

Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche	3
1.1. Mengen	3
1.1.1. Definition nach Cantor	3
1.1.2. Mengeneigenschaften	3
1.1.3. Mengenbeziehungen	3
1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz	3
1.1.5. Kartesisches Produkt	3
1.2. Zahlbereiche	4
1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche	4
2. Abbildungen	4
2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich	4
2.1.1. Abbildung, Funktion	4
2.1.2. Beispiel	5
2.1.3. Satz über Bilder und Urbilder	5
2.1.4. Verschiedene Abbildungen	5
2.1.5. Beispiel	5
2.2. Verkettung von Abbildungen	5
2.2.1. Verkettung	5
2.2.2. Assoziativität	6
2.3. Abbildungseigenschaften	6
2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität	6
2.3.2. Beispielbeweis	6
2.3.3. Hinrichtungs- und Rückrichtungsbeweise	7
2.4. Umkehrabbildung	8
2.4.1. Inverse Abbildung	8
2.4.2. Beispiel	8
2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse	8
2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen	9
2.4.5. Beweis	9
3. Funktionen	10
3.1. Funktionseigenschaften	10
3.1.1. Zahlenmengenkriterium	10
3.1.2. Begriffe	10
3.1.3. Nullstellen	10
3.2. Symmetrie	10
3.2.1. Gerade Funktionen	10
3.2.2. Beispielbeweis	10
3.2.3. Ungerade Funktionen	10
3.2.4. Exponentenkriterium für Symmetrie ganzrationaler Funktionen	11
3.2.5. Beweis für Achsensymmetrie	11
3.3. Verhalten	11
3.3.1. Monotonie	11
3.3.2. Globalverhalten	11
3.3.3. Grenzwerte	11
3.3.4. Globalverhalten bei ganzrationalen Funktionen	12
3.3.5. Beweis	12
3.4. Verschiebung	12
3.4.1. Verschiebung einer Funktion in y -Richtung	12
3.4.2. Verschiebung einer Funktion in x -Richtung	12
3.5. Lineare Funktionen	12
3.5.1. Funktionsgleichung	12

3.5.2.	Steigung linearer Funktionen	12
3.5.3.	Beweis	13
3.6.	Quadratische Funktionen	13
3.6.1.	Definition	13
3.6.2.	Nullstellen quadratischer Funktionen	13
3.6.3.	Satz von Vieta	14
3.6.4.	Beweis	14
4.	Folgen	14
4.1.	Der Folgenbegriff	14
4.1.1.	Folgen	14
4.1.2.	Notation	15
4.1.3.	Rekursion und Explikation	15
4.2.	Verschiedene Folgen	15
4.2.1.	Geometrische Folgen	15
4.2.2.	Konstante Folgen	15
4.2.3.	Alternierende Folgen	16
4.3.	Monotonieverhalten	16
4.3.1.	Strenge Monotonie	16
4.3.2.	Beispielbeweis	16
4.3.3.	Einfache Monotonie	16
4.4.	Teilfolgen	17
4.4.1.	Folgen mit Systematik	17
4.4.2.	Definition	17
4.4.3.	Teilfolgensatz	17
4.4.4.	Beweis	17
4.5.	Beschränktheit von Folgen	18
4.5.1.	Schranken	18
4.5.2.	Untere und obere Schranken, Maxi- und Minima	18
4.5.3.	Beispiel	18
4.5.4.	Vielschrankensatz	18
4.5.5.	Beweis	18
4.5.6.	<i>Suprema</i> und <i>Infima</i>	19
4.5.7.	Schritte zum Nachweis	19
5.	Beweise	19
5.1.	Beweistechniken	19
5.1.1.	Hinrichtung und Rückrichtung	19
5.1.2.	Satz vom Nullprodukt als Beispiel	19

1. Mengen und Zahlbereiche

1.1. Mengen

1.1.1. Definition nach Cantor

Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

1.1.2. Mengeneigenschaften

Sei M eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$, x ist ein Element von M .
- $x \notin M$, x ist kein Element von M .
- $M = \emptyset$, M ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also $M = \{\}$.
- $|M|$ heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von M und gibt an, wie viele Elemente M enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften, z.B. M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.
- Auflistung der Elemente, z.B. $M = \{0; 5; 10; \dots\}$.
- Definition der Eigenschaften, z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$.
- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

1.1.3. Mengenbeziehungen

Seien X und Y Mengen.

- X heißt **Teilmenge** von Y ($X \subseteq Y$), wenn jedes Element von X auch in Y ist.
- X heißt **echte Teilmenge** von Y ($X \subset Y$), wenn jedes Element von $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.
- Die Mengen X und Y heißen **gleich**, wenn $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$.

1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz

Seien X und Y Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ **Durchschnitt** von X und Y .
- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ **Vereinigung** von X und Y .
- $X \dot{\cup} Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ **disjunkte Vereinigung** von X und Y .
- $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$ **Differenz** von X und Y .

1.1.5. Kartesisches Produkt

Seien X und Y Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

12

¹ $(x; y)$ ist ein geordnetes Paar.

² $(x; y) = (x; w) \Leftrightarrow x = v \quad y = w$

1.2. Zahlbereiche

1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche

\mathbb{N} Menge der natürlichen Zahlen mit 0

\mathbb{N}^* Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

\mathbb{Z} Menge der ganzen Zahlen

\mathbb{Q} Menge der rationalen Zahlen

\mathbb{Q}^+ Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$ Menge der negativen rationalen Zahlen

\mathbb{R} Menge der reellen Zahlen, \mathbb{R}^+ und $-\mathbb{R}^+$ analog, sodass $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

\mathbb{C} Menge der komplexen Zahlen

2. Abbildungen

2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

2.1.1. Abbildung, Funktion

Es seien X und Y nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift f , die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt **Abbildung** von X nach Y .

$\forall x \in D(f) \subseteq X$ gibt es genau ein $y = f(x) \in Y$.

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

Handelt es sich bei X und Y um reine Zahlenmengen (z.B. \mathbb{R}), so bezeichnen wir die Abbildung f auch als **Funktion**.

TL;DR

Jedem x muss ein y zugeordnet werden. Wenn X und Y reine Zahlenmengen sind, ist die Abbildung eine Funktion.

2. $D(f)$ ist die **Definitionsmenge**³ von der Vorschrift f .
3. $B(f)$ ist die **Bildungsmenge**³ von f , wobei $B(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$
4. $f(x) \in Y$ heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von x unter f .
Ist $y \in Y$, so heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ ein **Urbild** bzw. **Argument** von y unter f .
5. Die Menge aller Urbunkte von y unter f bezeichnen wir mit $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Zu f^{-1} sagen wir auch **das Urbild** von y unter f .

TL;DR

Das Urbild ist die Menge aller **Urbilder**.

$X = D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f und $Y = B(f)$ heißt

Wertebereich von f .

Die Menge $im(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$ heißt **Bild** von f .

³siehe Abschnitt 3.1.2 für Funktionen

1. Die Menge $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y^4$ heißt der Graph von f .
2. Zwei Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen gleich ($f = g$), wenn $f(x) = g(x) \forall x \in X$.

2.1.2. Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

Für $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$ wäre das Bild $im(f(X_1)) = [0; 1]$.

Für $Y_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ wäre $f^{-1}(Y_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\}$ oder $f^{-1}(Y_1) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi]$.

Der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{Z}$ und der Wertebereich $B(f) = [-1; 1]$.

2.1.3. Satz über Bilder und Urbilder

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $A, A_1, A_2 \subset X$ und $B, B_1, B_2 \subset Y$. Dann gilt

- 1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- 2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
- 3) $f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A)$
- 4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- 5) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- 6) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

2.1.4. Verschiedene Abbildungen

- (1) Es sei X eine nichtleere Menge. Die **Identität** auf X ist definiert durch

$$\begin{aligned} Id_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

- (2) Sei $y_0 \in Y$ fixiert. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

konstante Abbildung.

- (3) Ist $X \subset \mathbb{R}$, so heißt jede Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **reelle Funktion**.

2.1.5. Beispiel

Die Logarithmusfunktion ist eine reelle Funktion.

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

2.2. Verkettung von Abbildungen

2.2.1. Verkettung

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

⁴siehe Abschnitt 1.1.5

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von f und g .

Wir sagen auch „ g nach f “, d.h. f wird zuerst angewendet, danach g .

2.2.2. Assoziativität

Seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow W$ Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

2.3. Abbildungseigenschaften

2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **surjektiv**, wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit $f : X \twoheadrightarrow Y$ ausdrücken.

TL;DR

Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **mindestens** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit $f : X \hookrightarrow Y$ ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge (\subset) aufweist.

TL;DR

Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **maximal** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist. Diese Abbildung nennen wir auch eineindeutige Zuordnung.

TL;DR

Eine Abbildung ist bijektiv, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird und jedes $y \in Y$ einem $x \in X$ zugeordnet wird.

2.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Abbildung $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ mit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen nun herausfinden, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv, also beides, ist.

1. Damit f **injektiv** ist, muss die Definition⁵ erfüllt sein. Also muss für $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1 = x_2$. Dafür setzen wir sie gleich.

⁵siehe Abschnitt 2.3.1

$$\begin{array}{lcl} \frac{x_1}{x_1 + 1} = \frac{x_2}{x_2 + 1} & & | \cdot (x_2 + 1) \\ \frac{x_1 x_2 + x_1}{x_1 + 1} = x_2 & & | \cdot (x_1 + 1) \\ x_1 x_2 + x_1 = x_1 x_2 + x_2 & & | - x_1 x_2 \\ x_1 = x_2 & & \end{array}$$

Quod erat Demonstrandum

Somit ist f injektiv. Da $x_1 = x_2$ ist die Definition erfüllt.

2. Damit f **surjektiv** ist, muss auch die Definition⁵ $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ erfüllt sein.

$$\begin{array}{lcl} y = \frac{x}{x + 1} & & | \cdot (x + 1) \\ yx + y = x & & | - y - x \\ yx - x = -y \Leftrightarrow x(y - 1) = -y & & | \cdot \frac{1}{y - 1} \\ x = -\frac{y}{y - 1} & & \end{array}$$

$-\frac{y}{y-1}$ ist für $y = 1$ nicht definiert und somit ist f nicht surjektiv, da ein $y \in Y$ existiert für das es kein $x \in X$ gibt.

3. f ist kann folglich nicht **bijektiv** sein, da es dafür surjektiv und injektiv sein müsste. Es wäre bijektiv für $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.3.3. Hinrichtungs- und Rückrichtungsbeweise

Injektivität

1) „ \Rightarrow “

Sei f injektiv.

Wir fixieren ein Element $x_0 \in X$ und definieren $g : Y \rightarrow X$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x & \text{falls } y \in \text{im}(f) \wedge f(x) = y \\ x_0 & \text{falls } y \notin \text{im}(f) \end{cases}$$

Dann ist g **wohldefiniert** und es gilt $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$.

g ist also eine Linksinverse⁶ von f .

„ \Leftarrow “

Sei $g : Y \rightarrow X$ eine Linksinverse von f .

Seien $x_1, x_2 \in X$ zwei Punkte mit $f(x_1) = f(x_2)$.

Dann gilt $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ und somit $x_1 = x_2$.

Folglich ist f injektiv.

Surjektivität

1) „ \Rightarrow “

Sei f surjektiv.

⁶siehe Abschnitt 2.4.3

Für jedes $y \in Y$ wählen wir ein Urbild $x(y) \in X$ aus.

Dann ist die Abbildung $h : Y \rightarrow X$ mit $h(y) := x(y)$ wohldefiniert und es gilt $f(h(y)) = f(x(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

h ist also eine Rechtsinverse von f .

2) „ \Leftarrow “

Sei $h : Y \rightarrow X$ eine Rechtsinverse von f .

Dann gilt $f(h(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

Also ist $h(y) \in X$ ein Urbild von y unter f .

Folglich ist f surjektiv.

2.4. Umkehrabbildung

2.4.1. Inverse Abbildung

Ist die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ zu f definiert durch

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y)$$

$y \mapsto f^{-1}(y) :=$ das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f .

Sei $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls bijektiv und es gilt aufgrund der Definition

$$f^{-1} \circ f = Id_X$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

2.4.2. Beispiel

(1) $Id_X : X \rightarrow X$ ist bijektiv.

$$Id_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

$$(Id_X)^{-1} = Id_X$$

(2) Die konstante Abbildung $c_{y_0} : X \rightarrow Y$ ist weder injektiv noch surjektiv, unter der Bedingung, dass X und Y mehr als ein Element enthalten.

$(c_{y_0})^{-1}$ ist zudem keine Abbildung mehr.

(3) Die reelle Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\ln : x \mapsto \ln(x)$ ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung wäre

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\exp : x \mapsto e^x$$

2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann gilt

(1) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $g \circ f = Id_X$.
 g heißt **Linksinverse** von f .

- (2) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $h : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $f \circ h = Id_Y$.
 h heißt **Rechtsinverse** von f .
- (3) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, die sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist. D.h. es gilt $g \circ f = Id_X \wedge f \circ g = Id_Y$, wobei g eindeutig bestimmt ist, und $g = f^{-1}$.

Nur für **bijektive** Abbildungen gibt es Umkehrabbildungen. Bei nur surjektiv oder injektiven Abbildungen existiert ein Urbild f^{-1} , eine Menge mit keinem, einem oder anderen Elementen.

2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei bijektive Abbildungen.

Dann ist auch ihre Verkettung $g \circ f$ bijektiv und für ihre inversen Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2.4.5. Beweis

Für die inversen Abbildungen $f^{-1} : Y \rightarrow X$ und $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ gilt⁷

$$f^{-1} \circ f = Id_X \quad g^{-1} \circ g = Id_Y$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y \quad g \circ g^{-1} = Id_Z$$

Wegen der Assoziativität⁸ von Verknüpfungen gilt

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) & \\ \Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f & \\ \Leftrightarrow f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f & \\ \Leftrightarrow f^{-1} \circ (Id_Y) \circ f & \\ \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_X & \end{aligned}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = Id_X$$

Umgekehrt gilt analog dazu

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) & \\ \Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} & \\ \Leftrightarrow g \circ (Id_Y) \circ g^{-1} & \\ \Leftrightarrow g \circ g^{-1} = Id_Z & \end{aligned}$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_Z$$

Somit gilt, falls f und g bijektiv sind, $\exists f^{-1} \wedge g^{-1}$, die eindeutig bestimmt, d.h. ebenfalls bijektiv sind.

$$\begin{aligned} \exists f^{-1} \wedge g^{-1} & \\ \Rightarrow \exists f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} & \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

⁷siehe Abschnitt 2.4.1

⁸siehe Abschnitt 2.2.2

3. Funktionen

3.1. Funktionseigenschaften

3.1.1. Zahlenmengenkriterium

Sei f eine Zuordnung von der Menge X in die Menge Y , d.h. $f : X \rightarrow Y$, wobei X, Y Zahlenmengen sind. f heißt **Funktion** genau dann, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird.

3.1.2. Begriffe

- (1) Die Menge X ist der **Definitionsbereich** D_f von f . Die Elemente von X heißen **Argumente**.
- (2) Die zugeordneten Elemente aus der Menge Y heißen **Funktionswerte**. Sie bilden den **Wertebereich** W_f der Funktion. Es gilt $W_f \subseteq Y$.
- (3) Für die Funktionswerte y wird auch die Symbolik $f(x)$ verwendet, d.h. $f(x)$ ist der Funktionswert zum Argument x , z.B. $f(2) = 3$ bedeutet, dass 3 der Funktionswert des Arguments 2 ist.
- (4) Die Angabe einer Funktion mittels Funktionsterm wird entweder mit $f : f(x) = 2x + 1$ oder mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$ festgelegt.

Der Term wird bei ersterer Angabe *Funktion f : Funktionswert ist gleich Funktionsterm* gesprochen.

3.1.3. Nullstellen

Für eine Funktion f ist $x_N \in D(f)$ eine Nullstelle von f , wenn $f(x_N) = 0$.

3.2. Symmetrie

3.2.1. Gerade Funktionen

Bei geraden Funktionen haben **Gegenzahlen** den gleichen Funktionswert.

$$f(x) = f(-x)$$

Gerade Funktionen sind **achsensymmetrisch**.

3.2.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^4 - 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (-x)^4 - 3 &= x^4 - 3 \\ ((-x)(-x))^2 - 3 &= x^4 - 3 \\ (x^2)^2 - 3 &= x^4 - 3 \\ x^4 - 3 &= x^4 - 3 \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Die Funktion f ist achsensymmetrisch und gerade.

3.2.3. Ungerade Funktionen

Bei ungeraden Funktionen haben Gegenzahlen Gegenzahlen als Funktionswerte.

$$f(x) = -f(-x)$$

Ungerade Funktionen sind **punktsymmetrisch**.

3.2.4. Exponentenkriterium für Symmetrie ganzrationaler Funktionen

Wir betrachten die Funktionsgleichung **ganzrationaler Funktionen** in Polynomform.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

- (1) Hat x in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten, so ist die Funktion **gerade** und **achsensymmetrisch**, denn es gilt

$$\forall x \in D(f) : f(x) = f(-x)$$

- (2) Hat x in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten, so ist die Funktion ungerade und punktsymmetrisch, denn es gilt

$$\forall x \in D(f) : f(x) = -f(-x)$$

3.2.5. Beweis für Achsensymmetrie

$$(-x)^{2n} = ((-x)^2)^n = x^{2n}$$

$$f(x) = a_{2n} x^{2n} + a_{2(n-1)} x^{2(n-1)} + \dots + a_0 x^0$$

$$f(-x) = a_{2n} (-x)^{2n} + a_{2(n-1)} (-x)^{2(n-1)} + \dots + a_0 (-x)^0$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= a_{2n} x^{2n} + a_{2(n-1)} x^{2(n-1)} + \dots + a_0 x^0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3.3. Verhalten

3.3.1. Monotonie

Eine Funktion f ist streng monoton fallend, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3.3.2. Globalverhalten

Sei f eine Funktion. Das **Globalverhalten** von f beschreibt das Verhalten der Funktionswerte, wenn die Argumente unendlich groß oder unendlich klein werden.

3.3.3. Grenzwerte

Betrachten wir $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Γ_f , der Graph⁹ von f , verläuft für $x \rightarrow \infty$ gegen $y = 1$ und für $x \rightarrow -\infty$ gegen $y = \infty$. Um das kurz und knapp auszudrücken, wird die *Limes*-Schreibweise verwendet.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

Der *Limes* von $f(x)$ für x gegen unendlich ist 1. D.h., dass sich die Funktionswerte für sehr große x -Werte beliebig nah an $y = 1$ annähern, diesen aber nicht unbedingt erreichen.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

⁹siehe Abschnitt 2.1.1

3.3.4. Globalverhalten bei ganzrationalen Funktionen

Der Graph⁹ einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ verhält sich für $x \rightarrow \pm\infty$ wie der Graph von g mit $g(x) = a_n x^n$.

3.3.5. Beweis

Sei f mit $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ eine ganzrationale Funktion. Dann gilt mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^n (a_n)) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3.4. Verschiebung

3.4.1. Verschiebung einer Funktion in y-Richtung

Um eine beliebige Funktion $f(x)$ um c Einheiten in y -Richtung zu verschieben, sei die verschobene Funktion $f^*(x) = f(x) + c$.

3.4.2. Verschiebung einer Funktion in x-Richtung

Um eine beliebige Funktion $f(x)$ um d Einheiten in x -Richtung zu verschieben, sei die verschobene Funktion $f^*(x) = f(x - d)$.

3.5. Lineare Funktionen

3.5.1. Funktionsgleichung

Ist f eine ganzrationale Funktion 1. Grades, so wird sie auch **lineare Funktion** genannt. Ihr Graph ist eine **Gerade**.

Ihre Funktionsgleichung lautet $f(x) = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$, wobei m die **Steigung** der Geraden und $Y(0|n)$ der Schnittpunkt mit der y -Achse ist.

3.5.2. Steigung linearer Funktionen

Seien f und g zwei lineare Funktionen mit den Steigungen m_f und m_g . Dann gilt

- 1) Die Graphen⁹ von f und g sind genau dann **parallel** zueinander, wenn $m_f = m_g$.
- 2) Die Graphen von f und g sind genau dann **orthogonal** zueinander, wenn $m_f \cdot m_g = -1$ gilt.

Falls man die Steigung einer Geraden g berechnen wollte, die **orthogonal** zur Geraden f ist, kann man diese Formel umstellen.

$$\begin{aligned}m_f \cdot m_g &= -1 \quad | \div m_f \\ m_g &= -\frac{1}{m_f} = -(m_f)^{-1}\end{aligned}$$

3.5.3. Beweis

Seien f und g zwei lineare Funktionen mit den Steigungen m_f und m_g .

- 1) Wir nehmen an, dass f und g genau einen Schnittpunkt besitzen. Dann $\exists! x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ m_f x + n_f &= m_g x + n_g && \text{mit } m_f = m_g = m \\ mx + n_f &= mx + n_g && | -mx \\ n_f &= n_g \end{aligned}$$

Für $n_f \neq n_g$ gilt $\nexists x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$. Zwei Geraden, die keinen gemeinsamen Punkt haben, sind **parallel**.

Für $n_f = n_g$ gilt $\forall x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$. Zwei Geraden, die unendlich viele gemeinsame Punkte haben, sind **identisch**.

Quod erat Demonstrandum

- 2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit¹⁰ legen wir fest, dass sich f und g im Ursprung unter einem rechten Winkel treffen.
- Es gilt $m_f = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei Δx und Δy die Katheten eines Steigungsdreiecks von f sind.
 - Dreht man die Gerade f samt Steigungsdreieck um 90° um den Ursprung, so erhält man die Gerade g , mit kongruentem Steigungsdreieck und $m_g = \frac{\Delta x}{-\Delta y}$.
 - Es folgt $m_f \cdot m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta x}{-\Delta y} = -1$

3.6. Quadratische Funktionen

3.6.1. Definition

Eine quadratische Funktion ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades mit der **allgemeinen Form**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der Graph⁹ ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel. Maßgeblich für die Lage der Parabel ist ihr **Scheitelpunkt**. Dessen Koordinaten $S(x_S \mid y_S)$ lassen sich direkt aus der **Scheitelpunktform** der Funktionsgleichung ablesen

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

3.6.2. Nullstellen quadratischer Funktionen

- (1) Die Nullstellen¹¹ einer quadratischen Funktion in Normalform $f(x) = x^2 + px + q$ können mit der pq -Formel bestimmt werden.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- (2) Sind x_1 und x_2 Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$, so lässt sich der Funktionsterm in **faktorisierter Form** schreiben.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

¹⁰Nur gewisse Fälle werden aufgezeigt, da die restlichen Fälle *trivial* sind.

¹¹siehe Abschnitt 3.1.3

Die Nullstellen lassen sich direkt aus den **Linearfaktoren** $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ ablesen.

3.6.3. Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $0 = x^2 + px + q$, dann gilt

$$x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

3.6.4. Beweis

Seien $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Dann gilt

- für die Summe der Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &= -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

- für das Produkt der Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \quad \text{dritte binomische Formel} \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Alternativ lassen sich diese Zusammenhänge auch mit dem Ausmultiplizieren der faktorisierten Form aufzeigen.

Somit gilt auch, dass **ganzzahlige Nullstellen Teiler** von q sein müssen und die **Summe der Nullstellen die Gegenzahl** von p muss.

4. Folgen

4.1. Der Folgenbegriff

4.1.1. Folgen

Eine Funktion¹², deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

¹²siehe Abschnitt 3.1.1

4.1.2. Notation

Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

(a_n) ist die Folgenbezeichnung.

n ist der Folgenindex, die Indexzahl, mit $n \in \mathbb{N}$, wobei zumeist $n \geq 1$ n das Argument.

a_n ist das n -te Folgenglied, d.h. der Funktionswert zum Argument¹³ n . In der üblichen Notation von Funktionen sollte a_n besser als $a(n)$ geschrieben werden.

$3n - 4$ ist Term für die Berechnung des n -ten Folgegliedes.

4.1.3. Rekursion und Explikation

Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B. $3n - 4$, dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \wedge a_n = a_{n-1} + 3$$

TL;DR

Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

4.2. Verschiedene Folgen

4.2.1. Geometrische Folgen

Eine Folge (a_n) heißt geometrisch, wenn $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Es gibt genau ein $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Oder anders gesagt

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Für jede geometrische Folge (a_n) gilt $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, weil $a_1 = a_1 \cdot q^0$, weil q^0 für $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ immer 1 ist.

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$

$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$

$$a_3 = a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2$$

...

4.2.2. Konstante Folgen

q ¹⁴ darf nicht 1 sein, denn folglich wäre $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n$.

¹³siehe Abschnitt 3.1.2

¹⁴siehe Abschnitt 4.2.1

Solche Folgen nennen wir **konstante Folgen**.

4.2.3. Alternierende Folgen

Folgen, deren aufeinanderfolgende Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen, nennen wir **alternierend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

4.3. Monotonieverhalten

4.3.1. Strenge Monotonie

Eine Folge (a_n) , deren nächstes Folgenglied immer größer ist als das vorhergehende, nennt man **streng monoton steigend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Nicht streng monoton steigend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Wenn das nächste Folgenglied immer kleiner ist als das vorhergehende, dann nennt man sie analog dazu **streng monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Nicht streng monoton fallend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

4.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$. Dazu gehen wir zuerst von einer streng monotonen Steigung aus und stellen dann um.

$$\begin{aligned} c_n &< c_{n+1} \\ \frac{n-1}{n} &< \frac{n}{n+1} & | \cdot n \\ n-1 &< \frac{n^2}{n+1} & | \cdot (n+1) \\ n^2-1 &< n^2 & | - n^2 \\ -1 &< 0 \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Die Vermutung ist **wahr** für alle $n \in \mathbb{N}$, da eine wahre Ungleichung am Ende steht.

4.3.3. Einfache Monotonie

Folgen, die auch aufeinanderfolgende gleiche Folgenglieder aufweisen, sonst allerdings monoton steigen oder fallen, nennt man **monoton steigend** bzw. **monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

$$\text{bzw. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

4.4. Teilfolgen

4.4.1. Folgen mit Systematik

In Abschnitt 4.3.2 könnten bezüglich der Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ systematisch Folgenglieder „herausgegriffen“ werden, z.B. $c_1, c_{10}, c_{100}, \dots, c_{10^{k-1}}$.

Diese Folgenglieder kann man als Neue Folge auffassen, die ein Teil der Folge (c_n) ist.

4.4.2. Definition

Die Folge (t_n) ist Teilfolge der Folge (a_n) .

Ist n_i mit $(i = 1; 2; \dots; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahle, so heißt $(a_{n_i}) = (t_n)$ Teilfolge von (a_n) .

4.4.3. Teilfolgensatz

Jede Folge (a_n) besitzt eine monotone Teilfolge.

4.4.4. Beweis

Sei eine Gipfelstelle die Indexzahl n , sodass $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq n : a_n \geq a_m$.

TL;DR

Alle nachfolgenden Folgenglieder a_m sind kleiner als a_n bzw. nach a_n kommt kein Folgenglied, das größer ist als a_n .

Nun lässt sich eine Fallunterscheidung durchführen.

I. Es gibt unendlich viele Gipfelstellen.

Nummeriert man die Gipfelstellen in der Reihenfolge ihres Auftretens, folgt

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$$

D.h. die Gipfelstellen bilden eine monoton fallende¹⁵ Teilfolge.

II. Es gibt endlich viele Gipfelstellen.

Sei n_L die letzte Gipfelstelle. Wir betrachten a_{n_L} . Dann gilt $a_{n_L} > a_{n_L+1}$

Da a_{n_L} die letzte Gipfelstelle war, sind alle nachfolgenden Folgenglieder keine Gipfelstellen, d.h. für jedes dieser Folgenglieder a_n^* gibt es mindestens ein Folgenglied a_n^{**} mit $a_n^* < a_n^{**} < a_{n_L}$.

D.h. wir erhalten eine monoton steigende Folge.

$$a_{n_L+1} < a_{n_L+1}^* < a_{n_L+1}^{**} < \dots$$

Quod erat Demonstrandum

¹⁵siehe Abschnitt 4.3.3

4.5. Beschränktheit von Folgen

4.5.1. Schranken

In Abschnitt 4.3.2 wurde die Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ betrachtet.

Man kann „beobachten“, dass $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq c_n < 1$, d.h. die Folgenglieder unter- und überschreiten einen bestimmten Wert nicht.

4.5.2. Untere und obere Schranken, Maxi- und Minima

1. Eine reelle Zahl u heißt **untere Schranke** der Folge (a_n) , wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $u \leq a_n$.
2. Eine reelle Zahl o heißt **obere Schranke** von (a_n) , wenn $\forall n \in \mathbb{N} : o \geq a_n$.
3. Eine reelle Zahl $\min a_n$ heißt **Minimum** von (a_n) , wenn es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\min a_n = a_k \leq a_n$.
4. Eine reelle Zahl $\max a_n$ heißt **Maximum** von (a_n) , wenn $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \max a_n = a_k \geq a_n$.

4.5.3. Beispiel

Betrachten wir die Folge $(a_n) : a_n = -\frac{4n}{n+2}$. Zunächst benötigt man eine Vermutung. Dazu werden einige Folgenglieder berechnet.

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{4 \cdot 1}{1+2} = -\frac{4}{3} \\a_{10} &= -\frac{4 \cdot 10}{10+2} = -\frac{40}{12} \\a_{100} &= -\frac{4 \cdot 100}{100+2} = -\frac{400}{102}\end{aligned}$$

Man kann beobachten, dass sich die Folge mit wachsendem Argument an -4 annähert. Darum vermuten wir zunächst, dass **eine** untere Schranke -4 ist, $\forall n \in \mathbb{N} : -4 \leq a_n$.

$$\begin{aligned}-4 &\leq a_n \\-4 &\leq -\frac{4n}{n+2} \quad | \cdot (n+2) \\-4(n+2) &\leq -4n \\-4n-8 &\leq -4n \quad | +4n \\-8 &\leq 0\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Die Vermutung $-4 \leq a_n$ ist **wahr** für alle $n \in \mathbb{N}$.

4.5.4. Vielschrankensatz

Falls eine Folge (a_n) eine untere Schranke besitzt, so besitzt sie unendlich viele.

4.5.5. Beweis

Sei $u \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < u$.

D.h. $x < u \leq a_n$, folgt $x \leq a_n$ und somit existieren unendlich viele untere Schranken.

4.5.6. Suprema und Infima

Die größte untere Schranke¹⁶ nennt man **untere Grenze** oder *Infimum* $\inf a_n$ der Folge (a_n) .
Die kleinste obere Schranke nennt man **obere Grenze** oder *Supremum* $\sup a_n$ der Folge (a_n) .

4.5.7. Schritte zum Nachweis

Die beliebige Folge (a_n) besitzt die untere Grenze $\inf a_n$. Es sei $k \in \mathbb{R}$ mit $\inf a_n < k$.

5. Beweise

5.1. Beweistechniken

5.1.1. Hinrichtung und Rückrichtung

Beweise können *Genau dann, wenn ...* Aussagen, die in zwei Richtungen funktionieren, sein.

5.1.2. Satz vom Nullprodukt als Beispiel

$a \cdot b = 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn $a = 0 \vee b = 0$.

Hinrichtung¹⁷ „ \Rightarrow “

1. Wir nehmen an, dass $a \cdot b = 0$. Sei nun $a \neq 0$. Jetzt können wir durch Null teilen.

$$\begin{array}{rcl} a \cdot b = 0 & | \div a & \\ b = 0 & & \end{array}$$

2. Analog gilt dies auch für $b \neq 0$.

Es folgt, dass wenn $a \cdot b = 0$, muss mindestens einer der Faktoren a oder b Null sein.

Rückrichtung „ \Leftarrow “

1. Wir nehmen an, dass $a = 0$. Somit gilt

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

2. Analog gilt dies für $b = 0$.

Es folgt, dass wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, dann ist auch das Produkt Null.

Quod erat Demonstrandum

¹⁶siehe Abschnitt 4.5.2

¹⁷siehe revolutionäres Frankreich