Análisis de Algoritmos

Recurrencias I – Forma y soluciones por iteración

Luis Alfredo Alvarado Rodríguez

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

31 de Julio de 2025

Sumario

¿Qué es una relación de recurrencia?

Definición

Una relación de recurrencia es una fórmula que nos permite calcular los términos de una sucesión uno tras otro, partiendo de uno o más valores iniciales.

¿Qué es una relación de recurrencia?

Definición

Una relación de recurrencia es una fórmula que nos permite calcular los términos de una sucesión uno tras otro, partiendo de uno o más valores iniciales.

Ejemplo (1.24)

$$x_{n+1} = c\,x_n \qquad (n \geq 0;\ x_0 = 1).$$

¿Qué es una relación de recurrencia?

Definición

Una relación de recurrencia es una fórmula que nos permite calcular los términos de una sucesión uno tras otro, partiendo de uno o más valores iniciales.

Ejemplo (1.24)

$$x_{n+1} = c\,x_n \qquad (n \geq 0;\ x_0 = 1).$$

- La ecuación es de *primer orden* (sólo depende de x_n).
- Solución iterativa: $x_n = c^n$.

Caso homogéneo, coeficiente constante

Ecuación (1.24) nuevamente

$$x_{n+1} = c\,x_n, \quad x_0 = 1.$$

Caso homogéneo, coeficiente constante

Ecuación (1.24) nuevamente

$$x_{n+1} = c\,x_n, \quad x_0 = 1.$$

$$x_1 = c\,x_0,\; x_2 = c\,x_1 = c^2 x_0,\; \ldots \implies \boxed{x_n = c^{\,n}}\; (n \geq 0).$$

Caso homogéneo, coeficiente constante

Ecuación (1.24) nuevamente

$$x_{n+1} = c\,x_n, \quad x_0 = 1.$$

$$x_1 = c\,x_0,\; x_2 = c\,x_1 = c^2 x_0,\; \ldots \implies \boxed{x_n = c^n} \; (n \geq 0).$$

- Método: desenrollar (unfolding) la recurrencia.
- La solución es única porque se especifica x_0.

Coeficiente variable (1.26)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n \qquad (n \geq 0;\ x_0 \text{ dado}). \tag{1.26}$$

Coeficiente variable (1.26)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n \qquad (n \geq 0;\ x_0 \text{ dado}). \tag{1.26}$$

$$x_1 = b_1 x_0,\ x_2 = b_2 b_1 x_0,\ \ldots,\ x_n = x_0 \prod_{i=1}^{n} b_i. \tag{1.27}$$

Coeficiente variable (1.26)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n \qquad (n \geq 0;\ x_0 \text{ dado}). \tag{1.26}$$

$$x_1 = b_1 x_0,\ x_2 = b_2 b_1 x_0,\ \ldots,\ x_n = x_0 \prod_{i=1}^{n} b_i. \tag{1.27}$$

- Basta observar el patrón tras los primeros términos.
- La *iteración* sigue siendo directa, aunque la expresión final sea un producto.

Inhomogénea (1.28)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n + c_{n+1} \qquad (n \geq 0;\; x_0 \text{ dado}). \tag{1.28}$$

Inhomogénea (1.28)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n + c_{n+1} \qquad (n \geq 0;\ x_0 \text{ dado}). \tag{1.28}$$

Cambio de variable (1.29)

$$x_n = \big(b_1 b_2 \cdots b_n\big)\, y_n, \qquad x_0 = y_0. \tag{1.29}$$

Inhomogénea (1.28)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n + c_{n+1} \qquad (n \geq 0;\; x_0 \text{ dado}). \tag{1.28}$$

Cambio de variable (1.29)

$$x_n = \big(b_1 b_2 \cdots b_n\big)\, y_n, \qquad x_0 = y_0. \tag{1.29}$$

Sustituyendo se obtiene la recurrencia más simple

$$y_{n+1} = y_n + d_{n+1}, \quad d_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{b_1 \cdots b_{n+1}}. \tag{1.30}$$

Inhomogénea (1.28)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n + c_{n+1} \qquad (n \geq 0;\ x_0 \text{ dado}). \tag{1.28}$$

Cambio de variable (1.29)

$$x_n = \big(b_1 b_2 \cdots b_n\big)\, y_n, \qquad x_0 = y_0. \tag{1.29}$$

Sustituyendo se obtiene la recurrencia más simple

$$y_{n+1} = y_n + d_{n+1}, \quad d_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{b_1 \cdots b_{n+1}}. \tag{1.30}$$

$$y_n = y_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_n = \big(b_1 \cdots b_n\big)\Big(x_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j\Big).} \tag{1.31}$$

Inhomogénea (1.28)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n + c_{n+1} \qquad (n \geq 0;\ x_0 \text{ dado}). \tag{1.28}$$

Cambio de variable (1.29)

$$x_n = \big(b_1 b_2 \cdots b_n\big)\, y_n, \qquad x_0 = y_0. \tag{1.29}$$

Sustituyendo se obtiene la recurrencia más simple

$$y_{n+1} = y_n + d_{n+1}, \quad d_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{b_1 \cdots b_{n+1}}. \tag{1.30}$$

$$y_n = y_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_n = \big(b_1 \cdots b_n\big)\Big(x_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j\Big).} \tag{1.31}$$

(a) Realizar un cambio de variable adecuado.

Inhomogénea (1.28)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n + c_{n+1} \qquad (n \geq 0;\ x_0 \text{ dado}). \tag{1.28}$$

Cambio de variable (1.29)

$$x_n = \big(b_1 b_2 \cdots b_n\big)\, y_n, \qquad x_0 = y_0. \tag{1.29}$$

Sustituyendo se obtiene la recurrencia más simple

$$y_{n+1} = y_n + d_{n+1}, \quad d_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{b_1 \cdots b_{n+1}}. \tag{1.30}$$

$$y_n = y_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_n = \big(b_1 \cdots b_n\big)\Big(x_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j\Big).} \tag{1.31}$$

(a) Realizar un cambio de variable adecuado.
(b) Resolver la nueva recurrencia (por sumación).

Inhomogénea (1.28)

$$x_{n+1} = b_{n+1}\, x_n + c_{n+1} \qquad (n \geq 0;\ x_0 \text{ dado}). \tag{1.28}$$

Cambio de variable (1.29)

$$x_n = \big(b_1 b_2 \cdots b_n\big)\, y_n, \qquad x_0 = y_0. \tag{1.29}$$

Sustituyendo se obtiene la recurrencia más simple

$$y_{n+1} = y_n + d_{n+1}, \quad d_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{b_1 \cdots b_{n+1}}. \tag{1.30}$$

$$y_n = y_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_n = \big(b_1 \cdots b_n\big)\Big(x_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j\Big).} \tag{1.31}$$

(a) Realizar un cambio de variable adecuado.
(b) Resolver la nueva recurrencia (por sumación).
(c) Regresar a las incógnitas originales.

Ejemplo ilustrativo (1.32)

$$x_{n+1} = 3x_n + n \qquad (n \geq 0;\ x_0 = 0). \tag{1.32}$$

Ejemplo ilustrativo (1.32)

$$x_{n+1} = 3x_n + n \qquad (n \geq 0;\ x_0 = 0). \tag{1.32}$$

Cambio: $x_n = 3^{\,n} y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \dfrac{n}{3^{\,n+1}}$.

Ejemplo ilustrativo (1.32)

$$x_{n+1} = 3x_n + n \qquad (n \geq 0;\ x_0 = 0). \tag{1.32}$$

Cambio: $x_n = 3^{\,n} y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \dfrac{n}{3^{\,n+1}}$.

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{3^{\,j+1}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_n = 3^{\,n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{3^{\,j+1}}.} \tag{1.33}$$

Ejemplo ilustrativo (1.32)

$$x_{n+1} = 3x_n + n \qquad (n \geq 0;\ x_0 = 0). \tag{1.32}$$

Cambio: $x_n = 3^{\,n} y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \dfrac{n}{3^{\,n+1}}$.

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{3^{\,j+1}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_n = 3^{\,n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{3^{\,j+1}}.} \tag{1.33}$$

- La serie restante puede evaluarse cerradamente (ej. con técnicas de series geométricas).
- El procedimiento *siempre* funciona para (1.28).

Lineales homogéneas, coeficientes constantes (1.34)

$$x_{n+1} = a\,x_n + b\,x_{n-1} \qquad (n \geq 1;\ x_0, x_1 \text{ dados}). \tag{1.34}$$

Lineales homogéneas, coeficientes constantes (1.34)

$$x_{n+1} = a\,x_n + b\,x_{n-1} \qquad (n \geq 1;\ x_0, x_1 \text{ dados}). \tag{1.34}$$

- Supóngase $x_n = \alpha^{\,n}$; sustituyendo resulta

$$\alpha^2 = a\alpha + b. \tag{1.35}$$

Lineales homogéneas, coeficientes constantes (1.34)

$$x_{n+1} = a\,x_n + b\,x_{n-1} \qquad (n \geq 1;\ x_0, x_1 \text{ dados}). \tag{1.34}$$

- Supóngase $x_n = \alpha^{\,n}$; sustituyendo resulta

$$\alpha^2 = a\alpha + b. \tag{1.35}$$

- Sean α_+, α_- las raíces. Con $\alpha_+ \neq \alpha_-$,

$$\boxed{x_n = c_1\alpha_+^{\,n} + c_2\alpha_-^{\,n}.} \tag{1.36}$$

Lineales homogéneas, coeficientes constantes (1.34)

$$x_{n+1} = a\,x_n + b\,x_{n-1} \qquad (n \geq 1;\ x_0, x_1 \text{ dados}). \tag{1.34}$$

- Supóngase $x_n = \alpha^n$; sustituyendo resulta

$$\alpha^2 = a\alpha + b. \tag{1.35}$$

- Sean α_+, α_- las raíces. Con $\alpha_+ \neq \alpha_-$,

$$\boxed{x_n = c_1\alpha_+^n + c_2\alpha_-^n.} \tag{1.36}$$

- Si la raíz es doble, la solución es

$$x_n = \alpha^n\big(c_1 + c_2 n\big).$$

Ejemplo 1.2: números de Fibonacci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1. \tag{1.37}$$

Ejemplo 1.2: números de Fibonacci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1. \tag{1.37}$$

Ecuación característica: $\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ejemplo 1.2: números de Fibonacci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1. \tag{1.37}$$

Ecuación característica: $\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].} \tag{1.38}$$

Ejemplo 1.2: números de Fibonacci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1. \tag{1.37}$$

Ecuación característica: $\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].} \tag{1.38}$$

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \qquad (n \to \infty).$$

Ejemplo 1.3: raíz doble

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 5. \tag{1.39}$$

Ejemplo 1.3: raíz doble

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 5. \tag{1.39}$$

Raíz doble $\alpha = 1$.

$$x_n = c_1 + c_2\, n, \quad c_1 = 1,\ c_2 = 4 \implies \boxed{x_n = 4n + 1.}$$

Desarrollo: $\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + n}$

$$T(n) = T(n-1) + n, \quad T(0) = 0.$$

Desarrollo: $T(n) = T(n-1) + n$

$$T(n) = T(n-1) + n, \quad T(0) = 0.$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= \big(T(n-2) + (n-1)\big) + n \\
&= T(n-2) + \big((n-1) + n\big) \\
&\ \vdots \\
&= T(0) + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Desarrollo: $T(n) = T(n-1) + n$

$$T(n) = T(n-1) + n, \quad T(0) = 0.$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= \big(T(n-2) + (n-1)\big) + n \\
&= T(n-2) + \big((n-1) + n\big) \\
&\;\;\vdots \\
&= T(0) + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2).}$$

Desarrollo: $T(n) = T(n-1) + n$

$$T(n) = T(n-1) + n, \quad T(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} T(n) &= \big(T(n-2) + (n-1)\big) + n \\ &= T(n-2) + \big((n-1) + n\big) \\ &\ \vdots \\ &= T(0) + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2).}$$

- El **desenrollado** (iteration method) es suficiente aquí.
- En la próxima sesión veremos métodos más potentes para resolver recurrencias de divide-and-conquer.

Resumen

- Definimos y clasificamos relaciones de recurrencia.

Resumen

- Definimos y clasificamos relaciones de recurrencia.
- Resolvimos recurrencias de primer y segundo orden por *iteración*.

Resumen

- Definimos y clasificamos relaciones de recurrencia.
- Resolvimos recurrencias de primer y segundo orden por *iteración*.
- Vimos ejemplos clásicos: $x_{n+1} = c\,x_n$, Fibonacci, y $T(n) = T(n-1) + n$.

Resumen

- Definimos y clasificamos relaciones de recurrencia.
- Resolvimos recurrencias de primer y segundo orden por *iteración*.
- Vimos ejemplos clásicos: $x_{n+1} = c\,x_n$, Fibonacci, y $T(n) = T(n-1) + n$.
- Herramientas: desenrollado, cambio de variable, ecuación característica.