Logică și Structuri Discrete

Logică Propozițională

After James Hein - Discrete Structures, Logic and Computability, Logic in Action (http://www.logicinaction.org/) and J.Russell, P. Norvig - Artificial Intelligence Section 6.2 Propositional Calculus (Subsections Intro, Well-Formed Formulas, Syntax, Semantics, Equivalence pp. 309-316) Section 6.2 (Subsections Disjunctive Normal Form, Conjunctive Normal Form, Constructing CNF/DNF Using Equivalences pp. 320-326) Section 6.3 (Formal Reasoning Systems, pp. 329-334) Section 6.3 (Subsections Indirect Proof, pp. 338-339) Section 9.2 (Subsection A Primer of Resolution for Propositions pp. 461-462)

Sintaxa Limbajului

Alfabetul

Simboluri de adevăr: true, false
Simboluri pentru conectori logici: ¬, !, ∧ , ∨
Variabile propoziționale: p, q, r, etc.
Simboluri de punctuație: (și)

¬	not, negație
∧	and, și, conjuncție
∨	or, sau, disjuncție

! Dacă ... atunci ..., condiție, implicație

Formule bine formate (wff) în logica propoziţională

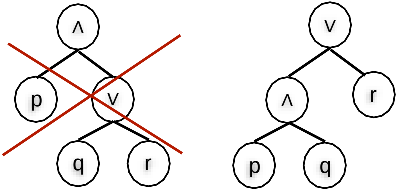
Definiţie inductivă (infomal)
Un wff este un simbol de adevăr (true, false) sau o variabilă propoziţională sau negaţia (¬) unui wff sau conjuncţia (∧) a două wff sau disjuncţia (∨) a două wff sau implicaţia (→) unui wff din alt wff sau un wff între paranteze

Utilizând gramatici
S ::= true | false | Propoziţie | ¬ S | S ∧ S | S ∨ S | S ! S | (S)
Propoziţie ::= p | q | r | ...

Sunt acestea wff în logica propoziţională ?
¬¬p, p ∨ q, p ∧ (p ∨ ¬q)
Da
¬∧q∨p, !p¬q
Nu

Ordinea de Evaluare a Conectorilor

p ∧ q ∨ r este un wff



Dar aceste definiții sunt ambigue deoarece nu capturează ordinea în care conectorii sunt evaluați

Pentru a elimina această problemă, stabilim un set de reguli

1. Prioritatea
¬ (cea mai mare - se evaluează primul)
∧
∨
! (cea mai mică - se evaluează ultimul)

2. ∧, ∨, ! sunt asociativi la stînga
Cu alte cuvinte, dacă același conector apare succesiv de două sau mai multe ori, fără paranteze, atunci evaluăm expresia de la stînga la dreapta

Semantica

Înțelesul unei formule este valoarea de adevăr adevărat (T) sau fals (F)

Înțelesul simbolurilor true și false sunt valorile de adevăr adevărat (T) respectiv fals (F)

Înțelesul conectorilor (pentru wff arbitrare vom utiliza A, B, etc.)

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A ! B	¬ A
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	F

În esență, o stipulare a valorii de adevăr pentru variabilele propoziționale (wff-uri atomice, adică p, q, r, etc.) dintr-un wff se numește o interpretare a wff-urilor atomice (denumită și atribuire de adevăr, atribuire de valoare, valuation)

Exemplu - În formula p ∧ q ∧ r
O interpretare este: p este T, q este F, r este T; o altă interpretare este: p este T, q este T, r este T

Calcularea Valorii de Adevăr

Calculați valoarea de adevăr pentru ¬ p ! q ∧ r în interpretarea p este T, q este F, r este T

¬ T ! F ∧ T
¬ T ! F ∧ T F ! F ∧ T
F ! F ∧ T F ! F
F ! F
T

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A ! B	¬ A
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	F

Câteva Cuvinte Despre !

A	B	A ! B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Citim A ! B “dacă A atunci B”,“A implică B”

A e numit antecedent, premisă sau ipoteză B e numit consecvent sau concluzie

Mare atenție la semantica acestui conector

Când antecedentul (A) este T, A ! B este T doar când B este T A ! B este tot timpul T când antecedentul (A) este F
Nu există o relație de cauzalitate între A și B

“dacă 5 este par atunci Sam este deștept” este T
“dacă 5 este impar atunci București este capitala României” este T

Câteva Cuvinte Despre !

A	B	A ! B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Citim A ! B “dacă A atunci B”,“A implică B”

A e numit antecedent, premisă sau ipoteză B e numit consecvent sau concluzie

Perspectiva inversă
Când știm că A!B este T atunci
1.dacă știm că A este T atunci B este T
2.dacă știm că A este F atunci nu știm nimic despre B (adică el poate fi T sau F dar nu știm exact)

“Dacă plouă (A) atunci sunt nori pe cer (B)” este T “Plouă” (A is T)
Deci, sunt nori pe cer (B is T)

“Dacă plouă (A) atunci sunt nori pe cer (B)” este T “Nu plouă” este T (A is F)
Deci, pot fi nori pe cer sau pot să nu fie nori pe cer

Câteva Cuvinte Despre !

A	B	A ! B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Citim A ! B “dacă A atunci B”,“A implică B”

A e numit antecedent, premisă sau ipoteză B e numit consecvent sau concluzie

Perspectiva inversă
Când știm că A!B este T atunci
1.dacă știm că A este T atunci B este T
2.dacă știm că A este F atunci nu știm nimic despre B (adică el poate fi T sau F dar nu știm exact)

“Dacă opun rezistență (A) inamicul mă va omorâ (B)” este T “Nu opun rezistență” este T (A este F) Deci, inamicul poate să mă omoare sau poate să nu mă omoare !!!

Obs.
A — B este (A → B) ∧ (B → A)

Tabela de Adevăr

Prezintă valorile de adevăr a unui wff în toate posibilele interpretări

Exemplu - tabela de adevăr pentru ¬ (p ∨ q) " r

Avem 3 propoziții atomice (p,q,r) deci avem 2^3 interpretări posibile (în general 2^n, unde n este numărul de propoziții atomice distincte)

p	q	r	¬	(p	∨	q)	"	r
f	f	f						
f	f	t						
f	t	f						
f	t	t						
t	f	f						
t	f	t						
t	t	f						
t	t	t						

Tabela de Adevăr

Prezintă valorile de adevăr a unui wff în toate posibilele interpretări

Exemplu - tabela de adevăr pentru ¬ (p ∨ q) " r

Avem 3 propoziții atomice (p,q,r) deci avem 2^3 interpretări posibile (în general 2^n, unde n este numărul de propoziții atomice distincte)

p	q	r	¬	(p	∨	q)	"	r
f	f	f		f		f		f
f	f	t		f		f		t
f	t	f		f		t		f
f	t	t		f		t		t
t	f	f		t		f		f
t	f	t		t		f		t
t	t	f		t		t		f
t	t	t		t		t		t

Prezintă valorile de adevăr a unui wff în toate posibilele interpretări

Exemplu - tabela de adevăr pentru ¬ (p ∨ q) " r

Avem 3 propoziții atomice (p,q,r) deci avem 2^3 interpretări posibile (în general 2^n, unde n este numărul de propoziții atomice distincte)

p	q	r	¬	(p	∨	q)	"	r
f	f	f		f	f	f		f
f	f	t		f	f	f		t
f	t	f		f	t	t		f
f	t	t		f	t	t		t
t	f	f		t	t	f		f
t	f	t		t	t	f		t
t	t	f		t	t	t		f
t	t	t		t	t	t		t

Tabela de Adevăr

Prezintă valorile de adevăr a unui wff în toate posibilele interpretări

Exemplu - tabela de adevăr pentru ¬ (p ∨ q) " r

Avem 3 propoziții atomice (p,q,r) deci avem 2^3 interpretări posibile (în general 2^n, unde n este numărul de propoziții atomice distincte)

p	q	r	¬	(p	∨	q)	"	r
f	f	f	t	f	f	f		f
f	f	t	t	f	f	f		t
f	t	f	f	f	t	t		f
f	t	t	f	f	t	t		t
t	f	f	f	t	t	f		f
t	f	t	f	t	t	f		t
t	t	f	f	t	t	t		f
t	t	t	f	t	t	t		t

Tabela de Adevăr

Prezintă valorile de adevăr a unui wff în toate posibilele interpretări

Exemplu - tabela de adevăr pentru ¬ (p ∨ q) " r

Avem 3 propoziții atomice (p,q,r) deci avem 2^3 interpretări posibile (în general 2^n, unde n este numărul de propoziții atomice distincte)

p	q	r	¬	(p	∨	q)	"	r
f	f	f	t	f	f	f	f	f
f	f	t	t	f	f	f	t	t
f	t	f	f	f	t	t	t	f
f	t	t	f	f	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	f	t	f
t	f	t	f	t	t	f	t	t
t	t	f	f	t	t	t	t	f
t	t	t	f	t	t	t	t	t

Înțelesul unei formule în toate interpretările este tabela de adevăr (de multe ori, înțelesul = tabela de adevăr)

Tabela de Adevăr

...rile de adevăr a unui wff în toate ...interpretări

...bela de adevăr pentru ¬ (p ∨ q) " r

A... propoziții atomice (p,q,r) deci avem 2^3 interpretări posibile (în ge...al 2^n, unde n este numărul de propoziții atomice distincte)

p	q	r	¬	(p	∨	q)	"	r
f	f	f	t	f	f	f	f	f
f	f	t	t	f	f	f	t	t
f	t	f	f	f	t	t	t	f
f	t	t	f	f	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	f	t	f
t	f	t	f	t	t	f	t	t
t	t	f	f	t	t	t	t	f
t	t	t	f	t	t	t	t	t

Terminologie

Tautologie - o formulă care are valoarea de adevăr T în toate posibilele interpretări (mai spunem că formula este **validă**)

Contradicție - o formulă care are valoarea de adevăr F în toate posibilele interpretări (mai spunem că formula este **nerealizabilă (unsatisfiable)**)

Contingență - o formulă care are valoarea de adevăr F în unele interpretări și T în alte interpretări

O formulă este **realizabilă** (satisfiable) când ea are valoarea de adevăr T în cel puțin o interpretare

Echivalența

În esență, două formule A și B sunt echivalente dacă și numai dacă tabelele lor de adevăr au aceleași valori. Scriem A ≡ B

Exemplu
$p \wedge q \equiv q \wedge p$

p	q	p ∧ q	q ∧ p
F	F	F	F
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	T	T

A ≡ B dacă și numai dacă (A!B) ∧ (B!A) este o tautologie

Echivalențe Utile

¬¬A ≡ A (legea dublei negații) A ∨ true ≡ true

A ∨ false ≡ A

A ∨ A ≡ A (legea idempotenței) A ∨ ¬A ≡ true

A ∧ true ≡ A

A ∧ false ≡ false

A ∧ A ≡ A (legea idempotenței) A ∧ ¬A ≡ false

A ! true ≡ true

A ! false ≡ ¬ A true ! A ≡ A

false ! A ≡ true A ! A ≡ true

A ! B ≡ ¬A ∨ B (legea implicației)

A ! B ≡ ¬B ! ¬A(legea contrapoziției)

¬(A ! B) ≡ A ∧ ¬B

A ! B ≡ A ∧ ¬B ! false Legile comutativității

A ∧ B ≡ B ∧ A

A ∨ B ≡ B ∨ A Legile asociativității

(A ∧ B) ∧ C ≡ A ∧ (B ∧ C)

(A ∨ B) ∨ C ≡ A ∨ (B ∨ C) Legile distributivității

A ∧ (B ∨ C) ≡ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

A ∨ (B ∧ C) ≡ (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)

Legile absorbției

A ∧ (A ∨ B) ≡ A

A ∨ (A ∧ B) ≡ A

A ∧ (¬A ∨ B) ≡ A ∧ B A ∨ (¬A ∧ B) ≡ A ∨ B Legile De Morgan

¬(A ∧ B) ≡ ¬A ∨ ¬B

¬(A ∨ B) ≡ ¬A ∧ ¬B

De ce?

Putem să le utilizâm pentru a arăta că alte formule sunt echivalente fără să folosim tabele de adevăr

Orice sub-wff a unui wff poate fi înlocuit de un wff echivalent fără a schimba valoarea de adevăr a wff-ului original

Regula Înlocuirii

Exemplu
Arătăm că A ! (B ! C) ≡ B ! (A ! C)

A ! (B ! C)
≡ A ! (¬B ∨ C) (legea implicației)
≡ ¬A ∨ (¬B ∨ C) (legea implicației)
≡ (¬A ∨ ¬B) ∨ C (legea asociativității)
≡ (¬B ∨ ¬A) ∨ C (legea comutativității)
≡ ¬B ∨ (¬A ∨ C) (legea asociativității)
≡ B ! (¬A ∨ C) (legea implicației)
≡ B ! (A ! C) (legea implicației)

Forma Normală Disjunctivă

Un literal este o variabilă propozițională sau negata ei
Exemple p, $\neg p$

O conjucție fundamentală este un literal sau o conjuncție de (doi sau mai mulți) literali

Exemple
p, $\neg p$, $\neg p \wedge q$

O formă normală disjunctivă (DNF) este o conjuncție fundamentală sau
o disjuncție de (două sau mai multe) conjuncții fundamentale

Examples
p, $\neg p$, $\neg p \wedge q$, $p \vee (\neg p \wedge q)$, $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$

Orice wff are un DNF echivalent

Pași de conversie

1.Eliminăm toate ! utilizând echivalența $A ! B \equiv \neg A \vee B$

2.Mutăm toate negațiile în sub-wff-uri pentru a crea literali, utilizând legile De Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. Eliminăm dublele negații utilizând echivalența $\neg\neg A \equiv A$

3.Aplicăm distributivitatea $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ pentru a obține DNF

Exemplu

$((p \wedge q) ! r) \wedge s$
$\equiv \quad (\neg(p \wedge q) \vee r) \wedge s$
$\equiv \quad (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge s$
$\equiv ((\neg p \vee \neg q) \wedge s) \vee (r \wedge s)$
$\equiv (\neg p \wedge s) \vee (\neg q \wedge s) \vee (r \wedge s)$

Forma Normală Disjunctivă Completă

Presupunem că un wff W are n variabile propoziționale

Un DNF pentru W e un DNF *complet* dacă fiecare conjuncție fundamentală are exact n literali, unul pentru fiecare din cele n variabile din W

Exemplu pentru $((p \wedge q) ! r) \wedge s$ $(n = 4)$

$(\neg p \wedge s) \vee (\neg q \wedge s) \vee (r \wedge s)$ nu e un DNF complet

Pași de conversie

1,2,3 de pe slide-ul anterior

4. Pentru a adăuga o variabilă lipsă (ex. r) la o conjuncție fundamentală C (conservând valoarea ei) scriem $C \equiv C \wedge true \equiv C \wedge (r \vee \neg r)$. Apoi distribuim $\wedge$ peste $\vee$ pentru a obține o disjuncție de două conjuncții fundamentale. Repetăm pentru toate conjuncțiile fundamentale "incomplete" până obținem un DNF complet

Exemplu

Exemplu

p ! q (are 2 variabile/litere)

≡ ¬p ∨ q

Este un DNF dar nu complet. Introducem q în conjuncția fundamentală ¬p

≡ (¬p ∧ true) ∨ q

≡ (¬p ∧ (q ∨ ¬q)) ∨ q

≡ (¬p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q) ∨ q

Este un DNF dar nu complet. Introducem p în conjuncția fundamentală q

≡ (¬p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q) ∨ (q ∧ true)

≡ (¬p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q) ∨ (q ∧ (p ∨ ¬p))

≡ (¬p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q) ∨ (q ∧ p) ∨ (q ∧ ¬p)

≡ (¬p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q) ∨ (q ∧ p) Acesta e un DNF complet :)

Forma Normală Conjunctivă

Un **literal** este o variabilă propozițională sau negata ei

Exemple p, $\neg p$

O **disjuncție fundamentală** (denumită și clauză) este un literal sau o disjuncție de (doi sau mai mulți) literali

Exemple

p, $\neg p$, $\neg p \vee q$

O **formă normală conjunctivă (CNF)** este o disjuncție fundamentală sau

o conjuncție de (două sau mai multe) disjuncții fundamentale

Exemple

p, $\neg p$, $\neg p \vee q$, $p \wedge (\neg p \vee q)$, $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Forma Normală Conjunctivă Completă

Presupunem că un wff W are n variabile propoziționale distincte

Un CNF pentru W este un CNF *complet* dacă fiecare disjuncție fundamentală are exact n literali, unul pentru fiecare variabilă din W

Pași de conversie

1.Eliminăm toate ! utilizând echivalența $A \,!\, B \equiv \neg A \vee B$

2.Mutăm toate negațiile în sub-wff pentru a crea literali, utilizând legile De Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. Eliminăm negațiile duble utilizând echivalența $\neg\neg A \equiv A$

3.Aplicăm distributivitatea $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ pentru a obține CNF

4.Pentru a adăuga o variabilă lipsă (ex. r) la o disjuncție fundamentală D (conservând valoarea ei) scriem $D \equiv D \vee \text{false} \equiv D \vee (r \wedge \neg r)$. Apoi distribuim $\vee$ peste $\wedge$ pentru a obține o conjuncție de două disjuncții fundamentale. Repetăm pentru toate disjuncțiile fundamentale “incomplete” până când obținem un CNF complet

Exemplu

Exemplu

$p \wedge (p \,!\, q)$ (are 2 litere/variabile)
$\equiv p \wedge (\neg p \vee q)$

Este un CNF dar nu complet. q lipsește din prima disjuncție fundamentală

$\equiv (p \vee \text{false}) \wedge (\neg p \vee q)$
$\equiv (p \vee (\neg q \wedge q)) \wedge (\neg p \vee q)$
$\equiv (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$

Aceasta este un CNF complet :)

Exemplu

Exemplu

$p \wedge (p$! $q)$ (are 2 litere/variabile)
$\equiv$ p $\wedge (\neg p \vee q)$

Este un CNF dar nu complet. q lipsește din prima disjuncție fundame

$\equiv (p \vee \text{false}) \wedge (\neg p \vee q)$
$\equiv (p \vee (\neg q \wedge q)) \wedge (\neg p \vee q)$
$\equiv (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$

Aceasta este un CNF complet :)

Observați
În acest exemplu și în cele anterioare am convertit formule în formule echivalente doar manipulând simboluri pe baza unor reguli. Nu am folosit tabele de adevăr. Putem face și alte lucruri doar "sintactic"? DA!

Sistem Formal de Deducție

Observații

- Tabelele de adevăr sunt suficiente pentru a determina adevărul oricărei formule propoziționale. Dar, când formula are multe variabile și mulți conectori, tabela de adevăr este destul de “complicată” :(

- Noi (ca oameni) nu raționăm în termeni de tabele de adevăr

Un sistem formal de deducție are 3 ingrediente

1. Un set de wff pentru a reprezenta afirmațiile de interes

2. Un set de axiome (adică formule despre care “știm că sunt adevărate/ valide”, de exemplu, arătând cu tabele de adevăr că sunt tautologii)

3. Un set de reguli de inferență

Reguli de Inferență

O regulă de inferență mapează un set de wff-uri, numite premise sau antecedenți, într-un singur wff denumit concluzie sau consecvent

$$\frac{P_1, P_2, \ldots, P_k}{\therefore\ C}$$

Spunem:
"C este inferat din P_1 și P_2 și ... și P_k"
"C este consecință directă a lui P_1 și P_2 și ... și P_k"
$\therefore$ e citit ca "deci", "prin urmare", "astfel", etc

O regulă de inferență conservă adevărul logic

Cu alte cuvinte
În orice interpretare în care toate premisele sunt adevărate, concluzia e adevărată
Când toate premisele sunt tautologii, concluzia e o tautologie

Pentru o regulă de inferență $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_k$! C este o tautologie

Unele Reguli de Inferență în Logica Propozițională

$$\frac{A \rightarrow B,\ A}{\therefore\ B}$$

Modus ponens (MP)

$$\frac{A \rightarrow B,\ \neg B}{\therefore\ \neg A}$$

Modus tollens (MT)

$$\frac{A,\ B}{\therefore\ A \land B}$$

Conjunction (Conj)

$$\frac{A}{\therefore\ A \lor B}$$

Addition (Add)

$$\frac{A \lor B,\ \neg A}{\therefore\ B}$$

Disjunctive syllogism (DS)

$$\frac{A \land B}{\therefore\ A}$$

Simplification (Simp)

$$\frac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C}{\therefore\ A \rightarrow C}$$

Hypothetical syllogism (HS)

$$\frac{A \lor B,\ \neg B \lor C}{\therefore\ A \lor C}$$

Resolution Rule

Ele conservă adevărul logic

Să arătăm asta pentruMP

A ! B, A

∴ B

Modus ponens (MP)

(A ! B) ∧ A ! B este o tautologie

A	B	A ! B	(A!B) ∧ A	(A ! B) ∧ A ! B
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

Observați că, atunci când premisele sunt adevărate, concluzia e adevărată

Ce putem face cu ele ?

Construim demonstrații

O demonstrație - o secvență finită de wff-uri, fiecare wff fiind
a.o axiomă sau
b.inferată din wff-uri anterioare utilizând reguli de inferență

1. W_1 Motiv pentru W_1
2. W_2 Motiv pentru W_2
3. W_3 Motiv pentru W_3
…
n. W_n Motiv pentru W_n **Acest wff (adică W_n) e denumit teoremă**

Tehnici de demonstrare

1.Demonstrare condiționată
2.Demonstrare indirectă

Demonstrare Condiționată

De obicei vrem să demonstrăm lucruri precum: dacă A, B și C sunt adevărate atunci D e adevărat

“D e consecință a lui A, B și C”
sau “Din premisele A, B și C putem concluziona D” sau $A \wedge B \wedge C$! D

O demonstrare condiționată dintr-un set de premise este o secvență finită de wff-uri, fiecare wff fiind:
a.o axiomă sau
b.o premisă sau
c.inferată din wff-uri anterioare prin reguli de inferență

Regula Demonstrării Condiționate (CP)
Vrem o demonstrație pentru $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$! B. Construim o demonstrație pentru B utilizând ca premise $A_1, \ldots, A_n$

Exemplul 1

Construim o demonstrație pentru (a ∨ b) ∧ (a ∨ c) ∧ ¬a ! b ∧ c

1. a ∨ b	**P**
2. a ∨ c	**P**
3. ¬a	**P**
4. b	**1, 3, DS**
5. c	**2, 3, DS**
6. b ∧ c	**4, 5, Conj**
7. QED. 1,2,3,6,CP	

$$\frac{A \lor B,\ \neg A}{\therefore\ B}$$

Disjunctive syllogism (DS)

$$\frac{A, B}{\therefore\ A \land B}$$

Conjunction (Conj)

Exemplul 2

Echipa câștigă sau eu sunt trist. Dacă echipa câștigă atunci eu merg la un film. Dacă eu sunt trist atunci câinele meu latră. Câinele meu nu latră. Prin urmare eu merg la un film.

w - echipa câștigă s - eu sunt trist
m - eu merg la un film
b - câinele meu latră

Echipa câștigă sau eu sunt trist. w ∨ s Dacă echipa câștigă atunci eu merg

la un film. w ! m

Dacă eu sunt trist atunci câinele meu latră. s ! b

Câinele meu nu latră. ¬b

Prin urmare eu merg la un film. (w ∨ s) ∧ (w ! m) ∧ (s ! b) ∧ ¬b ! m

Exemplul 2 (cont.)

(w ∨ s) ∧ (w ! m) ∧ (s ! b) ∧ ¬b ! m

1. w ∨ s	**P**
2. w ! m	**P**
3. s ! b	**P**
4. ¬b	**P**
5. ¬s	**3,4, MT**
6. w	**1,5, DS**
7. m	**2,6, MP**
8. QED	**1,2,3,4,7,CP**

$$\frac{A\,!\;\; B, A}{\therefore\ B}$$

Modus ponens (MP)

$$\frac{A\,!\,B,\ \neg B}{\therefore\ \neg A}$$

Modus tollens (MT)

$$\frac{A \vee B,\ \neg A}{\therefore\ B}$$

Disjunctive syllogism (DS)

Regulile de Inferență Conservă Adevărul !

A ! B, A

∴ B

Modus ponens
(MP)

În creierul pozitronic al lui Data (simplificat)

1. C P		nunta e anulată (C)	(true)
2. C ! H P		dacă nunta e anulată (C) atunci Keiko e fericită (H) dacă	(true)
3. H ! S P		Keiko e fericită (H) atunci O'Brian e încântat (S)	(true)
4. H	1,2,MP		
5. S	3,4,MP		
6. QED	1,2,3,5,CP	O'Brian e încântat :)	

Regulile de Inferență Conservă Adevărul !

A ! B, A

∴ B

Modus ponens
(MP)

În creierul pozitronic al lui Data (simplificat)

1. C	P	nunta e anulată (C)	(true)
2. C ! H	P	dacă nunta e anulată (C) atunci Keiko e fericită (H)	(true)
3. H ! S	P	dacă Keiko e fericită (H) atunci O'Brian e încântat (S)	(true)
4. H	1,2,MP		
5. S	3,4,MP		
6. QED	1,2,3,5,CP	O'Brian e încântat :)	

Cum ?!?!??!
O'Brian nu e încântat (S e fals) ??!?!?
Dar Data a demonstrat ! E Data defect ?
Este Logica incorectă ?

Regulile de Inferență Conservă Adevărul !

Logica e corectă, regulile de inferență sunt corecte, demonstrația e corectă dar ... pornind de la premise FALSE putem demonstra corect lucruri incorecte !

Deci Data funcționează corect din punctul de vedere al Logicii; problema lui este că nu poate înțelege și anticipa emoțiile umane

$$\frac{A\ !\quad B, A}{\therefore\ B}$$

Modus ponens (MP)

În creierul pozitronic al lui Data (simplificat)

Unele din aceste premise sunt de fapt false

1. C	P	nunta e anulată (C)	(true)
2. C ! H	P	dacă nunta e anulată (C) atunci Keiko e fericită (H)	(true)
3. H ! S	P	dacă Keiko e fericită (H) atunci O'Brian e încântat (S)	(true)
4. H	1,2,MP		
5. S	3,4,MP		
6. QED	1,2,3,5,CP	O'Brian e încântat :)	

Cum ?!?!??!
O'Brian nu e încântat (S e fals) ??!?!?
Dar Data a demonstrat ! E Data defect ?
Este Logica incorectă ?

Demonstrare Indirectă

Să construim demonstrații nu e tocmai simplu

Alternative

$A \,!\, B \equiv \neg B \,!\, \neg A$. Încercăm să demonstrăm contrapozitiva lui $A \,!\, B$. Altfel spus, construim o demonstrație pentru $\neg B \,!\, \neg A$

$A \,!\, B \equiv A \wedge \neg B \,!\,$ false. Încercăm să demonstrăm a doua formulă. Demostrația trebuie să concluzioneze fals. Aceasta este o demonstrație "reductio ad absurdum".

Regula demonstrării indirecte (IP)

Vrem o demonstrație pentru $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \,!\, B$. Construim o demonstrație pentru fals utilizând premisele $A_1, \ldots, A_n$ și $\neg B$

Exemplul 3

Aceeași problemă cu filmul și câinele :)
(w ∨ s) ∧ (w ! m) ∧ (s ! b) ∧ ¬b ! m

1. w ∨ s	**P P P P**
2. w ! m	**P for IP**
3. s ! b	**2, 5, MT**
4. ¬b	
5. ¬m	
6. ¬w	
7. ¬s	**3, 4, MT**
8. ¬w ∧ ¬s	**6, 7, Conj**
9. ¬(w ∨ s)	**8, (DeMorgan)**
10. (w ∨ s) ∧ ¬(w ∨ s)	**1,9, Conj**
11. false	**10, (A ∧ ¬A ≡ false)**
12. QED 1,2,3,4,5,11,IP	

$$\frac{A\ !\quad B, \neg B}{\therefore\ \neg A}$$

Modus tollens
(MT)

$$\frac{A,\ B}{\therefore\ A \wedge B}$$

Conjunction (Conj)

Înapoi la Sisteme Formale de Deducție

În exemplele anterioare de demostrații am folosit diferite reguli de inferență + diferite echivalențe (ex. DeMorgan) ca axiome

Există oare un sistem pentru logica propozițională care să aibă un set fix de reguli de inferență și axiome și în care:

1. **Toate demonstrațiile să producă teoreme care sunt tautologii (proprietatea de soundness)**

2. **Toate posibilele tautologii să fie demonstrabile ca teoreme (proprietatea de completeness)**

Da, există :)

Exemplu

Axiome

1. **α ! (β ! α)**
2. **(α ! (β !ϒ)) ! ((α ! β) ! (α ! ϒ))**
3. **(¬β ! ¬α) ! (α ! β)**

Regula de inferență

<u> α ! β, α</u>

∴ β

Modus ponens (MP)

Demonstrație pentru p ! p

1. $p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$ **A1**
2. $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$ **A2**
3. $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$ **1,2,MP**
4. $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ **A1**
5. $p \rightarrow p$ **3,4,MP**

Regula Rezoluției în Logica Propozițională

$$\frac{\alpha \lor \beta,\ \neg\beta \lor \gamma}{\therefore\ \alpha \lor \gamma}$$

Regula de inferență a Rezoluției

$(\alpha \lor \beta) \land (\neg\beta \lor \gamma)$! $(\alpha \lor \gamma)$ este o tautologie

α	β	γ	¬β	α∨β	¬β∨γ	α∨γ	(α∨β)∧(¬β∨γ)	(α∨β)∧(¬β∨γ)!α∨γ
F	F	F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T	F	T
T	T	T	F	T	T	T	T	T

Rescriere În Termeni de Disjuncții Fundamentale

Literalii - variabile propoziționale sau negata lor (ex. p, ¬q)

Doi literali se spune că sunt complemenți dacă unul e negata celuilalt Exemple

p,¬p q,¬q

$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_i \vee \ldots \vee a_n$, $b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_j \vee \ldots \vee b_m$ $a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n \vee b_1 \vee \ldots \vee b_{j-1} \vee b_{j+1} \vee \ldots \vee b_m$

unde:

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ sunt literali

a_i, b_j sunt complemenți (ex. $a_i = p$, $b_j = \neg p$)

Rezultatul produs se numește rezolvent

p, ¬p

#

Un caz important - Obținerea clauzei (disjuncție fundamentală) vide înseamnă fals

Demonstrarea cu Rezoluție în Logica Propozițională

Pentru a demonstra că W e valid

1. Formăm negata ¬W. De exemplu, dacă W are forma $A \land B \land C$! D atunci ¬W va fi $A \land B \land C \land \neg D$
2. Transformăm ¬W în forma clauzală (CNF pentru logica propozițională)
3. Luăm clauzele (disjuncții fundamentale) ca premise
4. Aplicăm regula rezoluției pentru a obține clauza vidă (fals). Dacă o găsim înseamnă că avem o contradicție

Din moment ce ¬W e o contradicție, W este validă

Utilă pentru automatizare :)

Exemplu

Aceeași problemă cu filmul și câinele :) $W = (w \lor s) \land (w\ !\ m) \land (s\ !\ b) \land \neg b\ !\ m$

$\neg W = \neg((w \lor s) \land (w\ !\ m) \land (s\ !\ b) \land \neg b\ !\ m)$

$\equiv \quad \neg(\neg((w \lor s) \land (w\ !\ m) \land (s\ !\ b) \land \neg b) \lor m)$

$\equiv \quad \neg\neg((w \lor s) \land (w\ !\ m) \land (s\ !\ b) \land \neg b) \land \neg m$

$\equiv (w \lor s) \land (w\ !\ m) \land (s\ !\ b) \land \neg b \land \neg m$ (Obs. concluzia inițială e negată)

$\equiv (w \lor s) \land (\neg w \lor m) \land (\neg s \lor b) \land \neg b \land \neg m$

1. $w \lor s$	P
2. $\neg w \lor m$	P
3. $\neg s \lor b$	P
4. $\neg b$	P P
5. $\neg m$	3,4,Resolution
6. $\neg s$	6,1,Resolution
7. w	2,5,Resolution
8. $\neg w$ 9. #	7,8,Resolution

QED.

$$\frac{p \lor C,\ \neg p \lor D}{\therefore\ C \lor D}$$

(disjuncțiile redundante din clauze se elimină)

Logică și Structuri Discrete

Logica Predicatelor (de ordinul întâi)

După James Hein - Discrete Structures, Logic and Computability and J.Russell, P. Norvig - Artificial Intelligence
Section 7.1 First Order Predicate Calculus (Intro, Well-Formed Formulas, Semantics, Validity - Only the first part) pp. 351 - pp. 362
Section 7.2 Equivalencies (Normal Forms, English Sentences) pp. 374 - pp. 379 Section 9.2 (Subsection Clauses and Clausal Form pp. 455 - pp. 460, Subsection Substitution and Unification pp. 462 - 467 - The algorithm and Composition of substitutions sub-subsections are optional) Subsection Resolution: The general Case pp. 467 - pp. 470) Subsection Theorem Proving with Resolution pp. 473 - pp. 474)

De ce altă Logică?

O propoziție (în logica propozițională)
este o afirmație ca întreg

Toți specialiștii în știința calculatoarelor dețin un computer.
Socrate nu deține un computer.
Deci, Socrate nu e specialist în știința calculatoarelor.

Pentru formalizare, trebuie să spargem afirmațiile în părțile lor. Toți, deține sunt cuvinte importante pentru a înțelege argumentația aceasta

Predicatul

Informal, un predicat este o afirmație care poate fi falsă ori adevărată în funcție de valoarea variabilelor sale

"x deține un computer"

Este fals sau adevărat ?
Nu știm deoarece valoarea de adevăr depinde de x

"Mihai deține un computer"
Afirmația devine propoziție și are valoarea de adevăr true

Predicatul - Exemple

Formal, predicatul e o relaţie

(poate fi văzut şi ca o proprietate)

Fie Pc(x) însemnând "x deţine un computer"
***Pc* este un predicat ce descrie proprietatea de a deţine un computer**
Pc(Mihai) este adevărat

Fie Q(x,y) însemnând "x < y"
Q este un predicat pe care îl cunoştem ca relaţia "mai mic decât" Q(1,9) este adevărat
Q(8,3) este fals

Fie P(x) însemnând "x este un întreg impar" P(9) este adevărat
P(8) este fals

Cuantificatorul Existențial

Fie P(x) însemnând “x este un întreg impar”

$P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5)$ este adevărat sau

$D = \{2, 3, 4, 5\}$
$\exists x \in D : P(x)$ este adevărat

Considerând afirmația fără să ținem cont de un anume set de numere și fără să ținem cont de ce înseamnă P, putem scrie

$\exists x\ P(x)$

și îl citim “există un x astfel încât P(x)”

Observați că nu putem da o valoare de adevăr acestei afirmații

Cuantificatorul Universal

Fie P(x) însemnând "x este un întreg impar"

$P(1) \wedge P(3) \wedge P(5) \wedge P(7)$ este adevărat sau

$D = \{1, 3, 5, 7\}$
$\forall x \in D : P(x)$ este adevărat

Considerând afirmația fără să ținem cont de un anume set de numere și fără să ținem cont de ce înseamnă P, putem scrie

$\forall x \; P(x)$

și citim "pentru orice x P(x)"

Observați că nu putem da o valoare de adevăr acestei afirmații

Sintaxa Logicii Predicatelor

Alfabetul

Variabile: x, y, ...
Constante: a, b, c, ...
Funcții: f, g, h, ...
Predicate: P, Q, R, ... **Conectori:** ¬, !, ∧ , ∨
Cuantificatori: ∀, ∃
Simboluri de punctuație: (,)

Sintaxa (cont.)
Formule bine formate (FBF) în logica predicatelor

Un termen este o variabilă, o constantă sau o funcție aplicată unor argumente care la rândul lor sunt termeni
Exemple
x, a, f(x,g(b))

Un atom (formulă atomică) este un predicat aplicat unor argumente care la rândul lor sunt termeni
Exemple
P(x,a), Q(y, f(x))

FBF în logica de ordinul întâi (definiție inductivă) Baza: Orice atom este un fbf
Inducția: Dacă W și V sunt fbf-uri și x este o variabilă atunci următoarele expresii sunt fbf-uri

(W), ¬W, W ∧ V, W ∨ V, W ! V, ∃x W, ∀x W

Exemplu
∃x P(x,y) ! Q(x)

Sintaxa (cont.)
Formule bine formate (FBF) în logica predicatelor

Un termen este o variabilă, o constantă sau o funcție aplicată unor argumente care la rândul lor sunt termeni
Exemple
x, a, f(x,g(b))

Un atom (formulă atomică) este un predicat aplicat unor argumente care la rândul lor sunt termeni
Exemple
P(x,a), Q(y, f(x))

FBF în logica de ordinul întâi (definiție inductivă) Baza: Orice atom
Inducția: Dacă W și V sunt fbf-uri și x este o variabilă atunci urmă
expresii sunt fbf-uri

(W), ¬W, W ∧ V, W ∨ V, W ! V, ∃x W, ∀x W

Exemplu
∃x P(x,y) ! Q(x)

Observați că putem cuantifica numai variabile. În acest caz ne referim la logica predicatelor de ordinul întâi (la care ne vom rezuma).
Există și alte logici superioare în care putem cuantifica și alte lucruri

Ordinea de Evaluare

1. Priorități (obs. pentru cuantificatori, aceste convenții pot diferi de la autor la autor)

$\exists x$, $\forall y$, $\neg$ (cea mai mare prioritate - evaluate primele)

$\wedge$

$\vee$

! (cea mai mică prioritate - evaluată ultima)

2. Dacă cuantificatorii sau negațiile apar unele lângă altele atunci simbolul cel mai din dreapta este grupat cu cea mai mică **fbf** din dreapta simbolului

3. $\wedge$, $\vee$, ! sunt asociative la stânga

Exemple

$\forall x\ P(x)\ !\ Q(x)$ înseamnă $(\forall x\ P(x))\ !\ Q(x)$

$\exists x\ \neg P(x,y)\ !\ Q(x) \wedge R(y)$ înseamnă $(\exists x\ (\neg P(x,y)))\ !\ (Q(x) \wedge R(y))$

$\exists x\ P(x)\ !\ \forall x\ Q(x) \vee P(x) \wedge R(x)$ înseamnă $(\exists x\ P(x))\ !\ ((\forall x\ Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x)))$

Domeniul Cuantificatorului / Variabile Libere și Legate

Aria de influență a unui cuantificator se numește domeniul cuantificatorului

Exemple (culoarea e domeniul)

$\forall x\ P(x) \ !\ Q(x)$

$\exists x\ P(x) \ !\ \forall x\ Q(x) \vee P(x) \wedge R(x)$

$\exists x\ P(x,y) \ !\ Q(x)$

$\exists x\ (P(x,y) \ !\ Q(x))$

O apariție a unei variabile x într-un FBF e legată dacă ea e localizată în domeniul unui $\exists x$ sau $\forall x$ sau este variabila cuantificatorului însăși. Altfel, apariția se spune că e liberă

Exemple (roșu/portocaliu - legat; albastru - liber)

$\forall x\ P(x) \ !\ Q(x)$

$\exists x\ P(x) \ !\ \forall x\ Q(x) \vee P(x) \wedge R(x)$

$\exists x\ P(x,y) \ !\ Q(x)$

$\exists x\ (P(x,y) \ !\ Q(x))$

Legări

Dacă x e o variabilă și t este un termen atunci x/t se numește legare a lui x cu t

W(x/t) este fbf-ul obținut din W înlocuind toate aparițiile libere a lui x cu t

Exemple

$W = P(x) \vee \exists x\ Q(x,y)$

$W(x/a) = P(a) \vee \exists x\ Q(x,y)$

$W(x/a)(y/b) = P(a) \vee \exists x\ Q(x,b)$

Semantica - Interpretare

O interpretare a unui fbf constă dintr-un set D (ne-vid) denumit domeniul interpretării, împreună cu o atribuire ce asociază fiecărui simbol din fbf:

1. Fiecărui simbol de predicat (n-ar) trebuie să îi atribuim o relație (n-ară) peste D. Un predicat fără argumente este o propoziție căreia trebuie să-i atribuim o valoare de adevăr (adevărat sau fals)

2. Fiecărui simbol de funcție (n-ară) trebuie să îi atribuim o funcție (n-ară) peste D

3. Fiecărei variabile libere trebuie să îi atribuim o valoare din D. Toate aparițiile libere a unei variabile x îi atribuim aceeași valoare

4. Fiecărei constante trebuie să îi atribuim o valoare din D. Toate aparițiile aceleeași constante îi atribuim aceeași valoare

Semantica - Exemple de Interpretări

Fie W = ∀x(P(f(x,x),x) ! P(x,y))

O interpretare

Domeniul interpretării este N (numere naturale)
P este relația de egalitate y = 0
f(a,b) = (a + b) % 3

∀x∈N ((((x+x) % 3) = x) ! (x = 0))

O altă interpretare

Domeniul interpretării este D = {a,b}
P este relația de egalitate y = a
f(a, a) = a, f(b,b) = b

∀x∈D ((f(x,x) = x) ! (x = a))

Semantica (cont.)

Presupunem că avem o interpretare cu domeniul D pentru un fbf

Dacă **fbf**-ul nu are cuantificatori atunci înțelesul ei este valoarea de adevăr a expresiei obținută din fbf aplicând interpretarea

Dacă **fbf**-ul conține cuantificatori atunci fiecare expresie a unui cuantificator e evaluată astfel:

$\exists$x W e adevărat dacă W(x/d) e adevărat pentru un d $\in$ D. Altfel expresia e falsă
$\forall$x W e adevărat dacă W(x/d) e adevărat pentru orice d $\in$ D. Altfel expresia e falsă

Semantica - Exemple

Fie W = $\forall$x (P(f(x,x),x) ! P(x,y))

Interpretarea

Domeniul D = {a,b}
P e relația de egalitate y = a
f(a,a) = a, f(b,b) = b

$\forall$x$\in$D ((f(x,x) = x) ! (x = a))

“$\forall$x W e adevărat dacă W(x/d) e adevărat pentru orice d $\in$ D. Altfel e fals”

W(x/a) = ((f(a,a) = a) ! (a = a)) T ! T
T

W(x/b) = ((f(b,b) = b) ! (b = a)) T ! F
F

Deci, W e falsă în această interpretare

Terminologie

Valid - o formulă care are valoarea de adevăr adevărat în toate interpretările posibile

Nerealizabilă - o formulă care are valoarea de adevăr fals în toate interpretările posibile

Realizabilă - o formulă care are valoarea de adevăr adevărat în cel puțin o interpretare

O interpretare este un **model** pentru o formulă dacă interpretarea face formula adevărată. Altfel, interpretarea se numește **contramodel**

Echivalența

Două formule A și B sunt echivalente dacă și numai dacă ambele au aceași valoarea de adevăr în raport cu orice interpretare pentru A și B. Scriem A≡B

¬(∀x W) ≡ ∃x ¬W (1)

¬(∃x W) ≡ ∀x ¬W (1)

∀x∀y W ≡ ∀y∀x W

∃x∃y W ≡ ∃y∃x W

∃x(P(x) ∨ Q(x)) ≡ ∃x P(x) ∨ ∃x Q(x)

Reguli de redenumire

∃x W(x) ≡ ∃y W(y) dacă y nu apare în W(x)

∀x W(x) ≡ ∀y W(y) dacă y nu apare în W(x) unde W(y) e obținut din W(x) înlocuind toate aparițiile libere a lui x cu y

Dacă x nu apare in fbf-ul V atunci avem următoarele echivalențe:

Disjunții (2)

∀x (V ∨ W(x)) ≡ V ∨ ∀x W(x)

∃x (V ∨ W(x)) ≡ V ∨ ∃x W(x)

Conjuncții (3)

∀x (V ∧ W(x)) ≡ V ∧ ∀x W(x)

∃x (V ∧ W(x)) ≡ V ∧ ∃x W(x)

Implicații

∀x(V ! W(x)) ≡ V ! ∀x W(x)

∃x(V ! W(x)) ≡ V ! ∃x W(x)

∀x(W(x) ! V) ≡ ∃x W(x) ! V

∃x(W(x) ! V) ≡ ∀x W(x) ! V

Forma Normală Prenex

Un fbf W este într-o formă normală prenex dacă toţi cuantificatorii sunt la stânga expresiei

$Q_1x_1 \dots Q_nx_n\, M$ unde Q_i este ∀ sau ∃, fiecare x_i este distinct, M nu conţine ∀ sau ∃

Forma Normală Prenex Disjunctivă

$Q_1x_1 \dots Q_nx_n\, (D_1 \vee D_2 \vee \dots \vee D_m)$, fiecare D_i fiind o conjuncţie fundamentală de literali

Forma Normală Prenex Conjunctivă

$Q_1x_1 \dots Q_nx_n\, (C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m)$, fiecare C_i fiind o disjuncţie fundamentală de literali

Literal - un fbf atomic sau negata lui Exemple

P(x), ¬Q(x,y)

Construirea Formei Prenex CNF/DNF

Pași de conversie și exemplu

Fie $W = \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \,!\, R(x) \wedge \exists x\, R(x)$. O transformăm în Prenex CNF

1.Redenumim variabilele din W în așa fel încât niciun cuantificator nu folosește același nume de variabilă și în așa fel încât variabilele libere sunt diferite de cele cuantificate

$W = \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \,!\, R(x) \wedge \exists x\, R(x)$

$\equiv \forall y\, P(y) \vee \exists z\, Q(z) \,!\, R(x) \wedge \exists w\, R(w)$

2.Eliminăm implicațiile pe baza echivalenței $A \,!\, B \equiv \neg A \vee B$

$\equiv \neg (\forall y\, P(y) \vee \exists z\, Q(z)) \vee (R(x) \wedge \exists w\, R(w))$

3.Împingem negațiile în sub-fbf-uri pentru a crea literali, pe baza echivalențelor $\neg(\forall x\, W) \equiv \exists x \neg W$, $\neg(\exists x\, W) \equiv \forall x \neg W$, $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\neg\neg A \equiv A$

$\equiv \quad (\neg\forall y\, P(y) \wedge \neg\exists z\, Q(z)) \vee (R(x) \wedge \exists w\, R(w))$

$\equiv \quad (\exists y\, \neg P(y) \wedge \forall z\, \neg Q(z)) \vee (R(x) \wedge \exists w\, R(w))$

Construirea Formei Prenex CNF/DNF (cont.)

4. Mutăm cuantificatorii în stânga utilizând echivalențele condiționate

$\forall x(V \vee W(x)) \equiv V \vee \forall x\, W(x)$, $\exists x(V \vee W(x)) \equiv V \vee \exists x\, W(x)$, $\forall x(V \wedge W(x)) \equiv V \wedge \forall x\, W(x)$

$\exists x(V \wedge W(x)) \equiv V \wedge \exists x\, W(x)$

$\equiv \quad (\exists y\, \neg P(y) \wedge \forall z\, \neg Q(z)) \vee (R(x) \wedge \exists w\, R(w))$

$\equiv \quad \exists y\, (\neg P(y) \wedge \forall z\, \neg Q(z)) \vee (R(x) \wedge \exists w\, R(w))$

$\equiv \quad \exists y\, ((\neg P(y) \wedge \forall z\, \neg Q(z)) \vee (R(x) \wedge \exists w\, R(w)))$

$\equiv \quad \exists y\, (\forall z\, (\neg P(y) \wedge \neg Q(z)) \vee (R(x) \wedge \exists w\, R(w)))$

$\equiv \quad \exists y\, \forall z\, ((\neg P(y) \wedge \neg Q(z)) \vee (R(x) \wedge \exists w\, R(w)))$

$\equiv \quad \exists y\, \forall z\, ((\neg P(y) \wedge \neg Q(z)) \vee \exists w\, (R(x) \wedge R(w)))$

$\equiv \exists y\, \forall z\, \exists w\, ((\neg P(y) \wedge \neg Q(z)) \vee (R(x) \wedge R(w)))$

5. Pentru obținerea prenex CNF distribuim $\vee$ peste $\wedge$ (pentru DNF $\wedge$ peste $\vee$)

$\equiv \exists y\, \forall z\, \exists w\, (((\neg P(y) \wedge \neg Q(z)) \vee R(x)) \wedge ((\neg P(y) \wedge \neg Q(z)) \vee R(w)))$

$\equiv \exists y\, \forall z\, \exists w\, ((\neg P(y) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(x)) \wedge (\neg P(y) \vee R(w)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(w)))$

Există sisteme de deducție sound și complete

Reguli de Inferență Adiționale

Câteva exemple

$$\frac{\exists x W(x)}{\therefore W(c)}$$

(dacă c e nouă în demonstrație)
Existential Instantiation

$$\frac{W(x)}{\therefore \exists x W(x)}$$

Existential Generalization (I)

$$\frac{\forall x W(x)}{\therefore W(x)}$$

Universal Instantiation (1)

$$\frac{\forall x\ W(x)}{\therefore W(c)}$$

(unde c este orice constantă)
Universal Instantiation (II)

Demonstrații pe baza Rezoluției

O clauză este o disjuncție de zero sau mai mulți literali

(Literal - un fbf atomic sau negata sa)

Exemple P(x)
¬Q(x,b)
¬P(a) ∨ P(b)

Clauza goală (fără literali) e referită prin # și înseamnă fals

În esență, forma clauzală este forma normală prenex conjunctivă în care toți cuantificatorii sunt universali și nu există variabile libere

Construirea Formei Clauzale

Regula lui Skolem

Fie $\exists x\, W(x)$ parte dintr-un fbf mai mare:
Dacă $\exists x$ nu este în domeniul unui cuantificator universal, alegem o constantă nouă și înlocuim $\exists x\, W(x)$ cu $W(x/c)$
Dacă $\exists x$ este în domeniul lui $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n$, atunci alegem un simbol de funcție nou f
și înlocuim $\exists x\, W(x)$ cu $W(x/f(x_1, x_2 \ldots, x_n))$

Forma obținută nu este neapărat echivalentă cu fbf original, dar fie sunt ambele realizabile fie ambele sunt nerealizabile

Pași de transformare

1.Construim forma normală conjunctivă prenex pentru W
$\exists y\, \forall z\, \exists w\, ((\neg P(y) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(x)) \wedge (\neg P(y) \vee R(w)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(w)))$

2.Înlocuim toate variabilele libere cu constante noi
$\exists y\, \forall z\, \exists w\, ((\neg P(y) \vee R(a)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(a)) \wedge (\neg P(y) \vee R(w)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(w)))$

3.Utilizăm regula lui Skolem pentru a elimina quantificatorii existențiali
$\forall z\, \exists w\, ((\neg P(b) \vee R(a)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(a)) \wedge (\neg P(b) \vee R(w)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(w)))$
$\forall z\, ((\neg P(b) \vee R(a)) \wedge (\neg Q(z) \vee R(a)) \wedge (\neg P(b) \vee R(f(z))) \wedge (\neg Q(z) \vee R(f(z))))$

Reprezentarea Formei Clauzale

Obținem o formulă de forma

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (C_1 \land C_2 \land \ldots C_n)$

fără variabile libere și fără cuantificatori ∃

Reprezentare

$\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ în timp ce fiecare clauză C_i poate fi reprezentată ca și set de literali

Exemplu

$\forall z\, ((\neg P(b) \lor R(a)) \land (\neg Q(z) \lor R(a)) \land (\neg P(b) \lor R(f(z))) \land (\neg Q(z) \lor R(f(z))))$

$\{\neg P(b) \lor R(a), \neg Q(z) \lor R(a), \neg P(b) \lor R(f(z)), \neg Q(z) \lor R(f(z))\}$

$\{\{\neg P(b), R(a)\}, \{\neg Q(z), R(a)\}, \{\neg P(b), R(f(z))\}, \{\neg Q(z), R(f(z))\}\}$

Substituția

O substituție este un set de legări referite prin

$\Theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n\}$ unde x_i sunt variabile distincte și $x_i \neq t_i$ pentru orice i

Fie C un literal/set de literali și Θ o substituție

Aplicarea substituției Θ lui C e referită prin $C\Theta$, iar rezultatul este expresia/expresiile obținute înlocuind / substituind toate aparițiile lui x_i cu termenul t_i

Exemple

$C = \{P(x,y,f(x))\}$, $\Theta = \{x/a, y/f(b)\}$
$C\Theta = \{P(x,y,f(x))\{x/a, y/f(b)\}\} = \{P(a, f(b), f(a))\}$

$C = \{P(x,y), Q(a,y)\}$, $\Theta = \{x/a, y/f(b)\}$
$C\Theta = \{P(x,y), Q(a,y)\}\{x/a, y/f(b)\} = \{P(a,f(b)), Q(a,f(b)\}$

Unificatorul

O substituție Θ este un unificator pentru un set de literali dacă SΘ are exact un element

Exemple
Avem unificatori pentru:

{p(x),q(y)} NU

{p(x),¬p(x)} NU

{p(a), p(x)}
DA. Θ = {x/a}. Să vedem: {p(a),p(x)}{x/a} = {p(a),p(a)} = {p(a)}

{p(x),p(y)}
DA, chiar mai mulți. {x/y}, {y/x}, {x/t,y/t} pentru orice t

În esență, cel mai general unificator (cgu) este cel mai general set de legări ce poate fi găsit (există pași de determinare a lui)

Regula de Inferență a Rezoluției

Literali - fbf atomice (adică, predicate) sau negarea lor (ex. P(x), ¬Q(y))

Doi literali se spune că sunt complemenți dacă unul e negata celuilalt

$$\frac{a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_i \vee \ldots \vee a_n \quad , b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_j \vee \ldots \vee b_m}{(a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n \vee b_1 \vee \ldots \vee b_{j-1} \vee b_{j+1} \vee \ldots \vee b_m)\,\Theta}$$

unde:

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ sunt literali

a_i, b_j sunt complemenți și Θ este cel mai general unificator pentru ei (ex. $a_i = P(x)$, $b_j = \neg P(y)$ și UNIFY($P(x), P(y)$) = Θ)

Rezultatul este rezolventul

Notă. Pentru simplitate, presupunem că clauzele sunt reprezentate ca seturi și deci, disjuncțiile redundante sunt eliminate.Verificăm dacă cele două clauze au variabile distincte (redenumim dacă e necesar)

Demonstrarea prin Rezoluție

Pentru a demonstra că W este valid

1.Formăm negata ¬W. De exemplu, dacă W are forma A ∧ B ∧ C ! D atunci ¬W va fi A ∧ B ∧ C ∧ ¬D
2.Aducem la forma clauzală
3.Luăm clauzele ca premise
4.Aplicăm regula rezoluției pentru a deriva clauza vidă (fals)

Dacă e găsită, W este valid (din moment ce ¬W nu este). Dacă nu putem crea noi rezolvenți, nu e validă. Terminarea procedurii nu e garantată.

Exemplul 1

$$P(a,b) \wedge P(c,b) \wedge P(b,d) \wedge P(a,e) \wedge (P(x,z) \wedge P(z,y)\ !\ G(x,y))\ !\ G(a,d)$$

$$\neg W = \neg(P(a,b) \wedge P(c,b) \wedge P(b,d) \wedge P(a,e) \wedge (P(x,z) \wedge P(z,y)\ !\ G(x,y))\ !\ G(a,d))$$
$$= \neg(\neg(P(a,b) \wedge P(c,b) \wedge P(b,d) \wedge P(a,e) \wedge (P(x,z) \wedge P(z,y)\ !\ G(x,y))) \vee G(a,d))$$
$$= P(a,b) \wedge P(c,b) \wedge P(b,d) \wedge P(a,e) \wedge (P(x,z) \wedge P(z,y)\ !\ G(x,y)) \wedge \neg G(a,d)$$
$$= P(a,b) \wedge P(c,b) \wedge P(b,d) \wedge P(a,e) \wedge (\neg(P(x,z) \wedge P(z,y)) \vee G(x,y)) \wedge \neg G(a,d)$$
$$= P(a,b) \wedge P(c,b) \wedge P(b,d) \wedge P(a,e) \wedge (\neg P(x,z) \vee \neg P(z,y) \vee G(x,y)) \wedge \neg G(a,d)$$

1. $P(a,b)$	P
2. $P(c,b)$	P
3. $P(b,d)$	P
4. $P(a,e)$	P
5. $\neg P(x,z) \vee \neg P(z,y) \vee G(x,y)$	P
6. $\neg G(a,d)$	P (negarea concluziei)
7. $\neg P(a,z) \vee \neg P(z,d)$	5,6,R {x/a,y/d}
8. $\neg P(b,d)$	1,7,R {z/b}
9. #	3,8,R {}

Deci, implicația inițială e validă

Formalizarea Propozițiilor din Limbaj Natural

Socrates nu deține un computer.
Pc(x) “x deține un computer”

$\neg Pc(Socrates)$

Socrates nu este un specialist în știința calculatoarelor.
Cs(x) “x este un specialist în știința calculatoarelor”

$\neg Cs(Socrates)$

Toți specialiștii în știința calculatoarelor dețin un computer.

$\forall x\ (Cs(x) \ !\ Pc(x))$

Unii politicieni sunt corupți.
P(x) “x este politician”
Q(x) “x este corupt”

$\exists x\ (P(x) \land Q(x))$

Niciun politician nu e corupt.

$\forall x\ (P(x) \ !\ \neg Q(x))$

Toți politicienii sunt corupți.

$\forall x\ (P(x) \ !\ Q(x))$

Nu toți politicienii sunt corupți.

$\exists x (P(x) \land \neg Q(x))$

...

Cuantificatorii universali cuantifică o implicație.
Cuantificatorii existențiali cuantifică o conjuncție.

Exemplul 2

Jack deține un câine. Orice deținător de câini este un iubitor de animale. Nici un iubitor de animale nu omoară un animal. Fie Jack sau Curiosity au omorât pisica a cărei nume e Tuna. Cine a omorât pisica ?

A. ∃x (Dog(x) ∧ Owns(Jack, x))
B. ∀x (∃y (Dog(y) ∧ Owns(x, y)) ! AnimalLover(x))
C. ∀x (AnimalLover(x) ! ∀y (Animal(y) ! ¬Kills(x,y)))
D. Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)
E. Cat(Tuna)
F. ∀x (Cat(x) ! Animal(x))
G. ∃x Kills(x,Tuna)   unde Jack,Tuna, Curiosity sunt constante

∃x (Dog(x) ∧ Owns(Jack, x)) ∧
∀x (∃y (Dog(y) ∧ Owns(x, y)) ! AnimalLover(x)) ∧
∀x (AnimalLover(x) ! ∀y (Animal(y) ! ¬Kills(x,y))) ∧
(Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)) ∧
Cat(Tuna) ∧
∀x (Cat(x) ! Animal(x)) !
∃x Kills(x,Tuna)

Exemplul 2 (cont.)

Negăm și eliminăm ultima implicație

∃x (Dog(x) ∧ Owns(Jack, x)) ∧
∀x (∃y (Dog(y) ∧ Owns(x, y)) ! AnimalLover(x)) ∧
∀x (AnimalLover(x) ! ∀y (Animal(y) ! ¬Kills(x,y))) ∧
(Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)) ∧
Cat(Tuna) ∧
∀x (Cat(x) ! Animal(x)) ∧
¬ ∃x Kills(x,Tuna)

Redenumim

∃x (Dog(x) ∧ Owns(Jack, x)) ∧
∀z (∃y (Dog(y) ∧ Owns(z, y)) ! AnimalLover(z)) ∧
∀t (AnimalLover(t) ! ∀v (Animal(v) ! ¬Kills(t,v))) ∧
(Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)) ∧
Cat(Tuna) ∧
∀r (Cat(r) ! Animal(r)) ∧
¬ ∃w Kills(w,Tuna)

Exemplul 2 (cont.)

Înlocuim implicațiile

$\exists x\ (Dog(x) \land Owns(Jack, x)) \land$

$\forall z\ (\neg\exists y\ (Dog(y) \land Owns(z, y)) \lor AnimalLover(z)) \land$

$\forall t\ (\neg AnimalLover(t) \lor \forall v\ (\neg Animal(v) \lor \neg Kills(t,v))) \land$

$(Kills(Jack,Tuna) \lor Kills(Curiosity,Tuna)) \land$

$Cat(Tuna) \land$

$\forall r\ (\neg Cat(r) \lor Animal(r)) \land$

$\neg\ \exists w\ Kills(w,Tuna)$

Mutăm negațiile

$\exists x\ (Dog(x) \land Owns(Jack, x)) \land$

$\forall z\ (\forall y\ (\neg Dog(y) \lor \neg Owns(z, y)) \lor AnimalLover(z)) \land$

$\forall t\ (\neg AnimalLover(t) \lor \forall v\ (\neg Animal(v) \lor \neg Kills(t,v))) \land$

$(Kills(Jack,Tuna) \lor Kills(Curiosity,Tuna)) \land$

$Cat(Tuna) \land$

$\forall r\ (\neg Cat(r) \lor Animal(r)) \land$

$\forall w\ \neg Kills(w,Tuna)$

Exemplul 2 (cont.)

Extragem Cuantificatorii

$\exists x\ \forall z\ \forall y\ \forall t\ \forall v\ \forall r\ \forall w$ (
(Dog(x) ∧ Owns(Jack, x)) ∧
(¬Dog(y) ∨ ¬Owns(z, y) ∨ AnimalLover(z)) ∧
(¬AnimalLover(t) ∨ ¬Animal(v) ∨ ¬Kills(t,v)) ∧
(Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)) ∧
Cat(Tuna) ∧
(¬Cat(r) ∨ Animal(r)) ∧
¬Kills(w,Tuna)
)

Eliminăm cuantificatorii ∃

$\forall z\ \forall y\ \forall t\ \forall v\ \forall r\ \forall w$ (
(Dog(SomeDog) ∧ Owns(Jack, SomeDog)) ∧
(¬Dog(y) ∨ ¬Owns(z, y) ∨ AnimalLover(z)) ∧
(¬AnimalLover(t) ∨ ¬Animal(v) ∨ ¬Kills(t,v)) ∧
(Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)) ∧
Cat(Tuna) ∧
(¬Cat(r) ∨ Animal(r)) ∧
¬Kills(w,Tuna)
)

Exemplul 2 (cont.)

Reținem doar cauzele Dog(SomeDog) ∧
Owns(Jack, SomeDog) ∧
(¬Dog(y) ∨ ¬Owns(z, y) ∨ AnimalLover(z)) ∧
(¬AnimalLover(t) ∨ ¬Animal(v) ∨ ¬Kills(t,v)) ∧
(Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)) ∧
Cat(Tuna) ∧
(¬Cat(r) ∨ Animal(r)) ∧
¬Kills(w,Tuna)

Exemplul 2 (cont.)

1. Dog(SomeDog)	P
2. Owns(Jack, SomeDog)	P
3. ¬Dog(y) ∨ ¬Owns(z, y) ∨ AnimalLover(z)	P
4. ¬AnimalLover(t) ∨ ¬Animal(v) ∨ ¬Kills(t,v)	P
5. Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)	P
6. Cat(Tuna)	P
7. ¬Cat(r) ∨ Animal(r)	P
8. ¬Kills(w,Tuna)	P
9. Kills(Jack,Tuna)	5, 8, Res {w/Curiosity}
10. Animal(Tuna)	6,7, Res {r/Tuna}
11. ¬AnimalLover(t) ∨ ¬Kills(t,Tuna)	10,4, Res {v/Tuna}
12. ¬Owns(z, SomeDog) ∨ AnimalLover(z)	1,3, Res {y/SomeDog}
13. AnimalLover(Jack)	12,2,Res {z/Jack}
14. ¬Kills(Jack,Tuna)	11,13,Res {t/Jack}
15. #	9,14,Res {}

Deci, implicația inițială e validă și Curiosity (w/Curiosity) a omorât-o pe Tuna.