EPITA

Mathématiques S2

Contrôle de mi-semestre

Mars 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points qui seront ramenés à 20 par une règle de trois.

Consignes :

— Documents et calculatrices interdits.
— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (4 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. (E_1) $\quad (t+3)y' + y = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en cherchant une solution particulière grâce à une variation de la constante.

b. $(E_2) \quad y' + y = \cos(t) + 2\sin(t) \quad$ sur $\mathbb{R}$
en cherchant une solution particulière de la forme $y_p = a\cos(t) + b\sin(t) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (3 points)

a. Montrer, en rédigeant soigneusement votre réponse, que l'équation $(E) : \ x^3 - 3x + 6 = 0$ admet une solution sur l'intervalle $]-3, 3[$.

b. Établir le tableau de variation de $f(x) = x^3 - 3x + 6$ sur $[-3, 3]$.
En déduire que cette racine est unique et en donner un encadrement entre deux entiers consécutifs.

Exercice 3 (6 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $f(x) = e^x\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en zéro de $g(x) = \ln(1 + \cos(x))$.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + 2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$ en détaillant chaque étape de calcul.

Exercice 4 (4 points)

a. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? Justifiez vos réponses par une démonstration en cas de réponse positive, en montrant précisément ce qui ne marche pas sinon.

A : Le singleton $A = \{O_E\}$

B : Demi-plan $y \geqslant 0$: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant 0\}$

C : Droite $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$

D : Droite $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 1\}$

b. Citer, sans démonstration, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (3 points)

On pose $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(a, b, 0); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, $G = \{(c, c, c),\ c \in \mathbb{R}\}$, deux sous-espaces vectoriels de E.
Rappeler à quelles conditions F et G sont supplémentaires dans E puis montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 6 (3 points)

Soit $\mathcal{F} = \{u = (1, 1, 0);\ v = (0, 1, 1);\ w = (1, 0, 1)\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Donner les coordonnées du vecteur $(1, 3, 0)$ dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 7 (3 points)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de E définis par :
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y - z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\left(\{(1, -1, 0, 1); (-2, 2, 0, -2)\}\right)$

a. Écrire F sous forme de Vect.

b. Déterminer les dimensions de F et G en justifiant soigneusement vos réponses.

Exercice 8 (4 points)

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, montrer si la famille est libre ou liée.

$\mathcal{F}_1 = \{P, Q, R\}$ dans $\mathbb{R}[X]$ où : $P(X) = -X^3 + X^2 + 2X - 2$; $Q(X) = 2X^3 - X + 3$, $R(X) = 2X^2 + 3X - 1$,

$\mathcal{F}_2 = \{(u_n), (v_n), (w_n)\}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$, $v_n = 2^n$ et $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.