



Bar-Ilan University
אוניברסיטת בר-אילן

מבני נתונים ואלגוריתמים 2			שם הקורס
83224			מס' הקורס
פרופ' דרור רביץ הלל אוסטר, מיטשל בוטובסקי			צוות הקורס
מועד א	סמסטר ב	שנה"ל תשפ"א	שנה, סמסטר, מועד
15/7/2021			תאריך הבחינה
שעתיים וחצי			משך הבחינה
אסור			חומר עזר
<ul style="list-style-type: none">• המבחן כולל 3 עמודים (כולל עמוד זה) ו-4 שאלות.• יש לענות על כל השאלות.• הוכיחו/נמקו את כל תשובותיכם. תשובה ללא הוכחה/נימוק לא תתקבל.• כאשר מציגים אלגוריתם יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.• מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול בתנאי שמצטטים אותה במדויק.• השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים כדי לצבור מקסימום נקודות בזמן העומד לרשותכם. <p>בהצלחה!</p>			הנחיות

שאלה 1 (15%):

נתונים n מספרים שונים a_1, \dots, a_n עם משקלים חיוביים w_1, \dots, w_n כך שמתקיים $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.
החציון הממושקל הוא האיבר a_k שעבורו מתקיים: $\sum_{a_j < a_k} w_j < \frac{1}{2}$ וכן $\sum_{a_j \leq a_k} w_j \geq \frac{1}{2}$.
למשל חציון רגיל ניתן לייצג ע"י המשקלים $w_j = \frac{1}{n}$, לכל j .

תארו אלגוריתם לחישוב חציון ממושקל שרץ בזמן $O(n)$, עבור המקרה שבו $w_j \in \{\frac{1}{cn}, \frac{2}{cn}, \dots, \frac{cn}{cn}\}$, לכל j ,
עבור קבוע שלם c .

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 2 (30%):

שאלה זו עוסקת בטבלאות ערבול. אין קשר בין שני הסעיפים.

15% א. נתונה טבלת ערבול סגורה שמשתמשת בשיטת המצבה, כאשר

$$h(x) = x \bmod 10$$

$$h_i(x) = h(x) - i \bmod 10$$

תארו את תוכן טבלת הערבול בכל אחד מהשלבים של סדרת הקלט הבאה:

Insert 40, Insert 35, Insert 10, Insert 38, Insert 30, Insert 25, Delete 10, Insert 24, Insert 20

15% ב. יהי $U = \{0, \dots, N-1\}$. יהיו \mathcal{H}_1 ו- \mathcal{H}_2 אוספים אוניברסליים של פונקציות שממפות איברים מהקבוצה U לטווחים $\{0, \dots, m_1-1\}$ ו- $\{0, \dots, m_2-1\}$, בהתאמה.
בהנתן שתי פונקציות $h_1 \in \mathcal{H}_1$ ו- $h_2 \in \mathcal{H}_2$ נגדיר את הפונקציה $h_1 \otimes h_2$ באופן הבא:

$$h_1 \otimes h_2(u) = (h_1(u), h_2(u))$$

נגדיר אוסף של פונקציות \mathcal{H} שממפות איברים מ- U לטווח $\{0, \dots, m_1-1\} \times \{0, \dots, m_2-1\}$ באופן הבא:

$$\mathcal{H} = \{h_1 \otimes h_2 : h_1 \in \mathcal{H}_1 \text{ and } h_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

הוכיחו או הפריכו: \mathcal{H} הוא אוסף אוניברסלי.

שאלה 3 (30%):

בשאלה זו נתונים ישומים של אלגוריתם Ford Fulkerson, כאשר כל אחד מהם משתמש בכלל שונה לבחירת מסלול שיפור. לכל אחד מהם יש לקבוע האם האלגוריתם המתקבל הוא פולינומי או לא.

אם טוענים שהאלגוריתם פולינומי יש לספק ניתוח סיבוכיות כמה שיותר הדוק. לעומת זאת, אם טוענים שהאלגוריתם אינו פולינומי יש לתאר בניה כללית שמראה שזמן הריצה של האלגוריתם אינו פולינומי.

15% א. משתמשים במסלול שיפור שקיבולו לפחות חצי מקיבול מסלול שיפור בעל קיבול גדול ביותר.

15% ב. משתמשים במסלול שאורכו עד פי 2 מאורך מסלול שיפור קצר ביותר.

תזכורת: הקיבולים נתונים בקלט בקידוד בבינארי.

שאלה 4 (25%):

שאלה זו עוסקת במכפלת פולינומים.

10% א. הראו איך להכפיל שני פולינומים $ax + b$ ו- $cx + d$ ע"י שימוש רק בשלוש הכפלות.

רמז: אחת מהמכפלות היא $(a + b) \cdot (c + d)$.

15% ב. תארו אלגוריתם הפרד ומשול שמכפיל שני פולינומים בעלי n מקדמים (מדרגה $n - 1$) שעובד בזמן $O(n^{\log_2 3})$.

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

הדרכה:

- האלגוריתם צריך להפריד את המקדמים של הפולינומים למקדמים זוגיים ואי-זוגיים.
- אסור להשתמש בהתמרת פוריה דיסקרטית (FFT).