Équation de Poisson 1D

Soit deux points $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et notons $\Omega = [a, b]$ le domaine spatial d'étude. Sur ce domaine Ω, considérons l'équation de Poisson suivante :

$$u'' = f$$

ainsi que deux conditions aux limites, c'est-à-dire sur $\partial\Omega = \{a, b\}$, parmi les suivantes :

	Dirichlet	*Neumann*	*Robin*
CL gauche	$u(a) = g_1$	$u'(a) = g_1$	$(u + pu')(a) = g_1$
CL droite	$u(b) = g_2$	$u'(b) = g_2$	$(u + pu')(b) = g_2$

où $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$ sont des valeurs imposées et $p \in \mathbb{R}$ est un coefficient à choisir (ou à déterminer pour une meilleure convergence).

I - Méthode des Différences Finies

Cette méthode consiste à décomposer en $N+1$ points équi-réparti notre domaine d'étude et calculer une approximation de u en chacun de ces points.

Notons Δx le pas d'espace et décomposons notre domaine Ω comme suit :

$$\Omega = \{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant N} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} & x_0 = a \\ & x_N = b \\ & \Delta x = x_i - x_{i-1} \end{aligned}$$

En notant U_i l'approximation de $u(x_i)$ et en utilisant des développement de Taylor en $x_i \pm \Delta x$, nous pouvons approximer, pour tous les points internes de Ω, la dérivée seconde de u de la manière suivante :

$$\begin{cases} u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x\ u'(x_i) + \dfrac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) + o(\Delta x^2) \\ u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x\ u'(x_i) + \dfrac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) + o(\Delta x^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x_i - \Delta x) + u(x_i + \Delta x) = 2u(x_i) + \Delta x^2 u''(x_i) + o(\Delta x^2)$$

Ainsi, on a :

$$\forall i \in [\![1, N-1]\!], \quad u''(x_i) \simeq \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{\Delta x^2}$$

Il nous reste à traiter les points U_0 et U_N selon le type de condition limite choisie.

Dirichlet

Si la condition limite est du type Dirichlet, la valeur est imposée :

$$U_0 = u(a) = g_1$$
$$U_N = u(b) = g_2$$

Neumann

Ici, deux options s'offrent à nous : schéma décentré ou schéma centré. On préférera en général choisir un schéma centré, qui est d'ordre 2 (contrairement au schéma décentré qui d'ordre 1), pour la précision de la méthode.

Dans le cas du schéma décentré, on utilise le développement de Taylor en $a + \Delta x$ et $b - \Delta x$ afin de faire apparaitre la dérivée première de u :

$$\begin{cases} u(a + \Delta x) = u(a) + \Delta x \ u'(a) + o(\Delta x) \\ u(b - \Delta x) = u(b) - \Delta x \ u'(b) + o(\Delta x) \end{cases}$$

et par conséquent :

$$U_0 = U_1 - \Delta x \ g_1$$
$$U_N = U_{N-1} + \Delta x \ g_2$$

Pour le schéma centré, on utilise une méthode type "volumes finis" sur les demi-mailles $\left[a, a + \frac{\Delta x}{2}\right]$ et $\left[b - \frac{\Delta x}{2}, b\right]$:

$$\int_a^{a+\frac{\Delta x}{2}} u''(x) \ dx =$$