

1.
   - $P(b^0|a^0)P(d^1|b^0, c^0)$.
   - $P(b^0|a^1)P(d^1|b^0, c^0)$.
   - $P(b^0|a^0)P(d^1|b^0, c^0)$.
   - $P(b^0|a^1)P(d^1|b^0, c^1)$.
   - $P(b^0|a^0)P(d^1|b^0, c^1)$.
   - $P(b^0|a^1)P(d^1|b^0, c^1)$.
2. $P(e^1|b^0, d^1) = \frac{\sum_i w_i (e^i=1 \wedge b^i=0 \wedge d^i=1)}{\sum_i w_i (b^1=0 \wedge d^i=1)} = \frac{w_3+w_4+w_6}{w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6}$.

Problem 10

给定n个数据点(y_j, x_j), 其中x_k是按照线性高斯模型 $p(x|y) = \mathcal{N}(x|my + b|\sigma^2)$从$y_k$产生的. 试推导出使数据的条件对数似然性最大的参数m, b, σ的值.

Solution

$\ell = -n(\log\sigma + \log\sqrt{2\pi}) - \sum_j \frac{(x_j - (my_j + b))^2}{2\sigma^2}$

令ℓ对各个参数的偏导等于0,

$$\frac{\partial \ell}{\partial m} = -\sum_j \frac{y_j\left(x_j - (my_j + b)\right)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = -\sum_j \frac{\left(x_j - (my_j + b)\right)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_j \frac{\left(x_j - (my_j + b)\right)^2}{\sigma^3} = 0$$

解得

Problem 10 continued on next page.

$$m = \frac{n\left(\sum_j x_j y_j\right) - \left(\sum_j y_j\right)\left(\sum_j x_j\right)}{n\left(\sum_j y_j^2\right) - \left(\sum_j y_j\right)^2}$$

$$b = \frac{1}{n}\sum_j (x_j - m y_j)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_j (x_j - (m y_j + b))^2$$

Problem 11

假设一个有磨损的硬币，我们估计它正面朝上的概率，记为ϕ。如果第一次投掷的结果是正面朝上（$o_1 = 1$），则

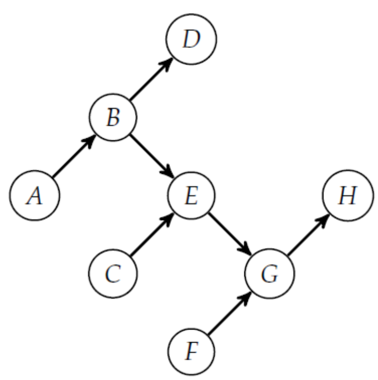
1. 计算ϕ的极大似然估计
2. 使用均匀先验假设，计算ϕ的MAP估计
3. 使用均匀先验假设，计算ϕ的后验分布均值

Solution

1. $P(o_1 = 1) = \phi$
   $\phi = \arg\max P(o_1 = 1) = 1.$
2. $P(\phi|o_1) \propto P(o_1|\phi)P(\phi) \propto \phi$
   $\phi = \arg\max P(\phi|o_1) = 1$
3. $\int_0^1 p(\phi|o_1)d\phi = 1 \Rightarrow p(\phi|o_1) = 2\phi$
   $E\phi = \int_0^1 \phi 2\phi d\phi = \frac{2}{3}$

Problem 12

给定如下贝叶斯网络，试确定结点B的马尔科夫覆盖.

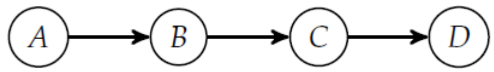


Solution

ADEC

Problem 13

给定如下贝叶斯网络及其关联的条件概率分布，试写出精确推理$P(a^1|d^1)$的方程式。



Solution

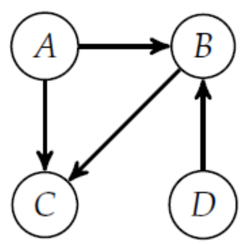
$$P\left(a^1 \mid d^1\right)=\frac{P\left(a^1, d^1\right)}{P\left(d^1\right)}$$

$$P\left(a^1 \mid d^1\right)=\frac{\sum_b \sum_c P\left(a^1, b, c, d^1\right)}{\sum_a \sum_b \sum_c P\left(a, b, c, d^1\right)}$$

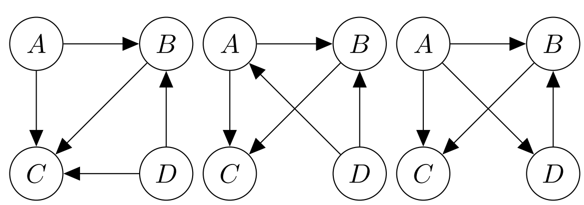
$$\begin{aligned}
P\left(a^1 \mid d^1\right) & =\frac{\sum_b \sum_c P\left(a^1\right) P\left(b \mid a^1\right) P(c \mid b) P\left(d^1 \mid c\right)}{\sum_a \sum_b \sum_c P(a) P(b \mid a) P(c \mid b) P\left(d^1 \mid c\right)} \\
& =\frac{P\left(a^1\right) \sum_b \sum_c P\left(b \mid a^1\right) P(c \mid b) P\left(d^1 \mid c\right)}{\sum_a \sum_b \sum_c P(a) P(b \mid a) P(c \mid b) P\left(d^1 \mid c\right)} \\
& =\frac{P\left(a^1\right) \sum_b P\left(b \mid a^1\right) \sum_c P(c \mid b) P\left(d^1 \mid c\right)}{\sum_a P(a) \sum_b P(b \mid a) \sum_c P(c \mid b) P\left(d^1 \mid c\right)}
\end{aligned}$$

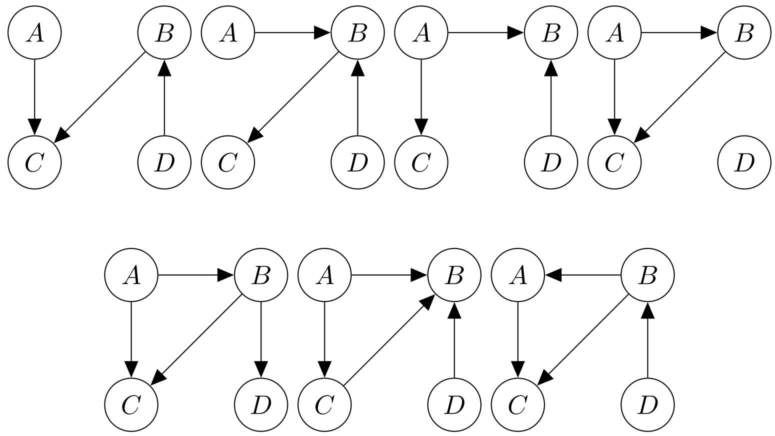
Problem 14

有多少个有向无环图是如下贝叶斯网络的邻居？试画出这些有向无环图。



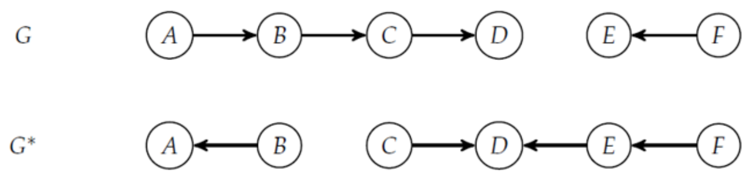
Solution





Problem 15

使用局部搜索算法，从贝叶斯网络G开始，最少需要多少次迭代可以收敛至最优贝叶斯网络G^*?



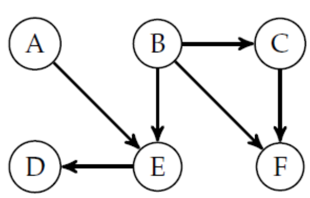
Solution

3

- 翻转$A \to B$
- 移除$B \to C$
- 增加$E \to D$

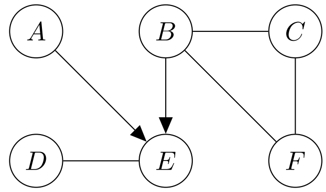
Problem 16

用一个部分有向无环图表示如下贝叶斯网络的马尔科夫等价类，并画出该马尔科夫等价类的所有成员.

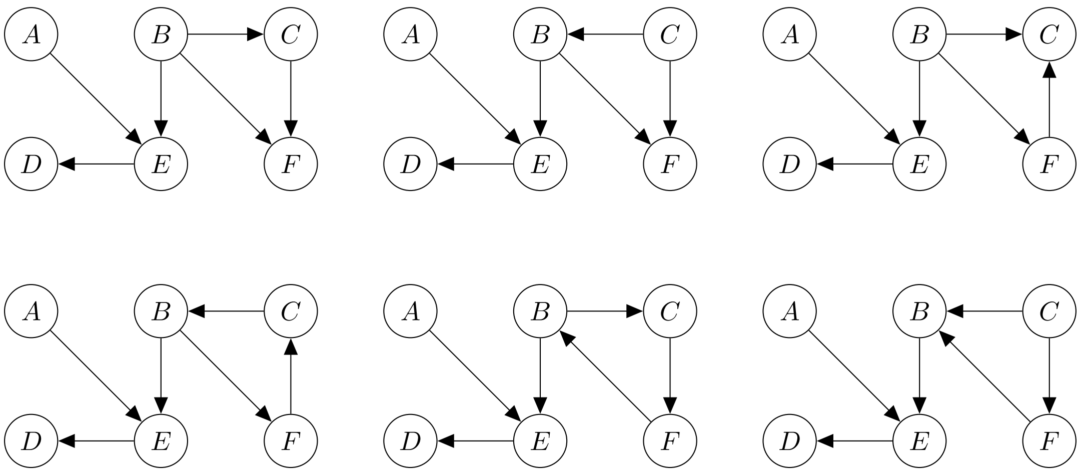


Solution

马尔可夫等价类



成员



Problem 17

假设$A \succeq C \succeq B$，每个结果的效用分别为$U(A) = 450$， $U(B) = -150$，$U(C) = 60$。试给出定义在A和B上的一次抽奖，使得它的效用与C的效用相同

Solution

$[A : 7/20; B : 13/20]$

Problem 18

考虑一位学生, 他可以选择买或不买某门课程的教材.我们将用决策问题来建模, 它有一个布尔决策结点B(指示该学生是否选择购买教材), 和两个布尔机会结点M(指示该学生是否掌握了教材的内容)和P(指示该学生是否通过了考试).当然, 还有一个效用结点U.某个学生Sam有一个加法效用函数:不购买教材是0, 购买是-\$100;通过考试是\$2000, 没有通过是0.Sam的条件概率估计如下:

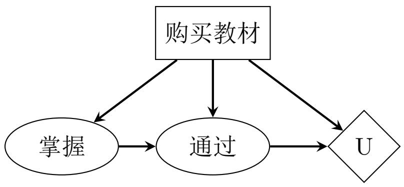
你也许认为给定M下P是独立于B的, 但这门课最后是开卷考试, 所以有教材可能是有帮助的.

1. 画出该问题的决策网络.
2. 计算出购买和不购买教材的期望效用.
3. Sam应该如何做?

Problem 18 continued on next page.

Solution

1. 决策网络如下



2.
购买和不购买教材通过考试的概率分别为:

$$\begin{aligned} P(p|b) &= \sum_m P(p|b,m)P(m|b) \\ &= 0.9 \times 0.9 + 0.5 \times 0.1 \\ &= 0.86 \\ P(p|\neg b) &= \sum_m P(p|\neg b,m)P(m|\neg b) \\ &= 0.8 \times 0.7 + 0.3 \times 0.3 \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

期望效用分别为:

$$\begin{aligned} \mathrm{EU}[b] &= \sum_p P(p|b)U(p,b) \\ &= 0.86 \times (2000 - 100) + 0.14 \times (-100) \\ &= 1620 \\ \mathrm{EU}[\neg b] &= \sum_p P(p|\neg b)U(p,\neg b) \\ &= 0.65 \times (2000 - 100) + 0.14 \times 0 \\ &= 1300 \end{aligned}$$

3. Sam应该买教材

Problem 19

1. 解释信息价值.如果一个观察不改变最优行动, 它的信息价值是多少?
2. 证明信息的期望价值是非负的
   $\mathrm{VOI}(O_j|\mathbf{O}) \geq 0, \forall \mathbf{O}, O_j$

Solution

1. 一个观察的信息价值指利用这个观察做出一个更优的决策后获得的期望价值增益.

2. $\mathrm{VOI}(O_j|\mathbf{O}) = \left(\sum_k \mathrm{P}\left(O_j = o_{jk}|E\right) \mathrm{EU}\left(\alpha_{o_{jk}}|\mathbf{O}, O_j = o_{jk}\right)\right) - \mathrm{EU}(\alpha|\mathbf{O})$

因为

- $\mathrm{EU}(\alpha|O) = \sum_k P\left(O_j = o_{jk}|\mathbf{O}\right) \mathrm{EU}\left(\alpha|\mathbf{O}, O_j = o_{jk}\right)$

- $\mathrm{EU}\left(\alpha_{o_{jk}}|\mathbf{O}, O_j = o_{jk}\right) \geq \mathrm{EU}\left(\alpha|\mathbf{O}, O_j = o_{jk}\right)$

因此$\mathrm{VOI}(O_j|\mathbf{O}) \geq 0, \forall \mathbf{O}, O_j$

Problem 20

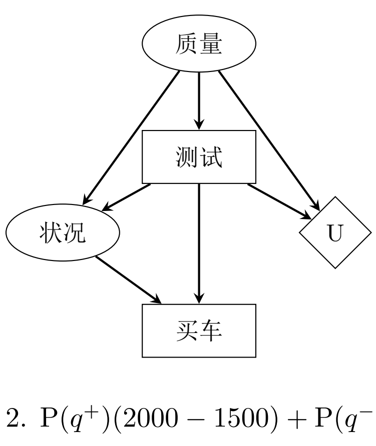
一个旧车购买者可以决定进行不同费用的各种测试(例如, 踢轮胎, 将车送到合格的汽车机械师处检查), 然后, 取决于这些测试的结果, 决定购买哪辆车. 我们将假设购车者正在考虑是否购买车c_1, 只有进行至多一次测试的时间; t_1是对c_1的测试, 费用\$50.
一辆车可以状况很好(质量为q^+)或者状况很差(质量为q^-), 测试可能帮助指示该车所处的状况. 购买车c_1的费用为\$1500, 如果它状况很好则它的市场价为\$2000; 如果状况不好, 需要花\$700来维修使它的状况变好. 购车者的估计是, 有70%的几率c_1状况很好.

1. 画出表示这个问题的决策网络.
2. 不进行测试, 计算购买c_1的期望净获利.
3. 给定车处于很好或者很差的状况, 测试可以根据车通过还是不通过该测试的概率进行描述. 我们有下列信息: $\mathrm{P}(\mathrm{pass}(c_1, t_1)|q^+(c_1)) = 0.8, \mathrm{P}(\mathrm{pass}(c_1, t_1)|q^-(c_1)) = 0.35$

   计算车通过(或者通不过)测试的概率, 并使用贝叶斯规则计算出在给定每个可能的测试结果的条件下, 车处于好(或者不好)的状况的概率.
4. 给定通过或者通不过测试，分别计算买车和不买车的期望效用，并用最大化期望效用原则分析出每种测试结果对应的最优行动。
5. 计算测试的信息价值, 并且为购车者产生一个最优条件规划.

Solution

1. 决策网络如下



2. $\mathrm{P}(q^+)(2000-1500) + \mathrm{P}(q^-)(2000-2200) = 0.7 \times 500 - 0.3 \times 200 = 290$

3. $\mathrm{P}(\mathrm{pass}) = \mathrm{P}(\mathrm{pass}|q^+)\mathrm{P}(q^+) + \mathrm{P}(\mathrm{pass}|q^-)\mathrm{P}(q^-) = 0.8 \times 0.7 + 0.35 \times 0.3 = 0.665$

根据贝叶斯公式

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{q}^{+}|\mathrm{pass}\right)=\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{pass}|\mathrm{q}^{+}\right)\mathrm{P}\left(\mathrm{q}^{+}\right)}{\mathrm{P}(\mathrm{pass})}=\frac{0.8\times0.9}{0.665}\approx0.8421$$
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{q}^{-}|\mathrm{pass}\right)\approx1-0.8421=0.1579$$
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{q}^{+}|\neg\mathrm{pass}\right)=\frac{\mathrm{P}\left(\neg\mathrm{pass}|\mathrm{q}^{+}\right)\mathrm{P}\left(\mathrm{q}^{+}\right)}{\mathrm{P}(\neg\mathrm{pass})}=\frac{0.2\times0.7}{0.335}\approx0.4179$$
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{q}^{-}|\neg\mathrm{pass}\right)\approx1-0.4179=0.5821$$

4.

- 通过测试时, 期望效用为

  $\mathrm{P}\left(\mathrm{q}^{+}|\mathrm{pass}\ \right)(2000-1500)+\mathrm{P}\left(\mathrm{q}^{-}|\mathrm{pass}\ \right)(2000-2200)$
  $=0.8421\times500+0.1579\times-200=378.92$

  最优决策为买车

- 未过测试时, 期望效用为

  $P\left(q^{+}|\neg\mathrm{pass}\right)(2000-1500)+P\left(q^{-}|\neg\mathrm{pass}\right)(2000-2200)$
  $=0.4179\times500-0.5821\times200=92.53$

  最优决策为买车

5. 无论测试的结果如何, 最优的决策都是买车, 因此测试的信息价值为0. 最优条件规划是不进行测试, 直接买车.

Problem 21

对囚徒困境做如下修改:如果A揭发B, B保持沉默, 则A被释放, B判4年
修改后的博弈还有占优策略均衡吗?还有哪些纳什均衡?

Solution

没有占优策略均衡了, 但还有其它2个纳什均衡, 分别为(沉默, 揭发)和(揭发, 沉默).