MT09-A2014 – Examen Final

Durée : 1h30. Polycopiés de cours et scilab autorisés – pas d'outils numériques.

Questions de cours déjà traitées : *5 points*

Exercice 1 : *(barème approximatif : 6 points)*

Les parties I. et II. sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE I. Approximation quadratique

On appelle $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. On munit E du produit scalaire

$$< u, v >_E = \int_0^1 u(t)v(t)dt, \quad \forall u,\, v \in E,$$

qui définit une norme sur E:

$$||u||_E = (< u, u >_E)^{1/2} = \left(\int_0^1 u^2(t)dt\right)^{1/2}, \quad \forall u \in E.$$

On appelle $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, où n est un entier donné.

1. Soit $f \in E$ une fonction donnée. On appelle p_f le projeté orthogonal de f dans $\mathcal{P}_n$.
   (a) Écrire les conditions vérifiées par p_f.
   (b) Montrer que $||q - f||_E^2 > ||p_f - f||_E^2$, $\forall q \in \mathcal{P}_n,\ q \neq p_f$.
   (c) Quelle est la solution du problème :
   $$\text{trouver } \hat{p} \in \mathcal{P}_n,\ \text{tel que } ||\hat{p} - f||_E^2 = \min_{q \in \mathcal{P}_n} ||q - f||_E^2 \ ? \tag{1}$$
2. On cherche à écrire p_f dans la base canonique : $p_f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$. On pose $F_i =< f, t^i >_E$, $i \geq 0$.
   (a) Calculer $< t^i, t^j >_E$.
   (b) Écrire un système d'équations vérifié par p_f.
   (c) Expliciter le système $Ha = b$ vérifié par le vecteur $a = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n]^T$ des coefficients de p_f. Que valent H_{ij} et b_i?
3. **Application:** On prend $n = 1$, et f est définie par :
   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1/2, \\ 1/2 & \text{si } t = 1/2, \\ 1 & \text{si } t > 1/2. \end{cases} \tag{2}$$
   (a) Calculer $F_i =< f, t^i >_E$, $i \geq 0$.
   (b) Déterminer p_f. Tracer f et p_f sur un même graphique. Commenter.

PARTIE II. Moindres carrés :

Soit $N \geq n$. On pose $h = 1/N$. On se donne $N+1$ points $t_i = i\,h,\ i = 0, \ldots, N$, tels que $t_0 = 0$ et $t_N = 1$. On pose $y_i = f(t_i),\ i = 0, \ldots, N$. On rappelle la définition de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$: $||x||_2 = \left(\sum_{i=0}^k x_i^2\right)^{1/2}$, pour $x \in \mathbb{R}^k$.

On veut résoudre le problème de moindres carrés suivant :

$$\text{trouver } q_f \in \mathcal{P}_n,\ \text{tel que } \sum_{i=0}^{N} (q_f(t_i) - y_i)^2 = \min_{q \in \mathcal{P}_n} \sum_{i=0}^{N} (q(t_i) - y_i)^2. \tag{3}$$

On cherche q_f dans la base canonique $q_f = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k$.

1. Formuler le problème (3) sous la forme

$$\text{trouver } \hat{x} \in \mathbb{R}^k, \text{ tel que } ||A\hat{x} - y||_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^k} ||Ax - y||_2^2. \tag{4}$$

   Exprimer la matrice A, les vecteurs x et y. On précisera les dimensions de A, x et y.

2. Écrire les équations normales, notées $C^N x = d^N$. Calculer les composantes C_{ij}^N et d_i^N.

3. **Application:** On prend $n = 1$ et $N = 4$. Soit la fonction f définie en (2).
   Expliciter C^4 et d^4 dans ce cas. (On ne demande pas de résoudre le système.)

4. On reprend n et $N > n$ quelconques.

   (a) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Donner une approximation $J_N(g)$ de $\int_0^{1+h} g(t)dt$ par la formule des rectangles à gauche.

   (b) Quelle est la limite de $J_N(g)$ quand $N(= \frac{1}{h})$ tend vers l'infini?

   (c) On prend $g(t) = t^m$. Déterminer $J_N(t^m)$.

   (d) Calculer les limites de $\dfrac{C_{ij}^N}{N}$ et de $\dfrac{d_i^N}{N}$ quand N tend vers l'infini.

   (e) Comparer avec la matrice H et le vecteur b de la partie I. Conclure sur l'approximation quadratique (1) et l'approximation par les moindres carrés (3).

Exercice 2 *(barème approximatif : 7 points).*

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes l'une de l'autre.

Soient deux réels t_0 et $T > 0$ et un entier $N > 0$. On introduit le pas $h = T/N$ et les points $t_n = t_0 + nh$ pour $n = 0, \dots, N$. Soit une fonction f régulière définie par :

$$f : (t, u) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, u) \in \mathbb{R}^p.$$

Soit y_0 un vecteur de $\mathbb{R}^p$, avec $p \geq 1$. On considère le système différentiel suivant :

$$\text{trouver } y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^p), \text{ telle que } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{5}$$

Soient α_0, α_1 et β trois réels. On introduit le schéma

$$\begin{cases} z_{n+1} = \alpha_0 z_n + \alpha_1 z_{n-1} + h\beta f(t_n, z_n), \quad n = 1, 2, \dots \\ z_0, \; z_1 \text{ donnés dans } \mathbb{R}^p. \end{cases} \tag{6}$$

1. On cherche à calculer l'ordre du schéma (6).

   (a) Écrire un développement de Taylor à l'ordre 3 de $y(t_{n+1})$ autour de t_n.

   (b) Écrire un développement de Taylor à l'ordre 3 de $y(t_{n-1})$ autour de t_n.

   (c) En déduire les relations entre α_0, α_1 et β pour que le schéma (6) soit d'ordre le plus élevé possible. Quel est cet ordre?

2. On étudie la stabilité du schéma (6). On suppose (dans cette question uniquement) que $f(t, u) = -\lambda u$, pour $\lambda > 0$. On prend $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \beta = 2$.

   (a) On cherche une solution du schéma sous la forme $z_n = Kr^n$. Écrire l'équation du second degré que doit vérifier r.

   (b) Montrer que l'une des racines de cette équation est en valeur absolue plus grande que 1.

   (c) Conclure sur la stabilité du schéma (6).

3. On suppose que f est quelconque et que α_0, α_1 et β sont donnés.

   (a) Écrire une fonction scilab qui résout l'équation différentielle (5) par le schéma (6) :
   `[Z] = schema(..., f).`
   On précisera bien les arguments de la fonction `schema`.

   (b) On désire résoudre le problème

$$\left\{\begin{array}{l} x'''(t) = x^2(t) + t^2 x'(t) + t^2 x''(t) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ x(t_0) = a,\ x'(t_0) = b,\ x''(t_0) = c. \end{array}\right. \tag{7}$$

   Mettre l'équation différentielle (7) sous la forme (5). Expliciter dans ce cas la fonction f et y_0.
   Écrire une fonction scilab qui définit la fonction f pour ce problème :
   `[F] = fonc(t, Y).`

Exercice 3 *(barème approximatif : 3,5 points).*

Soit $n > 0$ un entier. On se donne $(n+1)$ nombres réels $y_1, \ldots, y_{n+1}$, deux réels t_1 et t_{n+1}, vérifiant $t_1 < t_{n+1}$. On définit alors les réels h par $h = (t_{n+1} - t_1)/n$, puis t_i, pour $i = 2, \ldots, n$, par $t_i = t_{i-1} + h$. On définit les polynômes $s_i(t)$, pour $i = 1, \ldots, n$, par

$$s_i(t) = y_i + d_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2.$$

1. (a) Calculer $s_i(t_i)$, $s_i(t_{i+1})$, $s_i'(t_i)$ et $s_i'(t_{i+1})$.

   (b) On choisit c_i pour que $s_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$. Donner l'expression de c_i en fonction des autres paramètres.

2. On définit s sur l'intervalle $[t_1, t_{n+1}]$ par : $s(t) = s_i(t),\ \forall t \in [t_i, t_{i+1}],\ \forall i = 1, \ldots, n$.

   (a) Montrer que s est définie et continue sur $[t_1, t_{n+1}]$.

   (b) On détermine les d_i tels que $d_1 = 0$ et $s_i'(t_{i+1}) = s_{i+1}'(t_{i+1})$, pour $i = 1, \ldots, n-1$. Quel est le système d'équations vérifié par $d_1, \ldots, d_n$? On exprimera ce système en fonction des y_i et de h uniquement.

   (c) Montrer qu'avec ce choix des d_i, la fonction s est continûment dérivable sur $[t_1, t_{n+1}]$.