

Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche	2
1.1. Mengen	2
1.1.1. Definition nach Cantor	2
1.1.2. Mengeneigenschaften	2
1.1.3. Mengenbeziehungen	2
1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz	2
1.1.5. Kartesisches Produkt	2
1.2. Zahlbereiche	3
1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche	3
2. Abbildungen	3
2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich	3
2.1.1. Abbildung, Funktion	3
2.1.2. Beispiel	4
2.1.3. Verschiedene Abbildungen	4
2.1.4. Beispiel	4
2.2. Verkettung von Abbildungen	4
2.2.1. Verkettung	4
2.2.2. Assoziativität	4
2.3. Abbildungseigenschaften	5
2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität	5
2.3.2. Beispielbeweis	5
2.4. Umkehrabbildung	6
2.4.1. Inverse Abbildung	6
2.4.2. Beispiel	6
2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse	6
2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen	7
2.4.5. Beweis	7
3. Folgen	8
3.1. Der Folgenbegriff	8
3.1.1. Folgen	8
3.1.2. Notation	8
3.1.3. Rekursion und Explikation	8
3.2. Verschiedene Folgen	8
3.2.1. Geometrische Folgen	8
3.2.2. Konstante Folgen	9
3.2.3. Alternierende Folgen	9
3.3. Monotonieverhalten	9
3.3.1. Strenge Monotonie	9
3.3.2. Einfache Monotonie	9

1. Mengen und Zahlbereiche

1.1. Mengen

1.1.1. Definition nach Cantor

Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

1.1.2. Mengeneigenschaften

Sei M eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$, x ist ein Element von M .
- $x \notin M$, x ist kein Element von M .
- $M = \emptyset$, M ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also $M = \{\}$.
- $|M|$ heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von M und gibt an, wie viele Elemente M enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften, z.B. M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.
- Auflistung der Elemente, z.B. $M = \{0; 5; 10; \dots\}$.
- Definition der Eigenschaften, z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$.
- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

1.1.3. Mengenbeziehungen

Seien X und Y Mengen.

- X heißt **Teilmenge** von Y ($X \subseteq Y$), wenn jedes Element von X auch in Y ist.
- X heißt **echte Teilmenge** von Y ($X \subset Y$), wenn jedes Element von $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.
- Die Mengen X und Y heißen **gleich**, wenn $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$.

1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz

Seien X und Y Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ **Durchschnitt** von X und Y .
- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ **Vereinigung** von X und Y .
- $X \dot{\cup} Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ **disjunkte Vereinigung** von X und Y .
- $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$ **Differenz** von X und Y .

1.1.5. Kartesisches Produkt

Seien X und Y Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

12

¹ $(x; y)$ ist ein geordnetes Paar.

² $(x; y) = (x; w) \Leftrightarrow x = v \wedge y = w$

1.2. Zahlbereiche

1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche

\mathbb{N} Menge der natürlichen Zahlen mit 0

\mathbb{N}^* Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

\mathbb{Z} Menge der ganzen Zahlen

\mathbb{Q} Menge der rationalen Zahlen

\mathbb{Q}^+ Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$ Menge der negativen rationalen Zahlen

\mathbb{R} Menge der reellen Zahlen, \mathbb{R}^+ und $-\mathbb{R}^+$ analog, sodass $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

\mathbb{C} Menge der komplexen Zahlen

2. Abbildungen

2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

2.1.1. Abbildung, Funktion

Es seien X und Y nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift f , die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt **Abbildung** von X nach Y .

$\forall x \in D(f) \subseteq X$ gibt es genau ein $y = f(x) \in Y$.

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

Handelt es sich bei X und Y um reine Zahlenmengen (z.B. \mathbb{R}), so bezeichnen wir die Abbildung f auch als **Funktion**.

TL;DR

Jedem x muss ein y zugeordnet werden. Wenn X und Y reine Zahlenmengen sind, ist die Abbildung eine Funktion.

2. $D(f)$ ist die **Definitionsmenge**³ von der Vorschrift f .
3. $B(f)$ ist die **Bildungsmenge**⁴ von f , wobei $B(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$
4. $f(x) \in Y$ heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von x unter f .
Ist $y \in Y$, so heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ ein **Urbild** bzw. **Argument** von y unter f .
5. Die Menge aller Urbunkte von y unter f bezeichnen wir mit $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Zu f^{-1} sagen wir auch **das Urbild** von y unter f .

TL;DR

Das Urbild ist die Menge aller **Urbilder**.

$X = D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f und $Y = B(f)$ heißt **Wertebereich** von f .

Die Menge $\text{im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X\}$ mit $f(x) = y$ heißt **Bild** von f .

³Definitionsbereich bei Funktionen

⁴Wertebereich bei Funktionen

6. Die Menge $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y^5$ heißt der Graph von f .
7. Zwei Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen gleich ($f = g$), wenn $f(x) = g(x) \forall x \in X$.

2.1.2. Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

Für $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$ wäre das Bild $\text{im}(f(X_1)) = [0; 1]$.

Für $Y_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ wäre $f^{-1}(Y_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\}$ oder $f^{-1}(Y_1) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi]$.

Der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{Z}$ und der Wertebereich $B(f) = [-1; 1]$.

2.1.3. Verschiedene Abbildungen

- (1) Es sei X eine nichtleere Menge. Die **Identität** auf X ist definiert durch

$$\begin{aligned} Id_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

- (2) Sei $y_0 \in Y$ fixiert. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

konstante Abbildung.

- (3) Ist $X \subset \mathbb{R}$, so heißt jede Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **reelle Funktion**.

2.1.4. Beispiel

Die Logarithmusfunktion ist eine reelle Funktion.

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

2.2. Verkettung von Abbildungen

2.2.1. Verkettung

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von f und g .

Wir sagen auch „ g nach f “, d.h. f wird zuerst angewendet, danach g .

2.2.2. Assoziativität

Seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow W$ Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

⁵siehe Abschnitt 1.1.5

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

2.3. Abbildungseigenschaften

2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **surjektiv**, wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit $f : X \twoheadrightarrow Y$ ausdrücken.

TL;DR

Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **mindestens** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit $f : X \hookrightarrow Y$ ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge (\subset) aufweist.

TL;DR

Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **maximal** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist. Diese Abbildung nennen wir auch eineindeutige Zuordnung.

TL;DR

Eine Abbildung ist bijektiv, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird und jedes $y \in Y$ einem $x \in X$ zugeordnet wird.

2.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Abbildung $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ mit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen nun herausfinden, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv, also beides, ist.

1. Damit f **injektiv** ist, muss die Definition⁶ erfüllt sein. Also muss für $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1 = x_2$. Dafür setzen wir sie gleich.

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1 + 1} &= \frac{x_2}{x_2 + 1} & | \cdot (x_2 + 1) \\ \frac{x_1 x_2 + x_1}{x_1 + 1} &= x_2 & | \cdot (x_1 + 1) \\ x_1 x_2 + x_1 &= x_1 x_2 + x_2 & | - x_1 x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Somit ist f injektiv. Da $x_1 = x_2$ ist die Definition erfüllt.

2. Damit f **surjektiv** ist, muss auch die Definition⁶ $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ erfüllt sein.

⁶siehe Abschnitt 2.3.1

$$y = \frac{x}{x+1} \quad | \cdot (x+1)$$

$$yx + y = x \quad | -y - x$$

$$yx - x = -y \Leftrightarrow x(y-1) = -y \quad | \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$x = -\frac{y}{y-1}$$

$-\frac{y}{y-1}$ ist für $y = 1$ nicht definiert und somit ist f nicht surjektiv, da ein $y \in Y$ existiert für das es kein $x \in X$ gibt.

3. f ist kann folglich nicht **bijektiv** sein, da es dafür surjektiv und injektiv sein müsste. Es wäre bijektiv für $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.4. Umkehrabbildung

2.4.1. Inverse Abbildung

Ist die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ zu f definiert durch

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y)$$

$y \mapsto f^{-1}(y) :=$ das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f .

Sei $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls bijektiv und es gilt aufgrund der Definition

$$f^{-1} \circ f = Id_X$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

2.4.2. Beispiel

- (1) $Id_X : X \rightarrow X$ ist bijektiv.

$$Id_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

$$(Id_X)^{-1} = Id_X$$

- (2) Die konstante Abbildung $c_{y_0} : X \rightarrow Y$ ist weder injektiv noch surjektiv, unter der Bedingung, dass X und Y mehr als ein Element enthalten.

$(c_{y_0})^{-1}$ ist zudem keine Abbildung mehr.

- (3) Die reelle Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\ln : x \mapsto \ln(x)$ ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung wäre

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\exp : x \mapsto e^x$$

2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann gilt

- (1) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $g \circ f = Id_X$.
 g heißt **Linksinverse** von f .
- (2) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $h : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $f \circ h = Id_Y$.
 h heißt **Rechtsinverse** von f .
- (3) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, die sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist. D.h. es gilt $g \circ f = Id_X \wedge f \circ g = Id_Y$, wobei g eindeutig bestimmt ist, und $g = f^{-1}$.

Nur für **bijektive** Abbildungen gibt es Umkehrabbildungen. Bei nur surjektiv oder injektiven Abbildungen existiert ein Urbild f^{-1} , eine Menge mit keinem, einem oder anderen Elementen.

2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei bijektive Abbildungen.

Dann ist auch ihre Verkettung $g \circ f$ bijektiv und für ihre inversen Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2.4.5. Beweis

Für die inversen Abbildungen $f^{-1} : Y \rightarrow X$ und $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ gilt⁷

$$f^{-1} \circ f = Id_X \quad g^{-1} \circ g = Id_Y$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y \quad g \circ g^{-1} = Id_Z$$

Wegen der Assoziativität⁸ von Verknüpfungen gilt

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f$$

$$\Leftrightarrow f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$$

$$\Leftrightarrow f^{-1} \circ (Id_Y) \circ f$$

$$\Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_X$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = Id_X$$

Umgekehrt gilt analog dazu

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$$

$$\Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$$

$$\Leftrightarrow g \circ (Id_X) \circ g^{-1}$$

$$\Leftrightarrow g \circ g^{-1} = Id_Z$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_Z$$

Somit gilt, falls f und g bijektiv sind, $\exists f^{-1} \wedge g^{-1}$, die eindeutig bestimmt, d.h. ebenfalls bijektiv sind.

⁷siehe Abschnitt 2.4.1

⁸siehe Abschnitt 2.2.2

$$\begin{aligned} & \exists f^{-1} \wedge g^{-1} \\ \Rightarrow & \exists f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3. Folgen

3.1. Der Folgenbegriff

3.1.1. Folgen

Eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

3.1.2. Notation

Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

(a_n) ist die Folgenbezeichnung.

n ist der Folgenindex, die Indexzahl, mit $n \in \mathbb{N}$, wobei zumeist $n \geq 1$ n das Argument.

a_n ist das n -te Folgenglied, d.h. der Funktionswert zum Argument n . In der üblichen Notation von Funktionen sollte a_n besser als $a(n)$ geschrieben werden.

$3n - 4$ ist Term für die Berechnung des n -ten Folgengliedes.

3.1.3. Rekursion und Explikation

Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B. $3n - 4$, dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \wedge a_n = a_{n-1} + 3$$

TL;DR

Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

3.2. Verschiedene Folgen

3.2.1. Geometrische Folgen

Eine Folge (a_n) heißt geometrisch, wenn $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Es gibt genau ein $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Oder anders gesagt

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Für jede geometrische Folge (a_n) gilt $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, weil $a_1 = a_1 \cdot q^0$, weil q^0 für $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ immer 1 ist.

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$

$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$

$$a_3 = a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2$$

$$\dots$$

3.2.2. Konstante Folgen

q^0 darf nicht 1 sein, denn folglich wäre $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n$.

Solche Folgen nennen wir **konstante Folgen**.

3.2.3. Alternierende Folgen

Folgen, deren aufeinanderfolgende Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen, nennen wir **alternierend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

3.3. Monotonieverhalten

3.3.1. Strenge Monotonie

Eine Folge (a_n) , deren nächstes Folgeglied immer größer ist als das vorhergehende, nennt man **streng monoton steigend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Nicht streng monoton steigend sind jedoch alle Folgen für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Wenn das nächste Folgeglied immer kleiner ist als das vorhergehende, dann nennt man sie analog dazu **streng monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Nicht streng monoton fallend sind jedoch alle Folgen für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

3.3.2. Einfache Monotonie

Folgen, die auch aufeinanderfolgende gleiche Folgeglieder aufweisen, sonst allerdings monoton steigen oder fallen, nennt man **monoton steigend** bzw. **monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

$$\text{bzw. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

⁹siehe Abschnitt 3.2.1