Análisis de Algoritmos
Notaciones O, o, Ω, Θ

Luis Alfredo Alvarado Rodríguez

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

22 de julio de 2025

Sumario

o pequeña — "crece estrictamente más lento"

Definición. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ para x grande.

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \ (x \to \infty) \iff \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

o pequeña — "crece estrictamente más lento"

Definición. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ para x grande.

$$f(x) = o\big(g(x)\big)\ (x \to \infty) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ejemplos

- $x^2 = o(x^3)$
- $\operatorname{sen} x = o(x)$
- $\frac{1}{x} = o(1)$
- $23 \log x = o\big(x^{0,02}\big)$
- $e^{-x} = o\big(x^{-k}\big)\ \forall k > 0$

O grande — “no crece más rápido que”

Definición.

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \iff \exists\, C > 0,\ x_0 \ :\ |f(x)| \le C\, g(x) \quad \forall x > x_0.$$

O grande — “no crece más rápido que”

Definición.

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \iff \exists\, C > 0,\ x_0\ :\ |f(x)| \le C\, g(x) \quad \forall x > x_0.$$

Observaciones

- $f = o(g)$ implica $f = O(g)$ (relación estricta $\subsetneq$).
- Cota superior de *peor caso* en complejidad temporal.
- No exige límite; basta una cota después de algún x_0.

Θ — "misma tasa de crecimiento"

Definición.

$$f(x) = \Theta\big(g(x)\big) \iff \exists\, c_1, c_2 > 0,\ x_0 \text{ tal que}$$

$$c_1\, g(x) \leq |f(x)| \leq c_2\, g(x) \quad \text{para todo } x > x_0.$$

Θ — "misma tasa de crecimiento"

Definición.

$$f(x) = \Theta\big(g(x)\big) \iff \exists\, c_1, c_2 > 0,\ x_0 \text{ tal que}$$

$$c_1\, g(x) \le |f(x)| \le c_2\, g(x) \quad \text{para todo } x > x_0.$$

- Precisa hasta factor constante.
- Es relación de equivalencia: reflexiva, simétrica y transitiva.
- $f \sim g \implies f = \Theta(g)$, pero no recíprocamente.

Ω — "crece al menos tan rápido"

Definición.

$f(x) = \Omega\big(g(x)\big) \iff \exists\, \varepsilon > 0,$ una subsecuencia infinita $x_k \to \infty$ tal que

$$|f(x_k)| > \varepsilon\, g(x_k).$$

Ω — "crece al menos tan rápido"

Definición.

$f(x) = \Omega\big(g(x)\big) \iff \exists\, \varepsilon > 0,$ una subsecuencia infinita $x_k \to \infty$ tal que

$$|f(x_k)| > \varepsilon\, g(x_k).$$

En análisis de algoritmos

- Cotas inferiores: todo algoritmo de multiplicación de matrices requiere $\Omega(n^2)$ operaciones (lectura de datos).
- Dual de O: $f = \Omega(g) \iff g = O(f)$.

$\sim$ — “crece igual”

Definición 1.4.

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$\sim$ — “crece igual”

Definición 1.4.

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Ejemplos

$$x^2 + x \sim x^2, \qquad (3x+1)^4 \sim 81x^4, \qquad \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} \sim \tfrac{1}{x}.$$

Implica $f = \Theta(g)$, pero añade la igualdad exacta de su cociente al tender $x \to \infty$.

Definición 1.6. Una función $f(x)$ presenta crecimiento exponencial moderado si

$$\forall a > 0: \ f(x) = \Omega\big(x^a\big) \quad \text{y} \quad \forall \varepsilon > 0: \ f(x) = o\big((1+\varepsilon)^x\big).$$

Funciones de *crecimiento exponencial moderado*

Definición 1.6. Una función $f(x)$ presenta crecimiento exponencial moderado si

$$\forall a > 0 : \; f(x) = \Omega\big(x^a\big) \quad \text{y} \quad \forall \varepsilon > 0 : \; f(x) = o\big((1+\varepsilon)^x\big).$$

Intuición

- Crece más rápido que *toda* potencia fija de x…
- …pero todavía más lento que *cualquier* exponencial c^x $(c > 1)$.

Ejemplos $x^{\log x}, \; e^{\sqrt{x}}, \; e^{(\log x)^2}$.

Funciones de *crecimiento exponencial*

Definición 1.7. Una función f es de crecimiento exponencial si

$$\exists\, c > 1 : \ f(x) = \Omega(c^x) \quad \text{y} \quad \exists\, d > 1 : \ f(x) = O(d^x).$$

Funciones de *crecimiento exponencial*

Definición 1.7. Una función f es de crecimiento exponencial si

$$\exists\, c > 1 : \ f(x) = \Omega(c^x) \quad \text{y} \quad \exists\, d > 1 : \ f(x) = O(d^x).$$

Ejemplos típicos

$$2^x, \quad (1{,}03)^x, \quad n^{97n}, \quad e^x.$$

Añadir factores "pequeños" (polinomios, logaritmos) no cambia la categoría: $e^{\sqrt{x}+2x/(x^{49}+37)}$ sigue siendo exponencial.

Jerarquía de precisión

$$f \sim g \implies f = \Theta(g) \implies f = O(g) \ \wedge \ g = \Omega(f).$$

Jerarquía de precisión

$$f \sim g \implies f = \Theta(g) \implies f = O(g) \;\wedge\; g = \Omega(f).$$

- Relación estricta: cada flecha es "si … entonces", pero la inversa no vale en general.
- Little-o es la negación fuerte de Ω:

$$f = o(g) \iff f \neq \Omega(g).$$

Propiedades algebraicas básicas

Sean f, g, h funciones positivas a partir de algún x_0.

Suma (término dominante)

$$f = O(h) \text{ y } g = O(h) \implies f + g = O(h).$$

Propiedades algebraicas básicas

Sean f, g, h funciones positivas a partir de algún x_0.

Suma (término dominante)

$$f = O(h) \text{ y } g = O(h) \implies f + g = O(h).$$

Producto

$$f = O(h),\ g = O(k) \implies fg = O(hk).$$

Propiedades algebraicas básicas

Sean f, g, h funciones positivas a partir de algún x_0.

Suma (término dominante)

$$f = O(h) \text{ y } g = O(h) \implies f + g = O(h).$$

Producto

$$f = O(h),\ g = O(k) \implies fg = O(hk).$$

Composición (monótona)

Si $f = O(g)$ y φ es creciente, entonces $\varphi \circ f = O\big(\varphi \circ g\big)$.

Transitividad

Sí es transitivo

- O, o, Θ.
- Ejemplo: $f = o(g)$ y $g = o(h) \;\Rightarrow\; f = o(h)$.

No siempre transitivo

- Ω lo es si restringimos a funciones positivas.
- $f = \Omega(g)$ y $g = \Omega(h) \not\Rightarrow f = \Omega(h)$ si g cambia de signo.

Dominar la suma: regla del “más grande gana”

Si $f(n) = O(g(n))$ entonces

$$f(n) + g(n) = \Theta\big(g(n)\big).$$

Dominar la suma: regla del “más grande gana”

Si $f(n) = O(g(n))$ entonces

$$f(n) + g(n) = \Theta\big(g(n)\big).$$

Ejemplo. $n^3 + 5n^2 + 77\cos n = \Theta(n^3)$.

Potencias y logaritmos

$$\log^k n = o(n^\varepsilon) \quad \forall k, \varepsilon > 0, \qquad n^a = o\big(c^n\big) \quad \forall a,\ c > 1.$$

Útiles para:

- Separar algoritmos polinómicos de exponenciales.
- Justificar mejoras sub-cuadráticas (p. ej. $n \log n$ frente a n^2).

Cuadro de resumen

Relación	Límite	Cota sup.	Cota inf.	Equivalencia
$f = o(g)$	$= 0$	✓		
$f = O(g)$	$\leq C$	✓		
$f = \Omega(g)$			✓	
$f = \Theta(g)$	$1/C \leq \dfrac{f}{g} \leq C$	✓	✓	✓
$f \sim g$	$= 1$	✓	✓	✓

Para pensar antes de la próxima clase

1. Ordena las siguientes funciones por su tasa de crecimiento para $n \to \infty$:
   $(\log\log n)^3,\ n^{1{,}6},\ n^3 \log n,\ 2^{\sqrt{n}},\ n^{\log n}.$
2. Demuestra que
   $f(n) = O\big((2+\varepsilon)^n\big)\ \forall\varepsilon > 0 \iff f(n) = o\big((2+\varepsilon)^n\big)\ \forall\varepsilon > 0.$
3. Diseña una función h tal que $n^2 = o\big(h(n)\big)$ y $h(n) = o\big(n^3 \log n\big)$.

Basado en el Capítulo 1 de *Algorithms & Complexity* (traducción ES).