MT09-TP7 : préparation.

On suppose que m et n sont deux entiers tels que $m \geq 3$.
On se donne :

- m réels $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m$,
- m réels $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

On cherche à déterminer parmi l'ensemble des polynômes de degé inférieur ou égal à 2, celui qui passe au plus près des points $((\tau_i, y_i), i = 1, \ldots, m)$. C'est-à-dire qu'on cherche (x_0, x_1, x_2) qui minimise $\sum_{i=1}^{m} (p(\tau_i) - y_i)^2$, où p est le polynôme $p(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$.

1. (a) Montrer que ce problème se ramène à trouver le minimum pour $x \in \mathbb{R}^n$ de $\|Ax - y\|^2$ où A est une matrice de taille $m \times n$. Que vaut n?

   (b) Ecrire une fonction Scilab :
   $$[\mathtt{A}] = \mathtt{constrpoly}(\tau)$$
   qui, étant donnés le vecteur τ de taille m, construit la matrice A.

2. On résout le problème de minimisation en utilisant les équations normales.

   (a) Ecrire une fonction Scilab :
   $$\mathtt{x} = \mathtt{mcnorm}(\mathtt{A}, \mathtt{y})$$
   qui, étant donnés la matrice A de taille $m \times n$ et le vecteur y de taille m, calcule le vecteur x de taille n qui minimise $\|Ax - y\|^2$ en résolvant les équations normales. Pour résoudre ces équations, on utilisera la fonction “backslash” de `scilab`.

   (b) Application 1: On choisit
   $$\tau = (0,\ 1,\ 2),\ y = (1,\ 3,\ 7).$$
      i. Déterminer la solution des équations normales. En déduire $(p(\tau_i), i = 1, \ldots, 3)$. Le résultat vous semble-t-il correct ? Pourquoi ?
      ii. Tracer sur la même figure la parabole obtenue ainsi que les points de coordonnées $((\tau_i, y_i), 1 \leq i \leq m)$.

   (c) Application 2: On choisit
   $$\tau = (0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75, \ldots, 1.75,\ 2),\ y = (1,\ 1.7,\ 1.95,\ 1.8,\ 3.,\ 3.6,\ 4.45,\ 5.9,\ 6.6).$$
      i. Déterminer la solution des équations normales.
      ii. Tracer sur la même figure la parabole obtenue ainsi que les points de coordonnées $((\tau_i, y_i), 1 \leq i \leq m)$.