תרגיל כיתה מספר 10-12 – התמרת לפלס

התמרת לפלס מכלילה את התמרת פורייה (התמרת פוריה נמצאת על הציר המדומה של התמרת לפלס). בהתמרה זו פונקציית הבסיס היא e^{st}, כאשר $s = a + j\omega$ הוא מספר מרוכב. לפיכך, פונקציית הבסיס ניתנת לרישום כמכפלה של שני גורמים: $e^{st} = e^{(a+j\omega)t} = e^{at}e^{j\omega t}$. האיבר השני במכפלה הוא סינוסואיד מרוכב (כמו בהתמרת פורייה). האיבר השני במכפלה הוא פונקציה ממשית המשמשת כמעטפת לסינוסואיד המרוכב. לכן, בסך-הכל נקבל כי פונקציית הבסיס איננה מחזורית, אלא זהו אות מחזורי דועך ($a > 0$) או מתבדר ($a < 0$).

אם $a > 0$ ומשך האות הוא אינסופי לכיוון החיובי אזי ווקטורי הבסיס מתבדרים, וכן אם $a < 0$ ומשך האות הוא אינסופי לכיוון השלילי. לכן, לכל התמרת לפלס נרשום את תחום ההתכנסות המאופיין בערכי a מתאימים לאות כך שפונקציית המעטפת לא תגרום לפונקציית הבסיס ולהתמרה עצמה להתבדר.

בהמשך נלמד על התמרה מקבילה בזמן הבדיד – התמרת z.

<u>התמרת לפלס דו"צ</u>

התמרת לפלס דו"צ של האות x(t): $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$.

סימון: $x(t) \xleftrightarrow{\wp} X(s)$

התמרה הפוכה:

$$x(t) = \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} X(s)e^{st}ds$$

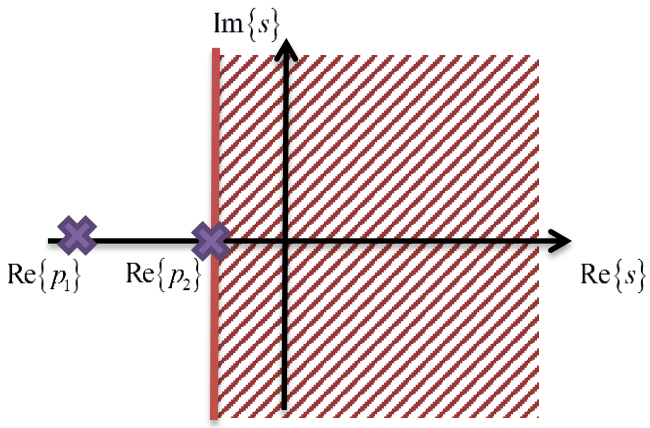
כאשר α הוא מספר ממשי שנמצא בתחום ההתכנסות. אנחנו לא נשתמש בהגדרה זו אלא נחשב את ההתמרה ההפוכה באמצעות תכונות ההתמרה וטבלאות.

<u>תחום ההתכנסות (ROC : Region Of Convergence)</u>

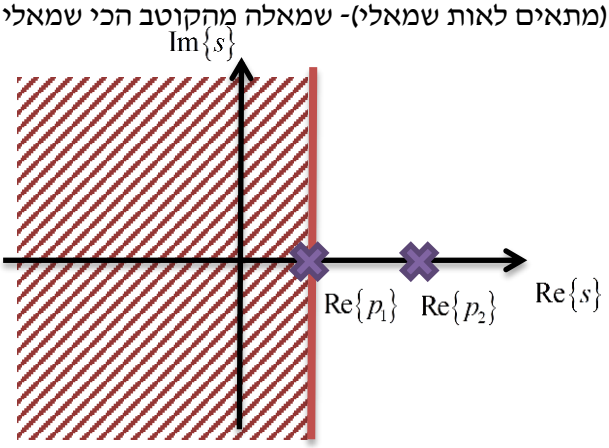
זהו אוסף הערכים של s עבורם מתקיים $\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)e^{-st}\right| dt < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| e^{-re\{s\}t} dt < \infty$. תחום זה הוא התחום בו ההתמרה מוגדרת. גבולות ה-ROC תמיד מאונכים.

קיימים ארבעה מקרים:

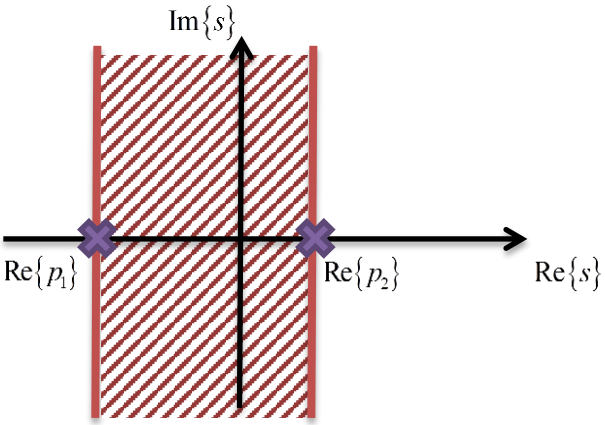
1. כל מישור s (מתאים אות בעל משך סופי).
2. תחום התכנסות ימני (מתאים לאות ימני)- ימינה מהקוטב הכי ימני: $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{p_2\}$



3. תחום התכנסות שמאלי (מתאים לאות שמאלי)- שמאלה מהקוטב הכי שמאלי: $\mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{p_1\}$



4. תחום אמצעי – ביו שני קטבים (ללא קטבים בתוך התחום): $\mathrm{Re}\{p_1\} < \mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{p_2\}$



<u>תכונות מערכת LTI ע"פ פונק' התמסורת שלה H(S):</u>

פונקציית תמסורת רציונאלית (ניתנת לרישום כמנה של שני פולינומים):

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b[m]s^m}{\sum_{n=0}^{N} a[n]s^n}$$

הגדרה: מערכת LTI רציונאלית היא:

1. **הולמת** אם $M \le N$
2. **הולמת ממש** אם $M < N$
3. **לא הולמת** אם $M > N$

עבור מערכת בעלת פונקציית תמסורת רציונלית, מתקיימות התכונות הבאות:

- **יציבות** BIBO - מערכת היא יציבה אם פונקציית התמסורת שלה הולמת (דרגת המונה קטנה שווה לדרגת המכנה) ובעלת ROC הכולל את הציר המדומה של מישור לפלס.
- **חוסר זיכרון** – מערכת חסרת זיכרון אם ורק אם H(S)=K כאשר K קבוע.

- **הפיכות** – מערכת היא הפיכה אם קיימת מערכת שהיא $(H(s))^{-1}$.
  (דוגמא נגדית : $H(s)=0$)
- **סיבתיות** –מערכת סיבתית אם ורק אם ה ROC הוא חצי מישור ימני (אינו תחום מימין).
- **מערכת שהיא סיבתית ויציבה** – אם פונקציית התמסורת שלה הולמת וכל הקטבים מקיימים $Re\{P_i\}<0$, כאשר P_i הוא קוטב של $H(s)$.
- **מערכת שהיא סיבתית ויציבה וגם ההפכית שלה סיבתית ויציבה** - אם פונקציית התמסורת שלה הולמת במדויק (דרגת מונה זהה לדרגת מכנה) וכל הקטבים והאפסים שלה מקיימים $Re\{P_i\}<0$ $Re\{Z_i\}<0$, כאשר P_i הוא קוטב ו Z_i – אפס של $H(S)$.

ללא ידיעת תחום ההתכנסות ההתמרה אינה מגדירה את האות באופן חד משמעי.

<u>התמרת לפלס ח״צ</u>

התמרת לפלס ח״צ של האות $x(t)$: $X(s)=\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$.

תחום ההתכנסות (ROC : Region Of Convergence) הוא אוסף הערכים של S עבורם מתקיים $\int_{0^-}^{\infty}|x(t)|e^{-re\{s\}t}dt<\infty$.תחום זה הוא התחום בו ההתמרה מוגדרת.

סימון : $x(t)\xleftrightarrow{\wp_+}X_+(s)$

נשים לב :

- ההתמרה הח״צ אינה שומרת כל מידע על ערכי האות בזמנים שליליים.
- ה ROC תמיד ימני .

מסקנה :חד ערכיות בין פונקציה וההתמרה הח״ץ שלה נשמרת לאותות ימניים בלבד .

תכונות הליניאריות , קונבולוציה בזמן = מכפלה במישור S , וההזזה בזמן נשמרות.

<u>תכונה חשובה :</u>

אם $\frac{d^k}{dt^k}s(t)e^{-st}\xrightarrow{t\to\infty}0$ $\forall k<n$ אזי $\frac{d^k}{dt^k}x(t)\xleftrightarrow{\wp_+}s^nX_+(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}x^{(k-1)}(t=0^-)$

<u>משפט הערך הסופי/ההתחלתי:</u>

עבור אות ימני ללא נק׳ סינגולריות בראשית או באינסוף , אזי

ערך התחלתי : $x(t=0^+)=\ell im_{s\to\infty}sX(s)$ (אם הגבול קיים)

ערך סופי : $x(t=\infty)=\ell im_{s\to 0} sX(s)$

<u>שיטה לפירוק לשברים חלקיים</u>

<u>קטבים ממשיים</u>

השיטה פועלת כאשר נתון A(s) כמנת שני פולינומים (<u>מצומצמים עד הסוף</u>) כאשר P(x) פולינום המונה ו Q(s) פולינום המכנה . כמו כן נדרש deg(P(s))<deg(Q(s)) ניתן להשתמש בנוסחא הבאה לפירוק השבר לשברים חלקיים.

$$A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_2)^{n_2}...(s-\lambda_r)^{n_r}}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{C_{ik}}{(s-\lambda_i)^k}$$

$$C_{ik}=\frac{1}{(n_i-k)!}\cdot\frac{d^{n_i-k}}{dx^{n_i-k}}\left[(s-\lambda_i)^{n_i}A(s)\right]\Bigg|_{s=\lambda_i}$$

נשים לב כי במקרה הפשוט בו $n_1,n_2,\ldots,n_r=1$ כל שורשי המכנה הם מריבוי 1 ולכן הנוסחא תהיה :

$$A(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)...(s-\lambda_r)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{C_i}{(s-\lambda_i)}$$

$$C_i=\left[(s-\lambda_i)A(s)\right]\Bigg|_{s=\lambda_i}$$

<u>קטבים מרוכבים</u>

יש להגיע לשבר בעל הצורה הבאה :

$$A(s)=\cdots+\frac{b_1(s+\alpha)+b_2\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

המכנה מתקבל על-ידי השלמה לריבוע. את הקבועים במונה נמצא על-ידי השוואת מקדמים.

<u>הערה :</u>

במידה ולא מתקיים deg(P(s))<deg(Q(s)) , יש **לבצע חילוק פולינומים** (כמו חילוק ארוך במספרים) ואז נקבל :

$A(s)=B(s)+\frac{\tilde{P}(s)}{\tilde{Q}(s)}$ ויש לבצע את התהליך עם השבר $\frac{\tilde{P}(s)}{\tilde{Q}(s)}$.

<u>שאלה 1</u>

א. מצאו וציירו את ה ROC של האות $x(t)=e^{at}u(t)$.

ב. מצאו התמרת לפלס הדו"צ עבור האות מסעיף א' .

ג. מצאו וציירו את ה ROC של האות $x(t)=-e^{at}u(-t)$.

ב. מצאו התמרת לפלס הדו״צ עבור האות מסעיף ג׳ .

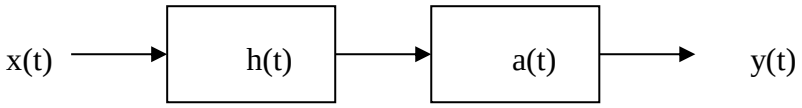
ד. מהי המסקנה מסעיפים ב׳ ו ד׳ ?

שאלה 2

בהינתן F(s) ו G(S) התמרות לפלס של f(t) ו g(t) בהתאמה . מצאו את התמרת לפלס של h(t)=f(t)*g(t) .

שאלה 3

נתונה המערכת הבאה :



א. מה צריכה להיות A(s) כדי ש y(t)=x(t) ?

ב. מה צריכה להיות A(s) כדי ש y(t)=x(t-1) ?

ג. עבור $H(s)=\frac{(s+5)^2(s+3)}{s^2+2S+5}$ מיצאו מערכת סיבתית ויציבה a(t) כך ש y(t)=x(t) .

ד. עבור המערכת שמצאת בסעיף ג׳ צייר מפת קטבים ואפסים ואת ה ROC המתאים.

שאלה 4

עבור המד״ר y''(t)+ay'(t)+by(t)=x(t)+x'(t)

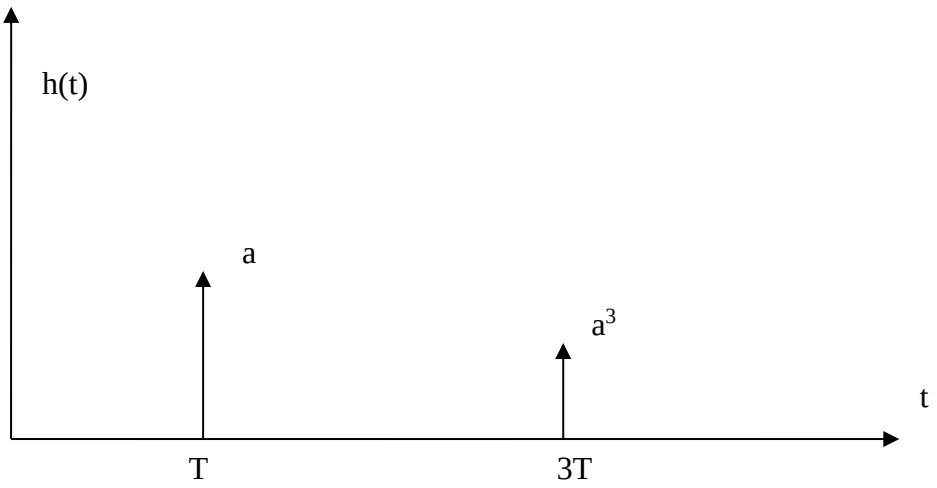
א. מצאו פונקצית התמסורת של המערכת.

ב. נתון כי $a^2<4b$, לאילו ערכי a ו- b המערכת יציבה?

ג. כיצד ניתן להשתמש בתוצאה של שאלה 2 למציאת מוצא המערכת לכניסה x(t) כלשהי ? האם זה עדיף על השיטה הרגילה?

שאלה 5

נתונה פונקציית הלם של מערכת תקשורת הכוללת הד אחד נוסף, כאשר α -הוא פרמטר הדעיכה ו- T הנו זמן שלוקח לאות לעבור את קו התקשורת.



א) קבע מהו $H(s)$ של המערכת ומהו ה- ROC.

ב) מצא את הקטבים והאפסים של המערכת.

ג) צייר את מפת הקטבים והאפסים.

שאלה 6

המערכת מוגדרת על ידי משוואה דפרנציאלית הבאה:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+6\frac{d^2y(t)}{dt^2}+11\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t)$$

א) חשב תגובת המערכת לכניסה: $x(t)=e^{-4t}u(t)$ (ZSR)

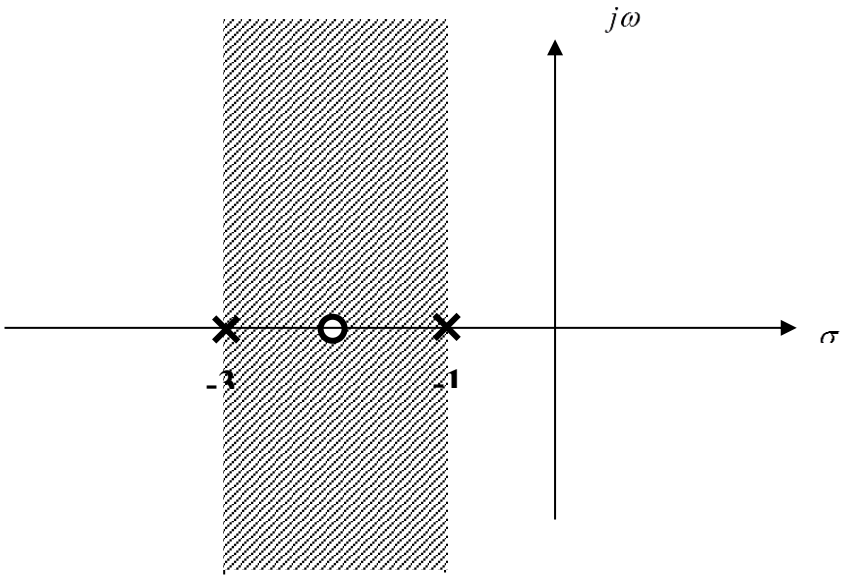
ב) חשב תגובת המערכת עבור $t>0^-$ לתנאי ההתחלה: $y(t)=1,\ \frac{dy(t)}{dt}=-1\ ,\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}=1$

בזמן $t=0^-$ (ZIR).

ג) חשב תגובת המערכת עבור כניסה ותנאי התחלה הנ"ל הפועלים יחד.

שאלה 7

נתון מתווה האפסים והקטבים של פונקצית תמסורת רציונאלית של מערכת לינארית וקבועה בזמן.



תחום ההתכנסות הוא החלק המקווקו. כמו כן נתון כי: $H\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{4}{3}$.

מהי התגובה להלם של המערכת?

שאלה 8

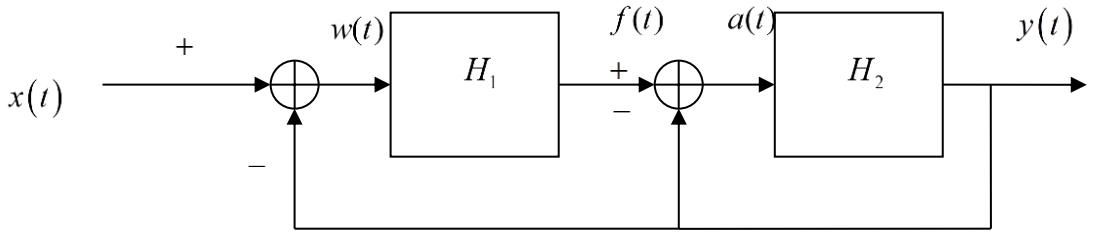
א. ידוע כי התמרת לפלס של תגובת מערכת ליניארית, קבועה בזמן, וסיבתית לכניסה $x(t)=u(t)$ היא: $V(s)=\frac{3s+2\beta+6}{s^2+(6+\beta)s+6\beta}$. מצא את התגובה להלם של המערכת.

ב. עבור הכניסה $x(t)=tu(t)$ ידוע כי ערך היציאה במצב המתמיד $t\to\infty$ הוא 1.

חשב את הערך של β.

שאלה 9

נתונה מערכת הממומשת ע"י חיבור של שתי מערכות ליניאריות וקבועות בזמן:



בטא את פונקציית התמסורת של המערכת הכוללת $H(s)$ באמצעות H_1, H_2.

טבלת התמרות לפלס

Signal	Transform	ROC
$\delta(t)$	1	כל s
u(t)	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
-u(-t)	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\alpha$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	כל s
$[\cos(w_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$[\sin(w_0 t)]u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$\left[e^{-\alpha t}\cos(w_0 t)\right]u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+w_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$
$\left[e^{-\alpha t}\sin(w_0 t)\right]u(t)$	$\frac{w_0}{(s+\alpha)^2+w_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$
$u_n(t)=\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	כל s
$u_{-n}(t)=u(t)*\cdots*u(t)$ n פעמים	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$

תכונות התמרת לפלס

תכונה	אות (signal)	התמרת לפלס (Transform)	תחום התכנסות ROC
.1	$x(t)$	$X(s)$	R
.2	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
.3	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
.4	$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$	$\alpha X_1(s)+\beta X_2(s)$	At least $R_1 \cap R_2$
.5	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
.6	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	s is in the ROC if $(s-s_0)$ is in R
.7	$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	s is in the ROC if (s/α) is in R
.8	$(x_1 * x_2)(t)$	$X_1(s)\cdot X_2(s)$	At least $R_1 \cap R_2$
.9	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	At least R
.10	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R (if $X(s)$ is rational)
.11	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	At least $R \cap \{\mathrm{Re}(s)>0\}$