Sistemas de numeración posicional (base-b, conversión, costos aritméticos)

Luis Alfredo Alvarado Rodríguez

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

24 de julio de 2025

Sumario

Idea clave

Un sistema posicional expresa un entero n como

$$n \; = \; \sum_{i=0}^{m} d_i \, b^i,$$

donde

- $b > 1$ es la **base**,

Idea clave

Un sistema posicional expresa un entero n como

$$n = \sum_{i=0}^{m} d_i \, b^i,$$

donde

- $b > 1$ es la **base**,
- cada dígito d_i satisface $0 \leq d_i \leq b - 1$,

Idea clave

Un sistema posicional expresa un entero n como

$$n = \sum_{i=0}^{m} d_i \, b^i,$$

donde

- $b > 1$ es la **base**,
- cada dígito d_i satisface $0 \leq d_i \leq b - 1$,
- el *valor* de d_i depende de su *posición* i.

Idea clave

Un sistema posicional expresa un entero n como

$$n = \sum_{i=0}^{m} d_i \, b^i,$$

donde

- $b > 1$ es la **base**,
- cada dígito d_i satisface $0 \leq d_i \leq b - 1$,
- el *valor* de d_i depende de su *posición* i.

Ejemplos habituales: $b = 10$ (decimal), $b = 2$ (binario), $b = 8$ (octal), $b = 16$ (hexadecimal).

Ejemplo: decimal

$$237_{10} \;=\; 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

- 2 centenas, 3 decenas, 7 unidades.

Ejemplo: decimal

$$237_{10} \; = \; 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

- 2 centenas, 3 decenas, 7 unidades.
- Longitud de la representación: $m + 1 = 3$ dígitos.

Ejemplo: binario

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}.$$

- Solo se utilizan los dígitos `0` y `1`.

Ejemplo: binario

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}.$$

- Solo se utilizan los dígitos `0` y `1`.
- Cada dígito binario recibe el nombre de *bit*.

Teorema fundamental

Teorema 1.9

Sea $b > 1$ un entero. Todo entero positivo n puede escribirse de una y sólo una forma como

$$n \;=\; d_0 + d_1\, b + d_2\, b^2 + \ldots, \quad 0 \le d_i \le b - 1.$$

Boceto de prueba.

1. Inducción sobre n.

Teorema fundamental

Teorema 1.9

Sea $b > 1$ un entero. Todo entero positivo n puede escribirse de una y sólo una forma como

$$n \;=\; d_0 + d_1\, b + d_2\, b^2 + \dots, \quad 0 \le d_i \le b - 1.$$

Boceto de prueba.

1. Inducción sobre n.
2. Paso inductivo: dividir n entre b y usar el resto $d = n \bmod b$.

Teorema fundamental

Teorema 1.9

Sea $b > 1$ un entero. Todo entero positivo n puede escribirse de una y sólo una forma como

$$n \;=\; d_0 + d_1\, b + d_2\, b^2 + \dots, \quad 0 \leq d_i \leq b - 1.$$

Boceto de prueba.

1. Inducción sobre n.
2. Paso inductivo: dividir n entre b y usar el resto $d = n \bmod b$.
3. La unicidad se demuestra suponiendo dos representaciones distintas y llegando a una contradicción con la hipótesis inductiva.

Motivaciones

- **Binario ($b = 2$):** perfecto para hardware (encendido/apagado).

Motivaciones

- **Binario ($b = 2$):** perfecto para hardware (encendido/apagado).
- **Octal ($b = 8$):** grupos de <u>3 bits</u>; cadena más corta.

Motivaciones

- **Binario ($b = 2$):** perfecto para hardware (encendido/apagado).
- **Octal ($b = 8$):** grupos de <u>3 bits</u>; cadena más corta.
- **Hexadecimal ($b = 16$):** grupos de <u>4 bits</u>; muy usado en programación.

Conversión binario $\leftrightarrow$ octal

Agrupar los bits de tres en tres, empezando por el bit menos significativo.

$$(1101100101)_2 \;=\; (1)(101)(100)(101) \;=\; (1545)_8.$$

Conversión binario $\leftrightarrow$ hexadecimal

Agrupar los bits de cuatro en cuatro:

$$(1010010100101100)_2 = (1010)_2\,(0101)_2\,(0010)_2\,(1100)_2 = (A52C)_{16}.$$

Ejemplos de conversión

$$
\begin{aligned}
(735)_8 &= (477)_{10}, \\
(A52C)_{16} &= 10(4096) + 5(256) + 2(16) + 12 = (42284)_{10}.
\end{aligned}
$$

Ejemplos de conversión

$$(735)_8 = (477)_{10},$$

$$(A52C)_{16} = 10(4096) + 5(256) + 2(16) + 12 = (42284)_{10}.$$

Longitud de la representación

Para un entero n:

$$\text{dígitos} \;=\; \lfloor \log_b n \rfloor + 1.$$

- Bases pequeñas $\Rightarrow$ más dígitos, operaciones sobre vectores más largos.

Longitud de la representación

Para un entero n:

$$\text{dígitos} \;=\; \lfloor \log_b n \rfloor + 1.$$

- Bases pequeñas $\Rightarrow$ más dígitos, operaciones sobre vectores más largos.
- Bases grandes $\Rightarrow$ menos dígitos, pero cada dígito almacena más información.

Costo de la suma

Dados dos números de m dígitos en base b:

$$\text{Suma en columna} \; = \; O(m) \text{ operaciones elementales.}$$

- $m \approx \log_b n$.

Costo de la suma

Dados dos números de m dígitos en base b:

$$\text{Suma en columna } = O(m) \text{ operaciones elementales.}$$

- $m \approx \log_b n$.
- A menor b, mayor m (más acarreo, pero acarreo más barato).

Costo de la multiplicación (clásica)

Multiplicar dos enteros de m dígitos:

$$O(m^2) \ \text{ productos y sumas.}$$

- Mejoras algebraicas: Karatsuba $O(m^{\log_2 3})$, FFT $O(m \log m)$, etc.

Costo de la multiplicación (clásica)

Multiplicar dos enteros de m dígitos:

$$O(m^2) \ \ \text{productos y sumas.}$$

- Mejoras algebraicas: Karatsuba $O(m^{\log_2 3})$, FFT $O(m \log m)$, etc.
- El factor constante depende de la base elegida.

Ejercicios 1.2.1

1. Demuestre que la conversión octal $\to$ binario se logra convirtiendo cada dígito octal al trío binario correspondiente. Generalice a otras bases.

Ejercicios 1.2.1

1. Demuestre que la conversión octal $\rightarrow$ binario se logra convirtiendo cada dígito octal al trío binario correspondiente. Generalice a otras bases.
2. Convierta:
   (a) $(737)_{10} \ = ?_3$

Ejercicios 1.2.1

1. Demuestre que la conversión octal $\rightarrow$ binario se logra convirtiendo cada dígito octal al trío binario correspondiente. Generalice a otras bases.
2. Convierta:
   (a) $(737)_{10} \ = ?_3$
   (b) $(101100)_2 \ = ?_{16}$

Ejercicios 1.2.1

1. Demuestre que la conversión octal $\rightarrow$ binario se logra convirtiendo cada dígito octal al trío binario correspondiente. Generalice a otras bases.
2. Convierta:
   (a) $(737)_{10} = ?_3$
   (b) $(101100)_2 = ?_{16}$
   (c) $(3377)_8 = ?_{16}$

Ejercicios 1.2.1

1. Demuestre que la conversión octal $\rightarrow$ binario se logra convirtiendo cada dígito octal al trío binario correspondiente. Generalice a otras bases.
2. Convierta:
   (a) $(737)_{10} = ?_3$
   (b) $(101100)_2 = ?_{16}$
   (c) $(3377)_8 = ?_{16}$
   (d) $(ABCD)_{16} = ?_{10}$

Ejercicios 1.2.1

1. Demuestre que la conversión octal $\rightarrow$ binario se logra convirtiendo cada dígito octal al trío binario correspondiente. Generalice a otras bases.
2. Convierta:
   (a) $(737)_{10} = ?_3$
   (b) $(101100)_2 = ?_{16}$
   (c) $(3377)_8 = ?_{16}$
   (d) $(ABCD)_{16} = ?_{10}$
   (e) $(BEEF)_{16} = ?_8$

Ejercicios 1.2.1

1. Demuestre que la conversión octal $\rightarrow$ binario se logra convirtiendo cada dígito octal al trío binario correspondiente. Generalice a otras bases.
2. Convierta:
   (a) $(737)_{10} = ?_3$
   (b) $(101100)_2 = ?_{16}$
   (c) $(3377)_8 = ?_{16}$
   (d) $(\mathrm{ABCD})_{16} = ?_{10}$
   (e) $(\mathrm{BEEF})_{16} = ?_8$
3. Implemente un procedimiento `convert(n, b)` que devuelva la cadena de dígitos de n en base b.