UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Bacharelado em Matemática

Luís Henrique da Silva Pinheiro

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua

que não possui derivada em nenhum ponto de seu domínio.

UBERLÂNDIA

Dezembro de 2019

Conteúdo

1 Introdução

No decorrer deste texto será demonstrado a existência de uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que não possui derivada em nenhum ponto de seu domínio. O processo da demonstração será realizado em cinco etapas, os quatro primeiros passos consistem em estipular cinco resultados que nos serão úteis no final, estes serão listados como: Lema 2.1, Lema 2.2, Lema 2.3 e algumas observações finais, e o quinto e último passo consiste em definir a função e apresentar os argumentos lógicos que, apoiando-se nos quatro primeiros resultados nos permitirá concluir a existência da tal função citada no tema do trabalho, tal último resultado será enunciado como Teorema 3.1.

---

2 Premissas Principais

Sem delongas ou enrolação vamos direto ao que importa!

Primeiro um resultado sobre somas de 1 's com -1 's.

Lema 2.1. *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ *. Se* $a + b = n$ *e* $c + d = n + 1$ *então* $a - b \neq c - d$ *.*

Demonstração: Suponha que $a - b = c - d$. Então $a + b + 2d = c + d + 2b$. Logo $n + 2d = n + 1 + 2b$. Assim $2(d - b) = 1$. Ou seja, $2|1$. Absurdo! ■

Observação 2.1. *Isto implica que, ao somar* n *números com* a *deles iguais a* 1 *e* b *deles iguais a* -1 *, obtemos um resultado diferente daquele obtido ao somarmos* $n + 1$ *números com* c *deles iguais a* 1 *e* d *deles iguais a* -1 *. Ou seja, dadas* $(a_i)_{i=1}^{n} \subseteq \{\pm 1\}$ *e* $(b_i)_{i=1}^{n+1} \subseteq \{\pm 1\}$ *, seguirá que* $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{i=1}^{n+1} b_i$ *.*

Agora um resultado sobre sequências de números inteiros.

Lema 2.2. *Seja* $(a_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}$ *. Se esta sequência de números inteiros* $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ *for convergente, então* $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $a_N = a_{N+1} = a_{N+2} = ...$ *(É estacionaria).*

Demonstração: Seja $\epsilon := 1$. Como $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ é convergente, segue que ela é uma sequência de Cauchy. Logo $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i, j \in \mathbb{N}$ se $i, j \geqslant N$ então $|a_i - a_j| < 1 = \epsilon$. Mas como $a_i, a_j \in \mathbb{Z}$ deve ocorrer $|a_i - a_j| \in \{0, 1, 2...\} = \mathbb{N}$. Logo $|a_i - a_j| = 0$. E portanto $a_i = a_j$. ∎

O próximo resultado exibe uma outra forma de enxergar a derivada de uma função num ponto de seu domínio, que envolve duas sequências com algumas propriedades específicas.

Lema 2.3. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável em* $x \in \mathbb{R}$ *, e sejam* $(a_i)_{i=1}^{\infty}, (b_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ *satsfazendo:*

(i) $\forall i \in \mathbb{N}$ *temos* $a_i \leqslant x < b_i$

(ii) $lim_{i \to \infty} b_i - a_i = 0$

Então $lim_{i \to \infty} \dfrac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i} = f'(x)$.

Demonstração: Defina $r(h) := f(x+h) - f(x) - f'(x)h$.

Note que: $lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} =$
$lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + lim_{h \to 0} - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$.

Por outro lado temos que: $f(x+h) = r(h) + f(x) + f'(x)h$. Assim
$f(a_i) = f(x + [a_i - x]) = r(a_i - x) + f(x) + f'(x)(a_i - x)$
e $f(b_i) = f(x + [b_i - x]) = r(b_i - x) + f(x) + f'(x)(b_i - x)$. Logo

$$\frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i} = \frac{[r(b_i - x) + f(x) + f'(x)(b_i - x)] - [r(a_i - x) + f(x) + f'(x)(a_i - x)]}{b_i - a_i} =$$
$$\frac{r(b_i - x) - r(a_i - x) + f'(x)[b_i - x - a_i + x]}{b_i - a_i} = \frac{r(b_i - x) - r(a_i - x)}{b_i - a_i} + f'(x)$$. Ou seja

$$\frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i} - f'(x) = \frac{r(b_i - x) - r(a_i - x)}{b_i - a_i} = \frac{r(b_i - x)(b_i - x)}{(b_i - a_i)(b_i - x)} + \frac{-r(a_i - x)(a_i - x)}{(b_i - a_i)(a_i - x)} .$$

Como $a_i \leqslant x < b_i$ temos que $|x - a_i| < |b_i - a_i|$.
Então $0 \leqslant |\frac{x - a_i}{b_i - a_i}| < 1$. e analogamente $0 \leqslant |\frac{x - b_i}{b_i - a_i}| < 1$.

Logo deve acontecer:

$$|\frac{r(b_i - x)(b_i - x)}{(b_i - x)(b_i - a_i)}| < |\frac{r(b_i - x)}{b_i - x}| \text{ e}$$
$$|\frac{r(a_i - x)(a_i - x)}{(a_i - x)(b_i - a_i)}| < |\frac{r(a_i - x)}{a_i - x}| .$$

Por fim $|\frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i} - f^{'}(x)| = |\frac{r(b_i - x)(b_i - x)}{(b_i - a_i)(b_i - x)} + \frac{-r(a_i - x)(a_i - x)}{(b_i - a_i)(a_i - x)}| \leqslant$
$|\frac{r(b_i - x)(b_i - x)}{(b_i - a_i)(b_i - x)}| + |\frac{-r(a_i - x)(a_i - x)}{(b_i - a_i)(a_i - x)}| < |\frac{r(b_i - x)}{b_i - x}| + |\frac{-r(a_i - x)}{a_i - x}|$.
Agora, de

$$a_i \leqslant x < b_i \quad (1)$$
$$b_i - a_i \to 0 \quad (2)$$

provemos que: $b_i - x$ e $a_i - x \to 0$.

Com efeito, seja $\epsilon > 0$. De (1) $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \in \mathbb{N}$ se $i \geqslant N$ então $|b_i - a_i| < \epsilon$. Mas, de (2) $|b_i - a_i| > |x - a_i|, |x - b_i|$. Logo $|b_i - x|, |x - a_i| < \epsilon$. Assim, como $\frac{r(h)}{h} \to 0$ temos que, dado $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}$ se $|x - y| < \delta$ então $|\frac{r(x-y)}{x-y}| < \frac{\epsilon}{2}$. E $\exists N_0, N_1 \in \mathbb{N}$ tais que $\forall i \in \mathbb{N}$ se $i \geqslant N_0, N_1$ então $|b_i - x|, |a_i - x| < \delta$. Consequentemente, para estes i temos $|\frac{r(b_i - x)}{b_i - x}|, |\frac{r(a_i - x)}{a_i - x}| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, tomando $N := max\{N_0, N_1\}$ segue que $\forall i \in \mathbb{N}$ se $i \geqslant N$ então $|\frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i} - f^{'}(x)| < |\frac{r(b_i - x)}{b_i - x}| + |\frac{r(a_i - x)}{a_i - x}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Portanto $lim_{i \to \infty} \frac{f(a_i) - f(b_i)}{b_i - a_i} = f^{'}(x)$. ■

<u>A Função Distância ao Inteiro mais Próximo</u> g

Agora faremos algumas considerações sobre uma certa função que nos ajudará a construir a função que resolve o problema tema deste trabalho.

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R} \; g(x) := \text{ distância de } x \text{ até o inteiro mais próximo.} \; (3)$$

Repare que, se $k \in \mathbb{Z}$ então

$$g(x) = \begin{cases} x - k & \text{se } x \in [k, k + \frac{1}{2}] \\ k + 1 - x & \text{se } x \in]k + \frac{1}{2}, k + 1] \end{cases}$$

Alem disso $\forall x \in \mathbb{R} \; |g(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Seu gráfico portanto é

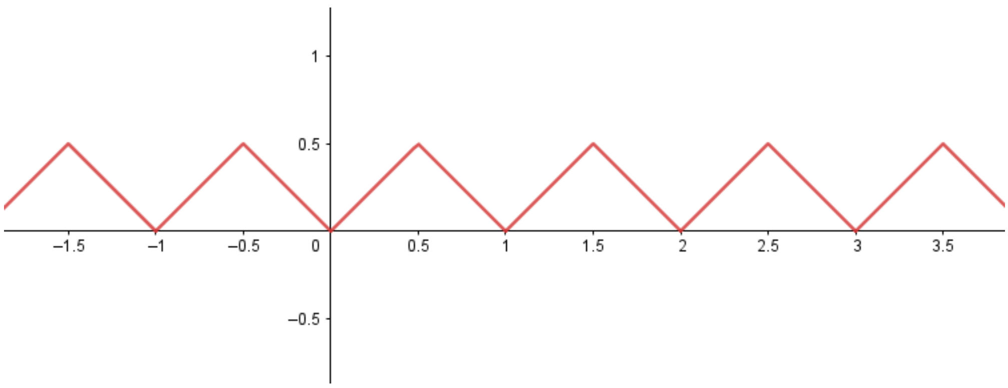

Figura 1: *Gráfico da função distância ao inteiro mais próximo*

Perceba que esta função é obviamente contínua e peródica de período 1. Todas essas observações feitas a respeito desta função vamos referenciar por (4).

3 Conclusão

Agora que já reunimos as premissas necessárias podemos enunciar o teorema que resolve o problema tema deste trabalho.

Teorema 3.1 (Uma função contínua e sem derivada em nenhum ponto)**.** *Seja g a função 'distância ao inteiro mais próximo' definida anteriormente. Defina:*

$$f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} g(2^i x)$$

Então, valem as seguintes afirmações:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *limitada.*

(ii) f *é contínua.*

(iii) f *não possui derivada em nenhum ponto de* $\mathbb{R}$ *.*

Demonstração: Primeiro vamos aplicar o teste M de Weierstrass para verificar que a função está bem definida.

Com efeito, temos:

$$\| 2^{-i} g(2^i x) \|_\infty \leqslant 2^{-i} \frac{1}{2}$$

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} \| 2^{-i} g(2^i x) \| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i+1}} < 1 \text{ . (5)}$$

Além disso $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = 1$.

Segue do teste M de Weierstrass que a sequência de funções $(\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} g(2^i x))_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente $\forall x \in \mathbb{R}$. (Veja Lema 10.9 da página 154 da referência [1])

Portanto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que está bem definida. E de (5) podemos concluir que $|f(x)| < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Ou seja, f é limitada.

Para ver que f é contínua basta reparar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} g(2^i x) =: S_n$$

define uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ uma vez que é formada pela composição e aplicação de operações algébricas básicas (adição, multiplicação e potenciação) sobre funções contínuas mais simples.

Como $S_n \rightrightarrows f$ (converge uniformemente) temos que f é o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas em $\mathbb{R}$, e portanto também é contínua em $\mathbb{R}$. (Veja teorema 10.4 da página 150 da referência [1])

Bom, isso conclui a demonstração dos itens (i) e (ii) do teorema que estamos demonstrando, vamos agora para a última e mais emocionante etapa, a demonstração do item (iii).

Seja $x \in \mathbb{R}$. Primeiro, divida a reta real em intervalos de comprimento $\frac{1}{2}$.

$$\text{Assim} \quad \mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}[\,.$$

É claro que x pertence a algum dos intervalos $[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}[$ que compõem esta reunião. Denote este intervalo, onde x mora por $[a_1, b_1[$. (Tamanho $\frac{1}{2}$) Repita o procedimento para intervalos de tamanho $\frac{1}{4}$ obtendo $[a_2, b_2[\ni x$. Continue o processo sucessivamente, obtendo no passo $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ o intervalo $[a_n, b_n[\ni x$ de tamanho $\frac{1}{2^n}$.

$$\text{Assim} \quad \mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[\,.$$

Fixando $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ temos as seguintes propriedades:

(A) $a_n = \frac{i}{2^n}$ e $b_n = \frac{i+1}{2^n}$ para algum $i \in \mathbb{Z}$.

(B) $a_n \leqslant x < b_n$ e $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$.

(C) Para todo $k \in \mathbb{N}$ se $k \geqslant n$ então $g(2^k a_n) - g(2^k b_n) = 0$.

Nota: Reveja o Lema 2.3 e compare com (A) e (B).

Acréscimo: O item (C) é válido pois $2^k a_n = 2^k \frac{i}{2^n} = i 2^{k-n} \in \mathbb{Z}$ para algum $i \in \mathbb{Z}$ quando $k \geqslant n$. E analogamente $2^k b_n \in \mathbb{Z}$ para estes k 's também. Portanto, a função g retorna 0 ao ser aplicada em ambos, e obviamente $0 - 0 = 0$.

Agora, aplicando (A) e (C) obtemos:

$$\frac{f(a_n) - f(b_n)}{b_n - a_n} =^{(A)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{g(2^k b_n) - g(2^k a_n)}{b_n - a_n} =^{(C)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(2^k b_n) - g(2^k a_n}{2^k (b_n - a_n)} \,. \quad (6)$$

Repare que não existe inteiro M tal que $2^k a_n < M + \frac{1}{2} < 2^k b_n$ (7) quando $k < n$. Pois, se existisse, então, multiplicando todos os membros por 2^{n-k} obteríamos:

$$
\begin{aligned}
&2^{n-k}2^k a_n < 2^{n-k}(M+\frac{1}{2}) < 2^{n-k}2^k b_n \\
\implies &2^n a_n < 2^{n-k}M + 2^{n-k-1} < 2^n b_n
\end{aligned}
$$

Mas, pelo mesmo motivo que está descrito no "**Arcréscimo**" anterior, temos que: $2^n a_n, 2^n b_n \in \mathbb{Z}$, e como $k < n$ ocorre $2^{n-k}M + 2^{n-k-1} \in \mathbb{Z}$ também. Além disso, olha só o que temos: $2^n a_n = 2^n \dfrac{i}{2^n} = i$ e $2^n b_n = 2^n \dfrac{i+1}{2^n} = i+1$ para algum $i \in \mathbb{Z}$. Ou seja, $2^n a_n$ e $2^n b_n$ são dois inteiros consecutivos. Por isso, se existisse um M como em (7), seguiria a existência de um número inteiro entre dois outros inteiros consecutivos. Um absurdo! Portanto, a frase em (7) é válida.

Consequentemente, só existem duas possibilidades:

(α) $M \leqslant 2^k a_n < 2^k b_n \leqslant M + \dfrac{1}{2}$. ($[2^k a_n, 2^k b_n[$ contido "antes da metade")

(β) $M + \dfrac{1}{2} \leqslant 2^k a_n < 2^k b_n \leqslant M + 1$. ($[2^k a_n, 2^k b_n[$ contido "depois da metade")

Supondo (α) segue da definição de g e das observações subsequentes, feitas em (4) que $g(2^k a_n) = 2^k a_n - M$ e $g(2^k b_n) = 2^k b_n - M$. Logo

$$\frac{g(2^k b_n) - g(2^k a_n)}{2^k(b_n - a_n} = \frac{(2^k b_n - M) - (2^k a_n - M)}{2^k(b_n - a_n)} = \frac{2^k b_n - 2^k a_n}{2^k(b_n - a_n)} = \frac{2^k(b_n - a_n)}{2^k(b_n - a_n)} = 1 \ . \ (8)$$

Supondo (β) segue pelo mesmo motivo que $g(2^k b_n) = M + 1 - 2^k b_n$ e $g(2^k a_n) = M + 1 - 2^k a_n$. Logo

$$
\begin{aligned}
&\frac{g(2^k b_n) - g(2^k a_n)}{2^k(b_n - a_n)} = \frac{(M+1-2^k b_n) - (M+1-2^k a_n)}{2^k(b_n - a_n)} = \\
&= \frac{-2^k b_n + 2^k a_n}{2^k(b_n - a_n)} = (-1)\frac{2^k(b_n - a_n)}{2^k(b_n - a_n)} = -1 \ . \ (9)
\end{aligned}
$$

De (6), (8) e (9) obtemos:

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \text{ onde } (c_k)_{k=0}^{n-1} \subseteq \{\pm 1\} \text{ . Ou melhor } \frac{f(b_n - a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \pm 1 \ . \ (10)$$

Nota: Reveja a observação 2.1 e compare com (10).

———— *'E finalmente, o CLÍMAX!'*

Portanto $(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência formada por números inteiros (Somas finitas de ± 1). Pelas consequências do lema 2.1, citadas na observação 2.1, já sabemos que dois números consecutivos desta sequência são sempre distintos. Juntando este fato com o lema 2.2, concluímos que uma tal sequência jamais poderá convergir, pois não é estacionária. **Contudo**, se f tivesse derivada em algum ponto x de seu domínio $\mathbb{R}$, então pelo lema 2.3 seguiria que o limite $lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ deveria existir e ser igual a $f^{'}(x)$! Mas acabamos de ver que tal limite inexiste $\forall x \in \mathbb{R}$.

Só podemos então concluir que f *não possui derivada em nenhum ponto* x *de seu domínio* $\mathbb{R}$. ■

---

4 Agradecimentos

Dentre as referências devo agradecimentos ao professor Daniel Cariello, por ter me emprestado suas notas de aula [2] onde traduziu a maior parte dos resultados, sobre os quais eu me baseei para produzir este trabalho. E claro, também deixo meus agradecimentos ao professor Rodolfo Collegari da Universidade Federal de Uberlândia pela ótima oportunidade que me deu de melhorar minha nota com este trabalho.

Referências

[1] N. L. Carothers, “Real analysis,” *Cambridge University Press*, pp. 157 – 158, 2000.

[2] D. Cariello, “Notas de aula,” *Universidade Federal de Uberlândia*, 2019.