Nom :
Prénom :

Examen d'algorithmique

EPITA ING1 2011 S1; A. DURET-LUTZ

Durée : 1 heure 30

Janvier 2009

Consignes

- Cet examen se déroule **sans document** et **sans calculatrice**.
- Répondez sur le sujet dans les cadres prévus à cet effet.
- Il y a 5 pages d'énoncé, et 1 page d'annexe dont vous ne devriez pas avoir besoin.
  Rappelez votre nom en haut de chaque feuille au cas où elles se mélangeraient.
- Ne donnez pas trop de détails. Lorsqu'on vous demande des algorithmes, on se moque des points-virgules de fin de commande etc. Écrivez simplement et lisiblement. Des spécifications claires et implémentables sont préférées à du code C ou C++ verbeux.
- Le barème est indicatif et correspond à une note sur 22.

1 Dénombrement (5 points)

On considère des entiers positifs codés avec 8 bits de façon classique. Pour cet exercice on représentera même les 0 inutiles en tête des nombres. Par exemple vingt-trois se représente 00010111.

- Un entier est dit *équitable* si la moitié de ses bits sont des 1 et l'autre des 0. Par exemple 00010111 et 11011000 sont équitables, alors que 10001001 ne l'est pas.
- Un entier équitable sera dit *convenable* si n'importe lequel de ses suffixes possède au moins autant de 1 que de 0. Par exemple 00010111 est convenable (ses suffixes sont 1, 11, 111, 0111, 10111, 010111, 0010111 et lui-même), mais 00111001 n'est pas convenable (le suffixe 001 possède strictement plus de 0 que de 1).

Si nous remplaçons les 0 et 1 respectivement par des parenthèses ouvrantes et fermantes, les nombres convenables de 8 bits permettent de représenter l'ensemble des chaînes constituées de quatre paires de parenthèses correctement assemblées (i.e., les parenthèses ne sont jamais fermées avant d'avoir été ouvertes). Par exemple 00010111 correspond à "`((()()))`".

1. **(1 point cadeau)** Combien existe-t-il d'entiers codés avec 8 bits ?

Réponse :

2. **(2 points)** Combien existe-t-il d'entiers *équitables* sur 8 bits ?

Réponse :

3. **(2 points)** Combien existe-t-il d'entiers *convenables* sur 8 bits ?

Réponse :

2 Plus longue sous-séquence croissante (8 points)

Étant donné une séquence de n entiers différents, on souhaite y trouver l'une des *plus longues sous-séquences croissantes*. Par exemple si la séquence fournie est $[10, 53, 85, 35, 51, 52, 74, 52, 07, 20, 71, 75, 13]$, alors la plus longue sous-séquence croissante est $[10, 35, 51, 52, 52, 71, 75]$. (Notez que la croissante n'est pas forcément stricte.) Si plusieurs sous-séquences possèdent la taille la plus longue, l'algorithme peut retourner n'importe laquelle.

Dans ce qui suit, on note S la séquence d'entrée complète (de n éléments numérotés de 1 à n), $S[i]$ son i^{e} élément et $S[1..i]$ son i^{e} préfixe (c'est-à-dire la séquence constituée seulement des i premiers éléments).

Premier algorithme (2 points)

Une première idée est de se ramener à l'algorithme de recherche de la plus longue sous-séquence *commune* à deux chaînes (ou séquences) que nous avons vu en cours. Pour deux chaînes u et v de tailles $|u|$ et $|v|$, l'algorithme du cours produit l'une des plus longues sous-séquences communes avec la complexité $\Theta(|u| \cdot |v|)$.

La recherche de la plus longue sous-séquence croissante peut alors s'effectuer ainsi :

PlusLongueSousSéquenceCroissante(S) :
    retourner PlusLongueSousSéquenceCommune(S, TriCroissant(S))

(2 points) Donnez le nom d'un algorithme de tri qui pourrait être utilisé ici et indiquez la complexité de cet algorithme de tri. Donnez ensuite la complexité de PlusLongueSousSéquenceCroissante pour l'algorithme de tri que vous avez choisi. (Vous donnerez ces complexités en fonction de $n = |S|$.)

Réponse :

Deuxième algorithme (6 points)

On souhaite maintenant développer un algorithme de programmation dynamique qui va trouver la plus longue sous-séquence croissante sans avoir besoin ni d'effectuer un tri, ni d'appeler PlusLongue-SousSéquenceCommune.

Pour $k \leq n$, notons $L[k]$ la longueur de la plus longue sous-séquence croissante de $S[1..k]$ qui se termine par $S[k]$. On a bien sûr $L[1] = 1$. Selon l'ordre de $S[1]$ et $S[2]$, la valeur de $L[2]$ sera soit $L[1] + 1$, soit 1.

1. **(2 points)** Donnez une définition récursive de $L[k]$ (en fonction des termes précédents de L, et des éléments de S).

Réponse :

2. **(1 point)** Une fois que les $L[1], L[2], \ldots, L[n]$ ont été calculés, comment peut-on trouver la taille de la plus longue sous-séquence croissante de S ? (Cette plus longue sous-séquence ne se termine pas forcément par $S[n]$.)

Réponse :

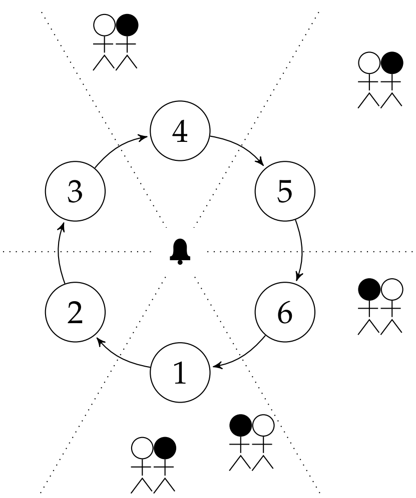
3. **(1 point)** Quelle est la complexité de calculer la taille de la plus longue sous-séquence croissante d'une séquence de n éléments, avec un algorithme de programmation dynamique basé sur les définitions précédentes ?

Réponse :

4. **(2 points)** Comment faudrait-il adapter cet algorithme pour retourner, en plus de la longueur de la plus longue sous-séquence croissante, la sous-séquence croissante elle-même ? (On ne vous demande pas d'écrire l'algorithme, mais seulement d'expliquer ce qu'il doit faire en plus.)

Réponse :

3 Hachage de chaises (5 points)



On considère une pièce plongée dans le noir dans laquelle on a disposé m chaises en cercle autour d'une clochette. Dans la pièce, hors de ce cercle de chaises, se trouvent trouvent n couples de personnes immobiles. Il y a toujours plus de chaises que de couples ($n < m$). La figure ci-contre illustre le cas avec $m = 6$ et $n = 5$. Lorsque la clochette sonne, les hommes de chaque couple se dirigent vers la chaise la plus proche (il fait noir, mais il suffit de se diriger vers la clochette qui tinte). L'homme s'assied si la chaise est libre, sinon il doit essayer les chaises suivantes dans l'ordre des aiguilles d'une montre jusqu'à en trouver une libre pour s'y asseoir . Quand tous les hommes de notre exemple seront assis ils occuperont les chaises 1, 2, 4, 5 et 6.

La fonction qui à un couple associe la chaise la plus proche peut être vue comme une fonction de hachage. La présence d'une personne sur cette chaise est une collision. Si une femme veut retrouver son mari, elle doit se diriger vers la chaise la plus proche puis « tâter » les hommes assis un par un et dans le sens des aiguilles d'une montre, jusqu'à retrouver le bon.

1. **(2 points)** De quel type de hachage ce cercle de chaises fait-il l'analogie ? (1 point pour le nom du hachage et 1 point pour le type de sondage.)

Réponse :

2. **(1 point)** Quel est l'inconvénient principal de ce type de hachage ?

Réponse :

3. **(2 points)** On se restreint maintenant au cas où $m > 2$ et $n = 2$. C'est-à-dire qu'il n'y a que deux couples disposés aléatoirement dans la pièce. On supposera la loi de distribution des positions autour du cercle de chaises uniforme, autrement dit la probabilité d'être plus proche d'une chaise donnée est $1/m$.

   Une fois que les hommes sont assis, quelle est l'espérence du nombre d'hommes qu'une femme doit tâter avant de retrouver le sien ?

Réponse :

4 Tas spécial (4 points)

Normalement, un tas de n éléments est représenté par un tableau de n cases. Le père de l'élément situé à l'indice i se trouve à l'indice $Parent(i) = \lfloor i/2 \rfloor$ et peut être accédé en temps constant.

Pour mémoire, voici l'algorithme d'insertion d'une valeur v dans un tas représenté par les n premiers éléments d'un tableau A.

```
HEAPINSERT(A, n, v)
i ← n + 1
A[i] ← v
while i > 1 and A[Parent(i)] < A[i] do
    A[Parent(i)] ↔ A[i]
    i ← Parent(i)
```

1. **(1 point cadeau)** Quelle est la complexité de cet algorithme lorsque le tas possède n éléments.

Réponse :

2. **(2 points)** Imaginez maintenant que l'on remplace le tableau A par une liste doublement chaînée. L'accès au père de l'élément i se fait alors en $\Theta(i/2)$ opérations parce qu'il faut remonter la liste de $i/2$ positions.

   Quelle est la complexité de l'algorithme d'insertion lorsque A est une liste doublement chaînée ? **Justifiez votre réponse.**

Réponse :

3. **(1 point)** On considère le tas représenté par le tableau suivant :

13	9	12	3	6	8	5	2

   Donnez l'état du tas après les *suppressions* successives de ses trois plus grandes valeurs.

FIN

Notations asymptotiques

$$\mathrm{O}(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^{+\star}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$
$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^{+\star}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$
$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1 \in \mathbb{R}^{+\star}, \exists c_2 \in \mathbb{R}^{+\star}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \iff g(n) \in \mathrm{O}(f(n))$ et $f(n) \notin \mathrm{O}(g(n))$ $\quad f(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \iff g(n) \in \Omega(f(n))$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$ et $g(n) \notin \mathrm{O}(f(n))$ $\quad f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \begin{cases} f(n) \in \Omega(g(n)) \\ g(n) \in \Omega(f(n)) \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \in \mathbb{R}^{+\star} \iff f(n) \in \Theta(g(n))$

Ordres de grandeurs

constante	$\Theta(1)$	
logarithmique	$\Theta(\log n)$	
polylogarith.	$\Theta((\log n)^c)$	$c > 1$
	$\Theta(\sqrt{n})$	
linéaire	$\Theta(n)$	
	$\Theta(n \log n)$	
quadratique	$\Theta(n^2)$	
	$\Theta(n^c)$	$c > 2$
exponentielle	$\Theta(c^n)$	$c > 1$
factorielle	$\Theta(n!)$	
	$\Theta(n^n)$	

Identités utiles

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{si } x \neq 1$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x| < 1$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{si } |x| < 1$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$$
$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

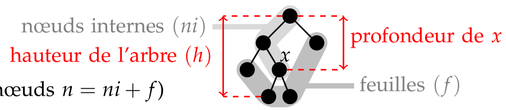
Théorème général

Soit à résoudre $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ avec $a \geq 1$, $b > 1$

- Si $f(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$, alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- Si $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
- Si $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$, et si $af(n/b) \leq cf(n)$ pour un $c < 1$ et tous les n suffisamment grands, alors $T(n) = \Theta(f(n))$.

(Note : il est possible de n'être dans aucun de ces trois cas.)

Arbres



(nœuds $n = ni + f$)

Pour tout arbre binaire :

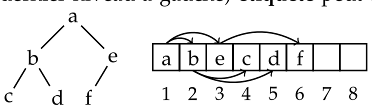
$n \leq 2^{h+1} - 1$ $\qquad h \geq \lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor$ si $n > 0$

$f \leq 2^h$ $\qquad h \geq \lceil \log_2 f \rceil$ si $f > 0$

$f = ni + 1$ (si l'arbre est *complet* = les nœud internes ont tous 2 fils)

Dans un arbre binaire équilibré une feuille est soit à la profondeur $\lfloor \log_2(n+1) - 1 \rfloor$ soit à la profondeur $\lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Pour ces arbres $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Un arbre parfait (= complet, équilibré, avec toutes les feuilles du dernier niveau à gauche) **étiqueté** peut être représenté par un tableau.



Les indices sont reliés par :

$\text{Père}(y) = \lfloor y/2 \rfloor$

$\text{FilsG}(y) = y \times 2$

$\text{FilsD}(y) = y \times 2 + 1$

Définitions diverses

La complexité d'un problème est celle de l'algorithme le plus efficace pour le résoudre.

Un tri stable préserve l'ordre relatif de deux éléments égaux (au sens de la relation de comparaison utilisée pour le tri).

Un tri en place utilise une mémoire temporaire de taille constante (indépendante de n).

Rappels de probabilités

Espérance d'une variable aléatoire X **:** C'est sa valeur attendue, ou moyenne. $\mathrm{E}[X] = \sum_x \Pr\{X = x\}$

Variance : $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$

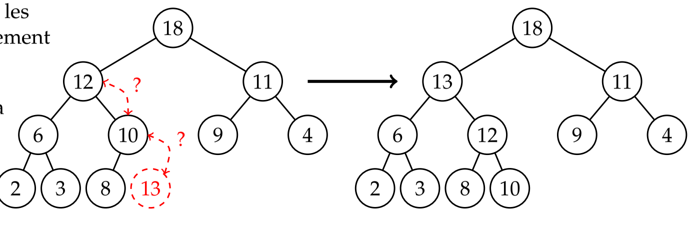
Loi binomiale : On lance n ballons dans r paniers. Les chutes dans les paniers sont équiprobables ($p = 1/r$). On note X_i le nombre de ballons dans le panier i. On a $\Pr\{X_i = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. On peut montrer $E[X_i] = np$ et $\mathrm{Var}[X_i] = np(1-p)$.

Tas

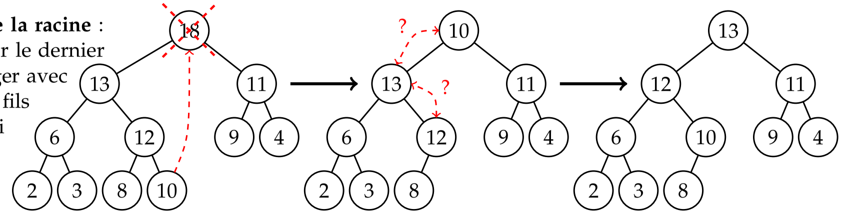
Un tas est un arbre parfait partiellement ordonné : l'étiquette d'un nœud est supérieure à celles de ses fils.

Dans les opérations qui suivent les arbres parfaits sont plus efficacement représentés par des tableaux.

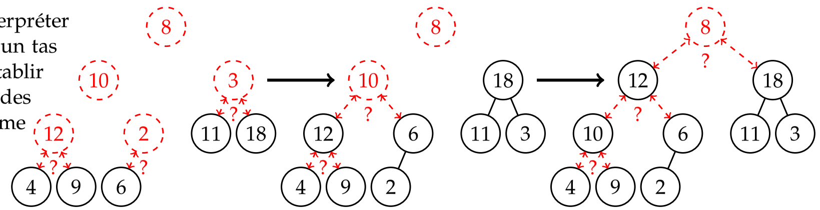
Insertion : ajouter l'élément à la fin du tas, l'échanger avec son père tant qu'il lui est inférieur (en remontant vers la racine). $T_{\text{insert}} = \mathrm{O}(\log n)$



Suppression de la racine : la remplacer par le dernier nœud ; l'échanger avec son plus grand fils tant que celui-ci est plus grand. $T_{\text{rem}} = \mathrm{O}(\log n)$



Construction : interpréter le tableau comme un tas (incorrect) puis rétablir l'ordre en partant des feuilles (vues comme des tas corrects). $T_{\text{build}} = \Theta(n)$

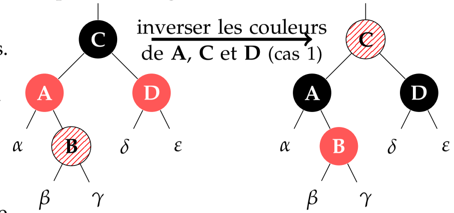


Arbres Rouge et Noir

Les ARN sont des arbres binaires de recherche dans lesquels : (1) un nœud est rouge ou noir, (2) racine et feuilles (NIL) sont noires, (3) les fils d'un nœud rouge sont noirs, et (4) tous les chemins reliant un nœud à une feuille (de ses descendants) contiennent le même nombre de nœuds noirs (= la *hauteur noire*). Ces propriétés interdisent un trop fort déséquilibre de l'arbre, sa hauteur reste en $\Theta(\log n)$.

Insertion d'une valeur : insérer le nœud avec la couleur rouge à la position qu'il aurait dans un arbre binaire de recherche classique, puis, si le père est rouge, considérer les trois cas suivants dans l'ordre.

Cas 1 : Le père et l'oncle du nœud considéré sont tous les deux rouges. **Répéter** cette transformation à partir du grand-père si l'arrière grand-père est aussi rouge.



(Dans tous ces cas, les lettres grecques représentent des sous-arbres avec la même hauteur noire.)

Cas 2 : Si le père est rouge, l'oncle noir, et que le nœud courant n'est pas dans l'axe père–grand-père, une rotation permet d'aligner fils, père, et grand-père.

Cas 3 : Si le père est rouge, l'oncle noir, et que le nœud courant est dans l'axe père–grand-père, une rotation et une inversion de couleurs rétablissent les propriétés des ARN.