Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche

1.1. Mengen

1.1.1. Definition nach Cantor

Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

1.1.2. Mengeneigenschaften

Sei M eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$, x ist ein Element von M.
- $x \notin M$, x ist kein Element von M.
- $M = \emptyset$, M ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also $M = \{\}$.
- $|M|$ heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von M und gibt an, wie viele Elemente M enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften, z.B M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.
- Auflistung der Elemente, z.B. $M = \{0; 5; 10; ...\}$.
- Definition der Eigenschaften, z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$.
- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

1.1.3. Mengenbeziehungen

Seien X und Y Mengen.

- X heißt **Teilmenge** von Y ($X \subseteq Y$), wenn jedes Element von X auch in Y ist.
- X heißt **echte Teilmenge** von Y ($X \subset Y$), wenn jedes Element vin $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.
- Die Mengen X und Y heißen **gleich**, wenn $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$.

1.1.4. Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz

Seien X und Y Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ **Durchschnitt** von X und Y.
- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ **Vereinigung** von X und Y.
- $X \mathbin{\dot\cup} Y := \{x \mid x \in X \mathbin{\dot\vee} x \in Y\}$ **disjunkte Vereinigung** von X und Y.
- $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$ **Differenz** von X und Y.

1.1.5. Kartesisches Produkt

Seien X und Y Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

1 2

[1] $(x; y)$ ist ein geordnetes Paar.

[2] $(x; y) = (x; w) \Leftrightarrow x = v \; y = w$

1.2. Zahlbereiche

1.2.1. Bezeichnung der Zahlbereiche

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{N}^*$ Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+$ Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$ Menge der negativen rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}^+$ und $-\mathbb{R}^+$ analog, sodass $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

2. Abbildungen

2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

2.1.1. Abbildung, Funktion

Es seien X und Y nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift f, die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt **Abbildung** von X nach Y.

   $\forall x \in D(f) \subseteq X$ gibt es genau ein $y = f(x) \in Y$.

   $$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

   Handelt es sich bei X und Y um reine Zahlenmengen (z.B. $\mathbb{R}$), so bezeichnen wir die Abbildung f auch als **Funktion**.

   TL;DR
   Jedem x muss ein y zugeordnet werden. Wenn X und Y reine Zahlenmengen sind, ist die Abbildung eine Funktion.

2. $D(f)$ ist die **Definitionsmenge**[3] von der Vorschrift f.
3. $B(f)$ ist die **Bildungsmenge**[4] von f, wobei $B(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$
4. $f(x) \in Y$ heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von x unter f.

   Ist $y \in Y$, so heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ **ein Urbild** bzw. **Argument** von y unter f.
5. Die Menge aller Urpunkte von y unter f bezeichnen wir mit $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Zu f^{-1} sagen wir auch **das Urbild** von y unter f.

   TL;DR
   Das Urbild ist die Menge aller **Urbilder**.

   $X = D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f und $Y = B(f)$ heißt **Wertebereich** von f.

   Die Menge $\operatorname{im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X\}$ mit $f(x) = y$ heißt **Bild** von f.

[3] Definitionsbereich bei Funktionen
[4] Wertebereich bei Funktionen

6. Die Menge $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$[5] heißt der Graph von f.
7. Zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen gleich ($f = g$), wenn $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$.

2.1.2. Beispiel
Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

Für $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$ wäre das Bild $\operatorname{im}(f(X_1)) = [0; 1]$.

Für $Y_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ wäre $f^{-1}(Y_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\}$ oder $f^{-1}(Y_1) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi]$.

Der Definitionsbereich $D(f)$ = $\mathbb{Z}$ und der Wertebereich $B(f) = [-1; 1]$.

2.1.3. Verschiedene Abbildungen

(1) Es sei X eine nichtleere Menge. Die **Identität** auf X ist definiert durch

$$\begin{aligned} Id_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(2) Sei $y_0 \in Y$ fixiert. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\to Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

konstante Abbildung.

(3) Ist $X \subset \mathbb{R}$, so heißt jede Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ **reelle Funktion**.

2.1.4. Beispiel
Die Logarithmusfunktion ist eine reelle Funktion.

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

2.2. Verkettung von Abbildungen

2.2.1. Verkettung
Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von f und g.

Wir sagen auch „g nach f“, d.h. f wird zuerst angewendet, danach g.

2.2.2. Assoziativität
Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f))(h \circ g) \circ f$$

[5] siehe Abschnitt 1.1.5

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

2.3. Abbildungseigenschaften

2.3.1. Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **surjektiv**. wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit $f : X \twoheadrightarrow Y$ ausdrücken.

TL;DR
Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **mindestens** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit $f : X \hookrightarrow Y$ ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge ($\subset$) aufweist.

TL;DR
Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **maximal** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie sowohl subjektiv als auch injektiv ist. Diese Abbildung nennen wir auch eineindeutige Zuordnung.

TL;DR
Eine Abbildung ist bijektiv, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird und jedes $y \in Y$ einem $x \in X$ zugeordnet wird.

2.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Abbildung $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ mit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$. Wir wollen nun herausfinden, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv, also beides, ist.

1. Damit f **injektiv** ist, muss die Definition[6] erfüllt sein. Also muss für $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1 = x_2$. Dafür setzen wir sie gleich.

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_1+1} &= \frac{x_2}{x_2+1} && | \cdot (x_2+1) \\
\frac{x_1x_2 + x_1}{x_1+1} &= x_2 && | \cdot (x_1+1) \\
x_1x_2 + x_1 &= x_1x_2 + x_2 && | - x_1x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

   Somit ist f injektiv. Da $x_1 = x_2$ ist die Definition erfüllt.

2. Damit f **surjektiv** ist, muss auch die Definition[6] $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ erfüllt sein.

[6] siehe Abschnitt 2.3.1

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x}{x+1} && \mid \cdot (x+1) \\
yx + y &= x && \mid -y-x \\
yx - x = -y \Leftrightarrow x(y-1) &= -y && \mid \cdot \frac{1}{y-1} \\
x &= -\frac{y}{y-1}
\end{aligned}
$$

$-\frac{y}{y-1}$ ist für $y = 1$ nicht definiert und somit ist f nicht surjektiv, da ein $y \in Y$ existiert für das es kein $x \in X$ gibt.

3. f ist kann folglich nicht **bijektiv** sein, da es dafür surjektiv und injektiv sein müsste. Es wäre bijektiv für $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.4. Umkehrabbildung

2.4.1. Inverse Abbildung

Ist die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ zu f definiert durch

$$
\begin{aligned}
f^{-1} &: Y \to X \\
y &\mapsto f^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

$y \mapsto f^{-1}(y) :=$ das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f.

Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls bijektiv und es gilt aufgrund der Definition

$$
\begin{aligned}
f^{-1} \circ f &= Id_X \\
f \circ f^{-1} &= Id_Y \\
\left(f^{-1}\right)^{-1} &= f
\end{aligned}
$$

2.4.2. Beispiel

(1) $Id_X : X \to X$ ist bijektiv.

$$
\begin{aligned}
Id_X &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
x &\mapsto x
\end{aligned}
$$

$$(Id_X)^{-1} = Id_X$$

(2) Die konstante Abbildung $c_{y_0} : X \to Y$ ist weder injektiv noch surjektiv, unter der Bedingung, dass X und Y mehr als ein Element enthalten.

$\left(c_{y_0}\right)^{-1}$ ist zudem keine Abbildung mehr.

(3) Die reelle Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\ln : x \mapsto \ln(x)$ ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung wäre

$$
\begin{aligned}
\exp &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\
\exp &: x \to e^x
\end{aligned}
$$

2.4.3. Satz über Links- und Rechtsinverse

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt

(1) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g: Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = Id_X$.
g heißt **Linksinverse** von f.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $h: Y \to X$ gibt, sodass $f \circ h = Id_Y$.
h heißt **Rechtsinverse** von f.

(3) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g: Y \to X$ gibt, die sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist. D.h. es gilt $g \circ f = Id_X \land f \circ g = Id_Y$, wobei g eindeutig bestimmt ist, und $g = f^{-1}$.

Nur für **bijektive** Abbildungen gibt es Umkehrabbildungen. Bei nur surjektiv oder injektiven Abbildungen existiert ein Urbild f^{-1}, eine Menge mit keinem, einem oder anderen Elementen.

2.4.4. Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen
Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ zwei bijektive Abbildungen.
Dann ist auch ihre Verkettung $g \circ f$ bijektiv und für ihre inversen Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2.4.5. Beweis
Für die inversen Abbildungen $f^{-1}: Y \to X$ und $g^{-1}: Z \to Y$ gilt[7]

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= Id_X \qquad & g^{-1} \circ g &= Id_Y \\ f \circ f^{-1} &= Id_Y \qquad & g \circ g^{-1} &= Id_Z \end{aligned}$$

Wegen der Assoziativität[8] von Verknüpfungen gilt

$$\begin{aligned} &(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ (Id_Y) \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_X \\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= Id_X \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt analog dazu

$$\begin{aligned} &(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ (Id_Y) \circ g^{-1} \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ g^{-1} = Id_Z \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= Id_Z \end{aligned}$$

Somit gilt, falls f und g bijektiv sind, $\exists f^{-1} \land g^{-1}$, die eindeutig bestimmt, d.h. ebenfalls bijektiv sind.

[7] siehe Abschnitt 2.4.1
[8] siehe Abschnitt 2.2.2

$$\exists f^{-1} \wedge g^{-1}$$
$$\Rightarrow \exists f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

Quod erat Demonstrandum

3. Folgen

3.1. Der Folgenbegriff

3.1.1. Folgen

Eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

3.1.2. Notation

Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

(a_n) ist die Folgenbezeichnung.

n ist der Folgenindex, die Indexzahl, mit $n \in \mathbb{N}$, wobei zumeist $n \geq 1$ n das Argument.

a_n ist das n-te Folgenglied, d.h. der Funktionswert zum Argument n. In der üblichen Notation von Funktionen sollte a_n besser als $a(n)$ geschrieben werden.

$3n - 4$ ist Term für die Berechnung des n-ten Folgegliedes.

3.1.3. Rekursion und Explikation

Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B. $3n - 4$, dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \wedge a_n = a_{n-1} + 3$$

TL;DR

Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

3.2. Verschiedene Folgen

3.2.1. Geometrische Folgen

Eine Folge (a_n) heißt geometrisch, wenn $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Es gibt genau ein $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Oder anders gesagt

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Für jede geometrische Folge (a_n) gilt $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, weil $a_1 = a_1 \cdot q^0$, weil q^0 für $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ immer 1 ist.

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$
$$a_3 = a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2$$
$$\dots$$

3.2.2. Konstante Folgen

q[9] darf nicht 1 sein, denn folglich wäre $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n$.

Solche Folgen nennen wir **konstante Folgen**.

3.2.3. Alternierende Folgen

Folgen, deren aufeinanderfolgende Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen, nennen wir **alternierend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

3.3. Monotonieverhalten

3.3.1. Strenge Monotonie

Eine Folge (a_n), deren nächstes Folgeglied immer größer ist als das vorhergehende, nennt man **streng monoton steigend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Nicht streng monoton steigend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Wenn das nächste Folgeglied immer kleiner ist als das vorhergehende, dann nennt man sie analog dazu **streng monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Nicht streng monoton fallend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

3.3.2. Beispielbeweis

Betrachten wir die Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$.

3.3.3. Einfache Monotonie

Folgen, die auch aufeinanderfolgende gleiche Folgeglieder aufweisen, sonst allerdings monoton steigen oder fallen, nennt man **monoton steigend** bzw. **monoton fallend**.

[9] siehe Abschnitt 3.2.1

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$
$$\text{bzw. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

4. Beweise

4.1. Beweistechniken

4.1.1. Hinrichtung und Rückrichtung

Beweise können *Genau dann, wenn ...* Aussagen, die in zwei Richtungen funktionieren sein.

4.1.2. Satz vom Nullprodukt als Beispiel

$a \cdot b = 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn $a = 0 \lor b = 0$.

Hinrichtung „$\Longrightarrow$"

1. Wir nehmen an, dass $a \cdot b = 0$ Sei nun $a \neq 0$. Jetzt können wir durch Null teilen.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \qquad \mid \div a \\ b &= 0 \end{aligned}$$

2. Analog gilt dies auch für $b \neq 0$.

Es folgt, dass wenn $a \cdot b = 0$, muss mindestens einer der Faktoren a oder b Null sein.

Rückrichtung „$\Longleftarrow$"

1. Wir nehmen an, dass $a = 0$. Somit gilt

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

2. Analog gilt dies für $b = 0$.

Es folgt, dass wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, dann ist auch das Produkt Null.

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$