תרגול 9 - מציאת תגובה להלם של משוואה דיפרנציאלית

נתונה מד״ר עם מקדמים קבועים:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m x^{(n)}(t)$$

(כאשר $f^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} f(t)$)

N – הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר של המוצא.
M – הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר של הכניסה.

מבקשים למצוא את **התגובה להלם**, כלומר את מוצא המערכת עבור **תנאי התחלה 0 וכניסה דלתא** $x(t) = \delta(t)$

הערה: אם בנוסף ישנם תנאי התחלה שונים מאפס, אזי פותרים לחוד ZIR וכל ההסבר להלן נוגע רק למרכיב ה-ZSR (שמתייחס לכניסה הנתונה דלתא ותנאי התחלה אפס).

הדלתא שונה מאפס פרט לזמן t=0, לכן ברגעים שאינם 0, התגובה להלם זה למעשה **הפתרון של המשוואה ההומוגנית**.

ברגע $t = 0$, אם $M \geq N$ יופיעו **פונקציית דלתא ונגזרותיה** במוצא.

כלומר הצורה הכללית של התגובה להלם היא:

$$\boxed{h(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i(t) u(t) + \sum_{i=0}^{M-N} \beta_i \delta^{(i)}(t)}$$

דוגמה:

$y'(t) + ay(t) = x(t)$ <-- $N=1$, $M=0$.

התגובה להלם היא מהצורה:

$$h(t) = \alpha_1 e^{-at} u(t)$$

כיצד נמצא את המקדמים?

דרך א׳: הצבה במד״ר -

1. נציב $h(t) = \alpha_1 e^{-at} u(t)$ במד״ר ונקבל:

$$h'(t) + a \cdot h(t) = \delta(t)$$
$$-a \cdot \alpha_1 \cdot e^{-at} u(t) + \underbrace{\alpha_1 e^{-at} \delta(t)}_{=\alpha_1 e^{-a \cdot 0} \delta(t) = \alpha_1 \delta(t)} + a \cdot \alpha_1 e^{-at} u(t) = \delta(t)$$
$$\alpha_1 \delta(t) = \delta(t)$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 1$$
$$\boxed{h(t) = e^{-at} u(t)}$$

דרך ב׳- על-פי שיקולי רציפות ואינטגרציה בין $t = 0^-$ לבין $t = 0^+$.

1. לפי שיקולי אי-רציפות (הסדר הכי גבוה מימין מתנהג כמו הסדר הכי גבוה משמאל):

$$h'(t) \propto \delta(t)$$
$$h(t) \propto u(t)$$
$$H(t) \propto tu(t) = ramp(t) \text{ (continious at t=0)}$$

נחשב אינטגרל בין 0^- ל-0^+ על שני אגפי המשוואה:

$$\int_{0^-}^{0^+} h'(t)\,dt + a\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$
$$h(0^+) - \underbrace{h(0^-)}_{=0} + a\,\underbrace{\left(H(0^+) - H(0^-)\right)}_{=0\text{(since it is continious)}} = 1$$
$$\Rightarrow h(0^+) = \alpha_1 e^{-a\cdot 0}u(0^+) = \alpha_1 = 1$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 1$$
$$\boxed{h(t) = e^{-at}u(t)}$$

<u>הערה חשובה:</u>

כאשר באגף ימין מופיעות גם נגזרות של פונקציית דלתא ניתן גם **לפתור עבור דלתא בלבד** ואז למצוא את הפתרון עבור קומבינציה של דלתא ונגזרותיה על-ידי שימוש בתכונות הלינאריות וקוביעות בזמן של המד"ר.

<u>דוגמה</u>

$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x''(t) + x(t)$ --> $N=2$, $M=2$.

התגובה להלם היא מהצורה:

$$h(t) = \alpha_1 e^{-2t}u(t) + \alpha_2 e^{-3t}u(t) + \beta\delta(t)$$

עבור המד"ר:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x''(t) + x(t)$$

ניתן למצוא תגובה להלם של מערכת אחרת: $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$, כלומר נפתור

$$\tilde{h}''(t) + 5\tilde{h}'(t) + 6\tilde{h}(t) = \delta(t)$$

במקרה הזה $\tilde{h}(t) = \alpha_1 e^{-2t}u(t) + \alpha_2 e^{-3t}u(t)$ ומתקיים:

$$\boxed{h(t) = \tilde{h}''(t) + \tilde{h}(t)}$$

את המקדמים ניתן לפתור באחת השיטות שלמדנו ונקבל:

$$\tilde{h}(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$
$$\tilde{h}'(t) = -2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\delta(t) + 3e^{-3t}u(t) - e^{-3t}\delta(t)$$
$$= -2e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t)$$
$$\tilde{h}''(t) = 4e^{-2t}u(t) - 2e^{-2t}\delta(t) - 9e^{-3t}u(t) + 3e^{-3t}\delta(t)$$
$$= 4e^{-2t}u(t) - 9e^{-3t}\delta(t) + \delta(t)$$

לכן התגובה להלם של המערכת הנתונה הינה:

$$h(t) = \tilde{h}''(t) + \tilde{h}(t) = 4e^{-2t}u(t) - 9e^{-3t}u(t) + \delta(t) + e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$
$$= 5e^{-2t}u(t) - 10e^{-3t}u(t) + \delta(t)$$
$$\boxed{h(t) = 5e^{-2t}u(t) - 10e^{-3t}u(t) + \delta(t)}$$

נמצא את המקדמים לפי **דרך ב':**
לפי שיקולי אי-רציפות:

$$\tilde{h}''(t) \propto \delta(t)$$
$$\tilde{h}'(t) \propto u(t)$$
$$\tilde{h}(t) \propto tu(t)$$

נחשב אינטגרל בין 0^- ל-0^+ על שני אגפי המשוואה:

$$\int_{0^-}^{0^+} \tilde{h}''(t)\,dt + 5\int_{0^-}^{0^+} \tilde{h}'(t)\,dt + 6\int_{0^-}^{0^+} \tilde{h}(t)\,dt = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt}_{=1}$$

$$\tilde{h}'(0^+) - \underbrace{\tilde{h}'(0^-)}_{=0} + 5\underbrace{\left(\tilde{h}(0^+) - \tilde{h}(0^-)\right)}_{=0} + 6\underbrace{\left(\tilde{H}(0^+) - \tilde{H}(0^-)\right)}_{=0} = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(0^+) = 0, \tilde{h}'(0^+) = 1$$

נציב תנאי התחלה:

$$\tilde{h}(t) = \tilde{\alpha}_1 e^{-2t}u(t) + \tilde{\alpha}_2 e^{-3t}u(t)$$
$$\tilde{h}(0^+) = 0, h'(0^+) = 1$$
$$\left.\begin{aligned}\tilde{h}(0^+) &= \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 = 0\\ \tilde{h}'(0^+) &= -2\tilde{\alpha}_1 - 3\tilde{\alpha}_2 = 1\end{aligned}\right\}\tilde{\alpha}_1 = 1, \tilde{\alpha}_2 = -1$$
$$\tilde{h}(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$
$$\tilde{h}'(t) = -2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\delta(t) + 3e^{-3t}u(t) - e^{-3t}\delta(t)$$
$$= -2e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t)$$
$$\tilde{h}''(t) = 4e^{-2t}u(t) - 2e^{-2t}\delta(t) - 9e^{-3t}u(t) + 3e^{-3t}\delta(t)$$
$$= 4e^{-2t}u(t) - 9e^{-3t}\delta(t) + \delta(t)$$

לכן התגובה להלם של המערכת הנתונה הינה:

$$h(t) = \tilde{h}''(t) + \tilde{h}(t) = 4e^{-2t}u(t) - 9e^{-3t}u(t) + \delta(t) + e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$
$$= 5e^{-2t}u(t) - 10e^{-3t}u(t) + \delta(t)$$

$$\boxed{h(t) = 5e^{-2t}u(t) - 10e^{-3t}u(t) + \delta(t)}$$

<u>שאלה 1</u>

מצא את התגובה להלם, *h(t)*, של המערכת המתוארת בשאלה הקודמת.

<u>פתרון 1</u>

כאשר מבקשים למצוא תגובה להלם, הכוונה היא: $x(t) = \delta(t),\ \ y(0^-) = 0$.

מאחר ותנאי ההתחלה הם אפס, יש למצוא פתרון ZSR בלבד.

נרצה להמיר את המד"ר הנ"ל במד"ר הומוגנית עם תנאי התחלה אחרים:

$$y'(t) + ay(t) = 0$$
$$y(0^+) = ?$$

לאחר הערעור (שמתרחש בזמן 0) המשוואה היא $y'(t) + ay(t) = 0$ עם תגובת המערכת כתוצאה מהערעור, כלומר $y(0^+)$.

ננחש את צורת הפתרון על-סמך שיקולי אי-רציפות:

$$y'(t) \propto \delta(t)$$
$$y(t) \propto u(t)$$

$$y(t) \propto tu(t) = ramp(t)$$

נבצע איזון הלמים - נחשב אינטגרל בין 0^- ל-0^+ על שני אגפי המשוואה:

$$\int_{0^-}^{0^+} y'(t)\,dt + a\int_{0^-}^{0^+} y(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$

$$y(0^+) - \underbrace{y(0^-)}_{=0} + a\underbrace{\left(Y(0^+) - Y(0^-)\right)}_{=0} = 1$$

$$\Rightarrow y(0^+) = 1$$

על-כן, התקבלה המד״ר הבאה:

עבור $t < 0$:

$$y'(t) + ay(t) = 0$$
$$y(0^-) = 0$$
$$\Rightarrow y(t) = 0$$

עבור $t > 0$:

$$y'(t) + ay(t) = 0$$
$$y(0^+) = 1$$

פתרון המד״ר:

$$y(t) = Ae^{-at}$$
$$y(0^+) = 1 = A$$
$$\Rightarrow y(t) = e^{-at}$$

כלומר: $h(t) = e^{-at}u(t)$

משפט כללי: מד״ר מהצורה הבאה:

$$a_N y^{(N)}(t) + \ldots + a_0 y^{(0)}(t) = \delta(t)$$
$$y^{(N-1)}(0^-) = \ldots = y(0^-) = 0$$

ניתן להמיר ל:

$$a_N y^{(N)}(t) + \ldots + a_0 y^{(0)}(t) = 0$$
$$y^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N},\ y^{(N-2)}(0^+) \ldots = y(0^+) = 0$$

<u>שאלה 2</u>

נתונה המערכת משאלה 1 עם $y(0) = 0$.

א) מצא את התגובה של המערכת למדרגה, $s(t)$, ללא שימוש בתגובה להלם שלה $h(t)$.

ב) מצא תגובה של המערכת למדרגה, $s(t)$, בעזרת התגובה להלם שלה $h(t)$ מהסעיף הקודם.

ג) מצא את התגובה להלם $h(t)$ של המערכת מתוך התגובה של המערכת למדרגה $s(t)$.

<u>פתרון 2</u>

ישנן מספר דרכים לפתרון.

1. מקרה פרטי של שאלה 1 עם: $y_0 = 0, b = 0, K = 1$. נציב ערכים אלו בפתרון של 1, ונקבל:

$$s(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

2. בדרך הרגילה:

עבור $t < 0$:

$$y'(t) + ay(t) = 0$$
$$y(0^-) = 0$$
$$\Rightarrow y(t) = 0$$

עבור $t > 0$:

$$y'(t) + ay(t) = 1$$
$$y(0^+) = 0$$

3. אינטגרציה של תגובה להלם:

המערכת הינה LTI, לכן: אם $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$, אז $s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$, לכן:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a\tau}u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-a\tau}u(\tau)d\tau =$$

$$t < 0: \int_{0}^{t} e^{-a\tau}u(\tau)d\tau = 0$$

$$t > 0: \int_{0}^{t} e^{-a\tau}u(\tau)d\tau = \left.\frac{e^{-a\tau}}{-a}\right|_{0}^{t} = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

מציאת התגובה להלם מתוך תגובה למדרגה:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)\right) = \frac{1}{a}ae^{-at}u(t) + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\delta(t) =$$

$$e^{-at}u(t) + \frac{1}{a}(1 - e^{-a\cdot 0})\delta(t) = e^{-at}u(t)$$

<u>שאלה 3</u>

פתור את המד"ר הבאה:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \delta(t) + \delta'(t)$$

$$y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2$$

<u>פתרון 3</u>

<u>ZIR</u>:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

$$y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2$$

פולינום אופייני -

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow y_{ZIR} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

נציב ת״ה:

$$y_{ZIR}(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'_{ZIR}(0) = -2C_1 - 3C_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = 5, C_2 = -4$$

$$y_{ZIR}(t) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

<u>ZSR</u>:

<u>דרך א׳</u>- התגובה להלם היא מהצורה

$$h(t) = \alpha_1 e^{-2t} u(t) + \alpha_2 e^{-3t} u(t)$$

(כיוון שהסדר של הנגזרות בכניסה באגף ימין נמוך מסדר הנגזרות במוצא באגף שמאלי).

משיקולי אי-רציפות:

$$h''(t) \propto \delta'(t)$$

$$h'(t) \propto \delta(t)$$

$$h(t) \propto u(t)$$

$$h(t) \propto tu(t) = ramp(t)$$

נבצע אינטגרציה פעם אחת ונציב את הגבולות בין $t = 0^-$ לבין $t = 0^+$:

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} h''(t)\,dt + 5\int_{0^-}^{0^+} h'(t)\,dt + 6\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt}_{=1} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta'(t)dt}_{=0}$$

$$h'(0^+) - \underbrace{h'(0^-)}_{=0} + 5\left(h(0^+) - \underbrace{h(0^-)}_{=0}\right) + a\underbrace{\left(H(0^+) - H(0^-)\right)}_{=0} = 1$$

$$\Rightarrow h'(0^+) + 5 \cdot h(0^+) = 1$$

נבצע אינטגרציה פעמיים ונציב את הגבולות בין $t = 0^-$ לבין $t = 0^+$:

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} h'(t)\,dt + 5\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt + 6\int_{0^-}^{0^+} H(t)\,dt = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(t)dt}_{=1} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt}_{=1}$$

$$h(0^+) - \underbrace{h(0^-)}_{=0} + 5\underbrace{\left(H(0^+) - H(0^-)\right)}_{=0} + 6\underbrace{\left(\bar{H}(0^+) - \bar{H}(0^-)\right)}_{=0} = 0 + 1$$

$$\Rightarrow h(0^+) = 1 \Rightarrow h'(0^+) = -4$$

כלומר, יש לפתור את המשוואה ההומוגנית הבאה:

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = 0$$

$$h(0^+) = 1, h'(0^+) = -4$$

נמצא את α_1 ו-α_2 על-פי תנאי ההתחלה החדשים שמצאנו-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$$

$$y_{ZSR}(t) = h(t) = (2e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$$

<u>דרך ב'-</u>

עבור כניסה $\delta(t)$**:**

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \delta(t)$$

$$y(0^-) = 0, y'(0^-) = 0$$

על-פי משפט איזון הלמים:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

$$y(0^+) = 0, y'(0^+) = 1$$

תזכורת –איזון הלמים:

שיקולי הרציפות-

$$y''(t) \propto \delta(t)$$

$$y'(t) \propto u(t)$$

$$y(t) \propto tu(t)$$

$$y(t) \propto continious$$

נבצע אינטגרציה פעם אחת ונציב את הגבולות בין $t = 0^-$ לבין $t = 0^+$:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} y''(t)\,dt + 5\int_{0^-}^{0^+} y'(t)\,dt + 6\int_{0^-}^{0^+} y(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$

$$y'(0^+) - \underbrace{y'(0^-)}_{=0} + 5\underbrace{\left(y(0^+) - y(0^-)\right)}_{=0} + a\underbrace{\left(Y(0^+) - Y(0^-)\right)}_{=0} = 1$$

$$\Rightarrow y'(0^+) = 1$$

על-כן:

$$y_{ZSR}\{\delta(t)\} = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-3t}$$

תנאי התחלה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = 1, B_2 = -1$$

לכן:

$$y_{ZSR}\{\delta(t)\} = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

עבור כניסה $\delta'(t)$**:**

$$y_{ZSR}\{\delta'(t)\} = \frac{d}{dt} y_{ZSR}\{\delta(t)\} = \frac{d}{dt}[(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)] =$$

$$(-2e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t) + \underbrace{(e^{-2t} - e^{-3t})\delta(t)}_{(1-1)\delta(t)} = (-2e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t)$$

עבור כניסה $\delta(t) + \delta'(t)$**:**

$$y_{ZSR}\{\delta(t) + \delta'(t)\} = (2e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$$

ובסך-הכל נקבל:

$$y(t) = y_{ZIR}(t) + y_{ZSR}(t) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t} + (2e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$$