

TD 5

Stabilité des langages rationnels

Version du 26 septembre 2016

Exercice 1 – Négation d'expression rationnelle

Posons $\Sigma = \{a, b\}$. Soit L le langage dénoté par l'expression rationnelle $a^*(ba^*ba^*ba^*)^*$. Notre but est de construire une expression rationnelle dénotant le langage complémentaire $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$.

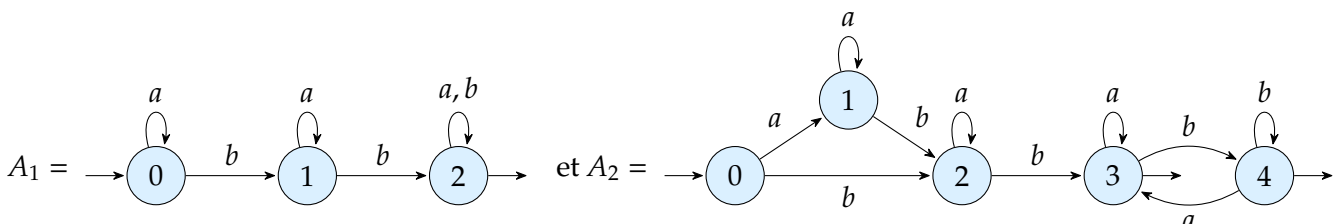
1. \bar{L} est-il forcément rationnel ? Justifiez votre réponse.
2. Proposez un automate fini déterministe A_L reconnaissant L .
3. Donnez \bar{A}_L , l'automate complémentaire de A_L .
4. Appliquez l'algorithme de Brzozowski et McCluskey présenté en cours pour construire l'expression rationnelle correspondant à l'automate \bar{A}_L .
5. Le complémentaire construit est-il toujours valide si $\Sigma = \{a, b, c\}$? Dans la négative, que faut-il changer à notre procédure de complémentation d'expression rationnelle pour qu'il le soit ?

Exercice 2 – Relations entre langages rationnels

1. Soit deux langages rationnels L_1 et L_2 tels que $L_2 \subset L_1$. Le langage $L_1 \setminus L_2$ est-il rationnel ?
2. Soient deux langages L_1 et L_2 tels que $L_2 \subset L_1$. Si l'on sait que L_2 est rationnel, peut-on dire que L_1 l'est aussi ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 – Intersection de langages rationnels

On considère les deux automates suivants :



L'objectif est de montrer que ces deux automates sont équivalents en calculant $\overline{L(A_1)} \cap L(A_2)$ et $L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}$.

1. Que doivent valoir $\overline{L(A_1)} \cap L(A_2)$ et $L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}$ si les automates sont équivalents ?
2. Calculez \bar{A}_1 et \bar{A}_2 . Vous émonderez ces automates.
3. Pour deux automates non-déterministes $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ et $A' = (\Sigma, Q', Q'_0, F', \delta')$, le produit synchronisé $A \& A'$ est l'automate $(\Sigma, Q^\&, Q_0^\&, F^\&, \delta^\&)$ défini par :
 - $Q^\& = Q \times Q'$,
 - $Q_0^\& = Q_0 \times Q'_0$,
 - $F^\& = F \times F'$,
 - $\delta^\& = \{((s, s'), l, (d, d')) \in Q^\& \times \Sigma \times Q^\& \mid (s, l, d) \in \delta \text{ et } (s', l, d') \in \delta'\}$.

Avec cette définition il est facile de voir que les mots reconnus par $A \& A'$ sont des mots à la fois de A et de A' . En fait on a $L(A \& A') = L(A) \cap L(A')$.

Utilisez cette définition pour calculer les automates $A_1 \& \overline{A_2}$ et $A_2 \& \overline{A_1}$.

4. Qu'en conclure sur l'équivalence de A_1 et A_2 ?
5. Utilisez l'algorithme de minimisation présenté en cours pour réduire l'automate A_2 . Vous indiquerez la partition des états de l'automate à chaque itération de l'algorithme.

Exercice 4 – Un langage difficile à définir

1. Posons $\Sigma = \{a, b\}$. Soit L un langage rationnel sur Σ . En utilisant des notations ensemblistes (sur les langages) ou des expressions rationnelles, comment définiriez-vous le langage L' rassemblant tous les mots qui possèdent **exactement un** facteur dans le langage L ?

Par exemple si $L = \{ab, ba\}$, alors $\underline{a}ab\underline{b} \in L'$, $\underline{b}bb\underline{b}a \in L'$, mais $\underline{a}ab\underline{b}ba \notin L'$.

(Indice : essayez la différence ensembliste.)

2. Ce langage est-il rationnel ?