MT09-A2016 – Examen médian – Questions de cours
Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :

ATTENTION, il y a QUATRE exercices indépendants pour cette partie questions de cours !

Exercice 1 *(barème approximatif : 1.5 points)*

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A admet une décomposition de Cholesky, alors A est symétrique définie positive.
2. La réciproque est-elle vraie? On ne demande pas de montrer le résultat.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A la matrice définie par $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$. Faites le calcul de la décomposition de Cholesky de A. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que A soit symétrique définie positive.

Exercice 2 *(barème approximatif : 1.5 points)*

On se place sur l'espace $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n > 1$. Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

1. Pour une matrice A, donner la définition de la norme subordonnée $|||A|||$ et du conditionnement $\chi(A)$.
2. Donner les propriétés de norme matricielle que vérifie $|||\cdot|||$.
3. Prouver l'inégalité triangulaire pour $|||\cdot|||$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 1.5 points)*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m et $n > 0$).

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A)$.
2. Montrer que $A^T A$ est symétrique semi-définie positive.
3. Montrer que les valeurs propres de $A^T A$ sont positives ou nulles.

Exercice 4 *(barème approximatif : 1.5 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_2$ (en base 2). On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).
2. Dans le reste de cet exercice, on prend $t = 3$, $L = -1$, $U = 3$.
   (a) Écrire tous les flottants compris dans $[1/2, 1]$.
   (b) Calculer le flottant : $\tilde{x} = 1 \oplus \frac{5}{8}$.
   (c) Calculer l'erreur relative entre $\tilde{x}$ et $x = 1 + \frac{5}{8}$ On rappelle que $\varepsilon_{\text{mach}} = 2^{-t}$: commenter le résultat.

MT09-A2016- Examen médian
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *6 points.*

Exercice 1 : *(barème approximatif : 6 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

1. Soit $C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 1$). Soit λ une valeur propre de C.
   (a) Montrer que $C^T - \lambda I$ n'est pas inversible.
   (b) On rappelle qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible. En utilisant ce qui précède, montrer que :
$$\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ tel que : } |c_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ji}| + \sum_{j=i+1}^{n} |c_{ji}|.$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que A^T est à diagonale strictement dominante.
   On décompose A conformément aux notations du cours en $A = D - E - F$.
   (a) Montrer que D est inversible.
   (b) Dans toute la suite de l'exercice, on définit $C = (E + F)D^{-1}$. Exprimer les coefficients de C à l'aide des coefficients de A.
3. Utiliser les questions 1b) et 2b) pour montrer que si λ est valeur propre de C, alors $|\lambda| < 1$.
4. Soit M_1 et M_2 deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. On suppose que M_2 est inversible.
   (a) Montrer que $M_2^{-1}M_1$ et $M_1M_2^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres.
   (b) En déduire que $M_2^{-1}M_1$ et $M_1M_2^{-1}$ ont le même rayon spectral.
5. Utiliser les questions 3) et 4b) pour montrer que la méthode de Jacobi utilisée pour résoudre $Ax = b$ est convergente lorsque A^T est à diagonale strictement dominante.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 7 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit un entier $n \geq 1$. On rappelle que la factorisation LU d'une matrice de taille n nécessite de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ multiplications. Le coût de la résolution d'un système triangulaire est de l'ordre de $\frac{n^2}{2}$.

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{nn}$. Donner en le justifiant le coût en nombre de multiplications pour calculer M^{-1}.
2. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_{nn}$. On définit la matrice $K \in \mathcal{M}_{n^2n^2}$ par
$$K = \begin{bmatrix} A & -I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ I & A & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & A & -I & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I & A & -I \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I & A \end{bmatrix},$$
   où $I \in \mathcal{M}_{nn}$ est la matrice identité et $0 \in \mathcal{M}_{nn}$ est la matrice nulle.
   On veut résoudre $KX = B$, où $B \in \mathbb{R}^{n^2}$. Pour ce faire, on décompose X et B en blocs :
$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}, \quad \text{où } X_i \in \mathbb{R}^n, \text{ et } B_i \in \mathbb{R}^n, \forall i = 1, \ldots, n.$$

(a) On suppose que les matrices intervenant dans les calculs sont inversibles. On veut montrer que

$$KX = B \iff \left\{ \begin{array}{rcl} D_i X_i & = & D_{i-1} X_{i+1} + F_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ D_n X_n & = & F_n \end{array} \right. , \text{ où } D_i \in \mathcal{M}_{nn}, F_i \in \mathbb{R}^n.$$

i. Calculer les matrices D_0, D_1 et le vecteur F_1.

ii. Déterminer par récurrence D_i en fonction de A, D_{i-1} et D_{i-2}, pour $i = 2, \dots, n$.
Déterminer également F_i en fonction de F_{i-1} et d'autres termes.

(b) On suppose que l'on dispose des fonctions du TP2 : `solsup, solinf, LU, inverse` (on ne demande pas de les réécrire ici).
Écrire une fonction `scilab` : `function [X] = resol(A, B)` qui, étant donnés la matrice $\mathtt{A} \in \mathcal{M}_{nn}$ et le vecteur $\mathtt{B} \in \mathbb{R}^{n^2}$ résout $\mathtt{KX} = \mathtt{B}$ par la méthode décrite ci-dessus.
On sera attentif à la manipulation des vecteurs blocs et des matrices blocs.

(c) Donner le coût en nombre de multiplications de cette fonction.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

On se donne la suite suivante, définie par récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & -\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{x_n}, \qquad n = 0, 1, \dots, \\ x_0 & & \text{donné.} \end{array} \right. \tag{1}$$

1. En posant $x_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, transformer la récurrence (1) en une récurrence linéaire du type :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & a u_{n+1} + b u_n, \qquad n = 0, 1, \dots, \\ u_0 & = & \alpha, \\ u_1 & = & \beta. \end{array} \right. \tag{2}$$

On donnera les valeurs de a et b.

2. (a) Calculer la solution exacte u_n en fonction de n, de α et β.
   (b) Quelle est la limite de u_n quand n tend vers l'infini? Discuter en fonction des valeurs de α et β.
   (c) Donner la limite de x_n quand n tend vers l'infini, si $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = -\frac{1}{3}$.

3. On travaille à présent avec une arithmétique exacte, mais en tenant compte des erreurs d'arrondi qui sont faites sur la condition initiale : on suppose que

$$\tilde{u}_0 = \tilde{\alpha} = \frac{2}{3}(1 + \delta_1) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_1 = \tilde{\beta} = -\frac{1}{3}(1 + \delta_2),$$

avec δ_1 et δ_2 petits.

   (a) Calculer dans ce cas la solution pertubée $\tilde{u}_n$. Quelle est sa limite quand n tend vers l'infini?
   (b) Déterminer la limite de $\tilde{x}_n$ dans ce cas. Conclure.