EPITA

Mathématiques

Contrôle S2

durée : 3 heures

Février 2023

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 en divisant par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. Il y a en tout 7 exercices.
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- **Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.**
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : polynômes (6 points)

On considère le polynôme $P(X) = X^6 - X^5 - 3X^4 + 7X^3 + 14X^2 + 6X$.

1. Montrer que -1 est une racine de P et trouver son ordre exact de multiplicité.

2. Que peut-on en déduire en termes de divisibilité ?

3. En vous aidant d'une seule division euclidienne, factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 : équations différentielles (6 points)

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. On considère l'équation différentielle (E_1) : $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3\cos(3x)$ sur $I =]-1, +\infty[$.

   (a) Résoudre (E_1) sur I.

   (b) Trouver les solutions de (E_1) telles que $y(0) = 1$.

2. Soit (E_2) : $y'' + 4y' + 13y = (25x^2 + 16x + 2)e^{2x}$ sur $J = \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $y_p : x \longmapsto x^2e^{2x}$ est une solution particulière de (E_2).

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Trouver toutes les solutions de (E_2).

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 3 : études locales (6,5 points)

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Rappeler les définitions mathématiques de : $f(x) \sim g(x)$ et $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Donner, en justifiant, un équivalent simple (autre que la fonction elle même) de $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x$ en $a = 0$ ET en $a = +\infty$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Soient h et k deux fonctions telles qu'au voisinage de 0

$$h(x) = 1 + 2x + x^2 - 3x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad k(x) = -x + 3x^2 + o(x^2)$$

(a) Donner un équivalent le plus simple possible en 0 de : $h(x)$ (sans justifier), $k(x)$ (sans justifier) et $xh(x) + k(x)$ (en justifiant).

....
....
....
....
....
....
....
....

(b) A-t-on assez d'informations pour donner le développement limité de $h(x) + k(x)$ à l'ordre 1 ? À l'ordre 2 ? À l'ordre 3 ? Donner le développement limité quand la réponse est oui.

....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 4 : développements limités (5 points)

Dans cet exercice, vous prendrez soin de rappeler les développements limités usuels que vous devez utiliser.

1. Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x)e^{-2x}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = \sqrt{1+x}$ à partir d'un des cinq DL usuels.

3. Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $h(x) = \ln\left(1 + \sqrt{1+x}\right)$.

Exercice 5 : calculs de limites (3,5 points)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin(\frac{x}{2})}$. Vous devez utiliser les DL !

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^x$. Vous devez utiliser les DL.

Exercice 6 : espaces vectoriels 1 (8 points)

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

   (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y\}$

   (b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0\}$.

(c) $G = \{P \in \mathbb{R}[X],\ X \mid P\}$

2. Dans cette question, il n'est pas demandé de justifier les réponses.

   Donner un sous-espace vectoriel de E (autre que E et $\{0_E\}$) dans les cas suivants :

   (a) $E = \mathbb{R}^4$

   (b) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

   (c) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ converge}\}$

Exercice 7 : espaces vectoriels 2 (5 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y\}$$

   (a) A-t-on $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$? Justifier.

(b) Rappeler la définition mathématique de l'ensemble $F + G$.

....
....
....

(c) Le vecteur $u = (1, 2, 3)$ appartient-il à $F + G$? Justifier.

....
....
....

(d) La décomposition que vous avez trouvé est-elle unique ? Justifier. Pourquoi en étiez-vous certain avant même de faire le moindre calcul ?

....
....
....

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. ($n \in \mathbb{N}^*$)

(a) Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.

....
....

(b) Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

....
....

(c) Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille libre composée de 2 vecteurs et un exemple d'une famille liée composée de 3 vecteurs. Justification non demandée.

....
....
....
....
....

(d) Dans $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'une famille génératrice de E. Justification non demandée.

....
....
....
....
....