Ivar's Beviser

Ivar Ørn Johannesson

4. februar 2023

1 Analyse

Lemma 1 (Geometrisk række)**.**

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Bevis. Lad

$$S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}$$

så er

$$\begin{aligned} Sr &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n && (1)\\ &= S + r^n - 1 && (2)\\ \iff \quad S(r-1) &= r^n - 1 && (3)\\ \iff S &= \frac{r^n - 1}{r - 1} && (4) \end{aligned}$$

□

1.1 Annuitet

Sætning 1 (Annuitetsopsparing)**.** *Ved annuitetsopsparing kan kapital efter den sidste indbetaling beregnes som*

$$A_n = A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

hvor A er den annuiteten, r er den terminvise rentefod og n er antal terminer.

Bevis. Efter første termin har vi $A_1 = A$ kapital, efter to terminer har vi $A_2 = A + A(1+r)$, $A_3 = A + A(1+r) + A(1+r)^2$ efter tre osv. Dvs. at efter n terminer har vi at

$$\begin{aligned} A_n &= A + A(1+r) + \cdots + A(1+r)^{n-1} && (5)\\ &= A(1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{n-1}) && (6)\\ &= A\frac{(1+r)^n - 1}{r + 1 - 1} && (7) \end{aligned}$$

□

Sætning 2 (Annuitetslån)**.** *Ved annuitetslån kan annuiteten beregnes som*

$$A = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

hvor G er hovedstolen, r er den terminvise rentefod og n er antal terminer.

Bevis. Efter første termin har vi $G(1+r)-A$ udestående, efter to terminer har vi $(G(1+r)-A)(1+r)-A = G(1+r)^2 - A(1+r) - A$ osv. Dvs. at når lånet er betalt tilbage efter n terminer har vi at

$$0 = G(1+r)^n - A(1+r)^{n-1} - \cdots - A(1+r) - A \tag{8}$$

$$\iff G(1+r)^n = A((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) + 1) \tag{9}$$

$$= A\frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{10}$$

$$\iff \quad A = G\frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} \tag{11}$$

$$= G\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \tag{12}$$

□

1.2 Eksponentielle Funktioner

Påstand 1. *Euler's tal er*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2,71828\ldots$$

Enhver eksponientel funktion kan omskrives på følgende måde

$$f(x) = ba^x = be^{kx}$$

hvor $k = \ln(a)$.

Sætning 3. *Funktionen $f(x) = a^x$ har den afledede funktion $f'(x) = \ln(a)a^x$*

Bevis. Lad os omskrive vores funktion

$$f(x) = a^x = e^{kx} \implies f'(x) = ke^{kx} = \ln(a)e^{kx}$$

□

1.3 Polynomier

Definition 1. *Parablen for polynomiet $p(x) = ax^2 + bx + c$ har et ekstremum, der hvor grafens hældning skifter fortegn, der hvor $p'(x) = 0$ og dette punkt betegnes som parablens **toppunkt** $T = (T_x, T_y)$.*

Definition 2. *De punkter hvor parablen skærer x-aksen, altså der hvor* $p(x) = 0$ *betegnes som dens rødder.*

Sætning 4. *Lad* $p(x) = ax^2 + bx + c$*, så ligger parablens toppunkt i*

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

og dens rødder er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

hvor $d = b^2 - 4ac$*.*

Bevis. Lad os starte med at manipulere vores andengradspolynomium,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= ax^2 + bx + c \iff && (13)\\
\frac{p(x)}{a} &= x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} && (14)\\
&= x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} && (15)\\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \iff && (16)\\
p(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\frac{4ac - b^2}{4a^2} && (17)\\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} && (18)\\
& && (19)
\end{aligned}
$$

(1) → (2) har vi divideret ligningen med a.
(2) → (3) har vi forlænget bx/a med 2 og lagt $(\frac{b}{2a})^2$ til og trukket det fra igen.
(3) → (4) har vi brugt den første kvadratsætning baglæns på de tre første led og ophævet parentesen på det fjerde.
(4) → (5) har vi sat de sidste to led på fællesbrøk og ganget ligningen med a.
(5) → (6) har vi forkortet den sidste brøk med a og brugt at $4ac - b^2 = -d$.

Lad os nu forestille os at $a > 0$, så er parablens ekstremum et minimum og vi vil gerne gøre $f(x)$ så lille som muligt. Da $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ bliver $f(x)$ mindst muligt når parentesen er lig nul.

Hvis nu $a < 0$ bliver parablens ekstremum et maksimum men da $a(x + \frac{b}{2a}) \leq 0$ bliver $f(x)$ igen størst muligt når parentesen er nul.

I begge tilfælde skal $x + \frac{b}{2a} = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$ og hvis parentesen er nul bliver funktionsværdien det led der er tilbage altså

$$T_y = f(T_x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{d}{4a}$$

Lad os nu forstille os at vi fortsætter ligning (7) for at finde rødderne, altså sætter højre siden $p(x) = 0$. Så får vi at

$$0 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} \tag{20}$$

$$\frac{d}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \tag{21}$$

$$\pm\sqrt{\frac{d}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a} \tag{22}$$

$$\pm\frac{\sqrt{d}}{2a} - \frac{b}{2a} = x \tag{23}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \tag{24}$$

(8) → (9) lægger vi den sidste brøk til på begge sider.
(9) → (10) tager vi kvadratroden på begge sider, ± stammer fra at $x^2 = 9$ kan løses af både 3 og -3, dvs at $x = \pm\sqrt{9}$.
(10) → (11) trækker vi brøken fra på begge sider.
(11) → (12) samler vi dem på fælles brøkstreg. □

Sætning 5. *Et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ kan "faktoriseres" eller omskrives til*

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

hvor r_1, r_2 er dets rødder.

Bevis. Lad os prøve at sætte rødderne ind og gange parenteserne ud.

$$\left(x - \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}\right) \tag{1}$$

$$= x^2 - x\frac{-b - \sqrt{d}}{2a} - x\frac{-b + \sqrt{d}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \tag{2}$$

$$= x^2 - \frac{x}{2a}(-b - \sqrt{d} - b + \sqrt{d}) + \frac{(-b + \sqrt{d})(-b - \sqrt{d})}{4a^2} \tag{3}$$

$$= x^2 - \frac{x}{2a}(-2b) + \frac{(-b)^2 - \sqrt{d}^2}{4a^2} \tag{4}$$

$$= x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2 - d}{4a^2} \tag{5}$$

$$= x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{4ac}{4a^2} \tag{6}$$

$$= x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \tag{7}$$

(1) → (2) ganger vi parenteserne sammen
(2) → (3) sætter vi $\frac{x}{2a}$ udenfor en parentes og ganger de sidste to brøker sammen

(3) $\to$ (4) her går $\sqrt{d}$ ud med $-\sqrt{d}$ og vi bruger den tredje kvadratsætning på tælleren i den sidste brøk
(4) $\to$ (5) forkorter med 2 i den første brøk og skifter fortegn, ophæver parentesen og kvadratroden i den sidste brøk
(5) $\to$ (6) bruger at $b^2 - d = b^2 - (b^2 - 4ac) = 4ac$
(6) $\to$ (7) forkorter med $4a$ i den sidste brøk
Nu mangler vi bare at gange med a

$$a\left(x - \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c = f(x)$$

$\square$

Sætning 6. *For den sammensatte funktion $\phi(x) = (f \circ g)(x) = f((g(x))$ gælder at*

$$\phi'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Bevis. Lad os betragte differenskvotienten for ϕ

$$\begin{aligned}
\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)} &(1)\\
&= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &(2)\\
&= \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &(3)\\
&\xrightarrow{h\to 0} f'(g(x))g'(x) &(4)
\end{aligned}$$

I (1) forlænger jeg brøken med $g(x+h) - g(x)$ under antagelse af at det ikke er 0. Hvis det er 0 er g konstant og sætningen gælder stadigvæk.
(1) $\to$ (2) bytter jeg om på nævnerene.
(2) $\to$ (3) skriver jeg $g(x+h) - g(x) = k$ hvilket betyder at $g(x+h) = g(x) + k$.
(3) $\to$ (4) bruger jeg at hvis $h \to 0$ så går $k \to g(x) - g(x) = 0$. $\square$

Sætning 7 (Lineær Regression)**.** *For et datasæt (x_i, y_i) med $i = 1 \dots n$ hvor ikke alle x_i er det samme tal gælder der følgende om regressionslinjen:*

1. *Hældningskoefficienten er*

$$a = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

2. *Begyndelsesværdien er*

$$b = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

3. *Den tilhørende lineære funktion minimerer residualernes kvadratsum.*

Påstand 2. *Hvis ikke alle x_i er det samme tal gælder der*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Bevis. Lad

$$K(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

være den funktion der beregner residualernes kvadratsum for linjen med hældningskoefficient a og begyndelsesværdi b, målet er nu at minimere den. Jeg starter med at tage de første og anden partielle afledede

$$\begin{aligned}
K'_a(a,b) &= \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i && (1)\\
&= \sum_{i=1}^{n} 2ax_i^2 + 2bx_i - 2y_ix_i && (2)\\
&= 2a\Sigma x^2 + 2b\Sigma x - 2\Sigma xy && (3)\\
K'_b(a,b) &= \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) && (4)\\
&= 2a\Sigma x + 2bn - 2\Sigma y && (5)\\
K''_{aa}(a,b) &= 2\Sigma x^2 && (6)\\
K''_{bb}(a,b) &= 2n && (7)\\
K''_{ab}(a,b) &= 2\Sigma x && (8)
\end{aligned}$$

hvor jeg bare differentierer ledvis. For at finde et stationært punkt sætter jeg gradienten lig med 0 og løser det tilhørende ligningssystem

$$\begin{aligned}
\nabla K(a,b) = &\begin{pmatrix} 2a\Sigma x^2 + 2b\Sigma x - 2\Sigma xy \\ 2a\Sigma x + 2bn - 2\Sigma y \end{pmatrix} = \underline{0} && (9)\\
\frac{K'_a \cdot \Sigma x - K'_b \cdot \Sigma x^2}{2} &: \cancel{a\Sigma x^2 \Sigma x} + b(\Sigma x)^2 - \Sigma xy\Sigma x \\
&- (\cancel{a\Sigma x\Sigma x^2} + bn\Sigma x^2 - \Sigma y\Sigma x^2) = 0 && (10)\\
&\iff b((\Sigma x)^2 - n\Sigma x^2) = \Sigma xy\Sigma x - \Sigma y\Sigma x^2 && (11)\\
&\iff b = \frac{\Sigma xy\Sigma x - \Sigma x^2\Sigma y}{(\Sigma x)^2 - n\Sigma x^2} && (12)\\
\frac{K'_a \cdot n - K'_b \cdot \Sigma x}{2} &: an\Sigma x^2 + \cancel{bn\Sigma x} - n\Sigma xy && (13)\\
&\iff -(a(\Sigma x)^2 + \cancel{bn\Sigma x} - \Sigma y\Sigma x) && (14)\\
&\iff a(n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2) = n\Sigma xy - \Sigma y\Sigma x) && (15)\\
&\iff a = \frac{n\Sigma xy - \Sigma y\Sigma x}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} && (16)
\end{aligned}$$

Det viser at det er et stationært punkt, for at bekræfte at det er et ekstremum bruger jeg at

$$\begin{vmatrix} K''_{aa} & K''_{ab} \\ K''_{ba} & K''_{bb} \end{vmatrix} = 4n\Sigma x^2 - 4(\Sigma x)^2 > 0$$

jf. påstand 2, og det er et minimum da $K''_{aa}(a,b) > 0$, og $K''_{bb}(a,b) > 0$ for den sags skyld.
I (1) differentierer jeg ledvis med hensyn til a.
(1) $\rightarrow$ (2) ganger jeg parentesen ud.
(2) $\rightarrow$ (3) ophæver summen og sætter konstanter udenfor summene.
I (4) - (5) gør jeg det samme for b.
I (6) - (8) differentierer jeg igen.
I (9) sætter jeg gradienten lig med 0 for at finde det stationære punkt og får to ligninger med to ubekendte.
(9) $\rightarrow$ (10) bruger jeg lige store koefficienters metode for at eliminere a.
(10) $\rightarrow$ (12) isolerer b.
I (13) - (16) gør jeg det samme for a.

□

2 Geometri

Sætning 8. *Hvis vi har to punkter $A = (a_1, a_2)$ og $B = (b_1, b_2)$ kan vi finde den vektor der går fra A til B med følgende formel*

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Bevis. Vi har følgende vektorligning

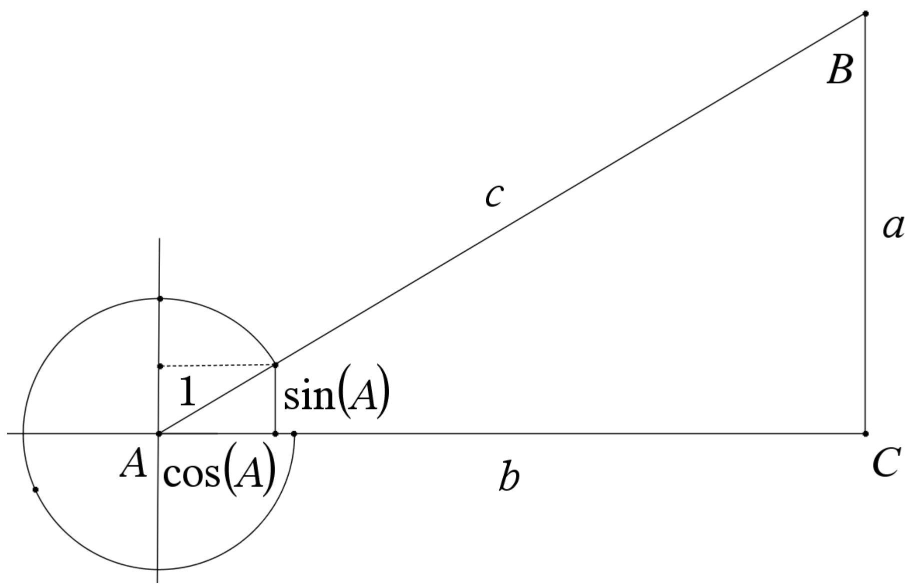
$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \iff \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

□

Sætning 9 (Trigonometri i Retvinklede Trekanter)**.** *For en retvinklet trekant med en spids vinkel v gælder følgende formler*

$$\cos(v) = \frac{hosliggende}{hypotenusen}$$
$$\sin(v) = \frac{modstående}{hypotenusen}$$
$$\tan(v) = \frac{modstående}{hosliggende} = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$$

Bevis. Jeg tegner enhedscirklen med centrum på den spidse vinkel som jeg kalder A i dette tilfælde, men som sagtens kunne have været B, som vist på følgende billede.



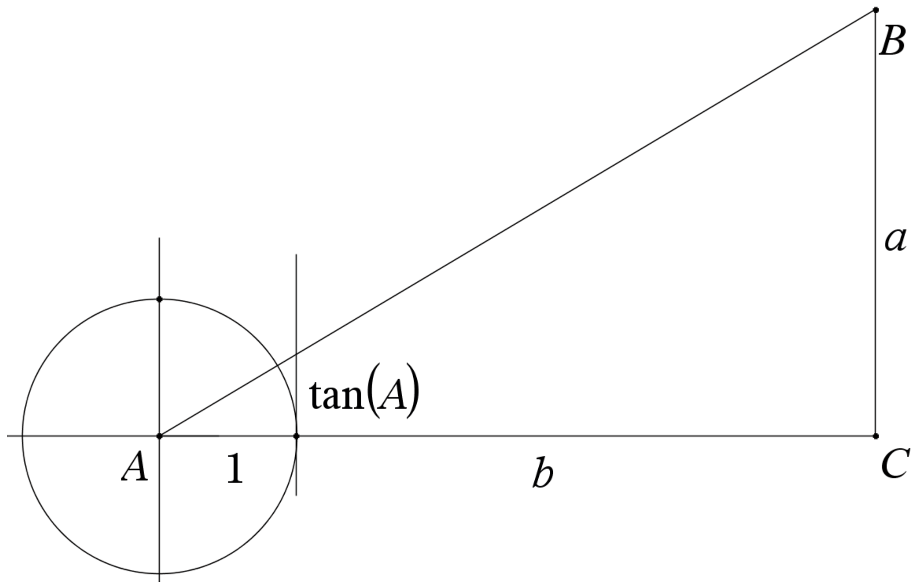
Der er to trekanter på billedet, en lille trekant inde i enhedscirclen og vores trekant og de er ensvinklede. Nu kan vi bruge skalafaktoren for ensvinklede trekanter.

$$\frac{1}{c} = \frac{\cos(A)}{b} = \frac{\sin(A)}{a}$$

Hvis vi ganger med henholdsvis b og a får vi

$$\cos(A) = \frac{b}{c}$$
$$\sin(A) = \frac{a}{c}$$

Så mangler vi at vise formlen for tangens, nu laver vi en trekant udenfor enhedscirklen i stedet for



men laver det samme nummer fordi den sammen formel giver

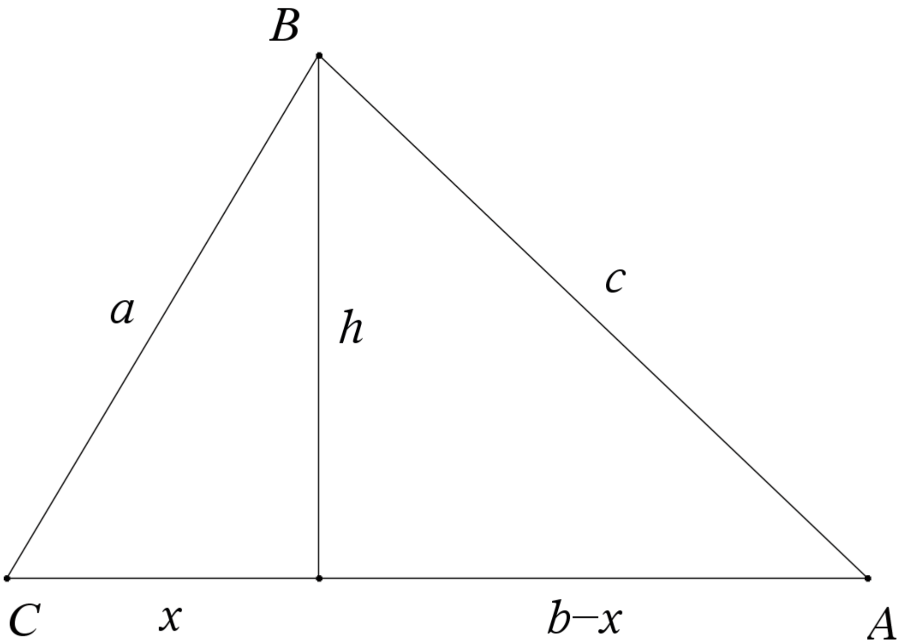
$$\frac{\tan(A)}{a} = \frac{1}{b} \iff \tan(A) = \frac{a}{b}$$

$\square$

Sætning 10 (Cosinusrelationen)**.** *For en vilkårlig trekant med sider a, b & c gælder der følgende*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

Bevis. Jeg starter beviset som for sinusrelationen, ved at tegne højden fra en af vinklerne som i følgende billede.



Vi kan starte med at kigge på de to retvinklede trekanter vi lige har lavet, i dem har vi følgende

$$a^2 = h^2 + x^2 \iff \tag{1}$$
$$h^2 = a^2 - x^2 \tag{2}$$

og

$$\cos(C) = \frac{x}{a} \iff \tag{3}$$
$$x = a\cos(C) \tag{4}$$

derfor har vi

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b-x)^2 &(5)\\ &= a^2 - x^2 + (b-x)^2 &(6)\\ &= a^2 - x^2 + b^2 - 2xb + x^2 &(7)\\ &= a^2 + b^2 - 2xb &(8)\\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C) &(9) \end{aligned}$$

(1) $\to$ (2) Pythagoras på den højre trekant og isolerer h^2.
(3) $\to$ (4) Cosinus i en retvinklet trekant.
(5) $\to$ (6) Pythagoras på den venstre trekant og bruger (2) for at sætte $a^2 - x^2$ på h^2's plads.
(6) $\to$ (7) Den anden kvadratsætning på $(b-x)^2$.
(7) $\to$ (8) $-x^2$ går ud med x^2.
(8) $\to$ (9) Jeg bruger (4) for at sætte $a\cos(C)$ på x's plads og er færdig. □

Sætning 11. *To vektorer $\vec{a}$ & $\vec{b}$ som ikke er nulvektorer er ortogonale hvis og kun hvis deres skalarprodukt er 0, altså*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

Bevis. Der ligger to udsagn i sætningen, hvis to vektorer er ortogonale, er deres skalarprodukt 0, men vi ved også at hvis deres skalarprodukt er 0, må de være ortogonale. Så lad os tage det første tilfælde her

$$\vec{a} \perp \vec{b} \implies \vec{b} = t\hat{a} \implies \tag{1}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (t\vec{b}) \tag{2}$$

$$= t(\vec{a} \bullet \hat{a}) \tag{3}$$

$$= 0 \tag{4}$$

Nu kan vi tage det andet tilfælde

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \implies \tag{5}$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \implies \tag{6}$$

$$a_1b_1 = -a_2b_2 \implies \tag{7}$$

$$b_1 = \frac{b_2}{a_1}(-a_2) \tag{8}$$

$$b_2 = \frac{b_2}{a_1}a_1 \implies \tag{9}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{a_1}(-a_2) \\ \frac{b_2}{a_1}a_1 \end{pmatrix} = \frac{b_2}{a_1}\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{b_2}{a_1}\hat{a} \implies \tag{10}$$

$$\vec{b} \perp \vec{a} \tag{11}$$

(1) $\to$ (2) Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale må $\vec{b}$ være på linje med $\hat{a}$ og så sætter vi $t\hat{a}$ på $\vec{b}$'s plads i skalarproduktet.
(2) $\to$ (3) Flytter t uden for skalarproduktet.
(3) $\to$ (4) og skalarproduktet mellem $\vec{a}$ og $\hat{a}$ er 0.
(5) $\to$ (6) Bruger definitionen af skalarproduktet.
(6) $\to$ (7) Flytter det ene led over lighedstegnet.
(7) $\to$ (8) Dividerer med a_1.
(8) & (9) $\to$ (10) Nu er $\vec{b}$'s koordinater det samme som $\hat{a}$'s koordinater ganget med den samme brøk så må den ene være brøken gange den anden.
(10) $\to$ (11) Hvilket betyder at $\vec{b}$ og $\vec{a}$ er vinkelrette. □

Sætning 12. *Hvis to funktioner, f og g, er differentiable i et punkt x så er deres produkt, $h = f \cdot g$ det også og der gælder*

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Bevis. Vi bruger tretrinsreglen og kigger på

$$\begin{aligned}
\Delta y =& h(x+h) - h(x) && (1)\\
=& f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) && (2)\\
=& f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\\
& - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) && (3)\\
=& (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)) && (4)
\end{aligned}$$

Fra (1) til (2) sætter jeg bare definitionen af h ind.
Fra (2) til (3) har jeg bare indsat det samme led to gange med forskellige fortegn, så jeg har i virkeligheden ikke tilføjet noget.
Fra (3) til (4) har jeg kigget på de to led til venstre og sat fællesfaktoren $g(x_0+h)$ udenfor parentes og gjort det samme med de to led til højre med fællesfaktoren $f(x_0)$.
Nu laver jeg trin 2 og dividerer med h

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{h} =& \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} && (5)\\
=& \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} && (6)\\
=& \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} && (7)
\end{aligned}$$

Jeg har indsat Δy fra (4) ind i tælleren i (5).
Fra (5) til (6) har jeg delt brøken op i to brøker.
Fra (6) til (7) har jeg taget en faktor ned fra tælleren, regneregel (10) fra formelsamlingen baglæns.
Nu skal vi lave trin 3, så $h \to 0$. Så bliver den første faktor i (7) til $f'(x)$ og den sidste bliver til $g'(x)$ imens de andre faktorer bliver til henholdsvis $g(x)$ og $f(x)$. Derfor ender vi med

$$\frac{\Delta y}{h} \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

□

Sætning 13. *For en funktion f der er differentiabel i et punkt x_0 bliver tangentlinjens ligning i det punkt*

$$\begin{aligned}
y =& f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0\\
=& f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)
\end{aligned}$$

Bevis. Vi ved at tangentlinjen har formen $y = ax + b$ og at hældningen er $a = f'(x_0)$ per definition. Så mangler vi bare at finde b. Til det formål kan vi bruge at $(x_0, f(x_0))$ ligger på linjen, derfor kan vi sætte det ind i $y = ax + b$ med $f(x_0) = y$

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \iff b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

og derfor er

$$y = f'(x)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

□

3 Sandsynlighedsregning

Definition 3. *En hændelse A er en del af udfaldsrummet $A \subset U$, hvilket kan skrives som*

$$A = \{u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_m}\}$$

og sandsynligheden er

$$\begin{aligned} P(A) = \sum_{u \in A} P(u) = \sum_{i=1}^{m} P(u_{n_i}) \\ = P(u_{n_1}) + P(u_{n_2}) + \cdots + P(u_{n_m}) \end{aligned}$$

Sætning 14. *For et symmetrisk sandsynlighedsfelt er*

$$P(u) = \frac{1}{|U|}$$

$\forall u \in U$ og for en hændelse A kan sandsynligheden beregnes som

$$P(A) = \frac{|A|}{|U|}$$

Bevis. For at bevise den første formel kan vi bruge at "noget sker":

$$1 = P(U) = \sum_{u \in U} P(u) = P(u) \sum_{u \in U} 1 = P(u) \cdot |U| \iff P(u) = \frac{1}{|U|}$$

hvor vi kan trække $P(u)$ udenfor summen da det er en konstant og fællesfaktor for alle leddene og der er et 1-tal for hvert udfald i udfaldsrummet. For at bevise den anden bruger vi et lignende regnestykke

$$P(A) = \sum_{u \in A} P(u) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in A} 1 = \frac{1}{|U|} |A| = \frac{|A|}{|U|}$$

hvor vi denne gang kender konstanten $P(u)$ og vi kun har $|A|$ 1-taller. □

Definition 4. *Den betingede sandsynlighed*

$$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \iff P(A\cap B) = P(B)P(A|B)$$

definerer sandsynligheden for hændelsen A "givet", eller under antagelse af, hændelsen B.
To hændelser er uafhængige hvis og kun hvis $P(A|B) = P(A)$ og i så fald er

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

Sætning 15. *Antallet af mulige permutationer og kombinationer når du skal vælge r ting ud af n ting kan beregnes ved følgende formler:*

$$\begin{aligned} P(n,r) &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ K(n,r) &= \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \end{aligned}$$

Bevis. Når vi vælger den første ting er der n muligheder, når vi vælger den næste ting er der $n-1$ muligheder osv. Efter 2 ting er har vi ganget med $n-1$ og efter r ting ganger vi med $(n-r+1)$. Det betyder at på grund af multiplikationsprincippet er antal permutationer

$$\begin{aligned} P(n,r) &= n\cdot(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1) \\ &= n\cdot(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

da tælleren og nævneren i den anden linje er ens har vi bare ganget med 1 og vi kan gange op i tælleren hvilket giver os den tredje linje.
Her er rækkefølgen vigtig men hvis rækkefølgen er ligegyldig har vi talt den samme kombination flere gange. For at finde ud af hvor mange permutationer giver den samme kombination kan vi finde ud af hvor mange muligheder der er for det første valg, hvilket er r, for det næste valg er der så $r-1$ muligheder osv. Det betyder at for hver kombination har vi på grund af multiplikationsprincippet $r!$ permutationer som skal divideres ud og formlen for antal kombinationer bliver

$$K(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\square$

Lemma 2. $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$

Bevis.

$$r\binom{n}{r} = \cancel{r}\frac{n!}{\cancel{r}!(n-r)!} \tag{1}$$

$$= n\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} \tag{2}$$

$$= n\binom{n-1}{r-1} \tag{3}$$

□

Sætning 16. *For en binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b(n,p)$ gælder der om dens middelværdi, varians og spredning at*

$$E(X) = np$$
$$Var(X) = E(X)(1-p) = np(1-p)$$
$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

Bevis. Jeg vil kun bevise formlen for middelværdien

$$E(X) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot P(X=r) \tag{1}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r \cdot K(n,r)p^r(1-p)^{n-r} \tag{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} n \cdot K(n-1,r-1)p^r(1-p)^{n-r} \tag{3}$$

$$= np\sum_{r=1}^{n} \cdot K(n-1,r-1)p^{r-1}(1-p)^{n-1-(r-1)} \tag{4}$$

$$= np\sum_{k=0}^{m} \cdot K(m,k)p^k(1-p)^{m-k} \tag{5}$$

$$= np\sum_{k=0}^{m} P(X=k) = np \cdot 1 \tag{6}$$

□

I linje (1) bruger jeg definitionen på den forventede værdi for en stokastisk variabel.
(1) → (2) bruger jeg formlen for sandsynligheden for en binomialfordelt stokastisk variabel.
(2) → (3) bruger jeg lemma 2 på de første par faktorer.
(3) → (4) sætter jeg n og et af p'erne udenfor summen og lægger 1 til og trækker den fra i den sidste potens.

(4) $\rightarrow$ (5) sætter jeg $k = r - 1$ og $m = n - 1$.
(5) $\rightarrow$ (6) bruger jeg igen formlen for sandsynligheden for en binomialfordelt stokastisk variabel og at den samlede sum må være 1.

Sætning 17. *Lad os forestille os en statistisk population med en bestemt egenskab med frekvens p. Fremkomsten af egenskaben i en stikprøve med teststørrelse n er en binomialfordelt stokastisk varabel $X \sim b(n,p)$. 95% Konfidensintervallet for p er intervallet $[p_-, p_+]$ hvor p_- er det mindste tal der gør at $P(X_- \geq r) \leq 2,5\%$ og p_+ er det største tal der gør at $P(X_+ \leq r) \leq 2,5\%$ hvor $X_\pm \sim b(n, p_\pm)$. Der gælder for tilpas stort n følgende for det såkaldte Wilson konfidensinterval:*

1. *p_- og p_+ er rødderne til andengradspolynomiet*

$$q(p) = n(n+4)p^2 - 2n(r+2)p + r^2$$

2. *p_- og p_+ har følgende værdier:*

$$p_\pm \approx \frac{r+2}{n+4} \pm \frac{2}{n+4}\sqrt{\frac{r(n-r)}{n} + 1} = \tilde{p} \pm 2\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{n} - \frac{2n+5}{n(n+4)^2}}$$

hvilket for passende høje r og n kan approksimeres med Wald konfidensintervallet fra formelsamlingen

$$p_\pm \approx \frac{r}{n} \pm \frac{2}{n}\sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} = \hat{p} \pm 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

hvor $\tilde{p} = \frac{r+2}{n+4}$ og $\hat{p} = \frac{r}{n}$.

Bevis. Da n er tilstrækkelig stor kan vi bruge normalapproksimationen så $X_\pm \sim N(\mu_\pm, \sigma_\pm)$ hvor $\mu_\pm = np_\pm$ og $\sigma_\pm = np_\pm(1-p_\pm)$ så vi har at

$$\Phi\left(\frac{r-\mu_-}{\sigma_-}\right) \approx P(X_- \leq r) = 97,5\% \tag{1}$$

$$\iff \quad \frac{r-\mu_-}{\sigma_-} = \Phi^{-1}(97,5\%) \approx 2 \tag{2}$$

$$\& \quad \frac{r-\mu_+}{\sigma_+} = \Phi^{-1}(2,5\%) \approx -2 \tag{3}$$

$$\iff \quad r - np = \pm 2\sqrt{np(1-p)} \tag{4}$$

$$\iff \quad (r-np)^2 = 4np(1-p) \tag{5}$$

$$\iff \quad r^2 - 2rnp + n^2p^2 = 4np - 4np^2 \tag{6}$$

$$\Rightarrow n(n+4)p^2 - 2n(r+2)p + r^2 = 0 \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow d &= 4n^2(r+2)^2 - 4n(n+4)r^2 && (8)\\
&= \cancel{4n^2r^2} + 16n^2r + 16n^2 - \cancel{4n^2r^2} - 16nr^2 && (9)\\
&= 16n(nr + n - r^2) && (10)\\
&= 16n(r(n-r) + n) && (11)\\
&= 16n^2\left(\frac{r(n-r)}{n} + 1\right) && (12)\\
\Rightarrow p_\pm &= \frac{2n(r+2) \pm 4n\sqrt{\frac{r(n-r)}{n} + 1}}{2n(n+4)} && (13)\\
&= \frac{r + 2 \pm 2\sqrt{\frac{r(n-r)}{n} + 1}}{n+4} && (14)
\end{aligned}
$$

I (1) laver jeg normalfordelingsapproksimationen og vil gerne have at vores stikprøve ligger ved grænsen til det højre kritiske område.
(1) → (2) Tager den inverse standardnormalfordelingsfunktion på begge sider af lighedstegnet.
(2) → (3) Bruger formlen for middelværdien og spredningen i binomialfordelingen og skriver $p_\pm$ som p.
(3) → (4) Kvadrerer begge sider.
(4) → (5) Hæver parenteserne.
(5) → (6) Samler leddene på samme side af lighedstegnet.
(6) → (7) Aflæser koefficienterne og beregner diskriminanten.
(7) → (12) Reducerer diskriminanten.
(12) → (13) Sætter diskriminanten ind i formlen for rødderne for et andengradspolynomium.
(13) → (14) Forkorter med $2n$. □

Bemærkning: For at omregne fra stikprøven til stikprøvefrekvensen i sætningen kan man lave følgende omregning

$$
\frac{2}{n}\sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} = 2\sqrt{\frac{r(n-r)}{n^3}} = 2\sqrt{\frac{\frac{r}{n}\frac{(n-r)}{n}}{n}} = 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}
$$

På følgende figur kan man se de involverede størrelser, de mørke farver hører til Wald-konfidensintervallet og de lyse hører til Wilson. De blå er fordelinger svarer til den nedre grænse i 95% konfidensintervallet imens den røde svarer til den øvre grænse. De grønne grafer ligger midt imellem de andre to og er vores "bedste estimater" ud fra vores stikprøve. De blå lodrette streger er derfor μ_-, de røde er μ_+ og den grønne er så vores stikprøve. I kan se at Wilson konfidensintervallet er mere symmetrisk om stikprøven.

4 Integralregning

Definition 5 (Det Bestemte Integral)**.** *Det bestemte integral af en funktion f fra a og b er defineret som arealet af det område der er afgrænset af grafen for f og x-aksen samt linjerne $x = a$ og $x = b$. Notationen og den algebraiske fortolkning af areal er som følgende*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f(t_n)\Delta x_n$$

hvor $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ er en inddeling af intervallet $[a, b]$ i N delintervaller.

Lemma 3 (Middelværdisætningen)**.** *Lad $f(x)$ være en kontinuært funktion der er differentiabel i intervallet $]a, b[$, så findes der et $c \in]a, b[$ så*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lemmaet siger at der findes et punkt c mellem a og b hvor funktionen har den samme hældning som gennemsnitshældningen i intervallet.

Lemma 4 (Middelværdisætningen for Integraler)**.** *Lad $f(x)$ være kontinuært på $[a, b]$ så findes der et $c \in [a, b]$ så*

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx$$

Lemmaet siger at der findes et punkt c mellem a og b sådan at arealet under grafen fra a til b er det samme som arealet af rektanglet der har intervallet som side og højden $f(c)$.

Sætning 18 (Integralregningens Fundamentalsætning: Del 1)**.** *Lad $F(x)$ være en stamfunktion til den kontinuerte funktion $f(x)$ på intervallet $[a, b]$, så gælder der at*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bevis. Lad os inddele intervallet $[a, b]$ i N dele sådan at $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$. Nu har vi at

$$
\begin{aligned}
F(b) - F(a) =& F(x_N) - F(x_{N-1}) + F(x_{N-1}) - F(x_{N-2}) \\
& + \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) && (1) \\
=& \sum_{n=0}^{N} F(x_{n+1}) - F(x_n) && (2) \\
=& \sum_{n=0}^{N} \frac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{x_{n+1} - x_n}(x_{n+1} - x_n) && (3) \\
=& \sum_{n=0}^{N} F'(t_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) && (4) \\
=& \sum_{n=0}^{N} f(t_n)\Delta x_n \to \int_a^b f(x)dx && (5)
\end{aligned}
$$

I linje (1) lægger vi stamfunktionens værdi i de forskellige punkter til og trækker dem fra igen med det samme.
(1) $\to$ (2) samler vi leddene to og to, og skriver det i en sum.
(2) $\to$ (3) forlænger vi med bredden af intervallerne
(3) $\to$ (4) bruger vi middelværdisætningen.
(4) $\to$ (5) omskriver vi udtrykkene og så lader vi $N \to \infty$, dvs. at vi lader inddelingen blive finere og finere.

□

Sætning 19 (Integralregningens Fundamentalsætning: Del 2)**.** *Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion på intervallet $[a, b]$ og betragt følgende funktion på det samme interval*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

så er $F(x)$ differentiabel på $]a, b[$ og $F'(x) = f(x)$.

Bevis. Lad os betragte

$$
\begin{aligned}
F(x+h) - F(x) =& \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt && (1) \\
=& \int_x^{x+h} f(t)dt && (2) \\
=& f(c)(x + h - x) = f(c) \cdot h && (3) \\
\iff \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =& f(c) \iff F'(x) = f(x) && (4)
\end{aligned}
$$

I linje (1) bruger vi bare definitionen.
(1) $\to$ (2) bruger jeg det bestemte integrals egenskaber.

(2) $\rightarrow$ (3) bruger jeg middelværdisætningen for integraler.
(3) $\rightarrow$ (4) dividerer jeg med h på begge sider af lighedstegnet og så lader jeg $h \rightarrow 0$ hvor venstre side er definitionen af at være differentiabel og højre siden er rigtig da $c \in [x, x+h]$. $\square$