

שם הקורס			מבני נתונים ואלגוריתמים 2
מס' הקורס			83224
צוות הקורס			פרופ' דרור רביץ עומר טובול, עומרי כוזרי
שנה, סמסטר, מועד	שנה"ל תשפ"ב	סמסטר ב	מועד ב
תאריך הבחינה			9/8/2022
משך הבחינה			שלוש שעות
חומר עזר			אסור
הנחיות			<ul style="list-style-type: none"> • המבחן כולל 3 עמודים (כולל עמוד זה) ו- 5 שאלות. • יש לענות על כל השאלות. • הוכיחו/נמקו את כל תשובותיכם. תשובה ללא הוכחה/נימוק לא תתקבל. • כאשר מציגים אלגוריתם יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות. • מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול בתנאי שמצטטים אותה במדויק. • השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים כדי לצבור מקסימום נקודות בזמן העומד לרשותכם. <p>בהצלחה!</p>

שאלה 1 (16%):

נתונים שני עצי 2-3, T_1 ו- T_2 , כך שכל המפתחות ב- T_1 קטנים מכל המפתחות ב- T_2 . נסמן ב- h_1 וב- h_2 הוא הגובה של T_1 ושל T_2 , בהתאמה. יש לציין שהגבהים יכולים להיות שונים. תארו מימוש של הפעולה $\text{JOIN}(T_1, T_2)$ שמחזירה עץ 2-3 שאיבריו הם האיחוד בין איברי T_1 ו- T_2 , כאשר סיבוכיות הזמן הנדרשת היא $O(\max\{h_1, h_2\})$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 2 (28%):

נדרש מבנה נתונים עבור קבוצה S בעלת n מספרים (שונים). הקבוצה היא דינמית, כלומר במשך הזמן איברים יכולים להצטרף לקבוצה ואיברים יכולים לעזוב אותה. יש צורך לדעת מהו החציון הנוכחי m , ולכן הוחלט לבנות את מבנה הנתונים באופן הבא. האיברים יוחזקו בשתי ערמות שיקראו L ו- R , כך שהערימה L תחזיק את האיברים שקטנים ממש מהחציון m והערימה R תחזיק את האיברים שגדולים ממש מהחציון m . נסמן $D = (L, m, R)$.

הערה: החציון של קבוצה של n איברים הוא סטטיסטי הסדר ה- $\lceil n/2 \rceil$.

תארו מימושים יעילים ככל האפשר של הפעולות הבאות:

12% א. פעולת INIT: מקבלת כקלט מערך לא ממוין A שמכיל את איברי הקבוצה S ומייצרת את מבנה הנתונים הנ"ל, כלומר את D המתאים.

הדרכה: ניתן להשתמש בשגרה בשם ARRAY-TO-HEAP שהופכת מערך לא ממוין לערמה בזמן לינארי.

8% ב. פעולת DEL-MEDIAN: מקבלת כקלט מבנה D ומעדכנת את D כך שיתאים לקבוצה $S \setminus \{m\}$.

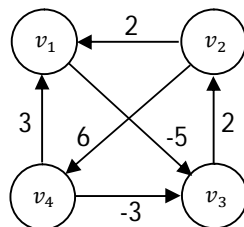
8% ג. פעולת INSERT: מקבלת כקלט מבנה D ואיבר x ומעדכנת את D כך שיתאים לקבוצה $S \cup \{x\}$.

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות בכל הסעיפים.

שאלה 3 (16%):

שאלה זו עוסקת באלגוריתם שמשמש בפעולת Min-Plus Product לחישוב מרחקים קצרים ביותר בין כל זוג צמתים בגרף מכוון.

נתון הגרף המכוון הבא עם משקלים לקשתות:



הריצו את האלגוריתם על הגרף הנתון.

תארו שלבי בנייה והסבירו את תשובתכם.

שאלה 4 (25%):

בשאלה זו נגדיר בעיה בשם Feedback Edge Set:

- קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל אי שלילית על הקשתות $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- פתרון: קבוצת קשתות $F \subseteq E$ כך שהגרף $G' = (V, E \setminus F)$ הינו חסר מעגלים.
- מטרה: למצוא פתרון במשקל כולל מינימלי.

$$\text{כרגיל נסמן } n = |V| \text{ ו- } m = |E|.$$

10% א. הוכיחו שאם הקבוצה F מהווה פתרון לבעיה, אז מתקיים $|F| \geq m - n + 1$.

15% ב. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לפתרון הבעיה.
הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 5 (15%):

נתון גרף $G = (V, E)$ ופונקציית משקל אי שלילית על הקשתות $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. רוצים לצבוע את הצמתים בגרף בשלושה צבעים כאשר המטרה היא למקסם את משקל קבוצת הקשתות ההטרוגניות (קשתות בעלות שני קצוות בצבעים שונים).

נתון האלגוריתם ההסתברותי הבא: כל צמת בוחר באופן בלתי תלוי אחד משלושה צבעים בהתפלגות אחידה. הוכיחו שיחס הקירוב של האלגוריתמים הנ"ל הוא 1.5, כלומר הוכיחו שתוחלת מספר הקשתות ההטרוגניות היא לפחות $2w(F^*)/3$, כאשר הקבוצה $F^* \subseteq E$ היא פתרון אופטימלי.