מבוא לתורת המשחקים

תרגיל בית 1 – להגשה עד 30/11/2022

<u>שאלה 1</u>

א. מצאו את פתרון המשחק הבא באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, כאשר שחקן 1 (השמאלי ביותר) בעל אסטרטגיות B,A, שחקן 2 בעל אסטרטגיות 1,2, שחקן 3 בעל אסטרטגיות U,D ושחקן 4 בעל אסטרטגיות R,L.

		L	R		L	R
1	U	1,1,2,1	-1,3,3,2	U	0,1,0,3	0,2,2,2
	D	0,0,0,1	1,2,2,2	D	3,-1,-1,0	0,2,1,2
		L	R		L	R
2	U	-1,2,2,1	2,4,1,0	U	0,2,2,1	3,3,2,0
	D	1,1,1,0	1,3,0,4	D	2,0,1,0	3,0,0,-1
		B			A	

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

1. ___________ 2. ___________ 3. ___________ 4. ___________

רשמו את ערך המקסמין של שחקן 1 ________ ואת אסטרטגיית המקסמין שלו _________

<u>תרגיל 2:</u>

שיווי משקל נאש s^* נקרא **חזק** אם כל סטייה של שחקן מביאה לו להפסד, כלומר $u_i(s^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*)$ לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה $s_i \in S_i \setminus \{s_i^*\}$

א. הוכיחו שאם וקטור האסטרטגיות s^* מתקבל מסילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות חזק אזי s^* הוא שיווי משקל נאש חזק והוא שיווי המשקל נאש היחידי במשחק (בין אם חזק ובין אם לאו).

ב. הוכיחו שאם $s^* = (s_i^*)_{i=1}^n$ הוא שיווי משקל חזק במשחק אזי אף אחת מהאסטרטגיות s_i^* אינה מסולקת בתהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות (בין אם חזקות ובין אם חלשות)

תרגיל 3:

הוכיחו: (ניתן להשתמש בנכונות המשפטים שהוכחנו בכיתה)
במשחק שני שחקנים סכום אפס אם (s_1^*, s_2^*) ו (s_1^{**}, s_2^{**}) הם שני שיווי משקל אזי

1. לשני שיווי המשקל אותו תשלום $u(s_1^{**}, s_2^{**}) = u(s_1^*, s_2^*)$
2. גם (s_1^*, s_2^{**}) וגם (s_1^{**}, s_2^*) הם שיווי משקל

תרגיל 4:

משחק שני שחקנים נקרא **משחק סימטרי** אם לשני השחקנים יש את אותה קבוצת אסטרטגיות $S_1 = S_2$ ופו' התשלומים מקיימות $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ לכל $s_1, s_2 \in S_1$.
בהינתן משחק סימטרי, הוכיחו/מצאו דוגמא נגדית לשלושת הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו/מצאו דוגמא נגדית: קבוצת שיווי המשקל במשחק סימטרי היא קבוצת סימטרית: אם (s_1, s_2) הוא שיווי משקל אז גם (s_2, s_1) הוא שיווי משקל.
ב. הוכיחו/ מצאו דוגמא נגדית: יהי $s_1^* = \arg\max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_1)$. האם וקטור האסטרטגיות (s_1^*, s_1^*) הוא שיווי משקל נאש?
ג. הוכיחו/ מצאו דוגמא נגדית: תמיד קיים שיווי משקל נאש טהור (לא מעורב).

שאלה 1

א. מצאו את פתרון המשחק הבא באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, כאשר שחקן 1 (השמאלי ביותר) בעל אסטרטגיות B,A, שחקן 2 בעל אסטרטגיות 1,2, שחקן 3 בעל אסטרטגיות U,D ושחקן 4 בעל אסטרטגיות R,L.

A

1

	L	R
U	0,1,0,3	0,2,2,2
D	~~3,-1,-1,0~~	~~0,2,1,2~~

2

	L	R
U	0,2,2,1	3,3,2,0
D	~~2,0,1,0~~	~~3,0,0,-1~~

B

1

	L	R
U	1,1,2,1	-1,3,3,2
D	~~0,0,0,1~~	~~1,2,2,2~~

2

	L	R
U	-1,2,2,1	2,4,1,0
D	~~1,1,1,0~~	~~1,3,0,4~~

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

1. __________ 2. __________ 3. __________ 4. __________

נוריד את ה D כי U שולטת חזק
ב D, לשחקן 3.

שאלה 1

א. מצאו את פתרון המשחק הבא באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, כאשר שחקן 1 (השמאלי ביותר) בעל אסטרטגיות B,A, שחקן 2 בעל אסטרטגיות 1,2, שחקן 3 בעל אסטרטגיות U,D ושחקן 4 בעל אסטרטגיות R,L.

שחקן 2

A

		L	R
1	U	0,~~1~~,0,3	0,~~2~~,2,2
	D	~~3,-1,-1,0~~	~~0,2,1,2~~
2	U	0,2,2,1	3,3,2,0
	D	~~2,0,1,0~~	~~3,0,0,-1~~

B

		L	R
1	U	1,~~1~~,2,1	-1,~~3~~,3,2
	D	~~0,0,0,1~~	~~1,2,2,2~~
2	U	-1,2,2,1	2,4,1,0
	D	~~1,1,1,0~~	~~1,3,0,4~~

שחקן 1

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

1. __________ 2. __________ 3. __________ 4. __________

שחקן 2, יבחר רק את אסטרטגיה 2.
תמיד יותר טוב משחק 1.

<u>שאלה 1</u>

א. מצאו את פתרון המשחק הבא באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, כאשר שחקן 1 (השמאלי ביותר) בעל אסטרטגיות B,A, שחקן 2 בעל אסטרטגיות 1,2, שחקן 3 בעל אסטרטגיות U,D ושחקן 4 בעל אסטרטגיות R,L.

B, 1:

	L	R
U	1,~~1~~,2,1	-1,~~3~~,3,2
D	~~0,0,0,1~~	~~1,2,2,2~~

A, 1:

	L	R
U	0,~~1~~,0,3	0,~~2~~,2,2
D	~~3,-1,-1,0~~	~~0,2,1,2~~

B, 2:

	L	R
U	-1,2,2,1	~~2,4,1,0~~
D	~~1,1,1,0~~	~~1,3,0,4~~

A, 2:

	L	R
U	0,2,2,1	~~3,3,2,0~~
D	~~2,0,1,0~~	~~3,0,0,-1~~

B A

שיקון ו

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

.1 D .2 1 .3 R .4 ____

<u>שאלה 1</u>

א. מצאו את פתרון המשחק הבא באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, כאשר שחקן 1 (השמאלי ביותר) בעל אסטרטגיות B,A, שחקן 2 בעל אסטרטגיות 1,2, שחקן 3 בעל אסטרטגיות U,D ושחקן 4 בעל אסטרטגיות R,L.

B, 1:

	L	R
U	1,~~1~~,2,1	-1,~~3~~,3,2
D	~~0,0,0,1~~	~~1,2,2,2~~

A, 1:

	L	R
U	0,~~1~~,0,3	0,~~2~~,2,2
D	~~3,-1,-1,0~~	~~0,2,1,2~~

B, 2:

	L	R
U	-1,2,2,1	~~2,4,1,0~~
D	~~1,1,1,0~~	~~1,3,0,4~~

A, 2:

	L	R
U	0,2,2,1	~~3,3,2,0~~
D	~~2,0,1,0~~	~~3,0,0,-1~~

~~B~~ A

שיקון ו

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

.1 D .2 1 .3 R .4 B

נמחק את B כי במקרה המצבו מצבם הוא תמיד

יגיל טל בית ר.

נרצה למצוא את ערך ה maxmin של שחקן 1 לאסטרטגיות A,B

A

1

	L	R
U	0,1,0,3	0,2,2,2
D	3,-1,-1,0	0,2,1,2

2

	L	R
U	0,2,2,1	3,3,2,0
D	2,0,1,0	3,0,0,-1

B

1

	L	R
U	1,1,2,1	-1,3,3,2
D	0,0,0,1	1,2,2,2

2

	L	R
U	-1,2,2,1	2,4,1,0
D	1,1,1,0	1,3,0,4

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

1. __________ 2. __________ 3. __________ 4. __________

רשמו את ערך המקסמין של שחקן 1 __0__ ואת אסטרטגיית המקסמין שלו __A__

ה.

$$min_A = \{0,3,0,0,0,2,3,3\} = 0$$

$$min_B = \{10,-1,1,-1,1,2,1\} = -1$$

ניקח את ה max עליהם שבה

0, שבה אומר ערך ה maxmin = 0

תרגיל 2:

שיווי משקל נאש s^* נקרא **חזק** אם כל סטייה של שחקן מביאה לו להפסד, כלומר $u_i(s^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*)$ לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה $s_i \in S_i \setminus \{s_i^*\}$

א. הוכיחו שאם וקטור האסטרטגיות s^* מתקבל מסילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות חזק אזי s^* הוא שיווי משקל נאש חזק והוא שיווי המשקל נאש היחידי במשחק (בין אם חזק ובין אם לאו).

ב. הוכיחו שאם $s^* = (s_i^*)_{i=1}^n$ הוא שיווי משקל חזק במשחק אזי אף אחת מהאסטרטגיות s_i^* אינה מסולקת בתהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות (בין אם חזקות ובין אם חלשות)

יהי משקל רק עם אפציות שחקן $s \in S_i$

כאשר מתאר את אופטימל

המצבים האפשריים.

סילוק אסטרטגיה נשלטת חזק

אשר

$\exists \quad u_i(s_i, s_{i-1}) < u_{i^*}(s_{i^*}, s_{i-1})$

קיימת אסטרטגיה כך שלכל

מצב של המשחק תמיד עדיף

להשתמש באסטרטגיה השולטת.

שיווי משקל נאש חזק, אומר שאין
אף קון שווה לשנות את האסטרטגיה שלהם.

עכשיו אם הגענו לשיווי משקל
נאש זה אומר

$$\forall s_i \in S \setminus s^* \quad u(s^*) > u(s_i, s_{-i})$$

טוב אנחנו מורידים אסטרטגיות
נשלטות החזק, זה אומר
אחד מהשניים,

1. קבלנו מערכת בלי שום שווי משקל
2. קבלנו מערכת עם שווי משקל.

נסביר את שניהם.

(1) אם לא קיים שיווי משקל אזי עדיין לא
יהיה שיווי משקל מכיוון שעדיין קיימת

$\exists s_i : u(s_i, \_) > u(s^*)$

קיים מקרה כך שנבצע פעולה שונה.

(2) אם הגענו למקרה הזה אזי לא
שתיקון לא "שווה" עבור אסטרטגיה.
ולפי ההגדרה של שיווי משקל נאש.

ב

$$u_i(s^*) > u_i(s_i, s^*_{-i}) \; \forall s_i \in S_i \setminus \{s_i^*\}$$

אם s_i^* הרדק, לכן כי הוא שולט.

אם s_i^* הורק

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i^*, s_{-i}) \; \forall s_{-i}$$

ולכן אומר ש s^* הינו שווי

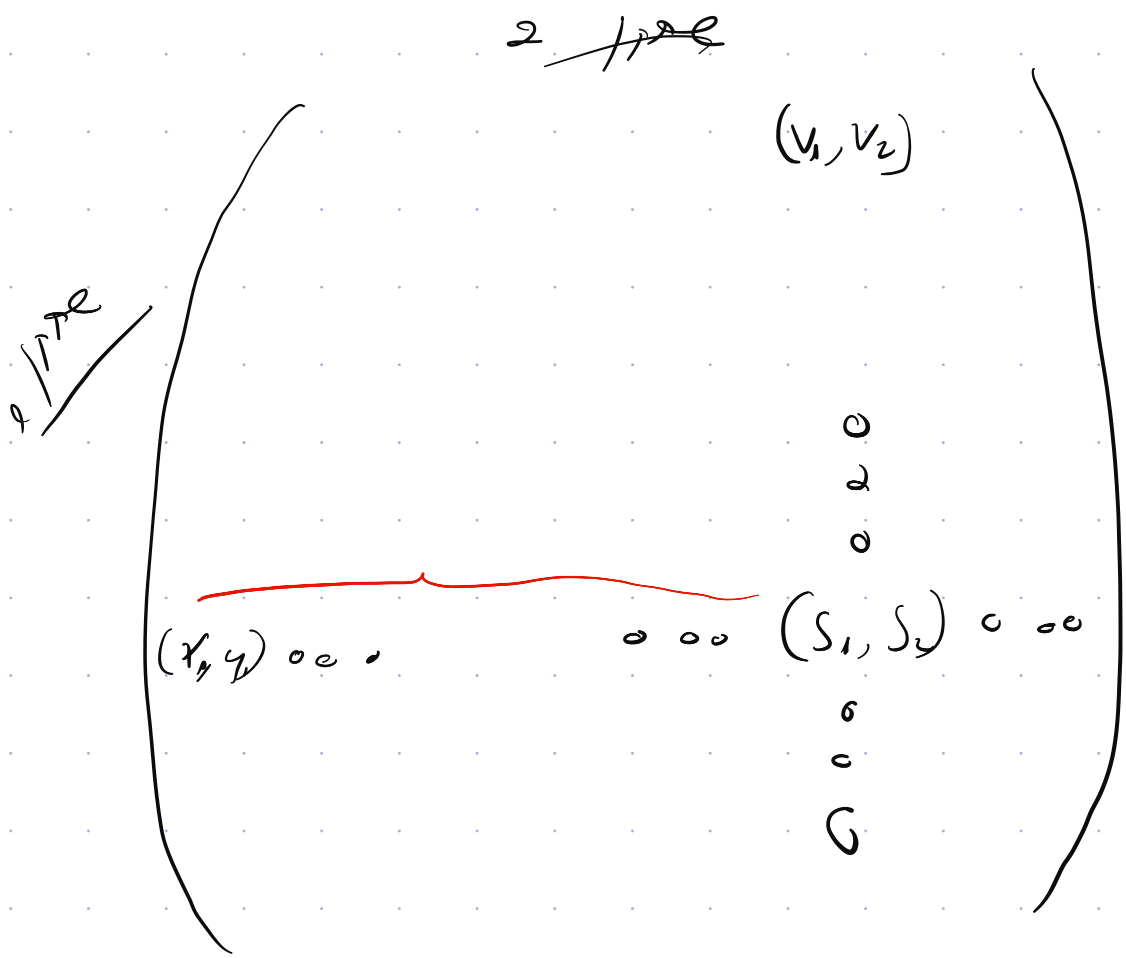
משקל נאש

תרגיל 3:

הוכיחו: (ניתן להשתמש בנכונות המשפטים שהוכחנו בכיתה)
במשחק שני שחקנים סכום אפס אם (s_1^*, s_2^*) ו (s_1^{**}, s_2^{**}) הם שני שיווי משקל אזי

1. לשני שיווי המשקל אותו תשלום $u(s_1^{**}, s_2^{**}) = u(s_1^*, s_2^*)$
2. גם (s_1^*, s_2^{**}) וגם (s_1^{**}, s_2^*) הם שיווי משקל

במשחק סכום אפס של שני שחקנים לכל
שחקן $u_1 = -u_2$, הרווח של אחד הוא
ההפסד של האחר.
אם (s_1, s_2) ו (s_1^*, s_2^*) הינם שיווי
משקל כי אזי שאם אנחנו
מ (s_1, s_2) נזוז משהשנו לא שווה
שנוי אז סכום תמחה.



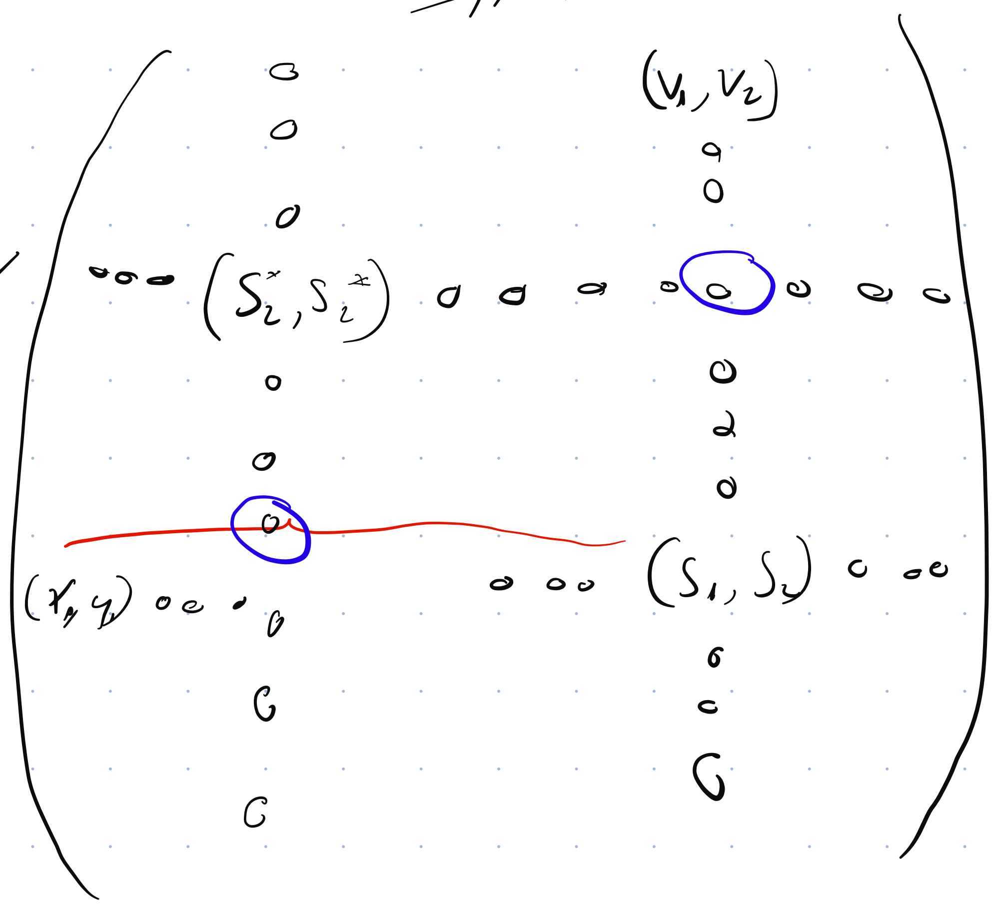
$S_1 >$

אזי [illegible] ה הצבעות של שני

ובגלל ש S_2 עם העמודה.

~~שחקן~~ 2

~~שחקן~~ 1



קיימת חיבור (תק בקינה)

באסטרטגיות - רק [illegible] היינו

משנים את הנקודה [illegible] היה

גם שווה עבורו.

בסתירה לכך שזה שיווי משקל.

נגיד נקודה בתוך שאנחנו ש

שיווי משקל אומר ת שהיא כולם רציו

שולחים עכשיו המקרה שנשאר

פני ש S, S' ישארו שיווי משקל

אם ורק אם הם שניהם שווים

אחד ת יהיה שווה לשבור

מהם.

ואפשר לרשום.

$$u(S_1^*, S_2^*) \geq u(S_1, S_2^*) \ \forall S_1$$

$$u(S_1^*, S_2^*) \leq u(S_1^*, S_2) \ \forall S_2$$

$$u(s_1^{**}, s_2^{**}) \geq u(s_1, s_2^{**}) \ \forall s_1$$

$$u(s_1^{**}, s_2^{**}) \leq u(s_1^{**}, s_2) \ \forall s_2$$

$$\Downarrow$$

$$u(s_1^{*}, s_2^{*}) = u(s_1^{**}, s_2^{**})$$

ב. בגלל ש s_1^* , s_2^{**} הם אופטימליים

לכן התאמה גם (s_2^* ו s_1^{**}) ויוצר (s_1^*, s_2^*) (s_1^{**}, s_2^{**})

הינם נק' שיווי משקל. אז (s_1, s_2^{**})

הוא גם נקודת שיווי משקל נאש

שאלה 4

(S_1,S_2) נקודת שיווי נש

$$u_1(S_1,S_2) \ge u_1(S_1',S_2)\ \forall S_1'\in S_1$$

$$u_1(S_1,S_2) \ge u_1(S_1,S_2')\ \forall S_2'\in S_2$$

בגלל שהמשחק סימטרי $u_1(S_1,S_2)=u_2(S_2,S_1)$

לפי סימטריה

$$u_1(S_1,S_2)=u_2(S_2,S_1)\ge u_2(S_2',S_1)=u_1(S_2',S_1)$$

$$\forall S_2'$$

ולכן (S_2,S_1) היא גם נקודת שיווי

נש.

מאוד מאוד דומה לתרגיל הקודם

לאפשר אפילו פה שימוש בחלקים

של אותה הוכחה.

ב

$$s_1^* = \arg\max u_1(s_1, s_1)$$

$$u_1(s_1^*, s_1^*) \geq u_1(s_1', s_1^*) \; \forall s_1' \in S_1$$

ולכן (s_1^*, s_1^*) נק שיווי נאש.

ג

$$\begin{pmatrix} (1,2) & (5,5) \\ (3,3) & (1,1) \end{pmatrix}$$

הינה סתירה.