

# Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche . . . . .	2
1.1. Mengen . . . . .	2
1.1.1. Definition nach Cantor . . . . .	2
1.1.2. Mengeneigenschaften . . . . .	2
1.1.3. Mengenbeziehungen . . . . .	2
1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz . . . . .	2
1.1.5. Kartesisches Produkt . . . . .	2
1.2. Zahlbereiche . . . . .	3
1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche . . . . .	3
2. Abbildungen . . . . .	3
2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich . . . . .	3
2.1.1. Abbildung, Funktion . . . . .	3
2.1.2. Beispiel . . . . .	4
2.1.3. Verschiedene Abbildungen . . . . .	4
2.1.4. Beispiel . . . . .	4
2.2. Verkettung von Abbildungen . . . . .	4
2.2.1. Verkettung . . . . .	4
2.2.2. Assoziativität . . . . .	4
2.3. Abbildungseigenschaften . . . . .	5
2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität . . . . .	5
2.3.2. Beispielbeweis . . . . .	5
2.4. Umkehrabbildung . . . . .	6
2.4.1. Inverse Abbildung . . . . .	6
2.4.2. Beispiel . . . . .	6
2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse . . . . .	6
2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen . . . . .	7
2.4.5. Beweis . . . . .	7
3. Folgen . . . . .	8
3.1. Der Folgenbegriff . . . . .	8
3.1.1. Folgen . . . . .	8
3.1.2. Notation . . . . .	8
3.1.3. Rekursion und Explikation . . . . .	8
3.2. Verschiedene Folgen . . . . .	8
3.2.1. Geometrische Folgen . . . . .	8
3.2.2. Konstante Folgen . . . . .	9
3.2.3. Alternierende Folgen . . . . .	9
3.3. Monotonieverhalten . . . . .	9
3.3.1. Strenge Monotonie . . . . .	9
3.3.2. Beispielbeweis . . . . .	9
3.3.3. Einfache Monotonie . . . . .	10
3.4. Teilfolgen . . . . .	10
3.4.1. Folgen mit Systematik . . . . .	10
3.4.2. Definition . . . . .	10
3.4.3. Teilfolgengesetz . . . . .	10
4. Beweise . . . . .	10
4.1. Beweistechniken . . . . .	10
4.1.1. Hinrichtung und Rückrichtung . . . . .	10
4.1.2. Satz vom Nullprodukt als Beispiel . . . . .	10

# 1. Mengen und Zahlbereiche

## 1.1. Mengen

### 1.1.1. Definition nach Cantor

Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

### 1.1.2. Mengeneigenschaften

Sei  $M$  eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$ ,  $x$  ist ein Element von  $M$ .
- $x \notin M$ ,  $x$  ist kein Element von  $M$ .
- $M = \emptyset$ ,  $M$  ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also  $M = \{\}$ .
- $|M|$  heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von  $M$  und gibt an, wie viele Elemente  $M$  enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften, z.B.  $M$  ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.
- Auflistung der Elemente, z.B.  $M = \{0; 5; 10; \dots\}$ .
- Definition der Eigenschaften, z.B.  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$ .
- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

### 1.1.3. Mengenbeziehungen

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen.

- $X$  heißt **Teilmenge** von  $Y$  ( $X \subseteq Y$ ), wenn jedes Element von  $X$  auch in  $Y$  ist.
- $X$  heißt **echte Teilmenge** von  $Y$  ( $X \subset Y$ ), wenn jedes Element von  $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$ .
- Die Mengen  $X$  und  $Y$  heißen **gleich**, wenn  $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ .

### 1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$  **Durchschnitt** von  $X$  und  $Y$ .
- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$  **Vereinigung** von  $X$  und  $Y$ .
- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$  **disjunkte Vereinigung** von  $X$  und  $Y$ .
- $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$  **Differenz** von  $X$  und  $Y$ .

### 1.1.5. Kartesisches Produkt

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

<sup>1</sup>( $x; y$ ) ist ein geordnetes Paar.

<sup>2</sup>( $x; y$ ) = ( $x; w$ )  $\Leftrightarrow x = v \wedge y = w$

## 1.2. Zahlbereiche

### 1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche

$\mathbb{N}$  Menge der natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{N}^*$  Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$\mathbb{Z}$  Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$  Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+$  Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$  Menge der negativen rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$  Menge der reellen Zahlen,  $\mathbb{R}^+$  und  $-\mathbb{R}^+$  analog, sodass  $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{C}$  Menge der komplexen Zahlen

## 2. Abbildungen

### 2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

#### 2.1.1. Abbildung, Funktion

Es seien  $X$  und  $Y$  nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift  $f$ , die jedem Element von  $X$  genau ein Element von  $Y$  zuordnet, heißt **Abbildung** von  $X$  nach  $Y$ .

$\forall x \in D(f) \subseteq X$  gibt es genau ein  $y = f(x) \in Y$ .

$$\begin{aligned}f : X &\rightarrow Y \\x &\mapsto y\end{aligned}$$

Handelt es sich bei  $X$  und  $Y$  um reine Zahlenmengen (z.B.  $\mathbb{R}$ ), so bezeichnen wir die Abbildung  $f$  auch als **Funktion**.

#### TL;DR

Jedem  $x$  muss ein  $y$  zugeordnet werden. Wenn  $X$  und  $Y$  reine Zahlenmengen sind, ist die Abbildung eine Funktion.

2.  $D(f)$  ist die **Definitionsmenge**<sup>3</sup> von der Vorschrift  $f$ .

3.  $B(f)$  ist die **Bildungsmenge**<sup>4</sup> von  $f$ , wobei  $B(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$

4.  $f(x) \in Y$  heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von  $x$  unter  $f$ .

Ist  $y \in Y$ , so heißt jedes  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  **ein Urbild** bzw. **Argument** von  $y$  unter  $f$ .

5. Die Menge aller Urpunkte von  $y$  unter  $f$  bezeichnen wir mit  $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$ . Zu  $f^{-1}$  sagen wir auch **das Urbild** von  $y$  unter  $f$ .

#### TL;DR

**Das Urbild** ist die Menge aller **Urbilder**.

$X = D(f)$  heißt **Definitionsbereich** von  $f$  und  $Y = B(f)$  heißt **Wertebereich** von  $f$ .

Die Menge  $\text{im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$  heißt **Bild** von  $f$ .

<sup>3</sup>Definitionsbereich bei Funktionen

<sup>4</sup>Wertebereich bei Funktionen

6. Die Menge  $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y^5$  heißt der Graph von  $f$ .
7. Zwei Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  heißen gleich ( $f = g$ ), wenn  $f(x) = g(x) \forall x \in X$ .

### 2.1.2. Beispiel

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \sin(x)$ .

Für  $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$  wäre das Bild  $\text{im}(f(X_1)) = [0; 1]$ .

Für  $Y_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  wäre  $f^{-1}(Y_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\}$  oder  $f^{-1}(Y_1) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi]$ .

Der Definitionsbereich  $D(f) = \mathbb{Z}$  und der Wertebereich  $B(f) = [-1; 1]$ .

### 2.1.3. Verschiedene Abbildungen

- (1) Es sei  $X$  eine nichtleere Menge. Die **Identität** auf  $X$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} Id_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

- (2) Sei  $y_0 \in Y$  fixiert. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

**konstante Abbildung.**

- (3) Ist  $X \subset \mathbb{R}$ , so heißt jede Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  **reelle Funktion**.

### 2.1.4. Beispiel

Die Logarithmusfunktion ist eine reelle Funktion.

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

## 2.2. Verkettung von Abbildungen

### 2.2.1. Verkettung

Es seien  $X, Y, Z$  nichtleere Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von  $f$  und  $g$ .

Wir sagen auch „ $g$  nach  $f$ “, d.h.  $f$  wird zuerst angewendet, danach  $g$ .

### 2.2.2. Assoziativität

Seien  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  und  $h : Z \rightarrow W$  Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen  $h \circ (g \circ f)$  und  $(h \circ g) \circ f$  wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

---

<sup>5</sup>siehe Abschnitt 1.1.5

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

## 2.3. Abbildungseigenschaften

### 2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **surjektiv**, wenn  $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ .

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit  $f : X \twoheadrightarrow Y$  ausdrücken.

#### TL;DR

Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem  $y \in Y$  **mindestens** ein  $x \in X$  gibt.

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **injektiv**, wenn  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ .

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit  $f : X \hookrightarrow Y$  ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge ( $\subset$ ) aufweist.

#### TL;DR

Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem  $y \in Y$  **maximal** ein  $x \in X$  gibt.

Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie sowohl subjektiv als auch injektiv ist. Diese Abbildung nennen wir auch **eineindeutige Zuordnung**.

#### TL;DR

Eine Abbildung ist bijektiv, wenn jedem  $x \in X$  genau ein  $y \in Y$  zugeordnet wird und jedes  $y \in Y$  einem  $x \in X$  zugeordnet wird.

### 2.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Abbildung  $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$  mit  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir wollen nun herausfinden, ob  $f$  injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv, also beides, ist.

1. Damit  $f$  **injektiv** ist, muss die Definition<sup>6</sup> erfüllt sein. Also muss für  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$   $x_1 = x_2$ . Dafür setzen wir sie gleich.

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_1 + 1} &= \frac{x_2}{x_2 + 1} && | \cdot (x_2 + 1) \\ \frac{x_1 x_2 + x_1}{x_1 + 1} &= x_2 && | \cdot (x_1 + 1) \\ x_1 x_2 + x_1 &= x_1 x_2 + x_2 && | - x_1 x_2 \\ x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Somit ist  $f$  injektiv. Da  $x_1 = x_2$  ist die Definition erfüllt.

2. Damit  $f$  **surjektiv** ist, muss auch die Definition<sup>6</sup>  $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$  erfüllt sein.

<sup>6</sup>siehe Abschnitt 2.3.1

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x}{x+1} & | \cdot (x+1) \\
 yx + y &= x & | -y \\
 yx - x &= -y \Leftrightarrow x(y-1) = -y & | \cdot \frac{1}{y-1} \\
 x &= -\frac{y}{y-1}
 \end{aligned}$$

$-\frac{y}{y-1}$  ist für  $y = 1$  nicht definiert und somit ist  $f$  nicht surjektiv, da ein  $y \in Y$  existiert für das es kein  $x \in X$  gibt.

3.  $f$  ist kann folglich nicht **bijektiv** sein, da es dafür surjektiv und injektiv sein müsste. Es wäre bijektiv für  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

## 2.4. Umkehrabbildung

### 2.4.1. Inverse Abbildung

Ist die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv, so ist die inverse Abbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  zu  $f$  definiert durch

$$\begin{aligned}
 f^{-1} &: Y \rightarrow X \\
 y &\mapsto f^{-1}(y)
 \end{aligned}$$

$y \mapsto f^{-1}(y)$  := das eindeutig bestimmte Urbild von  $y$  unter  $f$ .

Sei  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv. Dann ist  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  ebenfalls bijektiv und es gilt aufgrund der Definition

$$\begin{aligned}
 f^{-1} \circ f &= Id_X \\
 f \circ f^{-1} &= Id_Y \\
 (f^{-1})^{-1} &= f
 \end{aligned}$$

### 2.4.2. Beispiel

- (1)  $Id_X : X \rightarrow X$  ist bijektiv.

$$\begin{aligned}
 Id_X &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto x
 \end{aligned}$$

$$(Id_X)^{-1} = Id_X$$

- (2) Die konstante Abbildung  $c_{y_0} : X \rightarrow Y$  ist weder injektiv noch surjektiv, unter der Bedingung, dass  $X$  und  $Y$  mehr als ein Element enthalten.

$(c_{y_0})^{-1}$  ist zudem keine Abbildung mehr.

- (3) Die reelle Funktion  $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ln : x \mapsto \ln(x)$  ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung wäre

$$\begin{aligned}
 \exp &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\
 \exp &: x \rightarrow e^x
 \end{aligned}$$

### 2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt

- (1)  $f$  ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $g \circ f = Id_X$ .  
 $g$  heißt **Linksinverse** von  $f$ .
- (2)  $f$  ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung  $h : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $f \circ h = Id_Y$ .  
 $h$  heißt **Rechtsinverse** von  $f$ .
- (3)  $f$  ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, die sowohl Links- als auch Rechtsinverse von  $f$  ist. D.h. es gilt  $g \circ f = Id_X \wedge f \circ g = Id_Y$ , wobei  $g$  eindeutig bestimmt ist, und  $g = f^{-1}$ .

Nur für **bijektive** Abbildungen gibt es Umkehrabbildungen. Bei nur surjektiv oder injektiven Abbildungen existiert ein Urbild  $f^{-1}$ , eine Menge mit keinem, einem oder anderen Elementen.

#### 2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  zwei bijektive Abbildungen.

Dann ist auch ihre Verkettung  $g \circ f$  bijektiv und für ihre inversen Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

#### 2.4.5. Beweis

Für die inversen Abbildungen  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  und  $g^{-1} : Z \rightarrow Y$  gilt<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= Id_X & g^{-1} \circ g &= Id_Y \\ f \circ f^{-1} &= Id_Y & g \circ g^{-1} &= Id_Z \end{aligned}$$

Wegen der Assoziativität<sup>8</sup> von Verknüpfungen gilt

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &\Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ (Id_Y) \circ f \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_X \\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= Id_X \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt analog dazu

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &\Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &\Leftrightarrow g \circ (Id_Y) \circ g^{-1} \\ &\Leftrightarrow g \circ g^{-1} = Id_Z \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= Id_Z \end{aligned}$$

Somit gilt, falls  $f$  und  $g$  bijektiv sind,  $\exists f^{-1} \wedge g^{-1}$ , die eindeutig bestimmt, d.h. ebenfalls bijektiv sind.

<sup>7</sup>siehe Abschnitt 2.4.1

<sup>8</sup>siehe Abschnitt 2.2.2

$$\begin{aligned} & \exists f^{-1} \wedge g^{-1} \\ \Rightarrow & \exists f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

### 3. Folgen

#### 3.1. Der Folgenbegriff

##### 3.1.1. Folgen

Eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

##### 3.1.2. Notation

Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

$(a_n)$  ist die Folgenbezeichnung.

$n$  ist der Folgenindex, die Indexzahl, mit  $n \in \mathbb{N}$ , wobei zumeist  $n \geq 1$   $n$  das Argument.

$a_n$  ist das  $n$ -te Folgentglied, d.h. der Funktionswert zum Argument  $n$ . In der üblichen Notation von Funktionen sollte  $a_n$  besser als  $a(n)$  geschrieben werden.

$3n - 4$  ist Term für die Berechnung des  $n$ -ten Folgentgliedes.

##### 3.1.3. Rekursion und Explikation

Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B.  $3n - 4$ , dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \wedge a_n = a_{n-1} + 3$$

##### TL;DR

Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgentglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgentglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

### 3.2. Verschiedene Folgen

#### 3.2.1. Geometrische Folgen

Eine Folge  $(a_n)$  heißt geometrisch, wenn  $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Es gibt genau ein  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Oder anders gesagt

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Für jede geometrische Folge  $(a_n)$  gilt  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , weil  $a_1 = a_1 \cdot q^0$ , weil  $q^0$  für  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  immer 1 ist.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

### 3.2.2. Konstante Folgen

$q^0$  darf nicht 1 sein, denn folglich wäre  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n$ .

Solche Folgen nennen wir **konstante Folgen**.

### 3.2.3. Alternierende Folgen

Folgen, deren aufeinanderfolgende Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen, nennen wir **alternierend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

## 3.3. Monotonieverhalten

### 3.3.1. Strenge Monotonie

Eine Folge  $(a_n)$ , deren nächstes Folgenglied immer größer ist als das vorhergehende, nennt man **streng monoton steigend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Nicht streng monoton steigend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Wenn das nächste Folgenglied immer kleiner ist als das vorhergehende, dann nennt man sie analog dazu **streng monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Nicht streng monoton fallend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

### 3.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Folge  $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$ . Dazu gehen wir zuerst von einer streng monotonen Steigung aus und stellen dann um.

<sup>9</sup>siehe Abschnitt 3.2.1

$$\begin{aligned}
 c_n &< c_{n+1} \\
 \frac{n-1}{n} &< \frac{n}{n+1} \quad | \cdot n \\
 n-1 &< \frac{n^2}{n+1} \quad | \cdot (n+1) \\
 n^2 - 1 &< n^2 \quad | -n^2 \\
 -1 &< 0
 \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Die Vermutung ist **wahr**, da eine wahre Ungleichung am Ende steht.

### 3.3.3. Einfache Monotonie

Folgen, die auch aufeinanderfolgende gleiche Folgeglieder aufweisen, sonst allerdings monoton steigen oder fallen, nennt man **monoton steigend** bzw. **monoton fallend**.

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N} : a_n &\leq a_{n+1} \\
 \text{bzw. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n &\geq a_{n+1}
 \end{aligned}$$

## 3.4. Teilfolgen

### 3.4.1. Folgen mit Systematik

In Abschnitt 3.3.2 könnten bezüglich der Folge  $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$  systematisch Folgeglieder „herausgegriffen“ werden, z.B.  $c_1, c_{10}, c_{100}, \dots, c_{10^{k-1}}$ .

Diese Folgeglieder kann man als Neue Folge auffassen, die ein Teil der Folge  $(c_n)$  ist.

### 3.4.2. Definition

Die Folge  $(t_n)$  ist Teilfolge der Folge  $(a_n)$ .

Ist  $n_i$  mit  $(i = 1; 2; \dots; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$  eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt  $(a_{n_i}) = (t_n)$  Teilfolge von  $(a_n)$ .

### 3.4.3. Teilfolgensatz

Jede Folge  $(a_n)$  besitzt eine monotone Teilfolge.

## 4. Beweise

### 4.1. Beweistechniken

#### 4.1.1. Hinrichtung und Rückrichtung

Beweise können *Genau dann, wenn ...* Aussagen, die in zwei Richtungen funktionieren, sein.

#### 4.1.2. Satz vom Nullprodukt als Beispiel

$a \cdot b = 0$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt genau dann, wenn  $a = 0 \vee b = 0$ .

**Hinrichtung** „ $\Rightarrow$ “

1. Wir nehmen an, dass  $a \cdot b = 0$ . Sei nun  $a \neq 0$ . Jetzt können wir durch Null teilen.

$$\begin{array}{rcl} a \cdot b = 0 & | \div a \\ b = 0 \end{array}$$

2. Analog gilt dies auch für  $b \neq 0$ .

Es folgt, dass wenn  $a \cdot b = 0$ , muss mindestens einer der Faktoren  $a$  oder  $b$  Null sein.

**Rückrichtung „ $\Leftarrow$ “**

1. Wir nehmen an, dass  $a = 0$ . Somit gilt

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

2. Analog gilt dies für  $b = 0$ .

Es folgt, dass wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, dann ist auch das Produkt Null.

Quod erat Demonstrandum