

Corrigé du contrôle

Exercice 1 (2 points)

1. Fausse : prendre par exemple $x = y = 1$.
2. Fausse : prendre par exemple $x = 1$.
3. Vraie : il suffit de prendre $x = -y^2$.
4. Vraie : prendre $x = y = 0$.

Exercice 2 (3,5 points)

1. $f'(x) = \frac{1}{(1 + \arctan^2(x))(1 + x^2)}.$

2. Via une IPP en posant $u(x) = x^2 + x$ et $v'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, on a

$$J = 2 \left[(x^2 + x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^\pi - 2 \int_0^\pi (2x + 1) \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \left(\pi^2 + \pi - \int_0^\pi (2x + 1) \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \right)$$

Via une nouvelle IPP en posant $u(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, on a

$$\int_0^\pi (2x + 1) \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2 \left[(2x + 1) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^\pi + 4 \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 + 8 \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^\pi = 10$$

Finalement $J = 2(\pi^2 + \pi - 10)$.

3. En posant $u = e^x$, on a $x = \ln(u)$ donc $dx = \frac{du}{u}$. Donc

$$K = \int_1^e \frac{1}{1 + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int_1^e \frac{du}{u + 1} = [\ln(u + 1)]_1^e = \ln(e + 1) - \ln(2)$$

Exercice 3 (2 points)

1. f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par f .
 f injective car si $(x, y) \in E^2$ vérifie $f(x) = f(y)$ alors $2x + 4 = 2y + 4$ donc $x = y$.
2. g n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédent par g .
 g injective car si $(x, y) \in F^2$ vérifie $g(x) = g(y)$ alors $\frac{x}{2} + 2 = \frac{y}{2} + 2$ donc $x = y$.

Exercice 4 (1,5 points)

R est réflexive. En effet, soit $(a, b) \in E$. Alors $(a, b)R(a, b)$ vu que $ab = ba$.

R est symétrique. En effet soient $(a, b) \in E$ et $(a', b') \in E$ tels que $(a, b)R(a', b')$. Alors $ab' = ba'$ donc $a'b = b'a$ d'où $(a', b')R(a, b)$.

R est transitive. En effet, soient $(a, b) \in E$, $(a', b') \in E$ et $(a'', b'') \in E$ tels que $(a, b)R(a', b')$ et $(a', b')R(a'', b'')$.

Alors $ab' = ba'$ et $a'b'' = b'a''$ donc $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$.

Ainsi $\frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$ donc $(a, b)R(a'', b'')$.

Exercice 5 (3 points)

1. n^p .
2. $A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$.
3. Les anagrammes du mot « table » correspondent à toutes les permutations de $E = \{t, a, b, l, e\}$. On a donc $5! = 120$ anagrammes du mot « table ».
Même principe pour le mot « tableau » sauf que la lettre « a » est répétée deux fois donc le nombre d'anagrammes du mot « tableau » est $\frac{5!}{2!} = 60$.
4. Il y a n façons de choisir le président parmi les n membres de l'association puis ensuite autant de façons de choisir les (éventuels) autres conseillers que de parties dans l'ensemble à $n-1$ éléments de tous les autres membres de l'association soit au total $n2^{n-1}$ bureaux possibles.

Exercice 6 (3 points)

1. Obtenir 3 balles d'une seule couleur signifie obtenir 3 rouges (parmi les 5) OU 3 vertes (parmi les 3).
Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$.
2. Obtenir les trois couleurs parmi ces 3 balles signifie obtenir 1 rouge (parmi les 5) ET 1 verte (parmi les 3) ET 1 blanche (parmi les 2).
Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$.
3. L'événement « au moins deux couleurs » est l'événement contraire de l'événement « une seule couleur ».
Ainsi la probabilité cherchée est $1 - \frac{11}{120}$.

Exercice 7 (2 points)

Notons A l'événement « X pair » et B l'événement « $X \leq 4$ ».

$$P(A) = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,7.$$

$$P_B(A) = \frac{0,1 + 0,2}{0,7} = \frac{3}{7} \neq P(A) \text{ donc } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}$$

A et B ne sont pas incompatibles car par exemple $(X = 2) \in A \cap B$.

Exercice 8 (3 points)

Notons M l'événement « personnes atteintes de la grippe » et V l'événement « personnes vaccinées ».

Via l'énoncé, on a donc $P(V) = 0,6$; $P(M) = 0,1$ et $P_M(V) = 0,06$.

1. a. $P_V(M) = \frac{P_M(V)P(M)}{P(V)} = \frac{0,06 \times 0,1}{0,6} = 0,01 = 1\%$.
b. $P_{\overline{V}}(M) = \frac{P_M(\overline{V})P(M)}{P(\overline{V})} = \frac{0,94 \times 0,1}{0,6} \simeq 0,156 \simeq 15,6\%$.
2. On souhaite que $P(M) = \frac{500}{10000} = 0,05 = 5\%$.

Notons $p = P(V)$.

On a $P(M) = P_V(M)P(V) + P_{\overline{V}}(M)P(\overline{V})$ soit

$$0,05 = 0,01p + c(1-p)$$

$$\text{Ainsi } p = \frac{c - 0,05}{c - 0,01}.$$