Дискретная математика. Отношения

27.09.2024

Конспект Сайфуллина Искандара БПО09-01-24

Свойства Отношений

Рефлексивность:

$$\forall a \in A : aRa$$

Антирефлексивность: $\forall a \in A : a\overline{R}a$

Симметричность:

$$\forall a, b \in A : aRb \to bRa$$

Антисимметричность:

$$\forall a, b \in A : aRb = bRa \to a = b$$

Транзитивность:

$$\forall a, b, c \in A : aRb \land bRc \to aRc$$

Полнота:

$$\forall a, b \in A : aRb \lor bRa$$

Отношение порядка

- Антисимметричность
- Транзитивность
- Рефлексивность $\to$ нестрогий порядок
- Антирефлексивность $\to$ строгий порядок
- Полнота $\to$ полный порядок

Экстремумы множества

- $\nexists a \in A : b < a \land b \neq a \to a$ – минимальный элемент
- $\nexists a \in A : b > a \land b \neq a \to a$ – максимальный элемент

Отношение эквивалентности

- Рефлексивность
- Симметричность
- Транзитивность

Обозначения:

$$a \equiv b$$

$$a \sim b$$

$$a \Leftrightarrow b$$

Факторомножество

$R \subseteq A \times A$
$\forall a \in A : \exists A_1 \subseteq A : A_1 = \{y \mid y \in A, y \sim a\}$, A_1 – **класс эквивалентности**

Множество всех классов эквивалентности называется **фактомножеством множества** A по эквивалентности R и обозначается $A/R = \{[x] \mid x \in A\}$

Матричное представление отношений

Отношение можно представить квадратной матрицей

- Рефлексивность $\rightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n : a_{ii} = 1$
- Антирефлексивность $\rightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n : a_{ii} = 0$
- Симметричность $\rightarrow \forall i, j : 1 \leq i, j \leq n : a_{ij} = a_{ji}$

Леммы о классах эквивалентности

- $\forall a \in A : [a] \neq \emptyset$
- $a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$
- $a \nsim b \Rightarrow [a] \neq [b]$