MT09-A2015 – Examen médian – Questions de cours
Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :

ATTENTION, il y a QUATRE exercices indépendants pour cette partie questions de cours !

Exercice 1 *(barème approximatif : 1.5 points)*

1. Énoncer sans le démontrer le théoréme du point fixe. On précisera bien toutes les hypothèses et toutes les conclusions.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| < +\infty$ et $\sup_{x\in\mathbf{R}} |g(x)| < +\infty$. Montrer que
$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbf{R}} |g(x)|. \tag{1}$$

Exercice 2 *(barème approximatif : 1 point)*

Soit la matrice
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $|||A|||_\infty$, $|||A|||_1$, $|||A|||_2$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 1.5 points)*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m et $n > 0$).

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A)$.
2. Montrer que $A^T A$ est symétrique semi-définie positive.
3. Montrer que les valeurs propres de $A^T A$ sont positives ou nulles.

Exercice 4 *(barème approximatif : 1.5 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_{10}$. On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).
2. Dans le reste de cet exercice, on prend $t = 2$, $L = -1$, $U = 3$.
   (a) Que vaut l'écart entre deux flottants successifs sur $[0.1, 1]$?
   (b) Donner une majoration de l'écart relatif entre deux flottants successifs. Que vaut $\varepsilon_{\text{mach}}$?
3. (a) Calculer en addition flottante : $x = 100 \oplus 0.6$. Que vaut l'erreur relative?
   (b) Calculer en addition flottante : $y = (100 \oplus 0.6) \ominus 100$. Que vaut l'erreur relative? Commenter.

MT09-A2015- Examen médian
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5 points.*

Exercice 1 : *(barème approximatif : 8 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

La question 6 ne dépend que de la question 3. Les questions 4 et 5 sont largement indépendantes des autres.

Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). On désire effectuer la factorisation $A = UL$ de A (au lieu de LU), où

- U est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale,
- et L est une matrice triangulaire inférieure avec des termes diagonaux non-nuls.

On suppose que cette factorisation existe.

1. Montrer que
$$A_{ij} = \sum_{\alpha=r}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha j}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n,$$
où r est un entier dépendant de i et j à déterminer.
2. (a) Calculer $\underline{L}_n$ la dernière ligne de L.
   (b) Calculer U_n la dernière colonne de U. À quelle condition ce calcul est-il faisable?
3. Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. On suppose qu'on connaît $\underline{L}_{k+1}, \ldots, \underline{L}_n$ et $U_{k+1}, \ldots, U_n$. En utilisant le produit matriciel, montrer, en le faisant, que l'on peut calculer $\underline{L}_k$ et U_k. (On pourra chercher à exprimer les termes de la ligne k de A puis de la colonne k de A).
   À quelle condition ce calcul est-il faisable?
4. Montrer que si la factorisation $A = UL$ existe, alors elle est unique.
5. Soit les matrices par blocs :
$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}.$$
On suppose que $M_{11} \in \mathcal{M}_{r_1,r_1}(\mathbb{R})$ et $M_{22} \in \mathcal{M}_{r_2,r_2}(\mathbb{R})$ et que $N_{11} \in \mathcal{M}_{s_1,s_1}(\mathbb{R})$ et $N_{22} \in \mathcal{M}_{s_2,s_2}(\mathbb{R})$.
   (a) Donner les conditions sur r_1, r_2, s_1 et s_2 pour que le produit par bloc ait un sens. Donner également les tailles de M_{12} et de N_{21}.
   (b) Calculer le produit MN par blocs.
   (c) Pour $k = 0, \ldots, n-1$, on appelle $[A]_{n-k}$ les sous matrices de A constituées des A_{ij} tels que $i = n-k, \ldots, n$ et $j = n-k, \ldots, n$. Quelle est la taille de $[A]_{n-k}$? Que valent $[A]_{n-k}$ pour $k = 0$ et $k = n-1$?
   (d) À partir d'une décomposition par bloc des matrices U et L, écrire l'expression de $[A]_{n-k}$.
   (e) Déduire de la question précédente que si la factorisation $A = UL$ est faisable, alors $[A]_{n-k}$ est inversible, pour tout $k = 0, \ldots, n-1$.
6. Écrire une fonction scilab : `function [U, L] = UL(A)` qui effectue la factorisation $A = UL$. (Un bonus sera accordé pour une version vectorielle du programme).
7. Écrire une fonction scilab : `function [x] = resol(A, b)` qui résout le système $Ax = b$ avec la factorisation UL. On suppose que l'on dispose des fonctions du TP2, qui ne seront donc pas réécrites ici.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit une matrice M appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Soit $||| \cdot |||$ une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\| \cdot \|$.

1. On suppose que $|||M||| < 1$.
   (a) Déterminer le noyau de $I + M$ et en déduire que $I + M$ est inversible.
   (b) On pose $N = (I + M)^{-1}$. En partant de la définition de l'inverse d'une matrice, montrer que
   $$|||N||| \leq \frac{1}{1 - |||M|||}.$$
2. Soit A dans $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et b dans $\mathbb{R}^n$. Nous appelons $x \in \mathbb{R}^n$ la solution du système $Ax = b$. Nous considérons le système perturbé $(A + \delta A)\hat{x} = b$, où $\delta A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. On pose $\delta x = \hat{x} - x$.
   (a) Quelle équation satisfait δx en fonction de A, δA et x?
   (b) On suppose que $|||A^{-1}\delta A||| < 1$. Déduire des questions précédentes que
   $$\|\delta x\| \leq \frac{|||A^{-1}|||}{1 - |||A^{-1}\delta A|||} \; |||\delta A||| \; \|x\|.$$
   (c) Écrire une majoration de l'erreur relative $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ en fonction du conditionnement de A et de l'erreur relative sur les données $\dfrac{|||\delta A|||}{|||A|||}$ uniquement.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 4 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit T une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}_{2n,2n}(\mathbb{R})$ et H un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{2n}$ ($n > 0$), on cherche V, vecteur colonne de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $TV = H$.

On décompose T, H et V en blocs de la façon suivante :

$$T = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & M \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix},$$

où $M, N \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, 0 matrice nulle $\in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, E, F, X, Y vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$.

On démontre, et nous l'admettrons, que

$$TV = H \Leftrightarrow \begin{cases} MX + NY = E \\ MY = F \end{cases} . \tag{2}$$

On suppose que l'on dispose des fonctions Scilab suivantes :

- `function [L, U] = LU(A)`
  Étant donnée la matrice A, cette fonction calcule sa factorisation LU : $A = LU$.
- `function [x] = resolLU(A, b)`
  Étant donnés la matrice A et le vecteur b, cette fonction calcule la factorisation LU de A puis résout $Ax = b$.
- `function [B] = inverse(A)`
  Étant donnée la matrice A, cette fonction calcule l'inverse $B = A^{-1}$ de A.
- `function [x] = solinf (L,b)`
  Étant donnés la matrice triangulaire inférieure L et le vecteur colonne b, cette fonction résout $Lx = b$.
- `function [x] = solsup (U,b)`
  Étant donnés la matrice triangulaire supérieure U et le vecteur colonne b, cette fonction résout $Ux = b$.

1. Écrire une fonction Scilab
   - `function [V] = sol(M, N, H)` qui étant donnés les matrices M et N et le vecteur H, calcule le vecteur V tel que $TV = H$, en utilisant la relation (2).
2. Donner le nombre de multiplications nécessaires pour la résolution de ce système en utilisant (2).
   Quel serait le nombre de multiplications nécessaires pour résoudre directement $TV = H$? Expliquer.