1.) $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad \left(\int dx = x + C\right)$ → განუსაზღვრელი ინტეგრალი

$\int \sin(kx) \cdot dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C \qquad \int \cos(kx)\, dx = \frac{1}{k}\sin(kx) + C$

$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \qquad \int e^{kx} \cdot dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$

$\int \frac{dx}{1 + kx^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \sqrt{k}\, x + C$

$S(t) = \int v(t) \cdot dt$

$S = \int_a^b f(x) \cdot dx \qquad y' = \frac{dy}{dx}$

2.) ამოხსენით დიფერენციალური განტოლება მოცემული საწყისი პირობით

$\frac{dy}{dx} = 2x - 8, \; y(3) = 0 \Rightarrow dy = (2x-8)\,dx \Rightarrow \int dy = \int (2x-8)\,dx; \Rightarrow$

$y = \int 2x \cdot dx - 8\int dx = \frac{2x^2}{2} - 8x + C \Rightarrow y(3) = 0$ პირობიდან $\rightarrow 0 = 3^2 - 8 \cdot 3 + C \Rightarrow$

$0 = 9 - 24 + C \Rightarrow C = 15 \Rightarrow$ პასუხი $y = x^2 - 8x + 15;$

3.) $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ → განსაზღვრული ინტეგრალი

4.) გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^3 - 4x$ წირით, $x = 2$, $x = 3$ წრფეებით და აბსცისთა ღერძით

$S = \int_2^3 (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 - 2x^2\Big|_2^3 = \frac{65}{4} - 10$

5.) $\int \sqrt[n]{a + kx} \cdot dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{(a+kx)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$

6.) $\int_0^{\pi} 5\cos^4 x \sin x \cdot dx \Rightarrow -5\int_0^{\pi} \cos^4 x \; d\cos x =$

$\sin x \cdot dx = -d\cos x$
$\cos x \cdot dx = d\sin x$

$\left(\frac{5\cos^5 x}{5}\right)\Big|_0^{\pi} = (\cos^5 \pi - \cos^5 0) = 2$

7.)

$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$	ბრუნვითი ზედაპირის → ფართობის ფორმულა	$(x^n)' = n x^{n-1}$	→ წარმოებულის ფორმულა

ინტეგრალის ფორმულები

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\left(\int dx = x + C\right)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$ 3. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C;$

4. $\int \sin kx\, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C;$

5. $\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k} \sin kx + C;$

6. $\int \frac{dx}{1+kx^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \sqrt{k}x + C;$

ხარის ფორმულები ა) $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$; ბ) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$;

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = * \arcsin x + C.;$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

* განსაზღვრული * ინტეგრალი ფორმულა $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$

*

$\frac{9}{2}+3=1+3+C$; $C=\frac{9}{2}-1=\frac{7}{2}$;

$\frac{y^2}{2}+y=x^2+3x+\frac{7}{2}$, $y^2+2y=2x^2+6x+7$;

3. $y'=\frac{x^2+6x}{2y+3}$, ვიპოვოთ ამ განტოლების ის ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის $(1;1)$ წერტილზე.

ამოხსნა. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+6x}{2y+3}$, $(2y+3)dy=(x^2+6x)dx$,

$\int(2y+3)dy=\int(x^2+6x)dx$, $2\cdot\frac{y^2}{2}+3y=\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}+C$;

$1^2+3\cdot1=\frac{1^3}{3}+3\cdot1^2+C$, $4=3\frac{1}{3}+C$, $C=\frac{2}{3}$;

$y^2+3y=\frac{x^3}{3}+3x^2+\frac{2}{3}$, $3y^2+9y=x^3+9x^2+2$.

№12.

1. $\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$;
2. $\int x3^x dx=x\cdot\frac{3^x}{\ln3}-\frac{3^x}{\ln^2 3}+C$;
3. $\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C$;
4. $\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$;
5. $\int\log_3 x\,dx=x\log_3 x-\frac{x}{\ln3}+C$.

№11.

1. იპოვეთ $y' = \dfrac{x^2+2x}{y^2+1}$ დიფერენციალური განტოლების ის ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის $(2;1)$ წერტილზე.

ამოხსნა. $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+2x}{y^2+1}$, $(x^2+2x)dx = (y^2+1)dy$, $\int(x^2+2x)dx = \int(y^2+1)dy$;

$\dfrac{x^3}{3} + 2\cdot\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^3}{3} + y + C$; ვინაიდან გადის $(2;1)$ წერტილზე, ამიტომ $\dfrac{2^3}{3} + 2^2 = \dfrac{1^3}{3} + 1 + C$;

$\dfrac{8}{3} + 4 = \dfrac{1}{3} + C + 1$; $\dfrac{8}{3} + 3 - \dfrac{1}{3} = C$; $C = \dfrac{16}{3}$;

$\dfrac{x^3}{3} + x^2 = \dfrac{y^3}{3} + y + \dfrac{16}{3}$; $x^3 + 3x^2 = y^3 + 3y + 16$.

2. $y' = \dfrac{2x+3}{y+1}$, გადის $(1;3)$ წერტილზე ინტეგრალური წირი. იპოვეთ ეს წირი.

ამოხსნა. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+3}{y+1}$, $(y+1)dy = (2x+3)dx$,

$\int(y+1)dy = \int(2x+3)dx$, $\dfrac{y^2}{2} + y = \dfrac{x^2}{2}\cdot 2 + 3x + C$,

პირობიდან $\dfrac{3^2}{2} + 3 = 1^2 + 3\cdot 1 + C$,

№10. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$

1. ზედაპირი მიღებულია $y=x^{\frac{3}{2}}\left(0\le x\le \frac{1}{4}\right)$ წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო. იპოვეთ ამ ზედაპირის S ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა.

ამოხსნა. მოცემული ფორმულით

$$S=2\pi\int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}\right)^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx;$$ გამოვიყენეთ წარმოებულის ფორმულა $(x^n)'=nx^{n-1}$; ე.ი.

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}};$$

2. $y=\sqrt{x}$, $2\le x\le 6$; გააკეთე! $(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};$

3. $y=2\sqrt{x}$, $3\le x\le 8$; გააკეთე!

№9.

1. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$\int_0^{\pi} 5\cos^4x\sin x\,dx$; ამოხსნა. $\sin x\,dx = -d\cos x$,

ასევე გამოვიყენოთ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; ე.ი.

$$-5\int_0^{\pi}\cos^4x\,d\cos x = -5\cdot\frac{\cos^5x}{5}\Big|_0^{\pi} = -(\cos^5\pi-\cos^5 0)=$$

$$=-((-1)^5-1^5)=-(-1-1)=2;$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\sin^6x\cos x\,dx$; ამოხსნა. $\cos x\,dx = d\sin x$

ე.ი. $7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\,d\sin x = 7\cdot\frac{\sin^7x}{7}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin^7\frac{\pi}{2}-\sin^7 0=$

$$=1^7-0=1;$$

3. $\frac{10}{e-1}\int_0^1 x e^{x^2}dx$; ამოხსნა. $x\,dx=\frac{1}{2}dx^2$,

ასევე გამოვიყენოთ $\int e^x dx = e^x$; ე.ი.

$$\frac{10}{(e-1)2}\int_0^1 e^{x^2}dx^2 = \frac{5}{e-1}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{5}{e-1}(e-e^0)=$$

$$=\frac{5}{e-1}(e-1)=5;$$

№8.

1. გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი

$\int\sqrt{5-2x}\,dx$; გამოვიყენოთ $\int\sqrt[n]{a+kx}\,dx=$

$=\frac{1}{k}\cdot\frac{(a+kx)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$; ე.ი. $\int(5-2x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{-1}{2}\,\frac{(5-2x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}=$

$=\frac{-1}{3}\sqrt{(5-2x)^3}+C$;

2. $\int\sqrt[3]{2-3x}\,dx=\frac{-1}{3}\,\frac{(2-3x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(2-3x)^4}+C$;

3. $\int\frac{1}{\sqrt[4]{3x+5}}\,dx=\int(3x+5)^{-\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{3}\,\frac{(3x+5)^{-\frac{1}{4}+1}}{\frac{3}{4}}=$

$=\frac{4}{9}\sqrt[4]{(3x+5)^3}+C$;

№7.

1. გამოთვალეთ იმ არის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=4x^3+1$ წირით; $x=1$, $x=2$ წრფეებით და აბსცისთა ღერძით.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ფორმულა $S=\int_a^b f(x)dx$;

ე.ი. $\int_1^2 (4x^3+1)dx=\int_1^2 4x^3dx+\int_1^2 dx=4\frac{x^4}{4}\Big|_1^2+x\Big|_1^2=$

$=2^4-1^4+2-1=16$;

2. გამოთვალეთ იმ არის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=5x^4$ წირით, აბსცისთა ღერძით და $x=2$ წრფით.

ამოხსნა. $\int_0^2 5x^4dx=5\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2=2^5-0=32$;

3. გამოთვალეთ იმ არის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=3x^2-6$ პარაბოლით და $y=6$ წრფით.

ამოხსნა. ვიპოვოთ ინტეგრების საზღვრები, ამისთვის ამოვხსნით განტოლებას $3x^2-6=6$, $x^2=4$, $x=\pm 2$, $x_1=-2$, $x_2=2$; ფართობი იქნება სხვაობა $\int_{-2}^{2}(3x^2-6)dx-\int_{-2}^{2}6dx=3\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}-6x\Big|_{-2}^{2}-6x\Big|_{-2}^{2}=$

$=2^3-(-2)^3-6(2-(-2))-6(2-(-2))=8+8-24-24=-32$;

ფართობი დადებითია, ე.ი. $S=32$

№6

1. გამოთვალეთ $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x}{\sin x}\,d$

$= 2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$= 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1;$

2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+4\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 4\right)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} +$

$+4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx = tg\,x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + 4x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\,0 + 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 + \pi;$

3. $\frac{12}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{3+3x^2} = \frac{12}{\pi\cdot 3}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{\pi}\,arctg\,x\Big|_{-1}^{1} =$

$= \frac{4}{\pi}\left(arctg1 - arctg(-1)\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + arctg1\right) =$

$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 2;$

№5.

1. გამოთვალეთ $\int_0^1 \frac{5x^4-3x^2}{2};$

ამოხსნა. $\int_0^1 \left(\frac{5x^4}{2}-\frac{3}{2}x^2\right)dx=\frac{5}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=$

$=\frac{1}{2}(1^5-0)-\frac{1}{2}(1^3-0)=0;$

2. $\int_0^2 x(3x-2)dx=\int_0^2(3x^2-2x)dx=3\frac{x^3}{3}\Big|_0^2-2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=$

$=2^3-0-2^2-0=4;$

3. $\int_1^2 \frac{3x^5-2x^4}{x^3}dx=\int_1^2\left(\frac{3x^5}{x^3}-\frac{2x^4}{x^3}\right)dx=\int_1^2 3x^2dx-$

$-\int_1^2 2xdx=3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=2^3-1^3-(2^2-1^2)=$

$=8-1-3=4;$

№4 განსაზღვრული ინტეგრალი

1. გამოთვალეთ $\int_0^1 (5-4x^3)dx$;

ამოხსნა: $5\int_0^1 dx - 4\int_0^1 x^3 dx$; გამოიყენება ფორმულა $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$; ე. ი.

$5x\Big|_0^1 - 4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 5(1-0)-(1^4-0)=4$;

2. $\int_0^2 \left(x^3+\frac{3x^2}{4}\right)dx = \int_0^2 x^3dx+\frac{3}{4}\int_0^2 x^2dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + \frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$; ნიუ ფორმულით $\frac{1}{4}(2^4-0)+\frac{1}{4}(2^3-0)=4+2=6$

3. $\int_1^{27}\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}}\Big|_1^{27} = 27^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}=3^{3\cdot\frac{4}{3}}-1=80$;

№3.

1. მატერიალური წერტილი მოძრაობს ღერძის გასწვრივ $v(t)=(t^2+1)$ მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ გავლილი $S(t)$ მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა, თუ ცნობილია 2 წამში მან გაიარა 5მ.

ამოხსნა. მანძილი $S(t)=\int v(t)dt$, ხოლო $S(2)=5$;

ე.ი. $S(t)=\int(t^2+1)dt=\int t^2dt+\int dt=\frac{t^3}{3}+t+C$; პირობიდან $S(2)=5$, გვექნება $5=\frac{2^3}{3}+2+C$, $3-\frac{8}{3}=C$, $C=\frac{1}{3}$; პასუხი: $S(t)=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}$;

2. $v=(2t+3)\frac{მ}{წმ}$, $S(3)=22$;

პასუხი: $S(t)=t^2+3t+4$;

3. $v=(3t^2+2t)\frac{მ}{წმ}$, $S(2)=16$;

პასუხი: $S(t)=t^3+t^2+4$;

2 და 3 ამოცანები გააკეთე 1-ის მსგავსად.

№2 ამოხსენით დიფერენციალური განტოლება მითითებული საწყისი პირობით:

1. $\frac{dy}{dx}=2x-8, \quad y(3)=0;$

ამოხსნა. $dy=(2x-8)dx; \quad \int dy=\int(2x-8)dx;$
ინტეგრალის თვისებების პირველი თვისების გამოყენებით გვექნება $y=\int 2x\,dx-8\int dx=2\frac{x^2}{2}-8x+C;$ $y(3)=0$ პირობიდან $0=3^2-8\cdot 3+C,$ $0=9-24+C, \quad C=15;$ პასუხი: $y=x^2-8x+15;$

2. $\frac{dy}{dx}=3x^2-3, \quad y(2)=1;$

ამოხსნა. $dy=(3x^2-3)dx; \int dy=\int 3x^2dx-3\int dx; \; y=3\cdot\frac{x^3}{3}-3x+C;$ $y(2)=1$ პირობიდან $1=2^3-3\cdot 2+C,$ $1=8-6+C, \quad C=-1;$ პასუხი: $y=x^3-3x-1;$

3. $\frac{dy}{dx}=8x^3+1, \quad y(1)=9;$

ამოხსნა. $dy=(8x^3+1)dx; \int dy=8\int x^3dx+\int dx; \; y=8\cdot\frac{x^4}{4}+x+C;$ პირობიდან $9=2\cdot 1^4+1+C, \quad C=6;$
პასუხი: $y=2x^4+x+6.$

1

№1 იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი: [illegible] (მარტივი დონე) II სემესტრი

1. $\int(3x^2-\sin 5x)dx$;

ამოხსნა. $\int(3x^2-\sin 5x)dx=3\int x^2dx-\int \sin 5x dx$;

გამოვიყენოთ ფორმულები: $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$,

$\int \sin kx dx=\frac{-1}{k}\cos kx+C$; ე.ი.

$3\cdot\int x^2dx=3\cdot\frac{x^3}{3}+C$; $\int \sin 5x dx=\frac{-1}{5}\cos 5x+C$;

პასუხი: $x^3+\frac{1}{5}\cos 5x+C$.

2. $\int\left(\frac{1}{2x}+\cos 3x\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\int\cos 3x dx$;

გამოვიყენოთ: $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$, $\int\cos kx dx=$

$=\frac{1}{k}\sin kx+C$; ე.ი. პასუხი: $\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{3}\sin 3x+C$;

3. $\int\left(e^{2x}+\frac{1}{1+25x^2}\right)dx=\int e^{2x}dx+\int\frac{dx}{1+25x^2}$;

გამოვიყენოთ: $\int e^{kx}dx=\frac{1}{k}e^{kx}+C$; $\int\frac{dx}{1+kx^2}=$

$=\frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\sqrt{k}x+C$;

პასუხი: $\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{5}\operatorname{arctg}5x+C$;