EPITA

Mathématiques

Contrôle (S1)

octobre 2019

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Contrôle 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Consignes :

– vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

– toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/ 20.

Exercice 1 (2 points)

Pour tous réels x et y, soit $P(x, y)$ la proposition $x + y^2 = 0$. Les assertions suivantes sont-elle vraies ? Justifier votre réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$

3. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$

4. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$

Exercice 2 (4 points)

1. Soit $f : x \longmapsto \arctan\big(\arctan(x)\big)$. Déterminer $f'(x)$.

2. Via une double intégration par parties, déterminer $J = \displaystyle\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(x^2+x\right)\mathrm{d}x$.

3. Via le changement de variable $u = e^x$, déterminer $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 (2 points)

Soient $E = \mathbb{N}$ et $F = 2\mathbb{N}$ où $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs.

Soient $f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 2x+4 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{lcl} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{2}+2 \end{array} \right.$.

1. f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez votre réponse.

2. g est-elle injective ? Surjective ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 (1,5 points)

Sur $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ on définit la relation R définie par $(a,b)R(a',b') \iff ab' = ba'$. Montrer que R est une relation d'équivalence.

Exercice 5 (3 points)

1. Un sac contient n balles de tennis de table numérotées de 1 à n. On tire successivement p balles du sac en remettant chaque fois dans ce dernier la balle qu'on vient de sélectionner. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. Même question si à chaque tirage, on ne remet pas la balle sélectionnée dans le sac.

3. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « table » et « tableau ».

4. Imaginons une association de l'EPITA constitué de n membres ($n \in \mathbb{N}^*$). Appelons bureau le choix d'un ensemble de conseillers dont le nombre peut aller de 1 à n ainsi qu'un président faisant partie des conseillers. Déterminer le nombre de tels bureaux.

Exercice 6 (3 points)

Dans cet exercice, l'application numérique exacte n'est pas demandée : si les résultats s'expriment sous forme de fractions, on demande juste de déterminer explicitement les numérateurs et les dénominateurs.

Un sac contient 2 balles blanches, 3 vertes et 5 rouges. On pioche simultanément 3 balles. Déterminer la probabilité, lors du piochage de ces 3 balles, d'avoir

1. une seule couleur ?

2. les trois couleurs parmi ces 3 balles ?

3. au moins deux couleurs ?

Exercice 7 (2 points)

On jette un dé à 8 faces capricieux dont on appelle X le résultat du jet. On obtient la situation suivante :

k (n° obtenu après le jet)	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	0,05	0,1	0,05	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1

Les événements « X pair » et « $X \leqslant 4$ » sont-ils indépendants ? Incompatibles ?

Exercice 8 (3 points)

Dans une petite ville de province, 10000 personnes sont âgés de plus de 65 ans. 60% d'entre elles ont pris la précaution de se faire vacciner contre la grippe.
Au cours de l'hiver, les médecins observent que 10% d'entre elles ont attrapé la grippe. Parmi celles-ci, 6% étaient vaccinées.

1. Déterminer la probabilité d'attraper la grippe
   a. pour une personne vaccinée.

b. pour une personne non vaccinée.
N.B. : on demande le résultat sous forme de fraction.

2. Notons c le résultat de la question 1)b) précédente. Déterminer, en fonction de c, le taux de vaccination des personnes âgées pour qu'il y ait 500 personnes malades de la grippe ?