

---

# Betrachtungen der Tafel und andere Überlegungen

Mathematik

J. F.  
2025.11.11

# Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche .....	5
1.1. Mengen .....	5
1.1.1. Definition nach Cantor .....	5
1.1.2. Mengeneigenschaften .....	5
1.1.3. Mengenbeziehungen .....	5
1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz .....	5
1.1.5. Kartesisches Produkt .....	6
1.2. Zahlbereiche .....	6
1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche .....	6
2. Abbildungen .....	6
2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich .....	6
2.1.1. Abbildungen und Funktionen .....	6
2.1.2. Beispiel .....	7
2.1.3. Satz über Bilder und Urbilder .....	7
2.1.4. Verschiedene Abbildungen .....	7
2.1.5. Beispiel .....	7
2.2. Verkettung von Abbildungen .....	8
2.2.1. Verkettung .....	8
2.2.2. Assoziativität .....	8
2.3. Abbildungseigenschaften .....	8
2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität .....	8
2.3.2. Beispielbeweis .....	9
2.3.3. Hinrichtungs- und Rückrichtungsbeweise .....	9
2.4. Umkehrabbildung .....	10
2.4.1. Inverse Abbildung .....	10
2.4.2. Beispiel .....	10
2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse .....	11
2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen .....	11
2.4.5. Beweis .....	11
3. Funktionen .....	12
3.1. Grundlagen zum Funktionsbegriff .....	12
3.1.1. Zahlenmengenkriterium .....	12
3.1.2. Begriffe .....	12
3.1.3. Grundlegende Funktionstypen .....	12
3.1.4. Nullstellen .....	13
3.2. Symmetrie .....	13
3.2.1. Gerade Funktionen .....	13
3.2.2. Beispielbeweis .....	13
3.2.3. Ungerade Funktionen .....	13
3.2.4. Exponentenkriterium für Symmetrie ganzrationaler Funktionen .....	13
3.2.5. Beweis für Achsensymmetrie .....	14
3.3. Verhalten .....	14
3.3.1. Monotonie .....	14
3.3.2. Globalverhalten .....	14
3.3.3. Grenzwerte .....	14
3.3.4. Globalverhalten bei ganzrationalen Funktionen .....	14
3.3.5. Beweis .....	15
3.4. Verschiebung .....	15
3.4.1. Verschiebung einer Funktion in $y$ -Richtung .....	15
3.4.2. Verschiebung einer Funktion in $x$ -Richtung .....	15
3.5. Lineare Funktionen .....	15

3.5.1.	Funktionsgleichung	15
3.5.2.	Steigung linearer Funktionen	15
3.5.3.	Beweis	15
3.6.	Quadratische Funktionen	16
3.6.1.	Definition	16
3.6.2.	Nullstellen quadratischer Funktionen	16
3.6.3.	Satz von Vieta	16
3.6.4.	Beweis	17
3.7.	Allgemeine ganzrationale Funktionen	17
3.7.1.	Fundamentalsatz der Algebra für reelle Zahlen	17
3.7.2.	Beweis	17
3.7.3.	Satz zur Abspaltung von Linearfaktoren	18
3.7.4.	Beweis	18
3.7.5.	Zerlegung in Linearfaktoren	18
3.7.6.	Vielfachheit von Nullstellen	18
3.7.7.	Beispiel	18
3.7.8.	Bemerkung	19
3.7.9.	Teilerkriterium für Nullstellen ganzrationaler Funktionen	19
3.7.10.	Beweis	19
4.	Folgen	19
4.1.	Der Folgenbegriff	19
4.1.1.	Folgen	19
4.1.2.	Notation	19
4.1.3.	Rekursion und Explikation	20
4.2.	Verschiedene Folgen	20
4.2.1.	Geometrische Folgen	20
4.2.2.	Konstante Folgen	20
4.2.3.	Alternierende Folgen	20
4.3.	Monotonieverhalten	21
4.3.1.	Strenge Monotonie	21
4.3.2.	Beispielbeweis	21
4.3.3.	Einfache Monotonie	21
4.4.	Teilfolgen	21
4.4.1.	Folgen mit Systematik	21
4.4.2.	Definition	22
4.4.3.	Teilfolgensatz	22
4.4.4.	Beweis	22
4.5.	Beschränktheit von Folgen	22
4.5.1.	Schranken	22
4.5.2.	Untere und obere Schranken, Maxi- und Minima	22
4.5.3.	Beispiel	23
4.5.4.	Vielschrankensatz	23
4.5.5.	Beweis <sup>1</sup>	23
4.5.6.	<i>Suprema</i> und <i>Infima</i>	23
4.5.7.	Schritte zum Nachweis	23
4.5.8.	Beispielnachweis	24
4.5.9.	Supremumsaxiom	24
5.	Beweise	24
5.1.	Beweistechniken	24
5.1.1.	Hinrichtung und Rückrichtung	24

---

<sup>1</sup>siehe Abschnitt 5.1.3

5.1.2.	Satz vom Nullprodukt als Beispiel .....	25
5.1.3.	Aufbau .....	25
5.1.4.	Beweis durch vollständige Induktion .....	25

# 1. Mengen und Zahlbereiche

## 1.1. Mengen

### 1.1.1. Definition nach Cantor

Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

### 1.1.2. Mengeneigenschaften

Sei  $M$  eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$ ,  $x$  ist ein Element von  $M$ .
- $x \notin M$ ,  $x$  ist kein Element von  $M$ .
- $M = \emptyset$ ,  $M$  ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also  $M = \{\}$ .
- $|M|$  heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von  $M$  und gibt an, wie viele Elemente  $M$  enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften

Z.B.  $M$  ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.

- Auflistung der Elemente

Z.B.  $M = \{0; 5; 10; \dots\}$

- Definition der Eigenschaften

Z.B.  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$

- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

### 1.1.3. Mengenbeziehungen

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen.

- $X$  heißt **Teilmenge** von  $Y$  ( $X \subseteq Y$ ), wenn jedes Element von  $X$  auch in  $Y$  ist.
- $X$  heißt **echte Teilmenge** von  $Y$  ( $X \subset Y$ ), wenn jedes Element von  $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$ .
- Die Mengen  $X$  und  $Y$  heißen **gleich**, wenn  $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ .

### 1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$  **Durchschnitt** von  $X$  und  $Y$ .

#### TL;DR

Durchschnitt ist eine Schnittmenge.

- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$  **Vereinigung** von  $X$  und  $Y$ .
- $X \dot{\cup} Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$  **disjunkte Vereinigung** von  $X$  und  $Y$ .

·  $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$  **Differenz** von  $X$  und  $Y$ .

### 1.1.5. Kartesisches Produkt

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

2

## 1.2. Zahlbereiche

### 1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche

$\mathbb{N}$  Menge der natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{N}^*$  Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$\mathbb{Z}$  Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$  Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+$  Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$  Menge der negativen rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$  Menge der reellen Zahlen,  $\mathbb{R}^+$  und  $-\mathbb{R}^+$  analog, sodass  $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{C}$  Menge der komplexen Zahlen

## 2. Abbildungen

### 2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

#### 2.1.1. Abbildungen und Funktionen

Es seien  $X$  und  $Y$  nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift  $f$ , die jedem Element von  $X$  genau ein Element von  $Y$  zuordnet, heißt **Abbildung** von  $X$  nach  $Y$ .

$$\forall x \in D(f) \subseteq X \text{ gibt es genau ein } y = f(x) \in Y.$$

$$f : X \rightarrow Y \\ x \mapsto y$$

Handelt es sich bei  $X$  und  $Y$  um reine Zahlenmengen (z.B.  $\mathbb{R}$ ), so bezeichnen wir die Abbildung  $f$  auch als **Funktion**.

2.  $D(f)$  ist die **Definitionsmenge**<sup>4</sup> von der Vorschrift  $f$ .
3.  $B(f)$  ist die **Bildungsmenge**<sup>4</sup> von  $f$ , wobei  $B(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$
4.  $f(x) \in Y$  heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von  $x$  unter  $f$ .

Ist  $y \in Y$ , so heißt jedes  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  ein **Urbild** bzw. **Argument** von  $y$  unter  $f$ .

5. Die Menge aller Urbunkte von  $y$  unter  $f$  bezeichnen wir mit  $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$ . Zu  $f^{-1}$  sagen wir auch **das Urbild** von  $y$  unter  $f$ .

<sup>2</sup> $(x; y)$  ist ein geordnetes Paar<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> $(x; y) = (x; w) \Leftrightarrow x = v \quad y = w$

<sup>4</sup>siehe Abschnitt 3.1.2 für Funktionen

**TL;DR**

Das **Urbild** ist die Menge aller **Urbilder**.

$X = D(f)$  heißt **Definitionsbereich** von  $f$  und  $Y = B(f)$  heißt **Wertebereich** von  $f$ .

Die Menge  $im(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X\}$  mit  $f(x) = y$  heißt **Bild** von  $f$ .

6. Die Menge  $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y^5$  heißt der Graph von  $f$ .

7. Zwei Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  heißen gleich ( $f = g$ ), wenn  $f(x) = g(x) \forall x \in X$ .

**2.1.2. Beispiel**

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \sin(x)$ .

Für  $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$  wäre das Bild  $im(f(X_1)) = [0; 1]$ .

Für  $Y_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  wäre  $f^{-1}(Y_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\}$  oder  $f^{-1}(Y_1) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi]$ .

Der Definitionsbereich  $D(f) = \mathbb{Z}$  und der Wertebereich  $B(f) = [-1; 1]$ .

**2.1.3. Satz über Bilder und Urbilder**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $A, A_1, A_2 \subset X$  und  $B, B_1, B_2 \subset Y$ . Dann gilt

- 1)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- 2)  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
- 3)  $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$
- 4)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- 5)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- 6)  $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

**2.1.4. Verschiedene Abbildungen**

(1) Es sei  $X$  eine nichtleere Menge. Die **Identität** auf  $X$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} Id_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(2) Sei  $y_0 \in Y$  fixiert. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

**konstante Abbildung.**

(3) Ist  $X \subset \mathbb{R}$ , so heißt jede Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  **reelle Funktion**.

**2.1.5. Beispiel**

Die Logarithmusfunktion ist eine reelle Funktion.

<sup>5</sup>siehe Abschnitt 1.1.5

$$\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x)$$

## 2.2. Verkettung von Abbildungen

### 2.2.1. Verkettung

Es seien  $X, Y, Z$  nichtleere Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von  $f$  und  $g$ .

Wir sagen auch „ $g$  nach  $f$ “, d.h.  $f$  wird zuerst angewendet, danach  $g$ .

### 2.2.2. Assoziativität

Seien  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  und  $h : Z \rightarrow W$  Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen  $h \circ (g \circ f)$  und  $(h \circ g) \circ f$  wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

## 2.3. Abbildungseigenschaften

### 2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **surjektiv**, wenn  $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ .

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit  $f : X \twoheadrightarrow Y$  ausdrücken.

#### TL;DR

Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem  $y \in Y$  **mindestens** ein  $x \in X$  gibt.

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **injektiv**, wenn  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ .

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit  $f : X \hookrightarrow Y$  ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge ( $\subset$ ) aufweist.

#### TL;DR

Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem  $y \in Y$  **maximal** ein  $x \in X$  gibt.

Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist. Diese Abbildung nennen wir auch eineindeutige Zuordnung.

#### TL;DR

Eine Abbildung ist bijektiv, wenn jedem  $x \in X$  genau ein  $y \in Y$  zugeordnet wird und jedes  $y \in Y$  einem  $x \in X$  zugeordnet wird.



### 2.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Abbildung  $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$  mit  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir wollen nun herausfinden, ob  $f$  injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv, also beides, ist.

1. Damit  $f$  **injektiv** ist, muss die Definition<sup>6</sup> erfüllt sein. Also muss für  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$   $x_1 = x_2$ . Dafür setzen wir sie gleich.

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1+1} &= \frac{x_2}{x_2+1} & | \cdot (x_2+1) \\ \frac{x_1 x_2 + x_1}{x_1+1} &= x_2 & | \cdot (x_1+1) \\ x_1 x_2 + x_1 &= x_1 x_2 + x_2 & | - x_1 x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Somit ist  $f$  injektiv. Da  $x_1 = x_2$  ist die Definition erfüllt.

2. Damit  $f$  **surjektiv** ist, muss auch die Definition<sup>6</sup>  $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$  erfüllt sein.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{x+1} & | \cdot (x+1) \\ yx + y &= x & | - y - x \\ yx - x &= -y \Leftrightarrow x(y-1) = -y & | \cdot \frac{1}{y-1} \\ x &= -\frac{y}{y-1} \end{aligned}$$

$-\frac{y}{y-1}$  ist für  $y = 1$  nicht definiert und somit ist  $f$  nicht surjektiv, da ein  $y \in Y$  existiert für das es kein  $x \in X$  gibt.

3.  $f$  ist kann folglich nicht **bijektiv** sein, da es dafür surjektiv und injektiv sein müsste. Es wäre bijektiv für  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

### 2.3.3. Hinrichtungs- und Rückrichtungsbeweise

#### Injektivität

1) „ $\Rightarrow$ “

Sei  $f$  injektiv.

Wir fixieren ein Element  $x_0 \in X$  und definieren  $g : Y \rightarrow X$  durch

$$g(y) := \begin{cases} x & \text{falls } y \in \text{im}(f) \wedge f(x) = y \\ x_0 & \text{falls } y \notin \text{im}(f) \end{cases}$$

Dann ist  $g$  **wohldefiniert** und es gilt  $g(f(x)) = x$  für alle  $x \in X$ .

$g$  ist also eine Linksinverse<sup>7</sup> von  $f$ .

„ $\Leftarrow$ “

Sei  $g : Y \rightarrow X$  eine Linksinverse von  $f$ .

Seien  $x_1, x_2 \in X$  zwei Punkte mit  $f(x_1) = f(x_2)$ .

<sup>6</sup>siehe Abschnitt 2.3.1

<sup>7</sup>siehe Abschnitt 2.4.3

Dann gilt  $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$  und somit  $x_1 = x_2$ .  
Folglich ist  $f$  injektiv.

### Surjektivität

1) „ $\Rightarrow$ “

Sei  $f$  surjektiv.

Für jedes  $y \in Y$  wählen wir ein Urbild  $x(y) \in X$  aus.

Dann ist die Abbildung  $h : Y \rightarrow X$  mit  $h(y) := x(y)$  wohldefiniert und es gilt  $f(h(y)) = f(x(y)) = y$  für alle  $y \in Y$ .

$h$  ist also eine Rechtsinverse von  $f$ .

2) „ $\Leftarrow$ “

Sei  $h : Y \rightarrow X$  eine Rechtsinverse von  $f$ .

Dann gilt  $f(h(y)) = y$  für alle  $y \in Y$ .

Also ist  $h(y) \in X$  ein Urbild von  $y$  unter  $f$ .

Folglich ist  $f$  surjektiv.

## 2.4. Umkehrabbildung

### 2.4.1. Inverse Abbildung

Ist die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv, so ist die inverse Abbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  zu  $f$  definiert durch

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y)$$

$y \mapsto f^{-1}(y) :=$  das eindeutig bestimmte Urbild von  $y$  unter  $f$ .

Sei  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv. Dann ist  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  ebenfalls bijektiv und es gilt aufgrund der Definition

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$$

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

### 2.4.2. Beispiel

(1)  $\text{Id}_X : X \rightarrow X$  ist bijektiv.

$$\text{Id}_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

$$(\text{Id}_X)^{-1} = \text{Id}_X$$

(2) Die konstante Abbildung  $c_{y_0} : X \rightarrow Y$  ist weder injektiv noch surjektiv, unter der Bedingung, dass  $X$  und  $Y$  mehr als ein Element enthalten.

$(c_{y_0})^{-1}$  ist zudem keine Abbildung mehr.

(3) Die reelle Funktion  $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ln : x \mapsto \ln(x)$  ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung wäre

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\exp : x \mapsto e^x$$

### 2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt

- (1)  $f$  ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $g \circ f = Id_X$ .  
 $g$  heißt **Linksinverse** von  $f$ .
- (2)  $f$  ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung  $h : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $f \circ h = Id_Y$ .  
 $h$  heißt **Rechtsinverse** von  $f$ .
- (3)  $f$  ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, die sowohl Links- als auch Rechtsinverse von  $f$  ist. D.h. es gilt  $g \circ f = Id_X \wedge f \circ g = Id_Y$ , wobei  $g$  eindeutig bestimmt ist, und  $g = f^{-1}$ .

Nur für **bijektive** Abbildungen gibt es Umkehrabbildungen. Bei nur surjektiv oder injektiven Abbildungen existiert ein Urbild  $f^{-1}$ , eine Menge mit keinem, einem oder anderen Elementen.

### 2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  zwei bijektive Abbildungen.

Dann ist auch ihre Verkettung  $g \circ f$  bijektiv und für ihre inversen Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

### 2.4.5. Beweis

Für die inversen Abbildungen  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  und  $g^{-1} : Z \rightarrow Y$  gilt<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= Id_X & g^{-1} \circ g &= Id_Y \\ f \circ f^{-1} &= Id_Y & g \circ g^{-1} &= Id_Z \end{aligned}$$

Wegen der Assoziativität<sup>9</sup> von Verknüpfungen gilt

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) & \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ (Id_Y) \circ f \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_X \\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= Id_X \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt analog dazu

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) & \\ &\Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &\Leftrightarrow g \circ (Id_X) \circ g^{-1} \\ &\Leftrightarrow g \circ g^{-1} = Id_Z \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= Id_Z \end{aligned}$$

Somit gilt, falls  $f$  und  $g$  bijektiv sind,  $\exists f^{-1} \wedge g^{-1}$ , die eindeutig bestimmt, d.h. ebenfalls bijektiv sind.

<sup>8</sup>siehe Abschnitt 2.4.1

<sup>9</sup>siehe Abschnitt 2.2.2

$$\begin{aligned} & \exists f^{-1} \wedge g^{-1} \\ \Rightarrow & \exists f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

## 3. Funktionen

### 3.1. Grundlagen zum Funktionsbegriff

#### 3.1.1. Zahlenmengenkriterium

Sei  $f$  eine Zuordnung von der Menge  $X$  in die Menge  $Y$ , d.h.  $f : X \rightarrow Y$ , wobei  $X, Y$  Zahlenmengen sind.  $f$  heißt **Funktion** genau dann, wenn jedem  $x \in X$  genau ein  $y \in Y$  zugeordnet wird.

#### 3.1.2. Begriffe

- (1) Die Menge  $X$  ist der **Definitionsbereich**  $D_f$  von  $f$ . Die Elemente von  $X$  heißen **Argumente**.
- (2) Die zugeordneten Elemente aus der Menge  $Y$  heißen **Funktionswerte**. Sie bilden den **Wertebereich**  $W_f$  der Funktion. Es gilt  $W_f \subseteq Y$ .
- (3) Für die Funktionswerte  $y$  wird auch die Symbolik  $f(x)$  verwendet, d.h.  $f(x)$  ist der Funktionswert zum Argument  $x$ , z.B.  $f(2) = 3$  bedeutet, dass 3 der Funktionswert des Arguments 2 ist.
- (4) Die Angabe einer Funktion mittels Funktionsterm wird entweder mit  $f : f(x) = 2x + 1$  oder mit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$  festgelegt.

Der Term wird bei ersterer Angabe *Funktion  $f$ : Funktionswert ist gleich Funktionsterm* gesprochen.

#### 3.1.3. Grundlegende Funktionstypen

- (1) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung mit  $f(x) = mx + n$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ .  
Dann heißt die Abbildung **lineare Funktion**<sup>10</sup>. Ihr Graph<sup>11</sup> eine Gerade.
- (2) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung mit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .  
Dann heißt die Abbildung **quadratische Funktion**<sup>12</sup>. Ihr Graph ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel.
- (3) Sei  $q$  eine rationale Zahl.  
Dann heißt die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^q$  **Potenzfunktion**. Insbesondere heißt die Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$  mit  $m \in \mathbb{N}$  **Wurzelfunktion**.
- (4) Seien  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  und  $p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ein **Polynom**.  
Dann heißt die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = p(x)$  **ganzrationale Funktion**. Der höchste Exponent mit  $a_k \neq 0$  heißt **Grad** von  $p$  und  $a_0$  bis  $a_n$  heißen **Koeffizienten**.
- (5) Sind  $p$  und  $q$  ganzrationale Funktionen, so nennt man die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  eine **gebrochen rationale Funktion**.

<sup>10</sup>siehe Abschnitt 3.5

<sup>11</sup>siehe Abschnitt 2.1.1

<sup>12</sup>siehe Abschnitt 3.6

Die Funktion  $f$  ist an den Nullstellen<sup>13</sup> ihres Nenners  $q$  nicht definiert. Diese Nullstellen heißen **Definitionslücken** von  $f$  und gehören nicht zum Definitionsbereich.

- (6) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Form  $f(x) = a \cdot b^x$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 1$  heißt **Exponentialfunktion**, da das Argument im Exponenten steht.  $b$  heißt Basis.
- (7) Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  der Form  $f(x) = a \cdot \log_{b(x)}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $b \neq 1$  heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis  $b$ .
- (8) Die Funktionen  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $s(x) = \sin(x)$  und  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $c(x) = \cos(x)$  heißen **Sinusfunktion** und **Kosinusfunktion**. Des Weiteren heißt die Funktion  $t$  mit  $\tan(x) = \frac{s(x)}{c(x)}$  **Tangensfunktion**.  $s$ ,  $c$  und  $t$  sind die elementaren **trigonometrischen Funktionen**.

### 3.1.4. Nullstellen

Für eine Funktion  $f$  ist  $x_N \in D(f)$  eine Nullstelle von  $f$ , wenn  $f(x_N) = 0$ .

## 3.2. Symmetrie

### 3.2.1. Gerade Funktionen

Bei geraden Funktionen haben **Gegenzahlen** den gleichen Funktionswert.

$$f(x) = f(-x)$$

Gerade Funktionen sind **achsensymmetrisch**.

### 3.2.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Funktion  $f(x) = x^4 - 3$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (-x)^4 - 3 &= x^4 - 3 \\ ((-x)(-x))^2 - 3 &= x^4 - 3 \\ (x^2)^2 - 3 &= x^4 - 3 \\ x^4 - 3 &= x^4 - 3 \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Die Funktion  $f$  ist achsensymmetrisch und gerade.

### 3.2.3. Ungerade Funktionen

Bei ungeraden Funktionen haben Gegenzahlen Gegenzahlen als Funktionswerte.

$$f(x) = -f(-x)$$

Ungerade Funktionen sind **punktsymmetrisch**.

### 3.2.4. Exponentenkriterium für Symmetrie ganzrationaler Funktionen

Wir betrachten die Funktionsgleichung **ganzrationaler Funktionen** in Polynomform.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- (1) Hat  $x$  in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten, so ist die Funktion **gerade** und **achsensymmetrisch**, denn es gilt

<sup>13</sup>siehe Abschnitt 3.1.4

$$\forall x \in D(f) : f(x) = f(-x)$$

(2) Hat  $x$  in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten, so ist die Funktion ungerade und punktsymmetrisch, denn es gilt

$$\forall x \in D(f) : f(x) = -f(-x)$$

### 3.2.5. Beweis für Achsensymmetrie

$$(-x)^{2n} = ((-x)^2)^n = x^{2n}$$

$$f(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + \dots + a_0x^0$$

$$f(-x) = a_{2n}(-x)^{2n} + a_{2(n-1)}(-x)^{2(n-1)} + \dots + a_0(-x)^0$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= a_{2n}x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + \dots + a_0x^0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

## 3.3. Verhalten

### 3.3.1. Monotonie

Eine Funktion  $f$  ist streng monoton fallend, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

### 3.3.2. Globalverhalten

Sei  $f$  eine Funktion. Das **Globalverhalten** von  $f$  beschreibt das Verhalten der Funktionswerte, wenn die Argumente unendlich groß oder unendlich klein werden.

### 3.3.3. Grenzwerte

Betrachten wir  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

$\Gamma_f$ , der Graph<sup>14</sup> von  $f$ , verläuft für  $x \rightarrow \infty$  gegen  $y = 1$  und für  $x \rightarrow -\infty$  gegen  $y = \infty$ . Um das kurz und knapp auszudrücken, wird die *Limes*-Schreibweise verwendet.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

Der *Limes* von  $f(x)$  für  $x$  gegen unendlich ist 1. D.h., dass sich die Funktionswerte für sehr große  $x$ -Werte beliebig nah an  $y = 1$  annähern, diesen aber nicht unbedingt erreichen.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

### 3.3.4. Globalverhalten bei ganzrationalen Funktionen

Der Graph<sup>14</sup> einer ganzrationalen Funktion  $f$  mit  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  verhält sich für  $x \rightarrow \pm\infty$  wie der Graph von  $g$  mit  $g(x) = a_n x^n$ .

<sup>14</sup>siehe Abschnitt 2.1.1

### 3.3.5. Beweis

Sei  $f$  mit  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  eine ganzrationale Funktion. Dann gilt mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^n (a_n)) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

## 3.4. Verschiebung

### 3.4.1. Verschiebung einer Funktion in $y$ -Richtung

Um eine beliebige Funktion  $f(x)$  um  $c$  Einheiten in  $y$ -Richtung zu verschieben, sei die verschobene Funktion  $f^*(x) = f(x) + c$ .

### 3.4.2. Verschiebung einer Funktion in $x$ -Richtung

Um eine beliebige Funktion  $f(x)$  um  $d$  Einheiten in  $x$ -Richtung zu verschieben, sei die verschobene Funktion  $f^*(x) = f(x - d)$ .

## 3.5. Lineare Funktionen

### 3.5.1. Funktionsgleichung

Ist  $f$  eine ganzrationale Funktion 1. Grades, so wird sie auch **lineare Funktion** genannt. Ihr Graph ist eine **Gerade**.

Ihre Funktionsgleichung lautet  $f(x) = mx + n$  mit  $m, n \in \mathbb{R}$ , wobei  $m$  die **Steigung** der Geraden und  $Y(0|n)$  der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse ist.

### 3.5.2. Steigung linearer Funktionen

Seien  $f$  und  $g$  zwei lineare Funktionen mit den Steigungen  $m_f$  und  $m_g$ . Dann gilt

- 1) Die Graphen<sup>14</sup> von  $f$  und  $g$  sind genau dann **parallel** zueinander, wenn  $m_f = m_g$ .
- 2) Die Graphen von  $f$  und  $g$  sind genau dann **orthogonal** zueinander, wenn  $m_f \cdot m_g = -1$  gilt.

Falls man die Steigung einer Geraden  $g$  berechnen wollte, die **orthogonal** zur Geraden  $f$  ist, kann man diese Formel umstellen.

$$\begin{aligned}m_f \cdot m_g &= -1 \quad | \div m_f \\ m_g &= -\frac{1}{m_f} = -(m_f)^{-1}\end{aligned}$$

### 3.5.3. Beweis

Seien  $f$  und  $g$  zwei lineare Funktionen mit den Steigungen  $m_f$  und  $m_g$ .

- 1) Wir nehmen an, dass  $f$  und  $g$  genau einen Schnittpunkt besitzen. Dann  $\exists! x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 m_f x + n_f &= m_g x + n_g && \text{mit } m_f = m_g = m \\
 mx + n_f &= mx + n_g && | - mx \\
 n_f &= n_g
 \end{aligned}$$

Für  $n_f \neq n_g$  gilt  $\nexists x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$ . Zwei Geraden, die keinen gemeinsamen Punkt haben, sind **parallel**.

Für  $n_f = n_g$  gilt  $\forall x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$ . Zwei Geraden, die unendlich viele gemeinsame Punkte haben, sind **identisch**.

Quod erat Demonstrandum

- 2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit<sup>15</sup> legen wir fest, dass sich  $f$  und  $g$  im Ursprung unter einem rechten Winkel treffen.
- Es gilt  $m_f = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , wobei  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Katheten eines Steigungsdreiecks von  $f$  sind.
  - Dreht man die Gerade  $f$  samt Steigungsdreieck um  $90^\circ$  um den Ursprung, so erhält man die Gerade  $g$ , mit kongruentem Steigungsdreieck und  $m_g = \frac{\Delta x}{-\Delta y}$ .
  - Es folgt  $m_f \cdot m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{-\Delta y} = -1$

### 3.6. Quadratische Funktionen

#### 3.6.1. Definition

Eine quadratische Funktion ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades mit der **allgemeinen Form**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der Graph<sup>14</sup> ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel. Maßgeblich für die Lage der Parabel ist ihr **Scheitelpunkt**. Dessen Koordinaten  $S(x_S \mid y_S)$  lassen sich direkt aus der **Scheitelpunktform** der Funktionsgleichung ablesen

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

#### 3.6.2. Nullstellen quadratischer Funktionen

- (1) Die Nullstellen<sup>16</sup> einer quadratischen Funktion in Normalform  $f(x) = x^2 + px + q$  können mit der  $pq$ -Formel bestimmt werden.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- (2) Sind  $x_1$  und  $x_2$  Nullstellen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , so lässt sich der Funktionsterm in **faktorisierter Form** schreiben.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Die Nullstellen lassen sich direkt aus den **Linearfaktoren**  $(x - x_1)$  und  $(x - x_2)$  ablesen.

#### 3.6.3. Satz von Vieta

Sind  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen der Gleichung  $0 = x^2 + px + q$ , dann gilt

<sup>15</sup>Nur gewisse Fälle werden aufgezeigt, da die restlichen Fälle *trivial* sind.

<sup>16</sup>siehe Abschnitt 3.1.4



$$x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

#### 3.6.4. Beweis

Seien  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ . Dann gilt

- für die Summe der Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &= -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

- für das Produkt der Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \quad \text{dritte binomische Formel} \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Alternativ lassen sich diese Zusammenhänge auch mit dem Ausmultiplizieren der faktorisierten Form aufzeigen.

Somit gilt auch, dass **ganzzahlige Nullstellen Teiler** von  $q$  sein<sup>17</sup> müssen und die **Summe der Nullstellen die Gegenzahl** von  $p$  sein muss.

### 3.7. Allgemeine ganzrationale Funktionen

#### 3.7.1. Fundamentalsatz der Algebra für reelle Zahlen

Sei  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  ein Polynom  $n$ -ten Grades. Dann hat  $f$  höchstens  $n$  Nullstellen  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

#### 3.7.2. Beweis

##### Induktionsanfang<sup>18</sup>

Ist  $n = 1$ , dann ist  $f_1(x) = a_1 x + a_0$ .  $f_1$  hat genau eine Nullstelle.

$$x_N = -\frac{a_0}{a_1}$$

<sup>17</sup>siehe Abschnitt 3.7.9

<sup>18</sup>siehe Abschnitt 5.1.4

**Induktionsvoraussetzung**

Es gelte, dass  $f$  ein Polynom  $n$ -ten Grades ist. Dieses hat höchstens  $n$  Nullstellen.

**Induktionsbehauptung**

Ein Polynom vom Grad  $n + 1$  hat höchstens  $n + 1$  Nullstellen.

Nun folgt die Argumentation.

1.  $f$  hat keine reelle Nullstelle. Folglich hat  $f$  höchstens  $n + 1$  Nullstellen.
2.  $f$  hat mindestens eine reelle Nullstelle  $x_N$ . Diese kann nach dem Abspaltungssatz<sup>19</sup> abgespalten werden.

$$f(x) = (x - x_N) \cdot g(x)$$

$g$  ist ein Polynom  $n$ -ten Grades und hat somit höchstens  $n$  Nullstellen<sup>20</sup>. Zusammen mit der abgespaltenen Nullstelle ergibt dies  $n + 1$  Nullstellen.

Quod erat Demonstrandum

**3.7.3. Satz zur Abspaltung von Linearfaktoren**

Sei  $f$  eine ganzrationale Funktion  $n$ -ten Grades.

Wenn  $x_N \in \mathbb{R}$  eine Nullstelle von  $f$  ist, dann gilt  $f(x) = (x - x_N) \cdot g(x)$ , wobei  $g$  eine ganzrationale Funktion  $(n - 1)$ -Grades ist.

Wenn  $f$  in Polynomform<sup>21</sup> vorliegt, dann ist das Polynom ohne Rest durch den  $(x - x_N)$  Linearfaktor teilbar. Das Ergebnis ist  $g$ .

**3.7.4. Beweis**

siehe Skript

**3.7.5. Zerlegung in Linearfaktoren**

Sei  $f$  ein Polynom  $n$ -ten Grades.  $f$  kann genau dann in die Form  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_m) \cdot f_{n-m}(x)$  zerlegt werden, wenn  $f$  genau  $m$  Nullstellen hat (die nicht alle verschieden sein müssen)<sup>22</sup>.

Dabei ist  $f_{n-m}$  ein Restpolynom vom Grad  $n - m$ , das keine weiteren Nullstellen hat.

**3.7.6. Vielfachheit von Nullstellen**

Die Vielfachheit von Nullstellen gibt an, wie oft eine Nullstelle in einem Polynom auftritt.

Die Vielfachheit wirkt sich auf den Graphen aus.

**3.7.7. Beispiel**

Im Polynom  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^3(x + 4)$  hat die Nullstelle 3 eine Vielfachheit von 3, weil sie dreimal vorkommt.

<sup>19</sup>siehe Abschnitt 3.7.3

<sup>20</sup>siehe Induktionsvoraussetzung

<sup>21</sup> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

<sup>22</sup>siehe Abschnitt 3.7.6

### 3.7.8. Bemerkung

Ist  $f$  so weit wie möglich faktorisiert, dann lässt sich die Vielfachheit einer Nullstelle ablesen am Exponenten des zugehörigen Linearfaktors.

### 3.7.9. Teilerkriterium für Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Sei  $f$  mit  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich ganzzahligen Koeffizienten  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$ .

Sei  $x_N$  mit  $x_N \in \mathbb{Z}$  eine Nullstelle von  $f$ , dann ist  $x_N$  Teiler des absoluten Glieds  $a_0$ .<sup>23</sup>

### 3.7.10. Beweis

Sei  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , wobei  $\forall n \in \mathbb{N} a_n \in \mathbb{Z}$ .

$$f(x_N) = 0$$

$$a_n x_N^n + a_{n-1} x_N^{n-1} + \dots + a_1 x_N + a_0 = 0 \quad | -a_0$$

$$a_n x_N^n + a_{n-1} x_N^{n-1} + \dots + a_1 x_N = -a_0$$

$$x_N (a_n x_N^{n-1} + a_{n-1} x_N^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0$$

$$x_N \in \mathbb{Z} \quad (a_n x_N^{n-1} + a_{n-1} x_N^{n-2} + \dots + a_1) \in \mathbb{Z} \quad \text{folglich } -a_0 \in \mathbb{Z}$$

Quod erat Demonstrandum

Durch bloße Multiplikation und Addition auf der einen Seite ist klar, dass  $-a_0$  und somit  $a_0$  nur ganzzahlig sein kann.

## 4. Folgen

### 4.1. Der Folgenbegriff

#### 4.1.1. Folgen

Eine Funktion<sup>24</sup>, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

#### 4.1.2. Notation

Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

$(a_n)$  ist die Folgenbezeichnung.

$n$  ist der Folgenindex, die Indexpzahl, mit  $n \in \mathbb{N}$ , wobei zumeist  $n \geq 1$   $n$  das Argument.

$a_n$  ist das  $n$ -te Folgenglied, d.h. der Funktionswert zum Argument<sup>25</sup>  $n$ . In der üblichen Notation von Funktionen sollte  $a_n$  besser als  $a(n)$  geschrieben werden.

$3n - 4$  ist Term für die Berechnung des  $n$ -ten Folgengliedes.

<sup>23</sup>siehe Lemma von Gauß

<sup>24</sup>siehe Abschnitt 3.1.1

<sup>25</sup>siehe Abschnitt 3.1.2

### 4.1.3. Rekursion und Explikation

Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B.  $3n - 4$ , dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \wedge a_n = a_{n-1} + 3$$

#### TL;DR

Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

## 4.2. Verschiedene Folgen

### 4.2.1. Geometrische Folgen

Eine Folge  $(a_n)$  heißt geometrisch, wenn  $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Es gibt genau ein  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Oder anders gesagt

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Für jede geometrische Folge  $(a_n)$  gilt  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , weil  $a_1 = a_1 \cdot q^0$ , weil  $q^0$  für  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  immer 1 ist.

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$

$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$

$$a_3 = a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2$$

...

### 4.2.2. Konstante Folgen

$q^{26}$  darf nicht 1 oder 0 sein und  $a_1$  nicht 0, denn folglich wäre  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n$ .

Solche Folgen nennen wir **konstante Folgen**.

### 4.2.3. Alternierende Folgen

Folgen, deren aufeinanderfolgende Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen, nennen wir **alternierend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

<sup>26</sup>siehe Abschnitt 4.2.1

### 4.3. Monotonieverhalten

#### 4.3.1. Strenge Monotonie

Eine Folge  $(a_n)$ , deren nächstes Folgenglied immer größer ist als das vorhergehende, nennt man **streng monoton steigend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Nicht streng monoton steigend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Wenn das nächste Folgenglied immer kleiner ist als das vorhergehende, dann nennt man sie analog dazu **streng monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Nicht streng monoton fallend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

#### 4.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Folge  $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$ . Dazu gehen wir zuerst von einer streng monotonen Steigung aus und stellen dann um.

$$\begin{array}{ll} c_n < c_{n+1} & \\ \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} & | \cdot n \\ n-1 < \frac{n^2}{n+1} & | \cdot (n+1) \\ n^2 - 1 < n^2 & | - n^2 \\ -1 < 0 & \text{wahr für alle } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Quod erat Demonstrandum

#### 4.3.3. Einfache Monotonie

Folgen, die auch aufeinanderfolgende gleiche Folgenglieder aufweisen, sonst allerdings monoton steigen oder fallen, nennt man **monoton steigend** bzw. **monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

$$\text{bzw. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

### 4.4. Teilfolgen

#### 4.4.1. Folgen mit Systematik

In Abschnitt 4.3.2 könnten bezüglich der Folge  $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$  systematisch Folgenglieder „herausgegriffen“ werden, z.B.  $c_1, c_{10}, c_{100}, \dots, c_{10^{k-1}}$ .

Diese Folgenglieder kann man als Neue Folge auffassen, die ein Teil der Folge  $(c_n)$  ist.

#### 4.4.2. Definition

Die Folge  $(t_n)$  ist Teilfolge der Folge  $(a_n)$ .

Ist  $n_i$  mit  $(i = 1; 2; \dots; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$  eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt  $(a_{n_i}) = (t_n)$  Teilfolge von  $(a_n)$ .

#### 4.4.3. Teilfolgensatz

Jede Folge  $(a_n)$  besitzt eine monotone Teilfolge.

#### 4.4.4. Beweis

Sei eine Gipfelstelle die Indexzahl  $n$ , sodass  $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq n : a_n \geq a_m$ .

##### TL;DR

Alle nachfolgenden Folgenglieder  $a_m$  sind kleiner als  $a_n$  bzw. nach  $a_n$  kommt kein Folgenglied, das größer ist als  $a_n$ .

Nun lässt sich eine Fallunterscheidung durchführen.

- I. Es gibt unendlich viele Gipfelstellen.

Nummeriert man die Gipfelstellen in der Reihenfolge ihres Auftretens, folgt

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$$

D.h. die Gipfelstellen bilden eine monoton fallende<sup>27</sup> Teilfolge.

- II. Es gibt endlich viele Gipfelstellen.

Sei  $n_L$  die letzte Gipfelstelle. Wir betrachten  $a_{n_L}$ . Dann gilt  $a_{n_L} > a_{n_L+1}$

Da  $a_{n_L}$  die letzte Gipfelstelle war, sind alle nachfolgenden Folgenglieder keine Gipfelstellen, d.h. für jedes dieser Folgenglieder  $a_n^*$  gibt es mindestens ein Folgenglied  $a_n^{**}$  mit  $a_n^* < a_n^{**} < a_{n_L}$ .

D.h. wir erhalten eine monoton steigende Folge.

$$a_{n_L+1} < a_{n_L+1}^* < a_{n_L+1}^{**} < \dots$$

Quod erat Demonstrandum

## 4.5. Beschränktheit von Folgen

#### 4.5.1. Schranken

In Abschnitt 4.3.2 wurde die Folge  $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$  betrachtet.

Man kann „beobachten“, dass  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq c_n < 1$ , d.h. die Folgenglieder unter- und überschreiten einen bestimmten Wert nicht.

#### 4.5.2. Untere und obere Schranken, Maxi- und Minima

1. Eine reelle Zahl  $u$  heißt **untere Schranke** der Folge  $(a_n)$ , wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $u \leq a_n$ .
2. Eine reelle Zahl  $o$  heißt **obere Schranke** von  $(a_n)$ , wenn  $\forall n \in \mathbb{N} : o \geq a_n$ .
3. Eine reelle Zahl  $\min a_n$  heißt **Minimum** von  $(a_n)$ , wenn es ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\min a_n = a_k \leq a_n$ .
4. Eine reelle Zahl  $\max a_n$  heißt **Maximum** von  $(a_n)$ , wenn  $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \max a_n = a_k \geq a_n$ .

<sup>27</sup>siehe Abschnitt 4.3.3

#### 4.5.3. Beispiel

Betrachten wir die Folge  $(a_n) : a_n = -\frac{4n}{n+2}$ . Zunächst benötigt man eine Vermutung. Dazu werden einige Folgenglieder berechnet.

$$a_1 = -\frac{4 \cdot 1}{1 + 2} = -\frac{4}{3}$$

$$a_{10} = -\frac{4 \cdot 10}{10 + 2} = -\frac{40}{12}$$

$$a_{100} = -\frac{4 \cdot 100}{100 + 2} = -\frac{400}{102}$$

Man kann beobachten, dass sich die Folge mit wachsendem Argument an  $-4$  annähert. Darum vermuten wir zunächst, dass **eine** untere Schranke  $-4$  ist,  $\forall n \in \mathbb{N} : -4 \leq a_n$ .

$$-4 \leq a_n$$

$$-4 \leq -\frac{4n}{n+2} \quad | \cdot (n+2)$$

$$-4(n+2) \leq -4n$$

$$-4n - 8 \leq -4n \quad | + 4n$$

$$-8 \leq 0 \quad \text{wahr für alle } n \in \mathbb{N}$$

Quod erat Demonstrandum

#### 4.5.4. Vielschränkensatz

Falls eine Folge  $(a_n)$  eine untere Schranke besitzt, so besitzt sie unendlich viele.

#### 4.5.5. Beweis<sup>28</sup>

Sei  $u \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wähle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x < u$ .

D.h.  $x < u \leq a_n$ , folgt  $x \leq a_n$  und somit existieren unendlich viele untere Schranken.

#### 4.5.6. Suprema und Infima

Die größte untere Schranke<sup>29</sup> nennt man **untere Grenze** oder *Infimum*  $\inf a_n$  der Folge  $(a_n)$ . Die kleinste obere Schranke nennt man **obere Grenze** oder *Supremum*  $\sup a_n$  der Folge  $(a_n)$ .

#### TL;DR

Eine reelle Zahl  $i$  ist genau dann ein *Infimum* der Folge  $(a_n)$ , wenn

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : i \leq a_n$ , also  $i$  eine untere Schranke ist.
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : i + \varepsilon > a_n$ , es also die größte untere Schranke ist.

#### 4.5.7. Schritte zum Nachweis

Die beliebige Folge  $(a_n)$  besitzt die untere Grenze  $\inf a_n$ . Es sei  $k \in \mathbb{R}$  mit  $\inf a_n < k$ .

<sup>28</sup>siehe Abschnitt 5.1.3

<sup>29</sup>siehe Abschnitt 4.5.2

#### 4.5.8. Beispielnachweis

Betrachten wir die Folge  $(b_n) : b_n = \frac{6n-1}{4n}$  mit  $n \geq 1$ .

Zuerst äußern wir die Vermutung, dass das *Supremum* bei  $\sup b_n = \frac{3}{2}$  liegt. Zuerst muss bewiesen werden, dass  $\sup b_n$  eine obere Schranke ist. Danach, dass es ein *Supremum* ist.

1.  $\sup b_n$  ist eine obere Schranke.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{2} & \geq & \frac{6n-1}{4n} \quad | \cdot 4n \\ \frac{12}{2}n & \geq & 6n-1 \\ 6n & \geq & 6n-1 \quad | -6n \\ 0 & \geq & -1 \quad \text{wahr für alle } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Quod erat Demonstrandum

2.  $\sup b_n$  ist ein *Supremum*.

Sei  $\varepsilon > 0$ .

$$\begin{array}{rcl} b_n & > & \sup b_n - \varepsilon \\ \text{D.h. } \frac{6n-1}{4n} & > & \frac{3}{2} - \varepsilon \quad | \cdot 4n \\ 6n-1 & > & 6n-4n\varepsilon \quad | -6n \\ -1 & > & -4n\varepsilon \quad | \div \varepsilon \\ -\frac{1}{\varepsilon} & > & -4n \quad | \cdot (-1) \\ \frac{1}{\varepsilon} & < & 4n \quad | \div 4 \\ \frac{1}{4\varepsilon} & < & n \end{array}$$

Quod erat Demonstrandum

Aufgrund der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen immer eine natürliche Zahl für die gilt  $\frac{1}{4\varepsilon} < n$ . Somit ist diese Aussage wahr.

Dementsprechend ist  $\frac{3}{2}$  das *Supremum* der Folge  $(b_n)$ .

#### 4.5.9. Supremumsaxiom

Im Bereich der **reellen** Zahlen besitzt jede nach oben beschränkte Folge ein Supremum.

## 5. Beweise

### 5.1. Beweistechniken

#### 5.1.1. Hinrichtung und Rückrichtung

Beweise können *Genau dann, wenn ...* Aussagen, die in zwei Richtungen funktionieren, sein.



### 5.1.2. Satz vom Nullprodukt als Beispiel

$a \cdot b = 0$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt genau dann, wenn  $a = 0 \vee b = 0$ .

#### Hinrichtung<sup>30</sup> „ $\Rightarrow$ “

1. Wir nehmen an, dass  $a \cdot b = 0$  Sei nun  $a \neq 0$ . Jetzt können wir durch Null teilen.

$$\begin{array}{lcl} a \cdot b = 0 & | \div a & \\ b = 0 & & \end{array}$$

2. Analog gilt dies auch für  $b \neq 0$ .

Es folgt, dass wenn  $a \cdot b = 0$ , muss mindestens einer der Faktoren  $a$  oder  $b$  Null sein.

#### Rückrichtung „ $\Leftarrow$ “

1. Wir nehmen an, dass  $a = 0$ . Somit gilt

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

2. Analog gilt dies für  $b = 0$ .

Es folgt, dass wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, dann ist auch das Produkt Null.

Quod erat Demonstrandum

### 5.1.3. Aufbau

Wenn  $A$ , dann  $B$ .

$A$  ist die **Vorraussetzung**, unter der  $B$  gilt.  $B$  ist somit die **Behauptung**.

Nun folge die **Argumentation**.

### 5.1.4. Beweis durch vollständige Induktion

Bei einer vollständigen Induktion wird zunächst ein **Induktionsanfang** definiert. Hier wird die Wahrheit der Aussage anhand eines Beispiels demonstriert.

Danach folgt die **Induktionsvoraussetzung**, in der die Aussage als wahr vorausgesetzt wird.

Diese wird dann in der **Induktionsbehauptung** benutzt, um die Aussage zu beweisen.

<sup>30</sup>siehe revolutionäres Frankreich