MT09 - Analyse numérique $\rightarrow$ label "ModMat"

Vincent MARTIN (LMAC, GI),
Faker BEN BELGACEM (LMAC, GI),
Florian DE VUYST (LMAC, GI),
Delphine BRANCHERIE (Roberval, IM),
Hassan SMAOUI (Roberval, IM)

Organisation de l'UV

- Organisation
  - 2h de cours - mardi 16h30-18h30 - FA100
  - 2h de TD,
  - 2h de TP tous les 15 jours,
  - 1h de soutien optionnel (MA09) - mardi 18h30-19h30 : inscription obligatoire aujourd'hui.

Organisation de l'UV

- Organisation
  - 2h de cours - mardi 16h30-18h30 - FA100
  - 2h de TD,
  - 2h de TP <u>tous les 15 jours</u>,
  - 1h de soutien optionnel (MA09) - mardi 18h30-19h30 : inscription obligatoire aujourd'hui.
- Cours
  - aujourd'hui : introduction à l'analyse numérique
  - chapitre 0 (rappels d'algèbre linéaire) non traité
  - rappels d'algèbre linéaire aux moments utiles

Organisation de l'UV

- Organisation
  - 2h de cours - mardi 16h30-18h30 - FA100
  - 2h de TD,
  - 2h de TP tous les 15 jours,
  - 1h de soutien optionnel (MA09) - mardi 18h30-19h30 : inscription obligatoire aujourd'hui.
- Cours
  - aujourd'hui : introduction à l'analyse numérique
  - chapitre 0 (rappels d'algèbre linéaire) non traité
  - rappels d'algèbre linéaire aux moments utiles
- TP
  - 2h (semaine A ou B)
  - 7 TPs par étudiant : présence obligatoire.
    - 1ère séance : prise en main de scilab + exercices sur les flottants
    - séances 2 à 7 : TPs notés au cours de la séance (en binôme)

Planning

MT09 A2018												
	L	L	L	Ma	Ma	Ma	Me	Me	J	V	V	V
lundi vendredi	TP1	TD1	TP2	TD2	TP2	Cours	TD3	TP1-TP2	TD4	TP4	TD5	TP5
du 9 septembre au 13 septembre						Cours 1 : Chap1						
du 16 septembre au 20 septembre	A1	TD1	A1	TD1	A1	Cours 2 : Chap2	TD1		TD1	A1	TD1	A1
du 23 septembre au 27 septembre	B1	TD2	B1	TD2	B1	Cours 3 : Chap2	TD2		TD2	B1	TD2	B1
du 30 septembre au 04 octobre	A2	TD3	A2	TD3	A2	Cours 4 : Chap2	TD3		TD3	A2	TD3	A2
du 07 octobre au 11 octobre	B2	TD4	B2	TD4	B2	Cours 5 : Chap4	TD4		TD4	B2	TD4	B2
du 14 octobre au 18 octobre	A3	TD5	A3	TD5	A3	Cours 6 : Chap4/7	TD5		X	A3	TD5	A3
du 21 octobre au 25 octobre												
du 28 octobre au 01 novembre	J:A3	J:TD5	J:A3	TD6	B3	Cours 7 : Chap7	TD6		TD6			
du 04 novembre au 8 novembre	B3	TD6	B3	V:TD6	V:B3	X	X		X	A4	X	A4
du 11 novembre au 15 novembre				X	A4	Médian	X	L:A4	TD7	B4	TD7	B4
du 18 novembre au 22 novembre	B4	TD7	B4	TD7	B4	Cours 8 : Chap7	TD7		TD8	A5	TD8	A5
du 25 novembre au 29 novembre	A5	TD8	A5	TD8	A5	Cours 9 : Chap5	TD8		TD9	B5	TD9	B5
du 02 décembre au 06 décembre	B5	TD9	B5	TD9	B5	Cours 10 : Chap5/3	TD9		TD10	A6	TD10	A6
du 09 décembre au 13 décembre	A6	TD10	A6	TD10	A6	Cours 11 : Chap3	TD10		TD11	B6	TD11	B6
du 16 décembre au 20 décembre	B6	TD11	B6	TD11	B6	Cours 12 : Chap3	TD11		TD12	A7	TD12	A7
du 23 décembre au 27 décembre												
du 30 décembre au 03 janvier												
du 06 janvier au 10 janvier	A7	TD12	A7	TD12	A7	Cours 13 : Chap3/6	TD12		TD13	B7	TD13	B7
du 13 janvier au 17 janvier	B7	TD13	B7	TD13	B7	Cours 14 : Chap6	TD13					
du 20 janvier au 24 janvier				examens finaux								

Cours : mardi 16h30 FA100
TD1 : lundi 16h30 FA518
TD2 : mardi 10h15 FA504
TD3 : mercredi 8h00 FA518
TD4 : jeudi 14h15 FA616
TD5 : vendredi 16h30 FA518

Soutien (MA09) : mardi 18h30 FA100.
TP1 : lundi 10h15 FA506
TP2 : lundi 14h15 FA506
TP3 : mardi 8h00 FA506
TP4 : vendredi 10h15 FA506
TP5 : vendredi 14h15 FB104

Médian : mardi 12 novembre, 16h30 – 18h30.

Début des TPs notés le 30 septembre

Cours, TD et TP : déroulement

- Cours
  - Polycopiés très complets.
  - Travail régulier :
    - Refaire les démonstrations de cours.
    - Prendre des exemples pour comprendre les théorèmes.
    - Travailler les exercices d'application du cours.
    - Voir les aides sur moodle.
    - Réviser les cours précédents : algèbre linéaire (MT23 et chap 0), analyse d'une ou plusieurs variables réelles (MT9X, MT22).
  - Poser des questions en cours, en TD, en TP et sur le forum moodle.

Cours, TD et TP : déroulement

- Cours
  - Polycopiés très complets.
  - Travail régulier :
    - Refaire les démonstrations de cours.
    - Prendre des exemples pour comprendre les théorèmes.
    - Travailler les exercices d'application du cours.
    - Voir les aides sur moodle.
    - Réviser les cours précédents : algèbre linéaire (MT23 et chap 0), analyse d'une ou plusieurs variables réelles (MT9X, MT22).
  - Poser des questions en cours, en TD, en TP et sur le forum moodle.
- TD
  - Avoir travaillé le cours **AVANT** le TD.
  - Exercices en annexes des polys (inutile de les faire avant les TD).

Cours, TD et TP : déroulement

- Cours
  - Polycopiés très complets.
  - Travail régulier :
    - Refaire les démonstrations de cours.
    - Prendre des exemples pour comprendre les théorèmes.
    - Travailler les exercices d'application du cours.
    - Voir les aides sur moodle.
    - Réviser les cours précédents : algèbre linéaire (MT23 et chap 0), analyse d'une ou plusieurs variables réelles (MT9X, MT22).
  - Poser des questions en cours, en TD, en TP et sur le forum moodle.
- TD
  - Avoir travaillé le cours **AVANT** le TD.
  - Exercices en annexes des polys (inutile de les faire avant les TD).
- TP
  - Travail en binôme.
  - Introduction au numérique et à la programmation.
  - Programmation en SCILAB (gratuit, similaire à matlab).
  - Préparation à faire **AVANT** le TP : programme écrit et testé en scilab présenté au début du TP.

Soutien et évaluation

- Soutien
  - une séance de 1h de soutien :
    - mardi 18h30-19h30, après le cours
  - déroulement : séances de réponses aux questions des étudiants
  - **s'inscrire aujourd'hui** pour prise en compte dans votre emploi du temps

Soutien et évaluation

- Soutien
  - une séance de 1h de soutien :
    - mardi 18h30-19h30, après le cours
  - déroulement : séances de réponses aux questions des étudiants
  - **s'inscrire aujourd'hui** pour prise en compte dans votre emploi du temps
- Évaluation
  - médian : 40%
  - final : 40% (note $<$ 6 : éliminatoire)
  - TP : 20% (moyenne $<$ 10 : éliminatoire)

examen médian mardi 12 novembre 2019 de 16h30 à 18h30
à la place du cours

- déroulement du médian et du final :
  - 30 minutes de questions de cours sans document ni outil électronique
  - 1h30 de problèmes. Documents autorisés : exclusivement polycopiés de cours et de Scilab, pas d'outil électronique.

Documents

- Polycopiés
  - chapitres 0, 1 et 2 : distribution maintenant
  - chapitres 3 à 8 : en vente à la BUTC
  - polycopié Scilab : distribution maintenant
- Plateforme moodle
  `moodle.utc.fr/course/view.php?id=665`
  - chapitres de cours avec exercices de cours et de TD (avec correction et/ou indications)
  - forum : vos questions peuvent intéresser les autres !
  - annales
  - planning du semestre
  - équipe enseignante

Contenu du cours

- Chapitres du polycopié de cours
  - chapitre 0 : révisions d'algèbre linéaire (non traité en cours).
  - chapitre 1 : introduction au calcul flottant.
  - chapitre 2 : résolution de systèmes linéaires par méthodes directes.
  - chapitre 3 : problèmes de moindres carrés.
  - chapitre 4 : résolution de systèmes linéaires et non linéaires par méthodes itératives.
  - chapitre 5 : interpolation.
  - chapitre 6 : intégration numérique.
  - chapitre 7 : résolution numérique des équations différentielles.
  - chapitre 8 : calcul des valeurs propres et vecteurs propres.
- Plateforme moodle
  `moodle.utc.fr/course/view.php?id=665`

Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :

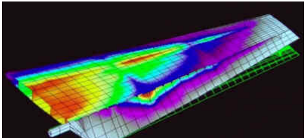
Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :
  - la modélisation :
    - objectif : décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
    - mise en équation des phénomènes physiques observés
    - sous-entendu : hypothèses, domaine de validité limité, description partielle parfois erronée de la réalité, ...

Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :
  - la modélisation :
    - objectif : décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
    - mise en équation des phénomènes physiques observés
    - sous-entendu : hypothèses, domaine de validité limité, description partielle parfois erronée de la réalité, ...

  Exemple : étude d'une aile d'avion



- limiter les essais réels souvent trops chers ou irréalisables (structures uniques), les remplacer par des essais virtuels
- $\Rightarrow$ disposer de modèles (même complexes) prédictifs

Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :
  - la modélisation :
    - objectif : décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
    - mise en équation des phénomènes physiques observés
    - sous-entendu : hypothèses, domaine de validité limité, description partielle parfois erronée de la réalité, ...
  - l'analyse mathématique
    - objectif : étude des équations précédentes
    - existence, unicité de solutions
    - nature des solutions : stables, instables, régulières, singulières. . .

Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :
  - la modélisation :
    - objectif : décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
    - mise en équation des phénomènes physiques observés
    - sous-entendu : hypothèses, domaine de validité limité, description partielle parfois erronée de la réalité, ...
  - l'analyse mathématique
    - objectif : étude des équations précédentes
    - existence, unicité de solutions
    - nature des solutions : stables, instables, régulières, singulières. . .
  - la résolution numérique et la programmation
    beaucoup de problèmes n'ont pas de solutions analytiques : recours aux ordinateurs pour la résolution
    - choix (et étude) de la méthode de résolution
    - écriture des algorithmes de résolution
    - analyse de la solution

Quelques exemples

... où la résolution numérique est incontournable

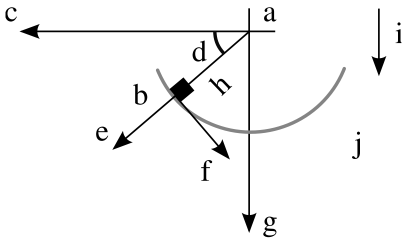
- Un exemple simple : un cube glisse avec frottement sur une piste circulaire

  à l'aller :

$$R\ddot{\theta} = g(\cos\theta - f\sin\theta) - fR\dot{\theta}^2$$

  au retour :

$$R\ddot{\theta} = g(\cos\theta + f\sin\theta) + fR\dot{\theta}^2$$

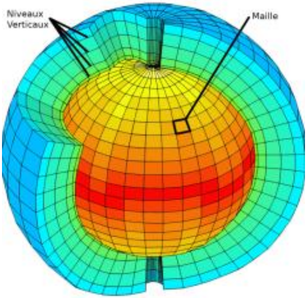


PS91 - extrait d'un médian

Quelques exemples

... où la résolution numérique est incontournable

- Les prévisions météorologiques :
  site de Météo France :
  "La prévision météorologique repose sur deux piliers : la prévision c'est-à-dire la simulation de l'atmosphère sur super-calculateur, et l'analyse et la mise en forme des résultats par des experts prévisionnistes."



Introduction

- Domaines d'application
  physique, mécanique, aéronautique, génie civil, électromagnétisme, météorologie, sciences de l'environnenement (pollution, nappes phréatiques, inondations, ...), biologie, chimie, finance, ...

- Enjeux de l'analyse numérique
  maîtriser les erreurs pour garantir la prédictivité des calculs
  - erreurs d'arrondis
  - erreurs de convergence
  - erreurs de discrétisation

Effets des erreurs d'arrondi

Calcul d'une suite

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Première méthode

- Relation de récurrence :

$$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}\ ,\ I_0 = 1 - \frac{1}{e}$$

- Algorithme de calcul :

```
I(1) = 1-1/e
pour k = 1 jusqu'à n
  I(k+1) = -1/e + kI(k)
fin pour
```

Remarque : I_k est stocké dans $I(k+1)$

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [Inp1]=suite(n)
I(1) = 1- 1/exp(1)
for k=1:n
  I(k+1)=-1/exp(1)+k*I(k)
end
Inp1 = I(n+1)
endfunction
```

- Résultat du calcul direct

n	I_n
0	0.6321206
1	0.2642411
2	0.1606028
3	0.1139289
4	0.0878363
5	0.0713022
6	0.0599336
7	0.0516560
8	0.0453682
9	0.0404341
10	0.0364613
⋮	⋮
15	0.0243801
20	- 82.176892
30	- 8.962D+15
40	- 2.757D+31
⋮	⋮

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [Inp1]=suite(n)
I(1) = 1- 1/exp(1)
for k=1:n
  I(k+1)=-1/exp(1)+k*I(k)
end
Inp1 = I(n+1)
endfunction
```

- Remarques :
  - $|I_n| \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  - $I_n = -\alpha_n \frac{1}{e} + n!\, I_0$
    avec $\alpha_n > 0$ de l'ordre de $n!$, car I_n tend vers 0.
    (Réc. : $\alpha_{n+1} = \alpha_n(n+1) + 1$, $n \geqslant 1$.)

- Résultat du calcul direct

n	I_n
0	0.6321206
1	0.2642411
2	0.1606028
3	0.1139289
4	0.0878363
5	0.0713022
6	0.0599336
7	0.0516560
8	0.0453682
9	0.0404341
10	0.0364613
⋮	⋮
15	0.0243801
20	- 82.176892
30	- 8.962D+15
40	- 2.757D+31
⋮	⋮

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [Inp1]=suite(n)
I(1) = 1- 1/exp(1)
for k=1:n
  I(k+1)=-1/exp(1)+k*I(k)
end
Inp1 = I(n+1)
endfunction
```

- Remarques :
  - $|I_n| \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  - $I_n = -\alpha_n \frac{1}{e} + n!\, I_0$
    avec $\alpha_n > 0$ de l'ordre de $n!$, car I_n tend vers 0.
    (Réc. : $\alpha_{n+1} = \alpha_n(n+1)+1,\ n \geqslant 1$.)
  - Donc $-\alpha_n \frac{1}{e} \to -\infty$ et $n!\, I_0 \to +\infty$ et se compensent presque parfaitement.
    $\Rightarrow$ grosses erreurs d'arrondi.

- Résultat du calcul direct

n	I_n
0	0.6321206
1	0.2642411
2	0.1606028
3	0.1139289
4	0.0878363
5	0.0713022
6	0.0599336
7	0.0516560
8	0.0453682
9	0.0404341
10	0.0364613
$\vdots$	$\vdots$
15	0.0243801
20	- 82.176892
30	- 8.962D+15
40	- 2.757D+31
$\vdots$	$\vdots$

- Calcul d'une suite

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Deuxième méthode

- Relation de récurrence :

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{e} + I_n\right) \ , \ I_N = 0 \text{ pour } N >> n$$

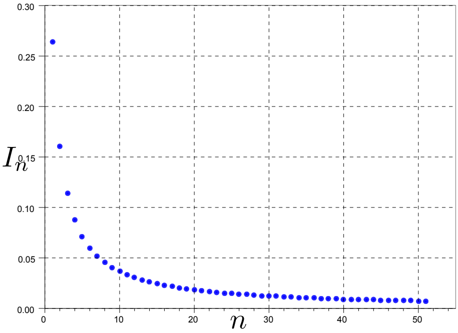
- Algorithme de calcul :

```
I(N+1) = 0
pour k = N jusqu'à n+1 (pas de -1)
  I(k) = (1/k)*(1/e+I(k+1))
fin pour
```

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [Jnp1]=suiteinv(n,N)
    J(N+1)=0;
    for k=N:-1:n+1
        J(k)=(1/exp(1)+J(k+1))/k
    end
    Jnp1 = J(n+1)
endfunction
```



- Résultat du calcul

n	I_n
0	0.6321206
1	0.2642411
2	0.1606028
3	0.1139289
4	0.0878363
5	0.0713022
6	0.0599336
7	0.0516560
8	0.0453682
9	0.0404341
10	0.0364613
⋮	⋮
15	0.0244243
20	0.0183505
30	0.0122495
40	0.0091914
⋮	⋮

Effets des erreurs d'arrondi

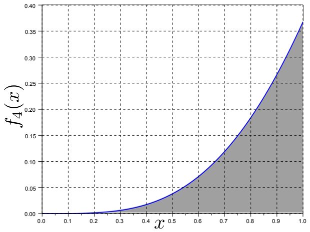
- Calcul d'une suite

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Troisième méthode

- Calcul par intégration numérique :

pour n = 4

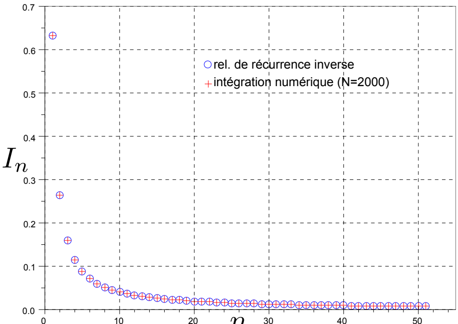


- Méthode de calcul : formule du trapèze

$$\int_0^1 f_n(x)dx \simeq h \times \frac{f_n(0)}{2} + h \times \sum_{i=1}^{N-1} f_n(x_i) + h \times \frac{f_n(1)}{2}$$

- Programme Scilab :

```
function [T]=trapeze(f,n,N)
    h=1/N;
    T = (f(n,0)+f(n,1))/2
    for k=1:N-1
        T= T + f(n,k*h)
    end
    T = T*h
endfunction
```



- Résultat du calcul

n	I_n (N=20)	I_n (N=2000)
0	0.6321206	0.6322522
1	0.2642411	0.2640328
2	0.1606028	0.1606794
3	0.1139290	0.1140823
4	0.0878363	0.0880663
5	0.0713022	0.0716087
6	0.0599337	0.0603167
7	0.0516560	0.0521155
8	0.0453682	0.0459040
9	0.0404341	0.0410462
10	0.0364614	0.0371496
⋮	⋮	⋮
15	0.0244244	0.0254904
20	0.0183506	0.0197885
30	0.0122497	0.0144049
40	0.0091917	0.0120179
⋮	⋮	⋮

Discrétisation d'un problème continu

- Discrétisation

  permet de passer d'un problème mathématique continu défini par une équation différentielle sur une région de l'espace à un problème mathématique discret défini par un système d'équations avec un nombre fini d'inconnues.

  - Exemple : la solution d'une équation différentielle est une fonction que l'on peut approcher par sa valeur en un nombre fini de points
  - opération incontournable pour obtenir une approximation de la solution de certains problèmes

  $\Rightarrow$ maîtrise de l'erreur de discrétisation : estimation de l'erreur commise par rapport à la solution exacte (pas toujours connue)

Exemple : la dérivation numérique

- Dérivée première

Définition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Approximation :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{pour } h \text{ petit}$$

- Rappel : formule de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h), \; \theta \in]0,1[$$

Dérivation numérique : dérivée première

- Approximation

1. $$f'(x) + \frac{h}{2} f''(x + \alpha h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\alpha \in]0, 1[)$$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

Dérivation numérique : dérivée première

- Approximation

1. $$f'(x) + \frac{h}{2} f''(x + \alpha h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\alpha \in]0, 1[)$$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur$/10$)

2. $$f'(x) - \frac{h}{2} f''(x - \beta h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (\beta \in]0, 1[)$$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur$/10$)

- Approximation

1. $$f'(x) + \frac{h}{2} f''(x + \alpha h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\alpha \in]0,1[)$$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

2. $$f'(x) - \frac{h}{2} f''(x - \beta h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (\beta \in]0,1[)$$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

3. $$f'(x) + \frac{h^2}{3} f'''(x + \gamma h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (\gamma \in]-1,1[)$$

   erreur commise en h^2 ($h := h/10$, erreur := erreur/100)

Dérivation numérique : dérivée première

- Approximation

1. $$f'(x) + \frac{h}{2} f''(x + \alpha h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\alpha \in]0,1[)$$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

2. $$f'(x) - \frac{h}{2} f''(x - \beta h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (\beta \in]0,1[)$$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

3. $$f'(x) + \frac{h^2}{3} f'''(x + \gamma h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (\gamma \in]-1,1[)$$

   erreur commise en h^2 ($h := h/10$, erreur := erreur/100)

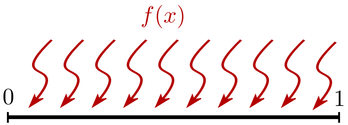
- Ordre de convergence
  - Approximations 1 et 2 : convergence d'ordre 1 ou linéaire (l'erreur tend vers 0 comme h)
  - Approximation 3 : convergence d'ordre 2 ou quadratique (l'erreur tend vers 0 comme h^2)

Dérivation numérique : application

- Dérivée seconde : approximation

$$f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x+\gamma h) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}, \ \gamma \in]-1, 1[$$

- Application : équation de la chaleur (stationnaire en dim. 1)



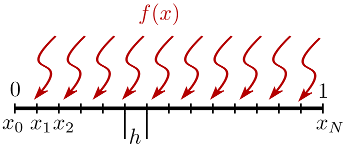
$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x), x \in]0, 1[\\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Dérivation numérique : application

- Dérivée seconde : approximation

$$f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x+\gamma h) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}, \ \gamma \in]-1,1[$$

- Application : équation de la chaleur (stationnaire en dim. 1)



Discrétisation :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x_k) = f(x_k), k = 1, 2, \ldots, N-1 \\ u(x_0) = 0, \\ u(x_N) = 0. \end{cases}$$

Dérivation numérique : application

- Approximation :
  - $\dfrac{d^2u}{dx^2}(x_k) \simeq \dfrac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1})}{h^2}$
  - v_k approximation de $u(x_k)$

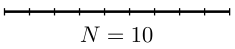
$$\begin{cases} -\dfrac{v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1}}{h^2} = f(x_k),\ k = 1, 2, \ldots, N-1 \\ v_0 = 0, \\ v_N = 0. \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

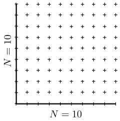
$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

- Solution approchée obtenue par la résolution d'un système linéaire

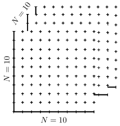
- Intérêt du recours au calcul numérique :



1D : 10 inconnues, système à résoudre : 10×10



2D : 100 inconnues, système à résoudre : 100×100



3D : 1000 inconnues, système à résoudre :
1000×1000 inabordable pour l'humain mais moins de quelques secondes pour un ordinateur

L'analyse numérique permet d'aborder des problèmes inabordables sans les capacités de calcul des ordinateurs ...

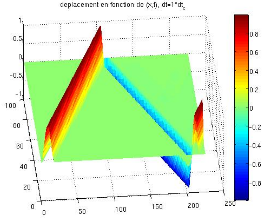
mais ...

l'analyse critique des résultats reste le travail de l'ingénieur !

Encore un exemple ...

- Propagation d'onde dans une barre
- équation continue :

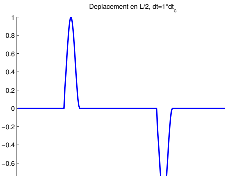
$$
\begin{array}{ll}
\rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall [x,t] \in]0,\ell[\times]0,T \\
u(t, x=0) = \sin^2(\dfrac{\pi t}{\tau}) & \forall t \in [0,T] \\
u(t, x=\ell) = 0 & \forall t \in [0,T] \\
u(0,x) = 0 & \forall x \in [0,\ell] \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & \forall x \in [0,\ell]
\end{array}
$$



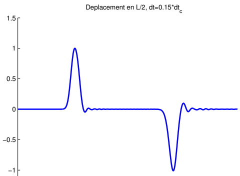
- discrétisation en temps et en espace

Déplacement en $x = \ell/2$:

$t = t_c$



$t = 0,15 \times t_c$



$t = 1,001 \times t_c$