MT09-A2014 – Examen médian – Questions de cours
Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :

ATTENTION, il y a TROIS exercices indépendants pour cette partie questions de cours !

Exercice 1 *(barème approximatif : 1 points)*

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, une fonction définissant la méthode de point fixe : x_0 donné, $x_n = g(x_{n-1})$, pour $n = 1, 2, \ldots$

1. Énoncer sans le démontrer le théorème de convergence globale pour cette méthode. On précisera bien les hypothèses et les conclusions.
2. Énoncer sans le démontrer le théorème de convergence locale pour cette méthode. On précisera bien les hypothèses et les conclusions.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, une matrice inversible (avec $n > 0$). On cherche une matrice $C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, vérifiant : C triangulaire inférieure, $c_{ii} > 0$ $(\forall i, i = 1, ..., n)$ et $A = CC^T$.

1. Montrer que si C existe, alors A est symétrique.
2. Montrer que si C existe, alors C et C^T sont inversibles.
3. Montrer que si C existe, alors A est définie positive.
4. En déduire une condition nécessaire sur A, pour que cette décomposition existe.
5. Montrer, en la calculant, que C existe pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

   Expliquer brièvement le principe des calculs avant de les effectuer.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit un réel ε et soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. À quelles conditions sur ε la matrice A admet-elle une factorisation $A = LU$?

   (*On ne demande pas de faire cette factorisation dans cette question.*)
2. On suppose les conditions de la question 1. vérifiées.
   (a) Effectuer la factorisation $A = LU$.
   (b) Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation $A = LU$.
3. On travaille en arithmétique flottante en décimal, avec une mantisse de 3 chiffres et un exposant de 1 chiffre.
   (a) Dire quelle forme prennent les nombres à virgule flottante.
   (b) Donner les résultats des calculs de L, U et x en arithmétique flottante, quand $\varepsilon = 5\ 10^{-4}$. Bien expliquer.
   (c) Comment pourrait-on simplement améliorer ces résultats?

MT09-A14- Examen médian
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5 points.*

Exercice 1 : *(barème approximatif : 5,5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit A une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, distinctes ou non. On note également $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les vecteurs propres associés, qu'on suppose normalisés : $||y_i||_2 = 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A^2 en fonction des $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$.
   (b) En déduire que $\rho(A^2) = \big(\rho(A)\big)^2$.
   (c) En déduire que $||A||_2 = \rho(A)$.

   On suppose dans toute la suite que A est symétrique définie positive. On ordonne les valeurs propres de façon que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

2. (a) Montrer que $\lambda_1 > 0$. En déduire que A est inversible.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A^{-1}, puis $||A^{-1}||_2$, en fonction des λ_i, $i = 1, \ldots, n$.
   (c) En déduire le conditionnement $\chi_2(A)$.

3. On veut résoudre $Ax = b$.
   (a) On prend $b = \lambda_n y_n$. Que vaut x?
   (b) On résout en réalité un système perturbé : $A(x + \delta x) = b + \delta b$. On prend $\delta b = \lambda_1 y_1$. Que vaut δx?
   (c) Comparer l'erreur relative $\dfrac{||\delta x||_2}{||x||_2}$ à l'erreur relative faite sur le second membre. Rappeler l'inégalité du cours. Commenter.
   (d) On suppose que $\lambda_n \gg \lambda_1$. Commenter.

4. On perturbe à présent volontairement le système pour essayer d'améliorer la solution : on modifie A afin de diminuer δx. On étudie le système $(A + \alpha I)v = c$.
   (a) Calculer $(A + \alpha I)y_i$, $i = 1, \ldots, n$. En déduire les valeurs propres de $A + \alpha I$.
   (b) On prend $c = b + \delta b = \lambda_n y_n + \lambda_1 y_1$. Déterminer v sous la forme $v = k_n y_n + k_1 y_1$, où k_1 et k_n sont des scalaires. Calculer k_1 et k_n.
   (c) Calculer $v - x$.
   (d) On choisit α de façon à avoir $\lambda_1 \ll \alpha \ll \lambda_n$. Comparer $||v - x||_2$ à $||\delta x||_2$. (Dans cette question, on suppose que la base des vecteurs propres est orthonormalisée.)

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit une matrice A inversible appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), M appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et b dans $\mathbb{R}^n$. On veut calculer $B = A^{-1}M$ et $c = A^{-1}b$. On rappelle que :

- la factorisation LU d'une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nécessite de l'ordre de $n^3/3$ multiplications,
- la résolution d'un système linéaire triangulaire (supérieur ou inférieur) de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nécessite de l'ordre de $n^2/2$ multiplications.

On suppose que la factorisation $A = LU$ est faisable.

1. (a) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer A^{-1} est de l'ordre de αn^3. On déterminera α et on justifiera clairement la réponse.
   (b) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer B et c en utilisant A^{-1} est de l'ordre de βn^3. On déterminera β.
2. (a) Montrer que le calcul de c peut se ramener à la résolution de systèmes linéaires dont on précisera les matrices et les seconds membres.
   (b) Montrer que le calcul de B peut se ramener à la résolution de plusieurs systèmes linéaires dont on précisera, pour chacun d'eux, la matrice, le vecteur inconnu et le second membre.
   (c) Évaluer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer B et c en passant par cette méthode. Comparer avec le résultat du 1.
3. On calcule B et c par la méthode du 2. On dispose des fonctions `scilab` :
   - `function [L,U]=LU(K)`, qui, étant donnée une matrice K, calcule la factorisation LU : $K = LU$.
   - `function [x]=solinf(L,b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire inférieure L et le vecteur colonne b, résout $Lx = b$.
   - `function [x]=solsup(U,b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire supérieure U et le vecteur colonne b, résout $Ux = b$.

   Utiliser les fonctions ci-dessus pour écrire une fonction `scilab` :

   `function [B,c]=calcule(A,M,b)`

   qui calcule $B = A^{-1}M$ et $c = A^{-1}b$.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 5,5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit la suite $(V^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = \big((x^{(k)}\ y^{(k)}\ z^{(k)})^T\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, définie par la relation :

$$\left\{\begin{array}{l} V^{(k+1)} = CV^{(k)} + d, \quad \forall k = 0,1,\ldots \quad \text{avec } C = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } d = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix}, \\ V^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^3, \end{array}\right. \tag{1}$$

où $a = (a_1\ a_2\ a_3)^T$ est un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$.

1. La suite (1) converge-t-elle? Justifier la réponse.
2. Si la suite converge vers un vecteur $V = (x\ y\ z)^T$, quel est le système d'équations $AV = b$ que vérifie V? On précisera la matrice $A \in \mathcal{M}_3$ et le second membre $b \in \mathbb{R}^3$ de ce système. (On pourra exprimer b simplement en fonction du vecteur a).
3. La suite (1) aurait pu être obtenue en appliquant une méthode itérative connue au système $AV = b$. Quelle est cette méthode? Justifier.
4. Quel théorème du cours permettrait de répondre directement à la question 1.?
5. On applique la méthode de Gauss-Seidel au système $AV = b$. Exprimer $V^{(k+1)}$ en fonction de $V^{(k)}$. On précisera ce que vaut la matrice R de l'itération de Gauss-Seidel.
6. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle? Justifier.