

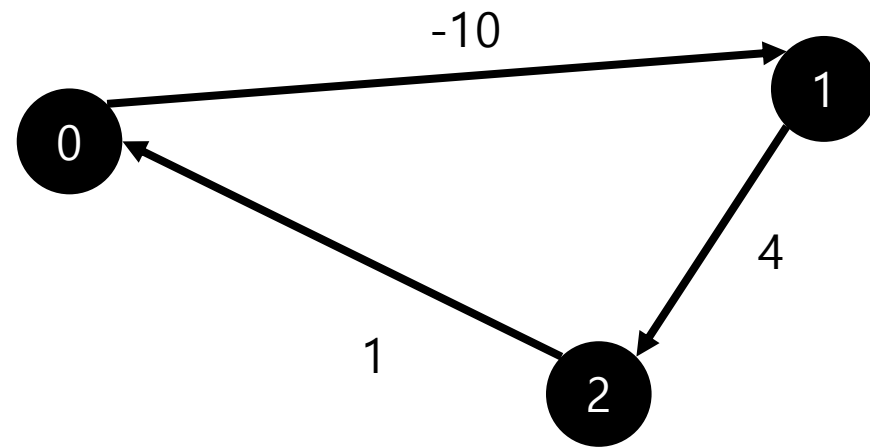
Shortest path

최단 경로

최단 경로(shortest path)

1. 음수 사이클이 없다.
2. 방향 그래프(directed graph)
3. 가중치 그래프(weighted graph)
4. 경로의 길이
: 에지 가중치의 합

음수 사이클(negative cycle)



최단 경로 알고리즘의 종류

1. 하나의 출발점과 나머지 모든 목적지
 - 1) Dijkstra 알고리즘(음수 가중치가 없다)
 - 2) Bellman-Ford 알고리즘(일반적인 경우)
2. 모든 (출발점, 목적지) 쌍
 - 1) Floyd-Warshall 알고리즘

Dijkstra 알고리즘

Dijkstra 알고리즘

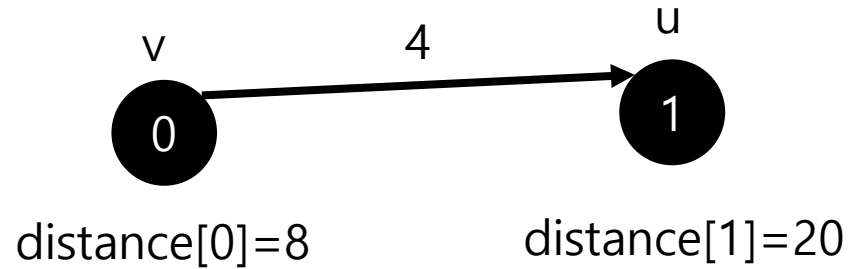
1. 탐욕 알고리즘

2. 음수 가중치가 없다.

3. 최단 경로가 발견된 정점의 집합 S

4. 정점 $v(v \in V - S)$ 의 $\text{distance}[v]$
: 출발 정점에서 S 에 있는 정점만 거쳐
 v 에 도달하는 경로의 길이

Relaxation of an edge

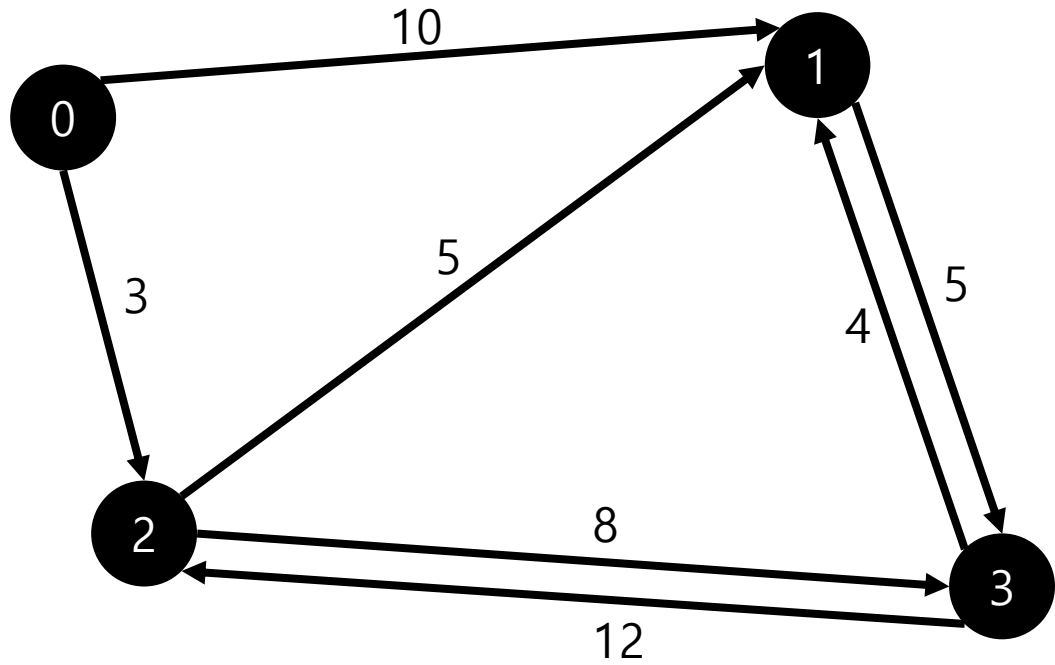


출발 정점에서 정점 u 까지 정점 v 를 거치지 않고
오는 경로의 길이 $\text{distance}[1]$ 보다
출발 정점에서 정점 v 까지 먼저 온 후 정점 u 로 가는
경로의 길이 $\text{distance}[0] + w(v, u)$ 가 더 작으면
 $\text{distance}[1]$ 를 업데이트한다

```
if distance[u] > distance[v] + w[v, u]
    distance[u] = distance[v] + w[v, u]
```

Graph representation

Adjacency matrix

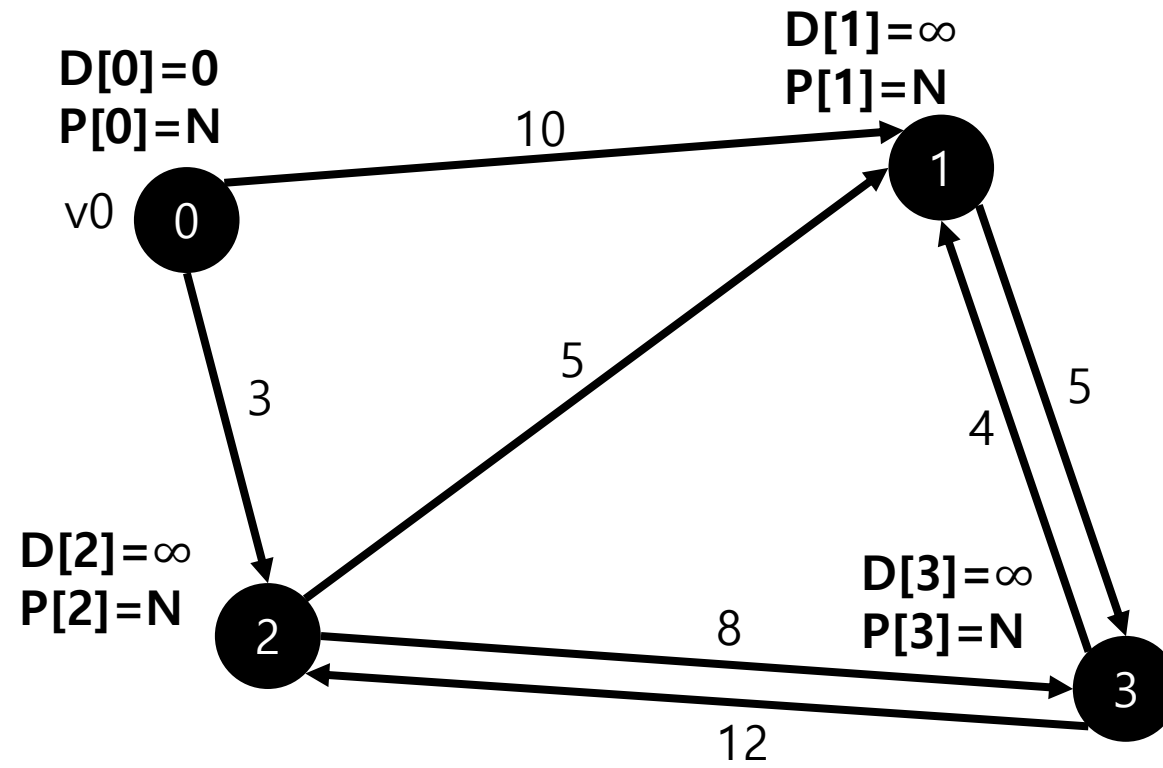


정점 i, j 가 인접하면 에지의 가중치
인접하지 않으면 None

	0	1	2	3
0	N	10	3	N
1	N	N	N	5
2	N	5	N	8
3	N	4	12	N

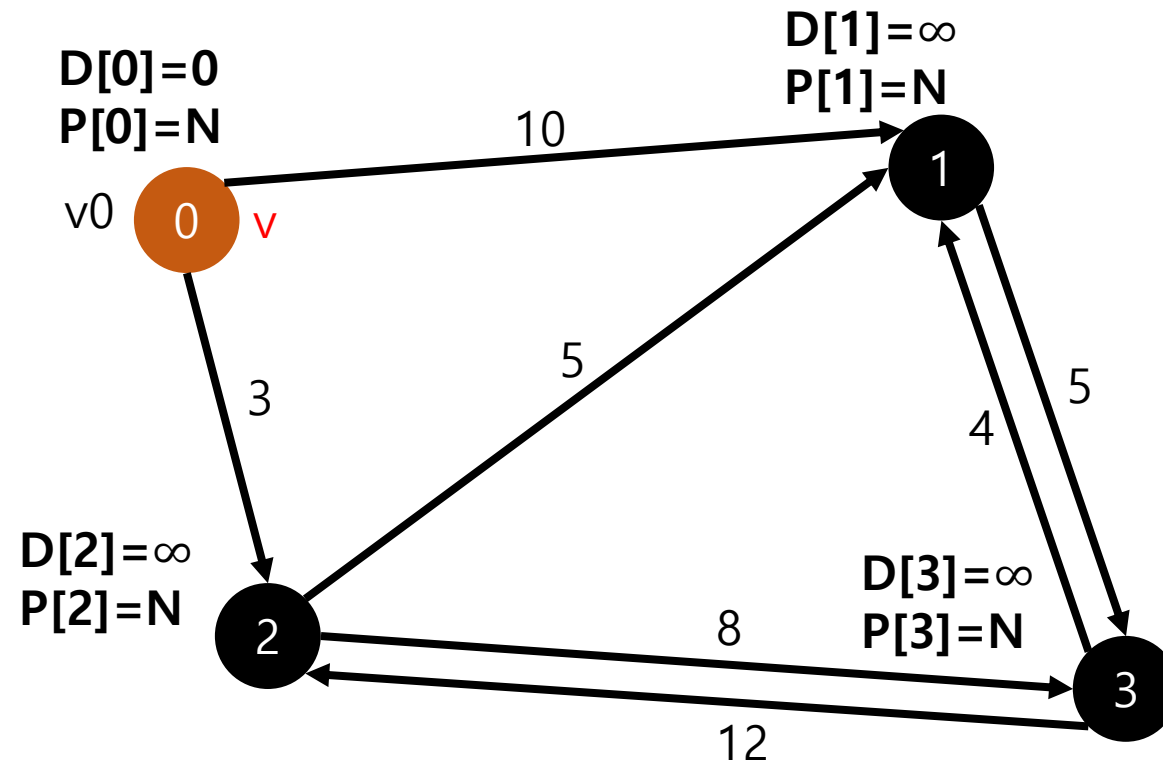
Dijkstra 알고리즘

$S=\{\}$



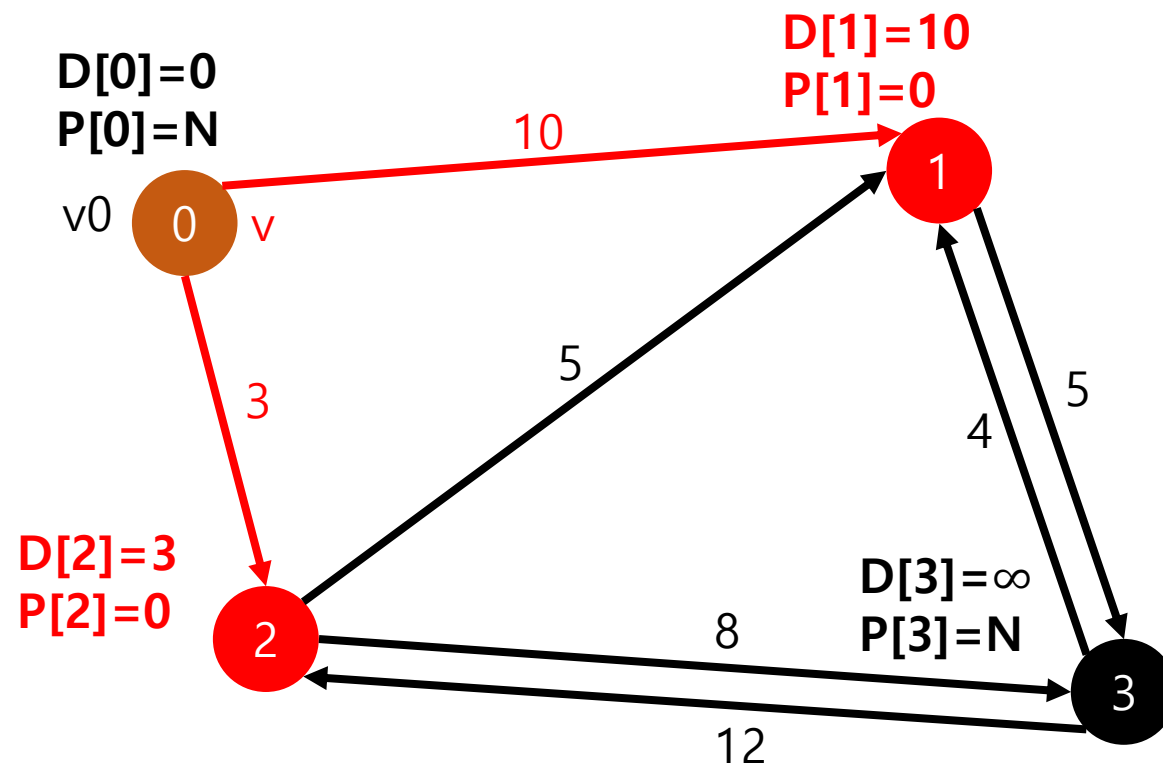
Dijkstra 알고리즘

$S=\{0\}$



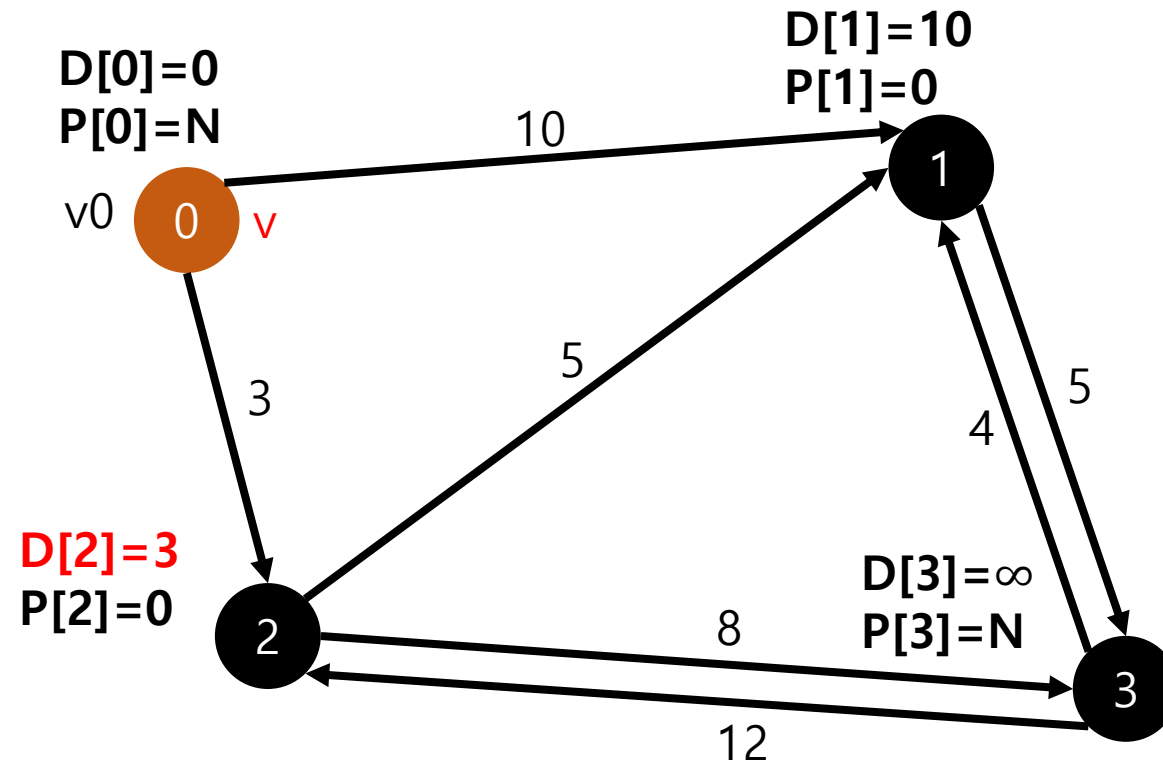
Dijkstra 알고리즘

$S=\{0\}$



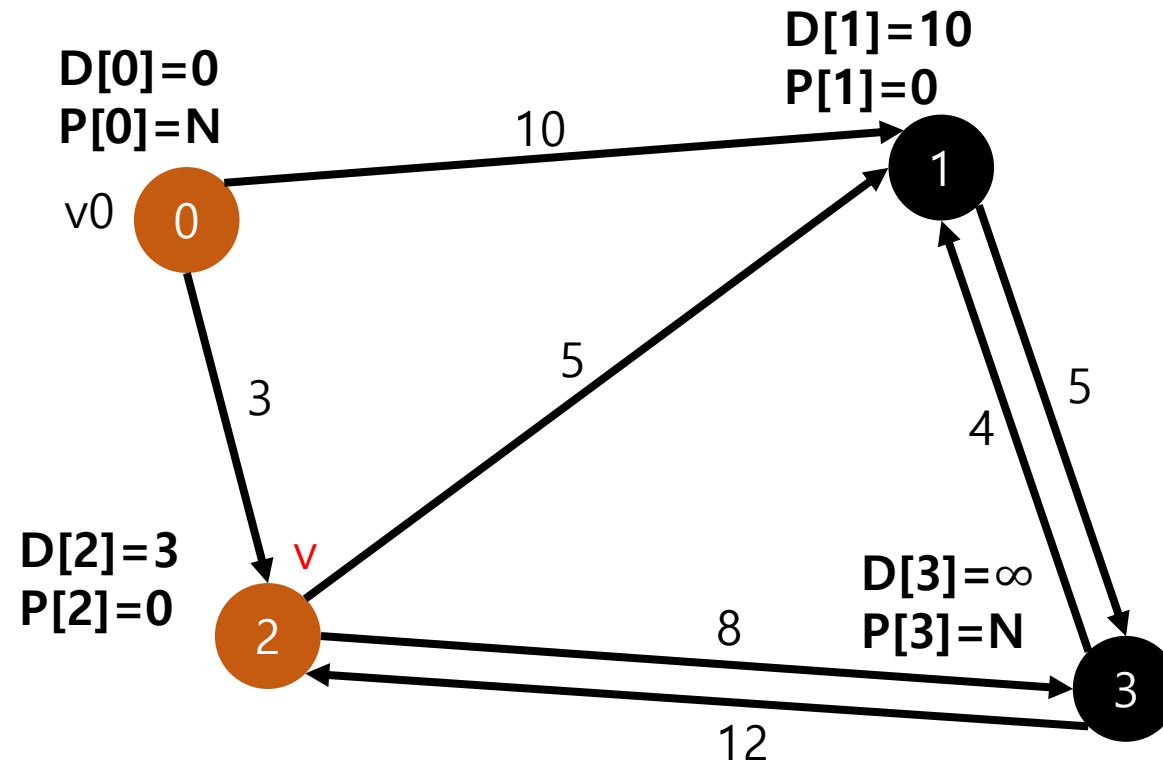
Dijkstra 알고리즘

$S=\{0\}$



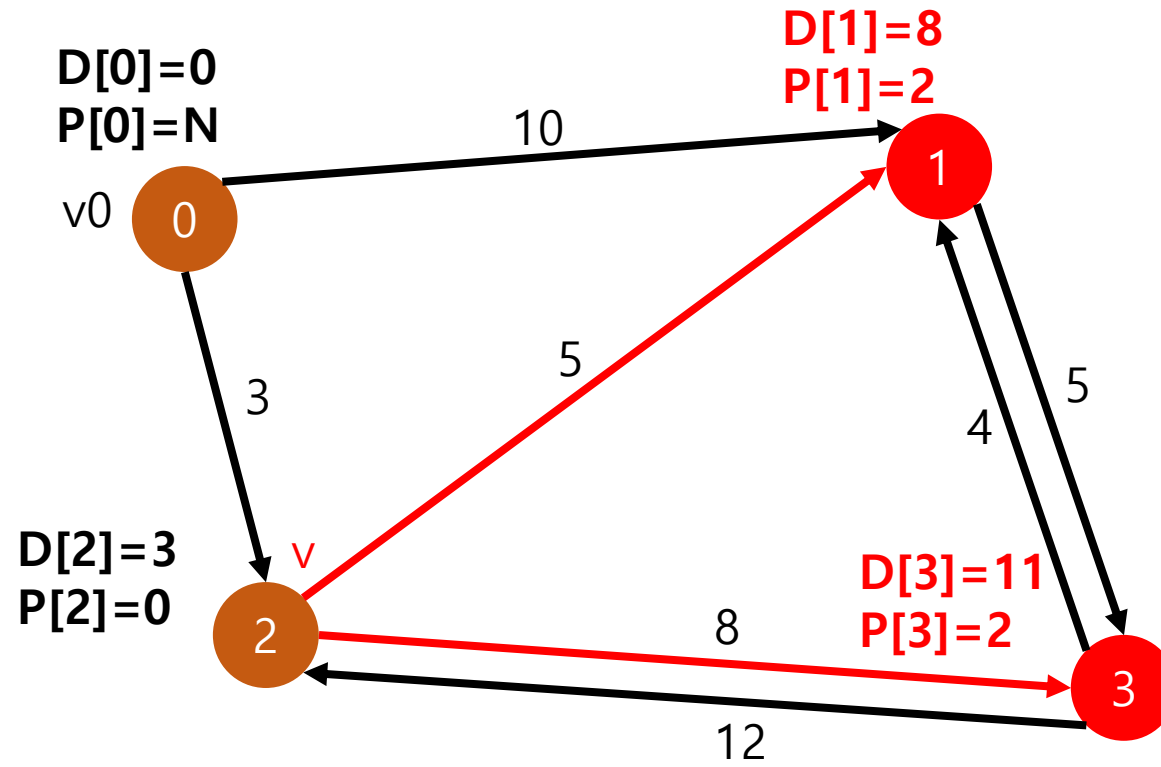
Dijkstra 알고리즘

$S=\{0, 2\}$



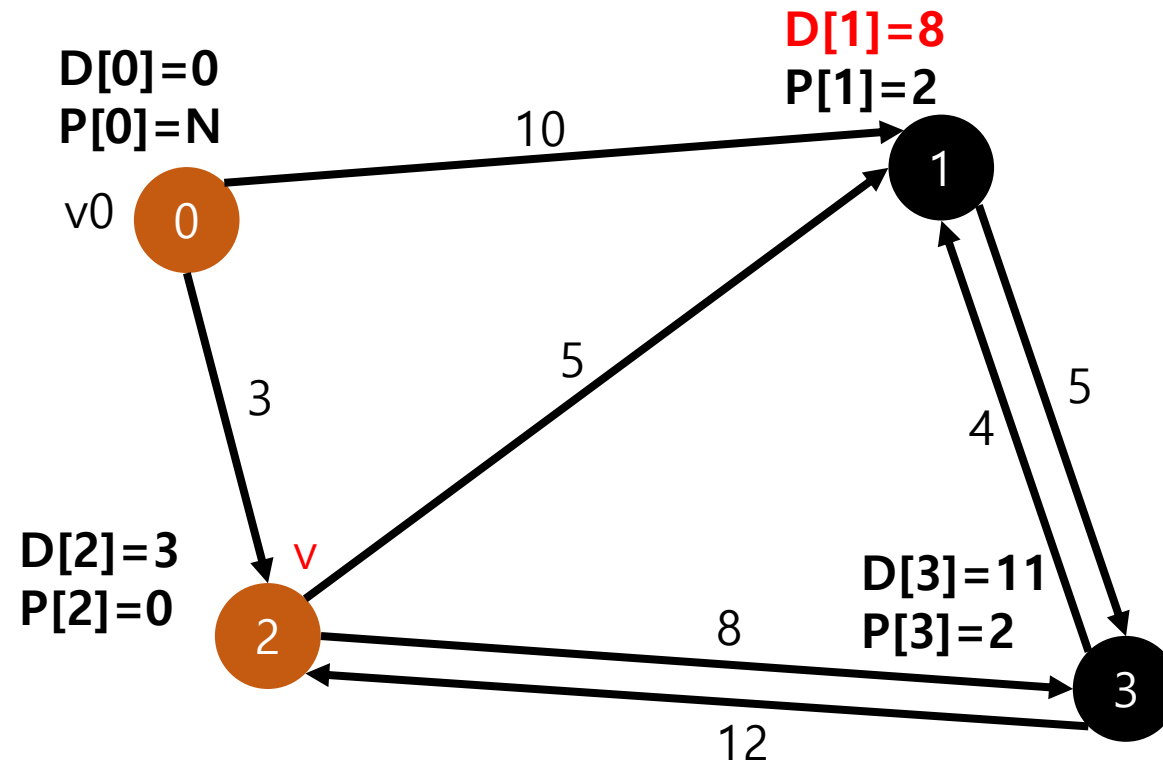
Dijkstra 알고리즘

$S = \{0, 2\}$



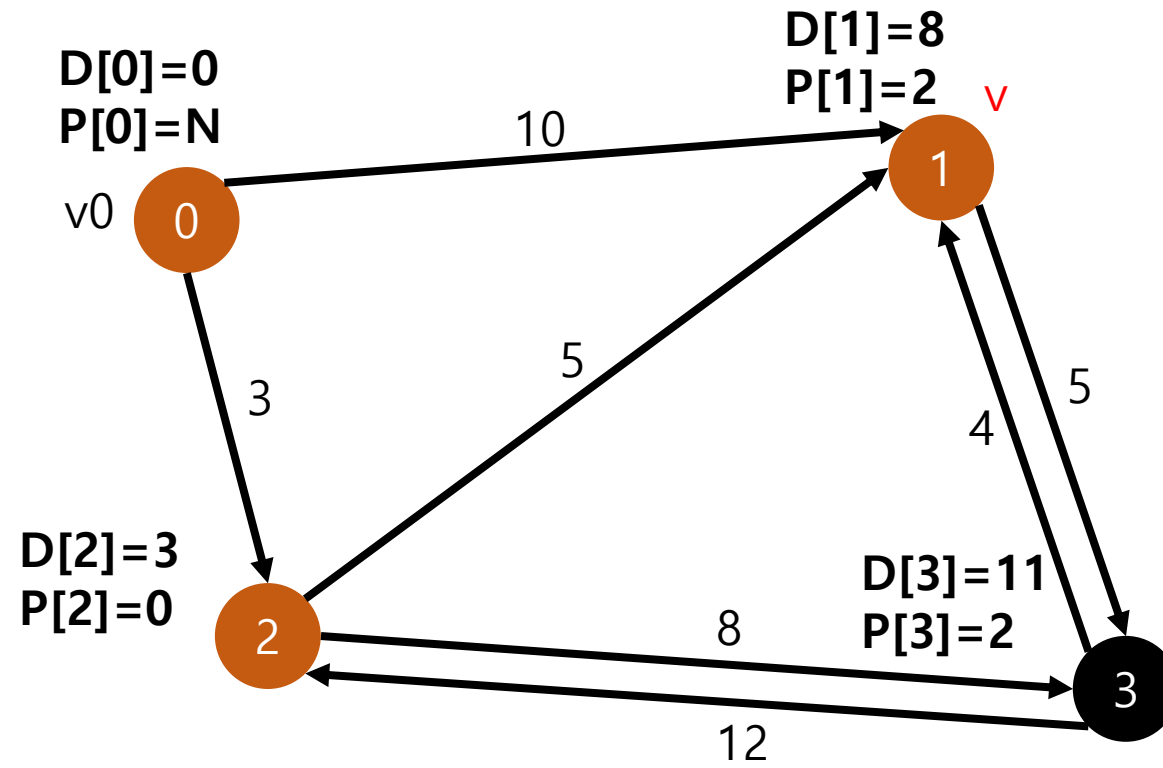
Dijkstra 알고리즘

$S = \{0, 2\}$



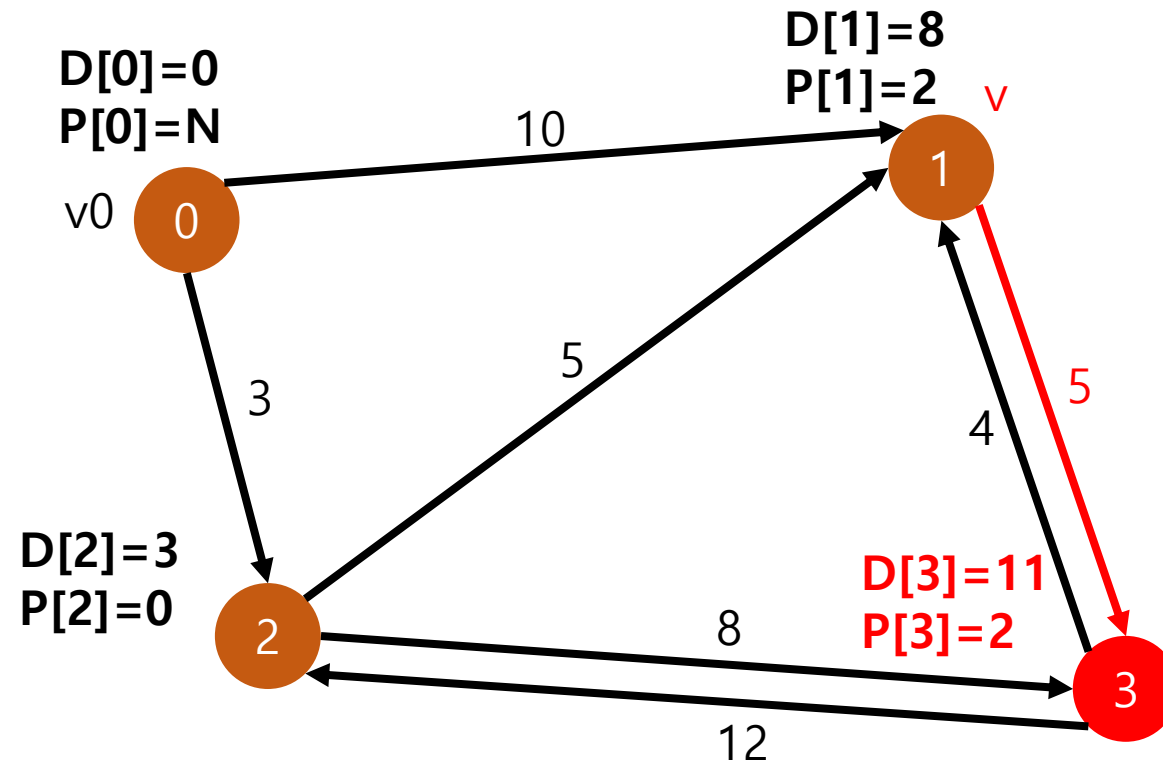
Dijkstra 알고리즘

$S = \{0, 2, 1\}$



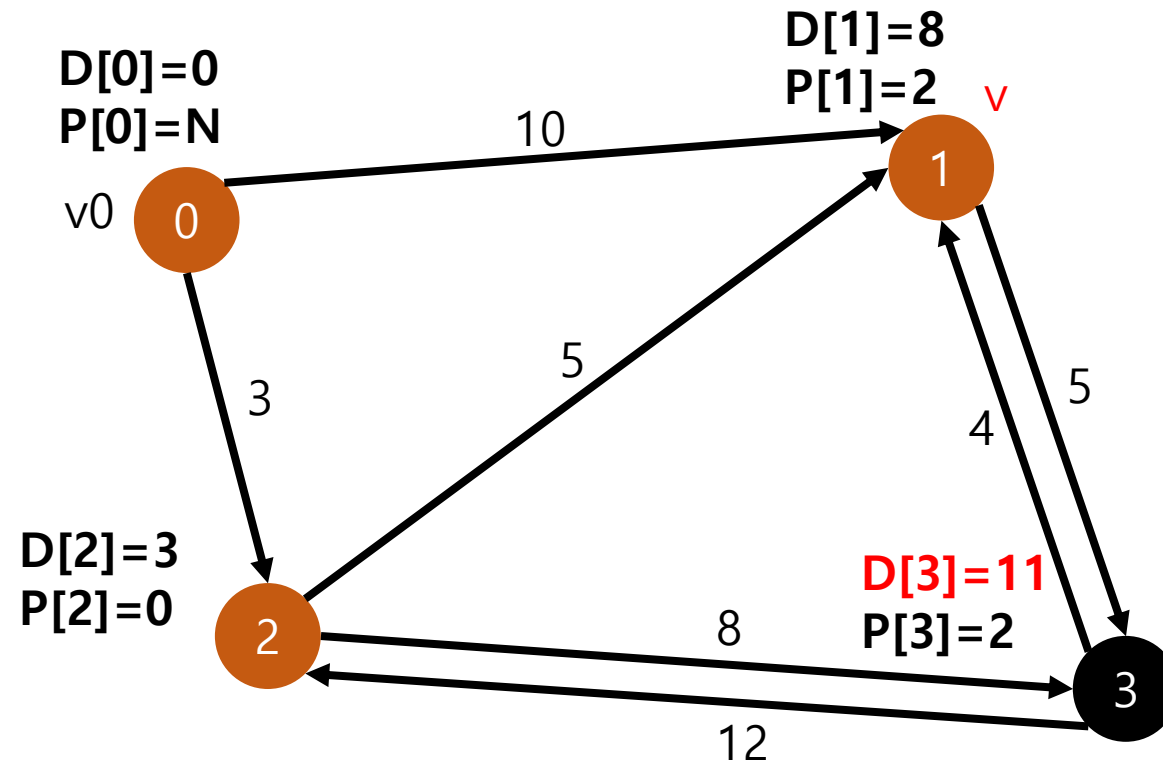
Dijkstra 알고리즘

$S = \{0, 2, 1\}$



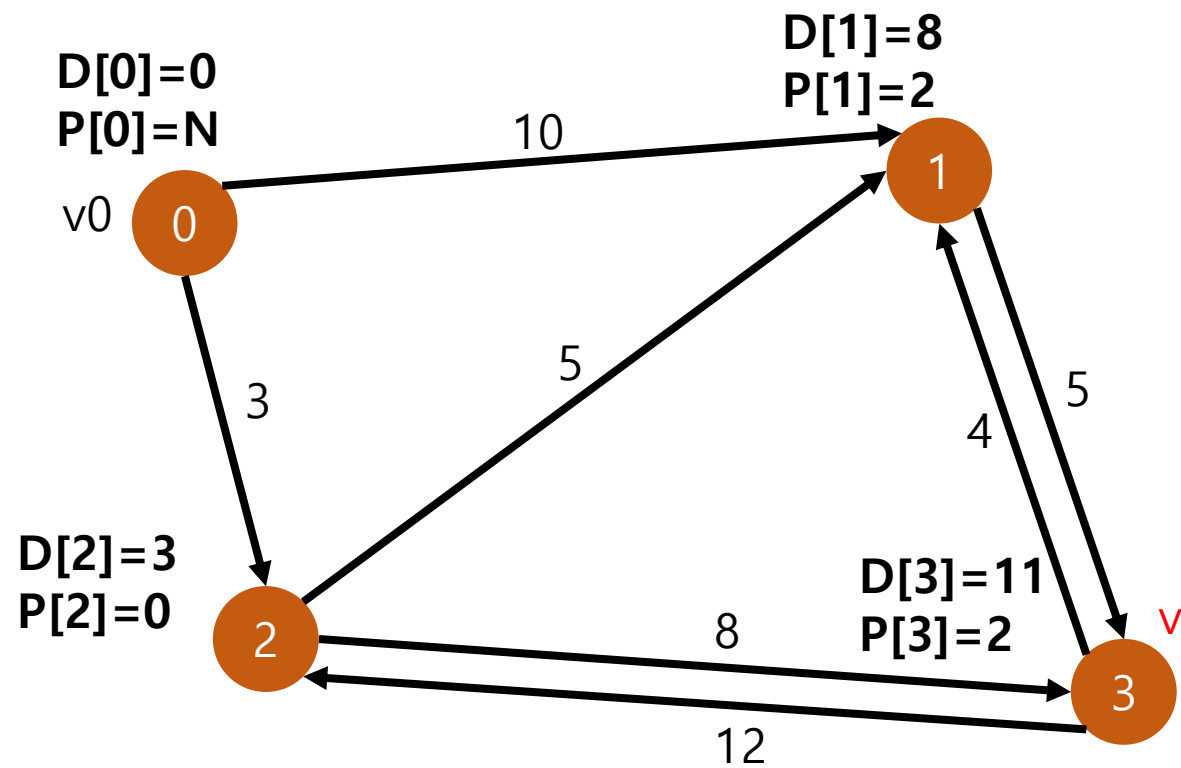
Dijkstra 알고리즘

$S = \{0, 2, 1\}$

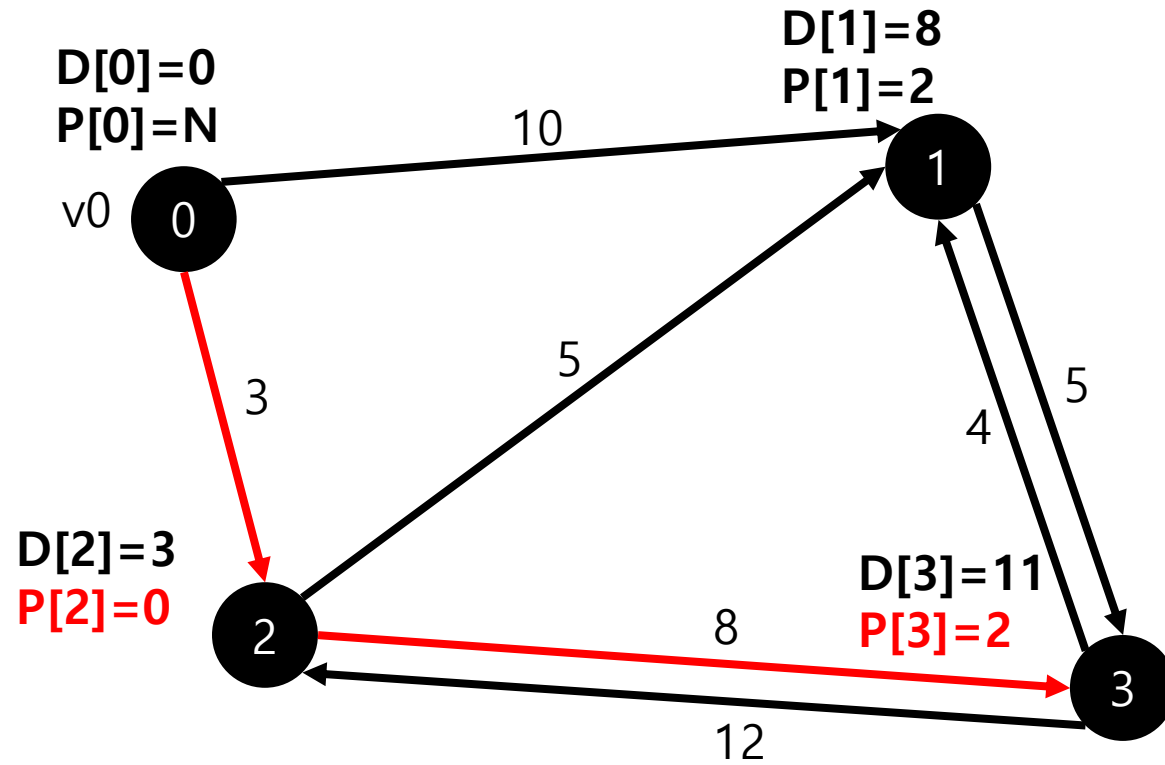


Dijkstra 알고리즘

$S = \{0, 2, 1, 3\}$



Dijkstra 알고리즘



정점 0에서 정점 3까지의 최단 경로

$0 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

Floyd-Warshall 알고리즘

Floyd-Warshall 알고리즘

1. Dynamic Programming
2. 모든 (출발점, 목적지) 쌍에 대한 최단 경로

Floyd-Warshall 알고리즘

0~k 정점만 거치면서 i에서 j까지 가는
최단 경로의 길이

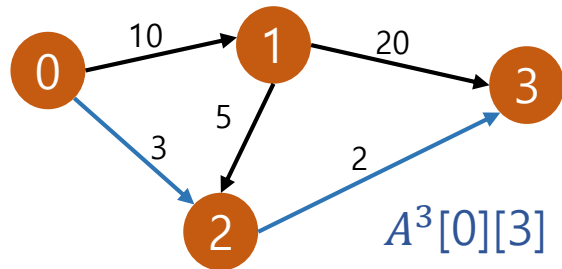
1. Recursion

$$A^k[i][j] = \min\{A^{k-1}[i][j], A^{k-1}[i][k] + A^{k-1}[k][j]\}$$

2. Base case

$$A^{-1}[i][j] = w(i, j)$$

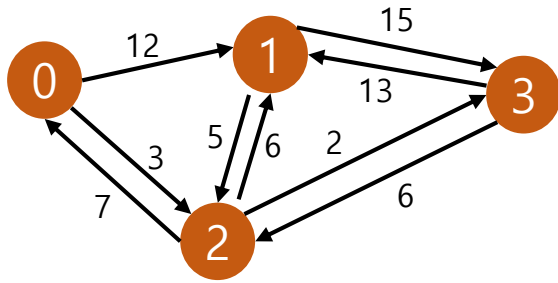
$A^1[0][3]$: 0, 1 정점만 거쳐서 0에서 3까지 가는 최단 경로의 길이
 $\rightarrow \min\{A^0[0][3], A^0[0][1] + A^0[1][3]\}$
 $\infty \quad 10 \quad 20$



정점 i에서 정점 j의 최단 경로 길이

$$A^{n-1}[i][j]$$

Floyd-Warshall 알고리즘

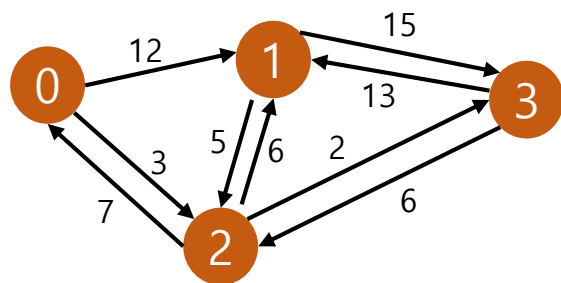


A^{-1}

노드 i에서 j까지
아무 노드도 거치지 않는 경로
즉, 노드 i와 j가 인접하면 $A^{-1}[i][j] > 0$
그렇지 않으면 $A^{-1}[i][j] = \infty$

A^{-1}	0	1	2	3
0	0	12	3	∞
1	∞	0	5	15
2	7	6	0	2
3	∞	13	6	0

Floyd-Warshall 알고리즘



A^0

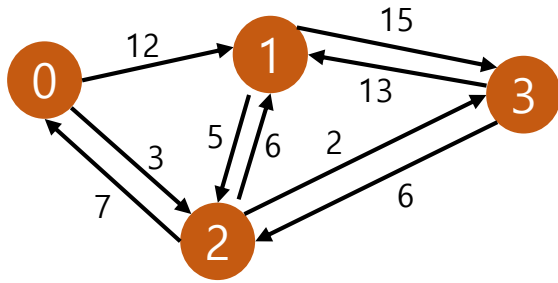
노드 i에서 j까지

정점 0을 거치거나 안 거칠 때 경로

$$A^0[i][j] = \min\{A^{-1}[i][j], A^{-1}[i][0] + A^{-1}[0][j]\}$$

A^0	0	1	2	3
0	0	12	3	∞
1	∞	0	5	15
2	7	6	0	2
3	∞	13	6	0

Floyd-Warshall 알고리즘

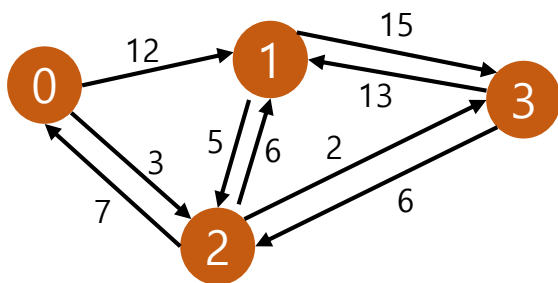


A^1

노드 i에서 j까지
정점 0, 1을 거치거나 안 거칠 때 경로
 $A^1[i][j] = \min\{A^0[i][j], A^0[i][1] + A^0[1][j]\}$

A^1	0	1	2	3
0	0	12	3	27
1	∞	0	5	15
2	7	6	0	2
3	∞	13	6	0

Floyd-Warshall 알고리즘

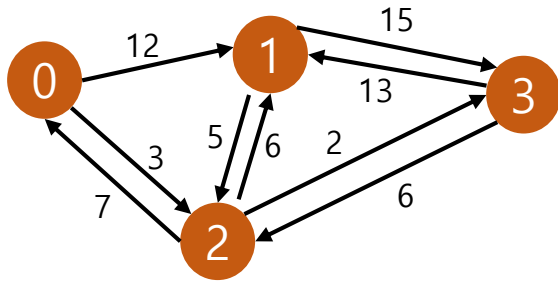


A^2

노드 i에서 j까지
정점 0, 1, 2을 거치거나 안 거칠 때 경로
 $A^2[i][j] = \min\{A^1[i][j], A^1[i][2] + A^1[2][j]\}$

A^2	0	1	2	3
0	0	9	3	5
1	12	0	5	7
2	7	6	0	2
3	13	12	6	0

Floyd-Warshall 알고리즘

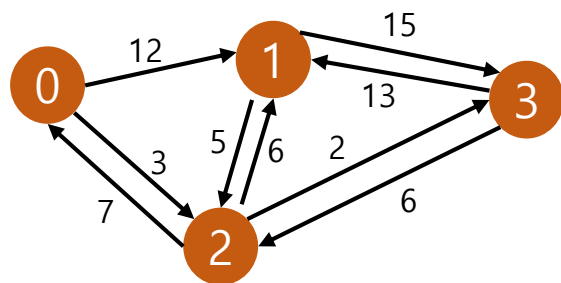


A^3

노드 i에서 j까지
정점 0, 1, 2, 3을 거치거나 안 거칠 때 경로
 $A^3[i][j] = \min\{A^2[i][j], A^2[i][3] + A^2[3][j]\}$

A^3	0	1	2	3
0	0	9	3	5
1	12	0	5	7
2	7	6	0	2
3	13	12	6	0

Floyd-Warshall 알고리즘



$A^3[i][j]$

정점 i에서 정점[j]까지의
최단 경로 길이

A^3	0	1	2	3
0	0	9	3	5
1	12	0	5	7
2	7	6	0	2
3	13	12	6	0

2차원 배열 하나만 쓰면 되는 이유

$A^2[i][j] = \min\{A^1[i][j], A^1[i][2] + A^1[2][j]\}$
→ A^2 행렬을 구하려면 A^1 배열도 있어야
할 것 같지만 그렇게 하지 않고
구한 값을 그냥 덮어쓰면 된다.

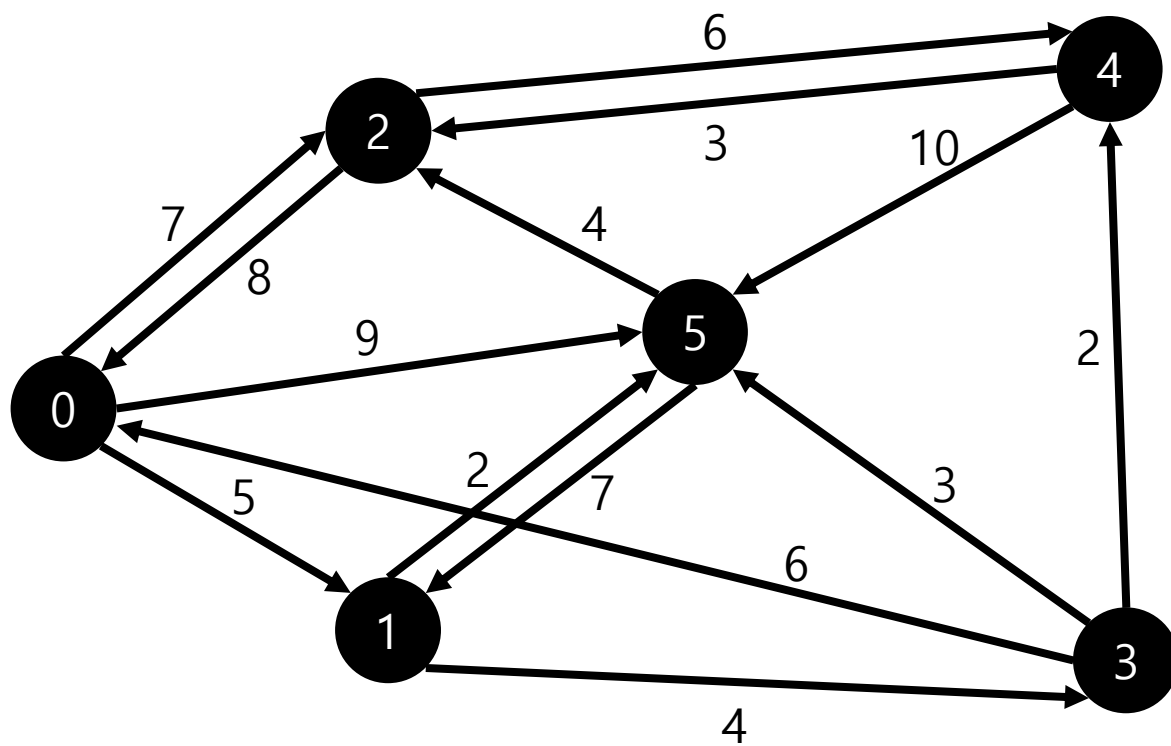
$$A^k[i][k] = A^{k-1}[i][k] \text{이고 } A^k[k][j] = A^{k-1}[k][j]$$

2차원 배열 하나만 쓰면 되는 이유

A^2	0	1	2	3
0	0	9	3	5
1	12	0	5	7
2	7	6	0	2
3	13	12	6	0

$A^2[3][1]$ 을 계산할 때 $A^2[2][1]$ 은 이미 계산이 되어
 $A^1[2][1]$ 이 아니지만 정의에 의해 $A^2[2][1]$ 와 $A^1[2][1]$ 가
같으므로 배열 하나에서 계산하여 덮어쓰면 된다.

Floyd-Warshall 예제



Floyd-Warshall 예제

A mat

A^5	0	1	2	3	4	5
0	0	5	7	9	11	7
1	10	0	6	4	6	2
2	8	13	0	17	6	15
3	6	10	5	0	2	3
4	8	13	3	17	0	10
5	12	7	4	11	10	0

Floyd-Warshall 예제

path mat

N : 경유 정점이 없다

	0	1	2	3	4	5
0	N	N	N	1	3	1
1	3	N	5	N	3	N
2	N	0	N	1	N	1
3	N	5	4	N	N	N
4	N	0	N	1	N	N
5	2	N	N	1	2	N

Floyd-Warshall 예제

path mat

Source : 2
Dest : 3

					D		
		0	1	2	3	4	5
	0	N	N	N	1	3	1
	1	3	N	5	N	3	N
S	2	N	0	N	A 1	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	N	0	N	1	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

$S \rightarrow A \rightarrow D$

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$

Floyd-Warshall 예제

path mat

		A			D		
		0	1	2	3	4	5
S	0	N	N	N	1	3	1
	1	3	N	5	N	3	N
	2	N	B 0	N	A 1	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	N	0	N	1	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

S→B→A→D

2→0→1→3

Floyd-Warshall 예제

path mat

		B	A		D		
		0	1	2	3	4	5
	0	N	N	N	1	3	1
	1	3	N	5	N	3	N
S	2	N	B 0	N	A 1	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	N	0	N	1	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

N은 경유 정점이 없다는 의미이므로
정점 2에서 정점 0으로 바로 간다.

S → **B** → A → D
2 → **0** → 1 → 3

Floyd-Warshall 예제

path mat

		B	A		D		
		0	1	2	3	4	5
B	0	N	N	N	1	3	1
	1	3	N	5	N	3	N
S	2	N	B 0	N	A 1	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	N	0	N	1	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

N은 경유 정점이 없다는 의미이므로
정점 0에서 정점 1으로 바로 간다.

S → B → A → D
2 → 0 → 1 → 3

Floyd-Warshall 예제

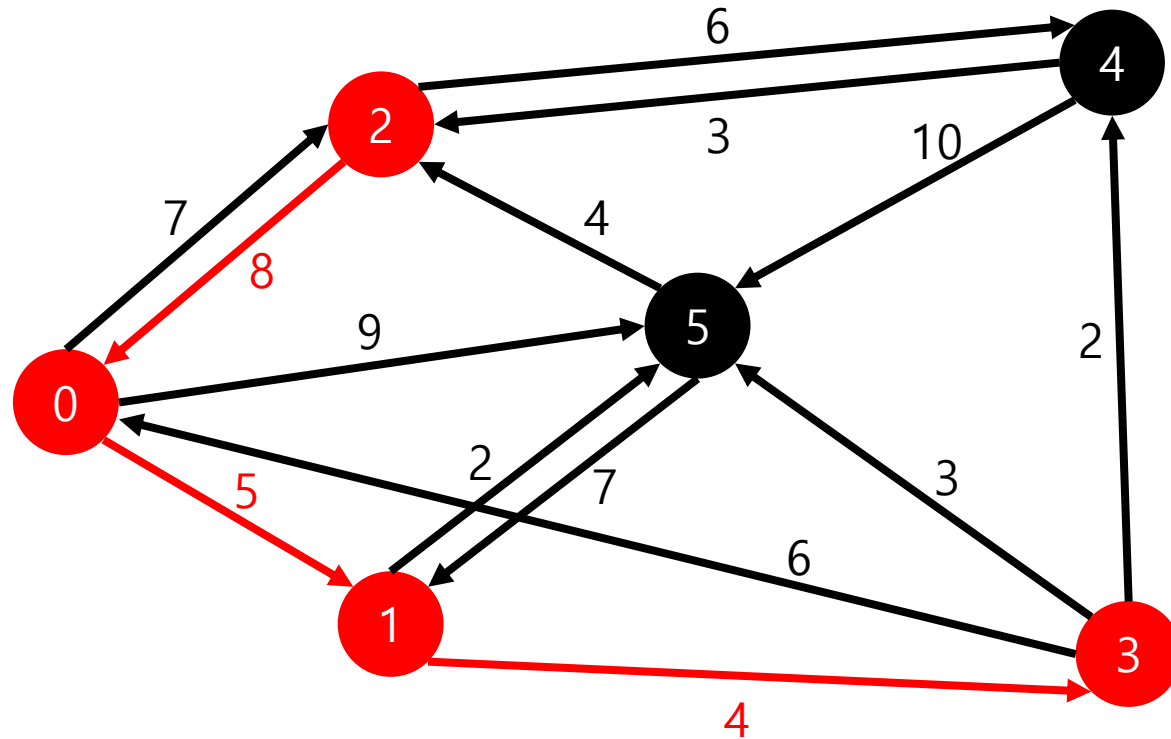
path mat

		B	A		D		
		0	1	2	3	4	5
B	0	N	N	N	1	3	1
A	1	3	N	5	N	3	N
S	2	N	B 0	N	A 1	N	1
	3	N	5	4	N	N	N
	4	N	0	N	1	N	N
	5	2	N	N	1	2	N

N은 경유 정점이 없다는 의미이므로
정점 1에서 정점 3으로 바로 간다.

S → B → A → D
2 → 0 → 1 → 3

Floyd-Warshall 예제



정점 2에서 정점 3까지의 최단 경로와 길이

경로 : 2→0→1→3

길이 : 17