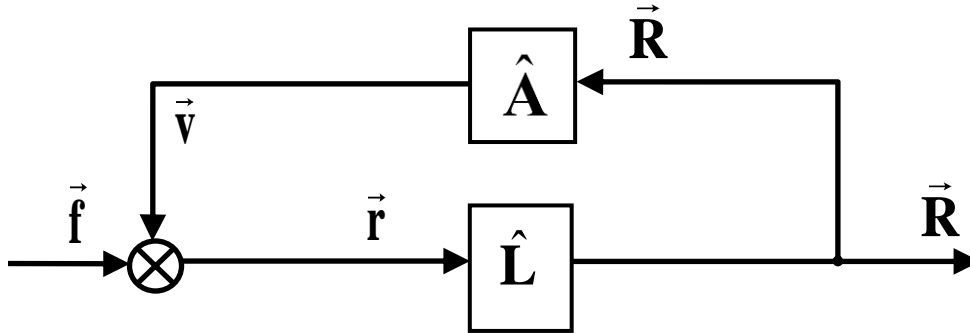


Об одном методе вычисления отклика многомерной линейной стационарной системы с запаздываниями

Рассмотрим линейную стационарную детерминированную непрерывную многомерную систему (Linear time-invariant MIMO system) [1] с обратной связью в самом общем виде, к которому можно эквивалентными преобразованиями привести любую такую систему.



\mathbf{R} = вектор выхода системы

\mathbf{f} = вектор входа системы

\mathbf{v} = вектор на выходе звена обратной связи

\mathbf{L} = передаточная матрица звена прямой связи

\mathbf{A} = передаточная матрица звена обратной связи

\mathbf{r} = вектор на входе звена прямой связи

Рис. 1. Схема многомерной системы с обратной связью

Запишем в операторном виде систему уравнений, соответствующую схеме рис.1:

$$\hat{\Phi}(p)\vec{\mathbf{R}}(p) = \hat{\mathbf{L}}(p)\vec{\mathbf{f}}(p), \quad (1.1)$$

где матрица в правой части учитывает обратную связь:

$$\hat{\Phi}(p) = \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{L}}(p)\hat{\mathbf{A}}(p) \quad (1.2)$$

Для получения отклика системы можно было бы умножить обе части уравнения системы на матрицу, обратную (1.2), и затем воспользоваться интегралом Дюамеля [2] для перехода во временную область. Но обращение матрицы (1.2) не только весьма сложное при большой размерности, но и не даст возможности получить простые аналитические выражения для обратных преобразований Лапласа в случае системы с запаздываниями, поскольку их результаты будут в общем случае содержать запаздывания как в числителях, так и в знаменателях. Чтобы обойтись без обращения матрицы (1.2), мне пришла идея использовать векторно-матричный вариант интеграла Дюамеля для правой и левой частей (1.1). Обозначим:

$$\vec{\mathbf{Z}}(p) = \hat{\mathbf{L}}(p)\vec{\mathbf{f}}(p) \quad (1.3)$$

$$\vec{\mathbf{Z}}(p) = \hat{\Phi}(p)\vec{\mathbf{R}}(p) \quad (1.4)$$

Соответственно, переходные матрицы во временной области будут иметь вид:

$$\hat{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\hat{\Phi}(p)}{p} \right\} \quad (1.5)$$

$$\hat{\mathbf{L}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{L}}(p)}{p} \right\} \quad (1.6)$$

Подставим их в интегралы Дюамеля:

$$\vec{Z}(t) = \hat{L}(t) \cdot \vec{f}(0) + \int_0^t \hat{L}(t-\tau) \cdot \frac{d\vec{f}}{d\tau}(\tau) \cdot d\tau \quad (1.7)$$

$$\vec{Z}(t) = \hat{\Phi}(t) \cdot \vec{R}(0) + \int_0^t \hat{\Phi}(t-\tau) \cdot \frac{d\vec{R}}{d\tau}(\tau) \cdot d\tau \quad (1.8)$$

Приравнивая эти интегралы и перенеся слагаемое с начальными условиями в правую часть, получим систему уравнений во временной области вида

$$\int_0^t \hat{\Phi}(t-\tau) \cdot \frac{d\vec{R}}{d\tau}(\tau) \cdot d\tau = \hat{L}(t) \cdot \vec{f}(0) + \int_0^t \hat{L}(t-\tau) \cdot \frac{d\vec{f}}{d\tau}(\tau) \cdot d\tau - \hat{\Phi}(t) \cdot \vec{R}(0) \quad (1.9)$$

Это ничто иное, как матрично-векторное интегральное уравнение Вольтерры первого рода относительно производной искомой вектор-функции отклика системы:

$$\begin{cases} \int_0^t \hat{\Phi}(t-\tau) \cdot \vec{p}(\tau) \cdot d\tau = \vec{\Psi}(t), \\ \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{p} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\vec{\Psi}(t) = \hat{L}(t) \cdot \vec{f}(0) - \hat{\Phi}(t) \cdot \vec{R}(0) + \int_0^t \hat{L}(t-\tau) \cdot \frac{d\vec{f}}{d\tau}(\tau) \cdot d\tau \quad (1.11)$$

Очевидно, что такой приём – решение системы интегральных уравнений (1.10) – можно использовать, чтобы вычислить отклик на входное воздействие многомерной линейной стационарной детерминированной непрерывной системы с запаздываниями и с обратной связью в момент времени t , не обращая матрицу (1.2).

Литература:

1. Линейные стационарные системы

https://en.wikipedia.org/wiki/System_analysis#LTI_systems

2. Интеграл Дюамеля: https://ru.wikipedia.org/wiki/Интеграл_Дюамеля

Я не нашёл источники, в которых ранее описан данный подход, поэтому буду рад ссылкам на них, если они существуют.

Данный материал направлен на рецензирование и охраняется законом об авторском праве. При цитировании ссылка обязательна.

Георгий А. Куприянов © 2021 lspb.org ■ help-in.ru ■ smi1.pf ■ science@help-in.ru
+7 921 903-88-01 (&WhatsApp). +7 951 649-55-94 (&Telegram)



0000-0002-7501-3119

