EPITA

Mathématiques

Contrôle de mi-semestre S3

Novembre 2022

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note se ramenée à une note sur 20 par une simple division par 2.

Consignes :

— Documents et calculatrices interdits.
— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$. Justifier proprement.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2 e^{-\sqrt{n}}}{2^{2n}}$. Justifier proprement.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{e^n}$. Justifier proprement.

Exercice 2 (6 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la nature de $\sum u_n$.

1. Déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{a/2}} + \dfrac{c}{n^{3a/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3a/2}}\right)$.

2. À l'aide du résultat de la question précédente, discuter la nature de $\sum u_n$ en fonction de la valeur de a.

Exercice 3 (8 points)

On se donne pour but d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{2^n n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}$.

Pour cela, on utilise la suite auxiliaire (v_n) définie par : $v_n = \ln(u_n) - \dfrac{1}{2}\ln(n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

....
....
....
....

2. En déduire que $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{a}{n^2}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. Montrer que (v_n) converge. On note ℓ sa limite.

....
....
....
....
....
....
....
....

5. Déduire des questions précédentes qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim k\sqrt{n}$. Exprimer k en fonction de ℓ.

Exercice 4 : critère spécial des séries alternées (5 points)

Soit (u_n) une suite réelle de signe alterné.

1. Énoncer le critère spécial des séries alternées.

2. Démontrer ce théorème.

   N.B. : on ne démontrera que la convergence de la série $\sum u_n$. Il n'est pas demandé de démontrer la majoration du reste de la série.

Exercice 5 : probabilités (5 points)

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes, prenant leurs valeurs dans $\{1, 3\}$, telles que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$,

$$P(X_i{=}1) = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad P(X_i{=}3) = \frac{2}{3}$$

1. Quelles sont les fonctions génératrices G_{X_i} de ces trois variables ?

2. Soit la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer sa fonction génératrice G_Y et en déduire la loi de Y.

3. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 6 : séries entières (10 points)

On se propose de trouver une fonction f qui satisfait aux conditions suivantes (C) : $\begin{cases} f'' + xf' + f = 0 \\ f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0 \end{cases}$

Pour cela, on suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, admettant un rayon de convergence $R > 0$, telle que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad f \text{ solution de } (C) \text{ sur }]-R, R[$$

N.B. : l'équation différentielle $f'' + xf' + f = 1$ est une équation linéaire du second ordre à coefficients non constants. **On ne cherchera donc pas à utiliser les méthodes étudiées au S2** sur les équations différentielles du second ordre, car ces méthodes ne fonctionnent que pour des équations à coefficients constants.

1. Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de la suite (a_n). Qu'en déduit-on pour les valeurs de a_0 et a_1 ?

2. Définir en fonction de (a_n) deux suites (b_n) et (c_n) telles que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

3. En reportant ces expressions de $xf'(x)$ et de $f''(x)$ dans l'équation $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$, mettre cette dernière équation sous la forme
$$\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n = 0$$
où les coefficients (d_n) sont exprimés en fonction de la suite (a_n).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. En remarquant que la condition $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n = 0$ implique que tous les coefficients d_n sont nuls, montrer que
$$a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = 0 \qquad \text{et plus généralement :} \qquad \forall \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. Que vaut a_n quand n est impair ?

....
....
....

6. Déterminer la valeur de a_n quand n est pair.

<u>Indication :</u> on posera $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), puis on exprimera a_{2k} d'abord en fonction de $a_{2(k-1)}$, puis en fonction de $a_{2(k-2)}$, etc. jusqu'à une expression de a_{2k} en fonction de a_0.

....
....
....
....
....
....
....
....

7. En déduire $f(x)$, qu'on exprimera d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.

8. **(Bonus)** Vérifier que l'expression trouvée à la question précédente est solution de (C) sur $\mathbb{R}$ tout entier.