

EPITA

Mathématiques

Partiel S3

Décembre 2022

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note se ramène à une note sur 20 par une simple division par 2.

Consignes :

- Documents et calculatrices interdits.
 - Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
 - Ne pas écrire au crayon de papier.
-

Exercice 1 (6 points)

Un fournisseur d'accès internet a mis en place un service d'assistance pour aider ses clients, dans le cas où ils ont des problèmes de connexion. Pour tout intervalle de temps d'une heure, on définit la variable aléatoire

$X = \text{«Nombre d'appels reçus par le service assistance pendant cet intervalle de temps»}$

On suppose que les nombres d'appels, dans deux intervalles de temps ne se recouvrant pas, sont des variables aléatoires indépendantes. Enfin, on admet que sous cette hypothèse, il existe $\lambda > 0$ tel que $X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$, c'est à dire que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Le service d'assistance est ouvert 10 heures par jour (de 9h à 19h), et la valeur de λ est la même pour tout intervalle de temps d'une heure inclus dans les heures d'ouverture.

1. Déterminer la fonction génératrice $G_X(t)$ de la variable X . Exprimer $G_X(t)$ d'abord comme une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Calculer l'espérance et la variance de X .

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. On considère une journée j et on définit la variable aléatoire

$Y = \text{«Nombre d'appels reçu par le service assistance pendant toute cette journée»}$

- (a) Déterminer la fonction génératrice de Y . Justifier soigneusement.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

- (b) En déduire la loi de Y .

.....
.....
.....
.....

Considérons l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto (P(1), P(2)) \end{cases}$

- [illegible]

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions n et p non nulles.

On suppose que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ obtenue par concaténation de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 est une base de E .

2. Démontrer cette propriété.

Exercice 5 : construction d’une symétrie (8 points)

On se place dans l’espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique \mathcal{B} . On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in E, x - y + 2z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ (x, y, z) \in E, \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

1. Trouver une base de F et une base de G .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. D’après la question précédente, on sait que pour tout $u \in E$, il existe un unique $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

Considérons l’endomorphisme $s : u \longmapsto v - w$.

(a) Supposons que $u \in F$. Que vaut $s(u)$?

.....

.....

.....

(b) Supposons que $u \in G$. Que vaut $s(u)$?

.....

.....

.....

- (c) Soit \mathcal{B}' la base de E obtenue par concaténation des bases de F et de G trouvées à la question 1. Déterminer la matrice de s dans cette base \mathcal{B}' au départ et à l'arrivée. Notons A' cette matrice.

.....

.....

.....

.....

.....

- (d) Soit A la matrice de s dans la base canonique au départ et à l'arrivée. Donner la relation matricielle qui permet de calculer A . **On ne demande pas de faire le calcul.**

.....

.....

.....

.....

Exercice 6 : Probabilités (5 points)

Soit $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre p .

1. Rappeler la loi de X .

.....

.....

.....

2. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

- (a) Montrer que $P(X > n) = q^n$ où $q = 1 - p$.

Indication : on pourra démarrer en écrivant $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)$, ou encore $P(X > n) = 1 - \sum_{k=1}^n P(X=k)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (b) Expliquer pourquoi $P(X=n+k \cap X > n) = P(X=n+k)$.

.....

.....

.....

.....

- (c) Calculer la probabilité conditionnelle $P(X=n+k \mid X > n)$. Comparer votre résultat à la valeur $P(X=k)$.

.....

.....

.....

.....

.....

(d) Expliquer pourquoi on dit que la loi de X est «sans mémoire».

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. On considère une variable aléatoire Y telle que

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, P(Y=n+k \mid Y>n) = P(Y=k)$$

Soit (p_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $p_n = P(Y=n)$.

(a) Écrire $P(Y>1)$ en fonction de p_1 .

.....

.....

(b) En considérant les évènements « $Y>1$ », « $Y=1$ » et « $Y=2$ », exprimer $\frac{p_2}{p_1}$ en fonction de p_1 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en considérant les évènements « $Y>1$ », « $Y=n$ » et « $Y=n + 1$ », trouver une expression simple de $\frac{p_{n+1}}{p_n}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(d) En déduire p_n en fonction de n . Comment appelle-t-on la loi de Y ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....