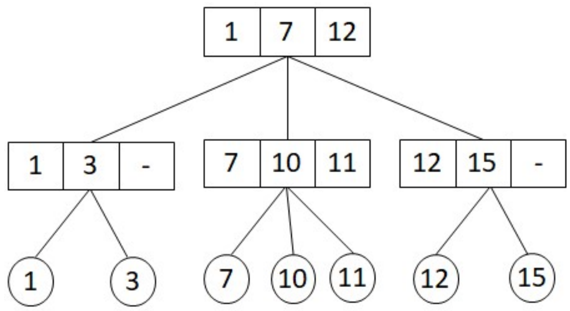
שאלה 1 (15 נק'):

לעץ 2-3 הבא



מבצעים כעת את 3 הפעולות הבאות:

- Insert(16)
- Insert(8)
- Delete(1)

בזו אחר זו. תארו את מצב העץ לאחר כל פעולה, והסבירו.

ראו שקופיות על עצי 2-3.

שאלה 2 (20 נק'):

נתונה בעית LP הבאה (P) עם $n = 4$ משתנים ו-$m = 2$ אילוצים לא טריוויאלים:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ \textit{subject to}: \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 5 \\ & 7x_1 - x_3 - x_4 \le -3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

1. (8 נק') כתבו את הדואלי שלה.
2. (12 נק') מצאו וקטור $\boldsymbol{y}^*$ המהווה פתרון לדואלי ומראה שהוקטור $\boldsymbol{x}^* = (0,2,3,0)$ הוא פתרון אופטימלי ל(P). (כלומר, הצבת הערכים $x_1 = x_4 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3$ ממקסמת את (P).)

1. נזהה את הרכיבים השונים בLP הנתון:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

כך שאפשר לרשום את הLP המקורית כמיקסום $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$, תחת האילוצים $\boldsymbol{b} \geq A\boldsymbol{x}$, **ו-** $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
ולכן הLP הדואלית היא:

$$\min \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{y} = 5y_1 - 3y_2$$
$$subject\ to: \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

או:

$$\min 5y_1 - 3y_2$$
$$subject\ to: \quad y_1 + 7y_2 \geq 3$$
$$y_1 \geq 2$$
$$y_1 - y_2 \geq 1$$
$$y_1 - y_2 \geq -1$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

2. אם אכן x^* הנתון הוא פתרון אופטימלי, אז ערך ה-LP הפרימאלי הוא:

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 + 4 + 3 + 0 = 7$$

ובנוסף, מאחר שקואורדינטות 2 ו-3 שלו הן גדולות ממש מ-0, הפתרון הדואלי לו צריך לקיים שאת האילוצים השני והשלישי הוא מקיים באופן הדוק, כלומר:

$$y_1^* = 2$$

$$y_1^* - y_2^* = 1$$

ועל כן חייב להתקיים כי $y^* = (2,1)$.

נשים לב ש-y^* הנ"ל אכן מקיים את כל ארבעת האילוצים שהרי:

$$2 + 7 \cdot 1 \geq 3,$$

$$2 \geq 2$$

$$2 - 1 \geq 1$$

$$2 - 1 \geq -1$$

ולכן y^* הוא פתרון אפשרי לLP הדואלי, והוא נותן ערך של: $5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7$ הזהה לערך הLP הפרימאלי. ולכן 7 הוא אכן חסם עליון על ערך הפתרון של (P) אותו משיג x^*. מכאן ש-x^* הוא אכן פתרון אופטימלי לLP המקורי ו-y^* הוא הפתרון לדואלי וערך שתי בעיות התכנון הלינארי הוא 7.

שאלה 3 (20 נק'):

נתונה רשת זרימה $G = (V, E, s, t, c)$ ובה כבר מצאו עבורכם את הזרימה המקסימאלית f.

כעת אתם מקבלים עדכון: לצלע אחת $u \to v$ הגדילו את הקיבולת ב-1.

תנו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|V|+|E|)$ ומעדכן את זרימת המקסימום בהתאם. הוכיחו את כל טענותיכם.

פתרון:

האלג' פשוט בונה את הרשת השיורית לאחר העדכון – ומוצא מסלול $s \to t$ בה. אם יש מסלול כזה – נעדכן בו את הזרימה, ואם לא – נותיר את הזרימה כפי שהיא.

משום שבנית הרשת השיורית לוקחת $O(|V|+|E|)$ ומציאת המסלול בה (ע"י BFS / DFS) לוקחת $O(|V|+|E|)$ ועדכון הזרימה לוקח $O(|E|)$ לכן זמן הריצה הוא כדרוש.

מדוע האלג' נכון? ובזכות משפט הסופרפוזיציה! נסמן ב- f' את הזרימה המקס' ברשת החדשה, ואת הזרימה המקורית ב-f. אז ממשפט הסופרפוזיציה ברשת השיורית יש זרימה בגודל |f'|-|f|. ברור שמאחר ש-f היא זרימה חוקית גם ברשת החדשה (אחרי העדכון) אז הזרימה עם הערך המקסימאלי חייבת לקיים: $|f'| \geq |f|$.

אם $|f'| = |f|$ אז ברשת השיורית הזרימה היא בגודל 0 ולכן נמצא שאין מסלול $s \to t$ ברשת השיורית.

אחרת $|f'| > |f|$. נטען שבמקרה זה מתקיים כי $|f'| = |f| + 1$. משום שהזרימה בשלמים היא חייבת לגדול לפחות ב-1. מדוע היא גדלה לכל היותר באחד? הנימוק הכי פשוט הוא לפי גודל החתך המינימאלי ברשת. החתך המינימאלי ברשת המקורית הוא בגודל |f| ולאחר העדכון הוא יכול לגדול בכל היותר 1.

ולכן – די לנו באיטרציה אחת בלבד של Ford-Fulkerson – או שהזרימה ברשת השיורית היא 0 (אין עדכון) או שהיא 1 (במקרה של עדכון).

שאלה 4 (25 נק'):

מכניסים n איברים לתוך רשימת דילוגים (Skip List). נסמן ב-K את המשתנה המקרי (האי-שלילי) המציין את גובה (או מספר הרמות ב-) רשימת הדילוגים.

נגדיר את המשתנה המקרי (האי-שלילי):

$$X = \max\{0, \quad K - \log_2(n)\} = \begin{cases} 0, & K < \log_2(n) \text{ אם} \\ K - \log_2(n), & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. (22 נק') הראו כי תוחלת המשתנה המקרי X היא O(1).

ב. (3 נק') השתמשו בסעיף הקודם כדי להראות כי $\mathbb{E}[K] \leq \log_2(n) + O(1)$

הדרכה: זכרו כי עבור משתנה מקרי X אי-שלילי מתקיים כי: $\mathbb{E}[X] = \sum_{i \geq 1} \Pr[X \geq i]$ (הניחו כי n הוא חזקה של 2)

א. עפ"י הגדרה:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i\geq 1} \Pr[X \geq i] = \sum_{i\geq 1} \Pr[K \geq \log_2(n) + i]$$

$$= \sum_{i\geq 1} \Pr[\exists j \quad s.t. \quad x_j \quad reaches \quad layer \quad \log_2(n) + i]$$

שימוש בחסם האיחוד (שהרי אם יש j כזה הוא בין 1 ל-n) נותן

$$\leq \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{n} \Pr\left[\, x_j \quad reaches \quad layer \quad \log_2(n) + i\right] = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{n} 2^{-\log_2(n)-i} = \sum_{i\geq 1} n \cdot \frac{1}{n \cdot 2^i}$$

$$= \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2-1} = 1$$

ב. שימוש ישיר בתכונות התוחלת נותן כי:

$$\mathbb{E}[K] = \mathbb{E}[\log_2(n) + (K - \log_2(n))] = \log_2(n) + \mathbb{E}[K - \log_2(n)] \leq \log_2(n) + \mathbb{E}[X]$$
$$= \log_2(n) + 1$$

כדרוש, כאשר $\mathbb{E}[K - \log_2(n)] \leq \mathbb{E}[X]$ נובע מהגדרת המ"מ X: אם המ"מ $K - \log_2(n)$ מקבל ערך כלשהו t אז X מקבל ערך $\leq t$ באותה הסתברות.

שאלה 5 (25 נק'):

בשאלה זו נדון במימוש של תור ע"י שתי מחסניות.

מחסנית מומשה עבורכם כבר. המחסנית מוסיפה איבר בראש המחסנית ($Push(x)$) ומוציאה איבר מראש המחסנית ($Pop()$) (בסדר LIFO) וכן שומרת שדה size שבו מס' האיברים במחסנית. כל פעולותיה לוקחות O(1) במקרה הגרוע ביותר.

כעת נממש תור (הכנסה והוצאה בסדר FIFO) ע"י שימוש בשתי מחסניות A ו- B, באופן הבא:

<u>Enqueue(x):</u> (מוסיף איבר בראש התור)
$A.push(x)$

<u>Dequeue():</u> (מוציא את האיבר בסוף התור)
if (B.size = 0) **then** {
    while (A.size> 0)
        $B.Push(A.Pop())$
}
return $B.pop()$

א. (5 נק') הראו את מצב המחסניות ברצף הפעולות הבא:
Enqueue(1), Enqueue(2), Dequeue(), Enqueue(3), Dequeue(), Dequeue()

ב. (20 נק') הוכיחו כי סיבוכיות הפחת של כל פעולה במימוש זה היא O(1).

א. את הציור אשאיר לכם.

ב. נשתמש בשטת החסכון: נדרוש מכל הכנסה (*Enqueue*) תשלום של 3 ומכל הוצאה תשלום של 1, בהנחה שפעולות ה- *Push()* ו-*Pop()* עולות לנו 1.
נטען שלאחר כל הוראה יש לנו חסכון בשווי של פעמיים מס' האיברים ב-*A*.
נסמן את מס' האיברים ב-*A* לפני ההוראה ב-*a*. כעת נפצל למקרים לפי ההוראה:

- *Enqueue(x)* – אנחנו מכניסים עוד איבר ל-*A*, דורשים תשלום של 3 ומשלמים 1 על הכנסת האיבר. מס' האיברים גדל ב-1, והתשלום בחשבון גדל ב-3-1=2 בהתאם. התנאי מתקיים.
- *Dequeue()* פשוט (בו הלולאה שב-*if* לא מבוצעת): אנחנו דורשים תשלום של 1 והפעולה עולה 1. החשבון לא משתנה וכן מס' האיברים ב-*A* לא משתנה. התנאי מתקיים.
- *Dequeue()* מורכב (בו הלולאה שב-*if* כן מבוצעת): אנחנו נקבל תשלום של 1 וכן יש בחשבון שלנו 2*a* שקלים. אנחנו מבצעים *a* פעולות *POP()*ועוד *a* *Push()* שעולות לנו 1 כל אחת, ועוד הוצאת האיבר שבראש *B* +1, ולכן נשלם *2a+1* שקלים. מנגד, מס' האיברים ב-*A* התאפס! ולכן בחשבון שלנו 0 שקלים שהם אכן $2 \cdot 0$ כאשר 0 הוא מס' האיברים החדש ב-*A*.

באופן דומה אפשר היה לפתור את השאלה באמצעות פוטנציאל שהוא $\varphi(A,B) = 2|A|$.