Betrachtungen der Tafel und andere Überlegungen

Mathematik

J. F.

2026.01.29

Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Zahlbereiche

1.1. Mengen

1.1.1. Definition: Definition nach Cantor
Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** der Menge heißen, zu einem Ganzen.

1.1.2. Bemerkung: Mengeneigenschaften
Sei M eine Menge. Dann heißt

- $x \in M$, x ist ein Element von M.
- $x \notin M$, x ist kein Element von M.
- $M = \emptyset$, M ist eine Leere Menge, die kein Element enthält, also $M = \{\}$.
- $|M|$ heißt **Mächtigkeit** oder Kardinalzahl von M und gibt an, wie viele Elemente M enthält.

Wir können Mengen auf verschiedene Weisen darstellen.

- Wortvorschriften

  Z.B. M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar ist.

- Auflistung der Elemente

  Z.B. $M = \{0; 5; 10; \ldots\}$

- Definition der Eigenschaften

  Z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 5 = 0\}$

- Graphisch, z.B. als Venn-Diagramm.

1.1.3. Definition: Mengenbeziehungen
Seien X und Y Mengen.

- X heißt **Teilmenge** von Y ($X \subseteq Y$), wenn jedes Element von X auch in Y ist.
- X heißt **echte Teilmenge** von Y ($X \subset Y$), wenn jedes Element von $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.
- Die Mengen X und Y heißen **gleich**, wenn $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$.

1.1.4. Definition: Vereinigung, Durchschnitt und Mengendifferenz
Seien X und Y Mengen. Dann heißt

- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ **Durchschnitt** von X und Y.

  TL;DR
  Durchschnitt ist eine Schnittmenge.

- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ **Vereinigung** von X und Y.
- $X \mathbin{\dot\cup} Y := \{x \mid x \in X \mathbin{\dot\vee} x \in Y\}$ **disjunkte Vereinigung** von X und Y.
- $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$ **Differenz** von X und Y.

1.1.5. Definition: Kartesisches Produkt
Seien X und Y Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt definiert durch die Kreuzmenge aus beiden.

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

[1]

1.2. Zahlbereiche

1.2.1. Bemerkung: Bezeichnung der Zahlbereiche
$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{N}^*$ Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+$ Menge der positiven rationalen Zahlen

$-\mathbb{Q}^+$ Menge der negativen rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}^+$ und $-\mathbb{R}^+$ analog, sodass $\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

2. Abbildungen

2.1. Abbildung, Bild, Urbild, Definitions- und Wertebereich

2.1.1. Definition: Abbildungen und Funktionen
Es seien X und Y nichtleere Mengen.

1. Eine Vorschrift f, die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt **Abbildung** von X nach Y.

   $\forall x \in D_f \subseteq X$ gibt es genau ein $y = f(x) \in Y$.

   $$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

   Handelt es sich bei X und Y um reine Zahlenmengen (z.B. $\mathbb{R}$), so bezeichnen wir die Abbildung f auch als **Funktion**.
2. D_f ist die **Definitionsmenge**[3] von der Vorschrift f.
3. B_f ist die **Bildungsmenge**[3] von f, wobei $B_f = \left\{y \in Y \mid y = f(x) \text{ mit } x \in D_f\right\}$
4. $f(x) \in Y$ heißt **Bildpunkt** bzw. **Funktionswert** von x unter f.

   Ist $y \in Y$, so heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ **ein Urbild** bzw. **Argument** von y unter f.
5. Die Menge aller Urpunkte von y unter f bezeichnen wir mit $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Zu f^{-1} sagen wir auch **das Urbild** von y unter f.

   TL;DR
   Das Urbild ist die Menge aller **Urbilder**.

   $X = D_f$ heißt **Definitionsbereich** von f und $Y = B_f$ heißt **Wertebereich** von f.

[1] $(x; y)$ ist ein geordnetes Paar[2].
[2] $(x; y) = (v; w) \Leftrightarrow x = v \quad y = w$
[3] siehe Abschnitt 3.1.2 für Funktionen

Die Menge $im(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X\}$ mit $f(x) = y$ heißt **Bild** von f.

6. Die Menge $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$[4] heißt der Graph von f.
7. Zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen gleich ($f = g$), wenn $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$.

2.1.2. Definition: Beispiel
Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

Für $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$ wäre das Bild $im(f(X_1)) = [0; 1]$.

Für $Y_1 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ wäre $f^{-1}(Y_1) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}\right\}$ oder $f^{-1}(Y_1) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$.

Der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{Z}$ und der Wertebereich $B_f = [-1; 1]$.

2.1.3. Satz: Satz über Bilder und Urbilder
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A, A_1, A_2 \subset X$ und $B, B_1, B_2 \subset Y$. Dann gilt

1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
3) $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$
4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
5) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
6) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

2.1.4. Bemerkung: Verschiedene Abbildungen

(1) Es sei X eine nichtleere Menge. Die **Identität** auf X ist definiert durch

$$\begin{aligned} Id_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(2) Sei $y_0 \in Y$ fixiert. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\to Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

konstante Abbildung.

(3) Ist $X \subset \mathbb{R}$, so heißt jede Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ **reelle Funktion**.

2.1.5. Bemerkung: Beispiel
Die Logarithmusfunktion ist eine reelle Funktion.

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

[4] siehe Abschnitt 1.1.5

2.2. Verkettung von Abbildungen

2.2.1. Definition: Verkettung
Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) von f und g.

Wir sagen auch „g nach f", d.h. f wird zuerst angewendet, danach g.

2.2.2. Satz: Assoziativität
Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ Abbildungen.

Dann sind die Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f))(h \circ g) \circ f$$

Dies nennt man **Assoziativität der Verkettung**.

2.3. Abbildungseigenschaften

2.3.1. Definition: Surjektivität, Injektivität und Bijektivität
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **surjektiv**. wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Rechtstotalität**. Man könnte die Surjektivität einer Abbildung mit $f : X \twoheadrightarrow Y$ ausdrücken.

TL;DR
Eine Abbildung ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **mindestens** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

In der Sprache der Relationen spricht man von **Linkseindeutigkeit**. Man könnte die Injektivität einer Zuordnung mit $f : X \hookrightarrow Y$ ausdrücken, wobei der Pfeil eine Ähnlichkeit mit einer Teilmenge ($\subset$) aufweist.

TL;DR
Eine Abbildung heißt injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ **maximal** ein $x \in X$ gibt.

Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie sowohl subjektiv als auch injektiv ist. Diese Abbildung nennen wir auch eineindeutige Zuordnung.

TL;DR
Eine Abbildung ist bijektiv, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird und jedes $y \in Y$ einem $x \in X$ zugeordnet wird.

2.3.2. Definition: Beispielbeweis
Betrachten wir die Abbildung $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ mit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$. Wir wollen nun herausfinden, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv, also beides, ist.

1. Damit f **injektiv** ist, muss die Definition[5] erfüllt sein. Also muss für $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1 = x_2$. Dafür setzen wir sie gleich.

[5] siehe Abschnitt 2.3.1

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_1+1} &= \frac{x_2}{x_2+1} && \mid \cdot (x_2+1) \\
\frac{x_1x_2+x_1}{x_1+1} &= x_2 && \mid \cdot (x_1+1) \\
x_1x_2+x_1 &= x_1x_2+x_2 && \mid -x_1x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Somit ist f injektiv. Da $x_1 = x_2$ ist die Definition erfüllt.

2. Damit f **surjektiv** ist, muss auch die Definition[5] $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ erfüllt sein.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x}{x+1} && \mid \cdot (x+1) \\
yx + y &= x && \mid -y-x \\
yx - x &= -y \Leftrightarrow x(y-1) = -y && \mid \cdot \frac{1}{y-1} \\
x &= -\frac{y}{y-1}
\end{aligned}$$

$-\frac{y}{y-1}$ ist für $y = 1$ nicht definiert und somit ist f nicht surjektiv, da ein $y \in Y$ existiert für das es kein $x \in X$ gibt.

Quod erat Demonstrandum

3. f ist kann folglich nicht **bijektiv** sein, da es dafür surjektiv und injektiv sein müsste. Es wäre bijektiv für $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.3.3. Hinrichtungs- und Rückrichtungsbeweise

Injektivität

1) „$\Longrightarrow$“

Sei f injektiv.
Wir fixieren ein Element $x_0 \in X$ und definieren $g : Y \to X$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x & \text{falls } y \in im(f) \land f(x) = y \\ x_0 & \text{falls } y \notin im(f) \end{cases}$$

Dann ist g **wohldefiniert** und es gilt $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$.
g ist also eine Linksinverse[6] von f.

„$\Longleftarrow$“

Sei $g : Y \to X$ eine Linksinverse von f.
Seien $x_1, x_2 \in X$ zwei Punkte mit $f(x_1) = f(x_2)$.
Dann gilt $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ und somit $x_1 = x_2$.
Folglich ist f injektiv.

Quod erat Demonstrandum

Surjektivität

1) „$\Longrightarrow$“

[6] siehe Abschnitt 2.4.3

Sei f surjektiv.
Für jedes $y \in Y$ wählen wir ein Urbild $x(y) \in X$ aus.
Dann ist die Abbildung $h : Y \to X$ mit $h(x) := x(y)$ wohldefiniert und es gilt $f(h(y)) = f(x(y)) = y$ für alle $y \in Y$.
h ist also eine Rechtsinverse von f.

2) „$\Longleftarrow$“

Sei $h : Y \to X$ eine Rechtsinverse von f.
Dann gilt $f(h(y)) = y$ für alle $y \in Y$.
Also ist $h(y) \in X$ ein Urbild von y unter f.
Folglich ist f surjektiv.

Quod erat Demonstrandum

2.4. Umkehrabbildung

2.4.1. Definition: Inverse Abbildung
Ist die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ zu f definiert durch

$$f^{-1} : Y \to X$$
$$y \mapsto f^{-1}(y)$$

$y \mapsto f^{-1}(y) :=$ das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f.

Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls bijektiv und es gilt aufgrund der Definition

$$f^{-1} \circ f = Id_X$$
$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

2.4.2. Definition: Beispiel

(1) $Id_X : X \to X$ ist bijektiv.

$$Id_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

$$(Id_X)^{-1} = Id_X$$

(2) Die konstante Abbildung $c_{y_0} : X \to Y$ ist weder injektiv noch surjektiv, unter der Bedingung, dass X und Y mehr als ein Element enthalten.

$\left(c_{y_0}\right)^{-1}$ ist zudem keine Abbildung mehr.

(3) Die reelle Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\ln : x \mapsto \ln(x)$ ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung wäre

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$\exp : x \to e^x$$

2.4.3. Satz: Satz über Links- und Rechtsinverse
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt

(1) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = Id_X$.
g heißt **Linksinverse** von f.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $h : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ h = Id_Y$.
h heißt **Rechtsinverse** von f.

(3) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, die sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist. D.h. es gilt $g \circ f = Id_X \land f \circ g = Id_Y$, wobei g eindeutig bestimmt ist, und $g = f^{-1}$.

Nur für **bijektive** Abbildungen gibt es Umkehrabbildungen. Bei nur surjektiv oder injektiven Abbildungen existiert ein Urbild f^{-1}, eine Menge mit keinem, einem oder anderen Elementen.

2.4.4. Satz: Satz über die Verkettung bijektiver Abbildungen
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei bijektive Abbildungen.
Dann ist auch ihre Verkettung $g \circ f$ bijektiv und für ihre inversen Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2.4.5. Satz: Beweis
Für die inversen Abbildungen $f^{-1} : Y \to X$ und $g^{-1} : Z \to Y$ gilt[7]

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= Id_X & \qquad g^{-1} \circ g &= Id_Y \\ f \circ f^{-1} &= Id_Y & \qquad g \circ g^{-1} &= Id_Z \end{aligned}$$

Wegen der Assoziativität[8] von Verknüpfungen gilt

$$\begin{aligned} &(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ (Id_Y) \circ f \\ &\qquad \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_X \\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = Id_X \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt analog dazu

$$\begin{aligned} &(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ (Id_Y) \circ g^{-1} \\ &\qquad \Leftrightarrow g \circ g^{-1} = Id_Z \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_Z \end{aligned}$$

Somit gilt, falls f und g bijektiv sind, $\exists f^{-1} \land g^{-1}$, die eindeutig bestimmt, d.h. ebenfalls bijektiv sind.

$$\begin{aligned} &\exists f^{-1} \land g^{-1} \\ \Rightarrow &\exists f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

[7] siehe Abschnitt 2.4.1
[8] siehe Abschnitt 2.2.2

3. Funktionen

3.1. Grundlagen zum Funktionsbegriff

3.1.1. Definition: Zahlenmengenkriterium

Sei f eine Zuordnung von der Menge X in die Menge Y, d.h. $f : X \to Y$, wobei X, Y Zahlenmengen sind. f heißt **Funktion** genau dann, wenn jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird.

3.1.2. Bemerkung: Begriffe

(1) Die Menge X ist der **Definitionsbereich** D_f von f. Die Elemente von X heißen **Argumente**.

(2) Die zugeordneten Elemente aus der Menge Y heißen **Funktionswerte**. Sie bilden den **Wertebereich** W_f der Funktion. Es gilt $W_f \subseteq Y$.

(3) Für die FUnktionswere y wird auch die Symbolik $f(x)$ verwendet, d.h. $f(x)$ ist der Funktionswert zum Argument x, z.B. $f(2) = 3$ bedeutet, dass 3 der Funktionswert des Arguments 2 ist.

(4) Die Angabe einer Funktion mittels Funktionsterm wird entweder mit $f : f(x) = 2x + 1$ oder mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$ festgelegt.

Der Term wird bei ersterer Angabe *Funktion f: Funktionswert ist gleich Funktionsterm* gesprochen.

3.1.3. Grundlegende Funktionstypen

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f(x) = mx + n \; m, n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt die Abbildung **lineare Funktion**[9]. Ihr Graph[10] eine Gerade.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f(x) = ax^2 + bx + c \; a, b, c \in \mathbb{R} \; a \neq 0$.

Dann heißt die Abbildung **quadratische Funktion**[11]. Ihr Graph ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel.

(3) Sei q eine rationale Zahl.

Dann heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^q$ **Potenzfunktion**. Insbesondere heißt die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$ mit $m \in \mathbb{N}$ **Wurzelfunktion**.

(4) Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein **Polynom**.

Dann heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = p(x)$ **ganzrationale Funktion**. Der höchste Exponent mit $a_k \neq 0$ heißt **Grad** von p und a_0 bis a_n heißen **Koeffizienten**.

(5) Sind p und q ganzrationale Funktionen, so nennt man die Funktion f mit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine **rationale Funktion**[12].

Die Funktion f ist an den Nullstellen[13] ihres Nenners q nicht definiert. Diese Nullstellen heißen **Definitionslücken** von f und gehören nicht zum Definitionsbereich.

(6) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**, da das Argument im Exponenten steht. b heißt Basis.

(7) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a \cdot \log_{b(x)}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0, b \neq 1$ heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis b.

[9] siehe Abschnitt 3.6
[10] siehe Abschnitt 2.1.1
[11] siehe Abschnitt 3.7
[12] siehe Abschnitt 3.9
[13] siehe Abschnitt 3.1.4

(8) Die Funktionen $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $s(x) = \sin(x)$ und $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $c(x) = \cos(x)$ heißen **Sinusfunktion** und **Kosinusfunktion**. Des Weiteren heißt die Funktion t mit $\tan(x) = \frac{s(x)}{c(x)}$ **Tangensfunktion**. s, c und t sind die elementaren **trigonometrischen Funktionen**.

3.1.4. Definition: Nullstellen
Für eine Funktion f ist $x_N \in D_f$ eine Nullstelle von f, wenn $f(x_N) = 0$.

3.2. Symmetrie

3.2.1. Definition: Gerade Funktionen
Bei geraden Funktionen haben **Gegenzahlen** den gleichen Funktionswert.

$$f(x) = f(-x)$$

Gerade Funktionen sind **achsensymmetrisch**.

3.2.2. Definition: Beispielbeweis
Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^4 - 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (-x)^4 - 3 &= x^4 - 3 \\ ((-x)(-x))^2 - 3 &= x^4 - 3 \\ \left(x^2\right)^2 - 3 &= x^4 - 3 \\ x^4 - 3 = x^4 - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

Die Funktion f ist achsensymmetrisch und gerade.

3.2.3. Definition: Ungerade Funktionen
Bei ungeraden Funktionen haben Gegenzahlen Gegenzahlen als Funktionswerte.

$$f(x) = -f(-x)$$

Ungerade Funktionen sind **punktsymmetrisch**.

3.2.4. Satz: Exponentenkriterium für Symmetrie ganzrationaler Funktionen
Wir betrachten die Funktionsgleichung **ganzrationaler Funktionen** in Polynomform.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

(1) Hat x in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten, so ist die Funktion **gerade** und **achsensymmetrisch**, denn es gilt

$$\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$$

(2) Hat x in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten, so ist die Funktion ungerade und punktsymmetrisch, denn es gilt

$$\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$$

3.2.5. Satz: Beweis für Achsensymmetrie

$$(-x)^{2n} = \left((-x)^2\right)^n = x^{2n}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_{2n}x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + \dots + a_0x^0 \\
f(-x) &= a_{2n}(-x)^{2n} + a_{2(n-1)}(-x)^{2(n-1)} + \dots + a_0(-x)^0 \\
f(-x) &= a_{2n}x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + \dots + a_0x^0 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3.3. Verhalten

3.3.1. Definition: Monotonie

Eine Funktion f ist streng monoton fallend, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3.3.2. Definition: Globalverhalten

Sei f eine Funktion. Das **Globalverhalten** von f beschreibt das Verhalten der Funktionswerte, wenn die Argumente unendlich groß oder unendlich klein werden.

3.3.3. Satz: Globalverhalten bei ganzrationalen Funktionen

Der Graph[14] einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie der Graph von g mit $g(x) = a_nx^n$.

3.3.4. Satz: Beweis

Sei f mit $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ eine ganzrationale Funktion. Dann gilt mit $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(x^n (a_n)\right) = \lim_{x\to\infty} a_nx^n \\
&= \lim_{x\to\infty} g(x)
\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3.4. Verschiebung

3.4.1. Satz: Verschiebung einer Funktion in y-Richtung

Um eine beliebige Funktion $f(x)$ um c Einheiten in y-Richtung zu verschieben, sei die verschobene Funktion $f^*(x) = f(x) + c$.

3.4.2. Satz: Verschiebung einer Funktion in x-Richtung

Um eine beliebige Funktion $f(x)$ um d Einheiten in x-Richtung zu verschieben, sei die verschobene Funktion $f^*(x) = f(x - d)$.

3.5. Grenzwerte

3.5.1. Definition: Syntax und Semantik

Betrachten wir $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Γ_f, der Graph[14] von f, verläuft für $x \longrightarrow \infty$ gegen $y = 1$ und für $x \to -\infty$ gegen $y = \infty$. Um das kurz und knapp auszudrücken, wird die *Limes*-Schreibweise[15] verwendet.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

Der *Limes* von $f(x)$ für x gegen unendlich ist 1. D.h., dass sich die Funktionswerte für sehr große x-Werte beliebig nah an $y = 1$ annähern, diesen aber nicht unbedingt erreichen.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

3.5.2. Satz: Grenzwerte für Funktionen

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und existieren[16] ihre Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = c$, dann gilt Folgendes.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = b + c$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, falls $b, g \neq 0$.

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c}$

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} (a \cdot f(x)) = a \cdot b$

3.5.3. Bemerkung: Lokales Grenzvertverhalten

Für $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ mit $x_0 \in D$ existieren ein linksseitiger und ein rechtsseitiger Grenzwert.

Der linksseitige Grenzwert nähert sich von **links nach rechts** an und hat verschiedene Darstellungsmöglichkeiten.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^-} f(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ mit } x < x_0 \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \\ &= \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \end{aligned}$$

Der rechtsseitige Grenzwert nähert sich von **rechts nach links** an und hat verschiedene Darstellungsmöglichkeiten.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^+} f(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ mit } x > x_0 \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \\ &= \lim_{x \searrow x_0} f(x) \end{aligned}$$

Zur Berechnung nutzt man eine konvergente Folge[17].

[14] siehe Abschnitt 2.1.1
[15] siehe römisches Germanien
[16] konvergieren nicht gegen Unendlich, sondern gegen eine Zahl
[17] siehe Abschnitt 4

$$(x_n) : x_n = x_0 + \frac{1}{n} \text{ für } x > x_0$$

$$(x_n) : x_n = x_0 - \frac{1}{n} \text{ für } x < x_0$$

Danach ersetzt man in der Grenzwertberechnung jedes Argument x durch die Folge.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x)$$

3.5.4. Bemerkung: Beispiel

Betrachten wir $f(x) = x^2$ und $x_0 = 2$.

Zuerst berechnen wir den linksseitigen Grenzwert.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = \lim_{n \to \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \\ = \lim_{n \to \infty} \left(4 - \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \\ = 4\end{aligned}$$

Nun kann man ihn auch rechtsseitig bestimmen.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 \\ = \lim_{n \to \infty} \left(4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ = 4\end{aligned}$$

3.5.5. Satz: Satz für die Stetigkeit

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D_f$ genau dann stetig, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und mit dem Funktionswert von x_0 übereinstimmen.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Nehmen wir das Beispiel aus Abschnitt 3.5.4.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \to 2^+} = 2$$

Somit ist f stetig.

3.5.6. Definition: Unstetigkeitsstelle

Ist eine Funktion f aus der Stelle $x_0 \in D_F$ nicht stetig, so heißt x_0 Unstetigkeitsstelle.

TL;DR

Ist x_0 nicht stetig, so ist x_0 nicht stetig.

Es wird zwischen Unstetigkeitsstellen **erster** und **zweiter Art** unterschieden.

1. x_0 ist eine Unstetigkeitsstelle **erster Art**, falls links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und endlich sind, aber nicht mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmen.

Falls links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen wird x_0 als **hebbare Unstetigkeitsstelle** bezeichnet, da die Stelle durch Änderung von $f(x_0)$ stetig werden kann.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Falls links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen wird x_0 als **Sprungstelle** (mit Sprung σ) bezeichnet, da die Funktion sinnbildlich springt.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0) \qquad \sigma = \left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right|$$

2. x_0 ist eine Unstetigkeitsstelle **zweiter Art**, falls mindestens der links- oder der rechtsseitige Grenzwert nur **uneigentlich** oder **gar nicht** existieren.

3.6. Lineare Funktionen

3.6.1. Definition: Funktionsgleichung

Ist f eine ganzrationale Funktion 1. Grades, so wird sie auch **lineare Funktion** genannt. Ihr Graph ist eine **Gerade**.

Ihre Funktionsgleichung lautet $f(x) = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$, wobei m die **Steigung** der Geraden und $Y(0|n)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse ist.

3.6.2. Satz: Steigung linearer Funktionen

Seien f und g zwei lineare Funktionen mit den Steigungen m_f und m_g. Dann gilt

1) Die Graphen[14] von f und g sind genau dann **parallel** zueinander, wenn $m_f = m_g$.
2) Die Graphen von f und g sind genau dann **orthogonal** zueinander, wenn $m_f \cdot m_g = -1$ gilt.

Falls man die Steigung einer Geraden g berechnen wollte, die **orthogonal** zur Geraden f ist, kann man diese Formel umstellen.

$$\begin{aligned} m_f \cdot m_g &= -1 \qquad &| \div m_f \\ m_g &= -\frac{1}{m_f} = -(m_f)^{-1} \end{aligned}$$

3.6.3. Satz: Beweis

Seien f und g zwei lineare Funktionen mit den Steigungen m_f und m_g.

1) Wir nehmen an, dass f und g genau einen Schnittpunkt besitzen. Dann $\exists! x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ m_f x + n_f &= m_g x + n_g \qquad &\text{mit } m_f = m_g = m \\ mx + n_f &= mx + n_g \qquad &| -mx \\ n_f &= n_g \end{aligned}$$

Für $n_f \neq n_g$ gilt $\nexists x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$. Zwei Geraden, die keinen gemeinsamen Punkt haben, sind **parallel**.

Für $n_f = n_g$ gilt $\forall x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$. Zwei Geraden, die unendlich viele gemeinsame Punkte haben, sind **identisch**.

Quod erat Demonstrandum

2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit[18] legen wir fest, dass sich f und g im Ursprung unter einem rechten Winkel treffen.

- Es gilt $m_f = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei Δx und Δy die Katheten eines Steigungsdreiecks von f sind.
- Dreht man die Gerade f samt Steigungsdreieck um 90° um den Ursprung, so erhält man die gerade g, mit kongruentem Steigungsdreieck und $m_g = \frac{\Delta x}{-\Delta y}$.
- Es folgt $m_f \cdot m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta x}{-\Delta y} = -1$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

3.7. Quadratische Funktionen

3.7.1. Definition: Definition

Eine quadratische Funktion ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades mit der **allgemeinen Form**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der Graph[14] ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel. Maßgeblich für die Lage der Parabel ist ihr **Scheitelpunkt**. Dessen Koordinaten $S(x_S \mid y_S)$ lassen sich direkt aus der **Scheitelpunktform** der Funktionsgleichung ablesen

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_2$$

3.7.2. Satz: Nullstellen quadratischer Funktionen

(1) Die Nullstellen[19] einer quadratischen Funktion in Normalform $f(x) = x^2 + px + q$ können mit der *pq*-Formel bestimmt werden.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(2) Sind x_1 und x_2 Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$, so lässt sich der Funktionsterm in **faktorisierter Form** schreiben.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Die Nullstellen lassen sich direkt aus den **Linearfaktoren** $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ ablesen.

3.7.3. Satz: Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $0 = x^2 + px + q$, dann gilt

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

3.7.4. Satz: Beweis

Seien $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Dann gilt

- für die Summe der Nullstellen

[18] Nur gewisse Fälle werden aufgezeigt, da die restlichen Fälle *trivial* sind.

[19] siehe Abschnitt 3.1.4

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\
&= -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p
\end{aligned}
$$

Quod erat Demonstrandum

- für das Produkt der Nullstellen

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\
&= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \qquad \text{dritte binomische Formel} \\
&= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q
\end{aligned}
$$

Quod erat Demonstrandum

Alternativ lassen sich diese Zusammenhänge auch mit dem Ausmultiplizieren der faktorisierten Form aufzeigen.

Somit gilt auch, dass **ganzzahlige Nullstellen Teiler** von q sein[20] müssen und die **Summe der Nullstellen die Gegenzahl** von p sein muss.

3.8. Ganzrationale Funktionen

3.8.1. Satz: Fundamentalsatz der Algebra für reelle Zahlen
Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ ein Polynom n-ten Grades. Dann hat f höchstens n Nullstellen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

3.8.2. Satz: Beweis
Induktionsanfang[21]

Ist $n = 1$, dann ist $f_1(x) = a_1 x + a_0$. f_1 hat genau eine Nullstelle.

$$x_N = -\frac{a_0}{a_1}$$

Induktionsvorraussetzung

Es gelte, dass f ein Polynom n-ten Grades ist. Dieses hat höchstens n Nullstellen.

Induktionsbehauptung

Ein Polynom vom Grad $n + 1$ hat höchstens $n + 1$ Nullstellen.

Nun folgt die Argumentation.

1. f hat keine reelle Nullstelle. Folglich hat f höchstens $n + 1$ Nullstellen.

[20] siehe Abschnitt 3.8.9
[21] siehe Abschnitt 6.1.4

2. f hat mindestens eine reelle Nullstelle x_N. Diese kann nach dem Abspaltungssatz[22] abgespalten werden.

$$f(x) = (x - x_N) \cdot g(x)$$

g ist ein Polynom n-ten Grades und hat somit höchstens n Nullstellen[23]. Zusammen mit der Abgespaltenen Nullstelle ergibt dies $n + 1$ Nullstellen.

Quod erat Demonstrandum

3.8.3. Satz: Satz zur Abspaltung von Linearfaktoren
Sei f eine ganzrationale Funktion n-ten Grades.

Wenn $x_N \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f ist, dann gilt $f(x) = (x - x_N) \cdot g(x)$, wobei g eine ganzrationale Funktion $(n - 1)$-Grades ist.

Wenn f in Polynomform[24] vorliegt, dann ist das Polynom ohne Rest durch den $(x - x_N)$ Linearfaktor teilbar. Das Ergebnis ist g.

3.8.4. Satz: Beweis
siehe Skript

3.8.5. Satz: Zerlegung in Linearfaktoren
Sei f ein Polynom n-ten Grades. f kann genau dann in die Form $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_m) \cdot f_{n-m}(x)$ zerlegt werden, wenn f genau m Nullstellen hat (die nicht alle verschieden sein müssen)[25].

Dabei ist f_{n-m} ein Restpolynom vom Grad $n - m$, das keine weiteren Nullstellen hat.

3.8.6. Definition: Vielfachheit von Nullstellen
Die Vielfachheit von Nullstellen gibt an, wie oft eine Nullstelle in einem Polynom auftritt.

Die Vielfachheit wirkt sich auf den Graphen aus.

3.8.7. Definition: Beispiel
Im Polynom $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^3(x + 4)$ hat die Nullstelle 3 eine Vielfachheit von 3, weil sie dreimal vorkommt.

3.8.8. Bemerkung: Bemerkung
Ist f so weit wie möglich faktorisiert, dann lässt sich die Vielfachheit einer Nullstelle ablesen am Exponenten des zugehörigen Linearfaktoren.

3.8.9. Satz: Teilerkriterium für Nullstellen ganzrationaler Funktionen
Sei f mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich ganzzahligen Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$.

---

[22] siehe Abschnitt 3.8.3
[23] siehe Induktionsvorraussetzung
[24] $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
[25] siehe Abschnitt 3.8.6

Sei x_N mit $x_N \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle von f, dann ist x_N Teiler des absoluten Glieds a_0.[26]

3.8.10. Satz: Beweis

Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, wobei $\forall n \in \mathbb{N} a_n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(x_N) &= 0 \\ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 &= 0 \qquad | - a_0 \\ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x &= -a_0 \\ x_N (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1) &= -a_0 \end{aligned}$$

$$x_N \in \mathbb{Z} \quad (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1) \in \mathbb{Z} \quad \text{folglich} - a_0 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

Durch bloße Multiplikation und Addition auf der einen Seite ist klar, dass $-a_0$ und somit a_0 nur ganzzahlig sein kann.

3.9. Rationale Funktionen

3.9.1. Definition: Zusammensetzung

Es seien $z : z(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ und $n : n(x) = \sum_{j=0}^{l} b_j x^j$ ganzrationale Funktionen[27] mit reellen Koeffizienten a_i bzw. b_j und $a_k \neq 0$ bzw. $b_l \neq 0$. Die Funktion f heißt **rationale Funktion** $f : f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit $n \neq 0$.

3.9.2. Bemerkung: Begriffsnutzungen

(1) z wird **Zählerfunktion** mit dem **Zählergrad** k und n wird **Nennerfunktion** mit dem **Nennergrad** l genannt.

(2) Ist $l = 0$ oder lässt sich $f(x)$ zu einem ganzrationalen Term mit **Definitionslücke** umformen, so ist die rationale Funktion eine ganzrationale Funktion[27].

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{2x^0} = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}$$

(3) Der Definitionsbereich[28] einer rationalen Funktion ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_N \mid n(x_N) = 0\}$.

> **TL;DR**
> An der Stelle, an der die Nennerfunktion eine Nullstelle hat, existiert eine Definitionslücke.

(4) Ist $l \neq 0$, so ist f eine **rationale** Funktion.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x} \text{ mit } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$$

(5) Sind $l \neq 0$ und $k < l$, so ist f eine **echt gebrochene rationale** Funktion.

> **TL;DR**
> Unter dem Bruch steht ein größerer Exponent.

[26] siehe Lemma von Gauß
[27] siehe Abschnitt 3.8
[28] siehe Abschnitt 3.1.2

$$f(x) = \frac{x+11}{x^3+8} \text{ mit } D_f \setminus \{-2\}$$

(6) Sind $l \neq 0$ und $k > l$, so ist f eine **unecht gebrochene rationale** Funktion. Der Funktionsterm jeder unecht gebrochenen rationalen Funktion kann unter Verwendung der Linearfaktorzerlegung als Summe eines ganzrationalen und echt gebrochenen rationalen Funktionsterms geschrieben werden.

TL;DR
Unter dem Bruch steht ein kleinerer Exponent.

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x} = 2x + \frac{2}{x^2 - x} \text{ mit } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

3.9.3. Bemerkung: Stellen der Funktion
Die besonderen Stellen einer rationalen Funktion hängen von den Nullstellen der Zähler- und Nennerfunktion ab.

1. Wenn x_N **Nullstelle der Nennerfunktion** ist, aber nicht der Zählerfunktion, dann ist x_N eine **Polstelle**.

   Falls die Vielfachheit der Nullstelle x_N bei der Nennerfunktion und der Zählerfunktion verschieden ist, aber x_N eine **größere Vielfachheit in der Nennerfunktion** hat, so ist x_N auch eine Polstelle.

2. Falls x_N mit gleicher Vielfachheit[29] **Nullstelle der Nennerfunktion als auch der Zählerfunktion** ist, so ist x_N eine **hebbare Definitionslücke**.

   Falls die Vielfachheit der Nullstelle x_N bei der Nennerfunktion und der Zählerfunktion verschieden ist, aber x_N eine **größere Vielfachheit in der Zählerfunktion** hat, so ist x_N auch hebbare Definitionslücke.

3.9.4. Satz: Satz über Asymptoten
Jede **gebrochen rationale Funktion** f[30] mit $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ mit $q(x) \neq 0$ hat zusätzlich zu ihren senkrechten Asymptoten eine weitere Asymptote $a(x)$, sodass

$$f(x) = a(x) + r(x)$$

wobei a eine **ganzrationale Funktion** der Asymptote und r eine **echt gebrochene Funktion** des Restterms ist.

3.9.5. Bemerkung: Verhalten im Unendlichen
a bestimmt das verhalten von f im Unendlichen, während r das Verhalten an den Polstellen[31] bestimmt.

3.9.6. Bemerkung: Beispiele
Beispiel I.

[29] siehe Abschnitt 3.8.6
[30] nach der Definition aus Abschnitt 3.9
[31] siehe Abschnitt 3.9.3

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{5x}{x^2 - x} \qquad x_{\text{Polstelle}} = 1 \\
&= \frac{x^2 \cdot \frac{5}{x}}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \qquad \text{Ausklammern der größten Nennerpotenz} \\
&= \frac{\frac{5}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \overset{x \to \pm\infty}{\to} \frac{0}{1} = 0 \qquad \Rightarrow a(x) = 0
\end{aligned}
$$

Die Asymptote liegt also auf der x-Achse.

Beispiel II.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{2x + 1}{3x - 6} \qquad x_{\text{Polstelle}} = 2 \\
&= \frac{x \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x \cdot \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \qquad \text{Ausklammern der größten Nennerpotenz} \\
&= \frac{2 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{6}{x}} \overset{x \to \pm\infty}{\to} \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow a(x) = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Beispiel III.

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x^2 - x}{2x - 1} \qquad x_{\text{Polstelle}} = \frac{1}{2} \\
&= \frac{x \cdot (x - 1)}{x\left(2 - \frac{1}{x}\right)} \qquad \text{Ausklammern der größten Nennerpotenz} \\
&= \frac{x - 1}{2 - \frac{1}{x}} \overset{x \to \pm\infty}{\to} \pm\infty \qquad \Rightarrow a(x) = \frac{x - 1}{2}
\end{aligned}
$$

3.10. Trigonometrische Funktionen

3.10.1. Bemerkung: Eigenschaften der allgemeinen trigonometrischen Funktionen
Sei $k \in \mathbb{Z}$.

Eigenschaft	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
Definitionsbereich D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$
Wertebereich W	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$
Nullstellen x_N	$x_N = k\pi$	$x_N = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x_N = k\pi$
Periodendauer	$p = 2\pi$	$p = 2\pi$	$p = \pi$
andere Darstellung	$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$		$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

3.10.2. Definition: Allgemeine Form der Sinus- und Cosinusfunktion

$$s(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$$

bzw.

$$c(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$$

a beschreibt dabei die Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung oder die Spiegelung an der x-Achse und somit die **Amplitude**.

b beschreibt die Streckung bzw. Stauchung in x-Richtung oder die Spiegelung an der y-Achse und somit die **Periode** mit der Periodendauer p.

$$p = \frac{2\pi}{|b|}$$

c beschreibt die Verschiebung in x-Richtung und somit die **Phasenverschiebung**.

d beschreibt die Verschiebung in y-Richtung und somit die **Ruhelage**.

$$x_{\sin_1} = \frac{2k\pi - \arcsin\left(\frac{d}{a}\right) - c}{b} \qquad x_{\sin_2} = \frac{(2k+1)\pi + \arcsin\left(\frac{d}{a}\right) - c}{b}$$

$$x_{\cos_1} = \frac{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi + \arcsin\left(\frac{d}{a}\right) - c}{b} \qquad x_{\cos_2} = \frac{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - \arcsin\left(\frac{d}{a}\right) - c}{b}$$

3.10.3. Definition: Herleitung der allgemeinen Nullstellen des Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned}
s(x) = a \cdot \sin(bx+c) + d = 0 & \\
a \cdot \sin(bx+c) + d = 0 & \qquad \mid -d \\
a \cdot \sin(bx+c) = -d & \qquad \mid \div a \\
\sin(bx+c) = -\frac{d}{a} & \qquad \mid \arcsin() \\
bx + c = -\arcsin\left(\frac{d}{a}\right) & \qquad \mid -c \\
bx = -\arcsin\left(\frac{d}{a}\right) - c & \qquad \mid \div b \\
x = \frac{-\arcsin\left(\frac{d}{a}\right) - c}{b} & \qquad \mid \div b
\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion periodisch ist, wäre noch ein 2π zu ergänzen. Analog sind die weiteren Nullstellen zu bestimmen. Der Beweis ist dem Leser überlassen.

3.11. Änderungsraten

3.11.1. Definition: Lokale Änderungsrate
Die lokale Änderungsrate bildet man über den Grenzwert des **Differenzenquotienten**.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dieser Wert heißt **Ableitung** $f'(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0.

Der Grenzwert gibt die lokale Änderungsrate an der Stelle x_0 an und entspricht der **Steigung der Tangente** an f in $P(x_0|f(x_0))$

3.11.2. Definition: Differenzierbarkeit
Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sie heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, falls der Differentialquotient, der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, existiert.

$$
\begin{aligned}
&f'(x_0)\\
&\quad := \frac{df}{dx}(x_0)\\
&\quad := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}
\end{aligned}
$$

Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f in x_0.

TL;DR
Daraus ließe sich auch die Stetigkeit[32] folgern, denn dann wären links- und rechtsseitiger Grenzwert verschieden.

3.11.3. Bemerkung: Links- und rechtsseitiger Grenzwert bei der Differenzierbarkeit
Damit der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert, müssen wir insbesondere bei abschnittsweise definierten Funktionen prüfen, ob der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

bzw.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

3.11.4. Bemerkung: Beispiel

3.11.5. Definition: Erste Ableitung
Die Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls sie in jedem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ mit $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Dann heißt die Funktion f' **erste Ableitung** von f.

$$f' : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

3.11.6. Definition: Beispielbeweis

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^n\\
\frac{(x_0+h)-x_0^n}{h} &= \frac{x_0^n + nx_0^{n-1}h + ax_0^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x_0^n}{h}\\
&= \frac{h(nx_0^{n-1} + ax_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1})}{h}\\
&= nx_0^{n-1} + ax_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{h\to 0}(nx_0^{n-1} + ax_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) = nx_0^{n-1}$$

3.11.7. Bemerkung: Ableitungsregeln
Seien f, g, u, v differenzierbare Funktionen und $k, c \in \mathbb{R}$ sowie $n \in \mathbb{Q}$.

[32] siehe Abschnitt 3.5.5

1) **Potenzregel**

$$f(x) = x^n$$
$$f'(x) = nx^{n-1}$$

2) **Faktorregel**

$$f(x) = k \cdot g(x)$$
$$f'(x) = k \cdot g'(x)$$

3.11.8. Bemerkung: Beweis der Faktorregel
Sei $f(x) = k \cdot g(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot g(x+h) - k \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(Grenzwertsätze)} \\ f'(x) &= k \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3) **Summenregel**

$$f(x) = h(x) + g(x)$$
$$f'(x) = h'(x) + g'(x)$$

4) **Sinus und Cosinus**

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f''(x) = -\sin(x)$$
$$f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f''''(x) = f(x)$$

5) **Summenregel**

Existieren u' und v'.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$$

6) **Kettenregel**

Existieren u' und v'.

$$f(x) = u(v(x))$$
$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

3.11.9. Bemerkung: Beweis der Kettenregel
Seien $f(x) = u(v(x))$ und u, v zwei differenzierbare Funktionen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{v(x+h) - v(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \\ &= \lim_{h\to 0} u'(v(x)) \cdot v'(x) \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

3.11.10. Bemerkung: Beispiele

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(at^2 + 6\right)^2 \\ u(v) &= v^2 & v(x) &= at^2 + 6 \\ u'(v) &= 2v & v'(x) &= 2at \\ f'(t) &= u'(v(t)) \cdot v'(t) \\ &= 2(at^2 + 6) \cdot 2at \\ &= 4(a^2t^3 + 6at) \\ f'(t) &= 4a^2t^3 + 24at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(3x^2 - x\right)^5 \\ u(v) &= v^5 & v(x) &= 3x^2 - x \\ u'(v) &= 5v^4 & v'(x) &= 6x - 1 \\ f'(x) &= u'(v(x)) \cdot v'(x) \\ f'(x) &= 5\left(3x^2 - x\right)^4 \cdot (6x - 1) \end{aligned}$$

3.12. Extrema

3.12.1. Definition: Lokales Maximum und Minimum
Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$[33].

a) f nimmt in $x_0 \in I$ ein **lokales Maximum** an, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

b) f nimmt in $x_0 \in I$ ein **lokales Minimum** an, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

3.12.2. Satz: Notwendiges Kriterium für lokale Extrema
Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hat f in $x_E \in I$ ein lokales Maximum oder Minimum und ist f in x_E differenzierbar, so gilt $f'(x_E) = 0$.

[33] auf einem reellen Intervall I definiert

3.12.3. Bemerkung: Notwendige Vorraussetzung
Das heißt, wenn $f'(x_E) \neq 0$, ist x_E kein Extremum. **Aber** dies ist nicht hinreichend, um zu sagen, dass x_E ein Extremum ist, falls lediglich $f'(x_E) = 0$.

3.12.4. Satz: Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in x_E zweimal differenzierbar ist.

a) Gilt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) < 0$, hat f in x_E ein **lokales Maximum**.

b) Gilt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$, hat f in x_E ein **lokales Minimum**.

3.12.5. Satz: Vorzeichenkriterium
Wenn $f'(x_E) = 0$ gilt und das Vorzeichen von f' an der Stelle x_E von **Plus nach Minus** wechselt, dann hat der Graph[34] von f an der Stelle x_E einen **Hochpunkt**.

Wenn $f'(x_E) = 0$ gilt und das Vorzeichen von f' an der Stelle x_E von **Minus nach Plus** wechselt, dann hat der Graph von f an der Stelle x_E einen **Tiefpunkt**.

Wenn **kein Vorzeichenwechsel** auftritt, hat der Graph von f an der Stelle x_E einen **Sattelpunkt**.

3.13. Krümmungsverhalten

3.13.1. Definition: Krümmungsverhalten
Die Funktion f heißt im Intervall $[a; b] \subset D_f$ **konvex bzw. linksgekrümmt**, falls ihr Graph[34] **unterhalb** jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_1|f(x_1))$ mit $x_1, x_2 \in [a; b]$ liegt.

Die Funktion f heißt im Intervall $[a; b] \subset D_f$ **konkav bzw. rechtsgekrümmt**, falls ihr Graph[34] **oberhalb** jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_1|f(x_1))$ mit $x_1, x_2 \in [a; b]$ liegt.

3.13.2. Definition: Wendepunkt
Der Graph[34] einer Funktion f besitzt in x_W einen **Wendepunkt**, wenn dort der Graph von f von einer Links- in eine Rechtskrümmung[35] oder umgekehrt übergeht.

3.13.3. Definition: Sattelpunkt
Ein **Sattelpunkt** ist ein Wendepunkt[36] mit waagerechter Tangente[37].

3.13.4. Satz: Krümmungsverhalten
Die Funktion f sei auf einem Intervall $I \subset D_f$ zweimal differenzierbar.

Gilt $f''(x_W) > 0$, so ist der Graph[34] von f auf I **linksgekrümmt** bzw. **konvex**[35].

Gilt $f''(x_W) < 0$, so ist der Graph von f auf I **rechtsgekrümmt** bzw. **konkav**.

3.13.5. Satz: Notwendiges Kriterium für Wendepunkte
Sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hat f in x_W einen Wendepunkt und ist f zweimal differenzierbar, so gilt $f''(x_W) = 0$.

[34] siehe Abschnitt 2.1.1
[35] siehe Abschnitt 3.13.1
[36] siehe Abschnitt 3.13.2
[37] *Wendetangente*

3.13.6. Satz: Erstes hinreichendes Kriterium für Wendepunkte (Vorzeichenwechsel)
Wenn f in der Umgebung von x_W einen Vorzeichenwechsel von **positiv zu negativ** vollzieht, dann hat f an der Stelle x_W einen **Links-Rechts-Wendepunkt**[36].

Wenn f in der Umgebung von x_W einen Vorzeichenwechsel von **negativ zu positiv** vollzieht, dann hat f an der Stelle x_W einen **Rechts-Links-Wendepunkt**.

3.13.7. Satz: Zweites hinreichendes Kriterium für Wendepunkte (Dritte Ableitung)
Falls $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) < 0$ gilt, so hat f an der Stelle x_W einen **Links-Rechts-Wendepunkt**.

Falls $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) > 0$ gilt, so hat f an der Stelle x_W einen **Rechts-Links-Wendepunkt**.

4. Folgen

4.1. Der Folgenbegriff

4.1.1. Definition: Folgen
Eine Funktion[38], deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heißt **Zahlenfolge**, kurz **Folge**.

4.1.2. Bemerkung: Notation
Im Allgemeinen wird die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben.

$$(a_n) : a_n = 3n - 4$$

(a_n) ist die Folgenbezeichnung.

n ist der Folgenindex, die Indexzahl, mit $n \in \mathbb{N}$, wobei zumeist $n \geq 1$ n das Argument.

a_n ist das n-te Folgenglied, d.h. der Funktionswert zum Argument[39] n. In der üblichen Notation von Funktionen sollte a_n besser als $a(n)$ geschrieben werden.

$3n - 4$ ist Term für die Berechnung des n-ten Folgengliedes.

4.1.3. Definition: Rekursion und Explikation
Wird die Zuordnungsvorschrift einer Folge mit einem expliziten Term, z.B. $3n - 4$, dann spricht man von einer **expliziten** Bildungsvorschrift.

Die Folge könnte aber auch durch eine **rekursive** Bildungsvorschrift gegeben sein. Dann bediene man sich jener Form.

$$(a_n) : a_1 = -1 \wedge a_n = a_{n-1} + 3$$

TL;DR
Wenn das Berechnen mit **einfachem** Rechenaufwand verbunden ist, der Term also nicht auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Bildungsvorschrift **explizit**.

Wenn der Bildungsterm auf vorhergehende oder nachfolgende Folgenglieder zurückgreift, dann ist die Zuordnungsvorschrift **rekursiv**.

[38] siehe Abschnitt 3.1.1
[39] siehe Abschnitt 3.1.2

4.2. Verschiedene Folgen

4.2.1. Definition: Geometrische Folgen
Eine Folge (a_n) heißt geometrisch, wenn $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Es gibt genau ein $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Oder anders gesagt

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Für jede geometrische Folge (a_n) gilt $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, weil $a_1 = a_1 \cdot q^0$, weil q^0 für $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ immer 1 wäre.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

4.2.2. Bemerkung: Konstante Folgen
q[40] darf nicht 1 oder 0 sein und a_1 nicht 0, denn folglich wäre $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n$.

Solche Folgen nennen wir **konstante Folgen**.

4.2.3. Definition: Alternierende Folgen
Folgen, deren aufeinanderfolgende Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen, nennen wir **alternierend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

4.3. Monotonieverhalten

4.3.1. Definition: Strenge Monotonie
Eine Folge (a_n), deren nächstes Folgeglied immer größer ist als das vorhergehende, nennt man **streng monoton steigend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Nicht streng monoton steigend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Wenn das nächste Folgeglied immer kleiner ist als das vorhergehende, dann nennt man sie analog dazu **streng monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Nicht streng monoton fallend sind jedoch alle Folgen, für die gilt

$$\exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

[40] siehe Abschnitt 4.2.1

4.3.2. Definition: Beispielbeweis

Betrachten wir die Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \land n \geq 1$. Dazu gehen wir zuerst von einer streng monotonen Steigung aus und stellen dann um.

$$\begin{aligned} c_n &< c_{n+1} && \\ \frac{n-1}{n} &< \frac{n}{n+1} && | \cdot n \\ n-1 &< \frac{n^2}{n+1} && | \cdot (n+1) \\ n^2 - 1 &< n^2 && | - n^2 \\ -1 &< 0 && \text{wahr für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

4.3.3. Definition: Einfache Monotonie

Folgen, die auch aufeinanderfolgende gleiche Folgeglieder aufweisen, sonst allerdings monoton steigen oder fallen, nennt man **monoton steigend** bzw. **monoton fallend**.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

$$\text{bzw. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

4.4. Teilfolgen

4.4.1. Bemerkung: Folgen mit Systematik

In Abschnitt 4.3.2 könnten bezüglich der Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ systematisch Folgenglieder „herausgegriffen" werden, z.B. $c_1, c_{10}, c_{100}, ..., c_{10^{k-1}}$.

Diese Folgenglieder kann man als Neue Folge auffassen, die ein Teil der Folge (c_n) ist.

4.4.2. Definition: Definition

Die Folge (t_n) ist Teilfolge der Folge (a_n).

Ist n_i mit $(i = 1; 2; ...; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt $\left(a_{n_i}\right) = (t_n)$ Teilfolge von (a_n).

4.4.3. Satz: Teilfolgensatz

Jede Folge (a_n) besitzt eine monotone Teilfolge.

4.4.4. Satz: Beweis

Sei eine Gipfelstelle die Indexzahl n, sodass $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq n : a_n \geq a_m$.

TL;DR

Alle nachfolgenden Folgenglieder a_m sind kleiner als a_n bzw. nach a_n kommt kein Folgeglied, das größer ist als a_n.

Nun lässt sich eine Fallunterscheidung durchführen.

I. Es gibt unendlich viele Gipfelstellen.
   Nummeriert man die Gipfelstellen in der Reihenfolge ihres Auftretens, folgt

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$$

D.h. die Gipfelstellen bilden eine monoton fallende[41] Teilfolge.

II. Es gibt endlich viele Gipfelstellen.
Sei n_L die letzte Gipfelstelle. Wir betrachten a_{n_L}. Dann gilt $a_{n_L} > a_{n_L+1}$

Da a_{n_L} die letzte Gipfelstelle war, sind alle nachfolgenden Folgeglieder keine Gipfelstellen, d.h. für jedes dieser Folgeglieder a_n^* gibt es mindestens ein Folgeglied a_n^{**} mit $a_n^* < a_n^{**} < a_{n_L}$.

D.h. wir erhalten eine monoton steigende Folge.

$$a_{n_L+1} < a_{n_L+1}^* < a_{n_L+1}^{**} < \dots$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

4.5. Beschränktheit von Folgen

4.5.1. Definition: Schranken
In Abschnitt 4.3.2 wurde die Folge $(c_n) : c_n = \frac{n-1}{n}$ betrachtet.
Man kann „beobachten", dass $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq c_n < 1$, d.h. die Folgenglieder unter- und überschreiten einen bestimmten Wert nicht.

4.5.2. Definition: Untere und obere Schranken, Maxi- und Minima

1. Eine reelle Zahl u heißt **untere Schranke** der Folge (a_n), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $u \leq a_n$.
2. Eine reelle Zahl o heißt **obere Schranke** von (a_n), wenn $\forall n \in \mathbb{N} : o \geq a_n$.
3. Eine reelle Zahl $\min a_n$ heißt **Minimum** von (a_n), wenn es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\min a_n = a_k \leq a_n$.
4. Eine reelle Zahl $\max a_n$ heißt **Maximum** von (a_n), wenn $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \max a_n = a_k \geq a_n$.

4.5.3. Definition: Beispiel
Betrachten wir die Folge $(a_n) : a_n = -\frac{4n}{n+2}$. Zunächst benötigt man eine Vermutung. Dazu werden einige Folgenglieder berechnet.

$$a_1 = -\frac{4 \cdot 1}{1+3} = -\frac{4}{3}$$
$$a_{10} = -\frac{4 \cdot 10}{10+3} = -\frac{40}{13}$$
$$a_{100} = -\frac{4 \cdot 100}{100+3} = -\frac{400}{103}$$

Man kann beobachten, dass sich die Folge mit wachsendem Argument an -4 annnähert. Darum vermuten wir zunächst **eine** untere Schranke bei -4

[41] siehe Abschnitt 4.3.3

$$
\begin{aligned}
-4 &\le a_n \\
-4 &\le -\frac{4n}{n+2} && \mid \cdot (n+2) \\
-4(n+2) &\le -4n \\
-4n - 8 &\le -4n && \mid +4n \\
-8 &\le 0 && \text{wahr für alle } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Quod erat Demonstrandum

4.5.4. Satz: Vielschrankensatz

Falls eine Folge (a_n) eine untere Schranke besitzt, so besitzt sie unendlich viele.

4.5.5. Satz: Beweis

Sei $u \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < u$.

D.h. $x < u \le a_n$, folgt $x \le a_n$ und somit existieren unendlich viele untere Schranken.

4.5.6. Definition: *Suprema* und *Infima*

Die größte untere Schranke[42] nennt man **untere Grenze** oder *Infimum* $\inf\ a_n$ der Folge (a_n).
Die kleinste obere Schranke nennt man **obere Grenze** oder *Supremum* $\sup\ a_n$ der Folge (a_n).

TL;DR

Eine reelle Zahl i ist genau dann ein *Infimum* der Folge (a_n), wenn

1. $\forall n \in \mathbb{N} : i \le a_n$, also i eine untere Schranke ist.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : i + \varepsilon > a_n$, es also die größte untere Schranke ist.

4.5.7. Bemerkung: Schritte zum Nachweis

Die beliebige Folge (a_n) besitzt die untere Grenze $\inf\ a_n$. Es sei $k \in \mathbb{R}$ mit $\inf\ a_n < k$.

4.5.8. Definition: Beispielnachweis

Betrachten wir die Folge $(b_n) : b_n = \frac{6n-1}{4n}$ mit $n \ge 1$.

Zuerst äußern wir die Vermutung, dass das *Supremum* bei $\sup\ b_n = \frac{3}{2}$ liegt. Nun muss bewiesen werden, dass $\sup\ b_n$ eine obere Schranke ist. Danach, dass es ein *Supremum* ist.

1. $\sup\ b_n$ ist eine obere Schranke.

   Sei $n \in N$.

[42] siehe Abschnitt 4.5.2

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &\geq \frac{6n-1}{4n} && \mid \cdot 4n \\ \frac{12}{2}n &\geq 6n-1 \\ 6n &\geq 6n-1 && \mid -6n \\ 0 &\geq -1 && \text{wahr für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

2. $\sup b_n$ ist ein *Supremum.*

   Sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} b_n &> \sup b_n - \varepsilon \\ \text{D.h. } \frac{6n-1}{4n} &> \frac{3}{2} - \varepsilon && \mid \cdot 4n \\ 6n-1 &> 6n - 4n\varepsilon && \mid -6n \\ -1 &> -4n\varepsilon && \mid \div \varepsilon \\ -\frac{1}{\varepsilon} &> -4n && \mid \cdot (-1) \\ \frac{1}{\varepsilon} &< 4n && \mid \div 4 \\ \frac{1}{4\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Aufgrund der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen immer eine natürliche Zahl für die gilt $\frac{1}{4\varepsilon} < n$. Somit ist diese Aussage wahr.

Dementsprechend ist $\frac{3}{2}$ das *Supremum* der Folge (b_n).

4.5.9. Satz: Supremumsaxiom
Im Bereich der **reellen** Zahlen besitzt jede nach oben beschränkte Folge ein Supremum.

4.6. Konvergenz

4.6.1. Definition: Häufungswert
Sei (a_n) eine Folge. Die reelle Zahl h ist Häufungswert von (a_n), falls es für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele n mit $\mid a_n - h \mid < \varepsilon$ gibt.

4.6.2. Definition: Beispielnachweis
Betrachten wir die Folge $(a_n) : a_n = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n}$. Vermutlich ist der Häufungswert $h = -\frac{1}{2}$.

Sei $\varepsilon > 0$.

$$
\begin{aligned}
\mid a_n - \left(-\frac{1}{2}\right) \mid = \mid -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2} \mid &= \mid \frac{(-1)^n}{n} \mid \\
&= \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \mid \div \varepsilon \cdot n \\
&= \frac{1}{\varepsilon} < n
\end{aligned}
$$

Quod erat Demonstrandum

Da $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{N}$ unendlich ist, findet man unendlich viele natürliche Zahlen mit $\frac{1}{\varepsilon} < n$.

4.6.3. Definition: Grenzwert einer Folge
Eine reelle Zahl g heißt **Grenzwert** der Folge (a_n), falls für jedes $\varepsilon > 0$ ab einer bestimmten Indexzahl n_0 alle Folgenglieder in der Epsilonumgebung[43] $]g - \varepsilon; g + \varepsilon[$ liegen.

Oder alternativ:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt: $\mid a_n - g \mid < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \mid a_n - g \mid < \varepsilon$$

4.6.4. Bemerkung: Bemerkungen zum Grenzwert

(1) Wir wissen, dass $\mid a_n - g \mid < \varepsilon$ gleichwertig zu $-\varepsilon < a_n - g < \varepsilon$ und $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$ ist.

Das somit betrachtete **offene Intervall** $]g - \varepsilon; g + \varepsilon[$ heißt **Epsilonumgebung**[44] von g.

(2) Mit Hilfe des Begriffs der Epsilonumgebung kann man den Grenzwert g einer Folge auch anders verstehen.

Egal, welche Epsilonumgebung man um den vermuteten Grenzwert g legt, dürfen immer **nur endlich viele Folgenglieder** a_n außerhalb der Epsilonumgebung liegen.

(3) Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so ist sie **konvergent**, ansonsten **divergent**.

(4) Der Grenzwert wird mit dem *Limes* symbolisiert.

$$g = \lim_{n \to \infty} a_n$$

(5) Besitzt die Folge (a_n) einen Grenzwert, so konvergiert jede Teilfolge (t_n) gegen diesen Grenzwert.

(6) Eine Folge, deren Grenzwert $g = 0$ ist, heißt **Nullfolge**.

4.6.5. Satz: Konvergenzprinzip
Falls eine Folge (a_n) konvergent ist, so besitzt sie **genau einen** Grenzwert.

4.6.6. Satz: Argumentation
Nehmen wir an g_1 und g_2 seien Grenzwerte von (a_n) mit $g_1 \neq g_2$.

Wähle $\varepsilon < \frac{|g_1 - g_2|}{2}$.
Somit $U_\varepsilon(g_1) \cup U_\varepsilon(g_2) = \emptyset$.
Da g_1 ein Grenzwert ist, gilt für alle $n > n_0 : a_n \in U_\varepsilon(g_1)$. Das sind unendlich viele.
D. h. außerhalb liegen nur endlich viele. Somit auch in $U_\varepsilon(g_2)$. g_2 ist also kein Grenzwert.

[43] siehe Abschnitt 4.6.4
[44] siehe Abschnitt 7.1 unter *Epsilonumgebung*

4.6.7. Satz: Grenzwerte konstanter Folgen
Sei $(a_n) : a_n = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine konstante Folge[45]. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c = c$$

4.6.8. Bemerkung: Geometrische Nullfolgen
Jede geometrische Folge[46] $(a_n) : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ist für alle q mit $|q| < 1$ eine **Nullfolge**.

4.6.9. Bemerkung: Beweis
Seien $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $|q| < 1$.

$$\begin{aligned} |\, a_n - 0 \,| = |\, a_n \,| = |\, a_1 \cdot q^{n-1} \,| &< \varepsilon \\ |\, a_1 \,| \cdot |\, q^{n-1} \,| = |\, a_1 \,| \cdot |\, \frac{q^n}{q} \,| = |\, \frac{a_1}{q} \,| \cdot |\, q^n \,| &< \varepsilon \\ |\, \frac{a_1}{q} \,| \cdot |\, q \,|^n &< \varepsilon \qquad |\div |\, \frac{a_1}{q} \,| \\ |\, q \,|^n &< \varepsilon \cdot |\, \frac{q}{a_1} \,| \qquad |\log_{|q|}(\ldots) \\ n &> \log_{|q|}\left(\varepsilon \cdot |\, \frac{q}{a_1} \,|\right) \end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

Das Relationszeichen wurde umgedreht, weil $0 < |q| < 1$ und somit die Logarithmusgesetze[47] dies verlangen.

Aufgrund der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen finden wir immer ein $n \in \mathbb{N}$, für das diese Bedingung stimmt.

4.6.10. Definition: Bestimmte Divergenz
(a_n) ist **bestimmt divergent**, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty := \forall k \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : a_n > k$$

Die Folge (a_n) ist bestimmt divergent genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, (a_n) also eine **Nullfolge** ist.

Bei etwas komplexeren Folgen ist nicht direkt ersichtlich, ob diese überhaupt einen Grenzwert besitzt.

$$(a_n) : a_n = \left(1 + \frac{1}{2}n\right)^n$$

Um einfacher zu bestimmen, ob eine Folge konvergent ist, gibt es bestimmte **Konvergenzkriterien**, welche hier aufgeführt werden.

4.6.11. Satz: Relation von Konvergenz und Beschränktheit
Sei (a_n) eine Folge.

Wenn (a_n) konvergent ist, so ist (a_n) beschränkt.

[45] siehe Abschnitt 4.2.2
[46] siehe Abschnitt 4.2.1
[47] $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) > \log_a(x_2)$

TL;DR
Wenn (a_n) nicht beschränkt ist, so ist (a_n) nicht konvergent.

4.6.12. Satz: Beweis
Wir nehmen an, die Folge (a_n) konvergiert gegen g. Dazu müsste die Definition gelten.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : | a_n - g | < \varepsilon$$

Wähle $\varepsilon = 1$, sodass alle Folgenglieder für $n > n_0$ innerhalb von $]g-1; g+1[$. Somit ist die Folge mit $n > n_0$ durch $g-1$ und $g+1$ beschränkt.

4.6.13. Satz: Beschränkungskonvergenzsatz
Sei (a_n) monoton. (a_n) ist konvergent genau dann, wenn (a_n) beschränkt ist.

4.6.14. Satz: Beweis
Sei (a_n) ohne Beschränkung der Allgemeinheit monoton wachsend.

1. „$\Longrightarrow$“ Sei (a_n) konvergent. Nach dem Satz der Relation von Konvergenz und Beschränktheit[48] ist (a_n) somit beschränkt.
2. „$\Longleftarrow$“ Sei (a_n) beschränkt, d.h. sie besitzt eine obere Schranke und nach Supremumsaxiom[49] sogar ein *Supremum* $\sup a_n = S$. Damit existieren für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m > S - \varepsilon$.

   Das heißt $a_n \in]S - \varepsilon; S + \varepsilon[$. Damit ist (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S = \sup a_n$.

4.6.15. Satz: Korollar
Sei (a_n) monoton wachsend. Wenn (a_n) nach oben beschränkt ist, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$.

4.6.16. Satz: Satz von *Bolzano-Weierstraß*
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

4.6.17. Satz: Beweis
Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Nach dem Satz in Abschnitt 4.4.3 besitzt jede Folge eine monotone Teilfolge. Da (a_n) beschränkt ist, ist auch ihre monotone Teilfolge (t_n) beschränkt.

Nach dem Korollar[50] des vorherigen Satzes[51] gilt für eine monoton steigende beschränkte Folge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$. So gilt dies auch umgekehrt für monoton fallende Folgen, die beschränkt sind. (t_n) besitzt somit ein *Supremum* oder ein *Infimum* welches durch die Monotonie der Folge auch Grenzwert ist.

4.6.18. Unvollständiges Beispiel einer Induktion

Sei $(a_n) : a_1 = 5 \land a_n = \frac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$.

[48] siehe Abschnitt 4.6.11
[49] siehe Abschnitt 4.5.9
[50] siehe Abschnitt 4.6.15
[51] siehe Abschnitt 4.6.13

$$
\begin{aligned}
a_n &> a_{n+1} \\
a_n &> \frac{2a_n}{a_n + 1} \quad | \cdot (a_n + 1) \\
a_n^2 + a_n &> 2a_n \quad\quad | \div a_n \\
a_n + 1 &> 2 \quad\quad\quad | -1 \\
a_n &> 1
\end{aligned}
$$

Induktionsanfang

Sei $n = 2$. $a_2 = \frac{5}{3}$.

Induktionsschritt

Für alle $n \geq 1$ gilt $a_n > 1$. Wenn[52] $a_n \geq 1$, dann gilt $a_{n+1} > 1$.

4.6.19. Grenzwert berechnen

Sei $(a_n) : a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ mit $a_1 = 1$.

Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. D.h. $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= g \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) &= g \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a_n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} &= g \\
\frac{1}{2}g + \frac{1}{g} &= g \quad\quad | -\frac{1}{2}g \\
\frac{1}{g} &= \frac{1}{2}g \quad | \cdot g \\
1 &= \frac{1}{2}g^2 \ | \cdot 2 \\
2 &= g^2 \quad | \sqrt{\dots} \\
\sqrt{2} &= g
\end{aligned}
$$

4.7. Grenzwerte

4.7.1. Satz: Grenzwertsätze für Folgen

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen. Dann gilt

(1) Die Folge (c_n) mit $c_n = a_n \pm b_n$ ist **konvergent**.

(2) Die Folge (c_n) mit $c_n = a_n \cdot b_n$ ist **konvergent**.

(3) Die Folge (c_n) mit $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ist **konvergent**, falls (c_n) keine Nullfolge ist.

4.7.2. Satz: Beweis (1)

Seien (a_n) und (b_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Des Weiteren sei $\varepsilon > 0$.

Dann existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > n_1$ gilt $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Analog existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > n_2$ gilt $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Nun betrachten wir den Term $|a_n + b_n - (a + b)|$, weil $\lim_{n\to\infty} c_n = g$, falls $|c_n - g| < \varepsilon$.

[52] Implikation

$$
\begin{aligned}
|a_n + b_n - (a+b)| &= |a_n - a + b_n - b| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \\
|a_n + b_n - (a+b)| &< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Quod erat Demonstrandum

Damit gilt für alle $n > \max\{n_1; n_2\}$, dass $|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$ und somit ergibt sich für die Folge (c_n) mit $c_n = a_n + b_n$, dass c_n konvergent ist.

Somit gibt der Beweis sogar eine Antwort auf die Frage, welchen Grenzwert die Summenfolge $a_n + b_n$ besitzt.

Es gilt nämlich Folgendes.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

4.7.3. Satz: Beweis (2)

Seien (a_n) und (b_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Des Weiteren sei $\varepsilon > 0$.

Dann existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > n_1$ gilt $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Analog existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > n_2$ gilt $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Nun betrachten wir den Term $|a_n b_n - ab)|$, weil $\lim_{n\to\infty} c_n = g$, falls $|c_n - g| < \varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab + ab_n - ab_n| \qquad \text{(nahrhafte Null)} \\
&= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\
&= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \\
&\leq |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|
\end{aligned}
$$

Mit Konvergenz von (a_n) und (b_n) sind beide Folgen beschränkt. Wähle ein $k \in \mathbb{R} : a < k > b_n$

Damit gilt folgende Ungleichung, da $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \\
&\leq k \cdot |a_n - a| + k \cdot |b_n - b| \leq \frac{k\varepsilon}{2} + \frac{k\varepsilon}{2} \\
|a_n b_n - ab| &\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

Quod erat Demonstrandum

Damit gilt für alle $n > \max\{n_1; n_2\}$, dass $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ und somit ergibt sich für die Folge (c_n) mit $c_n = a_n b_n$, dass c_n konvergent ist.

Es gilt auch Folgendes.

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

4.7.4. Bemerkung: Beschränkungskriterium

Sei $(c_n) : c_n = a_n \cdot b_n$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dann gilt nicht zwingend $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ mit der Argumentation, dass ein Faktor Null sei.

c_n ist mit Sicherheit eine Nullfolge, falls (b_n) beschränkt[53] ist.

4.7.5. Satz: Bernoullische Ungleichung
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$. Dann gilt folgende Ungleichung.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

4.7.6. Satz: Beweis
Induktionsanfang

Sei $n = 0$.

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &\geq 1 + 0x \\ 1 &\geq 1\end{aligned}$$

Induktionsschritt

Sei $x > -1$. Dann gilt für alle $n \geq 0$ Folgendes.

Wenn $(1+x)^n \geq 1 + nx$, so $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x$.

Wenn $(1+x)^n \geq 1 + nx$, so $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$.

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x) \\ (1+x)^{n+1} &\geq 1 + x + nx + nx^2 \\ (1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1) \cdot x + nx^2 \qquad nx^2 \geq 0 \\ (1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1) \cdot x + nx^2 \geq 1 + (n+1) \cdot x\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

4.7.7. Hinführung zur Eulerschen Zahl
Um die Monotonie einer Folge (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nachzuweisen, benötigt man ebendiese Bernoullische Ungleichung[54].

$$\begin{aligned}a_n &\leq a_{n+1} \\ a_{n-1} &\leq a_n \qquad | - a_{n-1} \\ 0 &\leq a_n - a_{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n-1} &\leq a_n \qquad | \div a_{n-1} \\ 1 &\leq \frac{a_n}{a_{n-1}}\end{aligned}$$

Falls $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$, ist (a_n) monoton steigend.

[53] siehe Abschnitt 4.6.13
[54] siehe Abschnitt 4.7.5

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(1+\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \\
&\geq \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(1+n \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = 1 \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} &\geq 1
\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Um die Beschränktheit von (a_n) zu untersuchen, betrachten wir die Folge $(b_n) : b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ebendiese ist monoton fallend und besitzt eine obere Schranke[55].

$$o = b_1 = 4$$

Um die Beschränktheit von (a_n) nachzuweisen, muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten $b_n > a_n$.

$$\begin{aligned}
b_n &> a_n \\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \mid \div \left(1+\frac{1}{n}\right) \\
\left(1+\frac{1}{n}\right) &> 1
\end{aligned}$$

Quod erat Demonstrandum

Die resultierende Ungleichung ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, weshalb (a_n) nach oben beschränkt ist. Da sie gleichzeitig durch ihre Monotonie mit ihrem ersten Folgenglied nach unten beschränkt ist, ist sie nach dem Beschränkungskonvergenzsatz[56] konvergent.

4.7.8. Definition: Eulersche Zahl

4.7.9. Satz: Einschachtelungssatz

$(a_n), (b_n)$ und (c_n) seien Folgen, bei denen für alle $n : a_n \leq b_n \leq c_n$ gilt.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, so gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

4.7.10. Definition: *Cauchy*-Folge

Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy*-Folge, sofern es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, sodass $m, n > n_0 : |a_m - a_n| > \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n_0 < n, m \in \mathbb{N} : |a_m - a_n| < \varepsilon$

4.7.11. Satz: Konvergenz bei *Cauchy*-Folgen

Eine Folge ist *Cauchy*-Folge genau dann, wenn sie konvergent ist.

[55] siehe Abschnitt 4.5.2

[56] siehe Abschnitt 4.6.13

4.7.12. Satz: Beweis
„$\Longrightarrow$“ Sei (a_n) konvergent. Laut Vorraussetzung existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass für alle $n > n_0$ gilt $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Für $m, n > n_0$ gilt Folgendes.

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - g + g - a_n| \\ &\leq |a_m - g| + |g - a_n| = |a_n - g| + |a_n - g| < \frac{2 \cdot \varepsilon}{2} \\ |a_m - a_n| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

„$\Longleftarrow$“ Sei (a_n) *Cauchy*-Folge.

4.7.13. Satz: Beispiel
Ist $(a_n) : a_n = \frac{1}{n}$ eine *Cauchy*-Folge?

Sei $\varepsilon > 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n > m$. Damit gilt $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$.

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Quod erat Demonstrandum}$$

Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Somit gilt für alle $m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$.

(a_n) ist folglich *Cauchy*-Folge und konvergent.

4.7.14. Satz: Rationale *Cauchy*-Folgen
Wenn die rationale Folge (a_n) konvergent ist, ist sie *Cauchy*-Folge.

5. Reihen

5.1. Der Begriff

5.1.1. Definition: Begriff
Die Folge (s_n) mit $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ heißt *unendliche* **Reihe** der Folge (a_n).

5.1.2. Bemerkung: Zur Benennung und Darstellung

1. Ein Folgenglied s_n der Reihe (s_n) heißt n-te **Partialsumme**.
2. Für das Folgenglied s_n wird oft die Summenzeichenschreibweise[57] benutzt.

[57] siehe Abschnitt 5.1.3

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$s_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 \qquad \text{(Beispiel)}$$

3. Oft verwendet man als Symbol der Reihe (s_n) auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dabei ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k$.

TL;DR
$\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist die n-te Partialsumme, also Folgenglied. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet die Reihe als Objekt.

5.1.3. Definition: Summenschreibweise

5.1.4. Satz: Summensätze
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ gelten Folgende Sätze.

(1) $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} a_k$

6. Beweise

6.1. Beweistechniken

6.1.1. Definition: Hinrichtung und Rückrichtung
Beweise können *Genau dann, wenn …* Aussagen, die in zwei Richtungen funktionieren, sein.

6.1.2. Definition: Satz vom Nullprodukt als Beispiel
$a \cdot b = 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn $a = 0 \vee b = 0$.

Hinrichtung[58] „$\Longrightarrow$“

1. Wir nehmen an, dass $a \cdot b = 0$ Sei nun $a \neq 0$. Jetzt können wir durch Null teilen.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \qquad | \div a \\ b &= 0 \end{aligned}$$

2. Analog gilt dies auch für $b \neq 0$.

Es folgt, dass wenn $a \cdot b = 0$, muss mindestens einer der Faktoren a oder b Null sein.

Rückrichtung „$\Longleftarrow$“

1. Wir nehmen an, dass $a = 0$. Somit gilt

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

2. Analog gilt dies für $b = 0$.

[58] siehe revolutionäres Frankreich

Es folgt, dass wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, dann ist auch das Produkt Null.

Quod erat Demonstrandum

6.1.3. Aufbau

Wenn A, dann B.

A ist die **Vorraussetzung**, unter der B gilt. B ist somit die **Behauptung**.

Nun folge die **Argumentation**.

6.1.4. Definition: Beweis durch vollständige Induktion

Bei einer vollständigen Induktion wird zunächst ein **Induktionsanfang** definiert.[59] Hier wird die Wahrheit der Aussage anhand eines Beispiels demonstriert.

Danach folgt die **Induktionsvorraussetzung**, in der die Aussage als wahr vorrausgesetzt wird.

Diese wird dann in der **Induktionsbehauptung** benutzt, um die Aussage zu beweisen.

[59] siehe Abschnitt 3.8.2

7. Anhang

7.1. Glossar

Epsilonumgebung die Epsilonumgebung um eine Zahl a ist definiert mit $U_\varepsilon :=]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$
Intervall um eine Zahl wird im Abstand von ε betrachtet

7.2. Relation des Häufungswerts zum Grenzwert

Mit der Definition der Grenzwerte und Häufungswerte sind noch längst nicht alle Fragen geklärt. Immernoch muss man sich mit Antworten auf diese Fragen beschäftigen:

Können Folgen mit zwei Häufungswerten konvergent sein? Gibt es ein Maximum an Häufungswerten? Ist der einzige Häufungswert einer Folge mit Sicherheit Grenzwert?

Das sind alles Fragen, die man sich stellen muss, um das Konzept der Häufungswerte und Grenzwerte zu begreifen und ihr Verhältnis zueinander zu verstehen.

7.2.1. Der Grenzwert als eine Spezialform des Häufungswertes

Definieren wir zuerst die Begriffe Grenzwert und Häufungswert.
Für den reellen Grenzwert g gilt die Definition

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - g| < \varepsilon \qquad (1)$$

Es müssen also ab einem *Index* n_0 alle Folgenglieder innerhalb der Epsilonumgebung um den Grenzwert liegen. Da die *Indices* einer Folge natürliche Zahlen sind, sind sie ins Unendliche unbeschränkt, aber nicht Teil des negativen Zahlenbereichs. Somit ist die Anzahl der *Indices* vor n_0 beschränkt und endlich; die Anzahl der *Indices* nach n_0 ist unendlich.
Also müssen außerhalb der Epsilonumgebung des Grenzwertes endlich viele Folgenglieder liegen und innerhalb alle Folgenglieder ab *Index* n_0 aufgrund der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen unendlich viele, sonst ist die betrachtete Zahl kein Grenzwert.

Der Häufungswert ist die reelle Zahl h, falls es für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele n mit $|a_n - h| < \varepsilon$ gibt. In der Epsilonumgebung des Häufungswertes müssen also unendlich viele Folgenglieder liegen.

Diese Definition überlagert sich mit der des Grenzwertes. In beiderlei Epsilonumgebungen müssen unendlich viele Folgenglieder liegen – mit dem Unterschied, dass außerhalb der Epsilonumgebung des Häufungswertes nicht endlich viele Folgenglieder liegen müssen.

Wir können also festhalten, dass falls in der Epsilonumgebung einer reellen Zahl unendlich viele Folgenglieder liegen, diese Zahl mit Sicherheit Häufungswert der Folge ist, da dies der Definition entspricht. Falls zusätzlich dazu nur endlich viele Folgenglieder außerhalb der Epsilonumgebung liegen, ist der Häufungswert zugleich Grenzwert.
Jeder Grenzwert ist also auch Häufungswert.

Wenn eine Folge (a_n) einen Grenzwert besitzt, ist dieser mit Sicherheit auch ein Häufungswert der Folge.

7.2.2. Zahl der Häufungswerte

Tatsächlich lässt sich mit einer einfachen *Modulo*-Folge begründen, dass es keine Maximalzahl an Häufungswerten gibt.

$$(a_n) : a_n := \begin{cases} 0 \text{ falls } n \bmod 3 = 0 \\ 1 \text{ falls } n \bmod 3 = 1 \\ 2 \text{ falls } n \bmod 3 = 2 \end{cases} \qquad (2)$$

Die Werte dieser Folge häufen sich im Unendlichen bei 0, 1 und 2, ein Verhalten, welches sich mittels einer angelegten Epsilonumgebung zeigen ließe. Um die Anzahl der Häufungswerte zu erhöhen, könnte man bei diesem Beispiel den Divisor erhöhen und einen weiteren Fall hinzufügen.

Da eine Folge durch natürliche *Indices* unendlich ist, kann sie sich im Unendlichen unbegrenzt vielen Werten mehrfach annähern, wodurch diese zu Häufungswerten der Folge werden. Am einfachsten ließe sich dies durch periodische Vorgänge, wie diese *Modulo*-Folge oder eine *Sinus*-Folge bewerkstelligen.

$$(b_n) : b_n = \sin(n) \qquad (3)$$

7.2.3. Konvergenz bei zwei oder mehr Häufungswerten

Aufgrund des Verhaltens einer Folge, sich an den Häufungswerte im Unendlichen unendlich oft zu häufen, werden außerhalb der Epsilonumgebung eines Wertes immer unendlich viele Folgenglieder in den Epsilonumgebungen der Häufungswerte liegen, wodurch die Definition eines Grenzwertes nicht erfüllt werden kann und folglich kein Grenzwert existiert.

Eine Folge mit zwei oder mehr Häufungswerten kann folglich nicht konvergent sein.

7.2.4. Grenzwerte bei Folgen mit nur einem Häufungswert

Der einzige Häufungswert einer Folge ist nicht mit Sicherheit Grenzwert ebendieser Folge, was sich anhand eines Gegenbeispiels zeigen lässt.

Betrachten wir folgende Folge.

$$(c_n) : c_n := \begin{cases} 1 \text{ falls } n \bmod 2 = 0 \\ -n \text{ andernfalls} \end{cases} \qquad (4)$$

Diese Folge hätte einen Häufungswert 1, aber keinen Grenzwert, da die ungerade Teilfolge $(t_n) : t_n = c_{2n+1}$ mit $n_1 = 0$ unbeschränkt ist und somit keinen bestimmten Grenzwert besitzt.

Teilfolgen einer Folge, die einen Grenzwert besitzt, müssen allerdings auch diesen Grenzwert besitzten, was hier nicht der Fall ist. Somit ist der einzige Häufungswert einer Folge nicht mit Sicherheit Grenzwert ebendieser Folge.