EPITA

Mathématiques

Contrôle S1

durée: 3 heures

Novembre 2021

Nom:
Prénom :
Classe:
NOTE:
Le barème indiqué est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par une règle de trois.
Consignes:
— Lire le sujet en entier avant de commencer. Il v a en tout 8 exercices.

— Documents et calculatrices interdits.

Vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (3 points)

Dans	TRP	on	définit	la	relation	suivante	
Dans	ш//	OII	dennit	ıа	retation	Survante	

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \mathcal{R} y \iff x^2 \le y^2$$

Citer les différentes propriétés (avec les quantificateurs) qui définissent une relation d'ordre. Pour chacune d'entre elles, dire si la relation \mathcal{R} ci-dessus la vérifie en justifiant votre réponse.

Exercice 2 (3 points)

Traduire les propriétés suivantes en syntaxe mathématique (avec les quantificateurs).

1. Tout réel positif est le carré d'un réel.

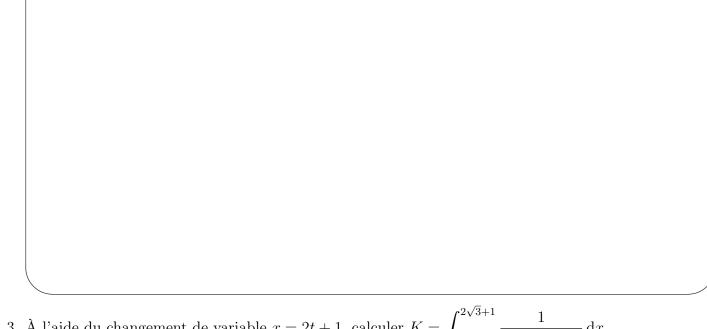
2. Si le produit de deux réels est nul alors l'un au moins de ces réels est nul.

3. Tout entier naturel est pair ou impair. (Il est interdit dans cette question d'utiliser la notion de congruence).

Exercice 3 (4,5 points)

1. Calculer directement $I = \int_0^1 (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 3x + 1} \, \mathrm{d}x$

2. Calculer, en intégrant par parties, $J = \int_0^1 (2x+1)e^{2x} \,\mathrm{d}x$



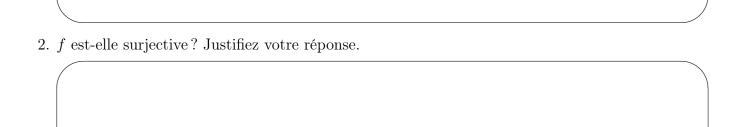
3. À l'aide du changement de variable x=2t+1, calculer $K=\int_1^{2\sqrt{3}+1}\frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4 (3,5 points)

On considère la fonction $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = \frac{n}{2}$$
 si n est pair et $f(n) = n$ sinon

1. f est-elle injective? Justifiez votre réponse.



3. On suppose, dans cette question que l'on restreint le domaine de départ de f à $E=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Donner $f(\{0,1,2,3\}), f^{-1}(\{1,3\})$ et $f^{-1}(\{4\})$.

Exercice 5 (5 points)

Dans une urne, il y a n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. Pour un entier naturel $k \le n$, on tire **simultanément** k boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles? Justifiez brièvement.



2. Quel est le nombre de tirages ayant la boule numérotée 1? Justifiez brièvement.

Expliquez en quo	i les résultats pr	récédents permet	ttent de montre	r la formule (A	P) suivante :	
		$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$	$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$			
tedémontrer la f	ormule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orie
Redémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiau:	x avec les facto	orio
dedémontrer la f	ormule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orio
Redémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orio
dedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orio
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orio
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiau	x avec les facto	orio
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiau	x avec les facto	orio
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiau	x avec les facto	orio
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orio
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orio
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orie
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orio
tedémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orio
Redémontrer la f	formule (P) en u	tilisant l'express	sion des coefficie	ents binomiaux	x avec les facto	orie

Exercice 6 (5 points)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

1. Proposer une expérience simple avec le dé qui amène à la création d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{6}$. Rappeler l'espérance et la variance de X en fonction de p.

2. Proposer une expérience simple avec le dé qui amène à la création d'une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale de paramètres n=10 et $p=\frac{1}{6}$. Rappeler l'espérance et la variance de Y en fonction de n et p.

3. On lance le dé une seule fois. On gagne 5 points si le dé amène un multiple de 3, 3 points si le dé amène 1 ou 2 et zéro point dans les autres cas. Soit G la variable égale au nombre de points marqués. Donner la loi de G et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 7 (4 points)

Imaginons qu'un virus touche les habitants du monde entier. Des tests de dépistages du virus sont alors mis en vente. Le mode d'emploi précise que

- \bullet Si un individu n'est pas malade, le test est fiable dans 80% des cas.
- Si un individu est malade, le test est fiable dans 99% des cas.

On suppose que le virus touche 25% de la population française. On tire un habitant au hasard et on lui fait passer le test.

On note M : « L'habitant est malade » et T : « Le test est positif »

nment calculer la pale n'est pas deman	ı habitant soit ma	lade sachant que l	e test est pos

Exercice 8 (2 points)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n$$

1. Que vaut S_n dans le cas où q=1?

2. On suppose que $q \neq 1$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.