Ejercicios Tema 4 - Contraste hipótesis. Taller 3

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso completo de estadística inferencial con R y Python

Contenidos

1 Contraste hipótesis taller 3: Contrastes de dos parámetros.

1.1 Ejercicio 1

Para comparar la producción media de dos procedimientos de fabricación de cierto producto se toman dos muestras, una con la cantidad producida durante 25 días con el primer método y otra con la cantidad producida durante 16 días con el segundo método. Por experiencia se sabe que la varianza del primer procedimiento es $\sigma_1^2 = 12$ y al del segundo $\sigma_2^2 = 10$. De las muestras obtenemos que $\overline{X}_1 = 136$ para el primer procedimiento y $\overline{X}_2 = 128$ para el segundo. Si μ_1 y μ_2 son los valores esperados para cada uno de los procedimientos, calcular un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ al nivel 99%.

1.1.1 Solución

Estamos en el caso de un contraste de comparación de medias de muestras independientes y en el teórico caso de que las varianzas son conocidas.

Contrastaremos:

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array}\right.$$

El estadístico de contraste es

El **estadístico de contraste** toma el valor para $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$:

$$z_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{136 - 128}{\sqrt{\frac{3.4641^2}{25} + \frac{3.1623^2}{16}}} = 7.61.$$

El estadístico sigue, aproximadamente, una distribución normal. La región crítica del contraste al nivel se significación $\alpha = 0.01$ es rechazar H_0 si $z_0 < z_{\alpha/2}$ o $z_0 > z_{1-\alpha/2}$. Con nuestros datos

$$z_0 = 7.61 \not< z_{\alpha/2} = z_{0.005} = -2.5758 \text{ o } z_0 = 7.61 > z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.5758$$

o lo que es lo mismo rechazamos H_0 si $|z_0| = 7.61 > z_{1-\alpha/2} = 2.5758$ lo que en este caso es cierto.

Los cuantiles los hemos calculado con

```
alpha=1-0.99
qnorm(alpha/2)
```

```
## [1] -2.576
```

```
-qnorm(1-alpha/2)
```

```
## [1] -2.576
```

```
qnorm(1-alpha/2)
```

```
## [1] 2.576
```

El p-valor de este contraste para la alternativa bilateral es p-valor=$2 \cdot P(Z > |z_0|)$ donde Z es una normal estándar $N(\mu = 0, \sigma = 1)$. Podemos calcularlo con el código

En nuestro caso

$$2 \cdot P(Z > |z_0|) = 2 \cdot P(Z > |7.61|) = P(Z > 7.61) = 2 \cdot (1 - P(Z \leq 7.61)),$$

lo podemos calcular con R

```
z0
```

```
## [1] 7.61
```

```
2*(1-pnorm(abs(z0)))
```

```
## [1] 0.00000000000002731
```

Es un p-valor muy pequeño lo que confirma que hay evidencias para rechazar las hipótesis nula: el rendimiento de los dos métodos de fabricación no tiene la misma media.

1.2 Ejercicio 2

Estamos interesados en comparar la vida media, expresada en horas de dos tipos de componentes electrónicos. Para ello se toma una muestra de cada tipo y se obtiene:

Tipo	tamaño	$\overline{x}$	$\tilde{s}$
1	50	1260	20
2	100	1240	18

Calcular un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ (μ_1 esperanza del primer grupo y μ_2 esperanza del segundo grupo) al nivel 98% Suponer si es necesario las poblaciones aproximadamente normales.

1.2.1 Solución

En este caso tenemos dos muestras independientes de tamaños $n1 = 50$, $n2 = 100$ y estadísticos $\overline{x}_1 = 1260$, $\overline{x}_2 = 1240$, $\tilde{s}_1 = 20$ y $\tilde{s}_2 = 18$.

Cargamos los datos en R

```
n1=50
n2=120
media1=1260
media2=1240
desv_tipica1=20
desv_tipica2=18
f0=desv_tipica1^2/desv_tipica2^2 # estadístico de contraste
f0
```

```
## [1] 1.235
```

Tenemos pues, dos muestras independientes de tamaños muestrales y las varianzas desconocidas. Haremos un t-test pero tenemos dos casos: varianzas desconocidas iguales y varianzas desconocidas distintas. Primero haremos un test para saber si las varianzas son iguales o distintas.

El contraste es

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{array}\right.$$

Se emplea el siguiente **estadístico de contraste**:

$$F = \frac{\widetilde{S}_1^2}{\widetilde{S}_2^2}$$

que, si las dos poblaciones son normales y la hipótesis nula $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ es cierta, tiene distribución F de Fisher con grados de libertad $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$.

En nuestro caso $f_0 = \frac{\tilde{s}_1^2}{\tilde{s}_1^2} = \frac{20^2}{18^2} = 1$

Resolveremos calculando el p-valor del contraste que este caso es

$$\begin{array}{l} \min\{2 \cdot P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_0), 2 \cdot P(F_{n_1-1,n_2-1} \geq f_0)\} \\ = \min\{2 \cdot P(F_{50-1,100-1} \leq 1.2346), 2 \cdot P(F_{50-1,100-1} \geq 1.2346)\} \end{array}$$

calcularemos el p-valor con R

```
n1=50
n2=100
desv_tipica1=20
desv_tipica2=18
f0=desv_tipica1^2/desv_tipica2^2 # estadístico de contraste
f0
```

```
## [1] 1.235
```

```
2*pf(f0,n1-1,n2-1,lower.tail = TRUE)# lower.tail = TRUE es el valor por defecto
```

```
## [1] 1.625
```

```
2*pf(f0,n1-1,n2-1,lower.tail = FALSE)# o también 2*(1-pf(f0,n1-1,n2-1)
```

```
## [1] 0.3749
```

```r
pvalor=min(2*pf(f0,n1-1,n2-1,lower.tail = TRUE),2*pf(f0,n1-1,n2-1,lower.tail = FALSE))
pvalor
```

```
## [1] 0.3749
```

El p-valor es alto así que no podemos rechazar la hipótesis nula; consideraremos las varianzas iguales.

Así pues vamos a contrastar la igualdad de medias contra que son distintas:

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_2 \neq \mu_2 \end{array}\right. .$$

El estadístico de contraste sigue una ley t de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad su fórmula es

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) \cdot \frac{(n_1-1)\widetilde{S}_1^2 + (n_2-1)\widetilde{S}_2^2}{(n_1+n_2-2)}}},$$

en nuestro caso vale

$$t_0 = \frac{1260 - 1240}{\sqrt{(\frac{1}{50} + \frac{1}{100}) \cdot \frac{((50-1)\cdot 20^2 + (100-1)\cdot 18^2)}{(n_1+n_2-2)}}} = 7.7264$$

con R es

```r
n1 = 50
n2 = 120
media1 = 1260
media2 = 1240
desv_tipica1 = 20
desv_tipica2 = 18
t0=(media1-media2)/(sqrt((1/n1+1/n2)*((n1-1)*desv_tipica1+
                        (n2-1)*desv_tipica2^2)/(n1+n2-2)))
t0
```

```
## [1] 7.745
```

el p-valor para la alternativa bilateral es $2 \cdot P(t_{N1+n_2-2} > |t_0|) = 2 \cdot (1 - P(t_{N1+n_2-2} > |t_0|))$, con R es

```r
t0
```

```
## [1] 7.745
```

```r
abs(t0)
```

```
## [1] 7.745
```

```r
n1
```

```
## [1] 50
```

```r
n2
```

```
## [1] 120
```

```r
pvalor= 2*(1-pt(abs(t0),df=n1+n2-2))
pvalor
```

```
## [1] 0.0000000000008566
```

EL p-valor es extremadamente pequeño hay evidencias en contra de la hipótesis nula de igualdad de medias contra la hipótesis alternativa de que son distintas.

El intervalo de confianza al nivel $1-\alpha=0.95$ es

$$\left(\overline{x}_1-\overline{x}_2-t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{(n_1-1)\cdot\widetilde{S}_1^2+(n_2-1)\cdot\widetilde{S}_2^2}{(n_1+n_2-2)}}\right.$$

$$\left.,\quad\overline{x}_1-\overline{x}_2+t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{(n_1-1)\cdot\widetilde{S}_1^2+(n_2-1)\cdot\widetilde{S}_2^2}{(n_1+n_2-2)}}\right)$$

lo calculamos con R

```
n1=50
n2=120
media1=1260
media2=1240
desv_tipica1=20
desv_tipica2=18
alpha=1-0.98
qt(1-alpha/2,df=n1+n2-2)
```

```
## [1] 2.349
```

```
IC=c(media1-media2- qt(1-alpha/2,df=n1+n2-2)
     *sqrt((1/n1+1/n2)*((n1-1)*desv_tipica1+(n2-1)*desv_tipica2^2)/(n1+n2-2)),
     media1-media2+ qt(1-alpha/2,df=n1+n2-2)
     *sqrt((1/n1+1/n2)*((n1-1)*desv_tipica1+(n2-1)*desv_tipica2^2)/(n1+n2-2)))
IC
```

```
## [1] 13.94 26.06
```

La diferencia de medias $\mu_1-\mu_2$ verdadera se encontrará en el intervalo $(13.9351, 26.0649)$ al nivel de confianza del 95%. La $media_1$ es claramente más grande que la dos, en al menos 14

1.3 Ejercicio 3

Para reducir la concentración de ácido úrico en la sangre se prueban dos drogas. La primera se aplica a un grupo de 8 pacientes y la segunda a un grupo de 10. Las disminuciones observadas en las concentraciones de ácido úrico de los distintos pacientes expresadas en tantos por cien de concentración después de aplicado el tratamiento son:

droga 1	20	12	16	18	13	22	15	20		
droga 2	17	14	12	10	15	13	9	19	20	11

Suponer que las reducciones de ácido úrico siguen una distribución normal son independientes

Contrastar la igualdad de medias contra que la droga 1 es mejor (menor media) que la droga 2. Resolver el test en los dos casos varianzas iguales y varianzas distintas. Calcular el intervalo de confianza asociado al contraste

1.3.1 Solución

Denotando la droga 1 y 2 con el mismo subíndice el contraste es:

$$\left\{\begin{array}{l}H_0:\mu_1=\mu_2\\H_1:\mu_1<\mu_2\end{array}\right..$$

Carguemos los datos y resolvamos con R

```r
droga1=c(20,12,16,18,13,22,15,20)
droga2=c(17,14,12,10,15,13,9,19,20,11)
```

El contraste para el caso de varianzas iguales es

```r
t.test(droga1,droga2,var.equal = TRUE,alternative = "less",conf.level=0.9)
```

```
##
##  Two Sample t-test
##
## data:  droga1 and droga2
## t = 1.7, df = 16, p-value = 0.9
## alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
## 90 percent confidence interval:
##  -Inf 5.33
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##        17        14
```

```r
p_valor=t.test(droga1,droga2,var.equal = TRUE,alternative = "less",conf.level=0.9)$p.value
p_valor
```

```
## [1] 0.9478
```

```r
IC=t.test(droga1,droga2,var.equal = TRUE,alternative = "less",conf.level=0.9)$conf.int
IC
```

```
## [1] -Inf 5.33
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.9
```

El p-valor es 0.9478 muy grande no hay evidencias para aceptar que la droga1 reduce en media el ácido úrico más que la droga 2.

El intervalo de confianza para la diferencia de medias al nivel de confianza del 90% es $(-\infty, 5.3298)$

Ahora el mismo test pero suponiendo varianzas distintas.

```r
t.test(droga1,droga2,var.equal = FALSE,alternative = "less",conf.level=0.9)
```

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  droga1 and droga2
## t = 1.7, df = 15, p-value = 0.9
## alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
## 90 percent confidence interval:
##   -Inf 5.322
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##        17        14
```

```r
p_valor=t.test(droga1,droga2,var.equal = FALSE,alternative = "less",conf.level=0.9)$p.value
p_valor
```

```
## [1] 0.9482
```

```r
IC=t.test(droga1,droga2,var.equal = FALSE,alternative = "less",conf.level=0.9)$conf.int
IC
```

```
## [1]  -Inf 5.322
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.9
```

El p-valor es 0.9482 muy grande no hay evidencias para aceptar que la droga1 reduce de media el ácido úrico más que la droga 2.

El intervalo de confianza para la diferencia de medias al nivel de confianza del 90% es $(-\infty, 5.3219)$

Por último podemos hacer el test de igualdad de varianzas

```r
var.test(droga1,droga2)
```

```
##
##  F test to compare two variances
##
## data:  droga1 and droga2
## F = 0.92, num df = 7, denom df = 9, p-value = 0.9
## alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
## 95 percent confidence interval:
##  0.2188 4.4295
## sample estimates:
## ratio of variances
##             0.9184
```

el p-valor es alto, no hay evidencias para poder rechazar que las varianzas sean iguales

1.4 Ejercicio 4

Para comparar la dureza media de dos tipos de aleaciones (tipo 1 y tipo 2) se hacen 20 pruebas de dureza con la de tipo 1 y 25 con la de tipo 2. Obteniéndose los resultados siguientes:

```r
set.seed(345)
aleacion1=round(0.2*(rnorm(20))+18.2,2)
aleacion2=round(0.5*(rnorm(25))+17.8,2)
```

```r
aleacion1=c(18.04,18.14,18.17,18.14,18.19,18.07,18.01,18.54,
            18.53,18.56,18.57,17.92,18.03,18.26,18.38,17.92,
            18.31,18.41,18,18.26)
aleacion2=c(18.02,18.21,16.51,17.21,17.85,18.24,17.48,17.28,
            17.51,17.51,17.43,18.14,17.32,17.11,17.55,17.49,
            18.27,17.92,18.14,18.52,18.12,18.22,17.37,17.91,
            17.77)
media1=mean(aleacion1)
media1
```

```
## [1] 18.22
```

```r
sd1=sd(aleacion1)
sd1
```

```
## [1] 0.2163
```

```r
media2=mean(aleacion2)
media2
```

```
## [1] 17.72
```

```
sd2=sd(aleacion2)
sd2
```

```
## [1] 0.4693
```

$$\overline{X}_1 = 18.2225, \quad S_1 = 0.2163 \text{ y}$$

$$\overline{X}_1 = 17.724, \quad S_2 = 0.4693$$

Suponer que la población de las durezas es normal y que las desviaciones típicas no son iguales.

Contrastar que las medias de las durezas son iguales contra que son distintas. Calcular un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ al nivel de significación del 95%.

Haced lo mismo si las varianzas son distintas.

1.4.1 Solución

Lo resolvemos solo con R sin más comentarios

Cargamos datos

```
n1=20
n2=20
aleacion1
```

```
##  [1] 18.04 18.14 18.17 18.14 18.19 18.07 18.01 18.54 18.53 18.56 18.57 17.92
## [13] 18.03 18.26 18.38 17.92 18.31 18.41 18.00 18.26
```

```
aleacion2
```

```
##  [1] 18.02 18.21 16.51 17.21 17.85 18.24 17.48 17.28 17.51 17.51 17.43 18.14
## [13] 17.32 17.11 17.55 17.49 18.27 17.92 18.14 18.52 18.12 18.22 17.37 17.91
## [25] 17.77
```

Contraste

$$\left\{\begin{array}{ll} H_0: & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: & \mu_1 \neq \mu_2 \end{array}\right.$$

```
t.test(aleacion1,aleacion2,alternative = "two.sided",var.equal =FALSE,conf.level=0.95)
```

```
## 
##  Welch Two Sample t-test
## 
## data:  aleacion1 and aleacion2
## t = 4.7, df = 35, p-value = 0.00004
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.2842 0.7128
## sample estimates:
## mean of x mean of y 
##     18.22     17.72
```

```
t.test(aleacion1,aleacion2,alternative = "two.sided",var.equal =TRUE,conf.level=0.95)
```

```
##
##  Two Sample t-test
##
## data:  aleacion1 and aleacion2
## t = 4.4, df = 43, p-value = 0.00007
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.2692 0.7278
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##     18.22     17.72
```

Son las varianzas iguales

$$\left\{\begin{array}{ll} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array}\right.$$

```r
var.test(aleacion1,aleacion2,ratio = 1,conf.level = 0.95,alternative = "two.sided")
```

```
##
##  F test to compare two variances
##
## data:  aleacion1 and aleacion2
## F = 0.21, num df = 19, denom df = 24, p-value = 0.001
## alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
## 95 percent confidence interval:
##  0.09062 0.52117
## sample estimates:
## ratio of variances
##             0.2125
```

```r
var(aleacion1)/var(aleacion2)
```

```
## [1] 0.2125
```

```r
var.test(aleacion1,aleacion2,ratio = 1,conf.level = 0.95,alternative = "two.sided")$statistic
```

```
##      F
## 0.2125
```

1.5 Ejercicio 5

Se encuestó a dos muestras independientes de empresas, en las islas de Ibiza y otra en Mallorca, sobre si utilizaban sistemas de almacenamiento en la nube. La encuesta de Ibiza tuvo un tamaño $n_1 = 500$ y 200 usuarios de la nube, mientras que en Mallorca se encuestaron a $n_2 = 750$ y se obtuvo un resultado de 210 usuarios.

se pide:

1. Construir una matriz 2 por 2 que contenga en filas los valores de Ibiza y Mallorca y por columnas las respuestas Sí y No
2. Con la función `prop.test` y el ‘ contrastar si las proporciones por islas son iguales o distintas.

3. Resolver el contraste con el p-valor y obtener e interpretar un los intervalos de confianza del 95% para la *comparación de las proporciones* (!cuidado con el orden¡).

1.5.1 Solución

```r
datos=matrix(c(200,500-200,210,750-210),nrow=2,byrow = TRUE)
dimnames(datos)=list(c("Ibiza","Mallorca"),c("Sí","No"))
datos
```

```
##           Sí  No
## Ibiza    200 300
## Mallorca 210 540
```

```r
prop.test(datos)
```

```
##
##  2-sample test for equality of proportions with continuity correction
##
## data:  datos
## X-squared = 19, df = 1, p-value = 0.00001
## alternative hypothesis: two.sided
## 95 percent confidence interval:
##  0.0647 0.1753
## sample estimates:
## prop 1 prop 2
##   0.40   0.28
```

El test exacto de odds-ratio se calcula con la función

```r
fisher.test(datos)
```

```
##
##  Fisher's Exact Test for Count Data
##
## data:  datos
## p-value = 0.00001
## alternative hypothesis: true odds ratio is not equal to 1
## 95 percent confidence interval:
##  1.339 2.194
## sample estimates:
## odds ratio
##      1.714
```

En ambos casos se rechaza la hipótesis nula.

El $p-valor$ calculado de forma directa y como resultado del `fisher.test` es aproximadamente el mismo(las discrepancias son pequeñas, posiblemente debidas a redondeos de las funciones…)

```r
fisher.test(datos)$p.value
```

```
## [1] 0.00001222
```

```r
2*min(phyper(200,500,750,410,lower.tail = TRUE),
            phyper(200,500,750,410,lower.tail =FALSE))
```

```
## [1] 0.000007776
```

```r
round(2*min(phyper(200,500,750,410,lower.tail = TRUE),
            phyper(200,500,750,410,lower.tail =FALSE)),5)
```

```
## [1] 0.00001
```

El intervalo de confianza es para la odds-ratio $\frac{\frac{p1}{1-p1}}{\frac{p2}{1-p2}}$. Así que el intervalo de confianza debe contener a 1 para que las proporciones sean iguales. Consultad Bookdown Estadística Inferencial capítulo 4 sección 8.

1.6 Ejercicio 6

Se pregunta a un grupo de 100 personas elegido al azar asiste a un *webinar* sobre tecnología para la banca. Antes de la conferencia se les pregunta si consideran que Internet es segura para la banca, después de la conferencia se les vuelve a preguntar cual es su opinión. Los resultados fueron los siguientes:

		Después	
		Sí Segura	No Segura
Antes	Sí Segura	50	30
	No Segura	45	29

Contrastar, calculando el p-valor, si ha cambiado (en cualquier sentido) la proporción de los asistentes que consideran que Internet es segura para la banca.

1.6.1 Solución

Es un contraste de comparación de proporciones emparejadas con R se puede resolver, entre otras funciones, con las dos funciones siguientes

```
datos=matrix(c(50,30, 45,29),nrow=2,byrow = TRUE)
datos
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   50   30
## [2,]   45   29
```

```
dimnames(datos)=list(c("Antes_Si","Antes_No_Segura"),c("Despues_Si","Despues_No"))
datos
```

```
##                 Despues_Si Despues_No
## Antes_Si                50         30
## Antes_No_Segura         45         29
```

```
mcnemar.test(datos)
```

```
##
##  McNemar's Chi-squared test with continuity correction
##
## data:  datos
## McNemar's chi-squared = 2.6, df = 1, p-value = 0.1
```

El p-valor el relativamente alto, no hay evidencias contra la igualdad de las proporciones entre antes y después del seminario. Por lo tanto los asistentes (en proporciones) no han cambiado de opinión.