

Biltré

Bergur Snorrason

14. febrúar 2022

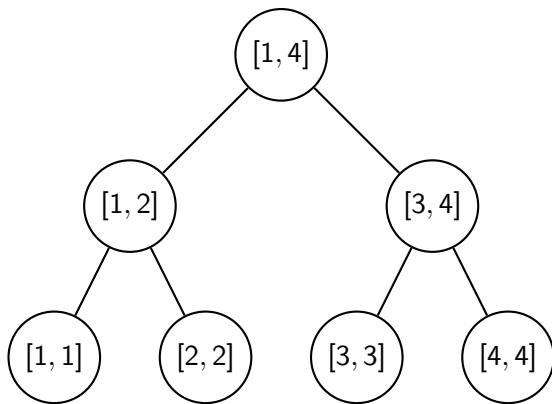
Dæmi

- ▶ Gefinn er listi með n tölum.
- ▶ Næst koma q fyrirspurnir, þar sem hver er af einni af tveimur gerðum:
 - ▶ Bættu k við i -tu töluna.
 - ▶ Reiknaðu summu allra talna á bilinu $[i, j]$.
- ▶ Einföld útfærsla á þessum fyrirspurnum gefur okkur $\mathcal{O}(1)$ fyrir þá fyrri og $\mathcal{O}(n)$ fyrir þá seinni.
- ▶ Þar sem allar (eða langflestar) fyrirspurnir gætu verið af seinni gerðin yrði lausnin í heildina $\mathcal{O}(qn)$.
- ▶ Það er þó hægt að leysa þetta dæmi hraðar.
- ▶ Algengt er að nota til þess *biltré* (e. *segment tree*).

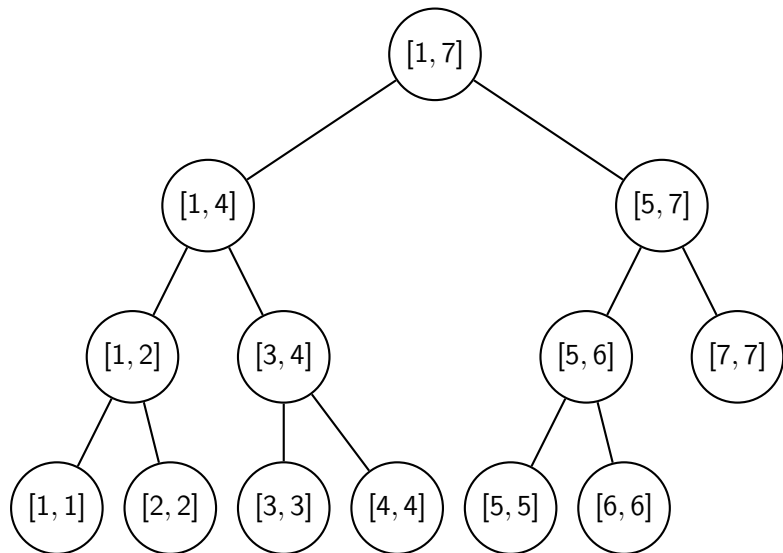
Biltré

- ▶ Biltré er tvíundartré sem geymir svör við vissum fyrirspurnum af seinni gerðinni.
- ▶ Rótin geymir svar við fyrirspurninni 1 n og ef hnútur geymir svarið við i j þá geyma börn hans svör við i m og $(m + 1)$ j , þar sem m er miðja heiltölubilsins $[i, j]$.
- ▶ Þeir hnútar sem geyma svar við fyrirspurnum af gerðinni i i eru lauf trésins.
- ▶ Takið eftir að lafin geyma þá gildin í listanum og aðrir hnútar geyma summu barna sinna.
- ▶ Þegar við útfærum tréð geymum við það eins og hrúgu.

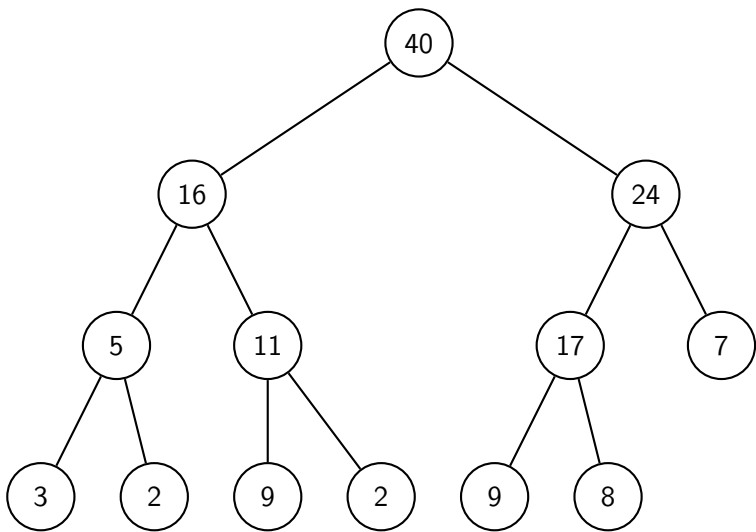
Mynd af biltré, $n = 4$



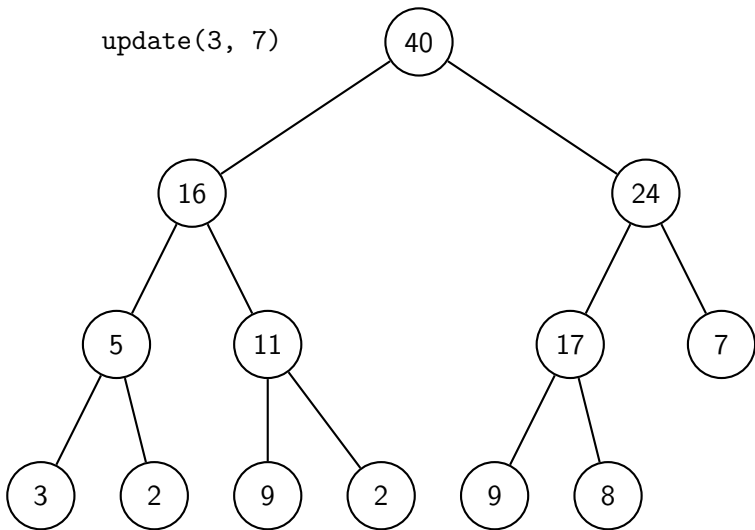
Mynd af biltré, $n = 7$



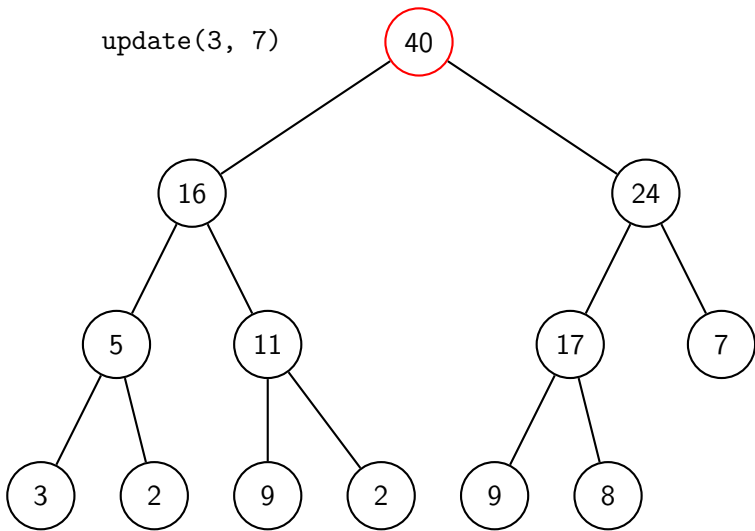
- ▶ Gerum ráð fyrir að við höfum biltré eins og lýst er að ofan og látum H tákna hæð trésins.
- ▶ Hvernig getum við leyst fyrirspurnirnar á glærunni á undan, og hver er tímaflækjan?
- ▶ Fyrri fyrirspurnin er einföld.
- ▶ Ef við eigum að bæta k við i -ta stakið finnum við fyrst lafið sem svarar til fyrirspurnar i i , bætum k við gildið þar og förum svo upp í rót í gegnum foreldrin og uppfærum á leiðinni gildin í þeim hnútum sem við lendum í.
- ▶ Þar sem við heimsækjum bara þá hnúta sem eru á veginum frá rót til laufs (mest H hnútar) er tímaflækjan á fyrri fyrirspurninni $\mathcal{O}(H)$.



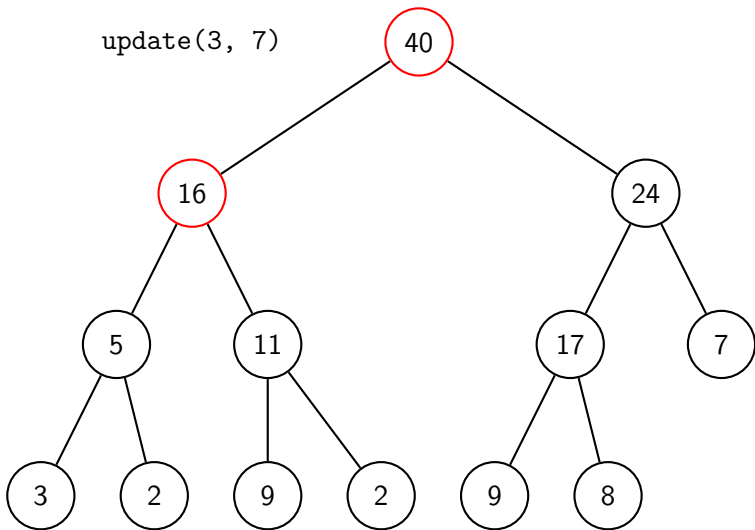
update(3, 7)



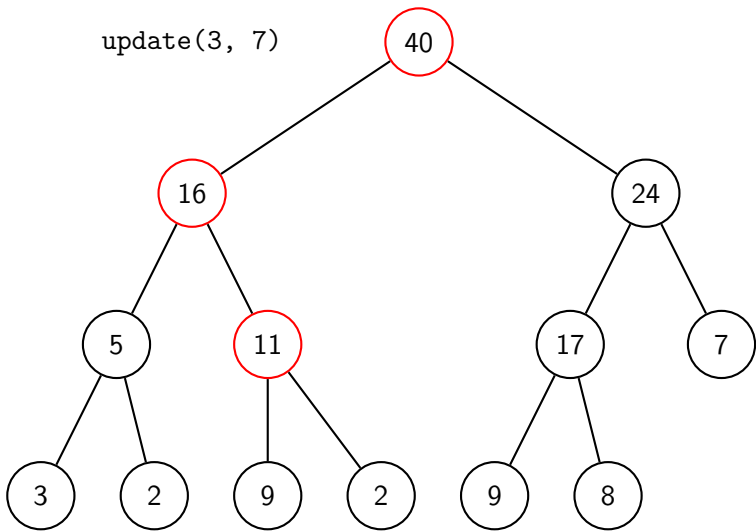
update(3, 7)



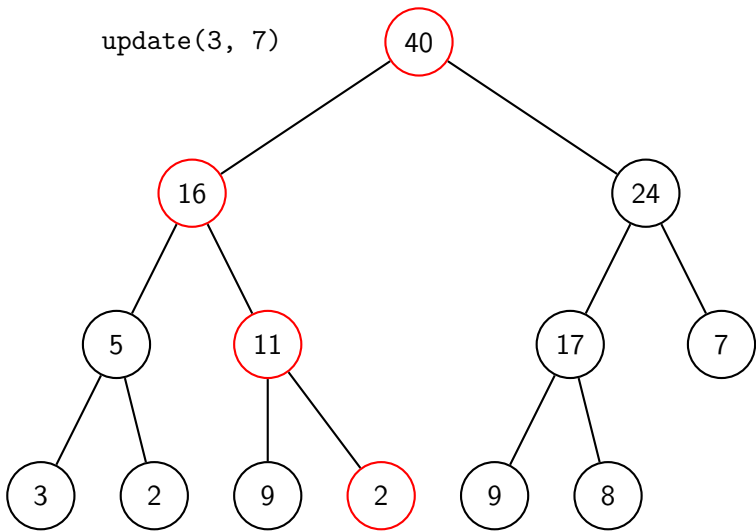
update(3, 7)



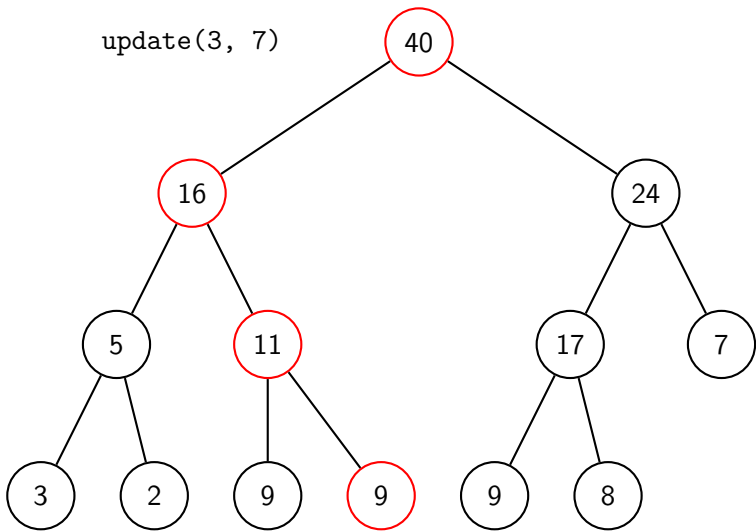
update(3, 7)



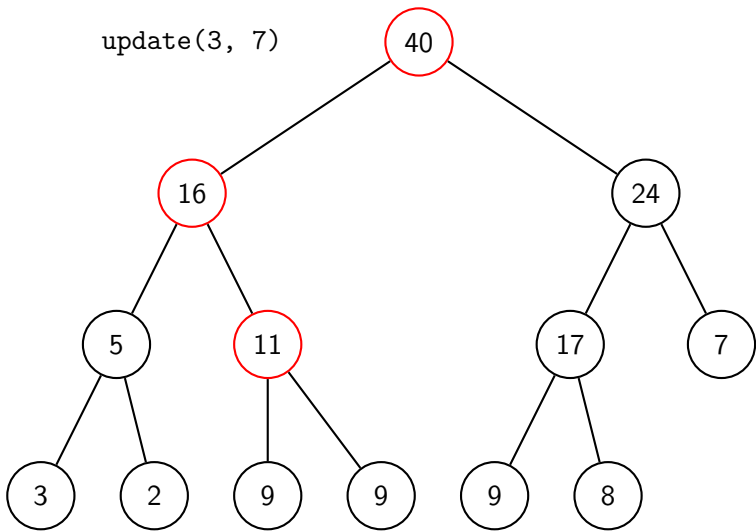
update(3, 7)



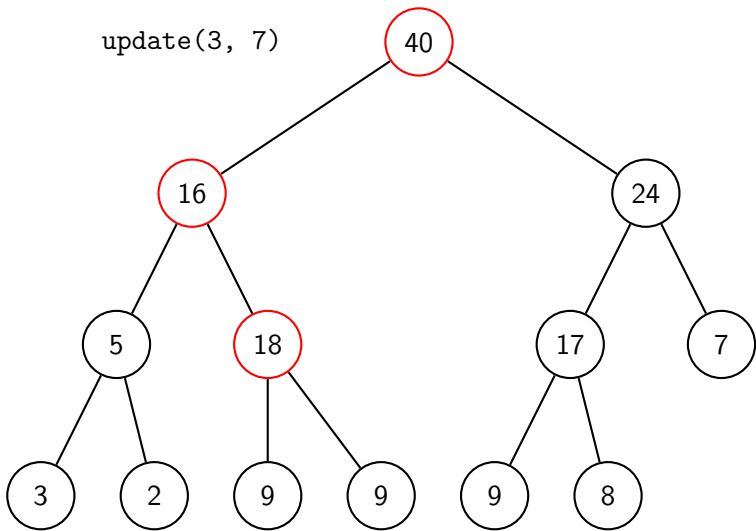
update(3, 7)



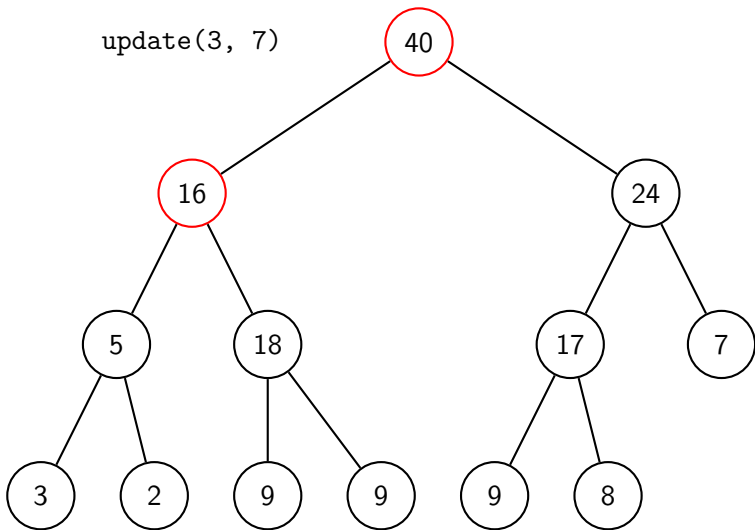
update(3, 7)



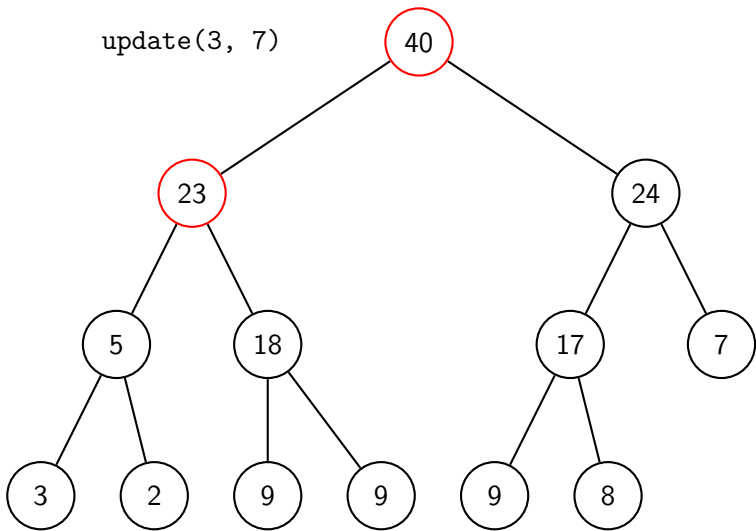
update(3, 7)



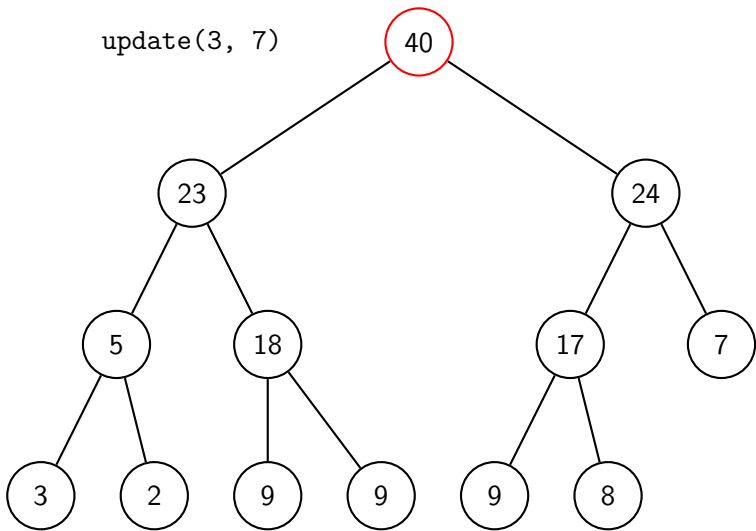
update(3, 7)



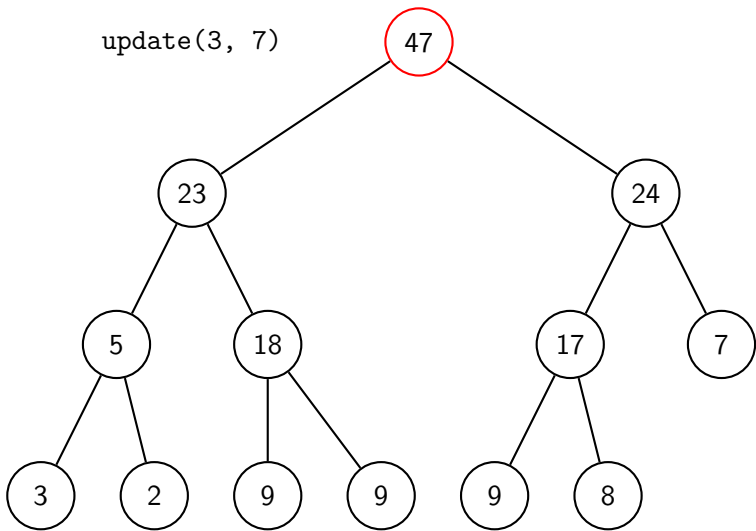
update(3, 7)



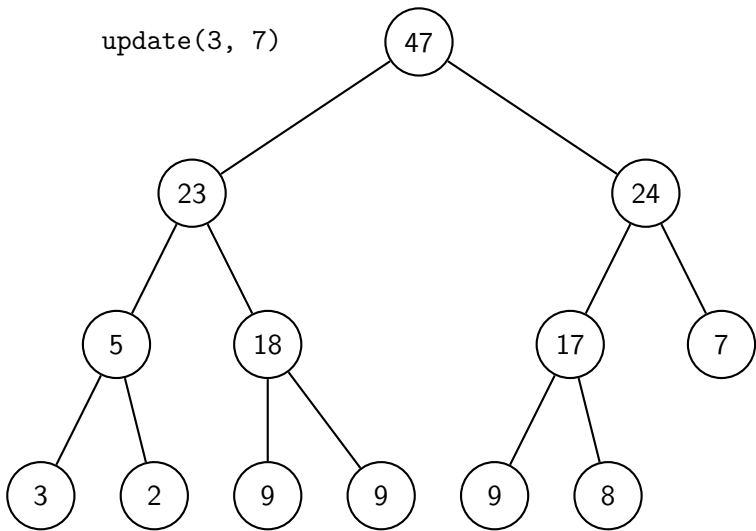
update(3, 7)



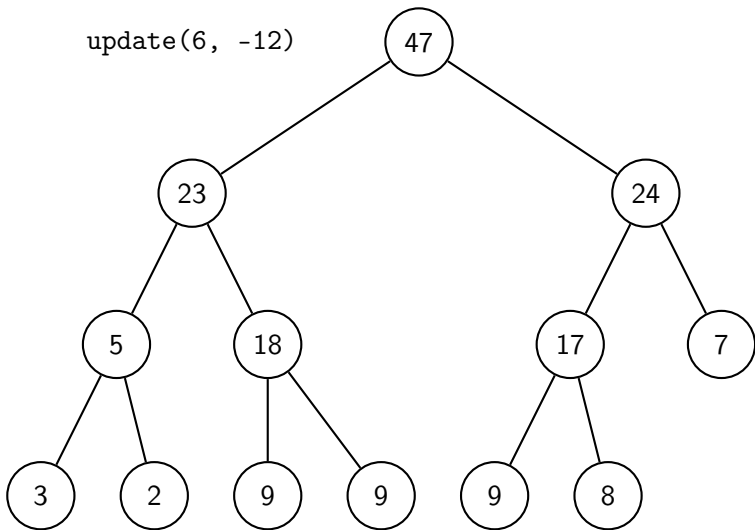
update(3, 7)



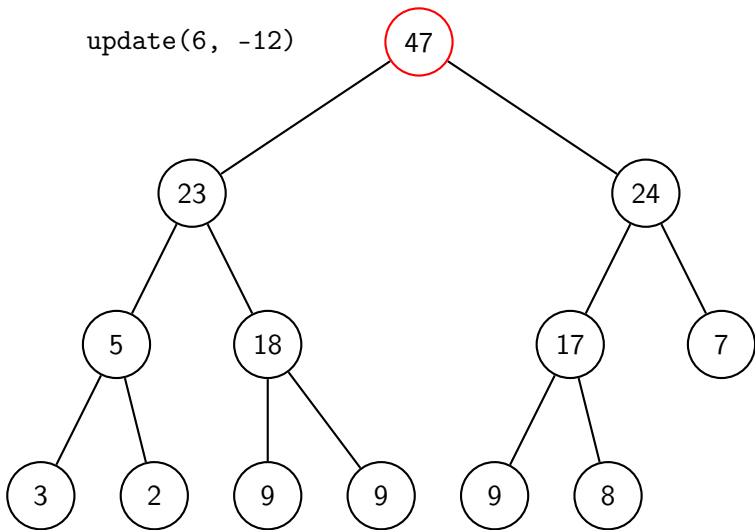
update(3, 7)



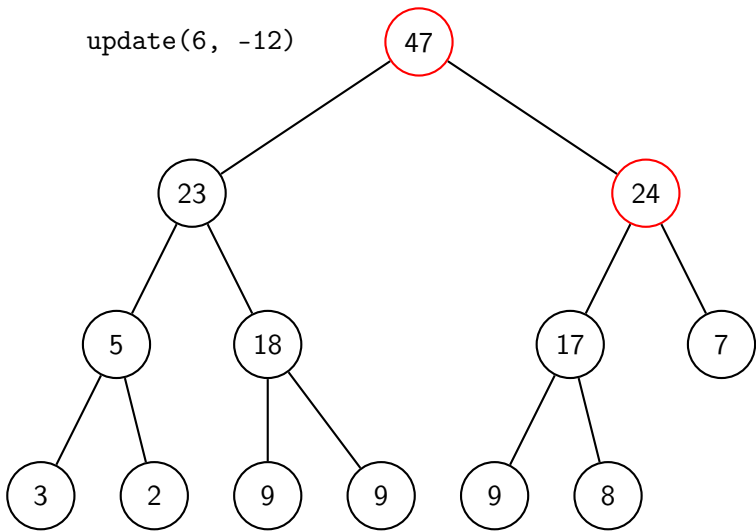
update(6, -12)



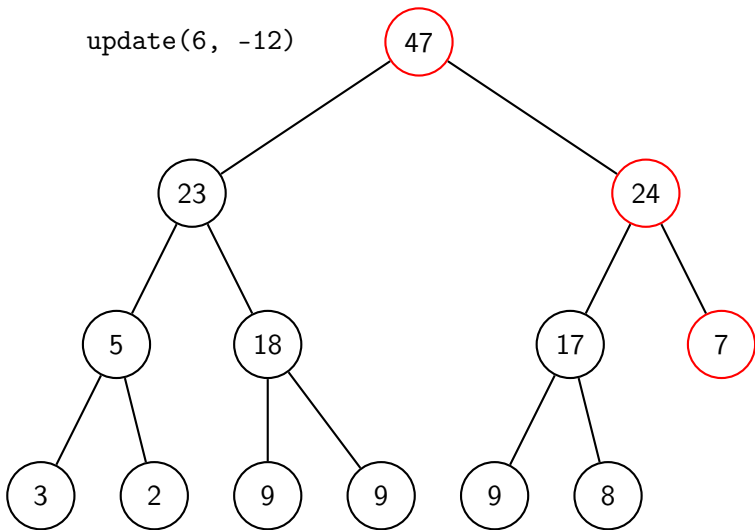
update(6, -12)



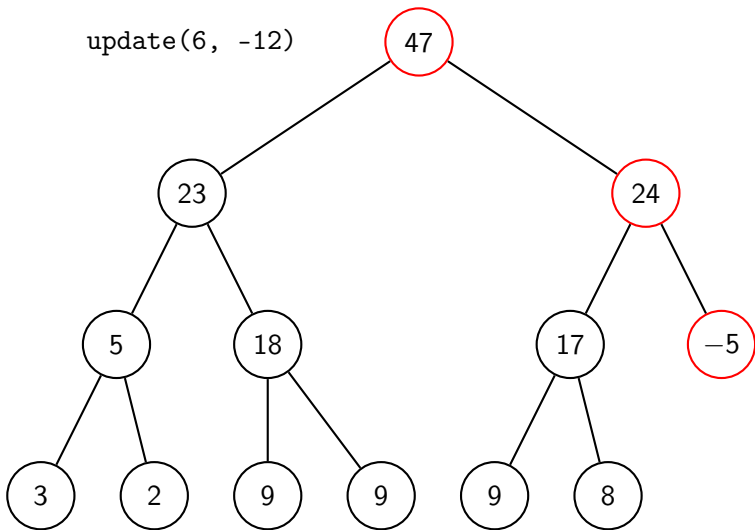
update(6, -12)



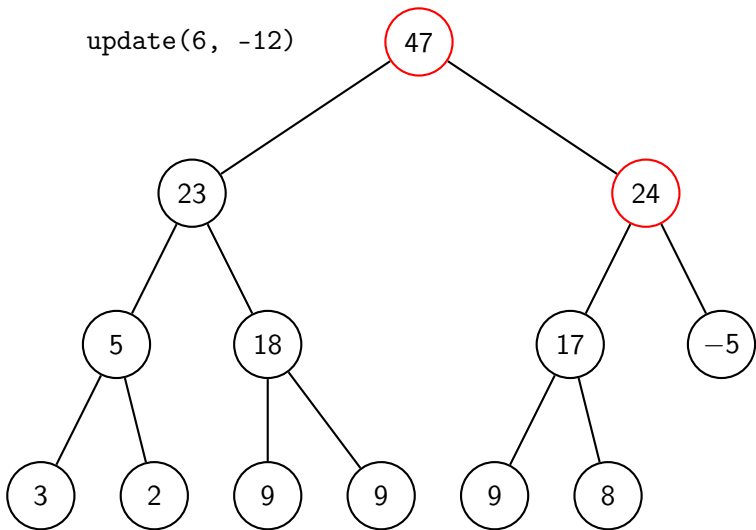
update(6, -12)



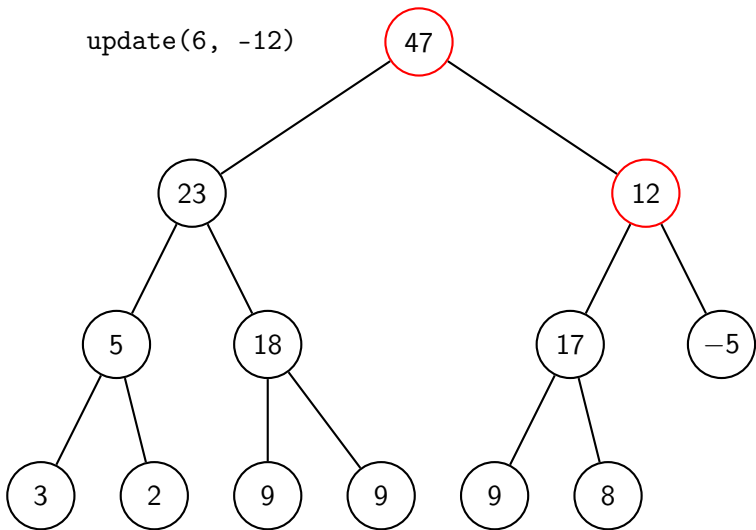
update(6, -12)



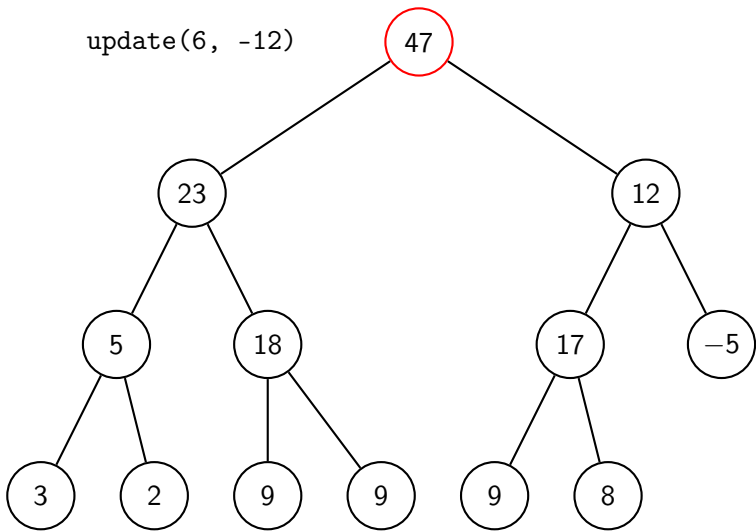
update(6, -12)



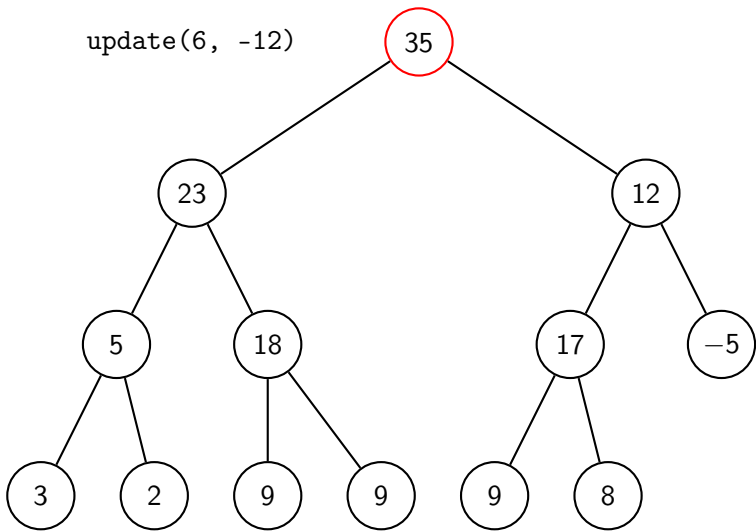
update(6, -12)



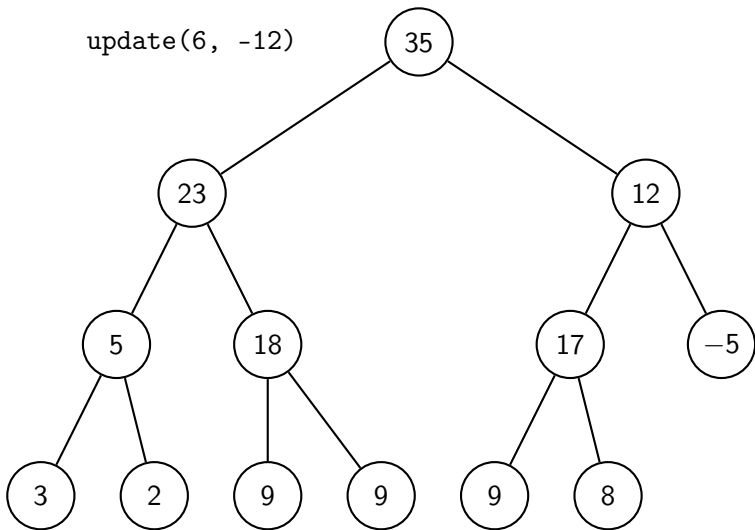
update(6, -12)

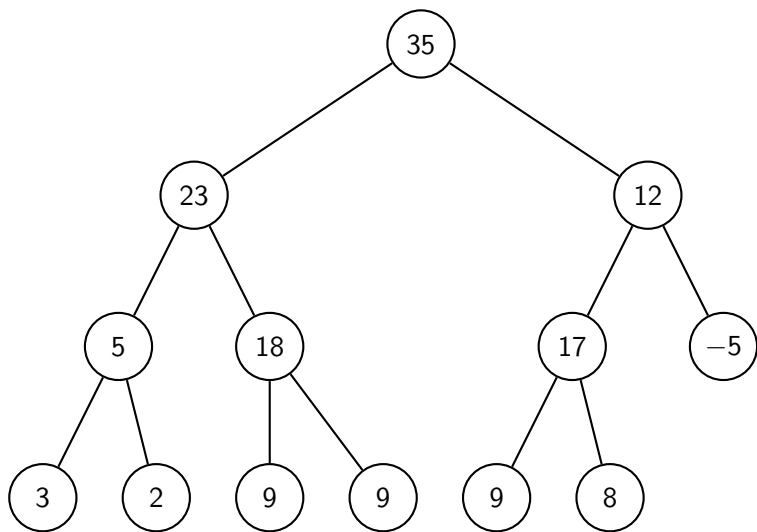


update(6, -12)



update(6, -12)



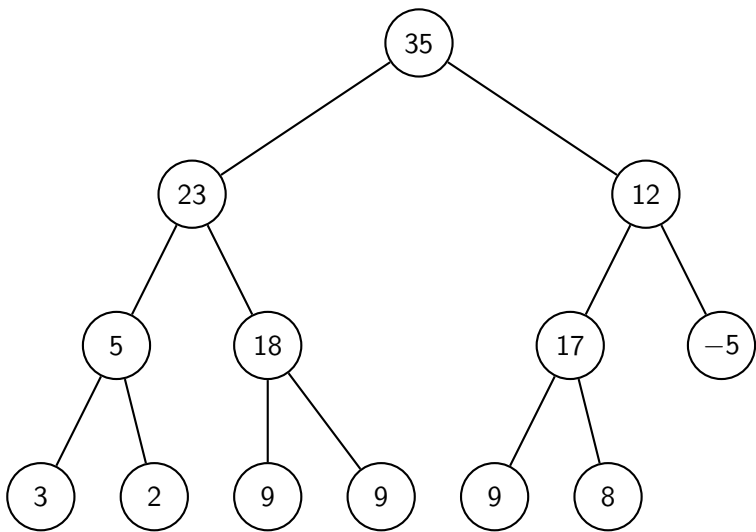


```

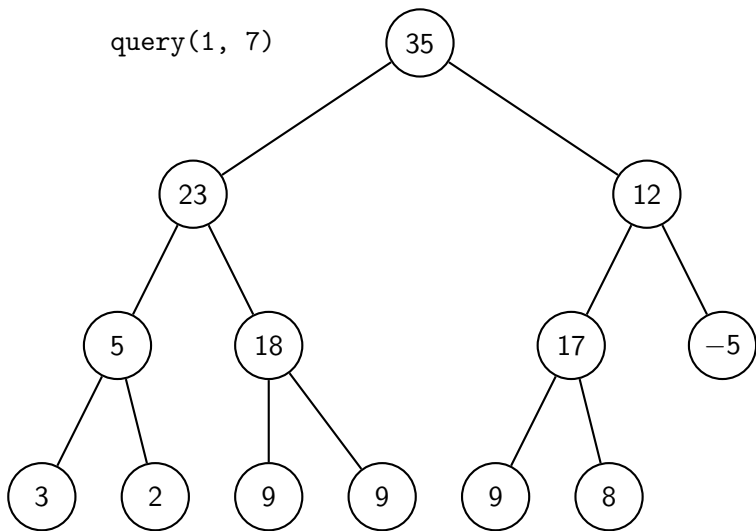
23 void urec(int i, int j, int x, int y, int e) // Hjálparfall.
24 { // Við erum að leita að laufinu [x, x] og erum í [i, j].
25     if (i == j) p[e] += y;
26     else
27     {
28         int m = (i + j)/2;
29         if (x <= m) urec(i, m, x, y, LEFT(e));
30         else urec(m + 1, j, x, y, RIGHT(e));
31         p[e] = p[LEFT(e)] + p[RIGHT(e)];
32     }
33 }
34 void update(int x, int y)
35 { // Bætum y við x-ta stakið.
36     return urec(0, n - 1, x, y, 1);
37 }

```

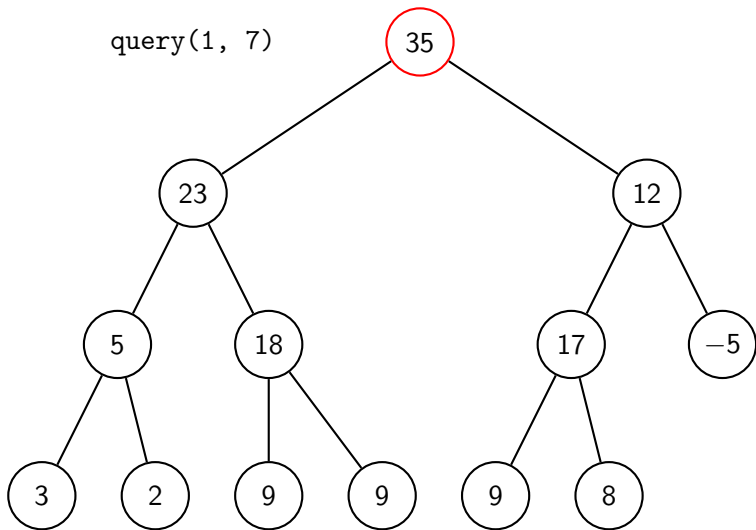

- ▶ Seinni fyrirspurnin er ögn flóknari.
- ▶ Auðveldast er að ímynda sér að við förum niður tréð og leitum að hvorum endapunktinum fyrir sig.
- ▶ Á leiðinni upp getum við svo pússlað saman svarinu, eftir því hvort við erum að skoða hægri eða vinstri endapunktinn.
- ▶ Til dæmis, ef við erum að leita að hægri endapunkti x og komum upp í bil $[i, j]$ þá bætum við gildinu í hnút $[i, m]$ við það sem við höfum reiknað hingað til ef $x \in [m + 1, j]$, en annars bætum við engu við (því x er hægri endapunkturinn).
- ▶ Við göngum svona upp þar til við lendum í bili sem inniheldur hinn endapunktinn.
- ▶ Með sömu rökum og áðan er tímaflækjan $\mathcal{O}(H)$.



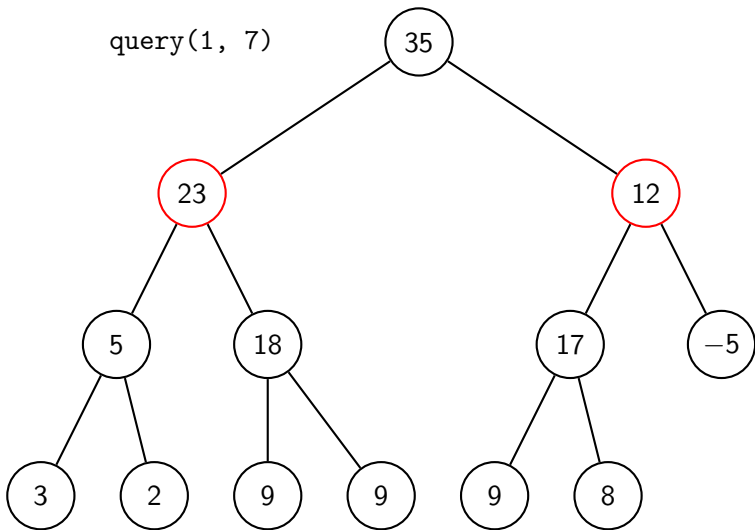
query(1, 7)



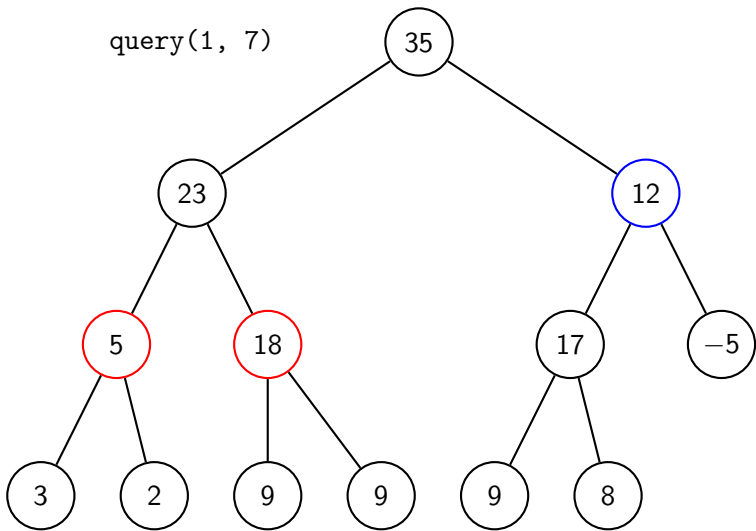
query(1, 7)



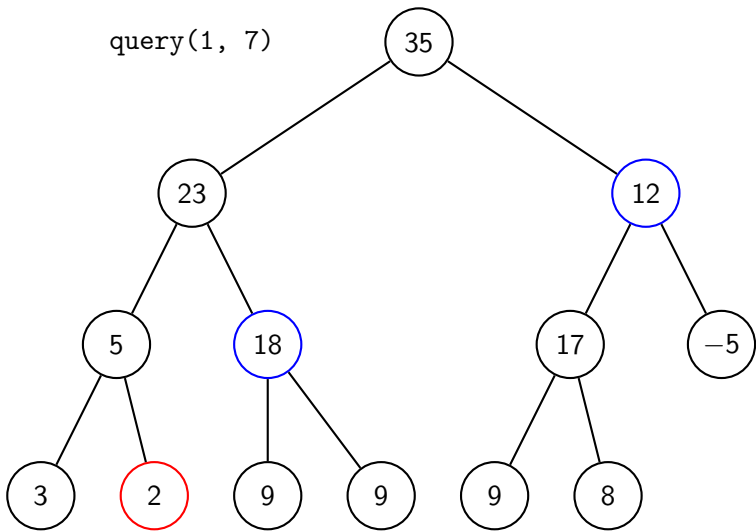
query(1, 7)



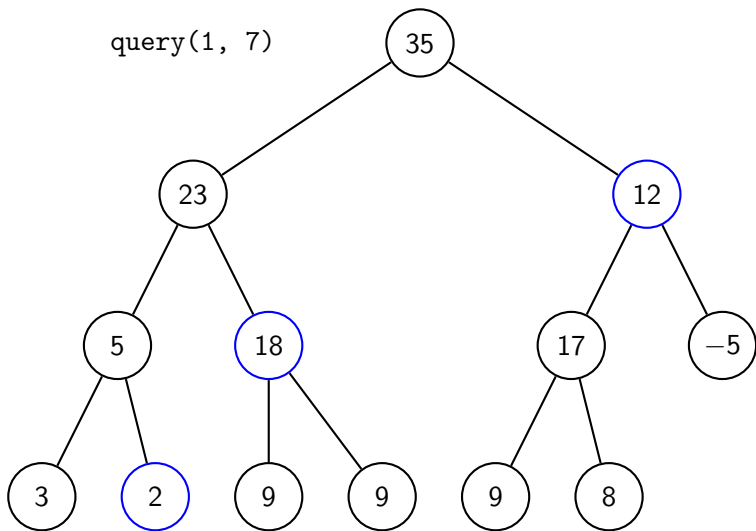
query(1, 7)



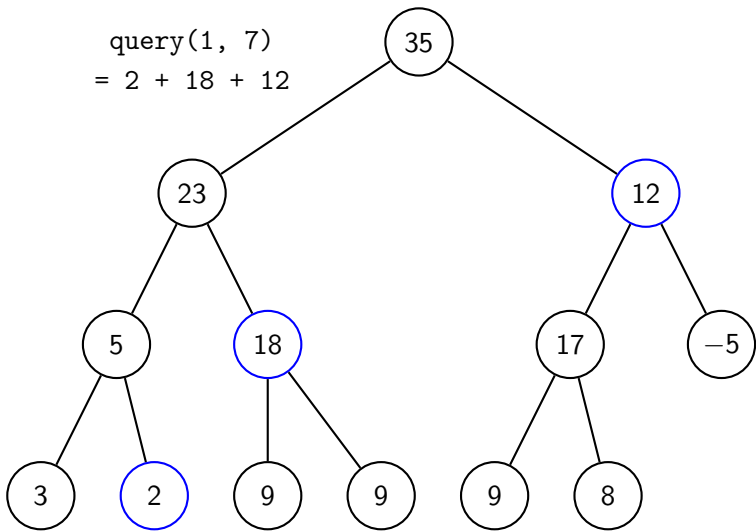
query(1, 7)



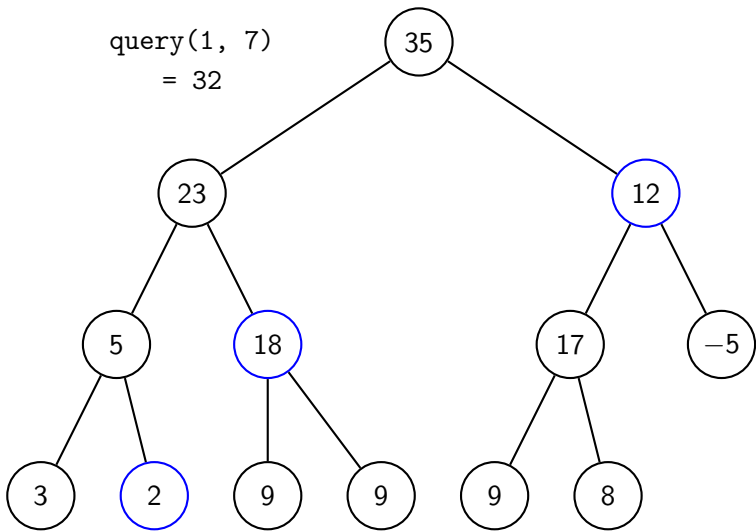
query(1, 7)



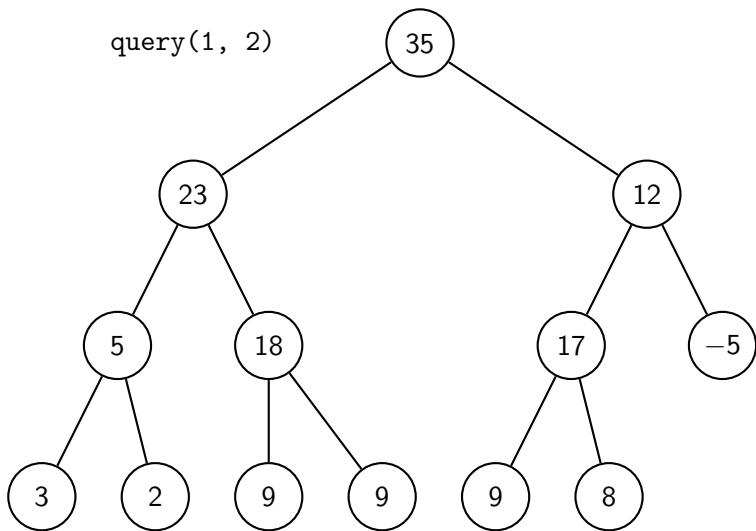
query(1, 7)
= 2 + 18 + 12



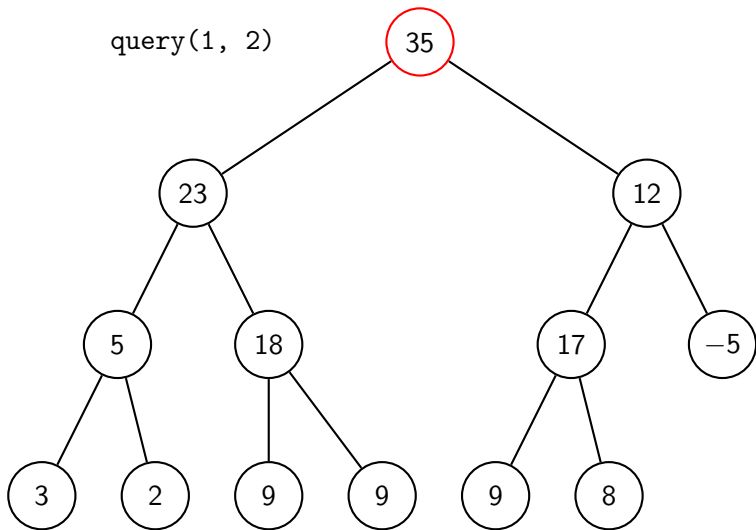
query(1, 7)
= 32



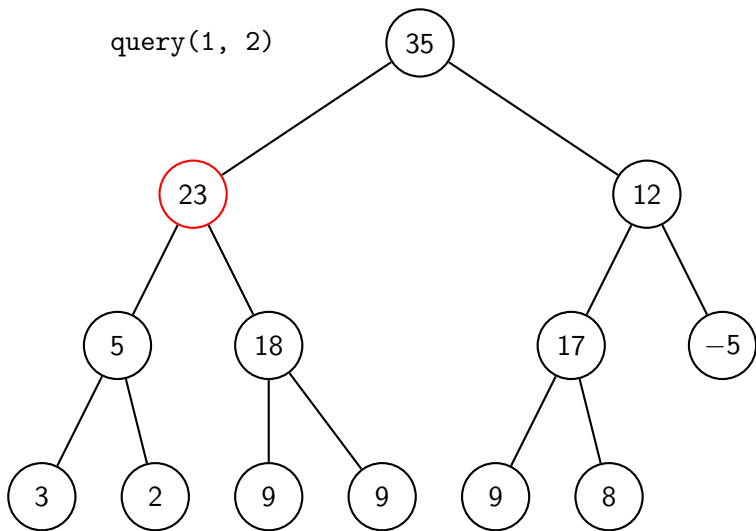
query(1, 2)



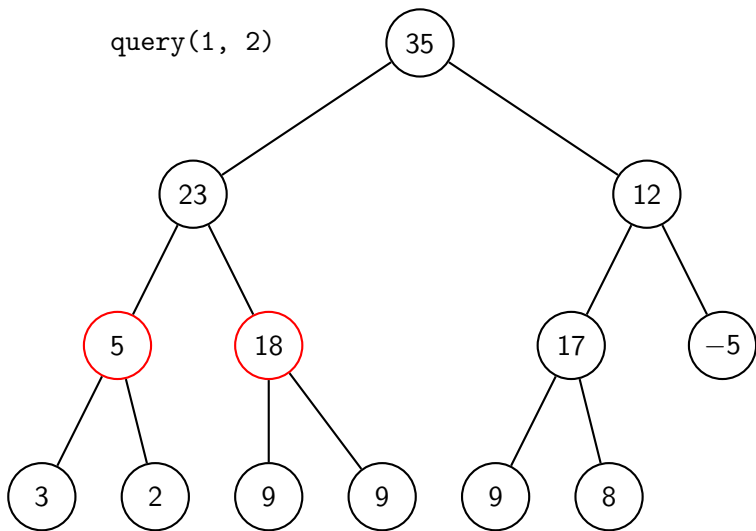
query(1, 2)



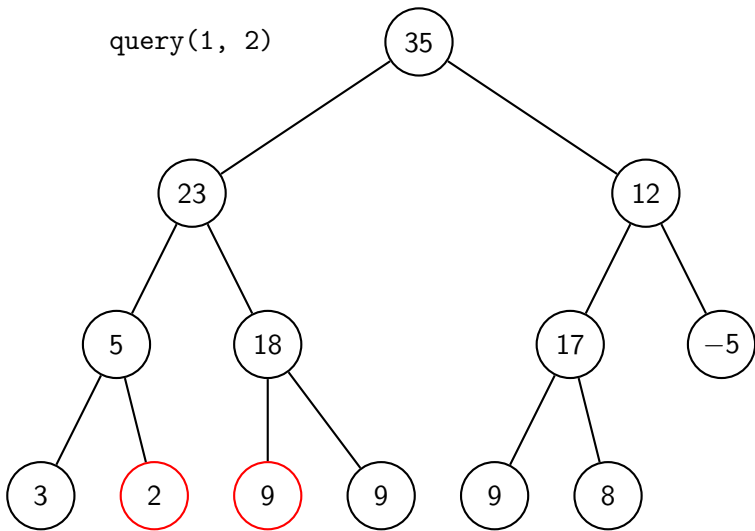
query(1, 2)



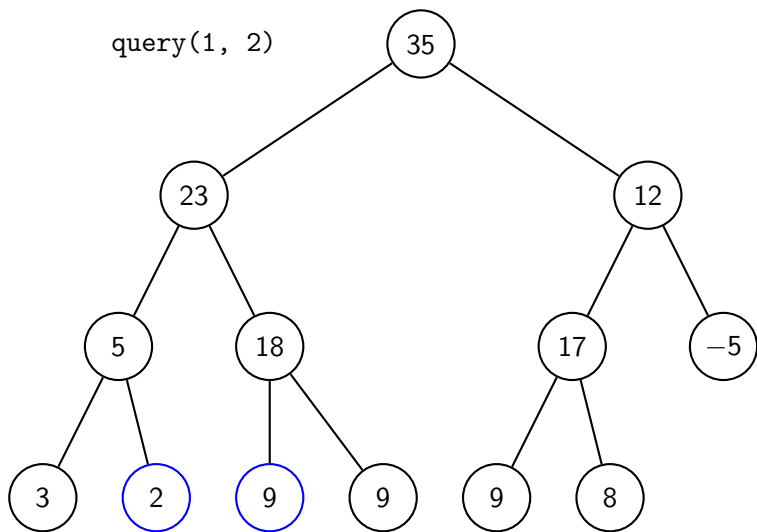
query(1, 2)



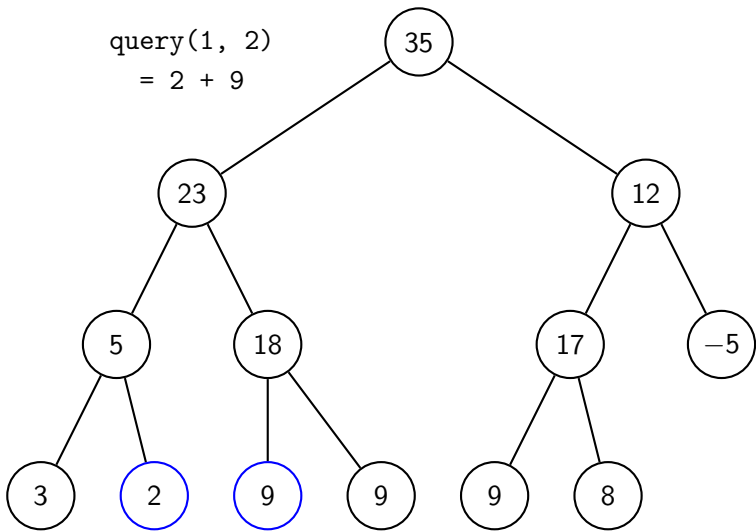
query(1, 2)



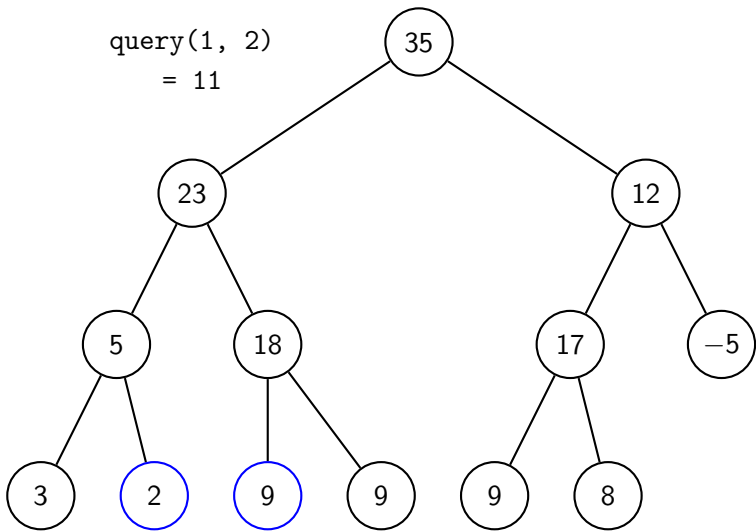
query(1, 2)

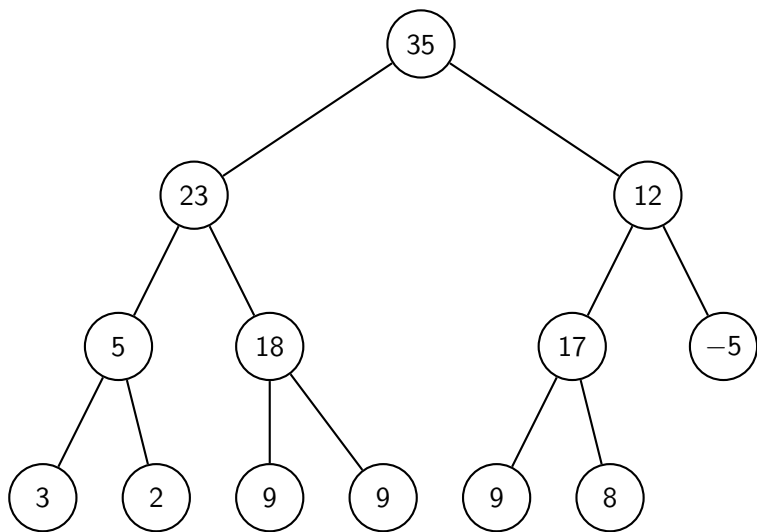


query(1, 2)
= 2 + 9



query(1, 2)
= 11





Biltré í C

```
10 int qrec(int i, int j, int x, int y, int e) // Hjálparfall.
11 { // Við erum að leita að bili [x, y] og erum í [i, j].
12     if (x == i && y == j) return p[e];
13     int m = (i + j)/2;
14     if (y <= m) return qrec(i, m, x, y, LEFT(e));
15     if (x > m) return qrec(m + 1, j, x, y, RIGHT(e));
16     return qrec(i, m, x, m, LEFT(e)) + qrec(m + 1, j, m + 1, y, RIGHT(e));
17 }
18 int query(int x, int y)
19 { // Finnum summuna yfir [x, y].
20     return qrec(0, n - 1, x, y, 1);
21 }
```

Tímaflækja biltrjáa

- ▶ Þar sem lengd hvers bils sem hnútur svarar til helmingast þegar farið er niður tréð er $\mathcal{O}(H) = \mathcal{O}(\log n)$.
- ▶ Við erum því komin með lausn á upprunalega dæminu sem er $\mathcal{O}(q \cdot \log n)$.
- ▶ Þetta væri nógu hratt ef, til dæmis, $n = q = 10^6$.
- ▶ Tökum annað dæmi.

Annað dæmi

- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur tvær jákvæðar heiltölur, n og m , minni en 10^5 .
- ▶ Næsta lína inniheldur n heiltölur, á milli -10^9 og 10^9 .
- ▶ Næstu m línur innihalda fyrirspurnir, af tveimur gerðum.
- ▶ Fyrri gerðin hefst á 1 og inniheldur svo tvær tölur, x og y . Hér á að setja x -tu töluna sem y .
- ▶ Seinni gerðin hefst á 2 og inniheldur svo tvær tölur, x og y . Hér á að prenta út stærstu töluna á hlutbilinu $[x, y]$ í talnalistanum.
- ▶ Hvernig leysum við þetta?

- ▶ Við getum leyst þetta með biltrjám.
- ▶ Í stað þess að láta hnúta (sem eru ekki lauf) geyma summu barna sinna, þá geyma þær stærra stak barna sinna.

Lausn

```
11 int qrec(int i, int j, int x, int y, int e) // Hjálparfall.
12 { // Við erum að leita að bili [x, y] og erum í [i, j].
13     if (x == i && y == j) return p[e];
14     int m = (i + j)/2;
15     if (x <= m && y <= m) return qrec(i, m, x, y, LEFT(e));
16     if (x > m && y > m) return qrec(m + 1, j, x, y, RIGHT(e));
17     return max(qrec(i, m, x, m, LEFT(e)), qrec(m + 1, j, m + 1, y, RIGHT(e)));
18 }
19 int query(int x, int y)
20 { // Finnum stærsta gildið á [x, y].
21     return qrec(0, n - 1, x, y, 1);
22 }
23
24 void urec(int i, int j, int x, int y, int e) // Hjálparfall.
25 { // Við erum að leita að laufinu [x, x] og erum í [i, j].
26     if (i == j) p[e] = y;
27     else
28     {
29         int m = (i + j)/2;
30         if (x <= m) urec(i, m, x, y, LEFT(e));
31         else urec(m + 1, j, x, y, RIGHT(e));
32         p[e] = max(p[LEFT(e)], p[RIGHT(e)]);
33     }
34 }
35 void update(int x, int y)
36 { // Látum x-ta stakið vera y.
37     return urec(0, n - 1, x, y, 1);
38 }
```


- ▶ Leysa má ýmis dæmi af þessari gerð, með biltrjám.
- ▶ Þessi dæmi eru yfirleitt kölluð *punkt-uppfærslur*, *bil-fyrirspurnir* (e. *point-update*, *range-query*).
- ▶ Algengt er að sýna næst hvernig nota megi biltré til að leysa *bil-uppfærslur*, *punkt-fyrirspurnir* (e. *range-update*, *point-query*).
- ▶ Þetta er, í grófum dráttum, gert með því að snúa trjánnum við.
- ▶ Við munum ekki skoða þetta.
- ▶ Við tökum frekar fyrir *lygn biltré*.
- ▶ Þau leyfa okkur að leysa *bil-uppfærslur*, *bil-fyrirspurnir* (e. *range-update*, *range-query*).

Lygn dreifing

- ▶ Sem beinagrind munum við nota biltrjáa útfærsluna sem við notuðum til að leysa fyrsta dæmið.
- ▶ Við munum nú láta fyrri fyrirspurnina, i j k , þýða “Bættu k við allar tölur á bilinu $[i, j]$ ”.
- ▶ Uppfærslan er framkvæmd á svipaðan hátt og fyrirspurnirnar eru.
- ▶ Við geymum í öðrum tréi þær uppfærslur sem við eigum eftir að framkvæma.
- ▶ Í hverri endurkvæmni (bæði uppfærslum og fyrirspurnum) dreifum við uppfærslunum í hnútnum niður á við.
- ▶ Þetta kallast *lygn dreifing* (e. *lazy propagation*), því við framkvæmum hana bara þegar nauðsyn krefur.
- ▶ Ef biltré hefur lygna dreifingu köllum við það *lygnt biltré* (e. *segment tree with lazy propagation*).

- ▶ Látum $i < j$ vera heiltölur þannig að bilið $[i, j]$ svara til hnúts í biltréi og m vera miðpunkt heiltölu bilsins $[i, j]$.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við eigum eftir að framkvæma uppfærslu í j k .
- ▶ Næst þegar við köllum á `query_rec(i, j, ...)` eða `update_rec(i, j, ...)` þá munum við dreifa uppfærslunni í j k .
- ▶ Eftir dreifinguna munum við ekki eiga eftir uppfærslu á bilinu $[i, j]$, en við munum eiga eftir uppfærslurnar í m k og $(m + 1)$ j k .
- ▶ Þegar við dreifum uppfærslunni í i k þá nægir að uppfæra tilheyrandi lauf í biltrénu.

- ▶ Áðan var sagt “laufin geyma þá gildin í listanum og aðrir hnútar geyma summu barna sinna”.
- ▶ Þetta gildir ekki fyrir lygn biltré.
- ▶ Hnútar lygna biltrjáa þurfa að geyma summu barna sinna, ásamt því að geyma þá summu sem fengist eftir allar óframkvæmdar uppfærslur afkomenda hans.
- ▶ Þegar við ferðumst í gegnum tréð til að finna hvert við eigum að setja uppfærsluna uppfærum við tréð jafn óðum.
- ▶ Til dæmis, ef við viljum framkvæma uppfærsluna í j k þá þurfum við að bæta $k \cdot (j - i + 1)$ við rót biltrésins, því rótin geymir summu allra stakana.

```

10 void prop(int x, int y, int e) //Hjálpfall
11 { // Fall sem dreifir lygnum uppfærslum niður um eina hæð.
12     p[e] += (y - x + 1)*o[e];
13     if (x != y) o[LEFT(e)] += o[e], o[RIGHT(e)] += o[e];
14     o[e] = 0;
15 }
16
17 int qrec(int i, int j, int x, int y, int e) // Hjálpfall
18 { // Við erum að leita að bili [x, y] og erum í [i, j].
19     prop(i, j, e);
20     if (x == i && y == j) return p[e];
21     int m = (i + j)/2;
22     if (y <= m) return qrec(i, m, x, y, LEFT(e));
23     else if (x > m) return qrec(m + 1, j, x, y, RIGHT(e));
24     return qrec(i, m, x, m, LEFT(e)) + qrec(m + 1, j, m + 1, y, RIGHT(e));
25 }
26 int query(int x, int y)
27 { // Finnum summuna yfir [x, y].
28     return qrec(0, n - 1, x, y, 1);
29 }
30
31 void urec(int i, int j, int x, int y, int z, int e) // Hjálpfall
32 { // Við erum að leita að bili [x, y] og erum í [i, j].
33     prop(i, j, e);
34     if (x == i && y == j) { o[e] = z; return; }
35     int m = (i + j)/2;
36     p[e] += (y - x + 1)*z;
37     if (y <= m) urec(i, m, x, y, z, LEFT(e));
38     else if (x > m) urec(m + 1, j, x, y, z, RIGHT(e));
39     else urec(i, m, x, m, z, LEFT(e)), urec(m + 1, j, m + 1, y, z, RIGHT(e));
40 }
41 void update(int x, int y, int z)
42 { // Bætum z við stökin á bilinu [x, y]
43     urec(0, n - 1, x, y, z, 1);
44 }

```

- ▶ Nú hefur `query(...)` sömu tímaflækju og í hefðbundnum biltrjám, það er að segja $\mathcal{O}(\log n)$.
- ▶ Loks fæst (með sömu rökum og gefa tímaflækju `query(...)`) að `update(...)` er $\mathcal{O}(\log n)$.

