MT09- Préparation pour le TP6

On veut résoudre numériquement une équation différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = a \end{array} \right. , \quad t \in [t_0, t_0 + T], \tag{1}$$

où t_0, $T > 0$, a sont des réels donnés, f est une fonction connue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On choisit un entier N, on pose $h = \dfrac{T}{N}$, $(t_i = t_0 + ih, i = 0, ..., N)$. z_i est une approximation de $x(t_i)$.

1. Écrire une fonction Scilab

   ```
   [z] = pointmilieu(a, t0, T, N, f)
   ```

   qui, étant donné les réels a, t_0, T , l'entier N et la fonction f, calcule $z = (z_0\ z_1\ ...\ z_n) \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$, solution approchée de (1) en utilisant le schéma du point milieu : z_0 donné, puis calculer pour $n = 0, 1, \ldots, N-1$

   $$z_{n+1} = z_n + hK_1, \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} K_0 = f(t_n, z_n), \\ K_1 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, z_n + \dfrac{h}{2}K_0\right). \end{array} \right.$$

2. Écrire la fonction f correspondant à l'équation (1) dans le cas de l'équation différentielle

   $$y'(t) = y(t) + t^2. \tag{2}$$

3. On choisit $a = 0, t_0 = 0, T = 5, N = 10$, calculer z en utilisant la fonction `pointmilieu`.

4. Vérifier que la solution exacte de l'équation (1) est alors dans ce cas $y(t) = 2e^t - t^2 - 2t - 2$.

   Tracer sur une même figure

   - la solution exacte $(t_i, y(t_i)), i = 0, ..., N$,
   - la solution approchée $(t_i, z_i), i = 0, ..., N$,

   pour $N = 10$ puis $N = 20$, puis $N = 50$.