מבני נתונים ואלגוריתמים 2 83224 – תרגיל 5 (תשפ"ד)

הנחיות הגשה:

- מועד הגשה: 4/5/2022, הגשה באתר מודל בלבד.
- ניתן להגיש בזוגות, על כל סטודנט <u>להגיש עותק משלו</u> באתר המודל.

שאלה 1:

כעת נחשב את הערכים הצפויים של C ו D-לפשטות, נניח שהמפתחות הם 1,2.....n. עבור שני צמתים שונים x,y נניח ש k = key[x] ו key[y] = i ונגדיר את משתנה האינדיקטור המקרי:

$$X_{i,k} = \begin{cases} 1 \; if \; y \; is \; a \; node \; on \; the \; right \; spine \; of \; the \; left \; subtree \; of \; x \; (in \; T) \\ 0 \; otherwise \end{cases}$$

הראו כי $X_{i,k} = 1$ אם ורק אם

priority[y]>priority[x]

key[y]<key[x]

כל *z* כך ש *key[y]<key[z]<key[x]* גורר *priority[y]<priority[z]*.

שאלה 2:

הוכיחו נכונות של דוגמא 2 בתרגול FFT

שאלה 3:

השתמשו באלגוריתם ה- FFT לשם חישוב המכפלה של הפולינומים $A(x) = 2 + x$ ו- $B(x) = 1 + x$.

שאלה 1:

כעת נחשב את הערכים הצפויים של C ו-D. לפשטות, נניח שהמפתחות הם 1,2,....n. עבור שני צמתים שונים x,y נניח ש key[y] = i ו k = key[x] ונגדיר את משתנה האינדיקטור המקרי:

$$X_{i,k} = \begin{cases}1 & \text{if } y \text{ is a node on the right spine of the left subtree of } x \text{ (in } T) \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

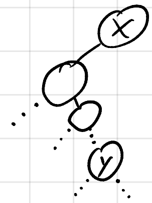
הראו כי $X_{i,k} = 1$ אם ורק אם

(a) priority[y]>priority[x]

(b) key[y]<key[x]

$h(y)>h(z)$

(c) לכל z כך ש key[y]<key[z]<key[x] גורר priority[y]<priority[z].

כלומר אם  אז $x_{i,k}=1$

הערה:

לפי מה שהבנתי ה- treap במקרה זה ערימה מינימלית

כלומר קודקוד עם p מינימלי הוא שורש וככל שp קטן יותר הקודקוד גבוה יותר. (בהרצאה השתמשו במקסימלי)

צ"ל $X_{i,k}=1 \iff \{P[y]>P[x]$, $key(y)<key(x)$, ולכל z שמקיים $key(y)<key(z)<key(x)$ אז $P(y)<P(z)\}$

$\boxed{\text{כיוון א'} \quad X_{ik}=1 \Rightarrow}$

(a) נניח ש $X_{ik}=1$ לכן y נמצא בעמוד שדרה הימני של הבן השמאלי של x.

מכאן נובע כי $h(x)>h(y)$ גובה של y קטן מגובה של x. לפי הגדרה של ערימת min, הגובה מציין את העדיפות לכן $P(x)<P(y)$ כי זו ערמת מינימום.

כלומר $P(y)>P(x)$. ✓(a)

(b) מאחר ו y הוא נמצא בתת עץ שמאלי של x ומהגדרת עץ ב"ח כל המפתחות קטנים ממפתח של x.

כלומר $key(y)<key(x)$ ✓(b)

(c) יהי z כך ש $key(y)<key(z)<key(x)$

נראה את האפשרויות:

מאחר ו $key(z)<key(x)$ אז z לא בן ימני של x והוא חייב להיות נכד/בן שמאלי של x.

מאחר ו $key(y)<key(z)$ וגם y זה עמוד שדרה ימני של בן שמאלי של x אז z חייב להיות בן/נכד ימני של y אחרת יש סתירה בין 2 התנאים.

מאחר ו z נכד/בן של y אז $h(y)>h(z) \Rightarrow P(y)<P(z)$ כנדרש.

$\boxed{\text{כיוון ב'} \quad (a),(b),(c) \Rightarrow}$

מ(a) נובע כי $h(x)<h(x)$

מ(b) נובע כי y נכד/בן שמאלי של x

מ(c) נובע ש y גבוה מכל המפתחות שגדולים ממנו וקטנים מ x נקרא להם z,

כל המפתחות z הם נכדים שמאליים של x, מאחר וגדול מכל אלה וגם גבוהה מהם אז y נמצא על עמוד שדרה ימני של בן שמאלי של x.

זה גורר לכך ש $X_{i,j}=1$ כנדרש.

שאלה 3:

השתמשו באלגוריתם ה- FFT לשם חישוב המכפלה של הפולינומים $A(x) = 2 + x$ ו- $B(x) = 1 + x$.

RECURSIVE−FFT$((a_0, a_1, \dots, a_{n-1}), n)$
- if $n == 1$ return a // recursion basis $y_0 = a_0$
- $\omega_n = e^{2\pi i/n}$; $\omega = 1$ // initialize complex root of 1
- $y^{[0]} =$ RECURSIVE−FFT$((a_0, a_2, \dots, a_{n-2}), n/2)$ // solve for $A^{[0]}$ coef.
- $y^{[1]} =$ RECURSIVE−FFT$((a_1, a_3, \dots, a_{n-1}), n/2)$ // solve for $A^{[1]}$ coef.
- for $k = 0$ to $n/2 - 1$ // combine DFT$_{n/2}$ solutions
  - (4) $y_k = y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$ // combine for k power of nth root of 1
  - (5) $y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$ // combine for opposite root of 1
  - $\omega = \omega\omega_n$ // get next complex root of 1
- return y // return the $n/2$ point evaluations

$A(x) = (2,1,0,0)$ $\qquad$ $B(x) = (1,1,0,0)$

$AB(x) = x^2+3x+2 \rightarrow (2,3,1,0)$

$FFT[(1,1,0,0),4]$

$y^{[0]} = FFT[(1,0),2]$ $\qquad$ $y^{[1]} = FFT[(1,0),2]$

$y^{[0]} = 1$ $\quad$ $y^{[1]} = 0$ $\qquad$ $y^{[0]} = 1$ $\quad$ $y^{[1]} = 0$

$y_0 = 1 + w\cdot 0$ $\qquad$ $y_0 = 1 + w\cdot 0$

$y_1 = 1 + w\cdot 0$ $\qquad$ $y_1 = 1 + w\cdot 0$

$(1,1)$ $\qquad$ $(1,1)$

$\begin{cases} y_0 = 1+1 = 2 \\ y_2 = 1-1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = 1+i \\ y_3 = 1-i \end{cases}$

$(2, 1+i, 0, 1-i)$

$FFT[(2,1,0,0),4]$

$y^{[0]} = FFT[(2,0),2]$ $\qquad$ $y^{[1]} = FFT[(1,0),2]$

$y^{[0]} = 2$ $\quad$ $y^{[1]} = 0$ $\qquad$ $y^{[0]} = 1$ $\quad$ $y^{[1]} = 0$

$y_0 = 2 + 1\cdot 0 = 2$ $\qquad$ $y_0 = 1 + w\cdot 0$

$y_1 = 2 - 1\cdot 0 = 2$ $\qquad$ $y_1 = 1 + w\cdot 0$

$(2,2)$ $\qquad$ $(1,1)$

$y_0 = 2+1 = 3$

$y_2 = 2-1 = 1$

$y_1 = 2+i$

$y_3 = 2-i$

$(3, 2+i, 1, 2-i)$

$(6, 1+3i, 0, 1-3i)$

$IFFT(6, 1+3i, 0, 1-3i)$ $\qquad$ $\begin{array}{cccc} [2, & 3, & 1, & 0] \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$

$y^{[0]} = IFFT(6,0) = (6,6)$ $\qquad$ $y^{[1]} = IFFT(1+3i, 1-3i) = (2, 6i)$

$y_0 = (6+2):4 = 2$

$y_2 = (6-2):4 = 1$

$y_1 = (6 - i(6i)):4 = 3$

$y_3 = (6 + i(6i)):4 = 0$

$[2,3,1,0] \longrightarrow x^2+3x+2 = (1+x)(x+2)$ ✓