Series geométrica, armónica, telescópica y estimaciones con integrales

Luis Alfredo Alvarado Rodríguez

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

29 de Julio de 2025

Sumario

Serie geométrica finita

Theorem (Serie geométrica finita)

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{1.11}$$

Serie geométrica finita

Theorem (Serie geométrica finita)

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{1.11}$$

Demostración. Multiplicando ambos lados por $1-x$ se obtiene

$$1 - x^n = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(1-x),$$

lo que desarrolla en

$$1 - x^n = 1 - x^n,$$

concluyendo la prueba.

Ejemplo inmediato

$$\sum_{j=0}^{9} 3^j = \frac{3^{10}-1}{2}.$$

Ejemplo inmediato

$$\sum_{j=0}^{9} 3^j = \frac{3^{10} - 1}{2}.$$

Aplicamos (1.11) con $x = 3$ y $n = 10$.

Serie geométrica infinita y otras series clásicas

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \tag{1.12}$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \tag{1.13}$$

$$\sin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.14}$$

$$\cos x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!} \tag{1.15}$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} \quad (|x| < 1) \tag{1.16}$$

Serie geométrica infinita y otras series clásicas

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \tag{1.12}$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \tag{1.13}$$

$$\sin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.14}$$

$$\cos x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!} \tag{1.15}$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} \quad (|x| < 1) \tag{1.16}$$

Teorema de la Prueba de la Integral

Theorem (Integral Test)

Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *positiva, continua y monótonamente decreciente.*

Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *converge si y sólo si converge la integral* $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$.

Teorema de la Prueba de la Integral

Theorem (Integral Test)

Sea $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ positiva, continua y monótonamente decreciente. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si y sólo si converge la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Además,

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \;\leq\; \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Teorema de la Prueba de la Integral

Theorem (Integral Test)

Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ positiva, continua y monótonamente decreciente.

Entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si y sólo si converge la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$.

Además,

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \;\leq\; \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Esto proporciona **cotas** útiles para el resto de una serie.

Definición y divergencia

$$H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge.}$$

Definición y divergencia

$$H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge.}$$

Prueba con la integral

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es positiva, continua y monótonamente decreciente para $x \geq 1$, entonces

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x} \leq H_N \leq 1 + \int_1^{N} \frac{dx}{x}.$$

Definición y divergencia

$$H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge.}$$

Prueba con la integral

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es positiva, continua y monótonamente decreciente para $x \geq 1$, entonces

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x} \leq H_N \leq 1 + \int_1^{N} \frac{dx}{x}.$$

De aquí se deduce

$$\ln(N+1) \leq H_N \leq 1 + \ln N, \qquad \Rightarrow \qquad H_N \longrightarrow \infty.$$

Definición y ejemplo clásico

Una *serie telescópica* se caracteriza porque sus sumandos pueden escribirse como diferencias de términos consecutivos de otra sucesión:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}).$$

Definición y ejemplo clásico

Una *serie telescópica* se caracteriza porque sus sumandos pueden escribirse como diferencias de términos consecutivos de otra sucesión:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}).$$

Ejemplo.

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) \;=\; 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Definición y ejemplo clásico

Una *serie telescópica* se caracteriza porque sus sumandos pueden escribirse como diferencias de términos consecutivos de otra sucesión:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}).$$

Ejemplo.

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) \;=\; 1 - \frac{1}{n+1}.$$

El término general *colapsa* dejando sólo los extremos.

Serie con multiplicadores lineales

Partimos de la identidad (1.18):

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{1.18}$$

Serie con multiplicadores lineales

Partimos de la identidad (1.18):

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{1.18}$$

Derivando se obtiene

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}. \tag{1.19}$$

Serie con multiplicadores lineales

Partimos de la identidad (1.18):

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{1.18}$$

Derivando se obtiene

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}. \tag{1.19}$$

Para $x = 2$ y $n = N + 1$ resulta

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + N2^{N-1} = 1 + (N-1)2^N. \tag{1.20}$$

Regla general

$$\sum_j P(j)\, a_j x^j = P\Big(x\frac{d}{dx}\Big) \sum_j a_j x^j. \tag{1.23}$$

Regla general

$$\sum_j P(j)\, a_j x^j = P\Big(x\tfrac{d}{dx}\Big) \sum_j a_j x^j. \tag{1.23}$$

Ejemplo.

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2j^2+5)x^j = \{2(x\tfrac{d}{dx})^2+5\}\Big(\tfrac{1}{1-x}\Big) = \frac{7x^2-8x+5}{(1-x)^3}.$$

Ejercicios 1.3.1 (selección)

1. Encuentre fórmulas para:

Ejercicios 1.3.1 (selección)

1. Encuentre fórmulas para:

   (a) $$\sum_{j\geq 3} \frac{(\log 6)^j}{j!}$$

Ejercicios 1.3.1 (selección)

1. Encuentre fórmulas para:

   (a) $$\sum_{j \geq 3} \frac{(\log 6)^j}{j!}$$

   (b) $$\sum_{m > 1} \frac{2m + 7}{5^m}$$

Ejercicios 1.3.1 (selección)

1. Encuentre fórmulas para:

   (a) $\displaystyle\sum_{j\geq 3} \frac{(\log 6)^j}{j!}$

   (b) $\displaystyle\sum_{m>1} \frac{2m+7}{5^m}$

   (c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{19} \frac{j}{2^j}$

Ejercicios 1.3.1 (selección)

1. Encuentre fórmulas para:
   (a) $\displaystyle\sum_{j\geq 3} \frac{(\log 6)^j}{j!}$
   (b) $\displaystyle\sum_{m>1} \frac{2m+7}{5^m}$
   (c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{19} \frac{j}{2^j}$
   (d) $\displaystyle 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots$

Ejercicios 1.3.1 (selección)

1. Encuentre fórmulas para:
   (a) $\displaystyle\sum_{j\geq 3} \frac{(\log 6)^j}{j!}$
   (b) $\displaystyle\sum_{m>1} \frac{2m+7}{5^m}$
   (c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{19} \frac{j}{2^j}$
   (d) $1 - \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^2}{4!} - \dfrac{x^3}{6!} + \cdots$

(e) $1 - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^4} - \dfrac{1}{3^6} + \cdots$

Ejercicios 1.3.1 (selección)

1. Encuentre fórmulas para:

   (a) $$\sum_{j\geq 3}\frac{(\log 6)^j}{j!}$$

   (b) $$\sum_{m>1}\frac{2m+7}{5^m}$$

   (c) $$\sum_{j=0}^{19}\frac{j}{2^j}$$

   (d) $$1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\cdots$$

(e) $$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^6}+\cdots$$

(f) $$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m^2+3m+2}{m!}$$

Ejercicios 1.3.1 (selección)

1. Encuentre fórmulas para:

   (a) $\displaystyle\sum_{j\geq 3} \frac{(\log 6)^j}{j!}$

   (b) $\displaystyle\sum_{m>1} \frac{2m+7}{5^m}$

   (c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{19} \frac{j}{2^j}$

   (d) $\displaystyle 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots$

(e) $\displaystyle 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^6} + \cdots$

(f) $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^2+3m+2}{m!}$

Sugerencia: utilice las identidades (1.12)–(1.16) y el operador $x\dfrac{d}{dx}$.

Conclusiones

- Las series geométrica, armónica y telescópica constituyen modelos básicos con comportamientos de convergencia distintos.

Conclusiones

- Las series geométrica, armónica y telescópica constituyen modelos básicos con comportamientos de convergencia distintos.
- El *test de la integral* vincula la suma de una serie con un área y permite estimar restos.

Conclusiones

- Las series geométrica, armónica y telescópica constituyen modelos básicos con comportamientos de convergencia distintos.
- El *test de la integral* vincula la suma de una serie con un área y permite estimar restos.
- Herramientas analíticas como la derivada y el operador $x\dfrac{d}{dx}$ facilitan transformar series conocidas en otras más complejas.

Conclusiones

- Las series geométrica, armónica y telescópica constituyen modelos básicos con comportamientos de convergencia distintos.
- El *test de la integral* vincula la suma de una serie con un área y permite estimar restos.
- Herramientas analíticas como la derivada y el operador $x\frac{d}{dx}$ facilitan transformar series conocidas en otras más complejas.
- Estas técnicas son fundamentales en el análisis de algoritmos y en la estimación de costos computacionales.