EPITA

Mathématiques

Contrôle S2

durée: 3 heures

Février 2023

Nom:

Documents et calculatrices interdits.

— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Prénom :	* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *				
Classe :	a *		*		
NOTE:					
Le barème est su	r 40 points. La note s	sera ramenée à une 1	note sur 20 en divisa	nt par 2.	
Consignes:					
- La rigueur	en entier avant de comn de votre rédaction se d'un point sur la note	era prise en compte (dans la note.	ant de propreté.	

Exercice 1 : polynômes (6 points)

On co	onsidère le polynôme $P(X) = X^6 - X^5 - 3X^4 + 7X^3 + 14X^2 + 6X$.
1.	Montrer que -1 est une racine de P et trouver son ordre exact de multiplicité.

2.	Que peut-on en déduire en termes de divisibilité?
3.	. En vous aidant d'une seule division euclidienne, factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

Exercice 2 : équations différentielles (6 points)

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

Résoudre (E_1) sur I .
,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
,
Trouver les solutions de (E_1) telles que $y(0) = 1$.

2. So	it (E_2) : $y'' + 4y' + 13y = (25x^2 + 16x + 2)e^{2x}$ sur $J = \mathbb{R}$.
(a)	Montrer que $y_p: x \longmapsto x^2 e^{2x}$ est une solution particulière de (E_2) .

(b)	Trouver toutes les solutions de (E_2) .
Evere	ice 3 : études locales (6,5 points)
	pient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} . Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Rappeler les définitions mathématiques de : $f(x) \sim g(x)$ et $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a .

* *	
	onner, en justifiant, un équivalent simple (autre que la fonction elle même) de $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x$ en $a = 0$ ET en $a = +\infty$.
40	
4.0	
7.1	.,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
(41)	
*	
531	

3. So.	ient h et k deux fonctions telles qu'au voisinage de 0
	$h(x) = 1 + 2x + x^2 - 3x^3 + o(x^3)$ et $k(x) = -x + 3x^2 + o(x^2)$
(a)	Donner un équivalent le plus simple possible en 0 de : $h(x)$ (sans justifier), $k(x)$ (sans justifier) et $xh(x) + k(x)$ (en justifiant).
	\dots
(b)	A-t-on assez d'informations pour donner le développement limité de $h(x) + k(x)$ à l'ordre 1? À l'ordre 2? À l'ordre 3? Donner le développement limité quand la réponse est oui.
Exerc	ice 4 : développements limités (5 points)
Dans cet	exercice, vous prendrez soin de rappeler les développements limités usuels que vous devez utiliser.
	rouver le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x)e^{-2x}$.
1. 11	ouver le developpement ininte en o a rordre 5 de $f(x) = \cos(x)e^{-x}$.
* *	
**	
1919	***************************************
36.9	
* *	

2.	Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = \sqrt{1+x}$ à partir d'un des cinq DL usuels.
3.	Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $h(x) = \ln (1 + \sqrt{1+x})$.

	ercice 5 : calculs de limites (3,5 points)
1	. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin(\frac{x}{2})}$. Vous devez utiliser les DL!
	0.00.00.00.00.00.00.00.00.00.00.00.00.0

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^x$. Vous devez utiliser les DL.
Exercice 6: espaces vectoriels 1 (8 points)
$1. \ Les \ ensembles \ suivants \ sont-ils \ des \ \mathbb{R}\text{-espaces vectoriels} \ ? \ Justifiez \ rigoureus ement \ votre \ réponse.$
(a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \le y\}$
(b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0\}.$
3.111.111.111.111.111.111.111.111.111.1

(c) $G = \{ P \in \mathbb{R}[X], X \mid P \}$

,
2. Dans cette question, il n'est pas demandé de justifier les réponses.
Donner un sous-espace vectoriel de E (autre que E et $\{0_E\}$) dans les cas suivants :
(a) $E = \mathbb{R}^4$
(b) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
(c) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ converge}\}$
Exercice 7: espaces vectoriels 2 (5 points)
Les deux questions sont indépendantes.
1. Dans \mathbb{R}^3 , on considère les sous-espaces vectoriels
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y\}$
(a) A-t-on $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$? Justifier.

	(b)	Rappeler la définition mathématique de l'ensemble $F+G$.

	(c)	Le vecteur $u = (1, 2, 3)$ appartient-il à $F + G$? Justifier.

		La décomposition que vous avez trouvé est-elle unique? Justifier. Pourquoi en étiez-vous certain avant même de faire le moindre calcul?
		3
2	Soi	ent E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E . $(n \in \mathbb{N}^*)$
		Donner la définition mathématique de : \mathcal{F} est une famille libre de E .
	(4)	20 miles in definition into the termine in the de 2.
	(b)	Donner la définition mathématique de : \mathcal{F} est une famille génératrice de E .
	1100-08171	Dans $E=\mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille libre composée de 2 vecteurs et un exemple d'une famille liée composée de 3 vecteurs. Justification non demandée.
		3

	(d)	Dans $E=\mathbb{R}^2$, donner un exemple d'une famille génératrice de E . Justification non demandée.
		\dots
		\dots
		$\dots \dots $