Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche

1.1. Mengen

1.1.1. Definition nach Cantor

Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

1.1.2. Mengeneigenschaften

Sei M eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$, x ist ein Element von M.
- $x \notin M$, x ist kein Element von M.
- $M = \emptyset$, M ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also $M = \{\}$.
- $|M|$ heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von M und gibt an, wie viele Elemente M enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften

  Z.B. M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.

- Auflistung der Elemente

  Z.B. $M = \{0; 5; 10; ...\}$

- Definition der Eigenschaften

  Z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$

- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

1.1.3. Mengenbeziehungen

Seien X und Y Mengen.

- X heißt **Teilmenge** von Y ($X \subseteq Y$), wenn jedes Element von X auch in Y ist.
- X heißt **echte Teilmenge** von Y ($X \subset Y$), wenn jedes Element von $X \subseteq Y \land X \neq Y$.
- Die Mengen X und Y heißen **gleich**, wenn $X \subseteq Y \land Y \subseteq X$.

1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz

Seien X und Y Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \land x \in Y\}$ **Durchschnitt** von X und Y.

  TL;DR
  Durchschnitt ist eine Schnittmenge.

- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \lor x \in Y\}$ **Vereinigung** von X und Y.
- $X \mathbin{\dot\cup} Y := \{x \mid x \in X \mathbin{\dot\lor} x \in Y\}$ **disjunkte Vereinigung** von X und Y.

- $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$ **Differenz** von X und Y.

1.1.5. Kartesisches Produkt
Seien X und Y Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

[1]

1.2. Zahlbereiche

1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche
$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{N}^*$ Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+$ Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$ Menge der negativen rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}^+$ und $-\mathbb{R}^+$ analog, sodass $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

2. Abbildungen

2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

2.1.1. Abbildungen und Funktionen
Es seien X und Y nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift f, die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt **Abbildung** von X nach Y.

   $\forall x \in D(f) \subseteq X$ gibt es genau ein $y = f(x) \in Y$.

   $$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

   Handelt es sich bei X und Y um reine Zahlenmengen (z.B. $\mathbb{R}$), so bezeichnen wir die Abbildung f auch als **Funktion**.
2. $D(f)$ ist die **Definitionsmenge**[3] von der Vorschrift f.
3. $B(f)$ ist die **Bildungsmenge**[3] von f, wobei $B(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$
4. $f(x) \in Y$ heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von x unter f.

   Ist $y \in Y$, so heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ **ein Urbild** bzw. **Argument** von y unter f.
5. Die Menge aller Urpunkte von y unter f bezeichnen wir mit $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Zu f^{-1} sagen wir auch **das Urbild** von y unter f.

[1] $(x; y)$ ist ein geordnetes Paar[2].
[2] $(x; y) = (x; w) \Leftrightarrow x = v \qquad y = w$
[3] siehe Abschnitt 3.1.2 für Funktionen

TL;DR
Das Urbild ist die Menge aller **Urbilder**.

$X = D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f und $Y = B(f)$ heißt **Wertebereich** von f.

Die Menge $im(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X\}$ mit $f(x) = y$ heißt **Bild** von f.

6. Die Menge $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$[4] heißt der Graph von f.
7. Zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen gleich ($f = g$), wenn $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$.

2.1.2. Beispiel
Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

Für $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$ wäre das Bild $im(f(X_1)) = [0; 1]$.

Für $Y_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ wäre $f^{-1}(Y_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\}$ oder $f^{-1}(Y_1) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi]$.

Der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{Z}$ und der Wertebereich $B(f) = [-1; 1]$.

2.1.3. Satz über Bilder und Urbilder
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A, A_1, A_2 \subset X$ und $B, B_1, B_2 \subset Y$. Dann gilt

1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
3) $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$
4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
5) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
6) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

2.1.4. Verschiedene Abbildungen
(1) Es sei X eine nichtleere Menge. Die **Identität** auf X ist definiert durch

$$\begin{aligned} Id_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(2) Sei $y_0 \in Y$ fixiert. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\to Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

konstante Abbildung.

(3) Ist $X \subset \mathbb{R}$, so heißt jede Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ **reelle Funktion**.

2.1.5. Beispiel
Die Logarithmusfunktion ist eine reelle Funktion.

[4] siehe Abschnitt 1.1.5

$$\begin{aligned}\ln : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x)\end{aligned}$$

2.2. Verkettung von Abbildungen

2.2.1. Verkettung

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned}g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x))\end{aligned}$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von f und g.

Wir sagen auch „g nach f", d.h. f wird zuerst angewendet, danach g.

2.2.2. Assoziativität

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f))(h \circ g) \circ f$$

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

2.3. Abbildungseigenschaften

2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **surjektiv**. wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit $f : X \twoheadrightarrow Y$ ausdrücken.

TL;DR
Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **mindestens** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit $f : X \hookrightarrow Y$ ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge ($\subset$) aufweist.

TL;DR
Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **maximal** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie sowohl subjektiv als auch injektiv ist. Diese Abbildung nennen wir auch eineindeutige Zuordnung.

TL;DR
Eine Abbildung ist bijektiv, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird und jedes $y \in Y$ einem $x \in X$ zugeordnet wird.

2.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Abbildung $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ mit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$. Wir wollen nun herausfinden, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv, also beides, ist.

1. Damit f **injektiv** ist, muss die Definition[5] erfüllt sein. Also muss für $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1 = x_2$. Dafür setzen wir sie gleich.

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1+1} &= \frac{x_2}{x_2+1} && | \cdot (x_2+1) \\ \frac{x_1x_2 + x_1}{x_1+1} &= x_2 && | \cdot (x_1+1) \\ x_1x_2 + x_1 &= x_1x_2 + x_2 && | - x_1x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

   Somit ist f injektiv. Da $x_1 = x_2$ ist die Definition erfüllt.

2. Damit f **surjektiv** ist, muss auch die Definition[5] $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ erfüllt sein.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{x+1} && | \cdot (x+1) \\ yx + y &= x && | - y - x \\ yx - x = -y \Leftrightarrow x(y-1) &= -y && | \cdot \frac{1}{y-1} \\ x &= -\frac{y}{y-1} \end{aligned}$$

   $-\frac{y}{y-1}$ ist für $y = 1$ nicht definiert und somit ist f nicht surjektiv, da ein $y \in Y$ existiert für das es kein $x \in X$ gibt.

3. f ist kann folglich nicht **bijektiv** sein, da es dafür surjektiv und injektiv sein müsste. Es wäre bijektiv für $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.3.3. Hinrichtungs- und Rückrichtungsbeweise

Injektivität

1) „$\Longrightarrow$“

Sei f injektiv.
Wir fixieren ein Element $x_0 \in X$ und definieren $g : Y \to X$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x & \text{falls } y \in im(f) \wedge f(x) = y \\ x_0 & \text{falls } y \notin im(f) \end{cases}$$

Dann ist g **wohldefiniert** und es gilt $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$.
g ist also eine Linksinverse[6] von f.

„$\Longleftarrow$“

Sei $g : Y \to X$ eine Linksinverse von f.
Seien $x_1, x_2 \in X$ zwei Punkte mit $f(x_1) = f(x_2)$.

[5] siehe Abschnitt 2.3.1
[6] siehe Abschnitt 2.4.3

Dann gilt $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ und somit $x_1 = x_2$.
Folglich ist f injektiv.

Surjektivität

1) „$\Longrightarrow$“

Sei f surjektiv.
Für jedes $y \in Y$ wählen wir ein Urbild $x(y) \in X$ aus.
Dann ist die Abbildung $h : Y \to X$ mit $h(x) := x(y)$ wohldefiniert und es gilt $f(h(y)) = f(x(y)) = y$ für alle $y \in Y$.
h ist also eine Rechtsinverse von f.

2) „$\Longleftarrow$“

Sei $h : Y \to X$ eine Rechtsinverse von f.
Dann gilt $f(h(y)) = y$ für alle $y \in Y$.
Also ist $h(y) \in X$ ein Urbild von y unter f.
Folglich ist f surjektiv.

2.4. Umkehrabbildung

2.4.1. Inverse Abbildung

Ist die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ zu f definiert durch

$$f^{-1} : Y \to X$$
$$y \mapsto f^{-1}(y)$$

$y \mapsto f^{-1}(y) :=$ das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f.

Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls bijektiv und es gilt aufgrund der Definition

$$f^{-1} \circ f = Id_X$$
$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

2.4.2. Beispiel

(1) $Id_X : X \to X$ ist bijektiv.

$$Id_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

$$(Id_X)^{-1} = Id_X$$

(2) Die konstante Abbildung $c_{y_0} : X \to Y$ ist weder injektiv noch surjektiv, unter der Bedingung, dass X und Y mehr als ein Element enthalten.

$\left(c_{y_0}\right)^{-1}$ ist zudem keine Abbildung mehr.

(3) Die reelle Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\ln : x \mapsto \ln(x)$ ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung wäre

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$\exp : x \to e^x$$

2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt

(1) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = Id_X$.
g heißt **Linksinverse** von f.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $h : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ h = Id_Y$.
h heißt **Rechtsinverse** von f.

(3) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, die sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist. D.h. es gilt $g \circ f = Id_X \wedge f \circ g = Id_Y$, wobei g eindeutig bestimmt ist, und $g = f^{-1}$.

Nur für **bijektive** Abbildungen gibt es Umkehrabbildungen. Bei nur surjektiv oder injektiven Abbildungen existiert ein Urbild f^{-1}, eine Menge mit keinem, einem oder anderen Elementen.

2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei bijektive Abbildungen.
Dann ist auch ihre Verkettung $g \circ f$ bijektiv und für ihre inversen Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2.4.5. Beweis

Für die inversen Abbildungen $f^{-1} : Y \to X$ und $g^{-1} : Z \to Y$ gilt[7]

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= Id_X \qquad & g^{-1} \circ g &= Id_Y \\ f \circ f^{-1} &= Id_Y \qquad & g \circ g^{-1} &= Id_Z \end{aligned}$$

Wegen der Assoziativität[8] von Verknüpfungen gilt

$$\begin{aligned} &(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ (Id_Y) \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_X \\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= Id_X \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt analog dazu

$$\begin{aligned} &(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ (Id_Y) \circ g^{-1} \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ g^{-1} = Id_Z \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= Id_Z \end{aligned}$$

Somit gilt, falls f und g bijektiv sind, $\exists f^{-1} \wedge g^{-1}$, die eindeutig bestimmt, d.h. ebenfalls bijektiv sind.

[7] siehe Abschnitt 2.4.1
[8] siehe Abschnitt 2.2.2

$$\exists f^{-1} \wedge g^{-1}$$
$$\Rightarrow \exists f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

Quod erat Demonstrandum

3. Funktionen

3.1. Grundlagen zum Funktionsbegriff

3.1.1. Zahlenmengenkriterium

Sei f eine Zuordnung von der Menge X in die Menge Y, d.h. $f : X \to Y$, wobei X, Y Zahlenmengen sind. f heißt **Funktion** genau dann, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird.

3.1.2. Begriffe

(1) Die Menge X ist der **Definitionsbereich** D_f von f. Die Elemente von X heißen **Argumente**.

(2) Die zugeordneten Elemente aus der Menge Y heißen **Funktionswerte**. Sie bilden den **Wertebereich** W_f der Funktion. Es gilt $W_f \subseteq Y$.

(3) Für die FUnktionswere y wird auch die Symbolik $f(x)$ verwendet, d.h. $f(x)$ ist der Funktionswert zum Argument x, z.B. $f(2) = 3$ bedeutet, dass 3 der Funktionswert des Arguments 2 ist.

(4) Die Angabe einer Funktion mittels Funktionsterm wird entweder mit $f : f(x) = 2x + 1$ oder mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x + 1$ festgelegt.

Der Term wird bei ersterer Angabe *Funktion f: Funktionswert ist gleich Funktionsterm* gesprochen.

3.1.3. Grundlegende Funktionstypen

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f(x) = mx + n\ m, n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt die Abbildung **lineare Funktion**[9]. Ihr Graph[10] eine Gerade.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f(x) = ax^2 + bx + c\ a, b, c \in \mathbb{R}\ a \neq 0$.

Dann heißt die Abbildung **quadratische Funktion**[11]. Ihr Graph ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel.

(3) Sei q eine rationale Zahl.

Dann heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^q$ **Potenzfunktion**. Insbesondere heißt die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$ mit $m \in \mathbb{N}$ **Wurzelfunktion**.

(4) Seien $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ und $p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ein **Polynom**.

Dann heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = p(x)$ **ganzrationale Funktion**. Der höchste Exponent mit $a_k \neq 0$ heißt **Grad** von p und a_0 bis a_n heißen **Koeffizienten**.

(5) Sind p und q ganzrationale Funktionen, so nennt man die Funktion f mit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine **gebrochen rationale Funktion**.

[9] siehe Abschnitt 3.5
[10] siehe Abschnitt 2.1.1
[11] siehe Abschnitt 3.6

Die Funktion f ist an den Nullstellen[12] ihres Nenners q nicht definiert. Diese Nullstellen heißen **Definitionslücken** von f und gehören nicht zum Definitionsbereich.

(6) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**, da das Argument im Exponenten steht. b heißt Basis.

(7) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a \cdot \log_{b(x)}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq 1$ heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis b.

(8) Die Funktionen $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $s(x) = \sin(x)$ und $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $c(x) = \cos(x)$ heißen **Sinusfunktion** und **Kosinusfunktion**. Des Weiteren heißt die Funktion t mit $\tan(x) = \frac{s(x)}{c(x)}$ **Tangensfunktion**. s, c und t sind die elementaren **trigonometrischen Funktionen**.

3.1.4. Nullstellen

Für eine Funktion f ist $x_N \in D(f)$ eine Nullstelle von f, wenn $f(x_N) = 0$.

3.2. Symmetrie

3.2.1. Gerade Funktionen

Bei geraden Funktionen haben **Gegenzahlen** den gleichen Funktionswert.

$$f(x) = f(-x)$$

Gerade Funktionen sind **achsensymmetrisch**.

3.2.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^4 - 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (-x)^4 - 3 &= x^4 - 3 \\ ((-x)(-x))^2 - 3 &= x^4 - 3 \\ \left(x^2\right)^2 - 3 &= x^4 - 3 \\ x^4 - 3 = x^4 - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

Die Funktion f ist achsensymmetrisch und gerade.

3.2.3. Ungerade Funktionen

Bei ungeraden Funktionen haben Gegenzahlen Gegenzahlen als Funktionswerte.

$$f(x) = -f(-x)$$

Ungerade Funktionen sind **punktsymmetrisch**.

3.2.4. Exponentenkriterium für Symmetrie ganzrationaler Funktionen

Wir betrachten die Funktionsgleichung **ganzrationaler Funktionen** in Polynomform.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

(1) Hat x in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten, so ist die Funktion **gerade** und **achsensymmetrisch**, denn es gilt

[12]siehe Abschnitt 3.1.4

$$\forall x \in D(f) : f(x) = f(-x)$$

(2) Hat x in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten, so ist die Funktion ungerade und punktsymmetrisch, denn es gilt

$$\forall x \in D(f) : f(x) = -f(-x)$$

3.2.5. Beweis für Achsensymmetrie

$$(-x)^{2n} = ((-x)^2)^n = x^{2n}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{2n}x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + ... + a_0x^0 \\ f(-x) &= a_{2n}(-x)^{2n} + a_{2(n-1)}(-x)^{2(n-1)} + ... + a_0(-x)^0 \\ f(-x) &= a_{2n}x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + ... + a_0x^0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3.3. Verhalten

3.3.1. Monotonie

Eine Funktion f ist streng monoton fallend, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3.3.2. Globalverhalten

Sei f eine Funktion. Das **Globalverhalten** von f beschreibt das Verhalten der Funktionswerte, wenn die Argumente unendlich groß oder unendlich klein werden.

3.3.3. Grenzwerte

Betrachten wir $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Γ_f, der Graph[13] von f, verläuft für $x \longrightarrow \infty$ gegen $y = 1$ und für $x \to -\infty$ gegen $y = \infty$. Um das kurz und knapp auszudrücken, wird die *Limes*-Schreibweise verwendet.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

Der *Limes* von $f(x)$ für x gegen unendlich ist 1. D.h., dass sich die Funktionswerte für sehr große x-Werte beliebig nah an $y = 1$ annähern, diesen aber nicht unbedingt erreichen.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

3.3.4. Globalverhalten bei ganzrationalen Funktionen

Der Graph[13] einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie der Graph von g mit $g(x) = a_nx^n$.

[13] siehe Abschnitt 2.1.1

3.3.5. Beweis

Sei f mit $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ eine ganzrationale Funktion. Dann gilt mit $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} (x^n(a_n)) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n\\ &= \lim_{x\to\infty} g(x)\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3.4. Verschiebung

3.4.1. Verschiebung einer Funktion in y-Richtung

Um eine beliebige Funktion $f(x)$ um c Einheiten in y-Richtung zu verschieben, sei die verschobene Funktion $f^*(x) = f(x) + c$.

3.4.2. Verschiebung einer Funktion in x-Richtung

Um eine beliebige Funktion $f(x)$ um d Einheiten in x-Richtung zu verschieben, sei die verschobene Funktion $f^*(x) = f(x - d)$.

3.5. Lineare Funktionen

3.5.1. Funktionsgleichung

Ist f eine ganzrationale Funktion 1. Grades, so wird sie auch **lineare Funktion** genannt. Ihr Graph ist eine **Gerade**.

Ihre Funktionsgleichung lautet $f(x) = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$, wobei m die **Steigung** der Geraden und $Y(0|n)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse ist.

3.5.2. Steigung linearer Funktionen

Seien f und g zwei lineare Funktionen mit den Steigungen m_f und m_g. Dann gilt

1) Die Graphen[13] von f und g sind genau dann **parallel** zueinander, wenn $m_f = m_g$.
2) Die Graphen von f und g sind genau dann **orthogonal** zueinander, wenn $m_f \cdot m_g = -1$ gilt.

Falls man die Steigung einer Geraden g berechnen wollte, die **orthogonal** zur Geraden f ist, kann man diese Formel umstellen.

$$\begin{aligned} m_f \cdot m_g &= -1 \qquad | \div m_f \\ m_g &= -\frac{1}{m_f} = -(m_f)^{-1}\end{aligned}$$

3.5.3. Beweis

Seien f und g zwei lineare Funktionen mit den Steigungen m_f und m_g.

1) Wir nehmen an, dass f und g genau einen Schnittpunkt besitzen. Dann $\exists! x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
m_f x + n_f &= m_g x + n_g \qquad \text{mit } m_f = m_g = m \\
mx + n_f &= mx + n_g \qquad \mid -mx \\
n_f &= n_g
\end{aligned}
$$

Für $n_f \neq n_g$ gilt $\nexists x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$. Zwei Geraden, die keinen gemeinsamen Punkt haben, sind **parallel**.

Für $n_f = n_g$ gilt $\forall x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$. Zwei Geraden, die unendlich viele gemeinsame Punkte haben, sind **identisch**.

Quod erat Demonstrandum

2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit[14] legen wir fest, dass sich f und g im Ursprung unter einem rechten Winkel treffen.
   - Es gilt $m_f = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei Δx und Δy die Katheten eines Steigungsdreiecks von f sind.
   - Dreht man die Gerade f samt Steigungsdreieck um $90°$ um den Ursprung, so erhält man die gerade g, mit kongruentem Steigungsdreieck und $m_g = \frac{\Delta x}{-\Delta y}$.
   - Es folgt $m_f \cdot m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta x}{-\Delta y} = -1$

3.6. Quadratische Funktionen

3.6.1. Definition

Eine quadratische Funktion ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades mit der **allgemeinen Form**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der Graph[13] ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel. Maßgeblich für die Lage der Parabel ist ihr **Scheitelpunkt**. Dessen Koordinaten $S(x_S \mid y_S)$ lassen sich direkt aus der **Scheitelpunktform** der Funktionsgleichung ablesen

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_2$$

3.6.2. Nullstellen quadratischer Funktionen

(1) Die Nullstellen[15] einer quadratischen Funktion in Normalform $f(x) = x^2 + px + q$ können mit der pq-Formel bestimmt werden.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(2) Sind x_1 und x_2 Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$, so lässt sich der Funktionsterm in **faktorisierter Form** schreiben.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Die Nullstellen lassen sich direkt aus den **Linearfaktoren** $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ ablesen.

3.6.3. Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $0 = x^2 + px + q$, dann gilt

[14] Nur gewisse Fälle werden aufgezeigt, da die restlichen Fälle *trivial* sind.
[15] siehe Abschnitt 3.1.4

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

3.6.4. Beweis

Seien $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Dann gilt

- für die Summe der Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &= -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

- für das Produkt der Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 && \text{dritte binomische Formel} \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Alternativ lassen sich diese Zusammenhänge auch mit dem Ausmultiplizieren der faktorisierten Form aufzeigen.

Somit gilt auch, dass **ganzzahlige Nullstellen Teiler** von q sein müssen und die **Summe der Nullstellen die Gegenzahl** von p muss.

4. Folgen

4.1. Der Folgenbegriff

4.1.1. Folgen

Eine Funktion[16], deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

4.1.2. Notation

Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

(a_n) ist die Folgenbezeichnung.

n ist der Folgenindex, die Indexzahl, mit $n \in \mathbb{N}$, wobei zumeist $n \geq 1$ n das Argument.

[16] siehe Abschnitt 3.1.1

a_n ist das n-te Folgenglied, d.h. der Funktionswert zum Argument[17] n. In der üblichen Notation von Funktionen sollte a_n besser als $a(n)$ geschrieben werden.

$3n - 4$ ist Term für die Berechnung des n-ten Folgegliedes.

4.1.3. Rekursion und Explikation

Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B. $3n - 4$, dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \land a_n = a_{n-1} + 3$$

TL;DR

Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

4.2. Verschiedene Folgen

4.2.1. Geometrische Folgen

Eine Folge (a_n) heißt geometrisch, wenn $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Es gibt genau ein $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Oder anders gesagt

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Für jede geometrische Folge (a_n) gilt $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, weil $a_1 = a_1 \cdot q^0$, weil q^0 für $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ immer 1 ist.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

4.2.2. Konstante Folgen

q[18] darf nicht 1 sein, denn folglich wäre $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n$.

Solche Folgen nennen wir **konstante Folgen**.

4.2.3. Alternierende Folgen

Folgen, deren aufeinanderfolgende Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen, nennen wir **alternierend**.

[17] siehe Abschnitt 3.1.2
[18] siehe Abschnitt 4.2.1

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

4.3. Monotonieverhalten

4.3.1. Strenge Monotonie

Eine Folge (a_n), deren nächstes Folgeglied immer größer ist als das vorhergehende, nennt man **streng monoton steigend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Nicht streng monoton steigend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Wenn das nächste Folgeglied immer kleiner ist als das vorhergehende, dann nennt man sie analog dazu **streng monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Nicht streng monoton fallend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

4.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \land n \geq 1$. Dazu gehen wir zuerst von einer streng monotonen Steigung aus und stellen dann um.

$$\begin{aligned}
c_n &< c_{n+1} \\
\frac{n-1}{n} &< \frac{n}{n+1} && | \cdot n \\
n - 1 &< \frac{n^2}{n+1} && | \cdot (n+1) \\
n^2 - 1 &< n^2 && | - n^2 \\
-1 &< 0
\end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

Die Vermutung ist **wahr** für alle $n \in \mathbb{N}$, da eine wahre Ungleichung am Ende steht.

4.3.3. Einfache Monotonie

Folgen, die auch aufeinanderfolgende gleiche Folgeglieder aufweisen, sonst allerdings monoton steigen oder fallen, nennt man **monoton steigend** bzw. **monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$
$$\text{bzw. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

4.4. Teilfolgen

4.4.1. Folgen mit Systematik

In Abschnitt 4.3.2 könnten bezüglich der Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ systematisch Folgenglieder „herausgegriffen" werden, z.B. c_1, c_{10}, c_{100}, …, $c_{10^{k-1}}$.
Diese Folgenglieder kann man als Neue Folge auffassen, die ein Teil der Folge (c_n) ist.

4.4.2. Definition

Die Folge (t_n) ist Teilfolge der Folge (a_n).
Ist n_i mit $(i = 1; 2; ...; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahle, so heißt $\left(a_{n_i}\right) = (t_n)$ Teilfolge von (a_n).

4.4.3. Teilfolgensatz

Jede Folge (a_n) besitzt eine monotone Teilfolge.

4.4.4. Beweis

Sei eine Gipfelstelle die Indexzahl n, sodass $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq n : a_n \geq a_m$.

TL;DR
Alle nachfolgenden Folgenglieder a_m sind kleiner als a_n bzw. nach a_n kommt kein Folgeglied, das größer ist als a_n.

Nun lässt sich eine Fallunterscheidung durchführen.

I. Es gibt unendlich viele Gipfelstellen.
Nummeriert man die Gipfelstellen in der Reihenfolge ihres Auftretens, folgt

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq ...$$

D.h. die Gipfelstellen bilden eine monoton fallende[19] Teilfolge.

II. Es gibt endlich viele Gipfelstellen.
Sei n_L die letzte Gipfelstelle. Wir betrachten a_{n_L}. Dann gilt $a_{n_L} > a_{n_L+1}$

Da a_{n_L} die letzte Gipfelstelle war, siind alle nachfolgenden Folgeglieder keine Gipfelstellen, d.h. für jedes dieser Folgeglieder a_n^* gibt es mindestens ein Folgeglied a_n^{**} mit $a_n^* < a_n^{**} < a_{n_L}$.

D.h. wir erhalten eine monoton steigende Folge.

$$a_{n_L+1} < a^*_{n_L+1} < a^{**}_{n_L+1} < ...$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

4.5. Beschränktheit von Folgen

4.5.1. Schranken

In Abschnitt 4.3.2 wurde die Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ betrachtet.
Man kann „beobachten", dass $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq c_n < 1$, d.h. die Folgenglieder unter- und überschreiten einen bestimmten Wert nicht.

[19]siehe Abschnitt 4.3.3

4.5.2. Untere und obere Schranken, Maxi- und Minima

1. Eine reelle Zahl u heißt **untere Schranke** der Folge (a_n), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $u \leq a_n$.
2. Eine reelle Zahl o heißt **obere Schranke** von (a_n), wenn $\forall n \in \mathbb{N} : o \geq a_n$.
3. Eine reelle Zahl $\min\, a_n$ heißt **Minimum** von (a_n), wenn es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\min\, a_n = a_k \leq a_n$.
4. Eine reelle Zahl $\max\, a_n$ heißt **Maximum** von (a_n), wenn $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \max\, a_n = a_k \geq a_n$.

4.5.3. Beispiel

Betrachten wir die Folge $(a_n) : a_n = -\frac{4n}{n+2}$. Zunächst benötigt man eine Vermutung. Dazu werden einige Folgenglieder berechnet.

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{4 \cdot 1}{1+3} = -\frac{4}{3} \\ a_{10} &= -\frac{4 \cdot 10}{10+3} = -\frac{40}{13} \\ a_{100} &= -\frac{4 \cdot 100}{100+3} = -\frac{400}{103} \end{aligned}$$

Man kann beobachten, dass sich die Folge mit wachsendem Argument an -4 annnähert. Darum vermuten wir zunächst, dass **eine** untere Schranke -4 ist, $\forall n \in \mathbb{N} : -4 \leq a_n$.

$$\begin{aligned} -4 &\leq a_n \\ -4 &\leq -\frac{4n}{n+2} && | \cdot (n+2) \\ -4(n+2) &\leq -4n \\ -4n-8 &\leq -4n && | + 4n \\ -8 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

Die Vermutung $-4 \leq a_n$ ist **wahr** für alle $n \in \mathbb{N}$.

4.5.4. Vielschrankensatz

Falls eine Folge (a_n) eine untere Schranke besitzt, so besitzt sie unendlich viele.

4.5.5. Beweis

Sei $u \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < u$.

D.h. $x < u \leq a_n$, folgt $x \leq a_n$ und somit existieren unendlich viele untere Schranken.

4.5.6. *Suprema* und *Infima*

Die größte untere Schranke[20] nennt man **untere Grenze** oder *Infimum* $\inf\, a_n$ der Folge (a_n).
Die kleinste obere Schranke nennt man **obere Grenze** oder *Supremum* $\sup\, a_n$ der Folge (a_n).

4.5.7. Schritte zum Nachweis

Die beliebige Folge (a_n) besitzt die untere Grenze $\inf\, a_n$. Es sei $k \in \mathbb{R}$ mit $\inf\, a_n < k$.

[20] siehe Abschnitt 4.5.2

5. Beweise

5.1. Beweistechniken

5.1.1. Hinrichtung und Rückrichtung

Beweise können *Genau dann, wenn ...* Aussagen, die in zwei Richtungen funktionieren, sein.

5.1.2. Satz vom Nullprodukt als Beispiel

$a \cdot b = 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn $a = 0 \vee b = 0$.

Hinrichtung[21] „$\Longrightarrow$“

1. Wir nehmen an, dass $a \cdot b = 0$ Sei nun $a \neq 0$. Jetzt können wir durch Null teilen.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \qquad \mid \div a \\ b &= 0 \end{aligned}$$

2. Analog gilt dies auch für $b \neq 0$.

Es folgt, dass wenn $a \cdot b = 0$, muss mindestens einer der Faktoren a oder b Null sein.

Rückrichtung „$\Longleftarrow$“

1. Wir nehmen an, dass $a = 0$. Somit gilt

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

2. Analog gilt dies für $b = 0$.

Es folgt, dass wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, dann ist auch das Produkt Null.

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

[21] siehe revolutionäres Frankreich