Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche ... 3
  1.1. Mengen ... 3
    1.1.1. Definition nach Cantor ... 3
    1.1.2. Mengeneigenschaften ... 3
    1.1.3. Mengenbeziehungen ... 3
    1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz ... 3
    1.1.5. Kartesisches Produkt ... 3
  1.2. Zahlbereiche ... 4
    1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche ... 4
2. Abbildungen ... 4
  2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich ... 4
    2.1.1. Abbildung, Funktion ... 4
    2.1.2. Beispiel ... 5
    2.1.3. Verschiedene Abbildungen ... 5
    2.1.4. Beispiel ... 5
  2.2. Verkettung von Abbildungen ... 5
    2.2.1. Verkettung ... 5
    2.2.2. Assoziativität ... 5
  2.3. Abbildungseigenschaften ... 6
    2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität ... 6
    2.3.2. Beispielbeweis ... 6
  2.4. Umkehrabbildung ... 7
    2.4.1. Inverse Abbildung ... 7
    2.4.2. Beispiel ... 7
    2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse ... 7
    2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen ... 8
    2.4.5. Beweis ... 8
3. Funktionen ... 9
  3.1. Symmetrie ... 9
    3.1.1. Gerade Funktionen ... 9
    3.1.2. Beispielbeweis ... 9
    3.1.3. Ungerade Funktionen ... 9
    3.1.4. Exponentenkriterium für Symmetrie ganzrationaler Funktionen ... 9
    3.1.5. Beweis für Achsensymmetrie ... 10
4. Folgen ... 10
  4.1. Der Folgenbegriff ... 10
    4.1.1. Folgen ... 10
    4.1.2. Notation ... 10
    4.1.3. Rekursion und Explikation ... 10
  4.2. Verschiedene Folgen ... 11
    4.2.1. Geometrische Folgen ... 11
    4.2.2. Konstante Folgen ... 11
    4.2.3. Alternierende Folgen ... 11
  4.3. Monotonieverhalten ... 11
    4.3.1. Strenge Monotonie ... 11
    4.3.2. Beispielbeweis ... 12
    4.3.3. Einfache Monotonie ... 12
  4.4. Teilfolgen ... 12
    4.4.1. Folgen mit Systematik ... 12
    4.4.2. Definition ... 12
    4.4.3. Teilfolgensatz ... 12

5. Beweise 12
5.1. Beweistechniken 12
5.1.1. Hinrichtung und Rückrichtung 12
5.1.2. Satz vom Nullprodukt als Beispiel 12

1. Mengen und Zahlbereiche

1.1. Mengen

1.1.1. Definition nach Cantor

Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

1.1.2. Mengeneigenschaften

Sei M eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$, x ist ein Element von M.
- $x \notin M$, x ist kein Element von M.
- $M = \emptyset$, M ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also $M = \{\}$.
- $|M|$ heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von M und gibt an, wie viele Elemente M enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften, z.B M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.
- Auflistung der Elemente, z.B. $M = \{0; 5; 10; ...\}$.
- Definition der Eigenschaften, z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$.
- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

1.1.3. Mengenbeziehungen

Seien X und Y Mengen.

- X heißt **Teilmenge** von Y ($X \subseteq Y$), wenn jedes Element von X auch in Y ist.
- X heißt **echte Teilmenge** von Y ($X \subset Y$), wenn jedes Element vin $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.
- Die Mengen X und Y heißen **gleich**, wenn $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$.

1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz

Seien X und Y Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ **Durchschnitt** von X und Y.
- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ **Vereinigung** von X und Y.
- $X \mathbin{\dot\cup} Y := \{x \mid x \in X \mathbin{\dot\vee} x \in Y\}$ **disjunkte Vereinigung** von X und Y.
- $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$ **Differenz** von X und Y.

1.1.5. Kartesisches Produkt

Seien X und Y Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

[1] [2]

[1] $(x; y)$ ist ein geordnetes Paar.
[2] $(x; y) = (x; w) \Leftrightarrow x = v\ y = w$

1.2. Zahlbereiche

1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{N}^*$ Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+$ Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$ Menge der negativen rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}^+$ und $-\mathbb{R}^+$ analog, sodass $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

2. Abbildungen

2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

2.1.1. Abbildung, Funktion

Es seien X und Y nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift f, die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt **Abbildung** von X nach Y.

   $\forall x \in D(f) \subseteq X$ gibt es genau ein $y = f(x) \in Y$.

   $$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

   Handelt es sich bei X und Y um reine Zahlenmengen (z.B. $\mathbb{R}$), so bezeichnen wir die Abbildung f auch als **Funktion**.

   TL;DR
   Jedem x muss ein y zugeordnet werden. Wenn X und Y reine Zahlenmengen sind, ist die Abbildung eine Funktion.

2. $D(f)$ ist die **Definitionsmenge**[3] von der Vorschrift f.
3. $B(f)$ ist die **Bildungsmenge**[4] von f, wobei $B(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$
4. $f(x) \in Y$ heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von x unter f.

   Ist $y \in Y$, so heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ **ein Urbild** bzw. **Argument** von y unter f.
5. Die Menge aller Urpunkte von y unter f bezeichnen wir mit $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Zu f^{-1} sagen wir auch **das Urbild** von y unter f.

   TL;DR
   Das Urbild ist die Menge aller **Urbilder**.

   $X = D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f und $Y = B(f)$ heißt **Wertebereich** von f.

   Die Menge $\mathrm{im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X\}$ mit $f(x) = y$ heißt **Bild** von f.

[3] Definitionsbereich bei Funktionen
[4] Wertebereich bei Funktionen

6. Die Menge $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$[5] heißt der Graph von f.
7. Zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen gleich ($f = g$), wenn $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$.

2.1.2. Beispiel
Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

Für $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$ wäre das Bild $\operatorname{im}(f(X_1)) = [0; 1]$.

Für $Y_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ wäre $f^{-1}(Y_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\}$ oder $f^{-1}(Y_1) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi]$.

Der Definitionsbereich $D(f)$ = $\mathbb{Z}$ und der Wertebereich $B(f) = [-1; 1]$.

2.1.3. Verschiedene Abbildungen
(1) Es sei X eine nichtleere Menge. Die **Identität** auf X ist definiert durch

$$\begin{aligned} Id_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(2) Sei $y_0 \in Y$ fixiert. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\to Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

konstante Abbildung.

(3) Ist $X \subset \mathbb{R}$, so heißt jede Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ **reelle Funktion**.

2.1.4. Beispiel
Die Logarithmusfunktion ist eine reelle Funktion.

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

2.2. Verkettung von Abbildungen

2.2.1. Verkettung
Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von f und g.

Wir sagen auch „g nach f“, d.h. f wird zuerst angewendet, danach g.

2.2.2. Assoziativität
Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f))(h \circ g) \circ f$$

[5] siehe Abschnitt 1.1.5

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

2.3. Abbildungseigenschaften

2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **surjektiv**. wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit $f : X \twoheadrightarrow Y$ ausdrücken.

TL;DR
Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **mindestens** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit $f : X \hookrightarrow Y$ ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge ($\subset$) aufweist.

TL;DR
Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **maximal** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie sowohl subjektiv als auch injektiv ist. Diese Abbildung nennen wir auch eineindeutige Zuordnung.

TL;DR
Eine Abbildung ist bijektiv, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird und jedes $y \in Y$ einem $x \in X$ zugeordnet wird.

2.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Abbildung $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ mit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$. Wir wollen nun herausfinden, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv, also beides, ist.

1. Damit f **injektiv** ist, muss die Definition[6] erfüllt sein. Also muss für $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1 = x_2$. Dafür setzen wir sie gleich.

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_1+1} &= \frac{x_2}{x_2+1} && \mid \cdot (x_2+1) \\
\frac{x_1 x_2 + x_1}{x_1+1} &= x_2 && \mid \cdot (x_1+1) \\
x_1 x_2 + x_1 &= x_1 x_2 + x_2 && \mid - x_1 x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

   Somit ist f injektiv. Da $x_1 = x_2$ ist die Definition erfüllt.

2. Damit f **surjektiv** ist, muss auch die Definition[6] $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ erfüllt sein.

[6] siehe Abschnitt 2.3.1

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x}{x+1} && | \cdot (x+1) \\
yx + y &= x && | - y - x \\
yx - x &= -y \Leftrightarrow x(y-1) = -y && | \cdot \frac{1}{y-1} \\
x &= -\frac{y}{y-1}
\end{aligned}
$$

$-\frac{y}{y-1}$ ist für $y = 1$ nicht definiert und somit ist f nicht surjektiv, da ein $y \in Y$ existiert für das es kein $x \in X$ gibt.

3. f ist kann folglich nicht **bijektiv** sein, da es dafür surjektiv und injektiv sein müsste. Es wäre bijektiv für $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.4. Umkehrabbildung

2.4.1. Inverse Abbildung

Ist die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ zu f definiert durch

$$
\begin{aligned}
f^{-1} &: Y \to X \\
y &\mapsto f^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

$y \mapsto f^{-1}(y) :=$ das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f.

Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls bijektiv und es gilt aufgrund der Definition

$$
\begin{aligned}
f^{-1} \circ f &= Id_X \\
f \circ f^{-1} &= Id_Y \\
\left(f^{-1}\right)^{-1} &= f
\end{aligned}
$$

2.4.2. Beispiel

(1) $Id_X : X \to X$ ist bijektiv.

$$
\begin{aligned}
Id_X &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
x &\mapsto x
\end{aligned}
$$

$$
(Id_X)^{-1} = Id_X
$$

(2) Die konstante Abbildung $c_{y_0} : X \to Y$ ist weder injektiv noch surjektiv, unter der Bedingung, dass X und Y mehr als ein Element enthalten.

$\left(c_{y_0}\right)^{-1}$ ist zudem keine Abbildung mehr.

(3) Die reelle Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\ln : x \mapsto \ln(x)$ ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung wäre

$$
\begin{aligned}
\exp &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\
\exp &: x \to e^x
\end{aligned}
$$

2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt

(1) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = Id_X$.
g heißt **Linksinverse** von f.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $h : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ h = Id_Y$.
h heißt **Rechtsinverse** von f.

(3) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, die sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist. D.h. es gilt $g \circ f = Id_X \wedge f \circ g = Id_Y$, wobei g eindeutig bestimmt ist, und $g = f^{-1}$.

Nur für **bijektive** Abbildungen gibt es Umkehrabbildungen. Bei nur surjektiv oder injektiven Abbildungen existiert ein Urbild f^{-1}, eine Menge mit keinem, einem oder anderen Elementen.

2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei bijektive Abbildungen.
Dann ist auch ihre Verkettung $g \circ f$ bijektiv und für ihre inversen Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2.4.5. Beweis
Für die inversen Abbildungen $f^{-1} : Y \to X$ und $g^{-1} : Z \to Y$ gilt[7]

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= Id_X & g^{-1} \circ g &= Id_Y \\ f \circ f^{-1} &= Id_Y & g \circ g^{-1} &= Id_Z \end{aligned}$$

Wegen der Assoziativität[8] von Verknüpfungen gilt

$$\begin{aligned} &(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ (Id_Y) \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_X \\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= Id_X \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt analog dazu

$$\begin{aligned} &(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ (Id_Y) \circ g^{-1} \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ g^{-1} = Id_Z \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= Id_Z \end{aligned}$$

Somit gilt, falls f und g bijektiv sind, $\exists f^{-1} \wedge g^{-1}$, die eindeutig bestimmt, d.h. ebenfalls bijektiv sind.

[7] siehe Abschnitt 2.4.1
[8] siehe Abschnitt 2.2.2

$$
\begin{aligned}
&\exists f^{-1} \wedge g^{-1} \\
&\Rightarrow \exists f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}
\end{aligned}
$$

Quod erat Demonstrandum

3. Funktionen

3.1. Symmetrie

3.1.1. Gerade Funktionen

Bei geraden Funktionen haben **Gegenzahlen** den gleichen Funktionswert.

$$f(x) = f(-x)$$

Gerade Funktionen sind **achsensymmetrisch**.

3.1.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^4 - 3$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(-x) \\
(-x)^4 - 3 &= x^4 - 3 \\
((-x)(-x))^2 - 3 &= x^4 - 3 \\
\left(x^2\right)^2 - 3 &= x^4 - 3 \\
x^4 - 3 = x^4 - 3
\end{aligned}
$$

Quod erat Demonstrandum

Die Funktion f ist achsensymmetrisch und gerade.

3.1.3. Ungerade Funktionen

Bei ungeraden Funktionen haben Gegenzahlen Gegenzahlen als Funktionswerte.

$$f(x) = -f(-x)$$

Ungerade Funktionen sind **punktsymmetrisch**.

3.1.4. Exponentenkriterium für Symmetrie ganzrationaler Funktionen

Wir betrachten die Funktionsgleichung **ganzrationaler Funktionen** in Polynomform.

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

(1) Hat x in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten, so ist die Funktion **gerade** und **achsensymmetrisch**, denn es gilt

$$\forall x \in D(f) : f(x) = f(-x)$$

(2) Hat x in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten, so ist die Funktion ungerade und punktsymmetrisch, denn es gilt

$$\forall x \in D(f) : f(x) = -f(-x)$$

3.1.5. Beweis für Achsensymmetrie

$$(-x)^{2n} = ((-x)^2)^n = x^{2n}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{2n}x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + ... + a_0x^0 \\ f(-x) &= a_{2n}(-x)^{2n} + a_{2(n-1)}(-x)^{2(n-1)} + ... + a_0(-x)^0 \\ f(-x) &= a_{2n}x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + ... + a_0x^0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

4. Folgen

4.1. Der Folgenbegriff

4.1.1. Folgen

Eine Funktion[9], deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

4.1.2. Notation

Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

(a_n) ist die Folgenbezeichnung.

n ist der Folgenindex, die Indexzahl, mit $n \in \mathbb{N}$, wobei zumeist $n \geq 1$ n das Argument.

a_n ist das n-te Folgenglied, d.h. der Funktionswert zum Argument n. In der üblichen Notation von Funktionen sollte a_n besser als $a(n)$ geschrieben werden.

$3n - 4$ ist Term für die Berechnung des n-ten Folgegliedes.

4.1.3. Rekursion und Explikation

Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B. $3n - 4$, dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \land a_n = a_{n-1} + 3$$

TL;DR

Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

[9] siehe Abschnitt 3

4.2. Verschiedene Folgen

4.2.1. Geometrische Folgen

Eine Folge (a_n) heißt geometrisch, wenn $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Es gibt genau ein $q \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Oder anders gesagt

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Für jede geometrische Folge (a_n) gilt $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, weil $a_1 = a_1 \cdot q^0$, weil q^0 für $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ immer 1 ist.

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\
a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\
a_3 &= a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2 \\
&\dots
\end{aligned}$$

4.2.2. Konstante Folgen

q[10] darf nicht 1 sein, denn folglich wäre $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n$.

Solche Folgen nennen wir **konstante Folgen**.

4.2.3. Alternierende Folgen

Folgen, deren aufeinanderfolgende Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen, nennen wir **alternierend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

4.3. Monotonieverhalten

4.3.1. Strenge Monotonie

Eine Folge (a_n), deren nächstes Folgeglied immer größer ist als das vorhergehende, nennt man **streng monoton steigend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Nicht streng monoton steigend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Wenn das nächste Folgeglied immer kleiner ist als das vorhergehende, dann nennt man sie analog dazu **streng monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Nicht streng monoton fallend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

[10] siehe Abschnitt 4.2.1

4.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$. Dazu gehen wir zuerst von einer streng monotonen Steigung aus und stellen dann um.

$$\begin{aligned} c_n &< c_{n+1} \\ \frac{n-1}{n} &< \frac{n}{n+1} && \mid \cdot n \\ n-1 &< \frac{n^2}{n+1} && \mid \cdot (n+1) \\ n^2-1 &< n^2 && \mid -n^2 \\ -1 &< 0 \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Die Vermutung ist **wahr**, da eine wahre Ungleichung am Ende steht.

4.3.3. Einfache Monotonie

Folgen, die auch aufeinanderfolgende gleiche Folgeglieder aufweisen, sonst allerdings monoton steigen oder fallen, nennt man **monoton steigend** bzw. **monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$
$$\text{bzw. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

4.4. Teilfolgen

4.4.1. Folgen mit Systematik

In Abschnitt 4.3.2 könnten bezüglich der Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ systematisch Folgenglieder „herausgegriffen“ werden, z.B. c_1, c_{10}, c_{100}, …, $c_{10^{k-1}}$.
Diese Folgenglieder kann man als Neue Folge auffassen, die ein Teil der Folge (c_n) ist.

4.4.2. Definition

Die Folge (t_n) ist Teilfolge der Folge (a_n).
Ist n_i mit $(i = 1; 2; \ldots; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahle, so heißt $\left(a_{n_i}\right) = (t_n)$ Teilfolge von (a_n).

4.4.3. Teilfolgensatz

Jede Folge (a_n) besitzt eine monotone Teilfolge.

5. Beweise

5.1. Beweistechniken

5.1.1. Hinrichtung und Rückrichtung

Beweise können *Genau dann, wenn …* Aussagen, die in zwei Richtungen funktionieren, sein.

5.1.2. Satz vom Nullprodukt als Beispiel

$a \cdot b = 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn $a = 0 \vee b = 0$.

Hinrichtung „$\Longrightarrow$"

1. Wir nehmen an, dass $a \cdot b = 0$ Sei nun $a \neq 0$. Jetzt können wir durch Null teilen.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \qquad \mid \div a \\ b &= 0 \end{aligned}$$

2. Analog gilt dies auch für $b \neq 0$.

Es folgt, dass wenn $a \cdot b = 0$, muss mindestens einer der Faktoren a oder b Null sein.

Rückrichtung „$\Longleftarrow$"

1. Wir nehmen an, dass $a = 0$. Somit gilt

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

2. Analog gilt dies für $b = 0$.

Es folgt, dass wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, dann ist auch das Produkt Null.

Quod erat Demonstrandum