

Contrôle TD 1 (45 minutes)

(CORRECTION NON OFFICIELLE)

Nom :

Prénom :

Classe :

N.B. : Le barème est sur 10. La note sera ramenée à une note sur 20.

Questions de cours (3 points)

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$

Rappeler la définition mathématique (avec les quantificateurs) de

1. f est injective.

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

2. f est surjective.

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Application : La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 1 \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses.

$$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \text{et} \quad f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Or $-2 \neq 2$ et $f(-2) = f(2)$
donc la fonction f n'est pas injective

La fonction f n'atteint pas la valeur -3 , Or $-3 \in \mathbb{R}$

donc la fonction f n'est pas surjective

Exercice 1 (3 points)

On considère l'assertion $P : \langle \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow (x \leq 1 \vee x \geq 2)) \rangle$

1. Cette assertion est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

$x^2 - 3x + 2$ est un polynôme du second degré,
donc $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1^2$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

On a le tableau de signe :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

Ann. $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \in [1, 2]$

Or, $(x \leq 1 \vee x \geq 2) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

Or $[1, 2] \not\subset]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$
donc l'assertion est fausse.

2. Donner la négation de 1.

$$\neg P : \exists x \in \mathbb{R}, (x^2 - 3x + 2 \leq 0) \wedge (x > 1 \wedge x < 2)$$

3. Donner la contraposée de P .

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x > 1 \wedge x < 2) \Rightarrow (x^2 - 3x + 2 > 0)$$

Exercice 2 (2,5 points)

En intégrant par parties, calculer $I = \int_0^{\pi/6} x \sin(3x) dx$. Vous ferez clairement apparaître les fonctions mises en jeu ainsi que leurs dérivées et/ou primitives.

Soit $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

On pose

$$u(x) = x \text{ donc } u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin(3x) \text{ donc } v(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/6} x \sin(3x) dx \\ &= \left[x \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \right) \right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} -\frac{1}{3} \cos(3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x \cos(3x) \right]_0^{\pi/6} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \sin(3x) \right]_0^{\pi/6} \\ &= -\frac{\pi}{3 \times 6} \times \cos(\pi/2) - 0 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \sin(\pi/2) - \frac{1}{3} \sin(0) \right) \\ &= 0 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Exercice 3 (1,5 points)

On considère l'ensemble E des nombres à trois chiffres choisis dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, chaque chiffre pouvant être répété.

1. Quel est le cardinal de E ?

On a une répétition.

$$\text{donc } \text{Card}(E) = 5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$$

2. Quel est le nombre d'éléments de E dans lesquels le chiffre 1 apparaît au moins une fois?

Sachant que l'événement contraire est de ne pas avoir de chiffre 1,
On passe par l'événement contraire.

$$5^3 - 4 \times 4 \times 4 = 5^3 - 4^3 = 61$$

3. Quel est le nombre d'éléments de E commençant par le chiffre 1, ce chiffre n'étant pas réutilisé par la suite?

$$1 \times 4 \times 4 = 4^2 = 16$$