

# EPITA

## Mathématiques

Partiel (S1)

Janvier 2020

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :



## Exercice 1 (2 points)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1.  $(u_n)$  n'est pas bornée.

2.  $(u_n)$  est monotone.

## Exercice 2 (3 points)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que :  $(u_{2n})$  converge vers un réel  $l$  et  $(u_{3n})$  converge vers un réel  $l'$ .

1. A l'aide d'une suite extraite bien choisie, montrer que  $l = l'$ .

2. Peut-on conclure sur la convergence de  $(u_n)$  ? (Justifier votre réponse.)

### Exercice 3 (2 points)

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifie la relation de récurrence  $u_{n+1} = 10u_n + 27$ .

1. Pour quelles valeurs de  $u_0$  une telle suite est-elle constante ?

2. On note  $\ell$  la valeur trouvée à la question précédente. Montrer que la suite  $(v_n) = (u_n - \ell)$  est géométrique et préciser sa raison.

3. On prend  $u_0 = 1$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 4 (2 points)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.

### Exercice 5 (4,5 points)

Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par récurrence par :  $u_0 \in \mathbb{R}_+$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f(x) = \frac{x^2 + 8}{6}$ .

1. Trouver les valeurs de  $u_0$  pour lesquelles la suite est constante.

2. Montrer que les intervalles  $I_1 = [0, 2[$ ,  $I_2 = ]2, 4[$  et  $I_3 = ]4, +\infty[$  sont stables par  $f$ , c'est à dire  $f(I) \subset I$ .  
En déduire que si  $u_0$  appartient à un de ces intervalles, tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.

3. On suppose que  $u_0 \in I_2$ . Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ . En déduire qu'elle est convergente puis déterminer sa limite.

## Exercice 6 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation  $329x - 217y = 21$ .

2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $329x - 217y = 21$ .



## Exercice 7 (2 points)

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres :  $A = 12825$  et  $B = 9240$ .

2. Sans utiliser l'algorithme d'Euclide, en déduire leur pgcd.

## Exercice 8 (1,5 points)

Déterminer le reste de la division euclidienne de  $751^{157}$  par 11.