

# Ejercicios Tema 2 - Estimación. Taller 2

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso completo de estadística inferencial con R y Python

## Contenidos

<b>1 Estimación taller 2</b>	<b>1</b>
1.1 Ejercicio 1	1
1.2 Ejercicio 2	1
1.3 Ejercicio 3	1
1.4 Ejercicio 4	2
1.5 Ejercicio 5	2
1.6 Ejercicio 6	2
1.7 Ejercicio 7	2
1.8 Ejercicio 8	2
<b>2 Soluciones</b>	<b>2</b>
2.1 Solución ejercicio 1	2
2.2 Solución ejercicio 2	2
2.3 Solución ejercicio 3	3
2.4 Solución ejercicio 4	3
2.5 Solución ejercicio 5	3
2.6 Solución ejercicio 6	3
2.7 Solución ejercicio 7	4
2.8 Solución ejercicio 8	4

## 1 Estimación taller 2

### 1.1 Ejercicio 1

Supongamos que la cantidad de lluvia registrada en una cierta estación meteorológica en un día determinado está distribuida uniformemente en el intervalo  $(0, b)$ . Nos dan la siguiente muestra de los registros de los últimos 10 años en ese día:

0, 0, 0.7, 1, 0.1, 0, 0.2, 0.5, 0, 0.6

Estimar el parámetro  $b$  a partir de su estimador  $\tilde{b}$ .

### 1.2 Ejercicio 2

Supongamos que el grado de crecimiento de unos pinos jóvenes en metros de altura en un año es una variable aleatoria normal con media y varianza desconocidas. Se registran los crecimientos de 5 árboles y los resultados son: 0.9144, 1.524, 0.6096, 0.4572 y 1.0668 metros. Calcular los valores estimados de  $\mu$  y  $\sigma^2$  para esta muestra.

### 1.3 Ejercicio 3

$X$  es una variable geométrica con parámetro  $p$ . Dada una muestra aleatoria de  $n$  observaciones de  $X$ , cuál es el estimador de  $p$  por método de los momentos?

## 1.4 Ejercicio 4

Se supone que el número de horas que funciona una bombilla LED es una variable exponencial con parámetro  $\lambda$ . Dada una muestra de  $n$  duraciones, calcular el estimador por método de los momentos para  $\lambda$ .

## 1.5 Ejercicio 5

Si se supone que  $X$  esta distribuida uniformemente en el intervalo  $(b - \frac{1}{4}, b + 5)$ , ¿cuál es el estimador por método de los momentos para  $a$  y  $b$  en base a una muestra aleatoria de  $n$  observaciones?

## 1.6 Ejercicio 6

Supongamos que  $X$  es una variable aleatoria de Poisson con parámetro  $\lambda$ . Dada una muestra aleatoria de  $n$  observaciones de  $X$ , cuál es el estimador de máxima verosimilitud para  $\lambda$ ?

## 1.7 Ejercicio 7

¿Cuál es el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro  $\lambda$  de una variable exponencial para una muestra de tamaño  $n$ ?

## 1.8 Ejercicio 8

Se registran los tiempos de duración de 30 bombillas. Supongamos que el tiempo de duración de estas bombillas es una variable exponencial. Si la suma de los tiempos  $\sum_{i=1}^{30} x_i = 32916$  horas, ¿cuál es el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro de la distribución exponencial de duración de las bombillas?

# 2 Soluciones

## 2.1 Solución ejercicio 1

Carguemos los datos en R

```
muestra_lluvia=c(0,0,0.7,1,0.1,0,0.2,0.5,0,0.6)
```

Nos dicen que los datos de la muestra provienen de una población modelada por una v.a.  $X$  con distribución  $U(0, b)$ . Entonces  $E(X) = \frac{b-0}{2} = \frac{b}{2}$ . Utilizaremos el método de los momentos estimamos  $E(X)$  por  $\bar{X}$  luego  $\frac{b}{2} = E(X)$  de donde  $b = 2 \cdot E(X)$  y por lo tanto un estimador del parámetro  $b$  es  $\hat{b} = 2 \cdot \bar{X}$ . En nuestro caso y con R

```
media_lluvia=mean(muestra_lluvia)
media_lluvia
```

```
## [1] 0.31
```

```
bhat=2*media_lluvia
bhat
```

```
## [1] 0.62
```

## 2.2 Solución ejercicio 2

Tenemos que  $X$  = crecimiento en metros de un pino joven en un año sigue una ley  $N(\mu, \sigma)$  de parámetros desconocidos. Tenemos una muestra que cargamos con R

```
muestra_pinos=c(0.9144, 1.524, 0.6096, 0.4572, 1.0668)
mean(muestra_pinos)
```

```
## [1] 0.9144
var(muestra_pinos)

## [1] 0.1741932
n=length(muestra_pinos)
n

## [1] 5
media_pinos=sum(muestra_pinos)/n
media_pinos

## [1] 0.9144
varianza_pinos=sum(muestra_pinos^2)/n-media_pinos^2
varianza_pinos

## [1] 0.1393546
```

## 2.3 Solución ejercicio 3

Si  $X$  una v.a. discreta con distribución  $Ge(p)$  con  $D_X = \{0, 1, 2, \dots\}$  en este caso sabemos que  $E(X) = \frac{1}{p}$ , como  $\bar{X}$  es un estimador de  $E(X)$  podemos operar y  $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$  es un estimador por el método de los momentos del parámetro  $p$ .

## 2.4 Solución ejercicio 4

Ahora  $X$  una  $Exp(\lambda)$ . La solución es similar que el caso anterior (no en vano la exponencial es la versión continua de la v.a. geométrica).

Sabemos que  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$  luego un estimador del parámetro  $\lambda$  de una población exponencial es  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$ .

## 2.5 Solución ejercicio 5

Ahora  $X$  sigue una ley  $U(b - \frac{1}{4}, b + 5)$  entonces  $E(X) = \frac{b - \frac{1}{4} + b + 5}{2} = \frac{2 \cdot b + \frac{19}{4}}{2} = b + \frac{19}{8}$ . Así  $\hat{b} = \bar{X} - \frac{19}{8}$ .

## 2.6 Solución ejercicio 6

Si  $X$  es una variable  $Po(\lambda)$  y tenemos una m.a.s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de esa v.a; así su función de probabilidad es  $P(X_i = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda}$  si  $x_i = 0, 1, 2, \dots$ . La distribución de la muestra es

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) &= P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n) \\ &= \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!} e^{-n \cdot \lambda}. \end{aligned}$$

Así la función de verosimilitud es

$$L(\lambda | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!} \cdot e^{-n \cdot \lambda}$$

Queremos encontrar el valor de  $\lambda$  que maximiza  $L(\lambda | x_1, x_2, \dots, x_n)$  es decir

$$\arg \max_{\lambda} L(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tomando logaritmos tenemos que

$$\begin{aligned} \ln(L(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_n)) &= \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!} + e^{-n \cdot \lambda} \right) = \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!} \right) - n \cdot \lambda \\ &= \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}} \right) - \ln(x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!) - n \cdot \lambda \\ &= (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot \ln(\lambda) - \ln(x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!) - n \cdot \lambda \end{aligned}$$

derivando respecto de  $\lambda$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(L(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_n)) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \ln(\lambda) - \ln(x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!) - n \cdot \lambda \right) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n.$$

Despejando  $\lambda$  de la ecuación

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n = 0$$

se obtiene que  $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$ .

Luego el estimador máximo verosímil de  $\lambda$  es  $\bar{X}$ .

## 2.7 Solución ejercicio 7

Las v.a. de la muestra son  $X_i$  y tienen distribución  $Exp(\lambda)$ . Sus densidades son  $f_{X_i}(x_i) = \lambda \cdot e^{-\lambda x_i}$  si  $x_i > 0$  y cero en el resto de casos.

La función de verosimilitud de la muestra para una realización de la muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es

$$\begin{aligned} L(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) \\ &= \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda x_2} \cdot \dots \cdot \lambda e^{-\lambda x_n} \\ &= \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

Ahora  $\ln(L(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_n)) = n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$  derivando e igualando a cero obtenemos  $\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$  de donde  $\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$ .

Luego el estimador MV de  $\lambda$  es  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$ .

## 2.8 Solución ejercicio 8

Nos dicen que la v.a.  $X$  = duración de unas bombillas sigue una distribución  $Exp(\lambda)$ . Se toma una muestra de 30 bombillas, se encienden hasta que fallan y se anota el número de horas funcionando. Se obtienen

$x_1, x_2, \dots, x_{30}$  duraciones tales que  $\sum_{i=1}^{30} x_i = 32916$  luego  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{n} = \frac{32916}{30}$ . Como la población es exponencial por el problema anterior el EMV es  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{\frac{32916}{30}} = \frac{30}{32916} = 0.0009114109$ .