

EPITA

Mathématiques

Partiel

Janvier 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points qui seront ramenés à 20 par une règle de trois.

Consignes :

- Documents et calculatrices interdits.
 - Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
 - Ne pas écrire au crayon de papier.
-

Exercice 1 (6 points)

A et B jouent avec un jeu de 32 cartes au jeu suivant :

A tire une main de 5 cartes au hasard dans le jeu, puis B tire une carte au hasard parmi les 5 cartes de la main de A.

B gagne s'il tire un valet. On appelle Ω l'univers des possibles.

Si les probabilités trouvées s'expriment avec des combinaisons ou des arrangements, il ne vous est pas demandé de les calculer.

- a. Déterminer la probabilité que la main tirée par A contienne exactement 3 valets.

- b. Déterminer la probabilité que la main tirée par A contienne exactement 3 valets et 3 piques.

- c. Soit $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$. On appelle V_k l'évènement : "La main tirée par A contient exactement k valet(s)".
Rappeler, sans la démontrer, ce que signifie l'affirmation : $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ forment une partition de Ω .

Dans les questions d. et e., seule la formule théorique est attendue et pas d'application numérique.

- d. On appelle BV l'évènement : "B tire un valet". En utilisant la partition ci-dessus, écrire la formule des probabilités totales pour $P(BV)$.

- e. À l'aide de la formule de Bayes, exprimer la probabilité qu'il y ait eu exactement 3 valets parmi les 5 cartes tirées par A, sachant que B tire un valet.

Exercice 2 (3 points)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, et X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω .

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

Déterminer son espérance, sa variance ainsi que $P(X = 3)$ sous forme de fraction simplifiée.

2. Y suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 10 \rrbracket$. Déterminer son espérance.

Exercice 3 (3 points)

En utilisant le petit théorème de Fermat dont vous rappellerez l'énoncé, déterminer le reste de la division euclidienne de 2021^{362} par 19.

Exercice 4 (5 points)

On appelle (E) l'équation : « $630x - 195y = 30 ; \quad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ » .

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E).

2. En utilisant le lemme de Gauss, déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 5 (3 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X - 1)(X - 2)$ divise $P(X) = n((X - 1)^{n+1} - X) + ((X - 1)^n - X) + (n + 1)$.

2. Montrer que -1 est racine de $Q(X) = (2n + 1)X^{2n+3} + (2n + 3)X^{2n+2} + (2n + 3)(X + 1) - 2$.
Déterminer sa multiplicité exacte.

Exercice 6 (3 points)

On considère le polynôme $R(X) = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - X - 6$.

1. Montrer que 1 et -2 sont racines de R .

2. En vous aidant d'une division euclidienne, factoriser R en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 (4 points)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + v_n}{5} \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{array} \right.$

1. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - v_n$.

Montrer que (w_n) est géométrique, déterminer w_n en fonction de n , déterminer son signe et sa limite en $+\infty$.

2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8 (3 points)

Comparer les couples suivants, à l'aide des comparateurs de Landau \sim , $= o(\cdot)$, $= O(\cdot)$, en citant toutes les comparaisons possibles. Justifiez vos réponses.

1. $u_n = n^2 + 3n$ et $v_n = 2n^2 + 3$

2. $u_n = n^2$ et $v_n = n \sin(n)$

3. $u_n = \ln(n) + e^n + n$ et $v_n = \ln(n^2) + e^n + 2$