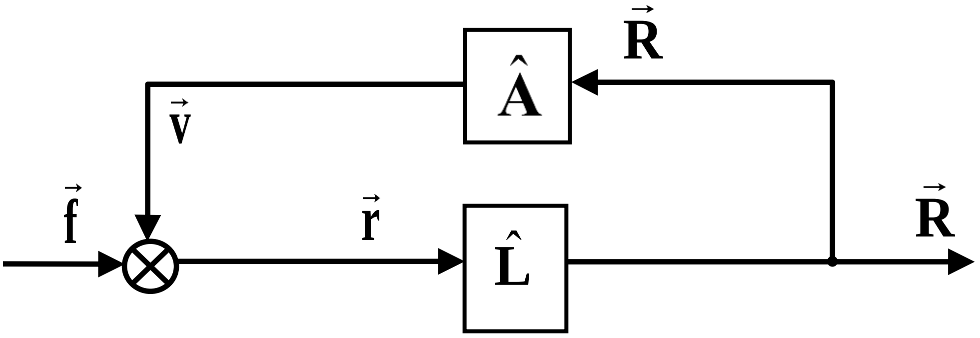
Г.А.Куприянов

Об одном методе вычисления отклика многомерной линейной стационарной системы с запаздываниями

Рассмотрим линейную стационарную детерминированную непрерывную многомерную систему (Linear time-invariant MIMO system) [1] с обратной связью в самом общем виде, к которому можно эквивалентными преобразованиями привести любую такую систему.



R = вектор выхода системы
f = вектор входа системы
v = вектор на выходе звена обратной связи

L = передаточная матрица звена прямой связи
A = передаточная матрица звена обратной связи
r = вектор на входе звена прямой связи

Рис. 1. Схема многомерной системы с обратной связью

Запишем в операторном виде систему уравнений, соответствующую схеме рис.1:

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(p)\vec{\mathbf{R}}(p) = \hat{\mathbf{L}}(p)\vec{\mathbf{f}}(p), \tag{1.1}$$

где матрица в левой части учитывает обратную связь:

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(p) = \hat{\mathbf{1}} - \hat{\mathbf{L}}(p)\hat{\mathbf{A}}(p) \tag{1.2}$$

Для получения отклика системы можно было бы умножить обе части уравнения системы на матрицу, обратную (1.2), и затем воспользоваться интегралом Дюамеля [2] для перехода во временную область. Но обращение матрицы (1.2) не только весьма сложное при большой размерности, но и не даст возможности получить простые аналитические выражения для обратных преобразований Лапласа в случае системы с запаздываниями, поскольку их результаты будут в общем случае содержать запаздывания как в числителях, так и в знаменателях. Чтобы обойтись без обращения матрицы (1.2), мне пришла идея использовать векторно-матричный вариант интеграла Дюамеля для правой и левой частей (1.1). Обозначим:

$$\vec{\mathbf{Z}}(p) = \hat{\mathbf{L}}(p)\vec{\mathbf{f}}(p) \tag{1.3}$$

$$\vec{\mathbf{Z}}(p) = \hat{\mathbf{\Phi}}(p)\vec{\mathbf{R}}(p) \tag{1.4}$$

Соответственно, переходные матрицы во временной области будут иметь вид:

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\hat{\mathbf{\Phi}}(p)}{p}\right\} \tag{1.5}$$

$$\hat{\mathbf{L}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\hat{\mathbf{L}}(p)}{p}\right\} \tag{1.6}$$

Подставим их в интегралы Дюамеля:

$$\vec{\mathbf{Z}}(t) = \hat{\mathbf{L}}(t)\cdot\vec{\mathbf{f}}(0) + \int_0^t \hat{\mathbf{L}}(t-\tau)\cdot\frac{d\vec{\mathbf{f}}}{dt}(\tau)\cdot d\tau \tag{1.7}$$

$$\vec{\mathbf{Z}}(t) = \hat{\mathbf{\Phi}}(t)\cdot\overrightarrow{\mathbf{R}}(0) + \int_0^t \hat{\mathbf{\Phi}}(t-\tau)\cdot\frac{d\overrightarrow{\mathbf{R}}}{dt}(\tau)\cdot d\tau \tag{1.8}$$

Приравнивая эти интегралы и перенеся слагаемое с начальными условиями в правую часть, получим систему уравнений во временной области вида

$$\int_0^t \hat{\mathbf{\Phi}}(t-\tau)\cdot\frac{d\overrightarrow{\mathbf{R}}}{dt}(\tau)\cdot d\tau = \hat{\mathbf{L}}(t)\cdot\vec{\mathbf{f}}(0) + \int_0^t \hat{\mathbf{L}}(t-\tau)\cdot\frac{d\vec{\mathbf{f}}}{dt}(\tau)\cdot d\tau - \hat{\mathbf{\Phi}}(t)\cdot\overrightarrow{\mathbf{R}}(0) \tag{1.9}$$

Это ничто иное, как матрично-векторное интегральное уравнение Вольтѐрры первого рода относительно производной искомой вектор-функции отклика системы:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \hat{\mathbf{\Phi}}(t-\tau)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}(\tau)\cdot d\tau = \vec{\mathbf{\Psi}}(t), \\ \displaystyle\frac{d\overrightarrow{\mathbf{R}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{\rho}} \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\vec{\mathbf{\Psi}}(t) = \hat{\mathbf{L}}(t)\cdot\vec{\mathbf{f}}(0) - \hat{\mathbf{\Phi}}(t)\cdot\overrightarrow{\mathbf{R}}(0) + \int_0^t \hat{\mathbf{L}}(t-\tau)\cdot\frac{d\vec{\mathbf{f}}}{dt}(\tau)\cdot d\tau \tag{1.11}$$

Очевидно, что такой приём – решение системы интегральных уравнений (1.10) – можно использовать, чтобы вычислить отклик на входное воздействие многомерной линейной стационарной детерминированной непрерывной системы с запаздываниями и с обратной связью в момент времени t, не обращая матрицу (1.2).

Литература:

1. Линейные стационарные системы
https://en.wikipedia.org/wiki/System_analysis#LTI_systems
2. Интеграл Дюамеля: https://ru.wikipedia.org/wiki/Интеграл_Дюамеля

Я не нашёл источники, в которых ранее описан данный подход, поэтому буду рад ссылкам на них, если они существуют.

Георгий А. Куприянов © 2021 1spb.org ■ help-in.ru ■ сми1.рф ■ science@help-in.ru
+7 921 903-88-01 (&WhatsApp). +7 951 649-55-94 (&Telegram)

ORCID 0000-0002-7501-3119 Scopus RESEARCHERID eLIBRARY.RU Math-Net.Ru