MT09-A2014 – Examen médian : CORRIGÉ
Questions de cours : durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques

Exercice 1 *(barème approximatif : 1 points)*

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, une fonction définissant la méthode de point fixe : x_0 donné, $x_n = g(x_{n-1})$, pour $n = 1, 2, \ldots$

1. Énoncer sans le démontrer le théorème de convergence globale pour cette méthode. On précisera bien les hypothèses et les conclusions.
2. Énoncer sans le démontrer le théorème de convergence locale pour cette méthode. On précisera bien les hypothèses et les conclusions.

Réponse : cf. polycopié.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, une matrice inversible (avec $n > 0$). On cherche une matrice $C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, vérifiant : C triangulaire inférieure, $c_{ii} > 0$ ($\forall i, i = 1, ..., n$) et $A = CC^T$.

1. Montrer que si C existe, alors A est symétrique.

   Réponse : $A^T = (CC^T)^T = (C^T)^T C^T = CC^T = A$.
2. Montrer que si C existe, alors C et C^T sont inversibles.

   Réponse : comme C est triangulaire inférieure, on a $\det(C) = \det(C^T) = \prod_{i=1}^n c_{ii} > 0$, donc C et C^T sont inversibles.
3. Montrer que si C existe, alors A est définie positive.

   Réponse : soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a $x^T A x = x^T C C^T x = (C^T x)(C^T x) = ||C^T x||_2^2 \geq 0$. On en déduit que A est semi-définie positive. De plus si $x \neq 0$, alors $x^T A x = ||C^T x||_2^2 = 0$ implique que $C^T x = 0$ et donc que $x = 0$ car C^T est inversible (donc $\mathrm{Ker}(C^T) = \{0\}$). On conclut donc que A est définie positive.
4. En déduire une condition nécessaire sur A, pour que cette décomposition existe.

   Réponse : pour que A admette une telle décomposition, il est nécessaire que A soit SDP.
5. Montrer, en la calculant, que C existe pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

   Expliquer brièvement le principe des calculs avant de les effectuer.

   Réponse : pour la méthode, voir le cours (travail par identification : calcul d'abord du terme diagonal, puis de la colonne sous la diagonale). Résultat : $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit un réel ε et soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. À quelles conditions sur ε la matrice A admet-elle une factorisation $A = LU$?

   (*On ne demande pas de faire cette factorisation dans cette question.*)

   Réponse : les sous-matrices principales de A ont pour déterminants ε et $\varepsilon - 1$. Elles sont inversibles si et seulement si $\varepsilon \neq 0$ et $\varepsilon \neq 1$. Donc $A = LU$ est faisable sous ces conditions.
2. On suppose les conditions de la question 1. vérifiées.

   (a) Effectuer la factorisation $A = LU$.

   Réponse : on trouve $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$.

   (b) Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation $A = LU$.

   Réponse : on résout $Ly = b$, puis $Ux = y$. On trouve $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$ puis $x = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\varepsilon} \\ \dfrac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{pmatrix}$.

3. On travaille en arithmétique flottante en décimal, avec une mantisse de 3 chiffres et un exposant de 1 chiffre.

   (a) Dire quelle forme prennent les nombres à virgule flottante.

   Réponse : avec les simplifications du cours, on peut écrire l'ensemble des flottants comme : $\mathcal{F} = \{ \pm 0.d_1d_2d_3\ 10^{\pm e_1} \} \cup \{0\}$, où d_1, d_2, d_3 et e_1 sont des chiffres dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ et $d_1 \neq 0$.

   (b) Donner les résultats des calculs de L, U et x en arithmétique flottante, quand $\varepsilon = 5\ 10^{-4}$. Bien expliquer.

   Réponse : des erreurs vont être commises dans le calcul de $u_{22} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$. Avec $\varepsilon = 5\ 10^{-4}$, on obtient $\frac{1}{\varepsilon} = 0.200\ 10^4$. Comme $1 = 0.100\ 10^1 = 0.0001\ 10^4$, $u_{22} = 1 - \frac{1}{\varepsilon} = (0.0001 - 0.200)\ 10^4 = -0.200\ 10^4$ en arithmétique flottante. Cela signifie que le résultat du calcul $1 - \frac{1}{\varepsilon}$ vaut $-\frac{1}{\varepsilon}$.

   Il vient donc : $\widetilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\ 10^3 & 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{U} = \begin{pmatrix} 5\ 10^{-4} & 1 \\ 0 & -2\ 10^3 \end{pmatrix}$.

   La résolution de $\widetilde{L}\widetilde{y} = b$ nécessite le même type d'approximation. Il vient alors $\widetilde{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\ 10^3 \end{pmatrix}$. La résolution de $\widetilde{U}\widetilde{x} = \widetilde{y}$ donne $\widetilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ces résultats sont très éloignés de la solution exacte!

   Note : si on calcule l'approximation flottante de la solution exacte, on trouve :

$$\mathrm{fl}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\varepsilon} & = & 1 \\ \dfrac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} & = & 0.999 \end{pmatrix},$$

   en notant que $1 - \varepsilon = (0.100 - 0.00005)10^1 = (0.09995)10^1 = 0.100\ 10^1 = 1$, et $1 - 2\varepsilon = (0.100 - 0.0001)10^1 = 0.0999\ 10^1 = 0.999$. On a supposé ici que les calculs sont faits exactement, puis arrondis au plus proche (et que 0.5 est arrondi à 1).

   Il faut noter que $\mathrm{fl}(x) \approx x$, mais que $\widetilde{x}$ est très différent de $\mathrm{fl}(x)$.

   (c) Comment pourrait-on simplement améliorer ces résultats?

   Réponse : la grande erreur qui est commise provient du premier pivot ($= \varepsilon$) qui est très petit. Pour améliorer notablement la précision, il suffirait de permuter les deux lignes de A, afin que le pivot devienne 1.

MT09-A14- Examen médian : CORRIGÉ
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5 points.*

Exercice 1 : *(barème approximatif : 5,5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit A une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, distinctes ou non. On note également $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les vecteurs propres associés, qu'on suppose normalisés : $||y_i||_2 = 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A^2 en fonction des $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$.
   Réponse : on a $Ay_i = \lambda_i y_i$ $(y_i \neq 0)$, qu'on multiplie par A à gauche pour obtenir $A^2 y_i = \lambda_i A y_i = \lambda_i^2 y_i$. Donc les valeurs propres de A^2 sont les $(\lambda_i^2)_{i=1,\ldots,n}$.
   (b) En déduire que $\rho(A^2) = \big(\rho(A)\big)^2$.
   Réponse : $\rho(A^2) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i^2| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|^2 = (\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|)^2 = (\rho(A))^2$.
   (c) En déduire que $||A||_2 = \rho(A)$.
   Réponse : $||A||_2^2 = \rho(A^TA) = \rho(A^2) = \big(\rho(A)\big)^2$ car A est symétrique. On en déduit que $||A||_2 = \rho(A)$.

On suppose dans toute la suite que A est symétrique définie positive. On ordonne les valeurs propres de façon que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

2. (a) Montrer que $\lambda_1 > 0$. En déduire que A est inversible.
   Réponse : comme A est symétrique définie positive, $y_1^T A y_1 > 0$ car $y_1 \neq 0$. Donc $y_1^T A y_1 = y_1^T(Ay_1) = \lambda_1 y_1^T y_1 = \lambda_1 ||y_1||_2^2 > 0$. Comme $||y_1||_2 > 0$, on en déduit que $\lambda_1 > 0$.
   En fait, toutes les valeurs propres de A sont > 0, donc 0 n'est pas valeur propre, donc A est inversible.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A^{-1}, puis $||A^{-1}||_2$, en fonction des λ_i, $i = 1, \ldots, n$.
   Réponse : soit y_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i pour A. Comme A est inversible et que les $\lambda_i > 0$, il vient $Ay_i = \lambda_i y_i \iff y_i = \lambda_i A^{-1} y_i \iff \frac{1}{\lambda_i} y_i = A^{-1} y_i$, avec $y_i \neq 0$. Donc les valeurs propres de A^{-1} sont les $(\frac{1}{\lambda_i})_{i=1,\ldots,n}$ qui sont > 0.
   Comme A est symétrique, A^{-1} l'est aussi $((A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T})$. Donc $||A^{-1}||_2 = \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1}$.
   (c) En déduire le conditionnement $\chi_2(A)$.
   Réponse : $\chi_2(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$. (Les valeurs propres sont > 0.)

3. On veut résoudre $Ax = b$.
   (a) On prend $b = \lambda_n y_n$. Que vaut x?
   Réponse : on a $Ay_n = \lambda_n y_n$. Comme A est inversible, l'unique solution de $Ax = b$ est $x = y_n$.
   (b) On résout en réalité un système perturbé : $A(x + \delta x) = b + \delta b$. On prend $\delta b = \lambda_1 y_1$. Que vaut δx?
   Réponse : par linéarité, les égalités $A(x + \delta x) = b + \delta b$ et $Ax = b$ impliquent que δx est solution de $A\delta x = \delta b$, soit $A\delta x = \lambda_1 y_1$. On déduit $\delta x = y_1$.
   (c) Comparer l'erreur relative $\dfrac{||\delta x||_2}{||x||_2}$ à l'erreur relative faite sur le second membre. Rappeler l'inégalité du cours. Commenter.
   Réponse : on a $||\delta x||_2 = ||y_1||_2 = 1$ et $||x||_2 = ||y_n||_2 = 1$ (les vecteurs propres sont choisis normés). Par ailleurs, on a $||\delta b||_2 = ||\lambda_1 y_1||_2 = \lambda_1$ et $||b||_2 = ||\lambda_n y_n||_2 = \lambda_n$ (les valeurs propres sont > 0).
   D'après le cours, on a $\dfrac{||\delta x||_2}{||x||_2} \leq \chi_2(A)\dfrac{||\delta b||_2}{||b||_2}$, soit ici : $1 = \dfrac{||\delta x||_2}{||x||_2} \leq \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n} = 1$. Avec ces données, il y a donc égalité dans l'inégalité du cours.
   (d) On suppose que $\lambda_n \gg \lambda_1$. Commenter.
   Réponse : si $\lambda_n \gg \lambda_1$, cela signifie que $\chi_2(A) \gg 1$: le système est mal conditionné. Une petite pertubation sur le second membre $\dfrac{||\delta b||_2}{||b||_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n} \ll 1$, provoque une grande pertubation sur la solution $\dfrac{||\delta x||_2}{||x||_2} = 1$.

4. On perturbe à présent volontairement le système pour essayer d'améliorer la solution : on modifie A afin de diminuer δx. On étudie le système $(A + \alpha I)v = c$.

   (a) Calculer $(A + \alpha I)y_i$, $i = 1, \ldots, n$. En déduire les valeurs propres de $A + \alpha I$.
   Réponse : $(A + \alpha I)y_i = Ay_i + \alpha y_i = (\lambda_i + \alpha)y_i$, avec $y_i \neq 0$. Donc les valeurs propres de $A + \alpha I$ sont $(\lambda_i + \alpha)_{i=1,\ldots,n}$.

   (b) On prend $c = b + \delta b = \lambda_n y_n + \lambda_1 y_1$. Déterminer v sous la forme $v = k_n y_n + k_1 y_1$, où k_1 et k_n sont des scalaires. Calculer k_1 et k_n.
   Réponse : $(A + \alpha I)v = k_n(\lambda_n + \alpha)y_n + k_1(\lambda_1 + \alpha)y_1 = c = \lambda_n y_n + \lambda_1 y_1$ si et seulement si $k_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n + \alpha}$ et $k_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \alpha}$ (car les $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$). On suppose que α est différent de $-\lambda_1$ et $-\lambda_n$.

   (c) Calculer $v - x$.
   Réponse : $v - x = k_n y_n + k_1 y_1 - y_n = -\dfrac{\alpha}{\lambda_n + \alpha} y_n + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \alpha} y_1.$

   (d) On choisit α de façon à avoir $\lambda_1 \ll \alpha \ll \lambda_n$. Comparer $||v - x||_2$ à $||\delta x||_2$. (Dans cette question, on suppose que la base des vecteurs propres $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ est orthonormalisée.)
   Réponse : comme $\alpha \ll \lambda_n$, on a $\frac{\alpha}{\lambda_n + \alpha} \approx \frac{\alpha}{\lambda_n} \ll 1$. De plus, comme $\lambda_1 \ll \alpha$, il vient $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \alpha} \approx \frac{\lambda_1}{\alpha} \ll 1$. Donc $v - x$ va être petit (et donc beaucoup plus petit que δx).
   Plus précisément, en utilisant le fait que les $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ forment une base orthonormée (on peut prendre une base orthonormée de vecteurs propres car A est symétrique réelle), on obtient :

$$\begin{aligned}
||v - x||_2^2 &= ||(k_n - 1)y_n + k_1 y_1||_2^2 = ||(k_n - 1)y_n||_2^2 + 2(k_n - 1)k_1 < y_n, y_1 > + ||k_1 y_1||_2^2 \\
&= |k_n - 1|^2 ||y_n||_2^2 + |k_1|^2 ||y_1||_2^2 \qquad \text{car } y_1 \perp y_n \\
&= \left(\frac{\alpha}{\lambda_n + \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \alpha}\right)^2 \approx \left(\frac{\alpha}{\lambda_n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\right)^2 \quad \ll 1 = ||\delta x||_2^2.
\end{aligned}$$

   Donc si on connaît la perturbation $\delta b = \lambda_1 y_1$, on peut corriger l'erreur sur x en modifiant le système à résoudre.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit une matrice A inversible appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$, M appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et b dans $\mathbb{R}^n$. On veut calculer $B = A^{-1}M$ et $c = A^{-1}b$. On rappelle que :

- la factorisation LU d'une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nécessite de l'ordre de $n^3/3$ multiplications,
- la résolution d'un système linéaire triangulaire (supérieur ou inférieur) de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nécessite de l'ordre de $n^2/2$ multiplications.

On suppose que la factorisation $A = LU$ est faisable.

1. (a) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer A^{-1} est de l'ordre de αn^3. On déterminera α et on justifiera clairement la réponse.
   Réponse : pour calculer A^{-1}, on doit résoudre n systèmes linéaires : si on pose $X = A^{-1}$, chaque colonne X_j de X est solution de $AX_j = e_j$, où $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)^T$ est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique et donc le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice I.
   On doit donc factoriser $A = LU$ (coût $= n^3/3$), puis résoudre n systèmes triangulaires inférieurs $LY_j = e_j$ (coût $= n.n^2/2 = n^3/2$), et enfin n systèmes triangulaires inférieurs $LX_j = Y_j$ (coût $= n.n^2/2 = n^3/2$).
   Coût total $= 4/3n^3$.

   (b) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer B et c en utilisant A^{-1} est de l'ordre de βn^3. On déterminera β.
   Réponse : le coût du produit de deux matrices MN est $n^2.n = n^3$, car il y a n^2 termes à calculer du type $\sum_{k=1}^n M_{ik}N_{kj}$. Le coût du produit matrice–vecteur Mx est $n.n = n^2$ (n termes du type $\sum_{j=1}^n M_{ij}x_j$).
   On en déduit que le coût du calcul de $B = A^{-1}M$ est $= 4/3n^3 + n^3 = 7/3n^3$, et le coût du calcul de $c = A^{-1}b$ est $= 4/3n^3 + n^2 = 4/3n^3$ (on néglige les termes d'ordre inférieur à 3).

2. (a) Montrer que le calcul de c peut se ramener à la résolution de systèmes linéaires dont on précisera les matrices et les seconds membres.
   Réponse : pour calculer c, il suffit de factoriser $A = LU$, puis de résoudre $Ly = b$, et $Ux = y$.

(b) Montrer que le calcul de B peut se ramener à la résolution de plusieurs systèmes linéaires dont on précisera, pour chacun d'eux, la matrice, le vecteur inconnu et le second membre.

Réponse : pour calculer B, il suffit de factoriser $A = LU$, puis de résoudre n systèmes triangulaires inférieurs $LY_j = M_j$ (où M_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de M), et n systèmes triangulaires supérieurs $UB_j = Y_j$, (où B_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de B).

(c) Évaluer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer B et c en passant par cette méthode. Comparer avec le résultat du 1.

Réponse : dans ce cas, le coût du calcul de $B = A^{-1}M$ est $= n^3/3 + 2n.n^2/2 = 4/3n^3$, et le coût du calcul de $c = A^{-1}b$ est $= n^3/3 + 2.n^2/2 = n^3/3$ (on néglige les termes d'ordre inférieur à 3). Le coût est donc presque deux fois plus petit que pour la question 1. ($4/3n^3$ au lieu de $7/3n^3$).

NB : en pratique, on ne fait qu'une seule fois la factorisation LU. Si on peut faire le calcul de B et de c au même moment, les coûts de c sont réduits de $n^3/3$. Le coût total du calcul de B et c est donc $= 4/3n^3$.

3. On calcule B et c par la méthode du 2. On dispose des fonctions `scilab` :

- `function [L,U]=LU(K)`, qui, étant donnée une matrice K, calcule la factorisation LU : $K = LU$.
- `function [x]=solinf(L,b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire inférieure L et le vecteur colonne b, résout $Lx = b$.
- `function [x]=solsup(U,b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire supérieure U et le vecteur colonne b, résout $Ux = b$.

Utiliser les fonctions ci-dessus pour écrire une fonction `scilab` :

`function [B,c]=calcule(A,M,b)`

qui calcule $B = A^{-1}M$ et $c = A^{-1}b$.

Réponse :

```
function [B,c] = calcule(A,M,b)
n = length(b)
if n ˜= size(A, 1) | n ˜= size(A, 2) | n ˜= size(M, 1) | n ˜= size(M, 2)
    error('tailles des matrices incoherentes')
end
B = zeros(n,n); c = zeros(n, 1); // initialisation
[L,U] = LU(A) // factorisation
y = solinf(L, b); c = solsup(U, y); // calcul de c
for jj = 1:n // calcul de B
     y = solinf(L, M(:, jj))
     B(jj, :) = solsup(U, y)
end
endfunction
```

Exercice 3 : *(barème approximatif : 5,5 points)* CHANGEZ DE COPIE

Soit la suite $(V^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = \left((x^{(k)}\ y^{(k)}\ z^{(k)})^T\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, définie par la relation :

$$\left\{\begin{array}{l} V^{(k+1)} = CV^{(k)} + d, \quad \forall k = 0, 1, \ldots \quad \text{avec } C = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } d = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix}, \\ V^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^3, \end{array}\right. \tag{1}$$

où $a = (a_1\ a_2\ a_3)^T$ est un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$.

1. La suite (1) converge-t-elle? Justifier la réponse.

   Réponse : on voit immédiatement que $||C||_\infty = \frac{1}{2} < 1$, donc la méthode itérative (1) converge quel que soit le vecteur initial.

2. Si la suite converge vers un vecteur $V = (x\ y\ z)^T$, quel est le système d'équations $AV = b$ que vérifie V? On précisera la matrice $A \in \mathcal{M}_3$ et le second membre $b \in \mathbb{R}^3$ de ce système. (On pourra exprimer b simplement en fonction du vecteur a).

   Réponse : la suite converge vers V. Par continuité, à convergence, on a $V = CV + d$, ce qui s'écrit $(I - C)V = d$, ou encore

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix} \quad (\Leftrightarrow \widetilde{A}V = \widetilde{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad AV = b\ (b = a).$$

3. La suite (1) aurait pu être obtenue en appliquant une méthode itérative connue au système $AV = b$. Quelle est cette méthode? Justifier.

   Réponse : c'est la méthode de Jacobi. En effet, cette méthode s'écrit $V^{(k+1)} = JV^{(k)} + f$, où $J = D^{-1}(E+F)$ et $f = D^{-1}b$ avec les notations du cours. Pour $AV = b$, en prenant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $E + F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on observe que $J = C$ et $f = d$.

   NB : on trouve des résultats identiques pour $\widetilde{A}$.

4. Quel théorème du cours permettrait de répondre directement à la question 1.?

   Réponse : il suffit de noter que la matrice A est à diagonale strictement dominante, donc Jacobi converge (et Gauss-Seidel aussi...).

5. On applique la méthode de Gauss-Seidel au système $AV = b$. Exprimer $V^{(k+1)}$ en fonction de $V^{(k)}$. On précisera ce que vaut la matrice R de l'itération de Gauss-Seidel.

   Réponse : Gauss-Seidel s'écrit $V^{(k+1)} = RV^{(k)} + g$ avec la matrice $R = (D-E)^{-1}F$ et le vecteur $g = (D-E)^{-1}b$. Les calculs donnent :

$$(D-E)^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad R = (D-E)^{-1}F = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8a_1 \\ -2a_1 + 4a_2 \\ a_1 - 2a_2 + 8a_3 \end{pmatrix}.$$

   NB : avec $\widetilde{A}$, on trouve $\widetilde{R} = (\widetilde{D} - \widetilde{E})^{-1}\widetilde{F} = R$ et $\widetilde{g} = (\widetilde{D} - \widetilde{E})^{-1}\widetilde{b} = g$, en utilisant :

$$(\widetilde{D} - \widetilde{E})^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle? Justifier.

   Réponse : A est toujours à diagonale strictement dominante, donc Gauss-Seidel converge. On pourrait aussi remarquer que $||R||_\infty = \frac{1}{2} < 1$.