EPITA

Mathématiques

Partiel S3

Décembre 2021

Durée: 3 heures

Nom:		
Prénom :		
Classe:		
NOTE:		
Consignes: — Documents et calculatrices interdits.		

— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.

— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (3,5 points)

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique \mathcal{B} , on considère la famille $\mathcal{F} = \{\varepsilon_1 = (1, -1, 2), \varepsilon_2 = (2, 1, -3), \varepsilon_3 = (4, -1, 1)\}.$

1. Cette famille est-elle une base de E? Sinon, en extraire une sous-famille libre maximale et la compléter pour obtenir une base de E. On note \mathcal{B}' la base obtenue.

2. Déterminer les coordonnées dans \mathcal{B}' du vecteur u = (3, 3, -8).

3. Donner la matrice de passage de la base canonique ${\mathcal B}$ à la base ${\mathcal B}'.$

Exercice 2 (3,5 points)

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ définie par sa matrice dans la base canonique au départ et à l'arrivée : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un projecteur.

2. Donner une base de Ker(f).

3. Donner une base de Im(f).

4. Énoncer le théorème du rang et vérifier la cohérence de vos résultats avec ce théorème.

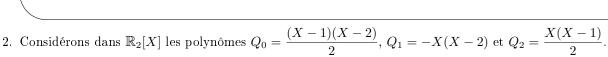


Exercice 3 (5 points)

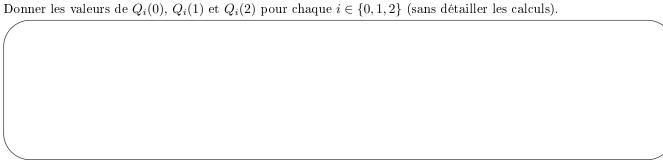
Soit l'application linéaire $f: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ Q & \longmapsto & \left(Q(0),\,Q(1),\,Q(2)\right) \end{array} \right.$

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques $\{1, X, X^2\}$ au départ et $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ à l'arrivée.

On note A cette matrice.



(a) Donner les valeurs de $Q_i(0)$, $Q_i(1)$ et $Q_i(2)$ pour chaque $i \in \{0,1,2\}$ (sans détailler les calculs).



(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

[suite du cadre page suivante]

Déterminer la ma	$\frac{\text{ttrice de } f \text{ dans la base}}{f}$	\mathcal{B}' au départ et la	base canonique à l'ar	rivée. On note A' cette r	natı
Montrer que f es	t bijective et donner la	matrice de f^{-1} dan	as la base canonique d	le \mathbb{R}^3 au départ, \mathcal{B}' à l'a	arriv
n déduire la matric	ee de f^{-1} dans les bases	s canoniques au dén	art et à l'arrivée		

Exercice 4 (4,5 points)

On considère les deux suites réelles (\boldsymbol{x}_n) et (y_n) définies par :

$$x_0 = 3$$
, $y_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{8}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + \frac{3}{4}y_n \end{cases}$$

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$, on définit la suite (u_n) par : $u_n = (x_n, y_n)$. Ainsi par exemple, $u_0 = (3, -2)$.

1. Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. On considère la base de \mathbb{R}^2 suivante : $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1 = (1, -2), \varepsilon_2 = (1, 2)\}$. Écrire la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Puis trouver les coordonnées de u_0 dans \mathcal{B}' .

3. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B}' au départ et à l'arrivée.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $X'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix}$, la matrice colonne constituée des coordonnées de u_n dans \mathcal{B}' . Déterminer X'_{n+1} en fonction de X'_n .

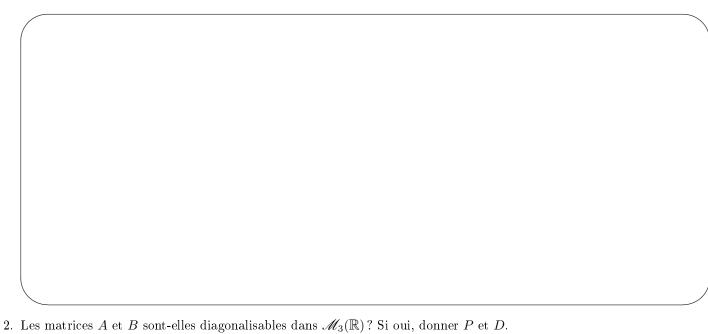
5. En déduire les coordonnées de u_n dans la base \mathcal{B}' , puis $\lim_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim_{n \to +\infty} y_n$.

Exercice 5 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 10 & -9 & 10 \\ 6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B, sous forme factorisée. Vérifier que les valeurs propres de A sont 1 et 2, puis que celles de B sont -1 et 1.

[suite du cadre page suivante]



N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

[suite du cadre page suivante]