MT09-A2015 – Examen Final – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Répondre sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !

Exercice 1 *(barème approximatif : 2.5 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ $(m > n > 0)$ de rang n, soit $b \in \mathbb{R}^m$ et soient Q et R les matrices de la factorisation $A = QR$.

1. Donner les propriétés de Q et de R.
2. Écrire les équations normales. Obtenir en le prouvant le système faisant intervenir Q et R équivalent aux équations normales.
3. Soit $E(x) = \|Ax - b\|_2^2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. On note $\hat{x}$ la solution des équations normales. Montrer que $A\hat{x} - b$ est orthogonal à $A\delta$, pour tout δ dans $\mathbb{R}^n$. En déduire que $E(\hat{x} + \delta) > E(\hat{x})$ si $\delta \neq \hat{x}$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit $\lambda > 0$. On résout l'équation différentielle

$$\text{trouver } y \text{ telle que } \begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

avec le schéma

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right), \quad n \geq 0. \tag{2}$$

1. Donner la solution $y(t)$ de (1).
2. Calculer la solution y_n de (2).
3. On fixe $t = nh$ et on fait tendre h vers 0 et n vers l'infini. Déterminer la limite de y_n dans ce cas.
4. On fixe h et on fait tendre n vers l'infini. À quelle condition y_n tend vers 0? Conclure sur la stabilité du schéma (2).

Exercice 3 *(barème approximatif : 0.5 point)*

Soit $h > 0$. On pose $t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h$ et on se donne $f_0,\ f_1,\ f_2$.

1. Écrire à l'aide des différences divisées le polynôme qui interpole les f_i aux points t_i, $i = 0, 1, 2$, dans la base de Newton.

MT09-A2015- Examen Final
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5 points.*

Exercice 1 : *(barème approximatif : 10 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.

Soient deux réels t_0 et $T > 0$ et un entier $N > 0$. On introduit le pas $h = T/N$ et les points $t_n = t_0 + nh$ pour $n = 0, \dots, N$.

1. (a) Soient des valeurs $(g_n)_{n=0,\dots,N}$. Écrire le polynôme d'interpolation p_n qui vérifie $p_n(t_{n-2}) = g_{n-2}$, $p_n(t_{n-1}) = g_{n-1}$ et $p_n(t_n) = g_n$ dans la base de Lagrange.
   On exprimera les polynômes de la base de Lagrange en fonction de t_n et de h uniquement.
   (b) Calculer $I_0 = \int_{-2}^{1} du$, $I_1 = \int_{-2}^{1} u du$, $I_2 = \int_{-2}^{1} u^2 du$.
   (c) En faisant un changement de variable que vous préciserez et en utilisant les réponses de la question précédente, calculer $\displaystyle\int_{t_{n-2}}^{t_{n+1}} p_n(t)dt$ en fonction de h, g_n, g_{n-1} et g_{n-2}.
   (d) On interpole la fonction constante $g(t) = 1$ $(g_{n-2} = g_{n-1} = g_n = 1)$. Montrer que $\displaystyle\int_{t_{n-2}}^{t_{n+1}} p_n(t)dt = \int_{t_{n-2}}^{t_{n+1}} g(t)dt$ dans ce cas particulier. Expliquer.

2. On rappelle que si ϕ est une fonction $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors :
$$\forall x_0, x_1, \quad \phi(x_1) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \phi'(t)dt.$$
   Soit y_0 dans $\mathbb{R}$ et f une fonction régulière. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :
$$\text{trouver } y \text{ telle que } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$
   Utiliser les questions précédentes pour écrire un schéma servant à résoudre (3) du type :
$$\begin{cases} y_{n+1} = \alpha y_{n-2} + h\left(\beta_0 f(t_n, y_n) + \beta_1 f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \beta_2 f(t_{n-2}, y_{n-2})\right), \quad n = 2, 3, \dots \\ y_0,\ y_1,\ y_2 \text{ donnés,} \end{cases} \tag{4}$$
   où α, β_0, β_1 et β_2 sont des réels à déterminer. Bien expliquer.

3. On cherche à calculer l'ordre du schéma (4), dans le cas où $\alpha = 1$, $\beta_0 = 9/4$, $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = 3/4$.
   (a) Écrire un développement de Taylor à l'ordre 4 de $y(t_{n+1})$ autour de t_n.
   (b) Écrire un développement de Taylor à l'ordre 4 de $y(t_{n-2})$ autour de t_n.
   (c) Écrire un développement de Taylor à l'ordre 3 de $y'(t_{n-2})$ autour de t_n.
   (d) Définir l'erreur locale relative au schéma (4) en précisant bien vos notations.
   (e) Déterminer l'ordre du schéma (4).

4. Soit $p \geq 1$. On suppose que f est une fonction vectorielle : $f : (t, u) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, u) \in \mathbb{R}^p$. On suppose de plus que α, β_0 et β_2 sont donnés.
   (a) Écrire une fonction scilab qui résout l'équation différentielle (3) par le schéma (4) :
   `[Z] = schema(..., f).`
   On précisera bien les arguments de la fonction `schema`.
   Un bonus sera donné pour les implémentations n'utilisant qu'un seul appel à la fonction f par pas de temps.
   (b) On désire résoudre le problème
$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + (3 + tx(t))x(t) = 0 \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ x(t_0) = a,\ x'(t_0) = b. \end{cases} \tag{5}$$
   Mettre l'équation différentielle (5) sous la forme (3). Expliciter dans ce cas la fonction f et y_0.
   Écrire une fonction scilab qui définit la fonction f pour ce problème :
   `[F] = fonc(t, Y).`

Exercice 2 : *(barème approximatif : 6 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les questions 3c et 4 sont indépendantes des autres questions.

Soit $h > 0$ fixé. On se donne $(n+1)$ points $t_0,\ t_1, \dots,\ t_n$ tels que $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$. Étant donnés $(z_i)_{i=0,\dots,n}$ et $(c_i)_{i=0,\dots,n-1}$, on définit les polynômes :

$$p_i(t) = z_i + \frac{z_{i+1} - z_i}{h}(t - t_i) + \frac{c_i}{h^2}(t - t_i)(t - t_{i+1}) \tag{6}$$

1. (a) Montrer que $p_{i+1}(t_{i+1}) = p_i(t_{i+1})$ pour $i = 0, \dots, n-1$.
   (b) On définit la fonction polynômiale par morceaux g_z par :
   $$g_z(t) = p_i(t) \quad \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{7}$$
   Montrer que g_z est continue sur $[t_0, t_n]$.
2. Soit p un entier ≥ 2 et $N = pn$. On se donne à présent $(N+1)$ points $(\tau_k)_{k=0,\dots,N}$ tels que $\tau_k = t_0 + k\delta$, où $\delta = h/p$, et $(N+1)$ réels $(y_k)_{k=0,\dots,N}$.
   (a) Pour $i = 0, \dots, n-1$ et $l = 0, \dots, p-1$, on prend $k = ip + l$. Écrire τ_k en fonction de δ et d'un point t_j à déterminer.
   (b) On cherche à approcher au sens des moindres carrés les points $(\tau_k, y_k)_{k=0,\dots,N}$ par la courbe $t \mapsto g_z(t)$. Faire un dessin pour $n = 3$ et $p = 3$.
   Formuler le problème de moindres carrés dans le cas général. On exprimera la fonction $E(x)$ que l'on cherche à minimiser en faisant intervenir les τ_k.
   (c) Donner la ligne $\underline{A}_k$ de la matrice A intervenant dans le problème de moindres carrés, en fonction uniquement de l, i et p.
   On supposera dans tout le reste de l'exercice que A est de rang maximal.
3. Dans cette question, on prend $p = 2$ et $n = 3$.
   (a) Écrire la matrice A. Que se passe-t-il dans ce cas?
   (b) Déterminer les z_i et les c_i en fonction des y_k et de h par les moindres carrés.
   (c) Écrire le polynôme d'interpolation $q_i(t_i) = y_{2i}$, $q_i(t_{i+1}) = y_{2i+2}$ et $q_i(t_i + h/2) = y_{2i+1}$ dans la base de Newton et comparer.
4. On dispose des fonctions scilab:
   - `function [Q, R] = qr(A)`, qui, étant donnée une matrice A, calcule la factorisation $A = QR$.
   - `function [x] = solsup(U, b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire supérieure U et le vecteur colonne b, résout $Ux = b$.

   Écrire une fonction scilab

   `function [x] = resout(A, b)`

   qui, étant donnée la matrice A, résout le problème de moindres carrés.