Exercice 1 (4 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $(E_1)\quad (t+3)y' + y = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en cherchant une solution particulière grâce à une variation de la constante.

Résolution de l'équation homogène : (E_0) : $(t+3)y' + y = 0$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{t+3}$ Sa primitive est : $\displaystyle\int \frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}t = \ln(t+3)$

Les solutions de (E_0) sont : $\mathcal{S}_0 = \left\{ y_0 = ke^{-\ln(t+3)} = \dfrac{k}{t+3}\ , \qquad k \in \mathbb{R} \right\}$

Solution particulière par variation de la constante :
On pose $y_p = \dfrac{k(t)}{t+3}$. Alors $y_p' = \dfrac{k'(t)}{t+3} - \dfrac{k(t)}{(t+3)^2}$.
y_p solution de $(E_1) \iff (t+3)y_p' + y_p = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \iff k'(t) - \dfrac{k(t)}{t+3} + \dfrac{k(t)}{t+3} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \iff k'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
Une solution est $k(t) = \sqrt{t}$ donc $y_p = \dfrac{\sqrt{t}}{t+3}$ est une solution particulière de (E).

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est : } \mathcal{S} = \left\{ y = \frac{\sqrt{t}}{t+3} + \frac{k}{t+3}\ ,\ k \in \mathbb{R} \right\}.}$$

b. $(E_2)\quad y' + y = \cos(t) + 2\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$
en cherchant une solution particulière de la forme $y_p = a\cos(t) + b\sin(t) \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Résolution de l'équation homogène : (E_0) : $y' + y = 0$

$\dfrac{b}{a} = 1$ Une primitive est : t

Les solutions de (E_0) sont : $\mathcal{S}_0 = \{y_0 = ke^{-t}\ , \qquad k \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière :
On pose $y_p = a\cos(t) + b\sin(t) \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $y_p' = -a\sin(t) + b\cos(t)$.
y_p solution de $(E_2) \iff y_p' + y_p = \cos(t) + 2\sin(t)$
$\iff (a+b)\cos(t) + (b-a)\sin(t) = \cos(t) + 2\sin(t) \iff \begin{cases} a+b &= 1 \\ b-a &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -\frac{1}{2} \\ b &= \frac{3}{2} \end{cases}$
Donc $y_p = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)$ est une solution particulière de (E_2).

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est : } \mathcal{S} = \left\{ y = -\tfrac{1}{2}\cos(t) + \tfrac{3}{2}\sin(t) + ke^{-t}\ ,\ k \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Exercice 2 (3 points)

a. Montrer, en rédigeant soigneusement votre réponse, que l'équation (E) : $x^3 - 3x + 6 = 0$ admet une solution sur l'intervalle $]-3,3[$.

$f(x) = x^3 - 3x + 6$ est une fonction continue car elle est polynomiale. $f(-3) = -12 \quad f(3) = 24$ donc $f(-3)f(3) < 0$
D'après le TVI : $\exists c \in]-3,3[, \quad f(c) = 0$ donc (E) admet une solution sur $]-3,3[$.

b. Établir le tableau de variation de $f(x) = x^3 - 3x + 6$ sur $[-3,3]$.
En déduire que cette racine est unique et en donner un encadrement entre deux entiers consécutifs.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ s'annule en -1 et 1.

x	-3		-1		1		3
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-12	$\nearrow$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	24

Sur l'intervalle $[-1, 3]$, f a pour minimum 4 donc est strictement positive.
f est strictement croissante sur $[-3, -2]$, donc elle ne s'annule qu'une fois.
Comme $f(-2) = 4$, f s'annule sur l'intervalle $]-3, -2[$.

$\boxed{\text{Ainsi sur }]-3,3[,\ E \text{ admet une unique racine } c,\ -3 < c < -2.}$

Exercice 3 (6 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $f(x) = e^x\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

En posant $\alpha = -\frac{1}{2}$ on obtient : $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

$f(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en zéro de $g(x) = \ln(1 + \cos(x))$.

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

$\ln(1+\cos(x)) = \ln\left(2 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln\left(2(1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48} + o(x^4)\right)$

$g(x) = \ln(2) + \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48} + o(x^4)\right)$ On pose $X = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48} + o(x^4)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

$\ln(1+X) = X - \dfrac{X^2}{2} + o(X^2) = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48} - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48}\right)^2 + o(x^4) = -\dfrac{x^2}{4} + x^4\left(\dfrac{1}{48} - \dfrac{1}{32}\right) + o(x^4)$

$\boxed{g(x) = \ln(2) - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{96} + o(x^4)}$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 + 2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$ en détaillant chaque étape de calcul.

On pose $X = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. $\quad x = \dfrac{1}{X}$
Et on passe à la forme exponentielle, car la puissance est variable.

$h(X) = (1 + 2\sin(X))^{\frac{1}{X}} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+2\sin(X))} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+2X+o(X))} = e^{\frac{1}{X}(2X+o(X))} = e^{2+o(1)}$

$\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 + 2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = \lim_{X\to 0} h(X) = e^2}$

Exercice 4 (4 points)

a. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? Justifiez vos réponses par une démonstration en cas de réponse positive, en montrant précisément ce qui ne marche pas sinon.

A : Le singleton $A = \{O_E\}$

B : Demi-plan $y \geqslant 0$: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant 0\}$

C : Droite $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$

D : Droite $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 1\}$

A : $A \subset E \quad 0_E \in A \quad \forall (u, v) \in A^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda.u + v = \lambda.0_E + 0_E = 0_E \in A$ $\boxed{A \text{ est un sev de } E}$

B : $u(0, 1) \in B$ car $1 \geqslant 0$ et pour $\lambda = -1,\ \lambda.u = (0, -1) \notin B$

$\boxed{B \text{ n'est pas stable pour le produit externe, ce n'est pas un sev de } E.}$

C : $C \subset E \quad 0 - 2.0 = 0 \Longrightarrow 0_E \in C$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u, v) \in C^2,\ u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;\ v\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ avec $2x - y = 0$ et $2x' - y' = 0$

$\lambda.u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \end{pmatrix}$ avec $2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') = \lambda(2x + x') + (2y + y') = 0$ donc $\lambda.u + v \in C$

$\boxed{C \text{ est un sev de } E.}$

D : $0 - 2.0 = 0 \neq 1 \Longrightarrow 0_E(0, 0) \notin D$ $\boxed{D \text{ n'est pas un sev de } E.}$

b. Citer, sans démonstration, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :
- $\{0_E\}$
- les droites vectorielles (droites passant par l'origine)
- le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (3 points)

On pose $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(a, b, 0); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, $G = \{(c, c, c),\ c \in \mathbb{R}\}$, deux sous-espaces vectoriels de E.
Rappeler à quelles conditions F et G sont supplémentaires dans E puis montrer que $F \oplus G = E$.

$$\boxed{F \oplus G = E \Longleftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases}}$$

$\{0_E\} \subset F \cap G$ car ce sont deux sev de E.

$\forall u(x, y, z) \in F \cap G \Longrightarrow \begin{cases} u \in F \Longrightarrow z = 0 \\ u \in G \Longrightarrow x = y = z \end{cases} \Longrightarrow u = (0, 0, 0)$ donc $F \cap G \subset \{0_E\}$

$\boxed{\text{Donc } F \cap G = \{0_E\}}$

$F + G \subset E$ car ce sont deux sev de E.
$F = \{a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0); (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect } \{(1, 0, 0); (0, 1, 0)\}$ et comme $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0)\}$ est une famille libre : $\dim F = 2$
$G = \{c(1, 1, 1),\ c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect } \{(1, 1, 1)\}$ et comme $\{(1, 1, 1)\}$ est une famille libre : $\dim G = 1$
$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G) = 2 + 1 - 0 = 3$
$F + G \subset E$ et $\dim (F + G) = \dim E$ donc $\boxed{F + G = E}$

$\boxed{\text{On en déduit que } F \oplus G = E.}$

Exercice 6 (3 points)

Soit $\mathcal{F} = \{u = (1,1,0);\ v = (0,1,1);\ w = (1,0,1)\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0_E$. Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ -\gamma + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{Donc } \mathcal{F} \text{ est une famille libre.}$$

De plus $\operatorname{card} \mathcal{F} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{On en conclut que } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

b. Donner les coordonnées du vecteur $(1,3,0)$ dans la base $\mathcal{F}$.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = (1,3,0)$. Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 3 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L1 & \alpha + \gamma = 3 \\ L2 - L3 & \alpha - \gamma = 1 \\ L3 & \beta = -\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L1 + L2 & 2\alpha = 4 \\ L1 - L2 & 2\gamma = 2 \\ L3 & \beta = -\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \gamma = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les coordonnées de } (1,3,0) \text{ dans la base } \mathcal{F} \text{ sont } (2,-1,1).}$

Exercice 7 (3 points)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de E définis par :
$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ y - z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\right\}$ et $G = \operatorname{Vect}\left(\{(1,-1,0,1); (-2,2,0,-2)\}\right)$

a. Écrire F sous forme de Vect.

$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ y - z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\right\} = \left\{(0,y,y,t)\ ,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$
$F = \left\{y(0,1,1,0) + z(0,0,0,1)\ ,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$ $\boxed{F = \operatorname{Vect}\{(0,1,1,0); (0,0,0,1)\}}$

b. Déterminer les dimensions de F et G en justifiant soigneusement vos réponses.

$\{(0,1,1,0); (0,0,0,1)\}$ est une famille génératrice de F.
C'est aussi une famille libre car elle ne contient que deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires.

$\boxed{\text{C'est donc une base de } F. \qquad \dim F = \operatorname{card}\{(0,1,1,0); (0,0,0,1)\} = 2}$

$(-2,2,0,-2) = -2(1,-1,0,1)$ donc $G = \operatorname{Vect}\left(\{(1,-1,0,1)\}\right)$.
$\{(1,-1,0,1)\}$ est une famille génératrice de G. C'est aussi une famille libre car elle ne contient qu'un vecteur qui est non nul.

$\boxed{\text{C'est donc une base de } G. \qquad \dim G = \operatorname{card}\{(1,-1,0,1)\} = 1}$

Exercice 8 (4 points)

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, montrer si la famille est libre ou liée.

$\mathcal{F}_1 = \left\{P, Q, R\right\}$ dans $\mathbb{R}[X]$ où : $P(X) = -X^3 + X^2 + 2X - 2;\ Q(X) = 2X^3 - X + 3,\ \ R(X) = 2X^2 + 3X - 1,$

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha.P + \beta.Q + \gamma.R = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors :

$$\begin{cases} -\alpha & +2\beta & & = 0 \\ \alpha & & +2\gamma & = 0 \\ 2\alpha & -\beta & +3\gamma & = 0 \\ -2\alpha & +3\beta & -\gamma & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L1 : & \alpha & -2\beta & & = 0 \\ L2 : & \alpha & & +2\gamma & = 0 \\ L3 : & 2\alpha & -\beta & +3\gamma & = 0 \\ L3 + L4 : & & 2\beta & +2\gamma & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha & = 2\beta \\ \gamma & = -\beta \\ 4\beta & -\beta & -3\beta & = 0 \end{cases}$$

En posant $\beta = 1$ on obtient l'égalité : $2P + Q - R = 0_E$

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_1 \text{ est liée.}}$

$\mathcal{F}_2 = \big\{(u_n),(v_n),(w_n)\big\}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n,\ v_n = 2^n$ et $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Soient $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$
$\alpha.(u_n) + \beta.(v_n) + \gamma.(w_n) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha.u_n + \beta.v_n + \gamma.w_n = 0.$
En particulier :
$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{Si}\, n=0 & \alpha.0 & +\beta.1 & +\gamma.0 & =0 \\ \text{Si}\, n=1 & \alpha.1 & +\beta.1 & +\gamma.\frac{1}{2} & =0 \\ \text{Si}\, n=2 & \alpha.2 & +\beta.2 & +\gamma.\frac{2}{3} & =0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \beta & =0 \\ \alpha & =-\frac{1}{2}\gamma \\ \alpha & =-\frac{1}{3}\gamma \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_2 \text{ est libre.}}$