Det viser at det er et stationært punkt, for at bekræfte at det er et ekstremum bruger jeg at

$$\begin{vmatrix} K''_{aa} & K''_{ab} \\ K''_{ba} & K''_{bb} \end{vmatrix} = 4n\Sigma x^2 - 4(\Sigma x)^2 > 0$$

jf. påstand 2, og det er et minimum da $K''_{aa}(a,b) > 0$, og $K''_{bb}(a,b) > 0$ for den sags skyld.
I (1) differentierer jeg ledvis med hensyn til a.
(1) $\rightarrow$ (2) ganger jeg parentesen ud.
(2) $\rightarrow$ (3) ophæver summen og sætter konstanter udenfor summene.
I (4) - (5) gør jeg det samme for b.
I (6) - (8) differentierer jeg igen.
I (9) sætter jeg gradienten lig med 0 for at finde det stationære punkt og får to ligninger med to ubekendte.
(9) $\rightarrow$ (10) bruger jeg lige store koefficienters metode for at eliminere a.
(10) $\rightarrow$ (12) isolerer b.
I (13) - (16) gør jeg det samme for a. □

2 Geometri

Sætning 8. *Hvis vi har to punkter $A = (a_1, a_2)$ og $B = (b_1, b_2)$ kan vi finde den vektor der går fra A til B med følgende formel*

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Bevis. Vi har følgende vektorligning

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \iff \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

□

Sætning 9 (Hovedsætning for Vektorer)**.** *For to vektorer $\underline{a}$ og $\underline{b}$ gælder der*

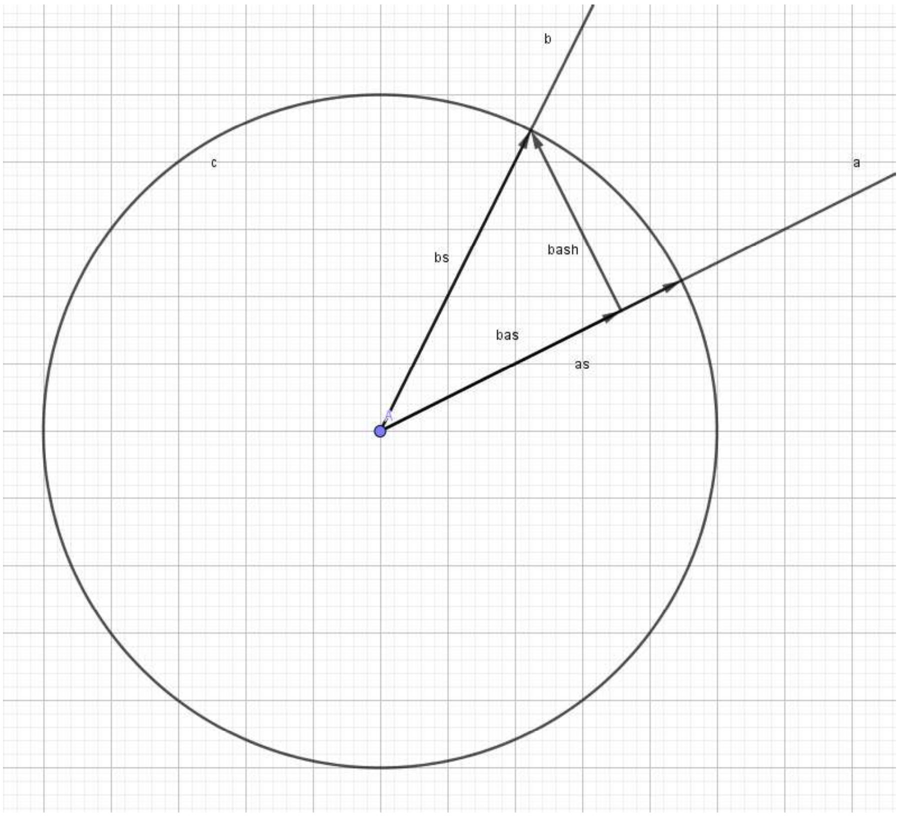
$$\underline{a} \bullet \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos(v) \tag{1}$$

$$\det(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}||\underline{b}|\sin(v) = \pm A \tag{2}$$

$$\underline{b}_{\underline{a}} = \frac{\underline{a} \bullet \underline{b}}{|\underline{a}|^2}\underline{a} = \frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|}\cos(v)\underline{a} \tag{3}$$

$$\underline{b}_{\hat{\underline{a}}} = \frac{\det(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}|^2}\hat{\underline{a}} = \frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|}\sin(v)\hat{\underline{a}} \tag{4}$$

hvor v er vinklen der går fra $\underline{a}$ til $\underline{b}$ mod uret og A er arealet af parallellogrammet med $\underline{a}$ og $\underline{b}$ som sider.



Figur 1: På følgende billede kan vi se at $\underline{a}$ og $\underline{b}$ potentielt er meget større end enhedcirklen, så vi har lavet $\underline{a}^*$=as og $\underline{b}^*$=bs. Så er $\underline{b}^*_{\underline{a}}$=bas og $\underline{b}^*_{\hat{\underline{a}}}$=bash og $|\underline{b}^*_{\underline{a}}| = \cos(v)$ og $|\underline{b}^*_{\hat{\underline{a}}}| = \sin(v)$.

Bevis. Vi starter med at at tage de to vektorer og tegne dem startende i centrum for en enhedscirkel, så skalerer vi dem til

$$\underline{a}^* = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \text{ og } \underline{b}^* = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$$

så de bliver enhedsvektorer som passer ind i enhedscirklen. Så kan vi skrive $\underline{b}^*$ som summen af dens projektioner på $\underline{a}^*$ og $\hat{\underline{a}}^*$, altså

$$\underline{b}^* = \underline{b}^*_{\underline{a}} + \underline{b}^*_{\hat{\underline{a}}} \tag{5}$$
$$= \cos(v)\underline{a}^* + \sin(v)\hat{\underline{a}}^* \tag{6}$$

Formel (6) er nøgleargumentet for formler (1) til (4) i sætningen.

1. Nu tager vi skalarproduktet med $\underline{a}$

$$\begin{aligned}
\underline{a} \bullet \underline{b} &= |\underline{a}|\underline{a}^* \bullet |\underline{b}|\underline{b}^* && (7)\\
&= |\underline{a}||\underline{b}|\underline{a}^* \bullet (\cos(v)\underline{a}^* + \cancel{\sin(v)\hat{\underline{a}}^*}) && (8)\\
&= |\underline{a}||\underline{b}|\cos(v)\cancel{|\underline{a}^*|^2} && (9)
\end{aligned}$$

da skalarproduktet mellem ortogonale vektorer giver 0 og $\underline{a}^*$ er en enhedsvektor.

2. Nu tager vi skalarproduktet med tværvæktoren $\hat{\underline{b}}$ for at bestemme determinanten

$$\begin{aligned}
\det(\underline{a}, \underline{b}) = \hat{\underline{a}} \bullet \underline{b} &= |\underline{a}|\hat{\underline{a}}^* \bullet |\underline{b}|\underline{b}^* && (10)\\
&= |\underline{a}||\underline{b}|\hat{\underline{a}}^* \bullet (\cancel{\cos(v)\underline{a}^*} + \sin(v)\hat{\underline{a}}^*) && (11)\\
&= |\underline{a}||\underline{b}|\sin(v)\cancel{|\hat{\underline{a}}^*|^2} && (12)
\end{aligned}$$

af de samme årsager.
For at vise at det er det samme som arealet af parallellogrammet kan vi bemærke at $\det(\underline{a}^*, \underline{b}^*)|\underline{a}|$ er arealet af paralellogrammet med sider $\underline{b}^*$ og $\underline{a}$ da determinanten er dens højde. For at få det store paralellogram kan vi forlænge $\underline{a}^*$ med $|\underline{a}|$ og tilsvarende forlænge højden, altså $\det(\underline{a}^*, \underline{b}^*)$ med det samme. Dvs. at

$$A = |\det(\underline{a}^*, \underline{b}^*)||\underline{a}||\underline{b}| = |\sin(v)||\underline{a}||\underline{b}| = |\det(\underline{a}, \underline{b})|$$

Hvis determinanten er negativ er vi nødt til at fjerne fortegnet da højde ikke kan være negativ.

3. For at finde formlen for projektionerne tager vi (6) og ganger med $|\underline{b}|$ på begge sider og forlænger højre siden med $|\underline{a}|^2$.

$$\begin{aligned}
\underline{b}^* &= \cos(v)\underline{a}^* + \sin(v)\hat{\underline{a}}^* && (13)\\
\iff |\underline{b}|\underline{b}* &= \frac{|\underline{a}||\underline{b}|\cos(v)}{|\underline{a}|^2}|\underline{a}|\underline{a}^* && (14)\\
&+ \frac{|\underline{a}||\underline{b}|\sin(v)}{|\underline{a}|^2}|\underline{a}|\hat{\underline{a}}^* && (15)\\
\iff \quad \underline{b} &= \frac{\underline{a} \bullet \underline{b}}{|\underline{a}|^2}\underline{a} + \frac{\det(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}|^2}\hat{\underline{a}} && (16)
\end{aligned}$$

□

I (1) omskriver vi $\underline{b}^*$ som summen af dens projektioner på hhv. $\underline{a}$ og $\hat{\underline{a}}$.
(1) → (2) De to projektioner er parallelle med de to ortogonale vektorer $\underline{a}^*$ og $\hat{\underline{a}}^*$.