עבודה תורת המשחקים:

ברק בן אקון 318509056

שקד חן 207253220

תרגיל 1:

מטרת התרגיל היא להוכיח כי במשחק שני שחקנים סכום אפס קבוצת האסטרטגיות האופטימליות של כל שחקן היא קבוצה קמורה.

נניח שלשחקן 1 יש k אפשרויות יהי $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ ו $q = (q_1, q_2, \dots q_k)$ שני וקטורי אסטרטגיה מעורבות של שחקן 1, לכל $\alpha \in [0,1]$ יהי $\tau = (\alpha \cdot p_1 + (1-\alpha) \cdot q_1, \dots, \alpha \cdot p_k + (1-\alpha) \cdot q_k)$

שאלה 1:

צריך להוכיח שגם τ הוא ווקטור הסתברויות מעורב.

שלב ראשון נרצה להבין מה זה אומר וקטור אסטרטגיה מעורבת,

זה אומר שלכל מצב i, יש סיכוי p_i שהוא יקרה.

$$\tau = (a \cdot p_1 + (1-a) \cdot q_1, \dots, a \cdot p_k + (1-a) \cdot q_k$$

$$\tau = (a \cdot p_1 +, \dots, a \cdot p_k) + ((1-a) \cdot q_1, \dots, (1-a) \cdot q_k)$$

$$\tau = a \cdot (p_1, \dots, p_k) + (1-a)(q_1, \dots, q_k)$$

ידוע ש

$$\sum q_i = 1, \sum p_i = 1 \rightarrow \sum (ap_i + (1-a)q_i) = 1$$

ולכן τ הינו וקטור אסטרטגיות מעורבות.

ב

ב. הוכיחו כי לכל אסטרטגיה מעורבת של שחקן 2 σ_2 מתקיים
$U(\tau, \sigma_2) = \alpha U(p, \sigma_2) + (1-\alpha) U(q, \sigma_2)$

$$U(\tau, \sigma_2) = U(s_1, s_1) \cdot [a \cdot p_1 + (1-a) \cdot q_1] + \cdots + U(s_k, s_k) \cdot [a \cdot p_k + (1-a) \cdot q_k]$$

$$U(\tau, \sigma_2) = U(s_1, s_1) \cdot a \cdot p_1 + U(s_1, s_1) \cdot (1-a) \cdot q_1 + \cdots$$
$$+ U(s_k, s_k) \cdot a \cdot p_k + U(s_k, s_k) \cdot (1-a) \cdot q_k$$

$$U(\tau, \sigma_2) = a\ [\ U(s_1, s_1) \cdot p_1 + \cdots + U(s_k, s_k) \cdot p_k]$$

$$+(1-a)\cdot[U(s_1,s_1)\cdot q_1+\cdots+\ U(s_k,s_k)\cdot q_k]$$

$$U(\tau,\sigma_2)=a\cdot U(p,\sigma_2)+(1-a)\cdot U(q,\sigma_2)$$

ג.

ג. נאמר שהאסטרטגיה σ_1 מבטיחה תשלום v אם $U(\sigma_1,\sigma_2)\geq v$ לכל σ_2, הוכיחו שאם p,q מבטיחות לשחקן תשלום v גם τ מבטיחה תשלום v

$$U(p,\sigma_2)\geq v, U(q,\sigma_2)\geq v$$

$$U(\tau,\sigma_2)=a\cdot U(p,\sigma_2)+(1-a)\cdot U(q,\sigma_2)$$

$$U(\tau,\sigma_2)\geq a\cdot v+(1-a)\cdot v$$

$$U(\tau,\sigma_2)\geq v$$

ד.

ד. הסיקו כי אם p,q הן אסטרטגיות אופטימליות של שחקן 1, אז גם τ היא אסטרטגיה אופטימלית של שחקן 1.

אם p , q הינם אסטרטגיות אופטימליות משמע

$$U(p)=U(q)=v$$

$$U(\tau,\sigma_2)=a\cdot U(p,\sigma_2)+(1-a)\cdot U(q,\sigma_2)$$

$$U(\tau,\sigma_2)=a\cdot v+(1-a)\cdot v$$

$$U(\tau,\sigma_2)=v$$

מכיוון שיש לו את אותו תוצאה אזי הוא גם אסטרטגיה אופטימלית.

<u>תרגיל 3:</u>

תהי s_i פעולה נשלטת חזק של שחקן i. האם ייתכן שיווי משקל מתואם שבו האסטרטגיה s_i משוחקת בהסתברות חיובית? נמקו את תשובתכם

נחזור על ההגדרות, אסטרטגיה נשלטת חזק הינה אומרת שלכל מצב וקטור מצב S_i

ופעולה x_i קיימת פעולה y_i אשר נותנת , תוצאה גדולה יותר.

שזה אומר שתמיד שווה לבחור באסטרטגיה אחרת.

ולכן, לא יכול להיות שהיה קיים שווי משקל מתואם שבה s_i תהיה מכיוון שתמיד יהיה שווה לשחקן להחליף לאסטרטגיה השולטת חזק עליו.

	L	C	R
T			
M			
B			

4. שיווי משקל מתואם הוא מצב בו כל שחקן בוחר את האסטרטגיה שלו על מנת לקבל את הרווח המקסימלי בהינתן האסטרטגיות של השחקן השני, הערך של האסטרטגיות המעורבות הוא הרווח כאשר שני השחקנים משחקים את המיטב של האסטרטגיות המעורבות שלהם. ערך המשחק מתקבל כאשר $\underline{v} = \bar{v}$.

נגדיר את שיווי המשקל המעורב, בנקודה זו כל אחד שנבחרת אף אחד מהשחקנים לא ישתפר אם הוא יזוז לבד. נגדיר s_1, s_2 להיות האסטרטגיות שמובילות לנקודה זו של שחקן אחד ושתיים.

זה v, ולכן לפי ההגדרה של ערך של המשחק, $E[s_1, s_2]$ ולכן הרווח של האסטרטגיות המעורבות יהיה הרווח של שחקן 1 כאשר 2 השחקנים משחקים את המיטב.ולכן
$E[s_1, s_2] = v$.

בגלל שבשיווי משקל מתואם השחקנים משחקים את האסטרטגיות המעורבות האופטימליות שלהם, הרווח הצפוי לשחקן 1 חייב להיות v ערך המשחק. לכן, בכל שיווי משקל מתואם, הרווח לשחקן 1 הוא ערך המשחק. מכך עולה שבמשחק סכום אפס לשני שחקנים, כל שיווי משקל מתואם מבטיח לשחקן 1 את ערך המשחק באסטרטגיות מעורבות.