EPITA

Mathématiques

Contrôle (S1)

octobre 2019

Nom:		
Prénom :		
Classe:		
NOTE:		

Contrôle 1

Durée : trois heures

Documents et calculatrices non autorisés

Consignes:

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

Exercice 1 (2 points)

Pour tous réels x et y, soit P(x,y) la proposition $x+y^2=0$. Les assertions suivantes sont-elle vraies? Justifier votre réponse.

- 1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$
- 2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$
- 3. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$
- 4. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$

Exercice 2 (4 points)

1. Soit $f: x \longmapsto \arctan(\arctan(x))$. Déterminer f'(x).

2. Via une double intégration par parties, déterminer $J = \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(x^2 + x\right) dx$.

3. Via le changement de variable $u=e^x$, déterminer $K=\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 3 (2 points)

Soient $E = \mathbb{N}$ et $F = 2\mathbb{N}$ où $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs.

Soient $f: \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 2x+4 \end{array} \right.$ et $g: \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \frac{x}{2}+2 \end{array} \right.$

1. f est-elle injective? Surjective? Justifiez votre réponse.

2. g est-elle injective? Surjective? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 (1,5 points)

 $\text{Sur } E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ on définit la relation } R \text{ définie par } (a,b) \\ R(a',b') \Longleftrightarrow ab' = ba'. \text{ Montrer que } R \text{ est une relation d'équivalence.}$

Exercice 5 (3 points)

1. Un sac contient n balles de tennis de table numérotées de 1 à n. On tire successivement p balles du sac en remettant chaque fois dans ce dernier la balle qu'on vient de sélectionner. Quel est le nombre de tirages possibles?

2.	Même question si à chaque tirage, on ne remet pas la balle sélectionnée dans le sac.
3.	Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « table » et « tableau ».
	Imaginons une association de l'EPITA constitué de n membres $(n \in \mathbb{N}^*)$. Appelons bureau le choix d'un ensemble conseillers dont le nombre peut aller de 1 à n ainsi qu'un président faisant partie des conseillers. Déterminer le nombre de tels bureaux.
Exe	rcice 6 (3 points)
	cet exercice, <u>l'application numérique exacte n'est pas demandée</u> : si les résultats s'expriment sous form actions, on demande juste de déterminer explicitement les numérateurs et les dénominateurs.
	c contient 2 balles blanches, 3 vertes et 5 rouges. On pioche simultanément 3 balles. Déterminer la probabilité, lors dage de ces 3 balles, d'avoir
1.	une seule couleur?
2.	les trois couleurs parmi ces 3 balles?

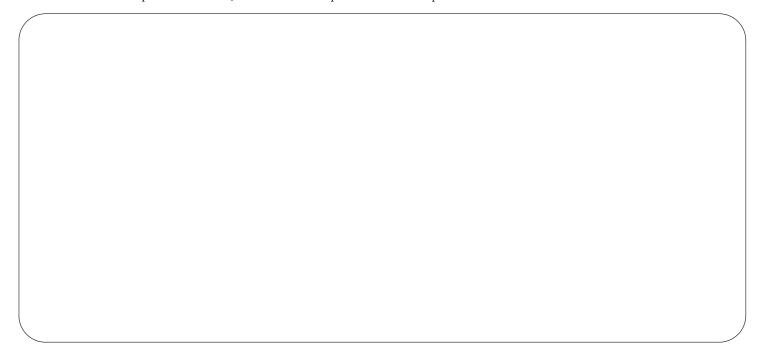
3.	au moins deux couleurs?

Exercice 7 (2 points)

On jette un dé à 8 faces capricieux dont on appelle X le résultat du jet. On obtient la situation suivante :

k (n° obtenu après le jet)	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X=k)	0,05	0,1	0,05	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1

Les événements « X pair » et « $X \leq 4$ » sont-ils indépendants? Incompatibles?



Exercice 8 (3 points)

Dans une petite ville de province, 10000 personnes sont âgés de plus de 65 ans. 60% d'entre elles ont pris la précaution de se faire vacciner contre la grippe.

Au cours de l'hiver, les médecins observent que 10% d'entre elles ont attrapé la grippe. Parmi celles-ci, 6% étaient vaccinées.

- 1. Déterminer la probabilité d'attraper la grippe
 - a. pour une personne vaccinée.

ns c le résultat de la question 1)b) précédente. Déterminer, en fonction de c, le taux de vaccination de pour qu'il y ait 500 personnes malades de la grippe?	N.B.: on den	nande le résultat sous :	forme de fraction.			
	ong a la másurli.	et de le question 1\b\	précédants Dét	ninon on famatica	lo a lo torre do	ainstion do-
				imer, en ionction (ie c , ie taux de vac	cmation des
	- 1 0	1	O FF			