MT09-A2014 – Examen Final – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Numéro de Table :

ATTENTION, il y a TROIS exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 1.5 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice $m \times n$, avec $m \geq n$.

1. Montrer que A et $A^T A$ ont le même noyau.
2. On suppose que A est de rang maximal. Donner, en le justifiant, le nombre de solutions du problème de moindres carrés : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||_2$, où $b \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel, et soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois nombres réels. Nous considérons la formule de quadrature définie par

$$J(f) = \omega_1 f(-\alpha) + \omega_2 f(0) + \omega_3 f(+\alpha),$$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Trouver $\omega_j,\ j = 1, 2, 3$, en fonction de α, tel que $J(p) = \int_{-1}^{1} p(t)dt$, pour tout polynôme p de degré inférieur ou égal à 2.

2. Existe-t-il α tel que la formule de quadrature soit exacte pour tout polynôme p de degré inférieur ou égal à 4? Si oui, que valent α et les $\omega_j,\ j = 1, 2, 3$? Écrire J.

3. Quel est le degré d'exactitude de la formule de quadrature avec cette valeur de α?

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n > 0$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On pose $f:\ x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = x^T A x + b^T x + c\ \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, pour x et h dans $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire la différentielle $df(x)$ et le gradient $\nabla f(x)$.
3. On suppose qu'il existe $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $(A + A^T)\hat{x} = -b$. Que vaut $\delta f(\hat{x})$?
4. Si A est symétrique définie positive, que peut-on dire du signe de $\delta f(\hat{x})$? $\hat{x}$ est-il un minimum, un maximum, ou rien, pour f?