# מבני נתונים ואלגוריתמים 2 83224 - תרגיל 4 (תשפ"ד)

הנחיות הגשה:

- מועד הגשה: יום רביעי ה- 31/7/24.
- ניתן להגיש בזוגות, על כל סטודנט להגיש עותק משלו באתר המודל.

## שאלה 1:

ב*בעיית הגיבוי* נתון גרף דו-צדדי לא מכוון $G = (C, S, E)$, כאשר $C$ היא קבוצת לקוחות ו- $S$ היא קבוצת שרתים. לכל לקוח $c \in C$ יש קובץ שהוא רוצה לגבותו באחד משכניו השרתים (כל הקבצים באותו גודל), וכל שרת $s$ יכול לאחסן עד $\ell(s)$ קבצים.

פתרון לבעיה הוא פונקציה $b: C \rightarrow S$ שמתאימה שרת לכל לקוח, כך שמתקיים:

- לקוח מקבל שירות רק משרת שכן, כלומר $(c, b(c)) \in E$, לכל לקוח $c$.
- העומס על כל שרת חסום ע"י מגבלת העומס שלו, כלומר $|\{c : b(c) = s\}| \leq \ell(s)$, לכל שרת $s$.

המטרה בבעיית הגיבוי היא למצוא פתרון שמביא למקסימום את מספר הלקוחות שקיבלו שירות.

א. הראו שבעיית שידוך המקסימום בגרף דו-צדדי היא מקרה פרטי של בעיית הגיבוי.

ב. תארו אלגוריתם יעיל שפותר את בעיית הגיבוי.
נתחו סיבוכיות והוכיחו נכונות.

## שאלה 2:

השתמשו באלגוריתם ה- FFT לשם חישוב המכפלה של הפולינומים $A(x) = x$ ו- $B(x) = 1 + x$.

## שאלה 3:

יש לכפול מטריצה $A$ בת $2n$ שורות ו- $n$ עמודות במטריצה $B$ בעלת $n$ שורות ו- $2n$ עמודות.

א. הסבירו כיצד ניתן לחשב את $C = AB$ ע"י שימוש באלגוריתם של Strassen.

ב. חשבו במדויק את מספר פעולות הכפל ומספר פעולות החיבור/חיסור הדרושות עבור $n = 2$.

## שאלה 4:

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה $I \subseteq V$ נקראת *בלתי תלויה* אם אין קשת בין כל שני צמתים מ- $I$, כלומר אם מתקיים $E \cap (I \times I) = \emptyset$. בבעיית הקבוצה הבלתי תלויה הקלט הוא גרף $G = (V, E)$, והמטרה היא למצוא קבוצה בלתי תלויה גדולה ביותר.

א. הוכיחו שהקבוצה $I$ היא בלתי תלויה אם ורק אם הקבוצה $V \setminus I$ היא כיסוי בצמתים.

ב. תארו אלגוריתם יעיל, שבהינתן גרף $G = (V, E)$ שידוע שיש בו קבוצה בלתי תלויה שגודלה לפחות $\frac{3}{4}|V|$, מוצא בגרף קבוצה בלתי תלויה שגודלה לפחות $\frac{1}{2}|V|$.
נתחו סיבוכיות ויחס קירוב.

הדרכה: השתמשו באלגוריתם קירוב 2 עבור בעיית הכיסוי בצמתים.

## שאלה 1:

בבעיית הגיבוי נתון גרף דו-צדדי לא מכוון $G = (C,S,E)$, כאשר $C$ היא קבוצת לקוחות ו- $S$ היא קבוצת שרתים. לכל לקוח $c \in C$ יש קובץ שהוא רוצה לגבות באחד משכניו השרתים (כל הקבצים באותו גודל), וכל שרת $s$ יכול לאחסן עד $\ell(s)$ קבצים.

פתרון לבעיה הוא פונקציה $b: C \to S$ שמתאימה שרת לכל לקוח, כך שמתקיים:

- לקוח מקבל שירות רק משרת שכן, כלומר $(c,b(c)) \in E$, לכל לקוח $c$.
- העומס על כל שרת חסום ע"י מגבלת העומס שלו, כלומר $|\{c : b(c) = s\}| \le \ell(s)$, לכל שרת $s$.

המטרה בבעיית הגיבוי היא למצוא פתרון שמביא למקסימום את מספר הלקוחות שקיבלו שירות.

א. הראו שבעיית שידוך המקסימום בגרף דו-צדדי היא מקרה פרטי של בעיית הגיבוי.

ב. תארו אלגוריתם יעיל שפותר את בעיית הגיבוי.
נתחו סיבוכיות והוכיחו נכונות.

**א.1**

בבעיית השידוך המקסימלי בגרף דו"צ $G=(L,R,E)$ אנו רוצים למצוא תת קבוצה של קשתות $M$ זרות בצמתים כך שכל צומת נוגע בלא יותר מקשת אחת ב-$M$ ורוצה למקסם את הקבוצה $M$.

אם נגדיר בבעיית הגיבוי שלכל קובץ $s$ $\ell(s)=1$ ולכן כל שרת $s$ יכול להכיל קובץ יחיד, נקבל בדיוק בעיית השידוך המקסימלי.

כל צומת $s\in S$ מקביל לצומת $r\in R$ כאשר כיוון ש $\ell(s)=1$ צומת $s$ יכול להיות בקשת אחת בלבד אחרת יקבל 2 ומעלה קבצים וקבלנו שצומת מכיל 2 כי $|\{c:b(c)=s\}|=2\nleq 1$.

ולכן כיוון שבבעיית הגיבוי נרצה למצוא מקסימום לקוחות שיקבלו שירות וכל שרת יכול לקבל קובץ יחיד נרצה למקסם את כמות הקשתות הזרות בצמתים.

(יכולה לקבל קובץ בודד ולקוח $c$ מגבה קובץ יחיד) וקיבלנו בעיה שקולה למציאת שידוך מקסימום.

---

**ב.1**

נשתמש באלגוריתם זרימה ואלגוריתם למציאת שידוך מקסימלי רק שבמקום קיבולת של הקשתות הנכנסות ל-$T$ הן $\ell(s)$ לכל $s\in S$.

<u>האלגוריתם:</u>

(1) בהינתן גרף דו"צ לא מכוון $G(C,S,E)$ נבנה רשת זרימה $H$ כך:

(א) נהפוך את הקשתות למכוונות מ-$C$ ל-$S$ וניתן לכל אחת מהן קיבולת 1 כלומר $\forall u,v: c(u,v)=1$ — $O(|E|)$ מעבר על כל הקשתות ב-$G$

(ב) נוסיף מקור $S$ ויעד $T$ — $O(1)$

(ג) נוסיף קשתות מכוונות מ-$s$ לכל צומת ב-$C$ בעלי קיבולת 1 כלומר $\forall u: c(s,u)=1$ — $O(|C|)$ הוספת צלעות כמספר הלקוחות

(ד) נוסיף קשתות מכוונות ל-$T$ מכל צומת ב-$S$ בעלי קיבולות $\ell(s)$ כלומר לכל $v\in S$ $c(v,t)=\ell(v)$ — הוספת צלעות כמספר השרתים $O(|S|)$

(2) נמצא זרימת מקסימום ב-$H$

Ford-Fulkerson: $O(\overbrace{|E|+|V|}^{|E|_H})\cdot \underbrace{|V|}_{|S|+|C|}\cdot \overbrace{\max\{\ell(s)\}}^{C_{max}}$

$O(mF^*)=O(mnC_{max})$

(3) נבנה פונק' $b:C\to S$ כך שלכל $u\in C$ $b(u)=v$ עבור $v\in S$ המקיים $f(u,v)>0$ — $O(|E|)$ מעבר על כל הקשתות בין $S$ ל-$C$ ולקיחת אלה שגדולים מ-0

המשך ↓

7.ג המשך

ניתוח סיבוכיות: $O((|E|+|V|)\cdot|V|\cdot\max\{\ell(s)\})$ קיים גם מימוש של Edmond Karp

בסיבוכיות של $O(nm^2)$ ובמקרה שלנו $O(\underbrace{|V|}_{|S|+|C|+2}\cdot(\underbrace{|V|+|E|}_{E_H})^2)$

$s,t$

בגלל שלפני ניתחתי בפרק וסבר קודמתי סיבוכיות
במספר גדול של מציאת זרימה מקסימלית.

נכונות:

בהרצאה ראינו ניתוח נכונות לאלגוריתם שיוצק מקסימלי. הראיתי דוגמה
וכן נראה רק את נכונות התוצאות האלגוריתם.
וכי הפונק' $b$ מחזירה את המבוקש.

תחילה נראה כי התנאים בשאלה מתקיימים:

* הגרף הוא דו״צ וכן לקוח מקבל שירות רק מוגדר וקיימת זרימה רק מלקוח לשרת

* כיוון שהקיבולות של הקשתות מ-$v\in S$ ל-$T$ הינה $\ell(s)$ הזרימה המקסימלית הנכנסת
לכל צומת $v\in S$ היא $\ell(v)$ כי הזרימה לא מתאפשרת יותר.

כעת נסגור למה הזרימה המקסימלית גורמת שאנו מתקבלת מס' לקוחות
שקיבלו שירות.

נניח כי קיים $u\in C$ שלא קיבל שירות אך הסיג' מן האידיאלי $b^*$
ויקח $u$ קיבל שירות רק $b(u)=v$ עבור $v\in S$

לפי מה שהגדרנו שלנו $b$ מתקיים $|\{c: b(c)=v\}|<\ell(v)$ אחרת לא היה
ניתן לספק שירות בפתרון האידיאלי עבור $v$.

אבל כיוון ש-1 גורמת זרימה $H$ שנינו קיימת הזרמה לאו רווחה
מ-$e(u,v)$ שניתן להגדיל את הזרימה מ-$u$ ל-$v$ וכן הזרימה אינה מקסימלית

בסתירה לכך שהאלגוריתם מוצא זרימה מקסימלית גרסה

ולכן $b=b^*$

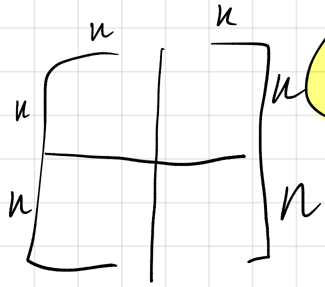
**שאלה 3:**

יש לכפול מטריצה $A$ בת $2n$ שורות ו- $n$ עמודות במטריצה $B$ בעלת $n$ שורות ו- $2n$ עמודות.

א. הסבירו כיצד ניתן לחשב את $C = AB$ ע"י שימוש באלגוריתם של Strassen.

ב. חשבו במדויק את מספר פעולות הכפל ומספר פעולות החיבור/חיסור הדרושות עבור $n = 2$.

א.3



$$A \in \mathbb{R}^{2n\times n} \quad \rightarrow \quad AB \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$
$$B \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$$

*כדי שאלגוריתם סטרסן יעבוד נניח ש $n$ חזקה של 2.
אם $n$ אינו חזקה של 2 אפשר לרפד ב"0" ולהביא מטריצות לכך.

1. נפרק את $A$ ו $B$ לתתי מטריצות

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B \rightarrow \begin{bmatrix} B_{11}, & B_{12} \\ B_{21}, & B_{22} \end{bmatrix}$$

2. נחשב את תתי המטריצות הבאות:

$P_1 = A_{11}\cdot B_{12} - A_{11}\cdot B_{22}$ $\quad$ $P_2 = A_{11}\cdot B_{22} + A_{12}\cdot B_{22}$ $\quad$ $P_3 = A_{21}\cdot B_{11} + A_{22}\cdot B_{11}$

$P_4 = A_{22}\cdot B_{21} - A_{22}\cdot B_{11}$ $\quad$ $P_5 = A_{11}\cdot B_{11} + A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11} + A_{22}B_{22}$

$P_6 = A_{12}\cdot B_{21} + A_{12}B_{22} - A_{22}B_{21} - A_{22}B_{22}$ $\quad$ $P_7 = A_{11}B_{11} + A_{11}B_{12} - A_{21}B_{11} - A_{21}B_{12}$

$C_{11} = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$ $\quad$ $C_{21} = P_3 + P_4$

$C_{12} = P_1 + P_2$ $\quad$ $C_{22} = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$

וכך נקבל:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

---

ב.3

מתרגול עבור $n=2$ ראינו כי צריך 7 הכפלות ו 18 פעולות חיסור/חיבור
במקרה שלנו $n=4$ כלומר יש פי 4 איברים ולכן יש צורך בפי 4 פעולות
כלומר:

$\boxed{\begin{array}{ll} 7\cdot 4 = 28 & \text{פעולות כפל} \\ 18\cdot 4 = 72 & \text{פעולות חיבור/חיסור} \end{array}}$

## שאלה 4:

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, קבוצה $I\subseteq V$ נקראת *בלתי תלויה* אם אין קשת בין כל שני צמתים מ- $I$, כלומר אם מתקיים $E\cap(I\times I)=\emptyset$. בבעיית הקבוצה הבלתי תלויה הקלט הוא גרף $G=(V,E)$, והמטרה היא למצוא קבוצה בלתי תלויה גדולה ביותר.

א. הוכיחו שהקבוצה $I$ היא בלתי תלויה אם ורק אם הקבוצה $V\setminus I$ היא כיסוי בצמתים.

ב. תארו אלגוריתם יעיל, שבהינתן גרף $G=(V,E)$ שידוע שיש בו קבוצה בלתי תלויה שגודלה לפחות $\frac{3}{4}|V|$, מוצא בגרף קבוצה בלתי תלויה שגודלה לפחות $\frac{1}{2}|V|$.
נתחו סיבוכיות ויחס קירוב.

<u>הדרכה:</u> השתמשו באלגוריתם קירוב 2 עבור בעיית הכיסוי בצמתים.

א.4

כיוון א ←

נניח ש $I$ בה"ת ונראה ש $V/I$ כיסוי בצמתים

מאחר ו $I$ בה"ת $\forall u,v\in I \Leftarrow \nexists(u,v)\in E$

- אם ל $u$ יש לו קשת $(u,k)$ אז $k\in V/I$ כי $k\notin I$ אך $k\in V$
- אם ל $u$ אין לו קשת אז הוא קודקוד בודד ולכן לא משנה אם כיסוי הגרף ועדיין $V/I$ מהווה כיסוי לגרף $G$.

מאחר ובמיינו את כל האפשרויות ובכל אחת מהן $V/I$ כיסוי לגרף אז

I בה"ת $\Leftarrow$ $V/I$ כיסוי לגרף

כיוון ב →

נניח כי $V/I$ כיסוי בגרף ונראה כי $I$ בה"ת

$V/I$ כיסוי לכן $\forall(u,v)\in E:(u\in V/I)\vee(v\in V/I)$

אם $u\in V/I$ אם $v\notin V/I$ (לפי עקרון הסימטריה אותו דבר למקרה ההפוך):

אז מאחר ו $v\notin V/I$ אז $v\in I$ ומאחר ו $u\in V/I$ אז $u\notin I$

וכך שומר ש $I$ בה"ת אם רק מקרה זה מתקיים.

אם $u,v\in V/I$ אז $u,v\notin I$ לא סותר ש $I$ בה"ת

אם $u,v\notin V/I$ מקרה זה לא אפשרי כי $V/I$ כיסוי, ולפי ההנחה הזאת $(u,v)\in E$ $u$ או $v$ חייב להיות שייך $V/I$

מנינו כל האפשרויות ובכל אפשרות $I$ קבוצה בה"ת

כלומר

I בה"ת $\longrightarrow$ $V/I$ כיסוי לגרף

ומאחר והוכחנו 2 כיוונות אז:

I בה"ת $\longleftrightarrow$ $V/I$ כיסוי לגרף

ג.4

**שאלה 4:**

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V,E)$, קבוצה $I \subseteq V$ נקראת *בלתי תלויה* אם אין קשת בין כל שני צמתים מ- $I$, כלומר אם מתקיים $E \cap (I \times I) = \emptyset$. בבעיית הקבוצה הבלתי תלויה הקלט הוא גרף $G = (V,E)$, והמטרה היא למצוא קבוצה בלתי תלויה גדולה ביותר.

א. הוכיחו שהקבוצה $I$ היא בלתי תלויה אם ורק אם הקבוצה $V \setminus I$ היא כיסוי בצמתים.

ב. תארו אלגוריתם יעיל, שבהינתן גרף $G = (V,E)$ שידוע שיש בו קבוצה בלתי תלויה שגודלה לפחות $\frac{3}{4}|V|$, מוצא בגרף קבוצה בלתי תלויה שגודלה לפחות $\frac{1}{2}|V|$.
נתחו סיבוכיות ויחס קירוב.

הדרכה: השתמשו באלגוריתם קירוב 2 עבור בעיית הכיסוי בצמתים.

נמצא שידוך מקסימלי על ידי אלגוריתם קירוב 2
הפלט של האלגוריתם הוא $V \setminus C$.

לפי סעיף קודם $V \setminus C$ קבוצה ב"ת ומאחר וידוע
כי קיימת קבוצה ב"ת בגודל $\frac{3}{4}|V|$ לפחות אז

$$V \setminus C \le \frac{3}{4}|V| \Rightarrow |C| \le \frac{1}{4}|V|$$

$$\Downarrow$$

$$|C| \le \frac{1}{2}|V|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|V \setminus C| \ge \frac{1}{2}|V|}$$