MT09-A2016 – Examen final – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Place n° :

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit A une matrice réelle de $\mathcal{M}_{mn}$ avec $m > n$ de rang n. On suppose donnée la factorisation $A = QR$.

1. Donner les dimensions et les propriétés de Q et R.
2. Écrire les équations normales et donner un système triangulaire équivalent (on montrera cette équivalence).
3. Calculer la norme 2 de $A^T A$ en fonction de la norme 2 d'une matrice issue de R, notée $\hat{R}$ que l'on déterminera.
4. Même question pour la norme 2 de $(A^T A)^{-1}$.
5. En déduire une relation entre le conditionnement de $A^T A$ et celui de $\hat{R}$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit E un espace euclidien de dimension $n > 0$. On appelle $< u, v >$ son produit scalaire et $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$ sa norme, $\forall u, v \in E$. Soit F un sous-espace de E de dimension $k \leq n$. Soit $y \in E$ un vecteur donné.

Soit p_y le projeté orthogonal de y dans F.

1. Écrire les conditions vérifiées par p_y.
2. Montrer que $\|f - y\|^2 > \|p_y - y\|^2, \ \forall f \in F, \ f \neq p_y$.
3. On prend une base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ de F. Écrire le système que vérifient les composantes de p_y dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit $h > 0$. On pose $t_0 = -2h$, $t_1 = 0$ et $t_2 = h$.

1. Écrire les polynômes de la base de Lagrange associée à $t_0, \ t_1, \ t_2$.
2. Soit une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire le polynôme interpolant f aux points t_i, $i = 0, 1, 2$.
3. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$. On prend maintenant les points $\theta_i = \theta_0 + ih$, pour $i = 0, \ldots, N$. Étant donnés $(f_i)_{i=0,\ldots,N}$ et $(c_i)_{i=0,\ldots,N-1}$, on définit les polynômes :

$$p_i(t) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h}(t - \theta_i) + \frac{c_i}{h^2}(t - \theta_i)(t - \theta_{i+1}).$$

   On définit la fonction g par : $g(t) = p_i(t) \quad$ si $t \in [\theta_i, \theta_{i+1}[$.

   Montrer que g est continue sur $[\theta_0, \theta_N[$.

MT09-A2016- Examen final
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *6 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 12 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les questions 3), 4) et 5) sont partiellement indépendantes des précédentes.

Soient deux réels t_0 et $T > 0$ et un entier $N > 0$. On introduit le pas $h = T/N$ et les points $t_n = t_0 + nh$ pour $n = 0, \ldots, N$.

1. Soit y une fonction de classe C^1 de $[t_0, t_0 + T]$ dans $\mathbb{R}$. On notera $y_n = y(t_n)$ la valeur de y en t_n, pour $n = 0, \ldots, N$. On appelle p_y le polynôme interpolant la fonction y aux points t_{n+1}, t_n, t_{n-1}.
   (a) Écrire p_y dans la base de Newton associée à t_{n+1}, t_n, t_{n-1} (dans cet ordre).
   (b) Calculer $p_y'(t_{n+1})$ en fonction de y_{n+1}, y_n, y_{n-1} et de h uniquement.

2. Soit f une fonction de classe C^1 : $(t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre numériquement l'équation différentielle suivante :
$$\text{trouver } y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}), \text{ telle que } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$
   Pour cela, on va approcher $y'(t_{n+1})$ par $p_y'(t_{n+1})$.
   (a) Écrire la relation $p_y'(t_{n+1}) \approx y'(t_{n+1})$ et en déduire un schéma du type :
$$z_{n+1} = \alpha_0 z_n + \alpha_1 z_{n-1} + h\beta f(t_{n+1}, z_{n+1}), \tag{2}$$
   pour résoudre le problème (1). Déterminer les coefficients α_0, α_1 et β.
   (b) Ce schéma est-il implicite ou explicite? Est-il à un pas ou multi-pas? Expliquer comment déterminer z_1.

3. On cherche à calculer l'ordre du schéma (2), pour des valeurs α_0, α_1 et β quelconques. On suppose que y est de classe au moins C^4.
   (a) Écrire un développement de Taylor de $y(t_{n+1})$ autour de t_n à l'ordre 3 en h.
   (b) Écrire un développement limité de $y(t_{n-1})$ autour de t_n à l'ordre 3 en h.
   (c) Écrire un développement limité de $y'(t_{n+1})$ autour de t_n à l'ordre 2 en h.
   (d) Calculer l'erreur de troncature locale et en déduire des relations entre α_0, α_1 et β pour que le schéma (2) soit au moins d'ordre 2. Les valeurs trouvées à la question 2a) conviennent-elles?

4. Soit $\omega > 0$. On définit une suite réelle par la récurrence
$$(3 + 2\omega)u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1} = 0, \quad n \geq 1. \tag{3}$$
   (a) On cherche une solution à la suite sous la forme $u_n = Kr^n$. Écrire l'équation caractéristique de (3).
   (b) Montrer que la suite converge vers 0. On distinguera les cas où les racines de l'équation caractéristique sont réelles ou complexes.
   (c) Dans cette question uniquement, on prend $f(t, u) = -\lambda u$, avec $\lambda > 0$. On prend les valeurs de α_0, α_1 et β trouvées à la question 3d).
   Déduire des questions précédentes sous quelle condition sur h le schéma (2) est absolument stable.

5. Soit p un entier > 0. On suppose dorénavant que la fonction f de classe C^2 est vectorielle : $(t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}^p$. On cherche à résoudre l'équation non-linéaire
$$\text{trouver } x^\star \in \mathbb{R}^p, \text{ tel que } x^\star = \alpha_0 z_n + \alpha_1 z_{n-1} + h\beta f(t_{n+1}, x^\star) \tag{4}$$
   par la méthode de Newton.

(a) Reformuler ce problème (4) en une équation $G(x) = 0$: déterminer G.

(b) Calculer la matrice jacobienne $DG(x)$ en fonction des dérivées partielles de f.

(c) **Application :** Soit ξ, k, u_0 et v_0 des réels fixés. Soit l'équation différentielle :

$$\text{trouver } u \in C^1([t_0, t_0+T], \mathbb{R}), \text{ telle que } \begin{cases} u''(t) = \xi u'(t) + ku^2(t) \ \forall t \in [t_0, t_0+T], \\ u(t_0) = u_0, \ u'(t_0) = v_0. \end{cases} \tag{5}$$

i. Mettre cette équation différentielle (5) sous forme d'une équation différentielle du type :

$$\text{trouver } y \text{ telle que } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [t_0, t_0+T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Expliciter la fonction f de cette équation différentielle, en précisant bien les espaces de départ et d'arrivée.

ii. Calculer G et sa matrice jacobienne $DG(x)$ dans ce cas.

6. **Programmation du schéma :** On suppose toujours que f est une fonction vectorielle : $f : (t, y) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}^p$, pour $p > 0$.

(a) Écrire une fonction scilab [X,k] = newtonSchema(X0, tol, Niter, h, t, Zn, Znm1, f, dfdy) implémentant la méthode de Newton pour la résolution du système d'équations non-linéaires $G(x) = 0$, où la fonction G est définie à la question 5a).

Expliquer rapidement quel rôle jouent les arguments f et dfdy. Détailler en particulier les dimensions de leurs arguments d'entrée et de sortie.

(b) Écrire les fonctions scilab ma_fun et ma_dfundy, qui seront appelées par newtonSchema quand G est donnée à la question 5c).

(c) Écrire une fonction scilab Y = schema(y0, y1, t0, T, N, f, dfdy) implémentant le schéma (2).

Décrire comment vous sauvegardez la solution. Quel point initial X0 choisissez-vous dans l'appel à newtonSchema à chaque pas de temps?

Exercice 2 : *(barème approximatif : 5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit $n \geq 3$ un entier. Soient $(t_i)_{i=1,\ldots,n}$ n points distincts ($t_i \neq t_j$ si $i \neq j$) dans l'intervalle $[-10, 10]$ et $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ n réels.

1. On cherche la parabole qui passe au plus près (au sens des moindres carrés) des points $(t_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$.

(a) Poser le problème de moindres carrés et les équations à résoudre.

(b) Prouver que ces équations admettent une solution unique.

2. On suppose données les fonctions scilab suivantes :

`[p] = hornv(a, t, theta)`,

qui, étant donnés les vecteurs $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $(t_1, t_2, ..., t_{n-1})$, $(\theta_1, ..., \theta_m)$, calcule le vecteur $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ dont les termes sont définis par

$$p_j = a_1 + a_2(\theta_j - t_1) + a_3(\theta_j - t_1)(\theta_j - t_2) + ... + a_n(\theta_j - t_1)...(\theta_j - t_{n-1}), \text{ pour } j = 1, ..., m.$$

à l'aide de l'algorithme de Horner.

`[Q, R] = qr(A)`, qui effectue la factorisation $A = QR$,

`[x] = solsup(A, b)`, qui résout le système triangulaire supérieur $Ax = b$,

`[x] = solinf(A, b)`, qui résout le système triangulaire inférieur $Ax = b$.

Écrire une fonction scilab : `trace(t, y, N)` qui trace le polynôme de degré ≤ 2 passant au plus près des points $(t_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$. On tracera la courbe avec N points dans l'intervalle $[-10, 10]$.