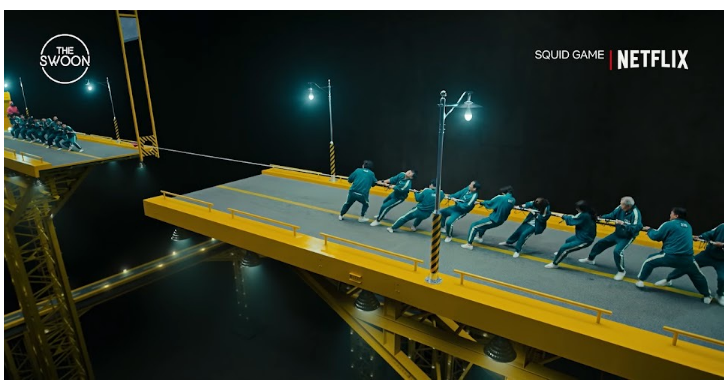
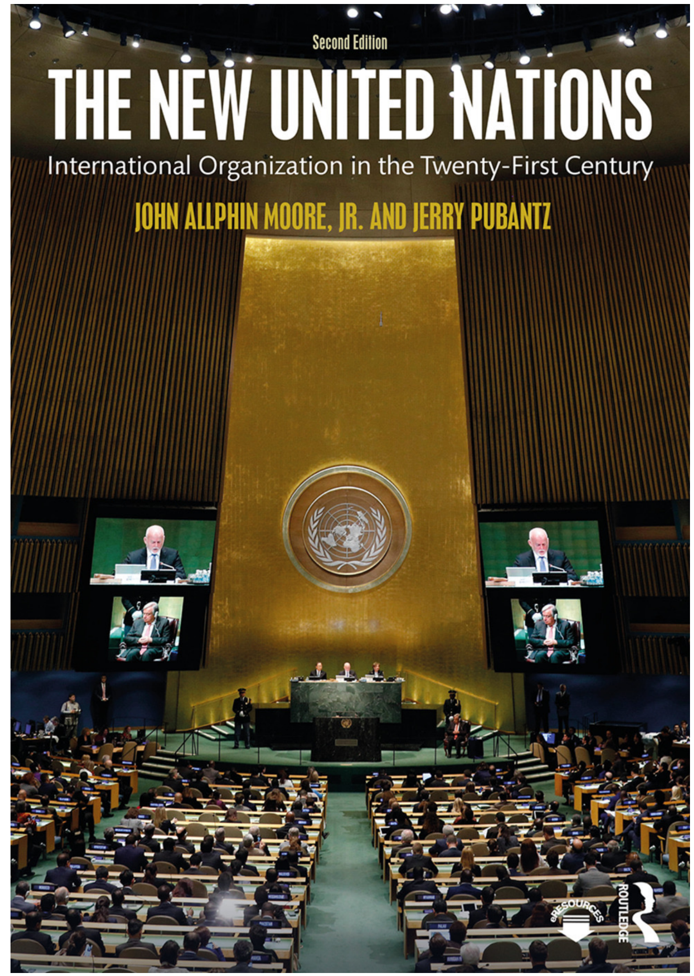
שיעור 8

משחקים קואליציוניים

The Alexander Kofkin Faculty of Engineering
Dahan Campus
Bar-Ilan University

משחקים קואליציוניים





משחקים קואליציוניים

- נתרכז במה <u>קבוצת סוכנים</u> (לעומת סוכנים בודדים) יכולים להשיג.

- בהינתן קבוצת סוכנים, משחק קואליציוני (שיתופי) מגדיר כמה קבוצה (או קואליציה) יכולים להשיג עבור עצמם.

- אנחנו **לא נדון**
  - איך הסוכנים עושים בחירות בתוך הקואליציה
  - איך הם מתאמים ביניהם
- במקום זה, נתמקד בתשלומים לקואליציה הנתונה

משחקים קואליציוניים - הגדרה

משחק קואליציוני עם העברת תועלות הוא זוג (N,v)

- קבוצה סופית של N שחקנים.
  - S תת קבוצה של N תיקרא קואליציה
- הפונקציה הקואליציונית v - לכל קואליציה S מתאימה מספר $v(S)$
  - כאשר $v(\emptyset) = 0$

- התועלת של כל השחקנים ניתן למדידה ביחידה משותפת (כסף).
- ניתן להעביר תועלות (כסף) בין השחקנים.

משחקים קואליציוניים - דוגמאות

- משחקי רווח
  - משחק שעל ידי התאגדות לקבוצות השחקנים יכולים להרוויח
  - השווי של הקואליציה זה **הרווח** הכולל
  - לדוג׳: מיזם סטרטאפ רווחי
- משחק הוצאות
  - שווי הקואליציה – הסכום שחברי הקואליציה צריכים **לשלם**
  - לדוג׳ הקמת רשת כבישים על ידי קבוצות יישובים

משחק רווח - דוגמא

משחקי רווח (revenue games) הם משחקים שבהם על ידי התאגדות לקבוצות, השחקנים יכולים להרוויח. לדוגמה, ניקח שלושה יזמים, עמרי, רון ורביד. לעמרי יש רעיונות להמצאות ולפטנטים שונים, והוא מעריך כי יוכל להרוויח מהמצאותיו $170,000$ שקלים בשנה. לרון יש חוש עסקי מפותח, והוא מעוניין לפתוח חברת יעוץ, שלהערכתו תרוויח $150,000$ שקלים בשנה. רביד, שהוא איש מכירות מעולה, מעוניין לפתוח חברה לשיווק, ומעריך כי ירוויח $180,000$ שקלים בשנה. היזמים מכירים כי כישוריהם משלימים, וכי אם יעבדו ביחד, יוכלו להרוויח יותר מאשר אם יעבדו בנפרד. רון יוכל להדריך את עמרי לפתח פטנטים נדרשים, ולכן הם מעריכים כי שניהם ביחד יוכלו להרוויח $350,000$ שקלים בשנה. רביד יוכל למכור את המצאותיו של עמרי, והם מעריכים כי שניהם ביחד יוכלו להרוויח $380,000$ שקלים בשנה. רון ורביד יוכלו לפתוח חברה לייעוץ ניהולי ושיווקי, שלהערכתם תרוויח $360,000$ שקלים בשנה. אם שלושת היזמים יעבדו יחדיו, רון ידריך את עמרי ורביד ימכור את המצאותיו; הרווח הצפוי להם, להערכתם, הוא $560,000$ שקלים בשנה.

משחק רווח - דוגמא

המשחק הקואליציוני המתאים למקרה זה הוא (התשלומים בשקלים):[129]

$$
\begin{array}{ll}
v(\emptyset) = 0, & v(\text{עמרי,רביד}) = 380,000, \\
v(\text{רביד}) = 180,000, & v(\text{רביד,רון}) = 360,000, \\
v(\text{עמרי}) = 170,000, & v(\text{עמרי,רון}) = 350,000, \\
v(\text{רון}) = 150,000, & v(\text{עמרי,רביד,רון}) = 560,000.
\end{array}
$$

משחק הוצאות - דוגמא

שוודיה, נורווגיה ופינלנד מעוניינות לבנות סכר שישמש לייצור חשמל בהספק 3 ג'יגה־ואט – כל אחת מהמדינות תקבל שליש של כמות החשמל שתיוצר. עלות הסכר היא 180 מיליון דולר. השאלה העומדת בפני שלוש המדינות היא כיצד לחלק את העלות בין שלושתן. מכיוון שכל אחת מהמדינות תקבל שליש של כמות החשמל, סביר היה לדרוש כי כל אחת תשלם שליש של הסכום. אך מסתבר כי בשוודיה ישנו נהר המתאים לבניית סכר קטן יותר, המספק 2 ג'יגה־ואט, ועלות בנייתו 100 מיליון דולר. לכן שוודיה טוענת כי אם כל מדינה תצטרך לשלם 60 מיליון דולר, הרי שכדאי לשוודיה לבנות סכר עם נורווגיה או עם פינלנד, להתחלק עם מדינה זו בהוצאות, ולשלם רק 50 מיליון דולר. גם פינלנד ונורווגיה יכולות לבנות סכר משותף שיספק 2 ג'יגה־ואט ועלותו 130 מיליון דולר. כל מדינה שלא תצטרף לשתיים האחרות לבניית סכר, תצטרך לבנות סכר שיספק חשמל בכמות 1 ג'יגה־ואט. עלות סכר כזה לשוודיה היא 80 מיליון דולר, לנורווגיה 90 מיליון דולר, ולפינלנד 70 מיליון דולר.

כיצד, אם כן, על שלוש המדינות לחלק את הוצאות בניית הסכר ביניהן?

משחק הוצאות - דוגמא

המשחק הקואליציוני המתאים למקרה זה הוא המשחק שבו $c(S)$ שווה לעלות ל־S לספק לחבריה אותה כמות חשמל שהם מקבלים בהסכם המקורי, דהיינו, 1 ג'יגה־ואט (עלויות במליוני דולרים):

$$
\begin{aligned}
&c(\emptyset) = 0, && c(\text{פינלנד,שוודיה}) = 100,\\
&c(\text{פינלנד}) = 70, && c(\text{נורווגיה,שוודיה}) = 100,\\
&c(\text{שוודיה}) = 80, && c(\text{פינלנד,נורווגיה}) = 130,\\
&c(\text{נורווגיה}) = 90, && c(\text{פינלנד,נורווגיה,שוודיה}) = 180.
\end{aligned}
$$

השאלות המרכזיות

נשאל לגבי משחקים קואליציוניים:

1. אילו קואליציות ייווצרו?
2. איך חברי הקואליציה יחלקו ביניהם את הרווחים?

לרוב, התשובה ל*(1)* תהיי "הקואליציה הגדולה" (כל השחקנים), למרות שזה עלול להיות תלוי ב *(2)*

משחקים סופר אדיטיבים

משחק קואליציוני (N,v) ייקרא סופר-אדיטיבי אם לכל $S,T \subset N$ עבורם $S \cap T = \emptyset$ מתקיים:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

- במשחקים סופר אדיטיבים הקואליציות עובדות ״בלי להפריע״ אחד לשני
- הסכום של שתי קואליציות הוא לא פחות מהערכים של כל אחת מהן
- רומז שלקואליציה הגדולה הרווח הכי גדול

משחקים סופר אדיטיבים

האם המשחק שראינו הוא סופר אדיטיבי?

המשחק הקואליציוני המתאים למקרה זה הוא (התשלומים בשקלים):[129]

$$
\begin{aligned}
&v(\emptyset) = 0, && v(\text{עמרי,רביד}) = 380,000,\\
&v(\text{רביד}) = 180,000, && v(\text{רביד,רון}) = 360,000,\\
&v(\text{עמרי}) = 170,000, && v(\text{עמרי,רון}) = 350,000,\\
&v(\text{רון}) = 150,000, && v(\text{עמרי,רביד,רון}) = 560,000.
\end{aligned}
$$

משחקים סופר אדיטיבים

1. אילו קואליציות ייוצרו?
   - נעסוק במקרים שהתשובה היא הקואליציה הגדולה
   - הנחה סבירה עבור משחקים סופר אדיטיבים
2. איך הקואליציה תחלק את הרווחים?
   - על מנת שתהייה חלוקה **הוגנת**
   - על מנת שתהייה חלוקה **יציבה**

משחקים קואליציוניים

שאלה: מהי חלוקה **הוגנת**?

כמובן שזה תלוי בהגדרה של הוגנות...

נשאל קודם: אילו **אקסיומות** יש למאפייני חלוקה הוגנת?

ערך שפלי

- הרעיון של ליוד שפלי:
  - החברים בקואליציה צריכים לקבל פרופורציונאלית לתרומה השיורית שלהם.

- יכול להיות בעיתי:
  - $V(N)=1$ ו $V(S)=0$ לכל $S\neq N$
  - קיבלנו ש $V(N)-V(N-\{i\})=1$ לכל i
  - *כמובן שלא ניתן לחלק 1 לכולם*

ערך שפלי

נגדיר פונקציה תשלומים $\psi_i(N; v)$, ונניח ארבע תכונות:

1. תכונת היעילות
2. תכונת הסימטריה
3. תכונת שחקן האפס
4. תכונת החיבוריות

תכונת היעילות

מושג פתרון ψ מקיים את **תכונת היעילות** אם

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N; v) = v(N)$$

תכונת הסימטריה

השחקנים i ו j הם סימטריים אם לכל $S \subseteq N \setminus \{i,j\}$

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$$

מושג פתרון ψ מקיים את **תכונת הסימטריה** אם לכל זוג שחקנים סימטריים i,j מתקיים

$$\psi_i(N;v) = \psi_j(N;v)$$

תכונת שחקן האפס

השחקן i נקרא **שחקן אפס** אם לכל קואליציה $S \subseteq N$ (כולל הקואליציה הריקה) מתקיים:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S)$$

מושג פתרון ψ מקיים את **תכונת שחקן האפס:**
אם לכל שחקן אפס i מתקיים

$$\psi_i(N; v) = 0$$

תכונת החיבוריות

מושג פתרון ψ מקיים את **תכונת החיבוריות** אם לכל שני משחקים $G(N;v)$ ו $G(N;w)$ מתקיים:

$$\psi(N;v+w)=\psi(N;v)+\psi(N;w)$$

ערך שפלי

משפט שפלי (1953): קיים פתרון אחד ויחיד המקיים את תכונות היעילות, הסימטריה, שחקן האפס והחיבוריות

$$Sh_i(N;v) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!\cdot(|N|-|S|-1)!}{|N|!}\cdot(V(S\cup\{i\})-v(S))$$

דוגמא לחישוב ערך שפלי

חשב ערך שפלי לדוגמא הבא

$$v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 2, v(\{1,2\}) = 4$$

ערך שפלי

- ערך שפלי מקצה בהתאם לתועלת השולית
- נובעת מאקסיומות ולוגיקה
- כמובן שאקסיומות אחרות יובילו לערכים אחרים
- לדוגמא - "הליבה"

דוגמא – משחקי בחירות

בפרלמנט 4 מפלגות A,B,C,D אשר להן 45,25,15,15 קולות, בהתאמה. המפלגות צריכות להצביע האם להעביר הצעת תקציב של 100 מיליון ש"ח ואיך לחלק ביניהם, בשביל שהצעת התקציב תעבור צריך לפחות 51 קולות (אחרת התקציב הוא 0)

ערכי השפלי הם 50,16.67,16.67,16.67
האם שווה לתת-קואליציה להתפצל מהקואליציה הגדולה?
כן! לדוגמא A,B יכולים להתפצל ולחלק ביניהם 75,25

הגדרת הליבה

וקטור תשלומים x למשחק $G(N;v)$ המקיים $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$,
נקרא **סביר קבוצתית** אם לכל קואליציה $N \supseteq S$ מתקיים:

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$$

הליבה של משחק קואליציוני $G(N;v)$ היא אוסף וקטורי התשלומים הסבירים קבוצתית

הליבה

שתי השאלות המרכזיות:

1. האם תמיד קיים פתרון בליבה?

2. האם הוא יחידי?

הליבה

האם קיים פתרון בליבה עבור משחק ההצבעה?

לא!

סכום התשלום ל B,C,D חייב להיות 100 (אחרת הם יסטו)

🡐 A מקבל 0

🡐 A יכול לסטות אם B,C,D (בעל התשלום הנמוך) ולהציע לו את "רוב" הכסף

🡐סתירה

הליבה

האם תמיד קיים פתרון יחיד?

לא!
נשנה את משחק ההצבעה – הרוב הדרוש הוא 80%, נשים לב
שקיימים שתי קואליציות $\{A,B,C\}$ ו $\{A,B,D\}$

כל הפתרונות המקיימים $x_A + x_B = 100$ שייכים לליבה!

הליבה במשחקים פשוטים

משחק $G(N;v)$ הוא **משחק פשוט** אם לכל $N \supseteq S$ מתקיים
$v(S) \in \{0,1\}$

שחקן i הוא **שחקן וטו** אם $v(N \setminus \{i\}) = 0$

משפט:
במשחק פשוט הליבה ריקה אם לא קיים שחקן וטו. ואם ישנם
שחקני וטו, הליבה מכילה את כל וקטורי התשלומים שהשחקנים
שאינם וטו מקבלים 0

משחק שדות התעופה

מספר ערים צריכות שדה תעופה, לכל עיר ישנה דרישה לגבי גודל המטוסים שיינחתו בשדה.
אם נבנה שדה תעופה אזורי, הוא יכול לשמש מספר ערים (בתנאי כמובן שגודל המטוסים שיינחתו בו מספק את העיר)
אחרת, כל עיר תבנה שדה תעופה משלה.

נתאר את המשחק כמשחק קואליציוני.

משחקים קמורים

משחק קואליציוני (N,v) ייקרא קמור אם לכל $S,T \subset N$ ומתקיים:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$$

- קמירות הוא תנאי הדוק מאשר סופר אדיטיבים
- משחק שדות התעופה הוא קמור

משחקים קמורים

משפט:

בכל משחק קמור הליבה אינה ריקה

משפט:

בכל משחק קמור ערך שפלי נמצא בליבה

דוגמא: מועצת הביטחון של האו"ם

- 15 חברות במועצת הביטחון
- 5 חברות קבועות – סין, צרפת, בריטניה, רוסיה, וארה"ב
- 10 חברות מתחלפות

כדי שחוק יעבור:

- רוב החברות צריכות להסכים
- לחברות הקבועות זכות וטו

נחשב את ערכי הליבה ואת ערך שפלי עבור "מועצה קטנה" שבה שלוש חברות מתוכן אחת קבועה.