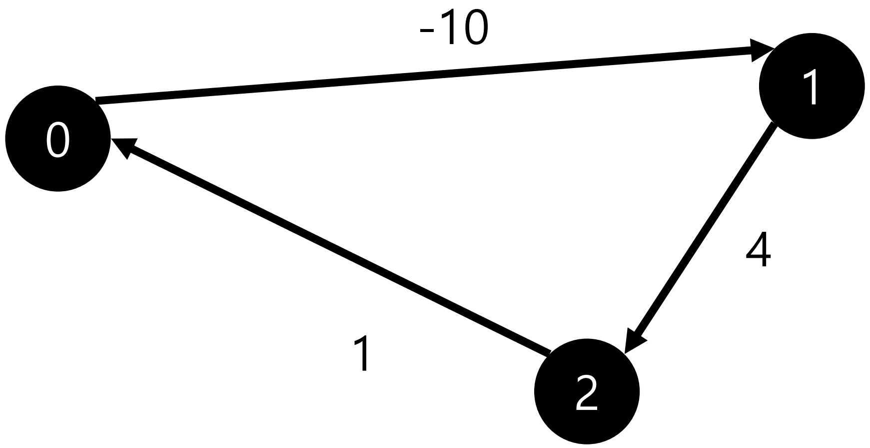
Shortest path

최단 경로

최단 경로(shortest path)
1. 음수 사이클이 없다.
2. 방향 그래프(directed graph)
3. 가중치 그래프(weighted graph)
4. 경로의 길이
: 에지 가중치의 합

음수 사이클(negative cycle)



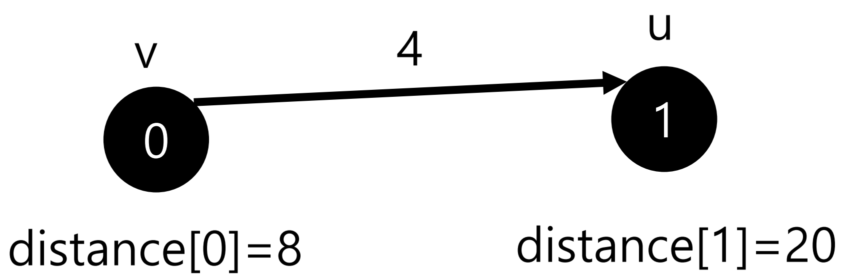
최단 경로 알고리즘의 종류

1. 하나의 출발점과 나머지 모든 목적지
    1) Dijkstra 알고리즘(음수 가중치가 없다)
    2) Bellman-Ford 알고리즘(일반적인 경우)
2. 모든 (출발점,목적지) 쌍
    1) Floyd-Warshall 알고리즘

Dijkstra 알고리즘

Dijkstra 알고리즘
1. 탐욕 알고리즘
2. **음수 가중치가 없다.**
3. 최단 경로가 발견된 정점의 집합 S
4. 정점 v(v∈ $V - S$)의 distance[v]
   : 출발 정점에서 S에 있는 정점만 거쳐
   v에 도달하는 경로의 길이

Relaxation of an edge

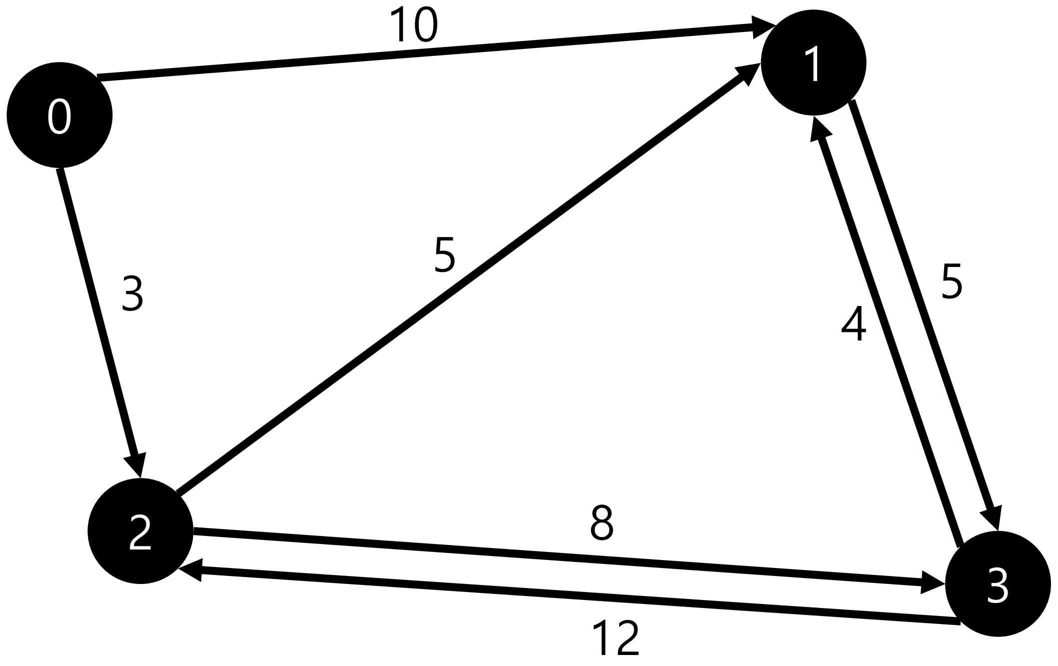


출발 정점에서 정점 u까지 정점 v를 거치지 않고
오는 경로의 길이 distance[1]보다
출발 정점에서 정점 v까지 먼저 온 후 정점 u로 가는
경로의 길이 distance[0] + w(v, u)가 더 작으면
distance[1]를 업데이트한다

```
if distance[u] > distance[v]+w[v, u]
    distance[u]=distance[v]+w[v, u]
```

Graph representation

Adjacency matrix

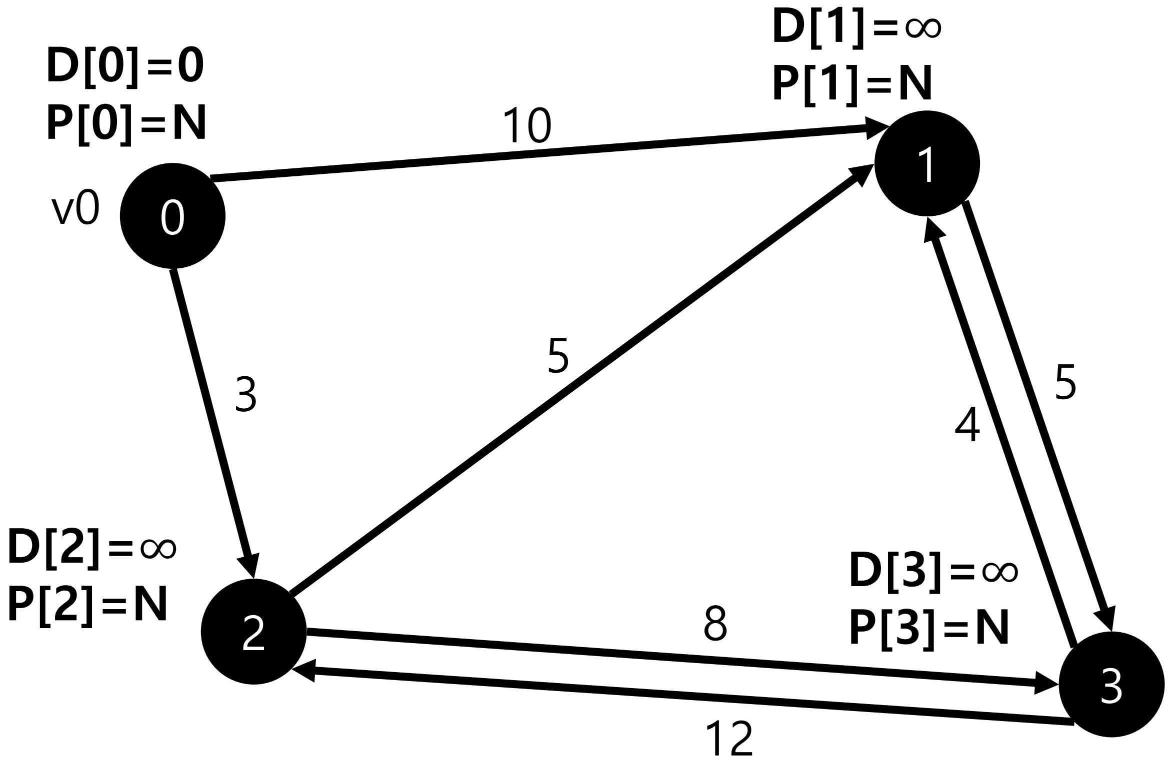


정점 I, j가 인접하면 에지의 가중치
인접하지 않으면 None

	0	1	2	3
0	N	10	3	N
1	N	N	N	5
2	N	5	N	8
3	N	4	12	N

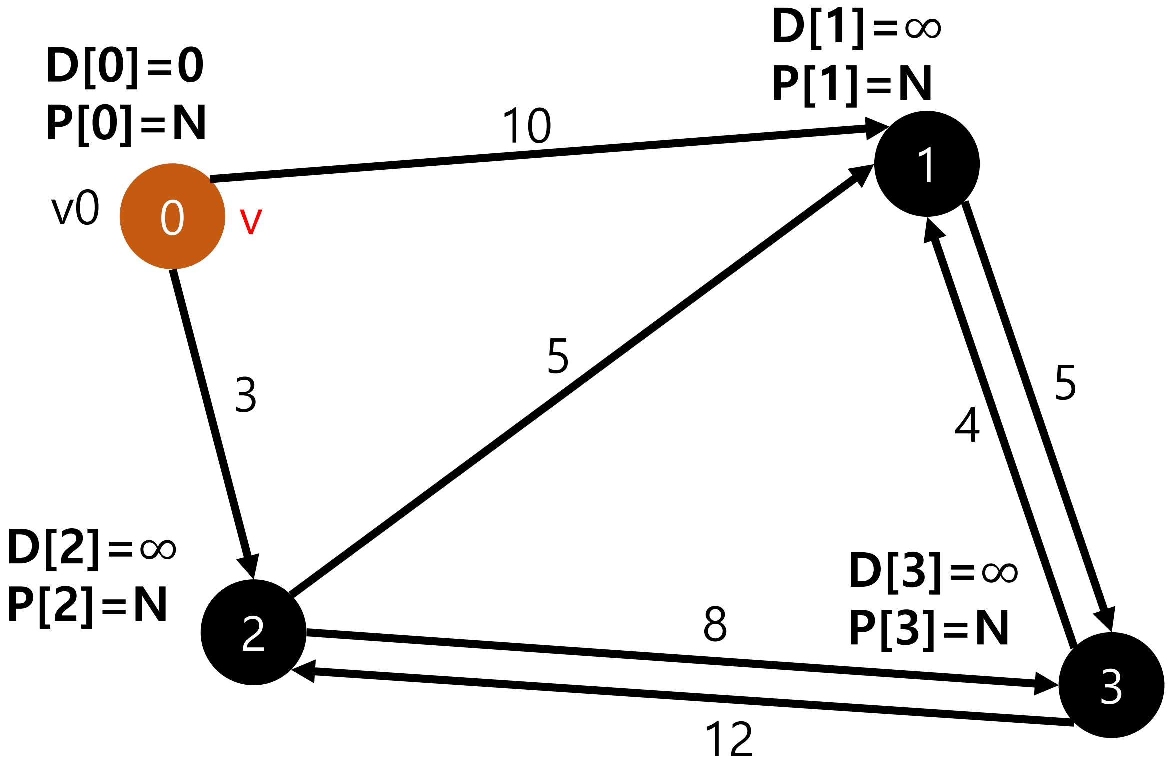
Dijkstra 알고리즘

S={}

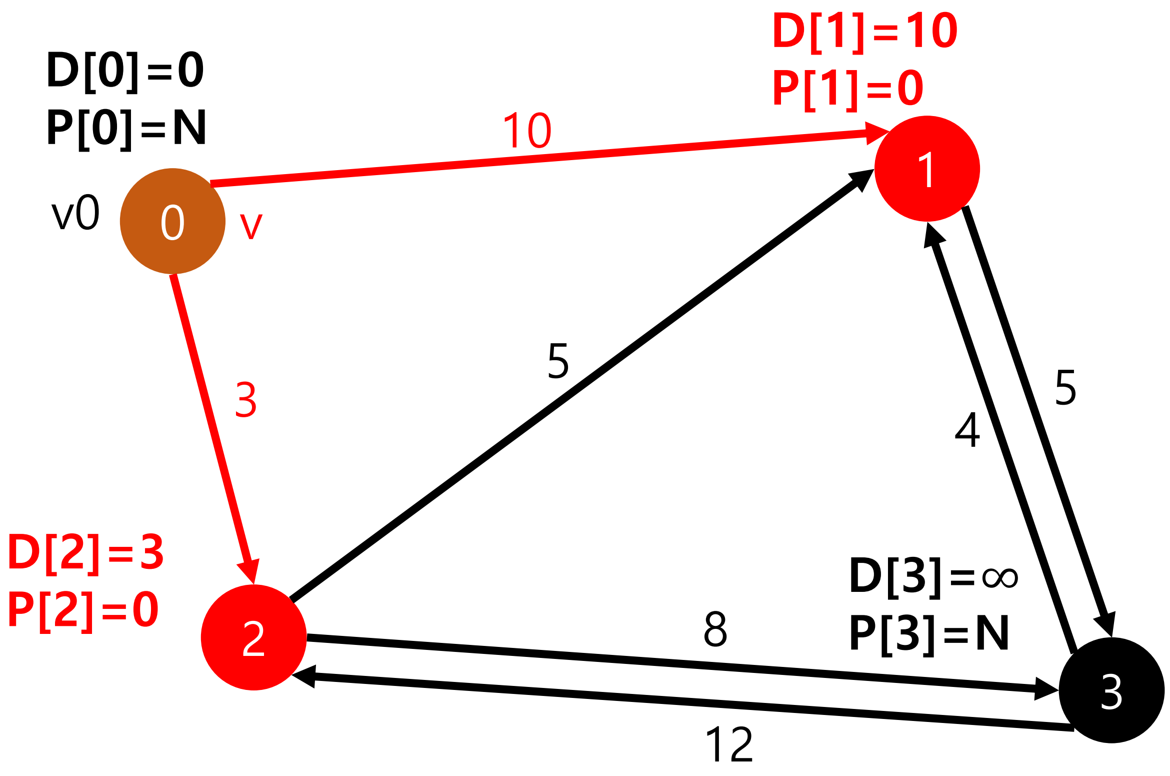


Dijkstra 알고리즘

S={0}

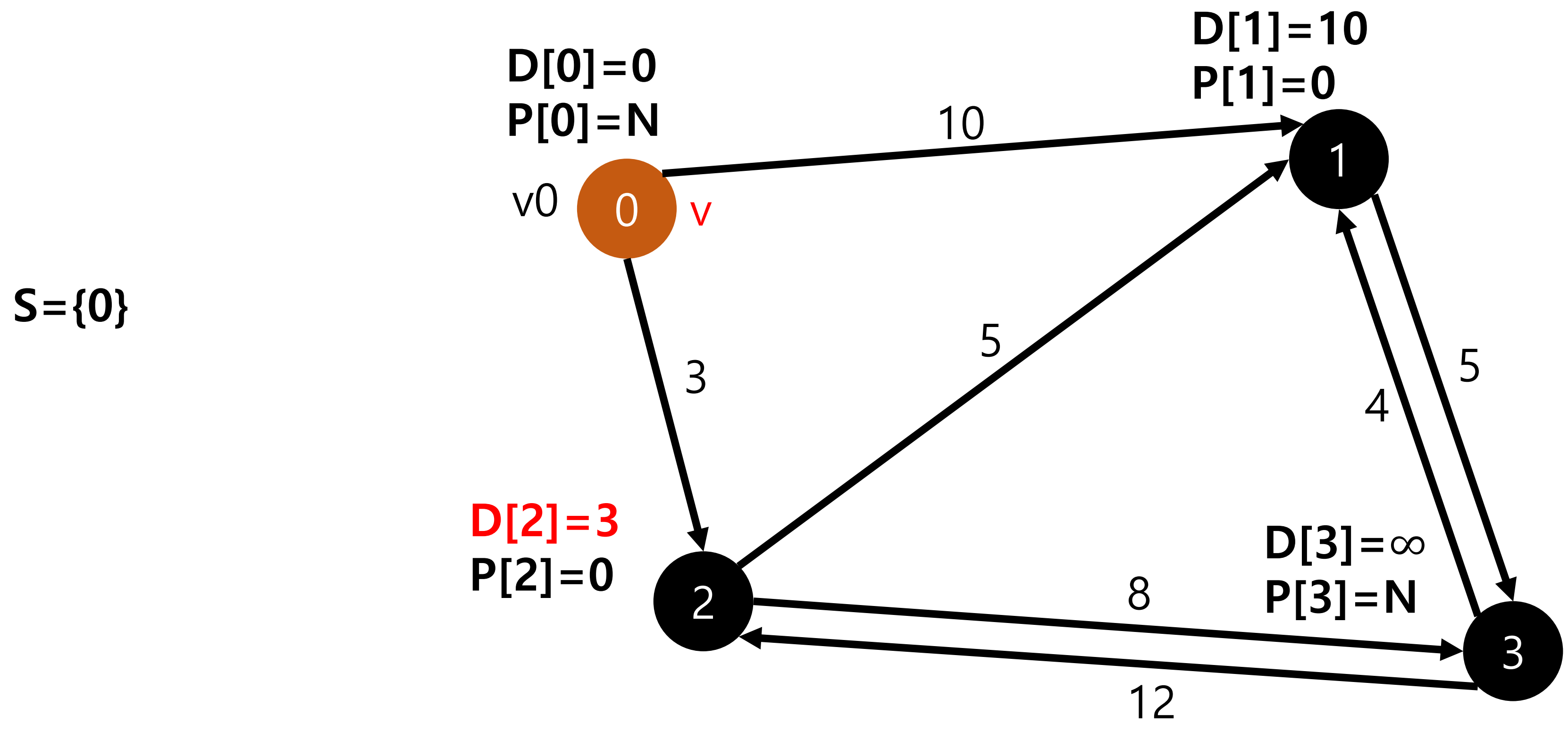


Dijkstra 알고리즘



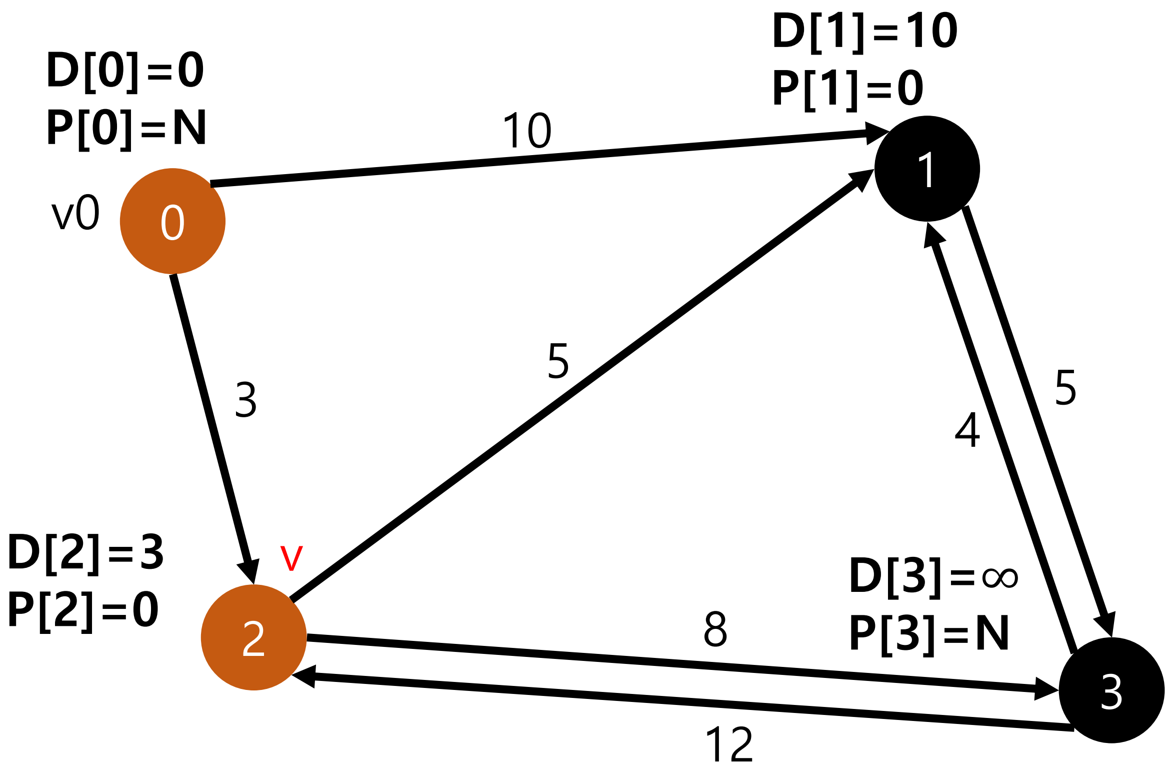
S={0}

Dijkstra 알고리즘



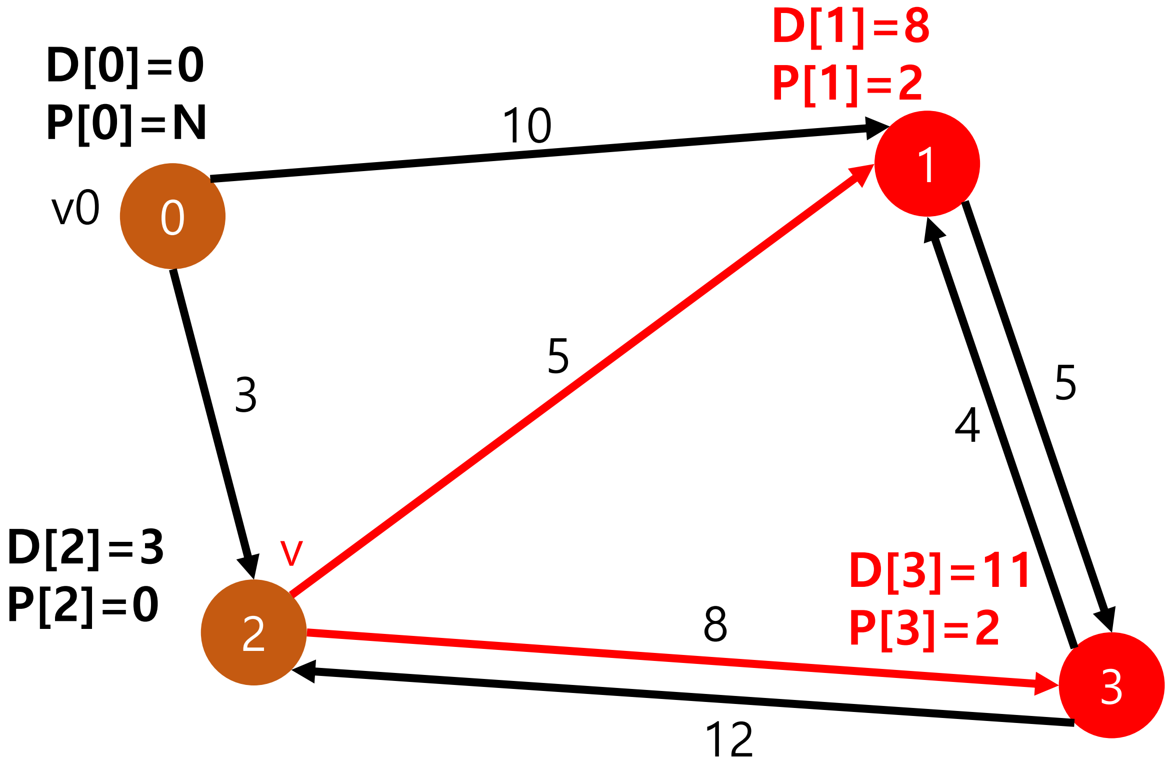
Dijkstra 알고리즘

S={0, 2}



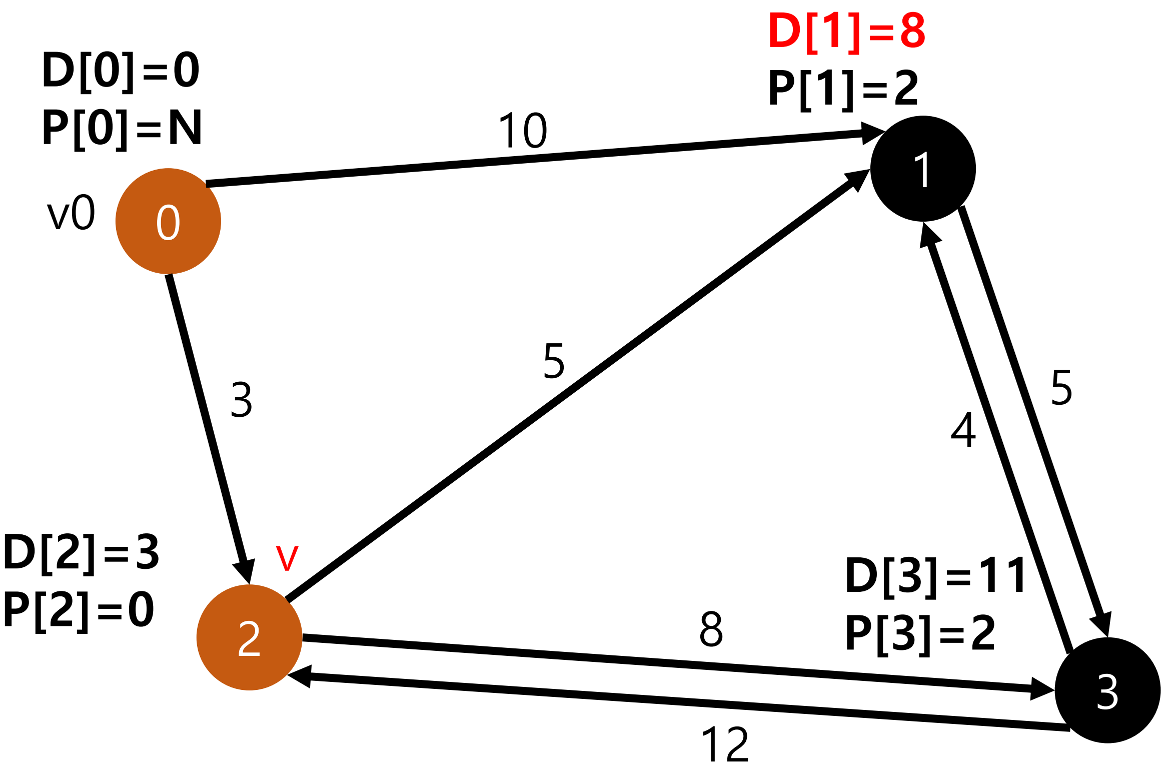
Dijkstra 알고리즘

S={0, 2}



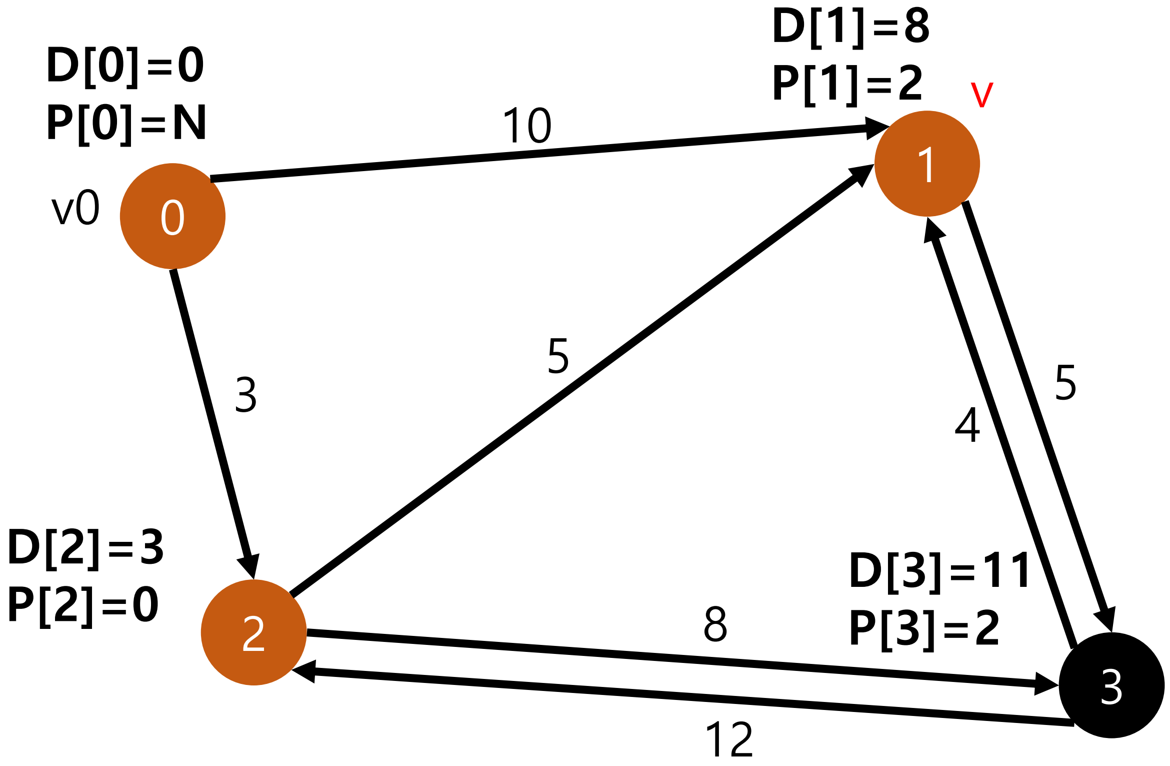
Dijkstra 알고리즘

S={0, 2}



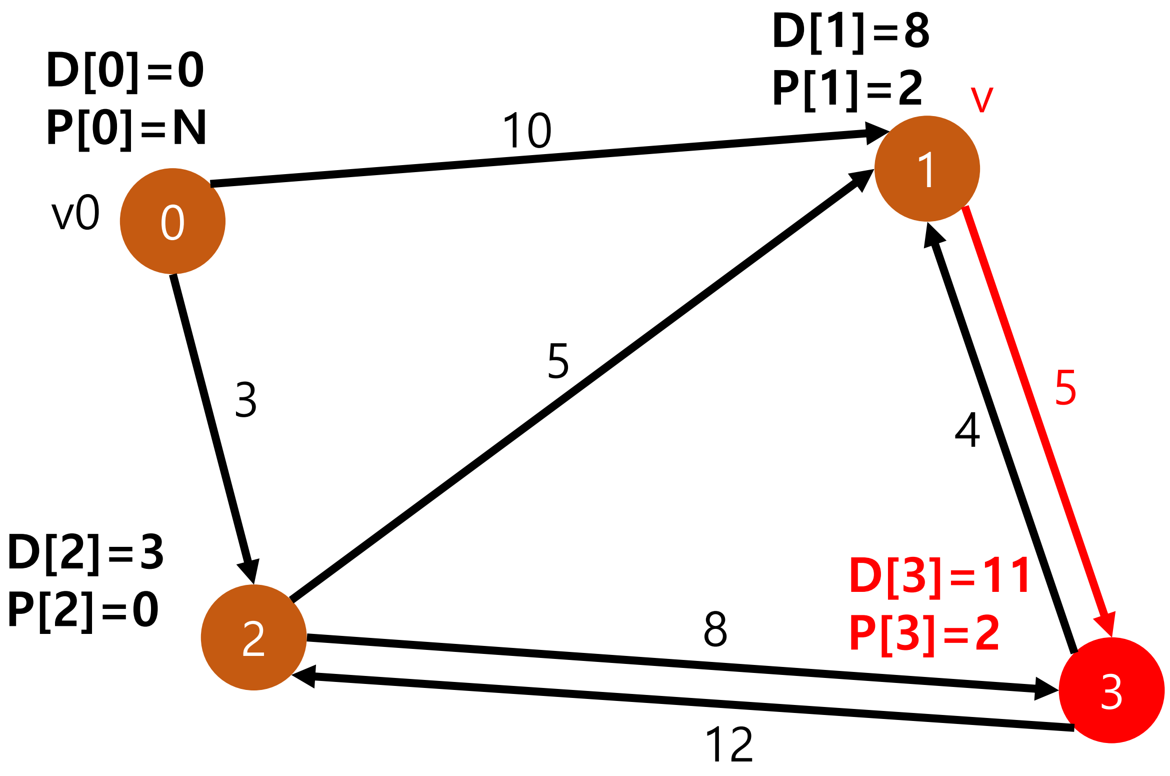
Dijkstra 알고리즘

S={0, 2, 1}



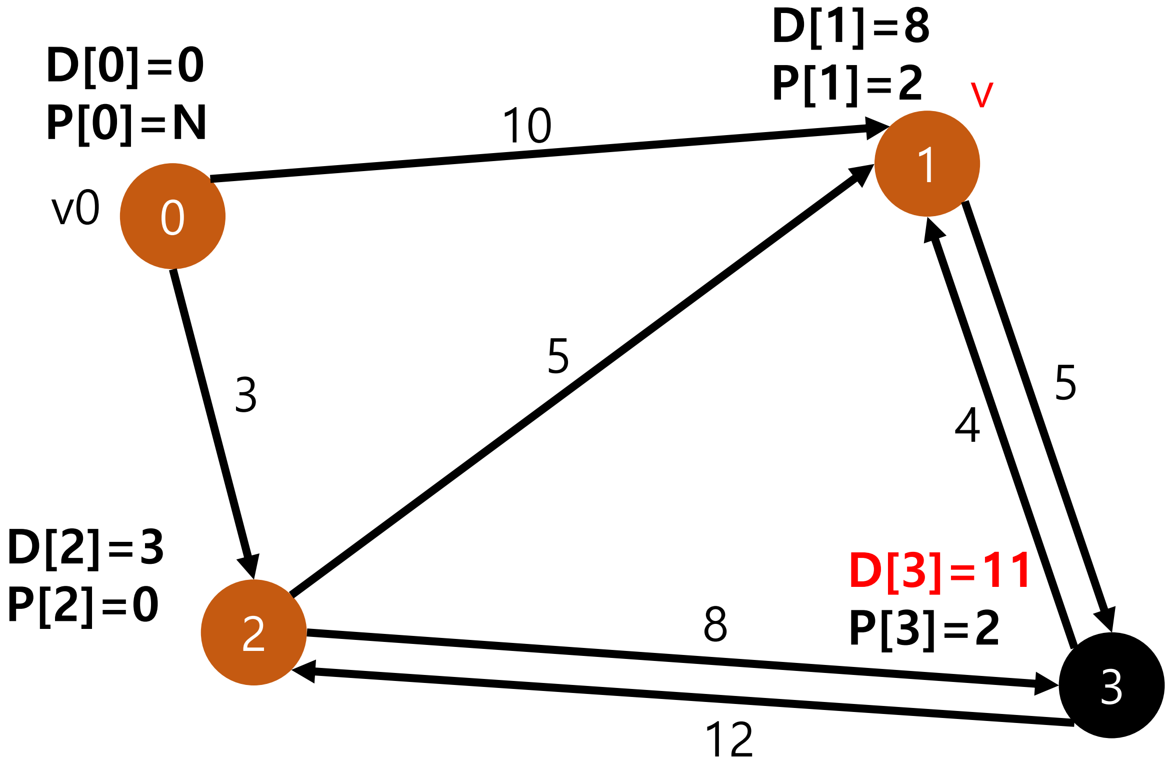
Dijkstra 알고리즘

S={0, 2, 1}



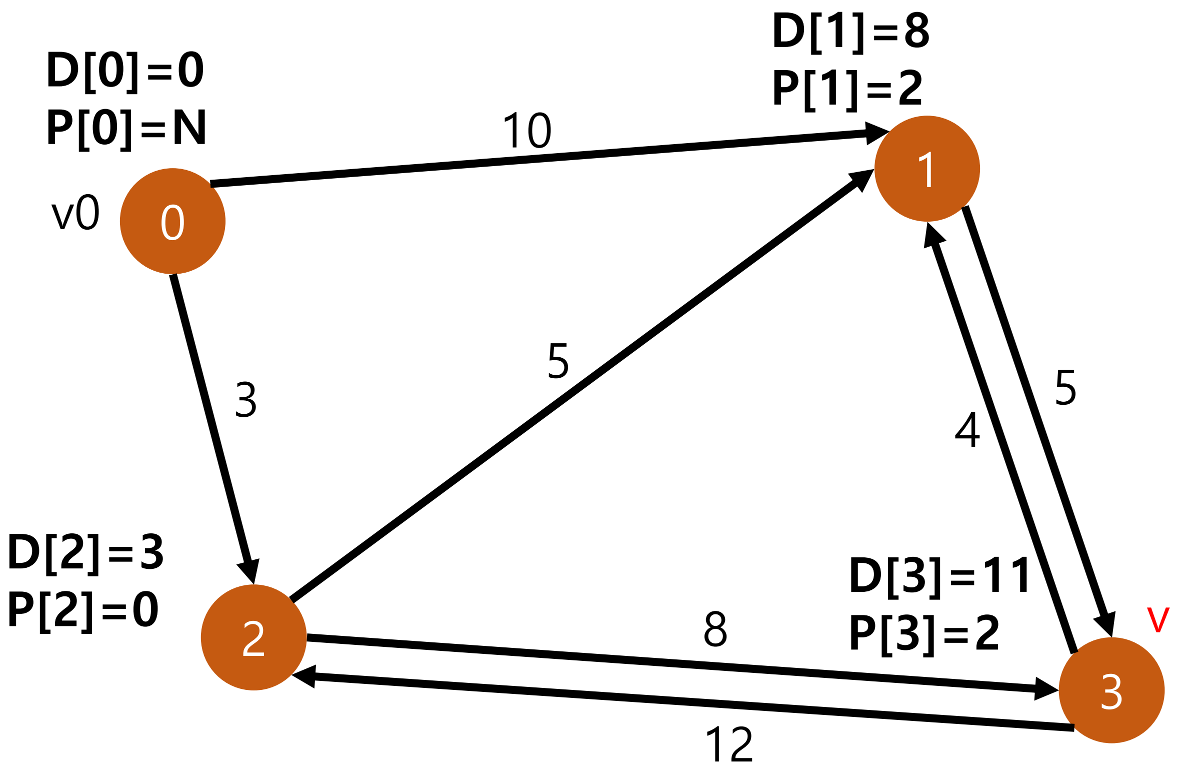
Dijkstra 알고리즘

S={0, 2, 1}

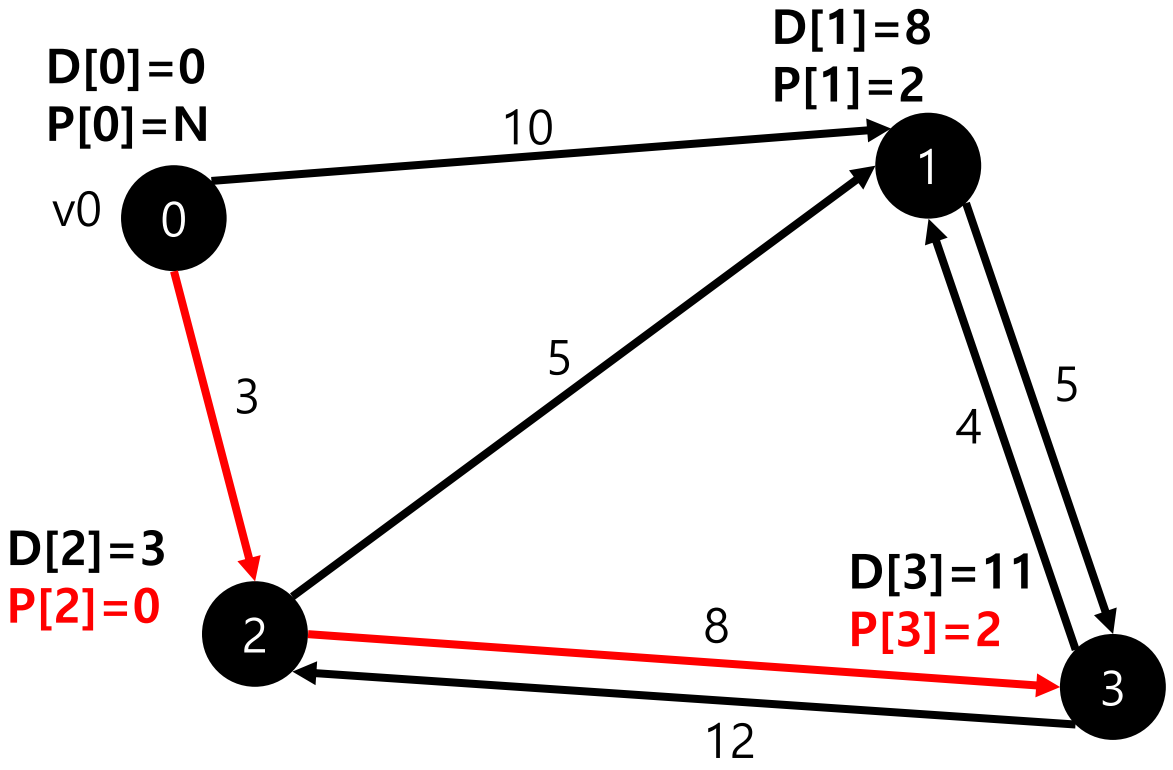


Dijkstra 알고리즘

S={0, 2, 1, 3}



Dijkstra 알고리즘



정점 0에서 정점 3까지의 최단 경로

0 → 2 → 3

Floyd-Warshall 알고리즘

Floyd-Warshall 알고리즘
1. Dynamic Programming
2. 모든 (출발점, 목적지) 쌍에 대한 최단 경로

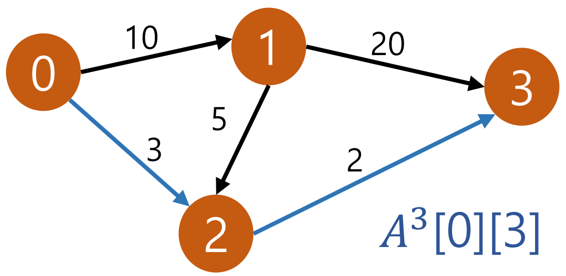
Floyd-Warshall 알고리즘

0~k 정점만 거치면서 i에서 j까지 가는 최단 경로의 길이

1. Recursion
   $\boxed{A^{k}[i][j]}=\min\{A^{k-1}[i][j],\ A^{k-1}[i][k]+A^{k-1}[k][j]\}$
2. Base case
   $A^{-1}[i][j]=w(i,\ j)$

$\boldsymbol{A^{1}[0][3]}$ **:** 0, 1 정점만 거쳐서 0에서 3까지 가는 최단 경로의 길이

→ $\mathbf{min}\{\underset{\infty}{\boldsymbol{A^{0}[0][3]}},\ \underset{10}{\boldsymbol{A^{0}[0][1]}}+\underset{20}{\boldsymbol{A^{0}[1][3]}}\}$

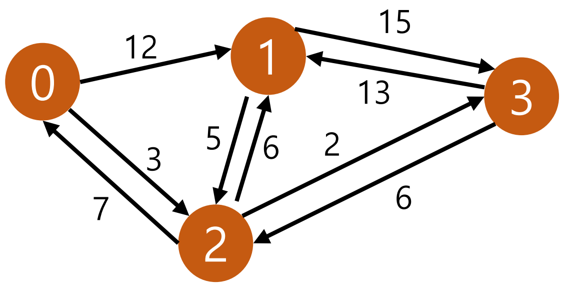


$A^{3}[0][3]$

정점 i에서 정점 j의 최단 경로 길이

$\boldsymbol{A^{n-1}[i][j]}$

Floyd-Warshall 알고리즘

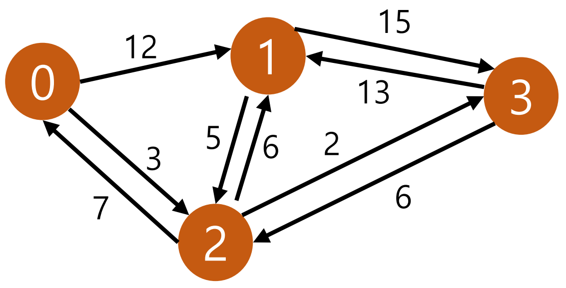


A^{-1}

노드 i에서 j까지
아무 노드도 거치지 않는 경로
즉, 노드 i와 j가 인접하면 A^{-1}[i][j]>0
그렇지 않으면 A^{-1}[i][j]=∞

A^{-1}	0	1	2	3
0	0	12	3	∞
1	∞	0	5	15
2	7	6	0	2
3	∞	13	6	0

Floyd-Warshall 알고리즘

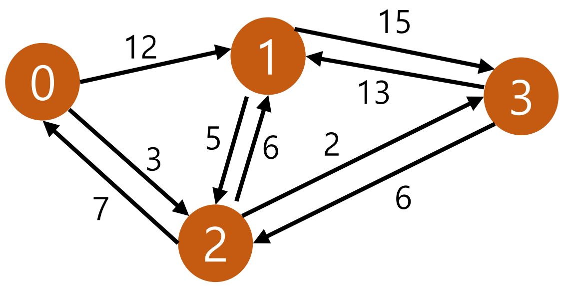


A^0	0	1	2	3
0	0	12	3	∞
1	∞	0	5	15
2	7	6	0	2
3	∞	13	6	0

$\boldsymbol{A^0}$

노드 i에서 j까지
정점 0을 거치거나 안 거칠 때 경로
A^0[i][j]= min{A^{-1}[i][j], A^{-1}[i][0]+A^{-1}[0][j]}

Floyd-Warshall 알고리즘

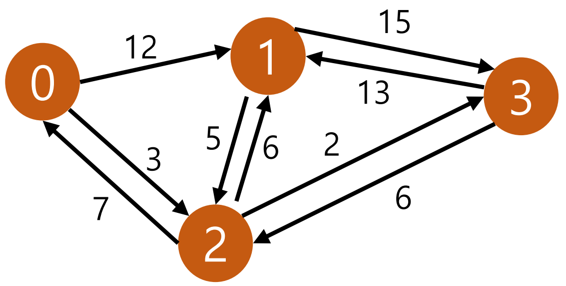


A^1	0	1	2	3
0	0	12	3	27
1	∞	0	5	15
2	7	6	0	2
3	∞	13	6	0

$\boldsymbol{A^1}$

노드 i에서 j까지
정점 0, 1을 거치거나 안 거칠 때 경로
A^1[i][j]= min{A^0[i][j], A^0[i][1]+A^0[1][j]}

Floyd-Warshall 알고리즘

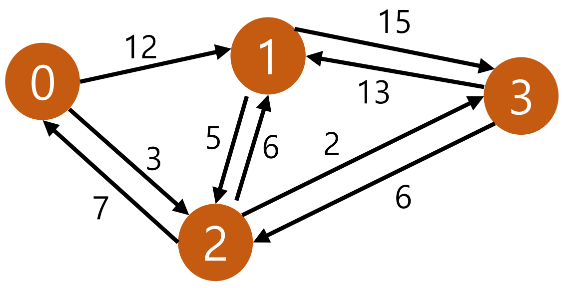


A^2

노드 i에서 j까지
정점 0, 1, 2을 거치거나 안 거칠 때 경로
A^2[i][j]= min{A^1[i][j], A^1[i][2]+A^1[2][j]}

A^2	0	1	2	3
0	0	9	3	5
1	12	0	5	7
2	7	6	0	2
3	13	12	6	0

Floyd-Warshall 알고리즘

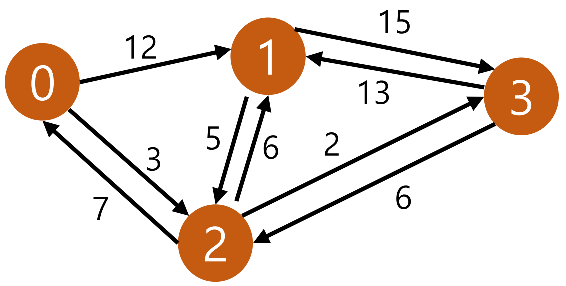


A^3

노드 i에서 j까지
정점 0, 1, 2, 3을 거치거나 안 거칠 때 경로
A^3[i][j]= min{A^2[i][j], A^2[i][3]+A^2[3][j]}

A^3	0	1	2	3
0	0	9	3	5
1	12	0	5	7
2	7	6	0	2
3	13	12	6	0

Floyd-Warshall 알고리즘



$A^3[i][j]$
정점 i에서 정점[j]까지의
최단 경로 길이

A^3	0	1	2	3
0	0	9	3	5
1	12	0	5	7
2	7	6	0	2
3	13	12	6	0

2차원 배열 하나만 쓰면 되는 이유

A^2[i][j]= min{A^1[i][j], A^1[i][2]+A^1[2][j]}
→ A^2 행렬을 구하려면 A^1 배열도 있어야
할 것 같지만 그렇게 하지 않고
구한 값을 그냥 덮어쓰면 된다.

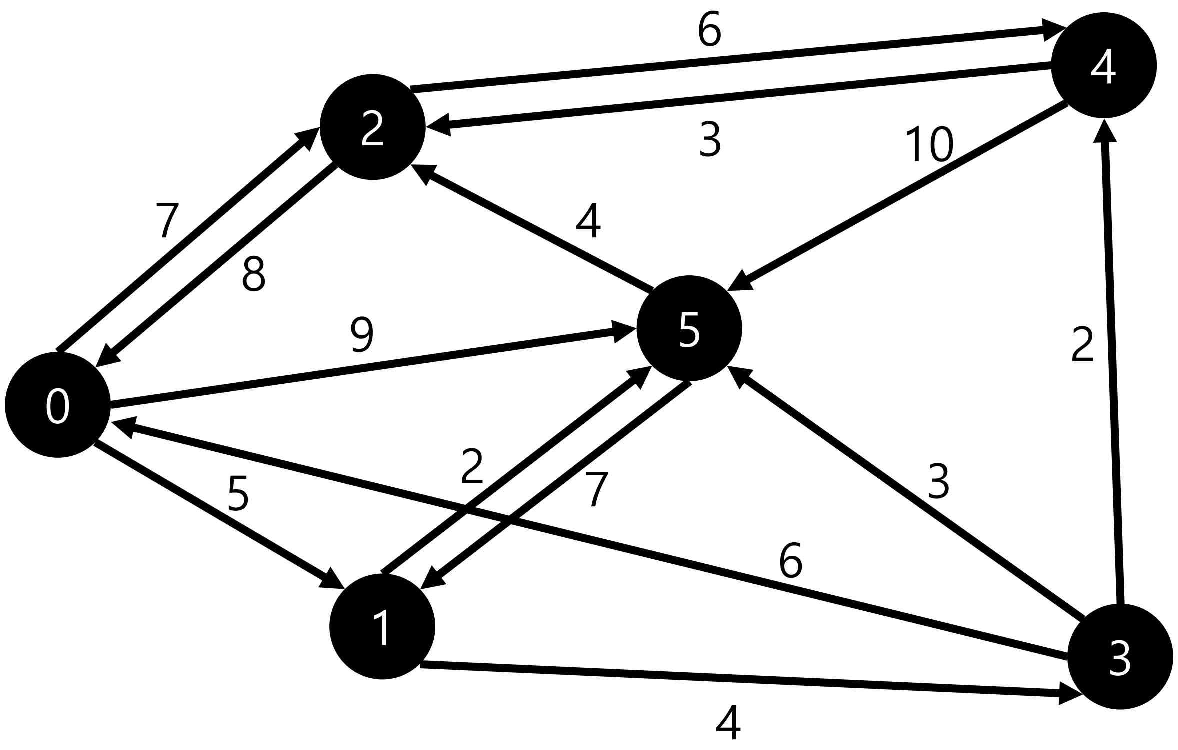
A^k[i][k]= A^{k-1}[i][k]이고 A^k[k][j]= A^{k-1}[k][j]

2차원 배열 하나만 쓰면 되는 이유

A^2	0	1	2	3
0	0	9	3	5
1	12	0	5	7
2	7	6	0	2
3	13	12	6	0

$A^2[3][1]$을 계산할 때 $A^2[2][1]$은 이미 계산이 되어 $A^1[2][1]$이 아니지만 정의에 의해 $A^2[2][1]$와 $A^1[2][1]$가 같으므로 배열 하나에서 계산하여 덮어쓰면 된다.

Floyd-Warshall 예제



Floyd-Warshall 예제

A mat

A^5	0	1	2	3	4	5
0	0	5	7	9	11	7
1	10	0	6	4	6	2
2	8	13	0	17	6	15
3	6	10	5	0	2	3
4	11	16	3	20	0	10
5	12	7	4	11	10	0

Floyd-Warshall 예제

path mat

N : 경유 정점이 없다

	0	1	2	3	4	5
0	N	N	N	1	3	1
1	3	N	5	N	3	N
2	N	0	N	1	N	1
3	N	5	4	N	N	N
4	2	2	N	2	N	N
5	2	N	N	1	2	N

Floyd-Warshall 예제

path mat

Source : 2
Dest : 3

					D		
		0	1	2	3	4	5
	0	N	N	N	1	3	1
	1	3	N	5	N	3	N
S	2	N	0	N	A **1**	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	2	2	N	2	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

S→A→D

2→1→3

Floyd-Warshall 예제

path mat

			A		D		
		0	1	2	3	4	5
	0	N	N	N	1	3	1
	1	3	N	5	N	3	N
S	2	N	B **0**	N	A **1**	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	2	2	N	2	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

S→B→A→D

2→0→1→3

Floyd-Warshall 예제

path mat

		B	A		D		
		0	1	2	3	4	5
	0	N	N	N	1	3	1
	1	3	N	5	N	3	N
S	2	**N**	B **0**	N	A **1**	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	2	2	N	2	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

N은 경유 정점이 없다는 의미이므로
정점 2에서 정점 0으로 바로 간다.

S→B→A→D

2→0→1→3

Floyd-Warshall 예제

path mat

		B	A		D		
		0	1	2	3	4	5
B	0	N	**N**	N	1	3	1
	1	3	N	5	N	3	N
S	2	**N**	B **0**	N	A **1**	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	2	2	N	2	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

N은 경유 정점이 없다는 의미이므로
정점 0에서 정점 1으로 바로 간다.

S→**B→A**→D

2→**0→1**→3

Floyd-Warshall 예제

path mat

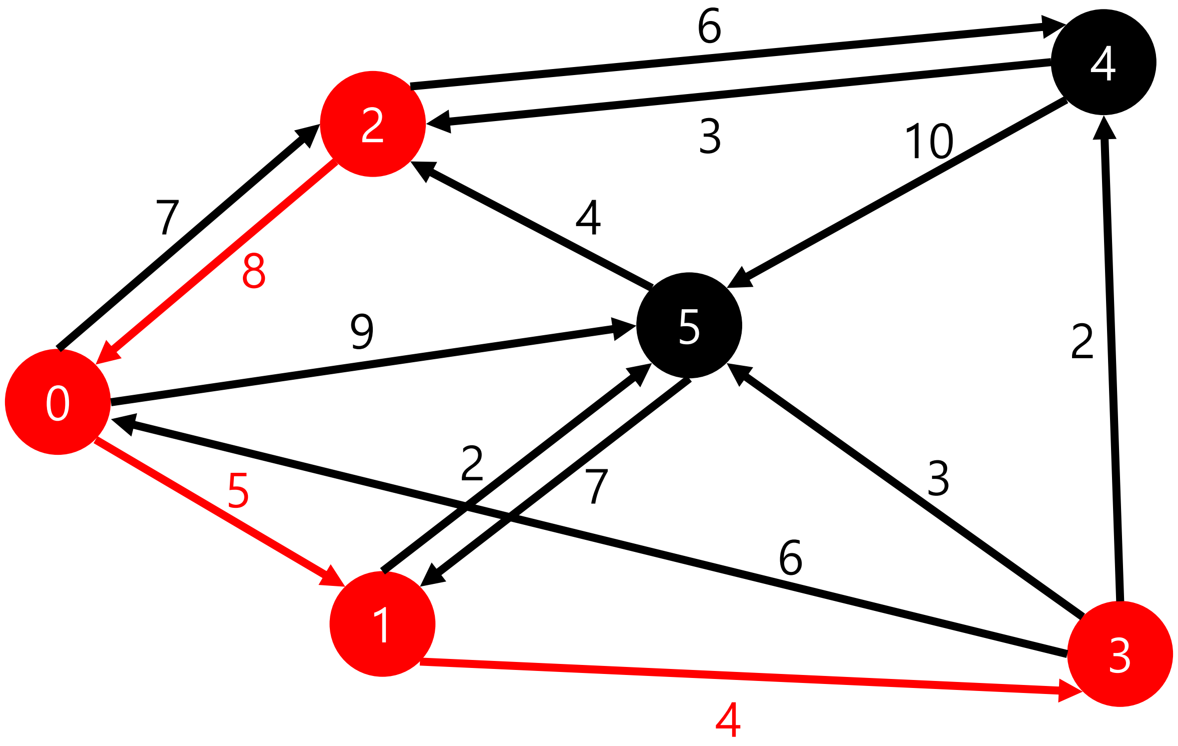
		B	A		D		
		0	1	2	3	4	5
B	0	N	**N**	N	1	3	1
A	1	3	N	5	**N**	3	N
S	2	**N**	B **0**	N	A **1**	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	2	2	N	2	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

N은 경유 정점이 없다는 의미이므로
정점 1에서 정점 3으로 바로 간다.

S→B→**A→D**

2→0→**1→3**

Floyd-Warshall 예제



정점 2에서 정점 3까지의 최단 경로와 길이

경로 : 2→0→1→3
길이 : 17