

Ejercicios con SOLUCIONES Tema 2 - Estimación. Taller 1

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso completo de estadística inferencial con R y Python

Contenidos

1	Estimación taller 1	1
1.1	Ejercicio 1	1
1.2	Ejercicio 2	1
1.3	Ejercicio 3	1
1.4	Ejercicio 4	2
1.5	Ejercicio 5	2
1.6	Ejercicio 6	2
1.7	Ejercicio 7	2
1.8	Ejercicio 8	2
2	Soluciones	2
2.1	Solución ejercicio 1	2
2.2	Solución ejercicio 2	3
2.3	Solución ejercicio 3	3
2.4	Solución ejercicio 4	3
2.5	Solución ejercicio 5	4
2.6	Solución ejercicio 6	4
2.7	Solución ejercicio 7	4
2.8	Solución ejercicio 8	5

1 Estimación taller 1

1.1 Ejercicio 1

El fabricante SMART_LED fabrica bombillas led inteligentes y de alta gama. Supongamos que la vida de de estas bombillas sigue una distribución exponencial de parámetro λ . Si tomamos una muestra aleatoria de tamaño n de estas bombillas y representamos por X_i la duración de la i -ésima bombilla para $i = 1, \dots, n$, ¿cuál es la función de densidad conjunta de la muestra?

1.2 Ejercicio 2

Sean X_1, X_2, \dots, X_{10} variables aleatorias que son una muestra aleatoria simple de una v.a. X . a. Dividimos la muestra en dos partes: de forma que la primera son los 5 primeros valores y la segunda los restantes. ¿Son independientes las dos partes? b. Volvemos a dividir la muestra en dos partes: la primera está formada por los 5 valores más pequeños y la segunda por el resto. ¿Son independientes las dos partes?

1.3 Ejercicio 3

Un fabricante de motores pone a prueba 6 motores sobre el mismo prototipo de coche de competición. Para probar que los motores tienen las mismas prestaciones se someten a distintas pruebas en

un circuito. Las velocidades máximas en 10 vueltas al circuito de cada motor tras la prueba son 190, 195, 193, 177, 201 y 187 en Km/h. Estos valores forman una muestra aleatoria simple de la variable X = velocidad máxima de un motor en 10 vueltas. Se pide calcular los valores observados de los siguientes estadísticos de la muestra: a. \bar{X} . b. \tilde{S}^2 . c. Mediana. d. $X_{(4)}$ (valor que ocupa el cuarto lugar ordenados los valores de menor a mayor).

1.4 Ejercicio 4

¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de una muestra de tamaño $n = 10$ de una v.a. uniforme en el intervalo $(0, 1)$ sea mayor que 0.9? ¿Cuál es la probabilidad de sea menor que $\frac{1}{2}$?

1.5 Ejercicio 5

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria normal de parámetros μ y σ . Denotemos por $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ la muestra ordenada de menor a mayor. a. Calcular la funciones de densidad del mínimo $X_{(1)}$ y del máximo $X_{(n)}$ b. ¿Alguna de estas variables sigue una distribución normal?

1.6 Ejercicio 6

Consideremos la muestra aleatoria simple X_1, X_2, \dots, X_n de una v.a X de media μ y varianza σ^2 desconocidas. Definimos

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ y } T = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma}.$$

- ¿Cuál es la distribución de T ?
- ¿Es T un estadístico?

1.7 Ejercicio 7

Consideremos la muestra aleatoria simple X_1, X_2, \dots, X_n de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal estándar. Calculad $P\left(2.56 < \sum_{i=1}^{10} X_i^2 < 18.31\right)$.

1.8 Ejercicio 8

Consideremos la muestra aleatoria simple X_1, X_2, \dots, X_n de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal $N(\mu = 2, \sigma = 4)$. Definimos la siguiente variable aleatoria $Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16}$. Calculad $P(Y \leq 2.6)$

2 Soluciones

2.1 Solución ejercicio 1

Cada X_i sigue una ley $Exp(\lambda)$ la densidad es

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_i} & \text{si } x_i > 0 \\ 0 & \text{si } x_i \leq 0 \end{cases}$$

Así la densidad conjunta de la muestra es

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) \\ &= \begin{cases} \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i} & \text{si } x_i > 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{si } x_i \leq 0 \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

2.2 Solución ejercicio 2

En el primer caso las muestras son independientes, saber los resultados de los 5 primeros no aporta información sobre los 5 últimos. En el segundo caso sí que aporta información pues los valores de la segunda parte deben ser mayores que todos los de la primera parte, luego no son independientes.

2.3 Solución ejercicio 3

Lo calcularemos con R

```
x=c(190,195,193,177,201,187)
x

## [1] 190 195 193 177 201 187
n=length(x)
n # tamaño de la muestra

## [1] 6
mean(x) # media

## [1] 190.5
var(x) # varianza muestral con la función var

## [1] 66.3
sum((x-mean(x))^2)/(n-1) # varianza muestral calculada directamente con R

## [1] 66.3
median(x)

## [1] 191.5
sort(x) # muestra ordenada

## [1] 177 187 190 193 195 201
sort(x)[4] # M_(4) el cuarto valor de la muestra ordenada

## [1] 193
```

2.4 Solución ejercicio 4

La primera probabilidad es

$$P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq 0.9) = 1 - P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq 0.9) = 1 - P(X_1 \leq 0.9, X_2 \leq 0.9, \dots, X_n \leq 0.9) = 1 - P(X_1 \leq 0.9) \cdot P(X_2 \leq 0.9) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq 0.9) = 1 - 0.9^{10} = 0.6513.$$

La segunda es

$$P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq 0.5) = P(X_1 \leq 0.5, X_2 \leq 0.5, \dots, X_n \leq 0.5) = P(X_1 \leq 0.5) \cdot P(X_2 \leq 0.5) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq 0.5) = 0.5^{10} = 9.765625 \times 10^{-4}.$$

Hemos utilizado que la distribución uniforme

$$P(X_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.5 Solución ejercicio 5

Sea F_X la distribución de la variable que se muestrea entonces $F_{X_i} = F_X$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

La distribución del máximo es

$$\begin{aligned}P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\&= P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x) \quad . \\&= F_{X_1}(x) \cdot F_{X_1}(x) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x) = F_X(x)^n\end{aligned}$$

La distribución del mínimo es

$$\begin{aligned}P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) &= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq x) \\&= 1 - P(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) \\&= 1 - (P(X_1 \geq x) \cdot P(X_2 \geq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \geq x)) \\&= 1 - P(X_1 \geq x) \cdot P(X_2 \geq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \geq x) \\&= 1 - (1 - P(X_1 \leq x)) \cdot (1 - P(X_2 \leq x)) \cdot \dots \cdot (1 - P(X_n \leq x)) \\&= 1 - (1 - F_X(x)) \cdot (1 - F_X(x)) \cdot \dots \cdot (1 - F_X(x)) \\&= 1 - (1 - F_X(x))^n.\end{aligned}$$

Obviamente las distribuciones del mínimo y del máximo no son gaussianas (para $n > 1$); Las calculamos a continuación.

Denotemos por $F_Z = \int_{-\infty}^x f_Z(s)dx$ y $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ a las funciones de distribución y de densidad de una $N(0, 1)$ sabemos que si X sigue una ley $N(\mu, \sigma)$ entonces la función de distribución de X es $F_X(x) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$ y la densidad es $f_X(x) = f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

Entonces la distribución del máximo M es

$$F_M(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - (1 - F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}))^n \text{ y su densidad es su derivada respecto de } x$$

$$f_M(x) = (F_M(x))' = n \cdot (1 - F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{n-1} \cdot f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

De forma similar, se deja como ejercicio, se calcula la distribución del mínimo.

2.6 Solución ejercicio 6

Ahora tenemos una muestra aleatoria simple de una distribución de media μ y desviación típica sigma y como siempre tenemos el estadístico \bar{X} .

a. Nos piden la distribución de $T = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ operando

$$T = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Ahora sabemos que la distribución de T por el Teorema Central de Límite converge en distribución a una normal estándar cuando $n \rightarrow \infty$.

Además si las variables fueran normales T seguirá distribución normal estándar.

b. Claro que T es un estadístico, ya que estadístico es cualquier función de una muestra. Además si nos fijamos bien simplemente la tipificación del estadístico \bar{X} .

2.7 Solución ejercicio 7

Como se da una muestra de una normal estándar tenemos que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

Así que si denotamos por $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$, resulta que Y es la suma de los CUADRADOS normales estándar $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, idénticamente distribuidas y por lo tanto sabemos que Y sigue una ley χ_{10}^2 es decir con 10 grados de libertad.

Ahora podemos operar

$$P(1.56 < Y < 18.31) = P(2.56 < \chi_{10}^2 < 18.31) = P(\chi_{10}^2 < 18.31) - P(\chi_{10}^2 < 2.56) = 0.9500458 - 0.0100278 = 0.9400181.$$

```
pchisq(18.31,10)
```

```
## [1] 0.9500458
```

```
pchisq(2.56,10)
```

```
## [1] 0.01002777
```

```
pchisq(18.31,10)-pchisq(2.56,10)
```

```
## [1] 0.9400181
```

2.8 Solución ejercicio 8

Consideremos la muestra aleatoria simple X_1, X_2, \dots, X_n de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal $N(\mu = 2, \sigma = 4)$. Definimos la siguiente variable aleatoria $Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16}$. Calculad $P(Y \leq 2.6)$

Notemos que $Z_i = \frac{X_i - 2}{4}$ son variables $N(0, 1)$ para $i = 1, 2, \dots, 10$

Ahora

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16} = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i - 2}{4} \right)^2 = \sum_{i=1}^{10} Z_i^2 = \chi_{10}^2.$$

Luego $Y = \chi_{10}^2$ es una v.a. χ^2 con 10 grados de libertad. Ya podemos calcular la probabilidad pedida $P(Y \leq 2.6) = P(\chi_{10}^2 \leq 2.6) = 0.010663$.

El cálculo lo hemos hecho con

```
pchisq(2.6,df=10)
```

```
## [1] 0.01066303
```