מבני נתונים ואלגוריתמים 2 (83224) – תשפ"ד
תקציר פתרון תרגיל בית 2

הערה: שימו לב שהפתרונות כוללים רק רעיונות מרכזיים, ולכן לא ניתן להתייחס אליהם כאל פתרון מלא.

תקציר פתרון לשאלה 1:

נחלק את סדרת הפעולות לפאזות שכוללת k פעולות מחסנית ופעולת גיבוי אחת. יש $\lceil m/(k+1)\rceil$ פאזות, כאשר האחרונה עשויה להיות פאזה חלקית שלא כוללת פעולת גיבוי. פעולות מחסנית לוקחות $O(1)$ זמן ופעולת גיבוי לוקחת $O(k)$ זמן. לכן סה"כ נקבל:

$$(m-\lfloor m/(k+1)\rfloor)\cdot O(1)+\lfloor m/(k+1)\rfloor\cdot O(k)=O(m)$$

ניתן לפתור בשיטת בחיובים: כל פעולת מחסנית משלמת מטבע אחד למימון פעולת ההעתקה העוקבת לה.
ניתן לפתור בשיטת האשראי: כל פעולת מחסנית משאירה מטבע אחד עבור פעולות העתקה.
ניתן לפתור ע"י פונקציית פוטנציאל: $\varphi=m \bmod (k+1)$.

תקציר פתרון לשאלה 2:

נשתמש ברשימה מקושרת עם שדה נוסף עבור size שיכיל את גודל הרשימה.

$\text{INSERT}(x,S)$ – מכניסים את x לראש הרשימה ומעדכנים את שדה size.

$\text{REMOVE-BOTTOM-QUARTER}(S)$ – מוצאים את סטטיסטי הסדר ה- $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$, ולאחר מכן עוברים על הרשימה ומוחקים ממנה את האיברים שקטנים/שווים לחציון.

ניתן להציג ניתוח דומה לדוגמא שהוצגה בתירגול ע"י שימוש בשיטת הפוטנציאל. ניתן גם להשתמש בשיטת החיובים, כאשר כל איבר שנכנס למחסנית מוסיף 4 מטבעות לקופה.

תקציר פתרון לשאלה 3:

א. העומק המקסימלי הוא $\lceil\log_{t_1} n\rceil$ והעומק המינימלי הוא $\log_{t_2} n$. ניתן לשים לב שלשורש יש מינימום שני ילדים ולכל שאר הצמתים יש מינימום t_1 ולכן $n\geq 2t_1^{h-1}$ כאשר h גובה העץ. בנוסף, יש מקסימום t_2 ילדים לכל צומת ולכן $n\leq t_2^h$.

ב. הרחבה של פעולת MEMBER בעץ 2-3 כאשר בכל צמת עורכים חיפוש בינרי.
סיבוכיות: $O(\log n)=O(\log_{t_1} n\cdot\log_2 t_2)$ בהנחה שמתקיים $t_2/t_1=O(1)$.

נשים לב כשמדובר על עד t_2 ילדים לכל צומת – כלומר כעת בכל צומת שהוא לא עלה יש מערך שגודלו המקסימלי הוא t_2. זה אומר שאנחנו נצטרך לערוך חיפוש בינארי על המערך הזה בכל צומת שנגיע אליו כדי לדעת לאיזה ילד להמשיך. שימו לב שהרבה חילקו לשלושה תחומים ודבר זה לא נכון כי הגדלנו את כמות הילדים כדי שיהיו לנו תחומים קטנים יותר.

ג. פעולת INSERT מתרחבת באופן טבעי. התנאי שצריך להתקיים הוא: $t_2\geq 2t_1-1$ כי אחרת לא ניתן לפצל ולשמור על תכונת העץ. סיבוכיות: $O(t_2\log_{t_1} n)$. נשים לב שבמקרה זה הסיבוכיות היא $O(t_2\log_{t_1} n)$ ולא $O(\log_{t_1} n\cdot\log_2 t_2)$ כי הפעם בכל צומת שאנחנו עוברים דרכו לא רק שעושים חיפוש בינארי אלא הפעם גם יכול להיות שנצטרך לפצל צומת לשני צמתים וזה לוקח $O(t_2)$.

תקציר פתרון לשאלה 4:

אם $h_2 = h_1$ אזי ניצור צומת חדש שבו השורשים של T_1 T_2 יהיו הבנים שלו. נניח בה"כ כי $h_1 > h_2$ נתחיל בעץ T_1 ונטפס עד לרמה שבה גובה העץ השמאלי הוא h_2 ונוסיף את שורש העץ T_2 כבן של אותו הצומת אם לאותו הצומת היו 2 ילדים נוסיף את השורש של T_2 בתור הבן השמאלי ונזיז בהתאם אחרת נוסיף בתור הבן השמאלי ונאזן בהתאם כפי שלמדנו בכיתה.