EPITA / S_2 Corrigé + Barème **Année: 2020/2021**

NOM : .... PRENOM : .... GROUPE : ....

Partiel de Physique – S_2

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet. Si vous n'avez pas assez de place, écrivez au verso (merci d'indiquer de tourner la page).

QCM (Sans points négatifs) (4 points)

Entourer la bonne réponse

0,5 pt / quest

1- La résistance thermique s'exprime en :
   a) $K.W^{-1}$
   b) $W.K^{-1}$
   c) $W.m^{-1}.K^{-1}$
   d) $m.K.W^{-1}$

2- Si l'on connaît la relation de Mayer ($c_p - c_v = R$) et que l'on sait que $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, on peut en déduire que :

a) $c_p = \frac{\gamma.R}{\gamma-1}$

b) $c_p = \frac{R}{\gamma-1}$

c) $c_p = \frac{\gamma^2.R}{\gamma-1}$

3- Lors d'un cycle thermodynamique, il n'est **pas** possible d'écrire à propos du système que l'on étudie :

a) $W_{cycle} + Q_{cycle} = 0$
b) $\Delta H_{cycle} = 0$
c) $Q_{cycle} = 0$

4- Laquelle parmi les grandeurs suivantes n'est pas une fonction d'état ?
   a) Enthalpie H
   b) Energie interne U
   c) Quantité de chaleur Q

5- Le premier principe de la thermodynamique à l'échelle infinitésimal est :
   a) $dU = dQ - VdP$
   b) $dU = dQ + VdP$
   c) $dU = dQ + PdV$
   d) $dU = \delta Q - PdV$

6- Laquelle de ces grandeurs suivantes est intensive ?
   a) Masse
   b) Volume
   c) Température

7- Un équilibre thermique entre un système de température T1 et un système de température T2 est atteint lorsque :

a) T1=T2
b) T1 et T2 tendent vers l'infini
c) T1<T2

8- Dans le cas isobare, la chaleur Q est égale à la variation d'une fonction d'état : l'enthalpie H. Si le gaz qui subit la transformation est parfait, la variation d'enthalpie ΔH est égale à :

a) $\Delta H = n.c_v.\Delta T$
b) $\Delta H = n.c_T.\Delta T$
c) $\Delta H = n.c_p.\Delta T$

Préambule

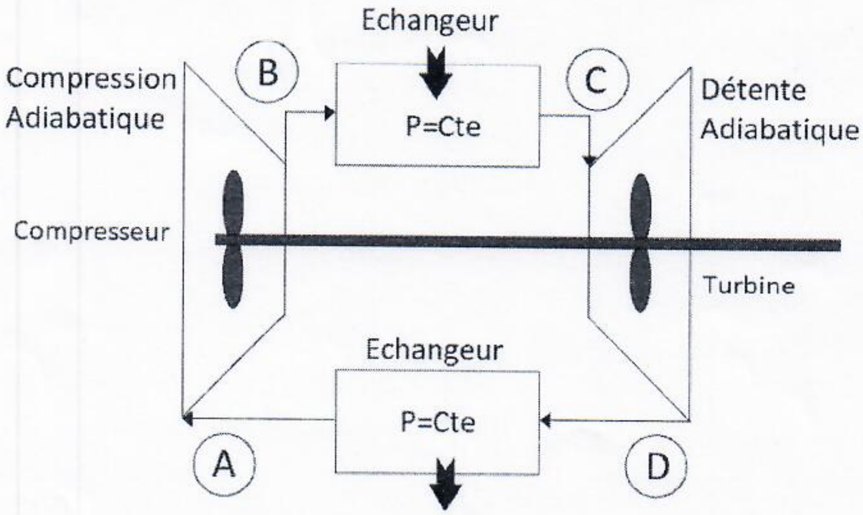
On rappelle que :

$c_p - c_v = R$ (ou $C_p - C_v = nR$)

et $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

Exercice 1 *Le cycle de Brayton (9 points)*

Un gaz parfait circule dans une installation. Il échange du travail avec l'extérieur dans le compresseur et la turbine. Le travail fourni par le passage du gaz dans la turbine sert d'une part à faire fonctionner le compresseur (turbine et compresseur monté sur le même axe) et d'autre part à produire de l'électricité.
Les transferts thermiques ont lieu dans des échangeurs. Le fluide, ici un gaz d'hélium, décrit le cycle de Brayton. Ce cycle est constitué de deux transformations isobares et de deux transformations adiabatiques :

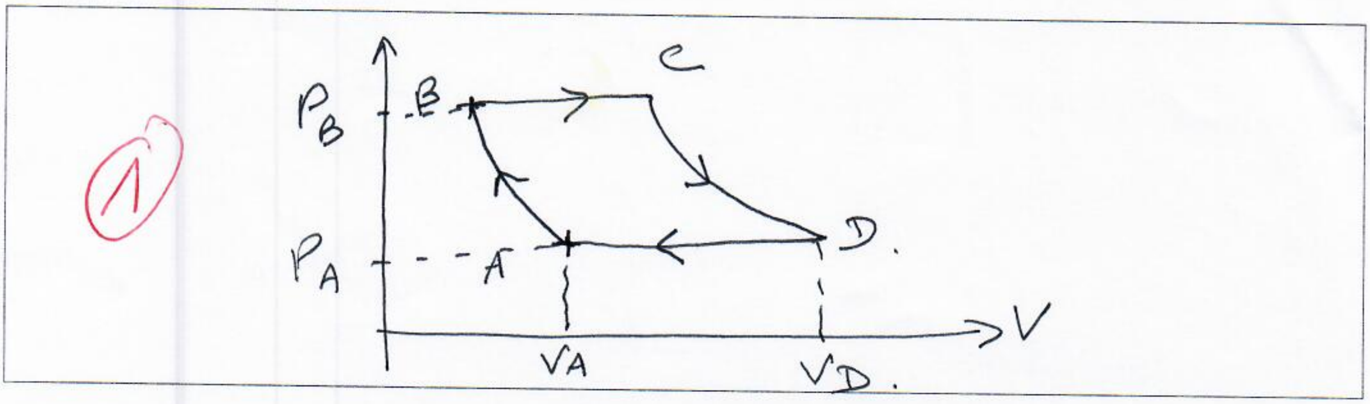


- Compression adiabatique réversible du point A avec une température $T_A = 300\ K$ et une pression $P_A = 20 \times 10^5\ Pa$ vers le point B à la pression $P_B = 80 \times 10^5\ Pa$
- Détente isobare du point B vers le point C à la température $T_C = 1300\ K$
- Détente adiabatique de C vers D
- Compression isobare de D vers A

Toutes les transformations sont supposées réversibles.

On donne pour 1 mol d'hélium, $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_P = \frac{5}{2}R$, $R = 8.314\,J.K^{-1}.mol^{-1}$

1) Représenter le cycle ABCDA dans un diagramme de Clapeyron.



2) Pour une transformation adiabatique réversible, montrer que $\frac{T}{P^{\beta}} = Constante$ avec β en fonction de γ.

adiabatique : Loi de Laplace $PV^{\gamma} = cste$ *

or $PV = nRT$ (G.P) $\Rightarrow V = \frac{nRT}{P}$.

* $\Rightarrow P.\left(\frac{nRT}{P}\right)^{\gamma} = cste \Rightarrow P^{1-\gamma}.T^{\gamma} = cste$.

1 $\Rightarrow \left[\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = cste\right] \Rightarrow \left[\frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = cste\right]$ d'où $\boxed{\beta = \frac{\gamma-1}{\gamma}}$

3) En déduire T_B et T_D. Faire l'application numérique. On donne $4^{0.4} \approx 1.75$ et $\frac{52}{7} \approx 7.42$.

$\gamma = 5/3 \Rightarrow \beta = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{5/3-1}{5/3} = \frac{2}{5} = 0,4$.

$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

1

• $\frac{T_A}{P_A^{0,4}} = \frac{T_B}{P_B^{0,4}} \Rightarrow \boxed{T_B = T_A . \frac{P_B^{0,4}}{P_A^{0,4}} = 300\left(\frac{8}{2}\right)^{0,4} = 525\,K}$

• $\frac{T_D}{(P_D)^{\beta}} = \frac{T_C}{(P_C)^{\beta}} \Rightarrow T_D = T_C.\left(\frac{P_D}{P_C}\right)^{\beta} = T_C.\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\beta} = \frac{1300}{1,75} = \frac{52}{7}.100 = 742\,K$

4) Pour chaque transformation, donner $\Delta U, Q$ et W.

Transf	W	Q	$\Delta U = W + Q = nc_v\Delta T$
$A \to B$	$W_{AB} = \Delta U_{AB} = C_v T_A (4^{\beta} - 1)$	$Q_{AB} = 0$ (adiabat)	$\Delta U_{A\to B} = C_v(T_B - T_A) = C_v(T_A.4^{\beta} - T_A)$

Transf	W	Q	$\Delta U = n c_v \Delta T$ (G.P)
$B \to C$ isobare	$W = \Delta U - Q$. $W_{BC} = (C_v - C_p)(T_C - 4^{\beta} T_A)$	$Q = C_p(T_C - T_B) = C_p(T_C - 4^{\beta} T_A)$	$\Delta U_{BC} = C_v(T_C - T_B) = C_v(T_C - 4^{\beta} T_A)$.
$C \to D$ adiabat	$W_{CD} = \Delta U_{CD}$. $= c_v T_C(4^{\gamma} - 1)$	$Q_{CD} = 0$	$\Delta U_{CD} = C_v(T_D - T_C) = C_v T_C(4^{\beta} - 1)$
$D \to A$ isobare	$W = \Delta U - Q$. $W = (C_v - C_p)(T_A - 4^{-\beta} T_C)$	$Q = C_p(T_A - T_D)$ $Q = C_p(T_A - 4^{-\beta} T_C)$	$\Delta U = C_v(T_A - T_D)$ $\Delta U = C_v(T_A - 4^{-\beta} T_C)$

2

5) En déduire Q_{cycle} et W_{cycle}.
(S'assurer que W_{cycle} ne s'écrit qu'en fonction de C_p et des températures T_A et T_C.)

$$Q_{cycle} = Q_{BC} + Q_{DA} = C_p\left(T_C - 4^{\beta} T_A + T_A - 4^{-\beta} T_C\right).$$
$$= C_p\left[T_A(1 - 4^{\beta}) + T_C(1 - 4^{-\beta})\right].$$
$$\Delta U_{cycle} = 0 \Rightarrow W_{cycle} = -Q_{cycle} = C_p\left(T_A(4^{\beta} - 1) + T_C(4^{-\beta} - 1)\right)$$

2

6) Le rendement du cycle s'écrit $\eta = -\frac{W_{cycle}}{Q_{B\to C}}$. Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $\eta = 1 - \frac{1}{r_P^{\beta}}$ avec $r_p = \frac{P_B}{P_A}$. Faire l'application numérique.

$$\eta = -\frac{W_{cycle}}{Q_{BC}} = -\frac{\cancel{C_p}\left[T_A(4^{\beta} - 1) + T_C(4^{-\beta} - 1)\right]}{\cancel{C_p}\left[T_C - 4^{\beta} T_A\right]}.$$
$$= +\frac{T_A . 4^{\beta} - T_A + T_C 4^{-\beta} - T_C}{4^{\beta} T_A - T_C} = \frac{T_A . 4^{\beta} - T_C}{T_A . 4^{\beta} - T_C} + \frac{T_C 4^{-\beta} - T_A}{T_A 4^{\beta} - T_C}$$
$$\boxed{\eta = 1 + \frac{4^{-\beta} T_C - T_A}{4^{\beta}(-T_C 4^{-\beta} + T_A)} = 1 - \frac{1}{4^{\beta}} = 1 - 4^{-\beta}}$$
$$= 0{,}42.$$

2

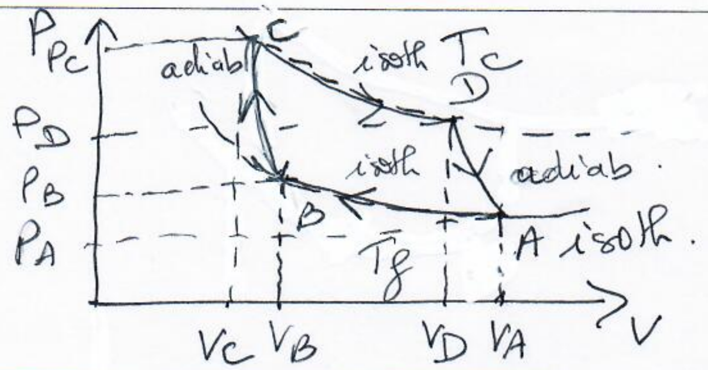
Exercice 2 Le cycle de Carnot (8 points)

On considère une mole de gaz parfait ($n = 1\ mol$), initialement à l'état ($P_A, V_A, T_A = T_f$), qui subit les transformations suivantes (toutes réversibles) :

- Transformation isotherme amenant le gaz dans l'état $(P_B, V_B < V_A, T_B = T_f)$
- Transformation adiabatique amenant le gaz dans l'état $(P_C, V_C, T_C = T_c > T_f)$
- Transformation isotherme amenant le gaz dans l'état $(P_D, V_D > V_C, T_D = T_c)$
- Transformation adiabatique ramenant le gaz dans l'état initial

1) Représenter l'allure du cycle décrit par le gaz dans le diagramme de Clapeyron (P,V).

0,5



2) Utiliser la loi de Laplace pour montrer les relations suivantes :

$T_f V_B^{\gamma-1} = T_c V_C^{\gamma-1}$ (adiabatique de B à C)

$T_f V_A^{\gamma-1} = T_c V_D^{\gamma-1}$ (adiabatique de D à A)

$PV^\gamma = cste$ (Loi de Laplace).

$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow \frac{nRT}{V} \cdot V^\gamma = cste$

1 d'où $TV^{\gamma-1} = cste$

$B \rightarrow C \quad T_f \cdot V_B^{\gamma-1} = T_c \cdot V_C^{\gamma-1}$ (2)

$D \rightarrow A \quad T_f \cdot V_A^{\gamma-1} = T_c \cdot V_D^{\gamma-1}$ (1)

3) En déduire que $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$

Relations (1) et (2) de la question (2)

1 $\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_D}{V_C}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}}$

4) Exprimer la quantité de chaleur et le travail pour chaque transformation du cycle en fonction de $R, T_f, T_c, V_A, V_B, V_C$ et V_D.

Transf. $A \rightarrow B$: isoth : $\Delta U = nc\Delta T = 0 \Rightarrow Q_{AB} = -W_{AB}$

0,5 $\boxed{W_{AB} = -nRT_f \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$

$$Q_{AB} = -W_{AB} = nRT_f \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) < 0 \quad 0{,}5$$

$\dfrac{B \to C}{(n=1)}$ adiab $\begin{cases} Q_{BC} = 0. & 0{,}5 \\ W_{BC} = \Delta U_{BC} = C_V (T_C - T_B). & 0{,}5 \end{cases}$

- $\dfrac{C \to D}{(n=1)}$ isoth. $(\Delta U_{CD} = 0)$ $\begin{cases} W_{CD} = -RT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right). & 0{,}5 \\ Q_{CD} = -W_{CD} = RT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) > 0 & 0{,}5 \end{cases}$

$\dfrac{D \to A}{(n=1)}$ adiab $\begin{cases} Q_{DA} = 0. & 0{,}5 \\ W_{DA} = \Delta U_{DA} = C_V (T_A - T_D). \\ \quad = \frac{R}{\gamma - 1}(T_f - T_c) & 0{,}5 \end{cases}$

5) En déduire le rendement d'expression $r = \frac{|W_{cycle}|}{Q_{absorbée}}$ en fonction de T_c et T_f.

0,5 $Q_{absorbée} = Q_{CD}$ car $Q_{AB} < 0$ et $Q_{CD} > 0$.

$$r = \frac{|W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}|}{Q_{CD}}.$$

$$0{,}5 \quad = \frac{\left|-RT_f \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + \cancel{\frac{R}{\gamma-1}(T_c - T_f)} - RT_c \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) + \cancel{\frac{R}{\gamma-1}(T_f - T_c)}\right|}{RT_c \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}$$

or $\dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{V_D}{V_C}$

$$r = \frac{\left|-R \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)[T_f - T_c]\right|}{RT_c \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)} \quad \text{avec } \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}.$$

$$0{,}5 \quad r = \frac{R \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) |T_f - T_c|}{RT_c \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)} = \boxed{\frac{T_c - T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}}$$