MT09-A2017 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Place n^o:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soient C une matrice carrée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$ et d un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On étudie l'itération linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^{(k+1)} & = & Cx^{(k)} + d \quad \forall k = 0, 1, \ldots \\ x^{(0)} & & \text{donné.} \end{array} \right.$$

1. Donner une condition nécessaire sur C pour que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On veut résoudre le système $Ax = b$. Donner la matrice C et le vecteur d dans le cas où on applique la méthode de Gauss-Seidel. On définira les matrices D, E et F du cours.
3. Application : dire si pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, la méthode de Gauss-Seidel converge ou non.

Exercice 2 *(barème approximatif : 1.5 points)*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ pour $n > 0$ une matrice symétrique définie positive.

1. Montrer que toute les sous-matrices principales de A, notées $[A]_k$ pour $k = 1, \ldots, n$, sont symétriques définies positives.
2. Déterminer le noyau d'une matrice symétrique définie positive.
3. Conclure sur la faisabilité de la factorisation $A = LU$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_{10}$. On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).
2. Dans le reste de cet exercice, on prend $t = 3$, $L = -1$, $U = 3$.
   (a) Donner l'écart absolu entre deux flottants successifs. Que vaut $\varepsilon_{\text{mach}}$?
3. (a) Calculer en addition flottante : $x = 100 \oplus 0.6$. Que vaut l'erreur relative?
   (b) Calculer en addition flottante : $y = (100 \oplus 0.6) \ominus 100$. Que vaut l'erreur relative? Commenter.

MT09-A2017- Examen médian
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5.5 points.*
RÉDIGER LES EXERCICES 2 ET 3 SUR LA MÊME COPIE!
EXERCICE 1 SUR COPIE SÉPARÉE.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 6 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Toutes les matrices de cet exercice sont carrées à n lignes et n colonnes ($n > 0$). Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ définie par

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{où } h = \frac{1}{n}.$$

1. Calculer $|||A|||_\infty$.
2. On pose $A = \dfrac{4}{h}(I + N)$, où I est la matrice identité. Déterminer N et calculer $|||N|||_\infty$.
3. Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée.
   (a) Montrer que $|||I||| = 1$.
   (b) Soit E une matrice carrée. Montrer que si $|||E||| < 1$, alors la matrice $I + E$ est inversible.
   (c) Vérifier alors que $(I + E)^{-1} = I - (I + E)^{-1}E$ et en déduire
   $$|||(I + E)^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - |||E|||}.$$
4. Utiliser le résultat précédent pour obtenir une majoration de $|||A^{-1}|||_\infty$.
5. En déduire une majoration du conditionnement de A pour la norme $|||\cdot|||_\infty$.
6. Que peut-on dire de ce comportement quand $h \to 0$?

Exercice 2 : *(barème approximatif : 9 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les questions 4, 5 et 6 sont partiellement indépendantes des précédentes.

Soit un entier $n \geq 1$. On rappelle que la factorisation de Cholesky $A = CC^T$ d'une matrice de taille n nécessite de l'ordre de $\dfrac{n^3}{6}$ multiplications. Le coût de la résolution d'un système triangulaire est de l'ordre de $\dfrac{n^2}{2}$.

Soient $n > 0$ et $p > 0$ deux entiers. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n matrices symétriques et inversibles de $\mathcal{M}_{p,p}$. Soient également $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, $n-1$ matrices de $\mathcal{M}_{p,p}$. On définit la matrice $K \in \mathcal{M}_{np,np}$ par

$$K = \begin{bmatrix} A_1 & B_1^T & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ B_1 & A_2 & B_2^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & A_3 & B_3^T & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & B_{n-2} & A_{n-1} & B_{n-1}^T \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{n-1} & A_n \end{bmatrix},$$

où $0 \in \mathcal{M}_{p,p}$ est la matrice nulle. On veut résoudre $K\mathbf{x} = \mathbf{f}$, où $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{np}$ est donné. Pour ce faire, on décompose les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{f}$ en blocs :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix}, \quad \text{où } \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p, \text{ et } \mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^p, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

1. On suppose que A_1 est symétrique définie positive.
   (a) Montrer que les p premières lignes de $K\mathbf{x} = \mathbf{f}$ sont équivalentes à
   $$C_1^T \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{x}_2 = \mathbf{g}_1, \tag{1}$$
   où C_1 est triangulaire inférieure avec des termes diagonaux strictement positifs. On donnera l'expression de la matrice D_1 et du vecteur $\mathbf{g}_1$ en fonction de C_1, de B_1 et de $\mathbf{f}_1$.
   (b) Exprimer B_1 en fonction de C_1 et de D_1.
2. (a) En utilisant (1), montrer que le deuxième bloc d'équations dans $K\mathbf{x} = \mathbf{f}$ (lignes $i = p + 1$ à $2p$) est équivalent à
   $$\widetilde{A}_2 \mathbf{x}_2 + B_2^T \mathbf{x}_3 = \widetilde{\mathbf{f}}_2, \tag{2}$$
   où $\widetilde{A}_2$ et $\widetilde{\mathbf{f}}_2$ sont à exprimer en fonction de A_2, D_1, de $\mathbf{f}_2$ et de $\mathbf{g}_1$.
   (b) Montrer que $\widetilde{A}_2$ est symétrique.
   (c) On suppose que $\widetilde{A}_2$ est définie positive. Montrer que (2) est équivalent à
   $$C_2^T \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{x}_3 = \mathbf{g}_2, \tag{3}$$
   où C_2 est triangulaire inférieure avec des termes diagonaux strictement positifs. On donnera l'expression de la matrice D_2 et du vecteur $\mathbf{g}_2$ en fonction de C_2, de B_2, de D_1, de $\mathbf{f}_2$ et de $\mathbf{g}_1$.
3. On suppose par la suite que toute les matrices $\widetilde{A}_i$ sont symétriques définies positives.
   Montrer que le système $K\mathbf{x} = \mathbf{f}$ est équivalent à
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} C_i^T \mathbf{x}_i + D_i \mathbf{x}_{i+1} & = & \mathbf{g}_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ C_n^T \mathbf{x}_n & = & \mathbf{g}_n \end{array} \right. , \tag{4}$$
   où $C_i \in \mathcal{M}_{p,p}$ est triangulaire inférieure avec des termes diagonaux strictement positifs. On donnera l'équation vérifiée par C_i en fonction de A_i et de D_{i-1} et on donnera l'expression de la matrice D_i et du vecteur $\mathbf{g}_i$ en fonction de C_i, de B_i, de D_{i-1}, de $\mathbf{f}_i$ et de $\mathbf{g}_{i-1}$.
4. On suppose qu'on dispose des fonctions scilab : `[x]=solsup(U,b)`, `[x]=solinf(L,b)`, `[C]=cholesky(A)`, `[L,U]=LU(A)`, `[B]=inverse(A)` (on ne demande pas de les réécrire ici).
   (a) Écrire une fonction scilab : `[M]=solinfMat(L, N)`, qui étant données une matrice triangulaire inférieure inversible L et une matrice N, calcule $M = L^{-1}N$
   (b) Donner le coût en nombre de multiplications d'une telle fonction.
5. On suppose qu'on dispose en plus de fonctions scilab :
   `[Ai]=getBlockMat(A, i)`, `[A]=setBlockMat(A, i, Bi)`,
   `[xi]=getBlockVec(x, i)`, `[x]=setBlockVec(x, i, yi)`.
   Étant donné $A = [A_1, A_2, \dots, A_n] \in \mathcal{M}_{p,np}$, la fonction `getBlockMat` extrait de A le bloc $A_i \in \mathcal{M}_{p,p}$ pour $i = 1, \dots, n$. Inversement, la fonction `setBlockMat` insère dans le bloc i de A la matrice $B_i \in \mathcal{M}_{p,p}$ ($A_i \leftarrow B_i$ et tous les autres blocs restent inchangés). La fonction `getBlockVec` extrait du vecteur bloc $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]^T \in \mathcal{M}_{pn,1}$ le vecteur $\mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_{p,1}$. Inversement la fonction `setBlockVec` insère dans le bloc i de $\mathbf{x}$ le vecteur $\mathbf{y}_i \in \mathcal{M}_{p,1}$ ($\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{y}_i$ et tous les autres blocs restent inchangés).
   En utilisant certaines fonctions scilab disponibles, écrire une fonction scilab : `[x]=resout(A, B, f, n)` qui étant donnés $A = [A_1, A_2, \dots, A_n] \in \mathcal{M}_{p,np}$, $B = [B_1, B_2, \dots, B_{n-1}] \in \mathcal{M}_{p,(n-1)p}$ et $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_{np,1}$ résout $K\mathbf{x} = \mathbf{f}$ par la méthode décrite ci-dessus.
   Si vous n'avez pas trouvé l'algorithme : à défaut, vous pouvez programmer la fonction : `[x]=resout(C, D, g, n)` qui résout (4), en supposant connus $C = [C_1, C_2, \dots, C_n] \in \mathcal{M}_{p,np}$, $D = [D_1, D_2, \dots, D_{n-1}] \in \mathcal{M}_{p,(n-1)p}$ et $\mathbf{g} \in \mathcal{M}_{np,1}$.
6. Calculer le nombre de multiplications de la fonction que vous avez programmée.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 2 points)*

RÉDIGER SUR LA MÊME COPIE QUE L'EXERCICE 2

Soit un réel $\varepsilon > 0$. On étudie le système

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon \\ 6 \end{bmatrix}.$$

1. Effectuer l'élimination de Gauss en arithmétique exacte.
2. On suppose que l'on travaille en flottant en base 10 avec 3 chiffres significatifs et on prend $\varepsilon = 10^{-4}$. Refaire les calculs en arithmétique flottante.