Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche

1.1. Mengen

1.1.1. Definition nach Cantor

Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

1.1.2. Mengeneigenschaften

Sei M eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$, x ist ein Element von M.
- $x \notin M$, x ist kein Element von M.
- $M = \emptyset$, M ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also $M = \{\}$.
- $|M|$ heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von M und gibt an, wie viele Elemente M enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften, z.B M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.
- Auflistung der Elemente, z.B. $M = \{0; 5; 10; ...\}$.
- Definition der Eigenschaften, z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$.
- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

1.1.3. Mengenbeziehungen

Seien X und Y Mengen.

- X heißt **Teilmenge** von Y ($X \subseteq Y$), wenn jedes Element von X auch in Y ist.
- X heißt **echte Teilmenge** von Y ($X \subset Y$), wenn jedes Element vin $X \subseteq Y \land X \neq Y$.
- Die Mengen X und Y heißen **gleich**, wenn $X \subseteq Y \land Y \subseteq X$.

1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz

Seien X und Y Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \land x \in Y\}$ **Durchschnitt** von X und Y.
- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \lor x \in Y\}$ **Vereinigung** von X und Y.
- $X \mathbin{\dot\cup} Y := \{x \mid x \in X \mathbin{\dot\lor} x \in Y\}$ **disjunkte Vereinigung** von X und Y.
- $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \land x \notin Y\}$ **Differenz** von X und Y.

1.1.5. Kartesisches Produkt

Seien X und Y Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \land y \in Y\}$$

[1][2]

---

[1] $(x; y)$ ist ein geordnetes Paar.

[2] $(x; y) = (x; w) \Leftrightarrow x = v\ y = w$

1.2. Zahlbereiche

1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{N}^*$ Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+$ Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$ Menge der negativen rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}^+$ und $-\mathbb{R}^+$ analog, sodass $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

2. Abbildungen

2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

2.1.1. Abbildung, Funktion

Es seien X und Y nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift f, die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt **Abbildung** von X nach Y.

   $\forall x \in D(f) \subseteq X$ gibt es genau ein $y = f(x) \in Y$.

   $$f : X \to Y$$
   $$x \mapsto y$$

   Handelt es sich bei X und Y um reine Zahlenmengen (z.B. $\mathbb{R}$), so bezeichnen wir die Abbildung f auch als **Funktion**.

   > **TL;DR**
   > Jedem x muss ein y zugeordnet werden. Wenn X und Y reine Zahlenmengen sind, ist die Abbildung eine Funktion.

   1. $D(f)$ ist die **Definitionsmenge**[3] von der Vorschrift f.
   2. $B(f)$ ist die **Bildungsmenge**[4] von f, wobei $B(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$

2. $f(x) \in Y$ heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von x unter f.

   Ist $y \in Y$, so heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ **ein Urbild** bzw. **Argument** von y unter f.

3. Die Menge aller Urpunkte von y unter f bezeichnen wir mit $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Zu f^{-1} sagen wir auch **das Urbild** von y unter f.

   > **TL;DR**
   > **Das Urbild** ist die Menge aller **Urbilder**.

   $X = D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f und $Y = B(f)$ heißt **Wertebereich** von f.

   Die Menge $\mathrm{im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X\}$ mit $f(x) = y$ heißt **Bild** von f.

[3] Definitionsbereich bei Funktionen
[4] Wertebereich bei Funktionen

4. Die Menge $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$[5] heißt der Graph von f.
5. Zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen gleich ($f = g$), wenn $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$.

2.1.2. Beispiel
Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

Für $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$ wäre das Bild $\operatorname{im}(f(X_1)) = [0; 1]$.

Für $Y_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ wäre $f^{-1}(Y_1) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\right\}$ oder $f^{-1}(Y_1) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$.

Der Definitionsbereich $D(f)$ = $\mathbb{Z}$ und der Wertebereich $B(f) = [-1; 1]$.

2.2. Verkettung von Abbildungen

2.2.1. Verkettung
Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von f und g.

Wir sagen auch „g nach f“, d.h. f wird zuerst angewendet, danach g.

2.2.2. Assoziativität
Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f))(h \circ g) \circ f$$

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

2.3. Abbildungseigenschaften

2.3.1. Surjektivität
$f \subseteq A \times B$ heißt surjektiv. wenn $\forall b \in B\ \exists a \in A\ ((a; b) \in f)$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit $f : X \twoheadrightarrow Y$ ausdrücken.

TL;DR
Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **mindestens** ein $x \in X$ gibt.

2.3.2. Injektivität
Eine Abbildung heißt injektiv, wenn $\forall a_1, a_2 \in A \land \forall b \in B\ ((a_1; b); (a_2; b) \in f) \Leftrightarrow a_1 = a_2$.

[5] siehe Abschnitt 1.1.5

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit $f: X \hookrightarrow Y$ ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge ($\subset$) aufweist.

TL;DR
Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **maximal** ein $x \in X$ gibt.

3. Folgen

3.1. Der Folgenbegriff

3.1.1. Folgen

Eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

3.1.2. Notation

Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

(a_n) ist die Folgenbezeichnung.

n ist der Folgenindex, die Indexzahl, mit $n \in \mathbb{N}$, wobei zumeist $n \geq 1$ n das Argument.

a_n ist das n-te Folgenglied, d.h. der Funktionswert zum Argument n. In der üblichen Notation von Funktionen sollte a_n besser als $a(n)$ geschrieben werden.

$3n - 4$ ist Term für die Berechnung des n-ten Folgegliedes.

3.1.3. Rekursion und Explikation

Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B. $3n - 4$, dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \land a_n = a_{n-1} + 3$$

TL;DR
Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

3.2. Monotonieverhalten

Hier kommt später noch eine Definition hin.