שיעור 3

משחקים אסטרטגיים "רציפים" ואסטרטגיות מעורבות

תזכורת: דוגמה למשחק סכום אפס

- מצאו אסטרטגית מקסמין ואסטרטגית מינמקס עבור המשחק:

	A	B	C	D	MIN
T	8	4	8	4	4
M	2	5	3	8	2
B	6	1	4	5	1
MAX	8	5	8	8	$\underline{v}=4$ $\overline{v}=5$

סיכון המשחק מהדוגמה

- אנחנו רואים:
  - שחקן 1 יכול להבטיח לעצמו לפחות 4 (מקסמין).
  - שחקן 2 יכול להבטיח ששחקן 1 יקבל לכל היותר 5 (מינמקס).
- כיוון שמתקיים $\underline{v} = 4 < 5 = \bar{v}$ אנו אומרים שלמשחק ***אין ערך***.
- הכוונה בכך שאין ערך למשחק אינה שלמשחק אין משמעות (או שאינו "טוב"), אלא שלמשחק בעל ערך יש מספר (***הערך***) שיש לו חשיבות מתימטית.
- למשחק ללא ערך יש גם "בעית יציבות": לדוגמה במשחק הנ"ל שחקן 1 ייבחר באסטרטגיה T ושחקן 2 ייבחר באסטרטגיה B, ונקבל תשלום של 4. אך במקרה ששחקן 2 בוחר ב B שחקן 1 היה למעשה מעדיף לבחור דווקא ב M, ואז שחקן 2 היה משנה את דעתו בהתאם...

משחק עם ערך

- אם מתקיים $\underline{v} = \bar{v}$ נאמר ש- ***למשחק יש ערך***
  ו- $\underline{v} = \bar{v} = v$ נקרא ה- ***ערך של המשחק***.

- במשחק בעל ערך וקטור אסטרטגיות (s_1,s_2) כך ש s_1 הוא מקסמין, ו- s_2 הוא מינמקס, נקרא ***וקטור אסטרטגיות אופטימליות***.
- קל לראות כי $v = u(s_1,s_2)$. כלומר התשלום בוקטור האסטרטגיות האופטימליות הינו ערך המשחק.

במשחק בעל ערך יש נק' שיווי משקל

- **משפט 1:** במשחק סכום אפס בעל ערך, וקטור אסטרטגיות אופטימליות הוא נקודת שיווי משקל נאש.
- **הוכחה:**
- כיוון ש s_1 היא אסטרטגית מקסמין, הרי שכל בחירת אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ תביא לתשלום של לפחות v. כלומר

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, \mathrm{t}_2) \geq v = u(s_1, \mathrm{s}_2)$$

- ולכן

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u_2(s_1, \mathrm{t}_2) = -u(s_1, \mathrm{t}_2) \leq -v = u_2(s_1, \mathrm{s}_2)$$

- כמו כן

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(\mathrm{t}_1, \mathrm{s}_2) \leq v = u(s_1, \mathrm{s}_2)$$

- לכן לאף שחקן אין אינטרס לזוז מהוקטור s, כלומר הוא שיווי משקל נאש.
- מש"ל

ולהיפך: משחק עם שיווי משקל הוא בעל ערך

- **משפט 2:** משחק סכום אפס בעל נק' שיווי משקל נאש הוא משחק בעל ערך, ונק' שיווי המשקל הינה וקטור אסטרטגיות אופטימליות.
- **הוכחה:** נסמן ב $s = (s_1, s_2)$ את נק' שיווי המשקל.
- נסמן $v = u(s_1, s_2)$.
- לפי הגדרת שיווי משקל

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, t_2) \geq u(s_1, s_2) = v$$

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(t_1, s_2) \leq u(s_1, s_2) = v$$

- לכן $\min_{t_2 \in S_2} u(s_1, t_2) = v$ ולכן $v \leq \underline{v}$.
- באופן דומה $\max_{t_1 \in S_1} u(t_1, s_2) = v$ ולכן $\bar{v} \leq v$, וביחד $\bar{v} \leq \underline{v}$.
- אבל תמיד $\underline{v} \leq \bar{v}$ ולכן $\underline{v} = \bar{v}$.
- שימו לב כי s_1 הינה אסטרטגית מקסמין, וs_2 הינה מינמקס.

חזרה על ההגדרות משיעור 3

- הגדרנו **נקודת שיווי משקל נאש** כוקטור אסטרטגיות $x = (x_1, \ldots, x_n)$ המקיים שאסטרטגיה x_i היא **תגובה מיטבית** לוקטור x_{-i} לכל $1 \leq i \leq n$.
- אמרנו שהאסטרטגיה $y_i \in S_i$ היא ***תגובה מיטבית*** של שחקן i כנגד x_{-i} אם לכל אסטרטגיה אחרת $z_i \in S_i$ מתקיים

$$u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(z_i, x_{-i})$$

תגובה מיטבית – אפיון נוסף + סימון

- במילים אחרות $y_i \in S_i$ היא ***תגובה מיטבית*** של שחקן i כנגד x_{-i} אם ורק אם

$$u_i(y_i, x_{-i}) = \underset{z_i \in S_i}{Max}\ u_i(z_i, x_{-i})$$

- ראינו בשיעור הקודם שיכולות להיות מספר תגובות מיטביות עבור x_{-i} נתון (לדוגמה: אם $u_i(z_i, x_{-i}) = 0$ לכל $z_i \in S_i$).
- נסמן $BR_i(x_{-i}) = y_i$.
  - הסימון BR הוא עבור best response, תגובה מיטבית.
- הערה חשובה: באופן כללי BR_i אינה פונקציה (כיוון שהיא יכולה לקבל מספר ערכים).

משחק השותפות
הגדרת המשחק

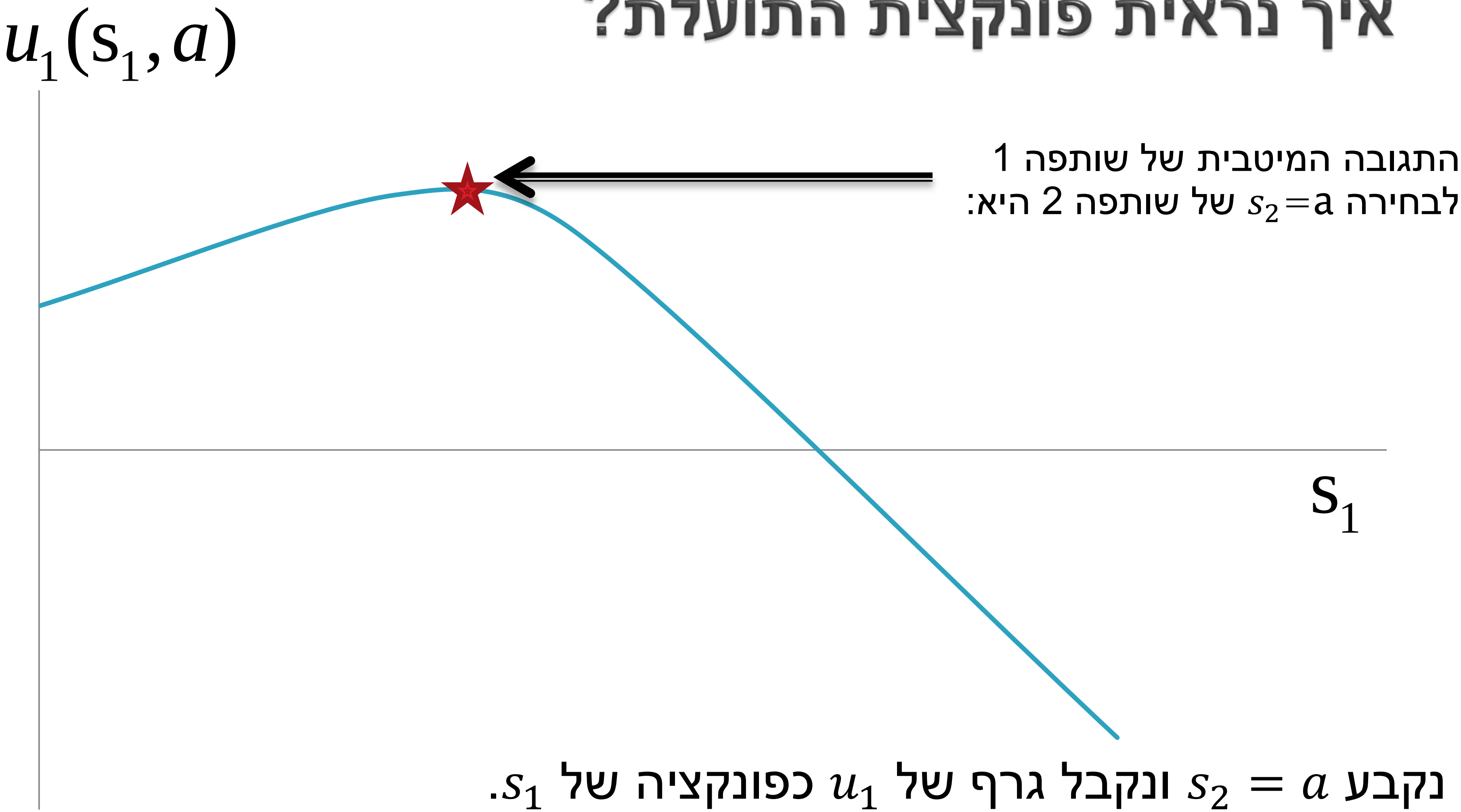
- שתי שותפות מקימות סטרט-אפ טכנולוגי בהסכמה שהן מתחלקות שווה בשווה ברווחים.
- כל שותפה מחליטה על רמת המאמץ שלה בעבודה (רמת המאמץ תלויה לדוגמה במספר שעות העבודה השבועיות).
- השחקניות: P_1,P_2.
- האסטרטגיות: ננרמל את רמת המאמץ למספר ממשי בין 0 ל 4, כלומר $s_i \in [0,4]$. נשים לב שבמשחק זה יש אינסוף אסטרטגיות!
- תוצאות: הרווח החודשי של החברה (באלפי שקלים) הוא $\mathrm{P}(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2) = 4(s_1 + s_2 + bs_1s_2)$, כאשר $0 \le b \le \frac{1}{4}$ הוא קבוע המייצג את ה"סינרגיה" של עבודתן המשותפת של השותפות.

משחק השותפות
הגדרת המשחק - המשך

- פונקצית התועלת של כל אחת מהשותפות צריכה לשקף את העובדה שרמת מאמץ גבוהה עולה במשאבים אחרים (זמן עם המשפחה, בריאות וכו').

$$u_i(s_1, s_2) = \frac{1}{2}P(s_1, s_2) - s_i^{\,2}$$
$$= 2(s_1 + s_2 + bs_1s_2) - s_i^{\,2}$$

משחק השותפות
איך נראית פונקציית התועלת?



נקבע $s_2 = a$ ונקבל גרף של u_1 כפונקציה של s_1.

משחק השותפות
חישוב תגובה מיטבית

$$BR_1(s_2) = \underset{s_1 \in [0,4]}{Max} \left[2(s_1 + s_2 + bs_1 s_2) - s_1{}^2 \right]$$

- ע"מ למצוא מקסימום של פונקציה, ניתן לחשב נקודות קיצון בעזרת אינפי (למצוא התאפסות נגזרות ולבדוק את נקודות השפה).
- נשווה את הנגזרת לאפס:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_1}(s_1, s_2) = 2 + 2bs_2 - 2s_1 = 0$$

- כיוון ש $0 \le b \le \frac{1}{4}$ מתקיים כי $1 \le 1 + bs_2 \le 2$, בתחום הרלוונטי
- במקרה זה אין צורך לבדוק את נקודות השפה, כיוון שמדובר בפרבולה בוכה
- ולכן סה"כ $BR_1(s_2) = 1 + bs_2$

דוגמאות לחישוב מקסימום

- עבור פונקצית התועלת: $u_1(s_1,s_2)=f(s_2)s_1^2+g(s_2)s_1+h(s_2)$ כאשר $s_1\in[a,b]$
  - כאשר $f(s_2)>0$ המקסימום מתקבל באחד הקצוות s_1=a,b
  - כאשר $f(s_2)<0$ המקסימום מתקבל בקיצון $s_1=-\frac{g(s_2)}{2f(s_2)}$ או באחד הקצוות אם הקיצון מחוץ לתחום $[a,b]$.
  - כאשר $f(s_2)=0$ מדובר בפונקציה לינארית:
    - אם $g(s_2)>0$ המקסימום מתקבל בקצה הימני s_1=b
    - אם $g(s_2)<0$ המקסימום מתקבל בקצה השמאלי s_1=a
    - אם $g(s_2)=0$ זוהי פונקציה קבועה, ולכן המקסימום מתקבל בכל נקודה בקטע $[a,b]$

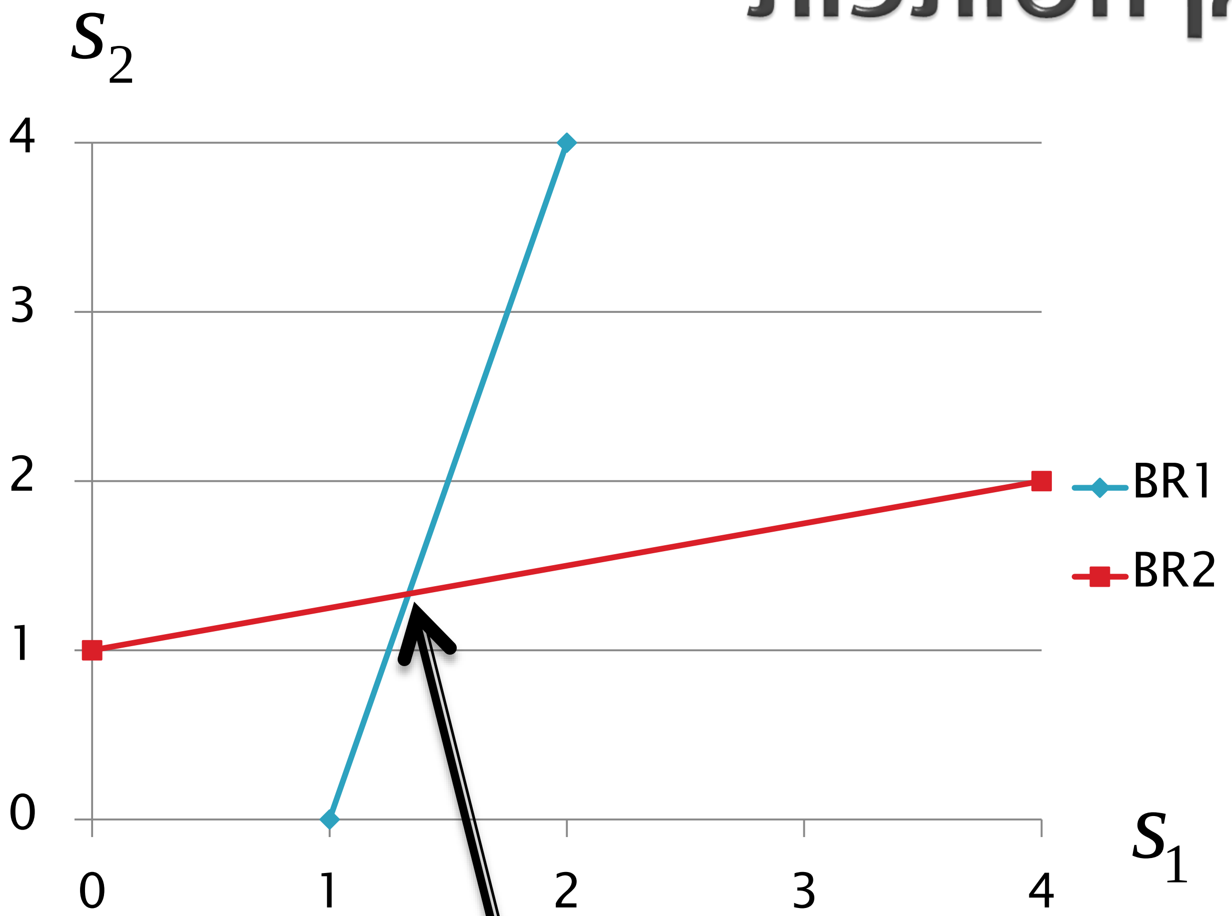
משחק השותפות
חישוב תגובה מיטבית - המשך

- אם כך קיבלנו ש

$$BR_1(s_2) = 1 + bs_2$$
$$BR_2(s_1) = 1 + bs_1$$

- לדוגמה עבור $b = \frac{1}{4}$ נקבל:

משחק השותפות



נקודת שיווי משקל נאש

משחק השותפות
מציאת נקודת שיווי משקל נאש

- נקודת שיווי המשקל היחידה במשחק היא בנקודת החיתוך של שני הגרפים $BR_1(s_2),BR_2(s_1)$.
- ע"מ למצוא את נקודת החיתוך יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} s_1 = BR_1(s_2) = 1 + bs_2 \\ s_2 = BR_2(s_1) = 1 + bs_1 \end{cases}$$

- לאחר חישוב נקבל

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{1-b}$$

משחק השותפות
מציאת נקודת שיווי משקל נאש

- כלומר וקטור האסטרטגיות

$$\left(\frac{1}{1-b},\frac{1}{1-b}\right)$$

הוא נקודת שיווי משקל נאש.

- לדוגמה עבור $b=\frac{1}{4}$ נקבל ששיווי משקל נאש הוא

$$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

משחק השותפות
האם נקודת נאש היא "טובה"?

- נחשב עבור $b = \frac{1}{4}$:

- הרווח בש"ח עבור כל שותפה בנקודת נאש הוא בערך 6.222 אלפי ש"ח, כאשר התועלת של כל השותפה היא $4.444 = \frac{40}{9}$.

- אם כל שותפה עובדת ברמת מאמץ מקסימלית 4, אזי הרווח של כל שותפה הוא 24 אלף ש"ח, והתועלת של כל שותפה היא 8.

- אם כך שיווי המשקל במשחק זה לא מביא לתוצאה טובה עבור השותפות.

משחק השותפות
מדוע נקודת נאש אינה "טובה"?

- כל שותפה היא אנוכית, ודואגת רק לתועלת שלה, ולא לרווח הכללי של החברה (או לתועלת שותפתה).
- לדוגמה: כאשר שותפה 2 עובדת במאמץ מירבי של 4, משתלם לשותפה 1 לעבוד במאמץ 2 ולא 4, כדי להגיע לתועלת המירבית עבורה (12).
- יש דמיון בין משחק זה לדילמת האסיר, אנוכיות (רציונליות) השותפות מביאה בסופו של דבר לתוצאות לא רצויות.
- נשים לב שלסינרגיה אין השפעה על אי-יעילות נקודת שיווי המשקל.
- כדאי לפתור בעיה זו ע"י חוזה בין השותפות, כיוון שתקשורת בין השותפות לא תעזור.

משחק על ריבוע היחידה

- השחקנים: P_1,P_2.
- האסטרטגיות $s_i \in [0,1]$.
- פונקציות התשלומים הן:

$$u_1(x,y) = 3xy - 2x - 2y + 2$$
$$u_2(x,y) = -4xy + 3x + y$$

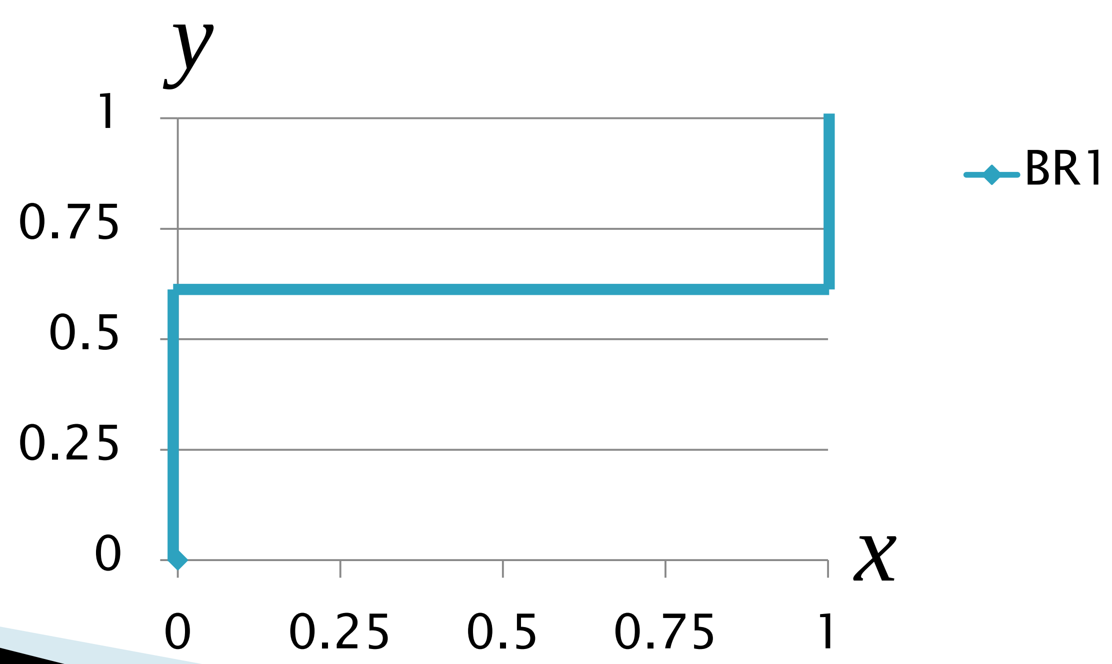
- נחשב את $BR_1(y)$. אנחנו רואים שכאשר $y \neq \frac{2}{3}$, אין לפונקציה נקודות קיצון בקטע $(0,1)$ -- עבור כל בחירה של y הפונקציה מתארת קו ישר.

- כאשר $y = \frac{2}{3}$ הפונקציה $u_1(x, \frac{2}{3})$ קבועה. לכן כל תגובה x של שחקן 1 היא תגובה מיטבית ל $y = \frac{2}{3}$, כלומר:

$$BR_1\left(\frac{2}{3}\right) = [0,1]$$

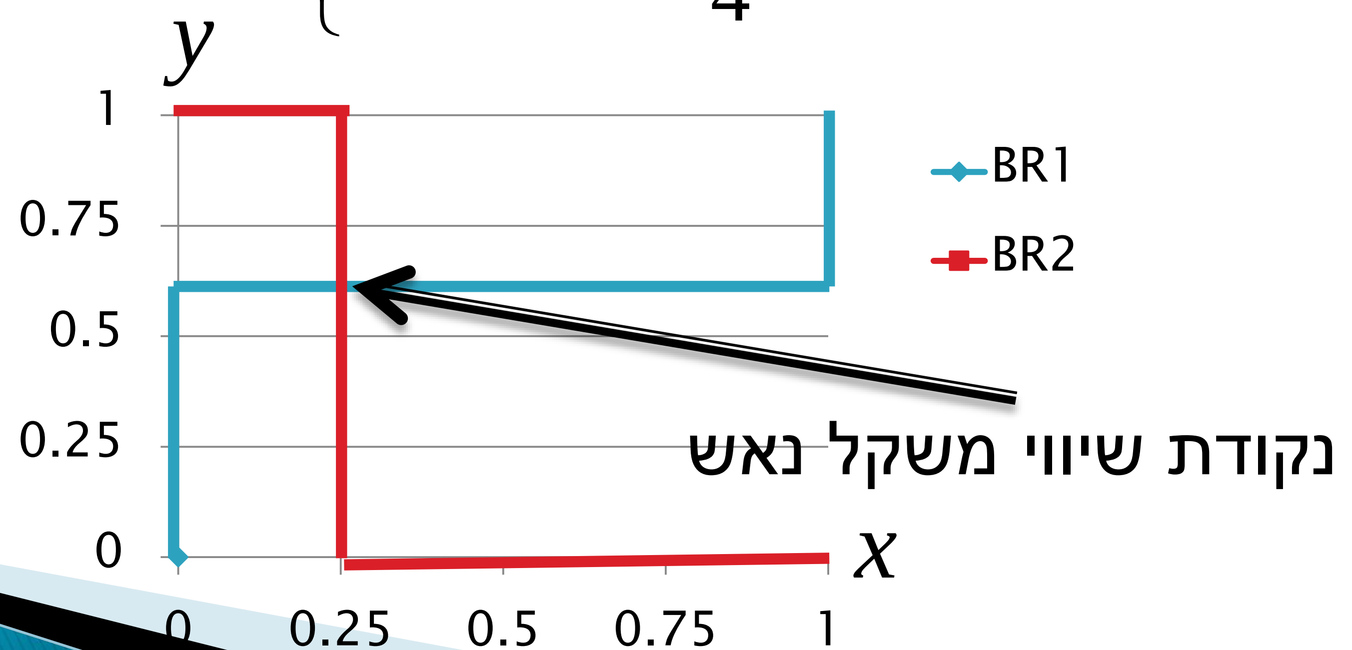
- לגבי ערכים $y \neq \frac{2}{3}$ צריך לבדוק את נקודות השפה כדי לקבוע מהי התגובה הטובה ביותר:
  - עבור $y \in [0, \frac{2}{3})$ השיפוע שלילי ולכן התגובה המיטבית היא $x = 0$.
  - עבור $y \in (\frac{2}{3}, 1]$ השיפוע הוא חיובי, ולכן התגובה המיטבית היא $x = 1$.

$$BR_1(y) = \begin{cases} 0 & y \in [0, \frac{2}{3}) \\ [0,1] & y = \frac{2}{3} \\ 1 & y \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



- בצורה דומה מחשבים את $BR_2(x)$ ומקבלים:

$$BR_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,\frac{1}{4}) \\ [0,1] & x = \frac{1}{4} \\ 0 & x \in (\frac{1}{4},1] \end{cases}$$



דוגמה: משחק סכום אפס רציף

- קבוצת האסטרטגיות של שני השחקנים היא $S_i = [0,1]$.
- פונקצית התועלת של המשחק היא

$$u(x,y) = 4xy - 2x - y + 3$$

- נחשב תחילה את ערך המקסמין $\underline{v}$:

$$\underline{v} = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} u(x,\mathrm{y})$$

$$\min_{y\in[0,1]} u(x,y) = \min_{y\in[0,1]} \left((4x-1)y - 2x + 3\right)$$

- לכל בחירה של x נקבל פונקציה לינארית ב y, והמינימום נקבע ע"י נקודות השפה בהתאם לשיפוע.

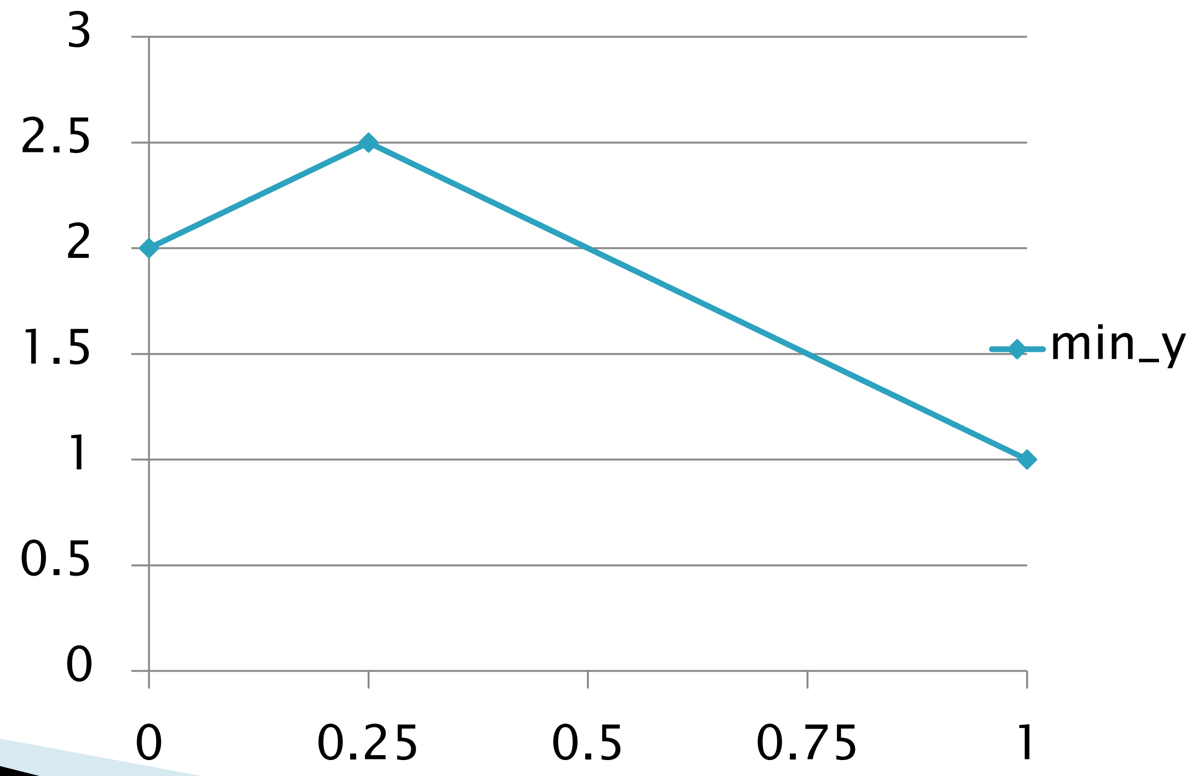
המשך

- השיפוע הוא $4x-1$ ולכן הוא שלילי כאשר $x \in [0,\frac{1}{4})$,
וחיובי כאשר $x \in (\frac{1}{4},1]$
- המינימום עבור $x \in \left[0,\frac{1}{4}\right)$ מתקבל כאשר $y=1$ וערכו הוא
$u(x,1)=4x-1-2x+3=2x+2$
- המינימום עבור $x \in (\frac{1}{4},1]$ מתקבל כאשר כאשר $y=0$
וערכו הוא $u(x,0)=-2x+3$
- כאשר $x=\frac{1}{4}$ נקבל $u\left(\frac{1}{4},y\right)=y-\frac{2}{4}-y+3=2.5$.

המשך

- סה"כ נקבל

$$\min_{y\in[0,1]} u(x,y)=\begin{cases} 2x+2 & x\le \frac{1}{4} \\ -2x+3 & x>\frac{1}{4} \end{cases}$$



המשך

- לכן:

$$\underline{v} = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} u(x,y) = 2.5$$

ומתקיים ש- $x = \frac{1}{4}$ היא אסטרטגית המקסמין של שחקן 1.

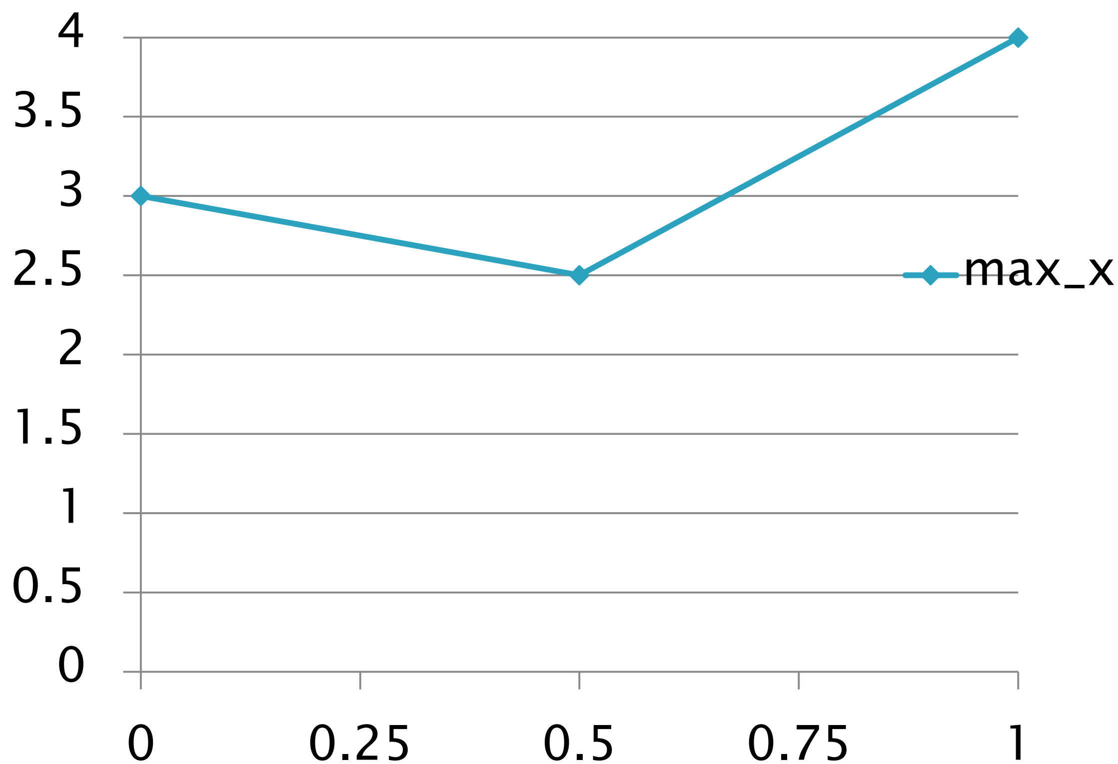
- כעת צריך לחשב את

$$\bar{v} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} u(x,y)$$

- באופן דומה מקבלים:

$$\max_{x\in[0,1]} u(x,y) = \begin{cases} -y+3 & y \le \frac{1}{2} \\ 3y+1 & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

המשך



- נקבל $\bar{v} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} u(x, y) = 2.5$

ואסטרטגית המינמקס של שחקן 2 היא $y = \frac{1}{2}$.

המשך - סיכום

- קיבלנו שלמשחק יש ערך והוא 2.5.
- וקטור האסטרטגיות האופטימליות הוא $s = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
- יש שיווי משקל נאש יחיד במשחק והוא: $s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- מה קורה אם אחד השחקנים מחליט שבמקום לבחור בעצמו אסטרטגיה הוא יטיל מטבע, ונפילת המטבע תקבע את בחירתו?
- ניתן להסתכל על הטלת מטבע זו כבחירת אסטרטגיה (שונה מהאסטרטגיות הנתונות).

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- נזכר במטריצת המשחק:

		שחקן 2		
		H	T	MIN
שחקן 1	H	1	-1	-1
	T	-1	1	-1
	MAX	1	1	$\underline{v} = -1$ $\overline{v} = 1$

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- ניתן לכתוב אסטרטגיה מעורבת כך: $\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right]$ -- יש הסתברות $\frac{1}{2}$ לבחירת זוג והסתברות $\frac{1}{2}$ לקבלת פרט.
- לדוגמה שחקן 1 כעת בעל אסטרטגיות $\left\{H,T,\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right]\right\}$, ושחקן 2 נשאר עם אסטרטגיות $\{H,T\}$.
- אבל איך מגדירים את התשלום $\mathrm{u}\left(\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right],H\right)=???$.
- אנחנו לא יודעים מראש מה תהיה תוצאת המשחק, ולכן לא ניתן לקבוע מה יהיה התשלום.

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- פתרון אפשרי לבעיה זו היא בחירת ***התוחלת*** של התשלומים כתשלום לאסטרטגיה "המעורבת" $\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right]$:

$$u\left(\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right],H\right)=\frac{1}{2}u(H,H)+\frac{1}{2}u(\mathrm{T},H)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

- לבחירה זאת יש תכונות נוחות מאד, נשים לב שפונקצית התשלום פועלת באופן ליניארי על האסטרטגיה המעורבת.

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- נוסיף את האסטרטגיות המעורבות:

שחקן 2

שחקן 1

	H	$\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T$	T	MIN
H	1	0	-1	-1
$\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T$	0	0	0	0
T	-1	0	1	-1
MAX	1	0	1	$\underline{v}=0 \quad \bar{v}=0$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- ראינו שהוספת אסטרטגיה מעורבת $\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right]$ למעשה פתרה את המשחק.
- כעת יש לנו ערך למשחק וגם שיווי משקל נאש יחיד.
- אם שני השחקנים יתאמו ששניהם יטילו מטבעות, אזי לאף אחד מהם לא יהיה מניע לשנות את האסטרטגיה שלו.
- דוגמה זו ממחישה באופן טוב מאד מדוע כדאי לשקול הוספת אסטרטגיות מעורבות למשחקים.
- אבל מדוע להסתפק בהוספת אסטרטגיה אחת? ניתן להוסיף רצף של אסטרטגיות מעורבות מהצורה $[pH,(1-p)T]$.
- לדוגמה: $H=[1H,0T], T=[0H,1T]$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- הפכנו את המשחק הסופי למשחק סכום אפס רציף, עם פונקצית התועלת הבאה:

$$u\left(\left[pH,(1-p)T\right],\left[qH,(1-q)T\right]\right)=$$

$$=pu(H,\left[qH,(1-q)T\right])+(1-p)u(T,\left[qH,(1-q)T\right])=$$

$$=pqu(H,H)+p(1-q)u(H,T)+$$
$$+(1-p)qu(T,H)+(1-p)(1-q)u(T,T)=$$

$$=pq-p(1-q)-(1-p)q+(1-p)(1-q)=$$

$$=4pq-2p-2q+1$$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- למעשה בחירת אסטרטגיה שקולה לבחירת מספר בקטע $[0,1]$.
- לכן ניתן לכתוב בקיצור $u(p,q) = 4pq - 2p - 2q + 1$.
- כעת נמצא את ערכי המקסמין והמינמקס של המשחק.

$$\min_{q\in[0,1]} u(p,q) = \min_{q\in[0,1]} \left((4p-2)q - 2p + 1\right)$$

- השיפוע של $u(p,q)$ כפונקציה של q הוא $4p - 2$ ולכן השיפוע מחליף סימן ב $p = \frac{1}{2}$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

$$\min_{q\in[0,1]} u(p,q) = \begin{cases} u(\mathrm{p},1) & p \le \frac{1}{2} \\ u(\mathrm{p},0) & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2p-1 & p \le \frac{1}{2} \\ 1-2p & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ערך המקסמין מתקבל באסטרטגיה $p = \frac{1}{2}$ של שחקן 1

$$\underline{v} = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} u(p,q) = 0$$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- בצורה דומה מראים

$$\bar{v} = \min_{q\in[0,1]} \max_{p\in[0,1]} u(p,q) = 0$$

- ערך המקסמין מתקבל באסטרטגיה $q = \frac{1}{2}$ של שחקן 2.
- אם כך יש למשחק ערך והוא $v = 0$ והוא מתקבל באסטרטגיה $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- אסטרטגיה זו היא שיווי משקל נאש (היחיד במשחק).
- תרגיל בית: מצאו את שיווי משקל נאש בעזרת פונקציות BR כפי שעשינו בשיעור 4.

הוספת אסטרטגיות מעורבות

- יהי G משחק בו לשחקן i יש מספר סופי של אסטרטגיות:

$$S_i = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

- נוסיף לשחקן i אסטרטגיות באופן הבא:
  - נבחר n הסתברויות $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ כך ש

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

  - נוסיף את האסטרטגיה המעורבת $[p_1 x_1, \ldots, p_n x_n]$.

המשפטים של תורת המשחקים

- **<u>משפט נאש:</u>** יהי G משחק סופי עם מספר סופי של אסטרטגיות, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות (לכל השחקנים), אזי ב G' קיים שיווי משקל נאש.

- **<u>משפט המינימקס (פון-נוימן):</u>** יהי G משחק סכום אפס, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות, אזי מתקיים

$$\max_{\vec{p}_1} \min_{\vec{p}_2} u(x_1, x_2) = \min_{\vec{p}_2} \max_{\vec{p}_1} u(x_1, x_2)$$

  - כלומר למשחק G' יש ערך.
- משפט המינימקס הוא מסקנה של משפט נאש, מדוע?

אסטרטגיות מעורבות – הגדרה

- יהי G משחק אסטרטגי כך שלכל שחקן יש מספר סופי או בן מניה של אסטרטגיות.
- נגדיר משחק G' שנקרא הרחבת G בעזרת אסטרטגיות מעורבות:
- לשחקן $i \in I$ נגדיר אסטרטגיה p_i להיות וקטור שמתאים לכל אסטרטגיה $x_i \in S_i$ הסתברות $p_i(x_i) \in [0,1]$.
- ומתקיים

$$\sum_{i \in I} p_i(x_i) = 1$$

- ופונקציות תועלת

$$u_i(p_i, p_{-i}) = \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i) u_i(x_i, p_{-i})$$

משחק טניס

- נדמה מצב במשחק טניס בין סרינה ויליאמס ומריה שראפובה.

- ויליאמס (שחקנית 1) צריכה לחבוט לכיוונה של שראפובה (שחקנית 2) והיא צריכה להחליט האם לחבוט ל**שמאלה** או **לימינה** של שראפובה.

- שראפובה צריכה להחליט אם היא מתכוננת לחבטה שתבוא מימינה או משמאלה.

מטריצת האסטרטגיות

	ℓ	r
L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

- האם יש במשחק זה אסטרטגיות נשלטות? האם יש שיווי משקל נאש?

ניתוח המשחק

- בכל מקרה עדיף לשחקנית שלא לבחור באסטרטגיה קבועה אחת, מדוע?

- אנחנו יודעים לפי ***משפט נאש (שיעור 6)***, שאם נכניס למשחק אסטרטגיות מעורבות לשתי השחקניות, אז קיים שיוויי משקל נאש.

- לעומת משחקים פשוטים יותר כמו ***זוג או פרט***, קשה יותר לנחש את נקודת שיוויי המשקל.

טניס – באסטרטגיות מעורבות

- ויליאמס תבחר באסטרטגיה L בהסתברות p ובאסטרטגיה R בעדיפות $p-1$.

- שראפובה תבחר באסטרטגיה ℓ בעדיפות q ובאסטרטגיה r בעדיפות $q-1$.

חישוב פונקציות התועלת

- כעת פונקצית התשלום של ויליאמס היא

$$u_1([p,1-p],[q,1-q]) =$$

$$= pu_1\left(L,[q,1-q]\right)+(1-p)u_1\left(R,[q,1-q]\right)$$

$$= pqu_1\left(L,\ell\right)+p(1-q)u_1\left(L,r\right)+$$
$$+(1-p)qu_1\left(R,\ell\right)+(1-p)(1-q)u_1\left(R,r\right)$$

$$=50pq+80p(1-q)+$$
$$+90(1-p)q+20(1-p)(1-q)$$

$$=(\text{-}100q+60)\text{p}+70q+20$$

חישוב פונקציות התועלת – המשך

- בצורה דומה, ניתן לחשב את פונקצית התועלת של שראפובה:

$$u_2([p,1-p],[q,1-q]) =$$

$$= 50pq + 20p(1-q) +$$
$$+10(1-p)q + 80(1-p)(1-q)$$

$$= (100p-70)q - 60p + 80$$

תגובה מיטבית של כל שחקנית

- נחשב את התגובה המיטבית של ויליאמס אל מול אסטרטגיה מעורבת של שראפובה:

$$BR_1([q,1-q]) = ?$$

- כרגיל, צריך למצוא את הערך p בו הפונקציה u_1 מקבלת מקסימום, כאשר q הוא קבוע.

- הפונקציה u_1 היא לינארית ב p ולכן נק' המקסימום נקבעת ע"פ סימן השיפוע.

- השיפוע הוא $-100q + 60$

תגובה מיטבית של כל שחקנית – המשך

- מכאן נקבל:

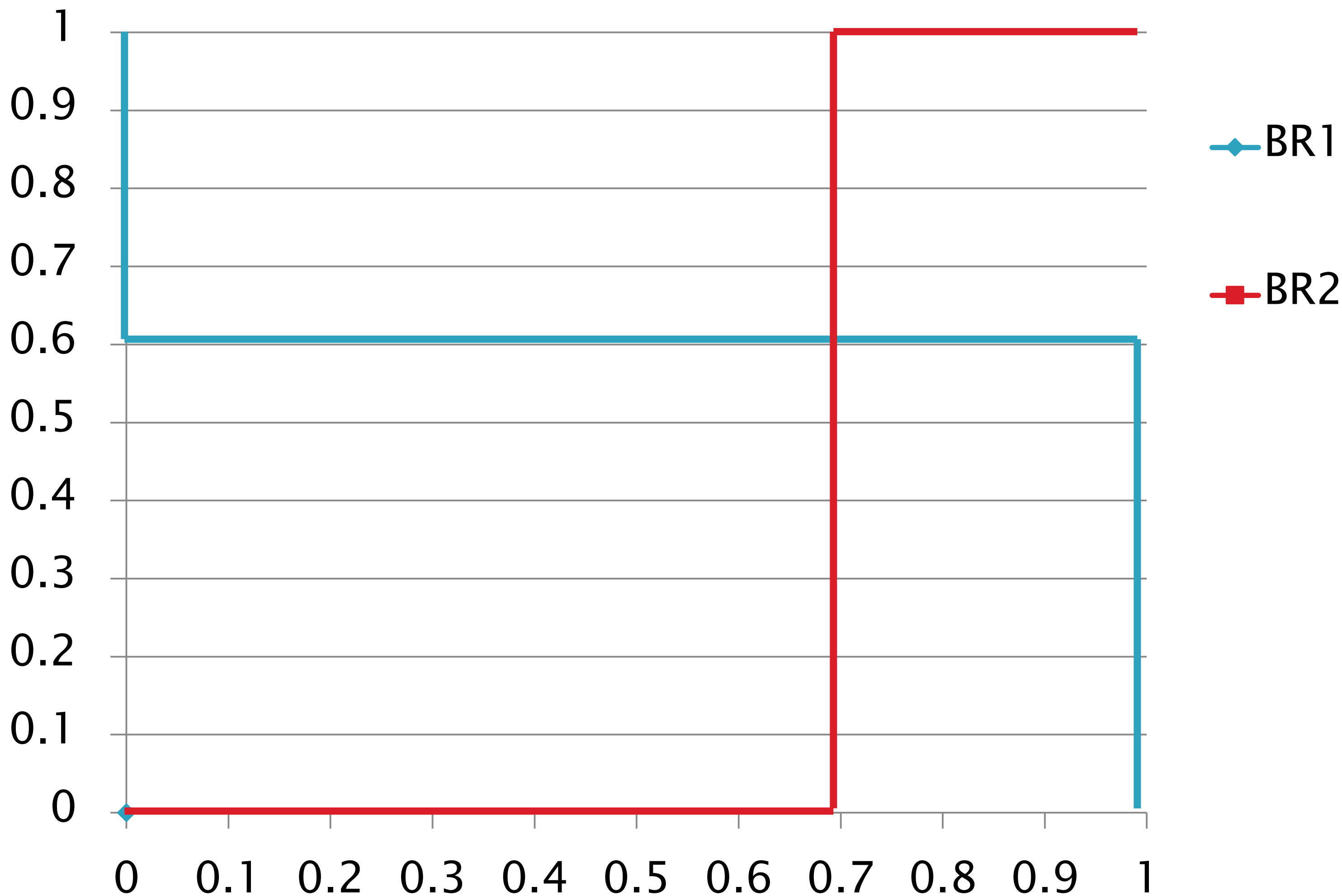
$$BR_1(q)=\begin{cases} 1 & q<\frac{6}{10} \\ [0,1] & q=\frac{6}{10} \\ 0 & q>\frac{6}{10} \end{cases}$$

תגובה מיטבית של כל שחקנית – המשך

- בצורה דומה מחשבים את התגובה המיטבית של שראפובה.
- השיפוע של הפונקציה u_2 הוא $100p-70$.

$$BR_2(\mathrm{p})=\begin{cases} 0 & p<\frac{7}{10} \\ [0,1] & p=\frac{7}{10} \\ 1 & p>\frac{7}{10} \end{cases}$$

מציאת נקודת שיווי משקל



סיכום

- שיווי המשקל מתקבל בנקודה $(p,q) = (\frac{7}{10}, \frac{6}{10})$.

- לויליאמס לחבוט בעדיפות קלה לשמאלה של שראפובה, ועל שראפובה להיות מוכנה יותר (במידה מועטה) לכדור שמגיע משמאל.

- <u>נראה כעת שיש דרך קלה יותר להגיע אל התוצאה!!!</u>

אסטרטגיה מעורבת שהיא תגובה מיטבית

- **<u>משפט:</u>** נניח שאסטרטגיה מעורבת p_i של שחקן i היא תגובה מיטבית של השחקן לצירוף האסטרטגיות p_{-i} של שאר השחקנים. אזי כל אסטרטגיה s_i המופיעה ב p_i עם הסתברות חיובית חייבת להיות גם כן תגובה מיטבית לצירוף p_{-i}.

- **<u>מסקנה:</u>** בתנאי המשפט כל התשלומים של אסטרטגיות s_i המופיעות ב p_i עם הסתברות חיובית חייבים להיות <u>שווים</u>!

הוכחת המשפט

- עבור אסטרטגיה מעורבת p_i מתקיים:

$$u_i(p_i, p_{-i}) =$$

$$= \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i) u_i(x_i, p_{-i})$$

$$\leq \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i)\left(\max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i})\right)$$

$$\leq \left(\max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i})\right) \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i)$$

$$= \max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i}) = u_i(x_k, p_{-i}) \leq u_i(p_i, p_{-i})$$

אם כך יש כאן שיוויון

הוכחת המשפט – המשך

- לכן עבור כל אסטרטגיה $x_i \in S_i$ עבורה $p_i(x_i) > 0$ מתקיים בהכרח

$$u_i(x_i, p_{-i}) = \max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i})$$

- כלומר כל אסטרטגיה עם הסתברות חיובית היא תגובה מיטבית.

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- נניח מראש שאנחנו יודעים/מנחשים שנקודת שיווי המשקל היחידה היא כאשר שתי השחקניות בוחרות באסטרטגיות מעורבות (ממש).

- לדוגמה: פסלנו מראש את האפשרות שקיים שיווי משקל בו שראפובה בוחרת באסטרטגיה מעורבת וויליאמס בוחרת באסטרטגיה טהורה.

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- כעת נחשב את התועלות הטהורות של ויליאמס, כאשר שראפובה בוחרת באסטרטגיה המעורבת q^* של שיווי המשקל:

	ℓ	r
L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_1(L,q^*) = 50q^* + 80(1-q^*) \\ u_1(R,q^*) = 90q^* + 20(1-q^*) \end{cases}$$

- כעת בא ה**<u>טריק</u>**: בתגובה המיטבית של ויליאמס, שני הערכים $u_1(L,q^*),u_2(R,q^*)$ חייבים להיות שווים!!!

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- אם כך קיבלנו

$$-30q^* + 80 = 70q^* + 20$$

- או

$$q^* = \frac{6}{10}$$

- קיבלנו תופעה מעניינת: בעזרת האסטרטגיות של ויליאמס, חישבנו דווקא את <u>אסטרטגית שיווי המשקל של שראפובה</u>!!!

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- כעת נחשב את התועלות הטהורות של שראפובה, כאשר ויליאמס בוחרת באסטרטגיה המעורבת p^* של שיווי המשקל:

	ℓ	r
L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_2(p^*,\ell) = 50p^* + 10(1-p^*) \\ u_2(p^*,\mathrm{r}) = 20p^* + 80(1-p^*) \end{cases}$$

- נשווה את שתי השורות, ונקבל $p^* = \frac{7}{10}$.

מסקנות משיטת החישוב החדשה

- שחזרנו את נקודת שיווי משקל נאש ללא חישוב פונקציות התגובה המיטבית.
- מי מבטיח שזו אכן נקודת שיווי משקל? לפי המשפט חייבת להיות כזו, וראינו שלא ייתכן שהיא מכילה אסטרטגיות טהורות.
- אם שראפובה אינה בוחרת באסטרטגית שיווי המשקל שלה, אזי בהכרח נקבל שהאסטרטגיה המיטבית של ויליאמס היא אסטרטגיה טהורה. מדוע?
- תשובה: כיוון ש q^* היא האסטרטגיה היחידה בה התועלות של ויליאמס משתוות, ולכן בבחירת q אחרת, לא ייתכן שאסטרטגיה מעורבת תהיה תגובה מיטבית.

טניס – ויליאמס מכה שנית

- נניח כעת שלקראת המשחק הבא של שתי השחקניות, מריה שראפובה מנסה לשפר את מכת ה backhand שלה, ולענות יותר טוב לכדורים שבאים משמאלה:

	ℓ	r
L	30,70	80,20
R	90,10	20,80

ניתוח אינטואיטיבי של המשחק

- ***השפעה ישירה***: כעת שחל שיפור במכת ה backhand, סביר לחשוב ששראפובה תעדיף יותר להתכונן יותר לכיוון שמאל, כלומר נצפה לאסטרטגית שיווי משקל לקיים $q^* > \frac{6}{10}$.
- ***השפעה אסטרטגית***: כיוון שויליאמס יודעת שחל שיפור בחבטות של שראפובה, היא תעדיף לחבוט יותר לימינה של שראפובה. אם כך, עדיף על שראפובה להתכונן לחבטות מצד ימין. לכן נצפה שיתקיים $q^* < \frac{6}{10}$.

- קיבלנו אם כך שיש כוחות שמושכים את נקודת שיווי המשקל לכיוונים מנוגדים.

חישוב NE במשחק החדש

	ℓ	r
L	30,70	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_1(L,q^*) = 30q^* + 80(1-q^*) \\ u_1(R,q^*) = 90q^* + 20(1-q^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$$

	ℓ	r
L	30,70	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_2(p^*,\ell) = 70p^* + 10(1-p^*) \\ u_2(p^*,\mathrm{r}) = 20p^* + 80(1-p^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^* = \frac{7}{12}$$

מסקנות

- ראינו שלמרות ששראפובה שיפרה את מכת ה backhand שלה, עליה להמנע מנטייה מוגברת להתכוננות לצד שמאל.
- כלומר ההשפעה האסטרטגית גברה על ההשפעה הישירה.
- אם כך יש להזהר בקביעת מסקנות לפי אינטואיציה בלבד.

- **האם ניתן להסתמך על חישוב נק' שיווי המשקל לחיזוי של משחקים אמיתיים?**
- סיבה אפשרית לכך שחיזוי כזה לא יהיה מדויק היא שבני אדם אינם מכונות טובות לייצור מספרים רנדומליים.
- קשה לקבוע את הצד אליו שראפובה התכוננה מצפייה.

משפט נאש – תקציר הוכחה (לקריאה עצמית)

<u>משפט נאש:</u> יהי G משחק סופי עם מספר סופי של אסטרטגיות, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות (לכל השחקנים), אזי ב G' קיים שיווי משקל נאש.

משפט נאש – תקציר הוכחה

- נתמקד במשחק בו יש לכל שחקן שתי אסטרטגיות טהורות.
- כפי שראינו במשחק שנוצר ע"י הוספת אסטרטגיות מעורבות האסטרטגיות החדשות של שחקן i היא בחירת אסטרטגיה $p_i \in [0,1]$.
- תחום ההגדרה של הפונקציות u_i הוא קוביה רב-מימדית, שהיא תחום סגור, חסום וקמור.

למות עזר

- **<u>למה 1:</u>** $BR_i(p_{-i}) \neq \emptyset$.
- **<u>למה 2:</u>** $BR_i(p_{-i})$ היא קבוצה סגורה, קמורה וחסומה.
- **<u>למה 3:</u>** להתאמה $BR_i(p_{-i})$ יש גרף סגור.

התאמת התגובה הטובה ביותר

- בהנתן וקטור אסטרטגיות $(p_i)_{i\in I}$ נגדיר

$$BR\left((p_i)_{i\in I}\right)=\left\{(p_i^{'})_{i\in I} : p_i^{'}\in BR_i(p_{-i}),\ i\in I\right\}$$

- או:

$$BR\left((p_i)_{i\in I}\right)=\prod_{i\in I}BR_i(p_{-i})$$

- <u>**למה 4:**</u> הקבוצה

$$BR\left((p_i)_{i\in I}\right)$$

היא קמורה, וסגורה ולא ריקה, ויש להתאמה BR גרף סגור.

תנאי מספיק והכרחי לקיום NE

- **<u>למה 5:</u>** וקטור אסטרטגיות $(p_i^*)_{i\in I}$ הוא נקודת שיווי משקל נאש אם ורק אם קיימת להתאמה BR נקודת שבת, כלומר:

$$(p_i^*)_{i\in I} \in BR((p_i^*)_{i\in I})$$

משפט נקודת השבת של Kakutani

- יהי:
  - Y תחום סגור, חסום וקמור ב $\boldsymbol{R}^n$
  - $f \subseteq Y \times Y$ התאמה כך ש:
    - $f(y)$ היא קבוצה קמורה סגורה ולא ריקה לכל $y \in Y$.
    - ל f יש גרף סגור.
- אזי: ל f יש נקודת שבת, כלומר נקודה $y^* \in Y$ כך ש

$$y^* \in f(y^*)$$

סיום ההוכחה של משפט נאש

- ההתאמה BR מקיימת את התנאים של משפט Kakutani לפי למות 1-4.

- לכן קיימת לה נקודת שבת.

- לכן לפי למה 5 נקבל שקיימת נקודת שיווי משקל נאש.