תרגול 8 – מד״ר

מד״ר עם מקדמים קבועים, הנה בעלת הצורה הבאה:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m x^{(n)}(t) \text{ כאשר } f^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} f(t)$$

נתייחס ל $x(t)$ ככניסה ול y(t) כמוצא.

תזכורת: פתרון מד״ר באמצעות קומבינציה של פתרון הומוגני ופתרון פרטי

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

כאשר פתרון מלא של $y(t)$ דורש:

1) $x(t)$
2) תנאי התחלה

פתרון מד״ר ב3 שלבים:

שלב א׳ - פתרון הומוגני

פתרון המד״ר עבור : $x(t) = 0$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = 0$$

(א) פותרים הפולינום האופייני $\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n = 0$ => $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ שורשי הפולינום.

(ב) $\boxed{y_h(t) = \sum_{r=1}^{N} A_r f_r(t)}$ כאשר $f_{k+p}(t) = t^p e^{\lambda_k t}$ $0 \le p \le P$, כאשר P הוא ריבוי הפתרון λ_k.

הפתרון ההומוגני מכיל N קבועים אשר ערכם נקבע על-פי תנאי ההתחלה **בשלב ג׳**.

שלב ב׳ - פתרון פרטי

פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון $x(t)$ ללא התחשבות בתנאי ההתחלה. הפתרון הפרטי הוא צירוף לינארי של $x(t)$ ונגזרותיו.

נתייחס לשלושה מקרים:

(א) $x(t) = const$, אזי $y_p(t) = \mathrm{C}$.

(ב) $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, אזי $y_p(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$.

(ג) $x(t) = Ae^{at}$, אזי $y_p(t) = \alpha e^{at}$.

נמצא את ערכם של הקבועים על-ידי הצבה של הפתרון הפרטי חזרה במד״ר.

<u>שלב ג׳ – מציאת הקבועים של הפתרון ההומוגני באמצעות תנאי ההתחלה.</u>

נמצא את N הקבועים אשר בפתרון ההומוגני על-ידי פתרון של N משוואות עם N נעלמים, לפי תנאי ההתחלה:

$$\left\{y(t_0)=y_0, y^{(1)}(t_0)=y_1,\ldots,y^{(N-1)}(t_0)=y_{N-1}\right\}$$

<u>הערה:</u>

ניתן להראות כי בהנתן ש- $y_1(t)$ פותר את המד״ר עבור הכניסה: $x_1(t)$

ות״ה $\left\{y_1(t_0),\ldots,y_1^{(N-1)}(t_0)\right\}$,

ובהנתן ש- $y_2(t)$ פותר את המד״ר עבור הכניסה: $x_2(t)$

ות״ה $\left\{y_2(t_0),\ldots,y_2^{(N-1)}(t_0)\right\}$

אזי $y_1(t)+y_2(t)$ פותר את המד״ר עבור הכניסה $x_1(t)+x_2(t)$

ות״ה $\{y_1(t_0)+y_2(t_0),\ldots,y_1^{(N-1)}(t_0)+y_2^{(N-1)}(t_0)\}$

<u>מקרה פרטי של זה יהיה:</u>

נפתור את המד״ר עבור כניסה $x_1(t)=0$ ות״ה $\{y_1(t_0),\ldots,y_1^{N-1}(t_0)\}$ עבורו מתקבל המוצא $y_1(t)$ ולאחר מכן עבור כניסה $x_2(t)=x(t)$ נתון ות״ה אפס, עבורו מתקבל המוצא $y_2(t)$.

נקבל כי עבור הכניסה $x_1(t)+x_2(t)=0+x(t)=x(t)$ ותנאי התחלה $\{y_1(t_0)+0,\ldots,y_1^{N-1}(t_0)+0\}=\{y_1(t_0),\ldots,y_1^{N-1}(t_0)\}$ המוצא יהיה $y_1(t)+y_2(t)$.

פתרון עם כניסה אפס ות״ה נתונים נקרא Zero Input Response – ZIR.

פתרון עם הכניסה הנתונה ותנאי התחלה אפס נקרא Zero State Response – ZSR.

<u>פתרון מד״ר באמצעות קומבינציה של ZIR ו-ZSR</u>

$$y(t)=y_{ZIR}(t)+y_{ZSR}(t)$$

נשים לב כי כל פתרון של y_{ZIR} ו-y_{ZSR} דורש פתרון מלא של המד״ר עם שלושת השלבים לקבלת $y(t)$ מלא.

<u>שלב א׳ – ZIR:</u>

נפתור ע״פ 3 השלבים:

1) פתרון הומוגני: פותרים כרגיל [ממילא פתרון הומוגני לא תלוי בכניסה].

$$y_h(t) = \sum_{r=1}^{N} A_r f_r(t)$$

2) פתרון פרטי: הפתרון שפותר את המערכת עבור כניסה אפס תמיד יהיה אפס.

$$y_p(t) = 0$$

3) הפתרון הכללי הינו:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \sum_{r=1}^{N} A_r f_r(t)$$

נמצא את המקדמים ע"פ תנאי ההתחלה הנתונים.

<u>שלב ב' – ZSR</u>

נפתור ע"פ 3 השלבים:

1) פתרון הומוגני: נקבל תוצאה זהה למה שקיבלנו קודם (ZIR) עבור ערכי הפולינום האופייני λ_r עם מקדמים שונים:

$$y_h(t) = \sum_{r=1}^{N} \tilde{A}_r f_r(t)$$

2) פתרון פרטי: ננחש בדרך רגילה ונקבל $y_p(t)$.

3) הפתרון הכללי הוא: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

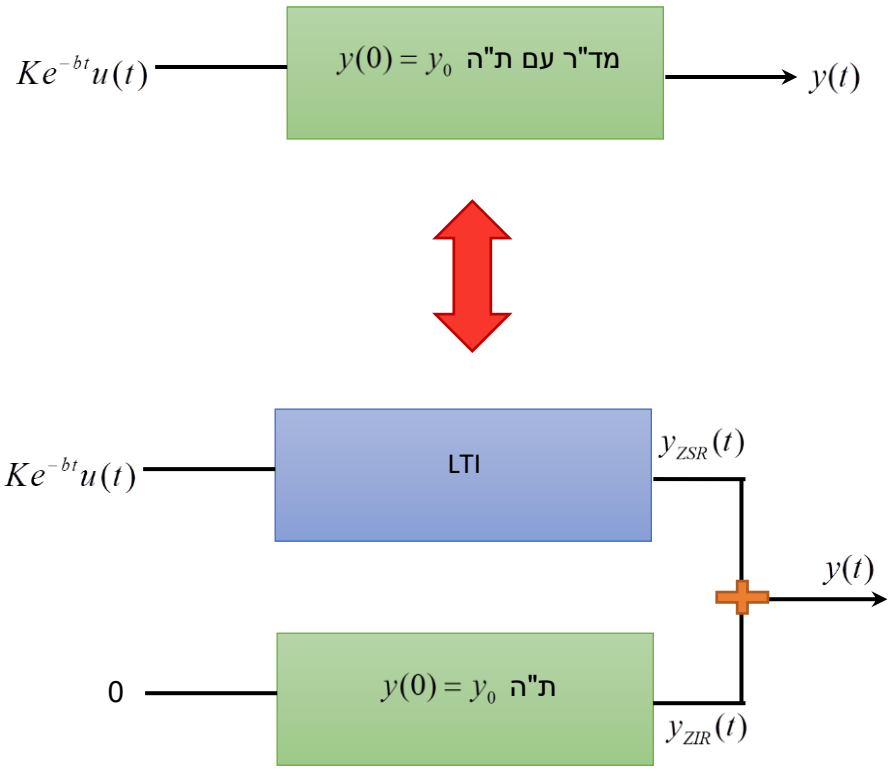
לבסוף נמצא את המקדמים החסרים על-ידי הצבה של תנאי התחלה אפס.

<u>הערה:</u> כאשר נתונה כניסה מהצורה $x(t) = g(t) \cdot u(t)$, כלומר פונקציה מוכפלת במדרגה המתחילה ברגע $t = 0$ אזי גם פתרון ZSR יהיה מוכפל במדרגה (כיוון שעבור זמנים שליליים פתרון המשוואה הוא $y(t) = 0$) ; (ZSR היא מערכת לינארית ולכן עבור כניסה אפס נקבל מוצא אפס).

****** פתרון שאלה 1

לכל מד"ר יש הצגה שקולה כמערכת עם תגובה להלם:

$$y'(t)+ay(t)=x(t)$$
$$x(t)=Ke^{-bt}u(t)$$
$$y(0)=y_0$$



בעצם, נוכל להגיד שפתרון *ZSR* הוא מערכת *LTI*.

נפתור מד"ר באמצעות קונבולוציה:

הפתרון הינו מהצורה: $\boxed{y(t)=y_{ZIR}(t)+y_{ZSR}(t)=y_{ZIR}(t)+x(t)*h(t)}$

עבור המד"ר הנ"ל:

$$y'(t)+ay(t)=x(t)$$
$$x(t)=Ke^{-bt}u(t)$$
$$y(0)=y_0$$

פתרון ZIR מתקבל בדרך הרגילה (פתרון משוואה הומוגנית עם ת"ה): $\boxed{y_{ZIR}(t)=y_0e^{-at}}$.

על-מנת למצוא פתרון ZSR, נעזר בתגובה להלם המתאימה (על הדרך למציאת התגובה להלם $h(t)$ נלמד בשבוע הבא, כרגע נניח שנתון:) - $h(t)=e^{-at}u(t)$:

$$y_{ZSR}(t)=x(t)*h(t)=Ke^{-bt}u(t)*e^{-at}u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}Ke^{-b\tau}u(\tau)e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$=Ke^{-at}u(t)\int_0^t e^{-(b-a)\tau}d\tau=Ke^{-bt}u(t)\left.\frac{e^{-(b-a)\tau}}{a-b}\right|_0^t=\frac{K}{a-b}e^{-at}\left(e^{-(b-a)t}-1\right)=\frac{K}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)$$

בסך-הכל נקבל:

$$\boxed{y(t)=y_0e^{-at}+\frac{K}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)u(t)}$$

<u>שאלה 1</u>

נתונה מערכת המתוארת ע״י המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t)$$

כאשר: $x(t)$ - הכניסה למערכת, $y(t)$ - מוצא המערכת, a - קבוע.

א) מצא את $y(t)$ עבור תנאי התחלה $y(0)=y_0$ וכניסה $x(t)=Ke^{-bt}u(t)$.

ב) בטא את $y(t)$ כסכום של התגובה לכניסה אפס (zero input) והתגובה למצב אפס (zero state).

<u>פתרון 1</u>

פתרון בשיטת ZIR+ZSR:

ZIR- פתרון המשוואה עבור כניסה אפס ותנאי ההתחלה הנתונים:

$$\begin{cases}\dfrac{dy(t)}{dt}+ay(t)=0\\ y(0)=y_0\end{cases}$$

פתרון זה מכיל את הפתרון ההומוגני בלבד:

פתרון הפולינום האופייני: $\lambda+a=0\rightarrow\lambda=-a$

לכן, הפתרון ההומוגני נראה כך: $y_h(t)=Ae^{-at}$

נמצא את ערכו של הקבוע A על-פי תנאי ההתחלה: $y(0)=y_0=Ae^{-a\cdot 0}=A\rightarrow A=y_0$

כלומר:

$$\boxed{y_{ZIR}(t)=y_h(t)=y_0e^{-at}}$$

ZSR- פתרון המשוואה עבור הכניסה הנתונה ותנאי התחלה אפס:

$$\begin{cases}\dfrac{dy(t)}{dt}+ay(t)=Ke^{-bt}u(t)\\ y(0)=0\end{cases}$$

פתרון זה הינו קומבינציה של פתרון הומוגני + פתרון פרטי.

עבור $t<0$:

$$\begin{cases}\dfrac{dy(t)}{dt}+ay(t)=0\\ y(0)=0\end{cases}\rightarrow y_{ZSR}(t)=0$$

עבור $t\geq 0$:

$$\begin{cases}\dfrac{dy(t)}{dt}+ay(t)=Ke^{-bt}\\ y(0)=0\end{cases}$$

<u>פתרון הומוגני :</u> $\tilde{y}_h(t)=\tilde{A}e^{-at}$

$$\mathrm{y}(0)=\mathrm{A}e^{-a0}+0=0$$

<u>פתרון פרטי :</u>

ננחש פתרון מהצורה של הכניסה הנתונה : $y_p(t)=Be^{-bt}$

נציב במד״ר על-מנת למצוא את ערכו של הקבוע B :

$$-b\cdot B\cdot e^{-bt}+a\cdot B\cdot e^{-bt}=Ke^{-bt}$$
$$B(a-b)e^{-bt}=Ke^{-bt}$$

על-ידי השוואת מקדמים נקבל :

$$B(a-b)=K$$
$$\rightarrow B=\frac{K}{a-b}$$

הפתרון הפרטי הוא : $y_p(t)=\frac{K}{a-b}e^{-bt}$

פתרון ZSR עבור $t\geq 0$:

$$y_{ZSR}(t)=y_p(t)+\tilde{y}_h(t)=\frac{K}{a-b}e^{-bt}+\tilde{A}e^{-at}$$

נמצא את ערכו של הקבוע $\tilde{A}$ על-פי תנאי התחלה אפס :

$$y_{ZSR}(0)=0=\frac{K}{a-b}e^{-b\cdot 0}+\tilde{A}e^{-a\cdot 0}=\frac{K}{a-b}+\tilde{A}$$
$$\rightarrow \tilde{A}=-\frac{K}{a-b}$$

לכן :

$$y_{ZSR}(t)=y_p(t)+\tilde{y}_h(t)=\frac{K}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)$$

פתרון זה הוא עבור $t\geq 0$. באופן כללי נרשום כך :

$$\boxed{y_{ZSR}(t)=y_p(t)+\tilde{y}_h(t)=\frac{K}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)u(t)}$$

לבסוף, הפתרון הכולל של המשוואה הוא :

$$\boxed{y(y)=y_{ZIR}(t)+y_{ZSR}(t)=y_0e^{-at}+\frac{K}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)u(t)}$$

פתרון בשיטת הומוגני + פרטי:

<u>הומוגני</u>

הפולינום האופייני: $\lambda + a = 0$

שורשי הפולינום: $\lambda = -a$

על-כן הפתרון ההומוגני הוא: $y_h(t) = Ae^{-at}$

<u>פרטי</u>

מכיוון שבכניסה יש ביטוי עם פונקציית מדרגה, נחלק את הפתרון לשני תחומים.

$t < 0$: בתחום זה הכניסה היא אפס, לכן ישנו פתרון הומוגני בלבד.

$t > 0$: בתחום זה המד"ר היא בעלת הצורה הבא:

$$y'(t) + ay(t) = Ke^{-bt}$$

ננחש פתרון מהצורה של הכניסה: $y_p(t) = Be^{-bt}$

נציב במד"ר ונקבל: $-bBe^{-bt} + aBe^{-bt} = Ke^{-bt}$

על-ידי השוואת מקדמים נקבל: $B = \frac{K}{a-b}$

לכן, הפתרון הכללי בתחום זה הוא: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-at} + \frac{K}{a-b}e^{-bt}u(t)$

<u>מציאת קבועים על-פי תנאי ההתחלה:</u>

עבור $t < 0$:

$$y(0) = Ae^{-a\cdot 0} = y_0$$
$$\Rightarrow A = y_0$$

עבור $t > 0$:

$$y(0) = \frac{K}{a-b} + A = y_0$$
$$\Rightarrow A = y_0 - \frac{K}{a-b}$$

כלומר קבלנו:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 e^{-at} & t < 0 \\ \left(y_0 - \frac{K}{a-b}\right)e^{-at} + \frac{K}{a-b}e^{-bt} & t > 0 \end{cases}$$

או ברישום אחר:

$$y(t) = \underbrace{y_0 e^{-at}}_{ZIR} + \underbrace{\frac{K}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)u(t)}_{ZSR}$$

כאשר:

$y_{ZIR}(t)$ מתקבל מפתרון המד"ר עם כניסה אפס ות"ה נתונים:

$$y'(t) + ay(t) = 0$$
$$y(0) = y_0$$

$y_{ZSR}(t)$ מתקבל מפתרון המד"ר עם הכניסה הנתונה ות"ה אפס:

$$y'(t) + ay(t) = Ke^{-bt}$$
$$y(0) = 0$$