

Corrigé du Partiel

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (2 points)

Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_n) bornée : $\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$
 (u_n) n'est pas bornée : $\forall M, m \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n < m$ ou $u_n > M$
2. (u_n) est monotone : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ ou $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$

Exercice 2 (3 points)

Soit (u_n) une suite réelle telle que : (u_{2n}) converge vers un réel l et (u_{3n}) converge vers un réel l' .

1. $(u_{6n}) = (u_{2(3n)})$ est une suite extraite de (u_{2n}) donc (u_{6n}) converge vers l .
 $(u_{6n}) = (u_{3(2n)})$ est une suite extraite de (u_{3n}) donc (u_{6n}) converge vers l' .
On en conclut que $l = l'$
2. Au delà de n'importe quel rang, on peut trouver des termes de (u_n) qui n'appartiennent ni à (u_{2n}) ni à (u_{3n}) (en particulier les termes de la suite (u_{6n+1})) donc on ne peut pas conclure sur la convergence de (u_n) .

Exercice 3 (2 points)

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 10u_n + 27$.

1. $u_0 = 10u_0 + 27 \Leftrightarrow u_0 = -3$. La suite est constante si $u_0 = -3$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 10u_n + 27 + 3 = 10(u_n + 3) = 10v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 10.
3. $u_0 = 1 \Rightarrow v_0 = 1 + 3 = 4$ donc $v_n = 4 \cdot 10^n$ et $u_n = v_n - 3 = 4 \cdot 10^n - 3$

Exercice 4 (2 points)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2 - (n+1)}{(n+1)!} \leq 0 \text{ car } n \geq 1 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow{+\infty} 0.$$

(u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 5 (4,5 points)

Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{x^2 + 8}{6}$.

1. u_n est constante ssi $u_0 = \frac{u_0^2 + 8}{6} \Leftrightarrow u_0^2 - 6u_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow (u_0 - 2)(u_0 - 4) = 0 \Leftrightarrow u_0 = 2$ ou $u_0 = 4$.

2. On établit le tableau de variation de f .

	0	2	4	$+\infty$
f'	0	+	+	+
f	$\frac{4}{3}$	2	4	$+\infty$

On voit que $f(I_1) = [\frac{4}{3}, 2[\subset I_1$, $f(I_2) =]2, 4[= I_2$ et $f(I_3) =]4, +\infty[= I_3$ donc I_1 , I_2 et I_3 sont stables par f .
Si u_0 appartient à un de ces intervalles I .

Alors, $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I \implies u_{n+1} = f(u_n) \in I$ donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

3. $u_0 \in I_2$ donc, d'après 2., $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I_2$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 6u_n + 8}{6} < 0 \text{ car } u_n \text{ est compris entre les deux racines du polynôme.}$$

(u_n) est bornée et décroissante donc convergente.

Soit l sa limite. On sait que $f(l) = l$ donc $l = 2$ ou $l = 4$.

Comme (u_n) est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 < u_n \leq u_0 < 4 \implies 2 \leq l \leq u_0 < 4$ donc $l = 2$.

Exercice 6 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $(E) : 329x - 217y = 21$.

q	r	u	v
	329	1	0
	217	0	1
1	112	1	-1
1	105	-1	2
1	7	2	-3
15	0		

Donc $329 \wedge 217 = 7$ et $(E_p) : 329 \times 2 - 217 \times 3 = 7$.

En divisant tout par 7, on obtient : $(E) \iff 47x - 31y = 3$ avec $47 \wedge 31 = 1$

$$(E_p) \iff 47 \times 2 - 31 \times 3 = 1 \iff 47 \times 6 - 31 \times 9 = 3$$

Une solution particulière de (E) est $(6, 9)$.

2. En soustrayant (E_p) à (E) on a : $(E) \iff 47(x - 6) = 31(y - 9)$

Donc : $47 \mid 31(y - 9)$ et $47 \wedge 31 = 1 \implies$ (d'après le théorème de Gauss) $47 \mid (y - 9) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y - 9 = 47k$

En remplaçant dans (E) on obtient : $47(x - 6) = 31 \times 47k \implies x - 6 = 31k$.

On vérifie que toutes les paires d'entiers du type $(6 + 31k, 9 + 47k), k \in \mathbb{Z}$ sont solution de (E) :

$$47(6 + 31k) - 31(9 + 47k) = 47 \times 6 - 31 \times 9 = 3$$

$$S = \{(6 + 31k, 9 + 47k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 7 (2 points)

En utilisant les critères de divisibilité, on obtient :

$$A = 12825 = 19 \times 5^2 \times 3^3$$

$$B = 9240 = 11 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2^3.$$

On en déduit que le pgcd de A et B est : 15.

Exercice 8 (1,5 points)

Déterminer le reste de la division euclidienne de 751^{157} par 11.

Grâce aux critères de divisibilité ou grâce à une division euclidienne, on obtient : $751 \equiv 3[11]$.

Comme 11 est premier, d'après le petit théorème de Fermat : $751^{(11-1)} \equiv 1[11]$ soit $751^{10} \equiv 1[11]$.

Ainsi $751^{157} = 751^{150} \times 751^7 \equiv 1 \times 3^7[11]$.

Or $3^5 \equiv 1[11]$ donc $751^{157} \equiv 3^5 \times 3^2[11] \equiv 9[11]$.

Comme $0 \leq 9 < 11$, on conclut que le reste de la division de 751^{157} par 11 est 9.