Исследование регулярного графа кольца матриц

И.И.Гусев

Аннотация

1 Введение

Введем некоторые обозначения, которые используются в работе:

- Под кольцом понимается ассоциативное кольцо (не обязательно содержащее 1).
- $\omega(G)$ — кликовое число графа G, т. е. максимальное число вершин, которые попарно соединены ребрами.
- $\chi(G)$ — хроматическое число графа G, т. е. минимальное число цветов, в которое можно покрасить вершины графа, чтобы вершины, соединенные ребром, были покрашены в разные цвета.
- $Z(R)$ — множество двусторонних делителей нуля кольца R.
- $Reg(\Gamma(R))$ — регулярный граф кольца R, т. е. граф, вершинами которого являются элементы из $R \setminus Z(R)$; две вершины соединены ребром, тогда и только тогда, когда их сумма лежит в $Z(R)$.
- $\Gamma_n(R)$ — регулярный граф кольца матриц $n \times n$ над кольцом R, т. е. $Reg(\Gamma(M_n(R)))$.
- $GL_n(R)$ — обратимые матрицы $n \times n$ с элементами в кольце R.
- $T_n(R)$ —верхнетреугольные матрицы $n \times n$ с элементами в кольце R.
- $K(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ — k-дольный подграф с $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ вершинами, в i-й доле d_i вершин, любые две вершины из разных долей соединены ребром, а вершины из одной доли — нет. $d_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, если $d_i = \infty$, значит в i-й доле счетное число вершин.
- S_n — множество перестановок длины n.

В частности, нас будет интересовать $\Gamma_n(\mathbb{F})$ — регулярный граф кольца матриц над полем. Множество $Z(M_n(\mathbb{F})) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid \det(A) = 0\}$, соответственно, вершинами графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$ будут являться невырожденные матрицы – $GL_n(\mathbb{F})$, а ребрами будут соединены две матрицы A, B, если $\det(A + B) = 0$.

2 Кликовое число регулярного графа кольца матириц над полем

2.1 Улучшение верхней оценки $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F}))$

В данном разделе представлено улучшение оценки кликового числа $\Gamma_n(\mathbb{F})$ из статьи [1] (теорема 2.4). А также показано, что данным метод не позволяет добиться лучших результатов в случае $n = 3$.

Для начала введем несколько обозначений.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ обозначим за f_A многочлен от n^2 переменных, как это было сделано в доказательстве [1, теорема 1]:

$$f_A(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} + x_{11} & \ldots & a_{1n} + x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + x_{n1} & \ldots & a_{nn} + x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для удобства будем записывать переменные в матрицу $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$, тогда имеем $f_A(X) = \det(A+X)$.

Для матрицы $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$, и k $(0 \le k \le n)$ за $x^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ обозначим минор, полученный из строк $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$ матрицы X в случае $k \neq 0$. Если $k = 0$, то положим минор равным 1. За $\overline{x}^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$, $0 \le k \le n$, обозначим минор, полученный удалением строк $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$ из матрицы X в случае $k \neq n$. Если $k = n$, то положим минор равным 1.

В случае $k \neq 0$ верно равенство: $x^{j_1,j_2,\dots j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k} = \sum\limits_{\tau \in S_k} \operatorname{sign}(\tau) \prod\limits_{t=1}^{k} x_{i_t j_{\tau(t)}}$.

А также выполнено: $\overline{x}^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k} = x^{\bar{j}_1,\bar{j}_2,\dots,\bar{j}_{n-k}}_{\bar{i}_1,\bar{i}_2,\dots,\bar{i}_{n-k}}$, где $\{\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $\bar{i}_1 < \bar{i}_2 < \dots < \bar{i}_{n-k}$ и $\{\bar{j}_1, \bar{j}_2, \dots, \bar{j}_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, $\bar{j}_1 < \bar{j}_2 < \dots < \bar{j}_{n-k}$

За $\sigma^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ обозначим перестановку из S_n $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k & \bar{i}_1 & \dots & \bar{i}_{n-k} \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k & \bar{j}_1 & \dots & \bar{j}_{n-k} \end{pmatrix}$

Лемма 2.1.
$$f_A(X) = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n}} \operatorname{sign}(\sigma^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}) \overline{a}^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k} x^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$$

Доказательство. $f_A(X) = \det(A+X)$, по свойству определителя имеем:

$$f_A(X) = \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} (a_{i\sigma(i)} + x_{i\sigma(i)}).$$

Раскроем скобки:

$$f_A(X) = \sum_{\sigma \in S} \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\bar{i}_1 \sigma(\bar{i}_1)} a_{\bar{i}_2 \sigma(\bar{i}_2)} \dots a_{\bar{i}_{n-k} \sigma(\bar{i}_{n-k})} x_{i_1 \sigma(i_1)} x_{i_2 \sigma(i_2)} \dots x_{i_k \sigma(i_k)} =$$

$$= \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}} \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\bar{i}_1 \sigma(\bar{i}_1)} a_{\bar{i}_2 \sigma(\bar{i}_2)} \dots a_{\bar{i}_{n-k} \sigma(\bar{i}_{n-k})} x_{i_1 \sigma(i_1)} x_{i_2 \sigma(i_2)} \dots x_{i_k \sigma(i_k)}$$

Далее, зафиксировав $i_1, i_2, \dots, i_k$, представим каждую перестановку следующим образом:

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k & \bar{i}_1 & \dots & \bar{i}_{n-k} \\ j_{\tau_1(1)} & j_{\tau_1(2)} & \dots & j_{\tau_1(k)} & \bar{j}_{\tau_2(1)} & \dots & \bar{j}_{\tau_2(n-k)} \end{pmatrix},$$

где $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n, \{j_1, j_2, \dots, j_k\} = \{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k)\}, \tau_1 \in S_k, \tau_2 \in S_{n-k}$.

Заметим, что через $j_1, j_2, \dots, j_k, \tau_1, \tau_2$ перестановка σ однозначно задается, а также выполнено равенство: $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}) \cdot \operatorname{sign}(\tau_1) \cdot \operatorname{sign}(\tau_2)$. Применим это представление:

$$f_A(X) = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}} \sum_{\substack{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n \\ \tau_1 \in S_k \\ \tau_2 \in S_{n-k}}} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\bar{i}_1 \sigma(\bar{i}_1)} a_{\bar{i}_2 \sigma(\bar{i}_2)} \dots a_{\bar{i}_{n-k} \sigma(\bar{i}_{n-k})} x_{i_1 \sigma(i_1)} x_{i_2 \sigma(i_2)} \dots x_{i_k \sigma(i_k)} =$$

$$= \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n}} \sum_{\substack{\tau_1 \in S_k \\ \tau_2 \in S_{n-k}}} \operatorname{sign}(\sigma^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}) \operatorname{sign}(\tau_1) x_{i_1 i_{\tau_1(1)}} \dots x_{i_k i_{\tau_1(k)}} \operatorname{sign}(\tau_2) a_{\bar{i}_1 \bar{j}_{\tau_2(1)}} \dots a_{\bar{i}_{n-k} \bar{j}_{\tau_2(n-k)}} =$$

$$= \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n}} \operatorname{sign}(\sigma^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}) (\sum_{\tau_1 \in S_k} \operatorname{sign}(\tau_1) x_{i_1 i_{\tau_1(1)}} \dots x_{i_k i_{\tau_1(k)}}) (\sum_{\tau_2 \in S_{n-k}} \operatorname{sign}(\tau_2) a_{\bar{i}_1 \bar{j}_{\tau_2(1)}} \dots a_{\bar{i}_{n-k} \bar{j}_{\tau_2(n-k)}}) =$$

$$= \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n}} \operatorname{sign}(\sigma^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}) \overline{a}^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k} x^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$$

□

Лемма 2.2. *Если $A_1, A_2, \dots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$ образуют клику в $\Gamma_n(\mathbb{F})$, $k \neq 2^n$, то $f_{A_1}, f_{A_2}, \dots, f_{A_k}, \det X$ линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $a \det(X) + a_1 f_{A_1}(X) + \dots + a_k f_{A_k}(X) = 0$. Подставим в многочлен матрицу A_i, заметим, что $f_{A_j}(A_i) = \det(A_i + A_j) = 0$, так как A_i, A_j – соединены ребром. Тогда имеем:

$a\det A_i + a_1 f_{A_1}(A_i) + \dots + a_k f_{A_k}(A_i) = a\det A_i + a_i \det(2A_i) = (a + a_i 2^n)\det A_i = 0$, так как A_i невырождена, $\det A_i \neq 0 \Rightarrow a_i = -\dfrac{a}{2^n}$.

Теперь у многочлена $a\det(X) + a_1 f_{A_1}(X) + \dots + a_k f_{A_k}(X)$ рассмотрим слагаемые со степенью n. У многочленов $f_{A_i} = \sum\limits_{\substack{0\le k\le n\\ 1\le i_1<\dots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_k\le n}} \operatorname{sign}(\sigma^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k})\overline{a}^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k} x^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ одночлены со степенью n образуют слагаемое $\operatorname{sign}(\sigma^{1,2,\dots,n}_{1,2,\dots,n})\overline{a}^{1,2,\dots,n}_{1,2,\dots,n} x^{1,2,\dots,n}_{1,2,\dots,n} = \det X$. Тогда в исходном многочлене одночлены со степенью n будут образовывать слагаемое $a\det X + a_1\det X + \dots + a_k \det X = a(1 - \dfrac{k}{2^n})\det X$.

С другой стороны, сумма равна нулю, значит слагаемые со степенью n должны между собой сократиться. Следовательно, $a(1-\dfrac{k}{2^n}) = 0$, а так как $k \neq 2^n$, значит $a = 0$, но тогда $a_i = -\dfrac{a}{2^n} = 0$, то есть линейная комбинация тривиальна. □

Обозначим множество всех миноров матрицы X за $\mathcal{X}$.

$$\mathcal{X} = \{x^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k} \mid 0\le k\le n,\ 1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n,\ 1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le n\}$$

Лемма 2.3. $|\mathcal{X}| = \dbinom{2n}{n}$.

Доказательство. Для каждого k, минор задается выбором $i_1, i_2, \dots, i_k$ и $j_1, j_2, \dots, j_k$. Выбрать такие упорядоченные наборы можно $\dbinom{n}{k}\cdot\dbinom{n}{k}$ способами. Значит общее количество миноров равно $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^2 = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{2n}{n}$. □

Теорема 2.4. *Для* $n > 1, \operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$ *верно неравенство* $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \le \dbinom{2n}{n} - 1$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_{\omega(\Gamma_n(\mathbb{F}))}\}$ – максимальная клика.

По лемме 2.1, $f_A = \sum\limits_{\substack{0\le k\le n\\ 1\le i_1<\dots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_k\le n}} \operatorname{sign}(\sigma^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k})\overline{a}^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k} x^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ есть линейная комбинация миноров $x^{j_1,j_2,\dots,j_k}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$, значит $f_A \in \langle\mathcal{X}\rangle$. $\det X = x^{1,2,\dots,n}_{1,2,\dots,n} \in \langle\mathcal{X}\rangle$.

Если $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) = 2^n$, то, в силу $n > 1$, неравенство теоремы выполнено: $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) = 2^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k} < \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^2 = \dbinom{2n}{n} \Rightarrow \omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \le \dbinom{2n}{n} - 1$.

Иначе $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \neq 2^n$. Тогда по лемме 2.2, $f_{A_1}, f_{A_2}, \dots, f_{A_{\omega(\Gamma_n(\mathbb{F}))}}, \det X$ – линейно независимы. А также они лежат в $\langle\mathcal{X}\rangle$, значит $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) + 1 \le \dim\langle\mathcal{X}\rangle \le |\mathcal{X}| = \dbinom{2n}{n}$. То есть $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \le \dbinom{2n}{n} - 1$. □

Доказательство строится как в статье [1], однако пространство, в котором лежат многочлены матриц ограничено более точно. На самом деле данный метод не позволяет еще больше улучшить оценку, о чем свидетельствует теорема 2.5.

Теорема 2.5. *Если* $\operatorname{char} F \neq 2$, *то*

$$\langle f_A \mid A \in GL_n(\mathbb{F})\rangle = \langle\mathcal{X}\rangle,\ \text{и}\ \dim(\langle f_A \mid A \in GL_n(\mathbb{F})\rangle) = |\mathcal{X}| = \binom{2n}{n}$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\dim(\langle\mathcal{X}\rangle) = |\mathcal{X}| = \binom{2n}{n}$.

Последнее равенство следует из леммы 2.3.

Для первого равенства нужно показать, что миноры линейно независимы. Это следует из того что разные миноры состоят из разных одночленов. Пусть миноры $x^{b_1,\dots,b_t}_{a_1,\dots,a_t}$ и $x^{d_1,\dots,d_q}_{c_1,\dots,c_q}$, тогда первый минор содержит одночлены $\prod\limits_{i=1}^{t} x_{a_i b_{\tau_1(i)}}$, для некоторой перестановки τ_1, а второй – одночлены $\prod\limits_{i=1}^{q} x_{c_i d_{\tau_2(i)}}$. Так как $t \neq q$ или $\{a_i\} \neq \{c_i\}$ или $\{b_i\} \neq \{d_i\}$ (миноры разные), значит одночлены не могут совпасть. Откуда в нетривиальной линейной комбинации миноров никакие одночлены не сокращаются, а значит комбинация не зануляется.

Теперь докажем, что $\langle f_A \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\rangle = \langle \mathcal{X} \rangle$.

По лемме 2.1, многочлены f_A представляют из себя линейную комбинацию миноров, значит $f_A \in \langle \mathcal{X} \rangle \Rightarrow \langle f_A \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\rangle \subset \langle \mathcal{X} \rangle$.

Теперь докажем в обратную сторону, а именно, что $x_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k} \in \langle f_A \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\rangle$.

Зафиксируем перестановку $\sigma = \sigma_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k}$. Для этой перестановки рассмотрим набор матриц A, таких что $A_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } j \neq \sigma(i) \\ \pm 1, \text{ иначе} \end{cases}$. Получим 2^n матриц (на каждую позицию нужно выбрать: поставить 1, или -1) с определителем ± 1 (только для одной перестановки получится ненулевое значение).

Заметим, что эти матрицы образуют клику в $\Gamma_n(\mathbb{F})$. Действительно, если сложить две такие матрицы, то какое-то число в позиции $i, \sigma(i)$ занулится, таким образом, получится нулевая строка, а значит сумма вырождена.

Однако, если матрицы $A_1, A_2, \dots, A_w$ – образуют клику, значит $f_{A_1}, f_{A_2}, \dots, f_{A_w}$ – линейно независимы. Пусть линейная комбинация $a_1 f_{A_1} + a_2 f_{A_2} + \dots + a_w f_{A_w} = 0$, тогда при подстановке в этот многочлен A_i, с одной строны получится 0, с другой $f_{A_j}(A_i) = 0$, для $i \neq j$ и $f_{A_i}(A_i) = 2^n \det(A_i) \neq 0$. Значит $a_i = 0$, то есть комбинация тривиальная.

Значит такой набор матриц дает 2^n линейно независимых многочленов. Теперь посмотим на вид этих многочленов исходя из леммы 2.1. Большинство миноров матрицы A из нашего набора будет занулено. Ненулевыми останутся миноры $\overline{a}_{i_1,i_2,\dots,i_t}^{\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_t)}$, для $\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ (в остальных будет нулевая строка), соответственно, многочлены для этих матриц будут являться линейной комбинацией миноров $\left\{ x_{i_1,i_2,\dots,i_t}^{\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_t)} \middle| \{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \right\}$. Таких миноров в точности 2^n (необходимо выбрать подмножество $\{i_1, i_2, \dots, i_t\}$).

Таким образом 2^n линейно независимых многочленов лежат в пространстве порожденном 2^n минорами, откуда пространство порожденное многолченами совпадает с пространством порожденном минорами, следовательно $\langle x_{i_1,i_2,\dots,i_t}^{\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_t)} \mid \{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subset \{1, 2, \dots, n\}\rangle \subset \langle f_A \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\rangle$.

А так как $j_1, j_2, \dots, j_k = \sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k) \Rightarrow x_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k} \in \langle f_A \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\rangle$. То есть $\langle \mathcal{X} \rangle \subset \langle f_A \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\rangle$.

Откуда $\langle f_A \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\rangle = \langle \mathcal{X} \rangle$, а $\dim(\langle f_A \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\rangle) = \dim(\langle \mathcal{X} \rangle) = \binom{2n}{n}$ □

2.2 Оценки на кликовое число прямоугольных матриц

Для прямогольных матриц $m \times n$ также можно ввести понятие регулярного графа

Определение 2.6. Регулярный граф прямоугольных матриц над полем $\mathbb{F}$, это граф, вершинами которого являются матрицы $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ с рангом $\min(n, m)$. Два матрицы A, B соединены ребром, если $\mathrm{rk}(A + B) < \min(n, m)$. Обозначения $\Gamma_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Заметим, что $\Gamma_{n \times m}(\mathbb{F})$ изоморфен $\Gamma_{m \times n}(\mathbb{F})$, так как транспозиция будет являться изоморфизмом этих графов. Таким образмо, без потери общности можно рассматривать $\Gamma_{m \times n}(\mathbb{F})$, для которых $m \leq n$.

Теорема 2.7. *Для* $m \leq n$, $\omega(\Gamma_{m \times n}(\mathbb{F})) \leq \binom{n}{m} \cdot \omega(\Gamma_m(\mathbb{F}))$

Доказательство. Рассмотрим клику $\mathcal{F}$. Так как ранг каждой матрицы m, значит найдутся такие значения $i_1, i_2, \dots, i_m$, что $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ и столбцы матрицы линейно независимы.

Пусть $M_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ – множество матриц клики, у которых столбцы $i_1, i_2, \dots, i_m$ линейно независимы. Тогда $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} M_{i_1,i_2,\dots,i_m}$.

Теперь для матриц множества $M_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ рассмотрим квадратные подматрицы составленные из столбцов $i_1, i_2, \dots, i_m$. Столбцы линейно независимы, значит составленные матрицы будут невырождены, то есть лежат в $GL_n(\mathbb{F})$. Сумма любых двух таким матриц имеет ранг меньше m, так как сумма исходных матриц ранга меньше m. Таким образом, сумма вырождена, а значит составленные матрицы образуют клику в $\Gamma_m(\mathbb{F})$, откуда $|M_{i_1,i_2,\dots,i_m}| \leq \omega(\Gamma_m(\mathbb{F}))$.

Всего множеств $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ $\binom{n}{m}$, размер каждого из них не больше $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F}))$, значит размер их объединения, то есть $\mathcal{F}$ не превосходит $\binom{n}{m} \cdot \omega(\Gamma_m(\mathbb{F}))$. □

Обединяя теорему 2.7 с теоремой 2.4, получаем следующее следствие.

Следствие 2.8. *Для $m \le n$, $\omega(\Gamma_{m\times n}(\mathbb{F})) \le \binom{n}{m} \cdot (\binom{2n}{n} - 1)$*

Однако в частном случае, для матриц $2 \times n$ можно добиться лучшей оценки – точного значения, сформулированной в теореме 2.14.

Лемма 2.9. *Пусть* char $\mathbb{F} \neq 2$. *Если в клике графа $\Gamma_{2\times 3}(\mathbb{F})$ есть три матрицы A, B, C, такие что у A первый столбец нулевой, у B второй столбец нулевой, а у C третий столбец нулевой, тогда в этой клике больше не найдется матрицы с нулевым столбцом.*

Доказательство. От противного: путь нашлась матрица D с нулевым стобцом. Без потери общности, будем считать, что первый стобец D нулевой.

Представим $A = (0|x_1|x_2)$, $B = (y_1|0|y_2)$, $C = (z_1|z_2|0)$, $D = (0|t_1|t_2)$.

$\mathrm{rk}(A + B) = \mathrm{rk}(y_1|x_1|x_2 + y_2) < 2$, следовательно $y_1 = c_1 \cdot x_1$. Аналогично, рассматрев суммы $A+C, B+C, D+B$ и $D+C$, получаем, что $z_1 = c_2 \cdot x_2$, $z_2 = c_3 \cdot y_2$, $t_1 = d_1 \cdot y_1 = c_4 \cdot x_2$, $t_2 = d_2 \cdot z_1 = c_5 \cdot x_2$.

Теперь рассмотрим $A + D$, получим, что $\mathrm{rk}(0|(1 + c_4)x_1|(1 + c_5)x_2) < 2$, следовательно, в силу того что x_1 линейно независимо с x_2, получаем, что $c_4 = -1$ или $c_5 = -1$. Снова без ограничений предположем, что $c_4 = -1$.

$A + C = (c_2x_2|z_2 + x_1|x_2)$, а $D + C = (c_2x_2|z_2 - x_1|c_5x_2)$ их ранг не более одного, а значит $z_2 + x_1 = *x_2$ и $z_2 - x_1 = *x_2$, тогда $2 \cdot z_2 = *x_2 \Rightarrow z_2 = *x_2$, но и $z_1 = *x_2$, откуда z_1, z_2 линейно зависимы, но тогда $\mathrm{rk}(C) < 2$ – противоречие. □

Лемма 2.10. *Пусть* char $\mathbb{F} \neq 2$. *Если в клике графа $\Gamma_{2\times 3}(\mathbb{F})$ есть три матрицы A, B, C, такие что у A первый столбец нулевой, у B второй столбец нулевой, а у C третий столбец нулевой, тогда в этой клике не больше 4 матриц.*

Доказательство. Пусть $A = (0|x_1|x_2), B = (y_1|0|y_2), C = (z_1|z_2|0)$, и пусть нашлась $D = (a|b|c)$, такая что она тоже принадлежит клике. Докажем в таком случае, что D однозначно задается через $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$.

Во-первых поймем соотношения между столбами матриц A, B, C.

$\mathrm{rk}(A + B) \le 1 \Rightarrow y_1 = \alpha x_1, \mathrm{rk}(A + C) \le 1 \Rightarrow z_1 = \beta x_2, \mathrm{rk}(B + C) \le 1 \Rightarrow z_2 = \gamma y_2$. А также $\begin{cases} x_2 + y_2 = \epsilon_1 x_1 \\ x_1 + z_2 = \epsilon_2 x_2 \\ y_1 + z_1 = \epsilon_3 z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma\epsilon_1 x_1 - \gamma x_2 = \gamma y_2 = z_2 = \epsilon_2 x_2 - x_1 \\ \alpha\epsilon_2 x_2 - \alpha\gamma y_2 = \alpha x_1 = y_1 = \epsilon_3\gamma y_2 - \beta x_2 \end{cases}$, так как x_1 и x_2 – линейно независимы, а также z_1 и z_2 – линейно независимы, то есть x_2 и y_2 – линейно независимы, следует, что z_2 и y_1 представляются через них единственном образом, значит соответствующие кооэффициенты в равенствах совпадают: $\epsilon_2 = \gamma$ и $\alpha\epsilon_2 = -\beta$, откуда $\beta = \alpha\gamma$, следоватетельно $\beta + \alpha\gamma = 2\beta \neq 0$, иначе в C 2 нулевых столбца.

Во-вторых, по лемме 2.9 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Теперь выпишем условия на столбцы матрицы D:

$$\mathrm{rk}(A + D) \le 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + b = \delta_1 a \\ x_2 + c = \delta_2 a \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathrm{rk}(B + D) \le 1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 + a = \delta_3 b \\ y_2 + c = \delta_4 b \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathrm{rk}(C + D) \le 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 + a = \delta_5 c \\ z_2 + b = \delta_6 c \end{cases} \tag{3}$$

Пусть каких-то два столбца линейно зависимы. Без потери общности будем считать, что a и b линейно зависимы.

При этом $a \neq 0$, тогда $b = \mu a$. Из (1) получаем $x_1 = (\delta_1 - \mu)a, x_2 + c = *a$ Из (2) – $y_2 + c = *a$, а из $\mathrm{rk}(A+B) \le 1$ следует, что $y_2 + x_2 = *x_1 = *a$, то есть $\begin{cases} x_2 + c = *a \\ y_2 + c = *a \\ y_2 + x_2 = *a \end{cases}$ Но тогда $x_2 + y_2 + c = *a$, а из этого получается, что $x_2 = *a$. Но и $x_1 = *a$, то есть x_1 и x_2 линейно зависимы, а значит $\mathrm{rk}(A) < 2$. Противоречие.

Следовательно любые две пары столбцов D линейно независимы.

Из (1) и (2) получаем, что $\delta_3 b - a = y_1 = \alpha x_1 = \alpha\delta_1 a - \alpha b$, таким образом, так как a и b линейно независимы, $\delta_3 = -\alpha \Rightarrow y_1 + a = -\alpha b$.

Из (1) и (3) получаем, что $\delta_5 c - a = z_1 = \beta x_2 = \beta\delta_2 a - \beta c$, то есть $\delta_5 = -\beta \Rightarrow z_1 + a = -\beta c$. И, наконец, из (2) и (3) получается, что $\delta_6 c - b = z_2 = \gamma y_2 = \gamma\delta_4 b - \gamma c$, откуда $\delta_6 = -\gamma$, а $z_2 + b = -\gamma c$.

В итоге получается система: $\begin{cases} a + \alpha b = y_1 \\ a + \beta c = z_1 \\ b + \gamma c = z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = y_1 - \alpha b \\ b = z_2 - \gamma c \\ y_1 - \alpha z_2 + \alpha\gamma c + \beta c = z_1 \end{cases} \quad [\beta + \alpha\gamma \neq 0] \Leftrightarrow$ $\begin{cases} c = \dfrac{z_1 - y_1 + \alpha z_2}{\alpha\gamma + \beta} \\ a = y_1 - \alpha\dfrac{z_1 - y_1 + \alpha z_2}{\alpha\gamma + \beta} \\ b = z_2 - \gamma\dfrac{z_1 - y_1 + \alpha z_2}{\alpha\gamma + \beta} \end{cases}$. Получаем, что и требовалось, столбцы D однозначно выражаются через A, B, C, то есть клику A, B, C можно дополнить максимум одной матрицей. $\square$

Лемма 2.11. *Пусть* $\mathrm{F} \neq 2$ *и в клике графа* $\Gamma_{2\times3}(\mathbb{F})$ *есть три матрицы с одним и тем же нулевым столбцом. Тогда в этой клике все матрицы имеют тот же нулевой столбец.*

Доказательство. Для удобства будем считать, что нулевой столбец у матриц третий. Пусть нашлась матрица $A = (a'_{ij})$, которая соединена с ними, при этом третий столбец A не нулевой. Без потери общности можно считать, что $a'_{23} \neq 0$, тогда элеметраными преобразованиями к столбцам можно привести эту матрицу к виду: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix}$, при этом у трех исходных матриц эти преобразования оставляют нулевой столбец. После преобразования связность вершин сохранится, поэтому останется клика. Обозначим матрицы новой клики за $\begin{pmatrix} x_i & y_i & 0 \\ z_i & t_i & 0 \end{pmatrix}_{i=1,2,3}$, получается дополнительно в клику входит матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix}$.

Пусть $a_{13} = 0$, тогда из $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_i + a_{11} & y_i + a_{12} & 0 \\ z_i & t_i & a_{23} \end{pmatrix} \leq 1$ получаем, что $x_i = -a_{11}, y_i = -a_{12}$.

Теперь воспользуемся тем, что $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_i + x_j & y_i + y_j & 0 \\ z_i + z_j & t_i + t_j & 0 \end{pmatrix} \leq 2$. Получаем, что $(z_i\ t_i) + (z_j\ t_j) = -2c_{ij}(a_{11}\ a_{12})$. В таком случае $(z_1\ t_1) + (z_2\ t_2) + (z_3\ t_3) = -(c_{12} + c_{13} + c_{23})(a_{11}\ a_{12})$, откуда $(z_1\ t_1)$ пропорционален $-(a_{11}\ a_{12}) = (x_1\ y_1)$. Что приводит к противоречию, ведь $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ z_1 & t_1 & 0 \end{pmatrix} > 1$.

Значит $a_{13} \neq 0$, тогда из $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_i + a_{11} & y_i + a_{12} & a_{13} \\ z_i & t_i & a_{23} \end{pmatrix} \leq 1$ следует, что $z_i = \dfrac{a_{23}}{a_{13}}(x_i + a_{11})$, а $t_i = \dfrac{a_{23}}{a_{13}}(y_i + a_{12})$.

Теперь воспользуемся тем, что $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_i + x_j & y_i + y_j & 0 \\ z_i + z_j & t_i + t_j & 0 \end{pmatrix} \leq 1$. Получаем, что $(z_i\ t_i) + (z_j\ t_j) = c_{ij}((x_i\ y_i) + (x_j\ y_j))$. С другой стороны $(z_i\ t_i) + (z_j\ t_j) = \dfrac{a_{23}}{a_{13}}((x_i\ y_i) + (x_j\ y_j)) + \dfrac{a_{23}}{a_{13}}(a_{11}\ a_{12})$. В таком случае $\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(a_{11}\ a_{12}) = c'_{ij}((x_i\ y_i) + (x_j\ y_j))$, $\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(a_{11}\ a_{12}) \neq 0$, иначе $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a12 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix} < 2$. Откуда $(x_i\ y_i) + (x_j\ y_j) = *(a_{11}\ a_{12})$, тогда $(x_1\ y_1) + (x_2\ y_2) + (x_3\ y_3) = *(a_{11}\ a_{12})$ и $(x_1\ y_1), (x_2\ y_2), (x_3\ y_3)$ пропорционально $(a_{11}\ a_{12})$. В этом случае $(z_i\ t_i) = *(x_i\ y_i) + *(a_{11}\ a_{12}) = *(a_{11}\ a_{12})$ – пропорционально $(a_{11}\ a_{12})$, следовательно пропорционально и $(x_i\ y_i)$. Отсюда $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_i & y_i & 0 \\ z_i & t_i & 0 \end{pmatrix} \leq 1$ – противоречие.

$\square$

Теорема 2.12. *Если* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, *то* $\omega(\Gamma_{2\times3}(\mathbb{F})) \leq 5$.

Доказательство. Рассмотрим клику $\mathcal{F}$, пусть A матрица этой клики. Тогда элементарными преобразованиями столбцов и строк A можно привести к виду $(0|a_1|a_2)$. После преобразования клика $\mathcal{F}$ станет $\mathcal{F}'$.

Если у всех матриц теперь первый нулевой столбец, тогда убрав его, получим клику в $\Gamma_2(\mathbb{F})$, то есть матриц в клике не больше 5.

Иначе нашлась матрица B, у которой первый столбец ненулевой, тогда элементарными преобразованиями можно привести ее к виду $(b_1|0|b_2)$ со вторым нулевым столбцом, при этом не испортив нулевой столбец матрицы A. После преобразования клика будет содержать матрицы $(0|a'_1|a'_2)$ $(b_1|0|b_2)$.

Теперь если в клике есть матрица с линейно-независимыми первыми двумя столбцами, то элементарными преобразованиями можно занулить третий столбец не испортив нули предыдущих двух матриц. Тогда по лемме 2.10, размер клики может быть не больше 4.

Иначе, все матрицы в клике имеют вид $(x| * x|y)$ или вид $(0|x|y)$. В случае, если есть хотя бы еще две матрицы вида $(0|x|y)$, по лемме 2.11 получим что у всех матриц первый нулевой столбец, но у матрицы $(b_1|0|b_2)$, $b_1 \neq 0$, значит такого быть не могло.

То есть матриц вида $(0|x|y)$ может быть не больше одной.

Пусть одна такая матрица есть: $(0|c_1|c_2)$, остальные матрицы имеют вид $(x| * x|y), x \neq 0$. Если есть хотя бы одна такая матрица, то из $\mathrm{rk}(x|a_1 + *x|a_2 + y) \leq 1$ получаем, что $a_1 = *x$ и $a_2 + y = *x$, из $\mathrm{rk}(x|c_1 + *x|c_2 + y) \leq 1$ получаем, что $c_1 = *x$ и $c_2 + y = *x$, а также из $\mathrm{rk}(0|a_1 + c_1|a_2 + c_2) \leq 1$ получаем, что $a_2 + c_2 = *x$. А из того, что $\begin{cases} a_2 + y = *x \\ c_2 + y = *x \\ a_2 + c_2 = *x \end{cases}$, следует, что все столбцы пропорциональны x, но тогда матрицы будут иметь ранг меньше 2. Значит больше матриц быть не может (в клике всего 3 матрицы).

Если же матриц вида $(0|x|y)$ – нет, тогда все остальные матрицы имеют вид $(x_i| * x_i|y_i), x_i \neq 0$. Тогда из $\mathrm{rk}(x_i|a_1 + *x_i|a_2) \leq 1$ получаем, что $a_1 = *x_i$, а следовательно $x_i = *x_j$.

Пусть таким матриц хотя бы 2. Тогда $\mathrm{rk}(*x_1| * x_1|a_1 + y_1) \leq 1, \mathrm{rk}(*x_1| * x_1|a_1 + y_2) \leq 1, \mathrm{rk}(*x_1| * x_1|y_1 + y_2) \leq 1$.

Тогда $\begin{cases} a_1 + y_1 = *x_1 \\ a_1 + y_2 = *x_1 \\ y_1 + y_2 = *x_1 \end{cases}$, откуда $y_1 = *x_1$, но тогда $\mathrm{rk}(x_1| * x_1|y_1) \leq 1$ – противоречие.

Следовательно матриц в клике может быть не более трех.

Получили, что во всех случаях размер клики не более 5. Более того, он равен 5 только в том случае, если элементарными преобраованиями она приводится к клике, у которой у всех матриц одинаковый нулевой столбец.

□

Следствие 2.13. *Если* $\mathrm{char}\ \mathbb{F} \neq 2$, *то* $\omega(\Gamma_{2\times3}(\mathbb{F})) = 5$.

Следствие получается из того, что к максимальной клике $\Gamma_2(\mathbb{F})$ можно добавить нулевой столбец и получить клику размера 5. Более того любая максимальная клика $\Gamma_{2\times3}(\mathbb{F})$ получится эквивалентна такой.

Можно доказать аналогиное утверждение и для матриц $2 \times n$, для $n \geq 2$.

Теорема 2.14. *Для* $n \geq 2$, *поля* $\mathbb{F}$, *для которого* $\mathrm{char}\ \mathbb{F} \neq 2$, $\omega(\Gamma_{2\times n}(\mathbb{F})) = 5$. *И максимальная клика* $\Gamma_{2\times n}(\mathbb{F})$ *изоморфна той, что получена из максимальной клики* $\Gamma_2(\mathbb{F})$ *добавлением нулевых столбцов.*

Доказательство. Докажем оба утверждения сразу по индуции по n. Для $n = 2$ все уже доказано. Поэтому имеет смысл доказывать начиная с $n = 3$.

База: $n = 3$, доказано выше (следствие 2.13).

Шаг: $n - 1 \to n$. Рассмотрим максимальную клику графа $\Gamma_{2\times n}(\mathbb{F})$. Выберем произвольную матрицу этой клики и элементарными преобразованиями приведем ее к виду, в котором столбцы с третьего по n-й нулевые. Обозначим эту матрицу за A. При действии этих преображений на всю клику, она перейдет в другую максимальную клику.

Заметим, что у новой клики у всех матриц столбцы с третьего по n-й попарно зависимы, иначе в сумме с матрицей A они бы остались неизменными и дали матрицу ранга 2, что противоречит свойству клики.

Пусть у всех матриц новой клики последний столбец нулевой, тогда при отбрасывании его у всех матриц, получим клику $\Gamma_{2\times(n-1)}(\mathbb{F})$, для которой, по предположению индукции, утверждение верно. Откуда и у исходной клики размер будет равным 5, а также она будет изоморфна клике $\Gamma_2(\mathbb{F})$ с добавленными нулями.

Иначе нашлась матрица, у которой последний столбец ненулевой. Тогда, так как последний и предпоследний стобцы линейно зависимы, элементарным преобразованием можем добиться, чтоб $n-1$-й стобец стал нулевым не испортив при этом вид матрицы A. Назовем исправленную матрицу B. Клика после такого преобразования перейдет в изоморфную клику.

Опять же, если у всех матриц полученной клики предпоследний столбец нулевой, можем свести эту клику к клике $\Gamma_{2\times(n-1)}(\mathbb{F})$.

Иначе найдем матрицу, у которой предпоследний столбец ненулевой. Элементарным преобразованием сделаем у этой матрицы последни столбец нулевым. Назовем эту матрицу C. Также после преобразования получим новую клику. Заметим, что при нем не испортятся матрицы A и B, так как у них предпосление столбцы нулевые.

Таким образом в полученной клике будут матрицы $A = (\dots|0|0)$, $B = (\dots|0|x)$ и $C = (\dots|y|0)$, при этом $x, y \neq 0$. Так как $\operatorname{rk}(B + C) < 2$, то столбцы x и y – линейно зависимы, $y = \alpha x$.

Рассмотрим первые строчки этих матриц, пусть $A = (a|\dots|0|0)$, $B = (b|\dots|0|x)$ и $C = (c|\dots|\alpha x|0)$.

Из свойства клики имеем: $\operatorname{rk}(A+B) = (a+b|\dots|0|x) < 2$, значит $a+b$ и x – линейно независимы, аналогично $\operatorname{rk}(A + C) = (a + c|\dots|\alpha x|0) < 2$ и $\operatorname{rk}(B + C) = (b + c|\dots|\alpha x|x) < 2$ значит $a + c$ и αx – линйено зависимы, а также $b + c$ и x – линейно зависимы. Тогда можно составить систему $\begin{cases} a+b = *x \\ a+c = *x \\ b+c = *x \end{cases}$, из чего получаем, что $a = *x, b = *x, c = *x$.

Аналогично можно доказать про второй столбец матриц A, B, C, и так далее. Но тогда все столбцы матрицы A, B и C линейно зависимы, значит $\operatorname{rk}(A) < 2, \operatorname{rk}(B) < 2, \operatorname{rk}(C) < 2$. Но матрицы в регулярном графе матриц $2 \times n$ имеют ранг 2 – противоречие. Значит других возможностей для клики быть не может. □

2.3 Пример клики в $\Gamma_3(\mathbb{F})$

В $\Gamma_3(\mathbb{F})$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$ существует клика размера 14 ($\omega(\Gamma_3(\mathbb{F})) \geq 14$).

Пример 2.15.

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Замечание. Для нахождения примера была написана программа, которая находит клику на 14 матриц, при этом для упрощения модели перебора все матрицы состоят из чисел 0, 1, -1. Программа расположена по ссылке https://github.com/1van9/Cliques_in_regular_graphs/blob/main/Clique_search/main.cpp.

Программа выполняет перебор, пытаясь расширить клику новыми случайными матрицами. Если через некоторое число попыток *cnt try* расширить клику не удалось, то программа завершает эту ветвь перебора. *cnt try* подбирается в зависимости от размера клики, для того чтобы перебор не работал долго на тупиковых решениях. Функция *Connect* проверяет, соединены ли две матрицы ребром, а функция *MakeRandomMatrix* создает новую матрицу со значениями либо от $-maxc$ до $maxc$, либо со значениями из массива *values*.

Для нахождения ответа приходилось несколько раз менять значения *cnt try*. Также, было замечено, что конструкция с углом нулей часто встречается в конфигурациях. Поэтому были отобраны матрицы одной из клик, в которых встречается угол нулей и очередной перебор запускался не с нуля, а с набора из 8 матриц из клики. Таким образом, получилась клика размера 14.

2.4 Нижняя оценка $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F}))$

В статье приводится утверждение про клику $\mathrm{diag}(\pm 1 \pm 1 \cdots \pm 1)$ и доказывается ее нерасширяемость [1, теорема 3]. Можно немного улучшить пример клики для матриц $n \times n$ (теорема 2.21).

Определение 2.16. Пусть $\mathcal{F}^1_{n_1}, \mathcal{F}^2_{n_2}, \dots \mathcal{F}^k_{n_k}$ – клики графов $\Gamma_{n_1}(\mathbb{F}), \Gamma_{n_2}(\mathbb{F}), \dots, \Gamma_{n_k}(\mathbb{F})$. Тогда обозначим

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^1_{n_1}, \mathcal{F}^2_{n_2}, \dots \mathcal{F}^k_{n_k}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix} \middle| A_i \in \mathcal{F}^i_{n_i} \right\}$$

Назовем $\mathcal{F}(\mathcal{F}^1_{n_1}, \mathcal{F}^2_{n_2}, \dots \mathcal{F}^k_{n_k})$ *блочной кликой.*

Теорема 2.17. *Блочная клика $\mathcal{F}(\mathcal{F}^1_{n_1}, \mathcal{F}^2_{n_2}, \dots \mathcal{F}^k_{n_k})$ действительно является кликой в $\Gamma_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{F})$*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{F}^1_{n_1}, \mathcal{F}^2_{n_2}, \dots \mathcal{F}^k_{n_k}), A \neq B, A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_k \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 + B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_k + B_k \end{pmatrix}$

Так как A, B различны, найдется i, что $A_i \neq B_i$. А так как $A_i, B_i \in \mathcal{F}^i_{n_i}$, значит $A_i + B_i$ вырождена. Значит, один из блоков $A + B$ вырожден, откуда получаем, что их сумма вырождена. Следовательно, блочная клика – клика. □

Утверждение 2.18. $|\mathcal{F}(\mathcal{F}^1_{n_1}, \mathcal{F}^2_{n_2}, \dots \mathcal{F}^k_{n_k})| = |\mathcal{F}^1_{n_1}| \cdot |\mathcal{F}^2_{n_2}| \cdot \dots \cdot |\mathcal{F}^k_{n_k}|$

С помощью конструкции блочных клик можно построить нижние оценки на кликовое число.

Теорема 2.19. *Если* $\mathrm{char} F \neq 2$, *то* $\omega(\Gamma_{3n}(\mathbb{F})) \geq 14^n, \omega(\Gamma_{3n+1}(\mathbb{F})) \geq 2 \cdot 14^n, \omega(\Gamma_{3n+2}(\mathbb{F})) \geq 5 \cdot 14^n$

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_2$ – клика из двух матриц $\Gamma_1(\mathbb{F})$, $\mathcal{K}_5$ – клика из 5 матриц $\Gamma_2(\mathbb{F})$, $\mathcal{K}_{14}$ – клика из 14 матриц $\Gamma_3(\mathbb{F})$ (пример 2.15).

Тогда блочные клики $\mathcal{F}(\mathcal{K}_{14}, \dots, \mathcal{K}_{14}), \mathcal{F}(\mathcal{K}_{14}, \dots, \mathcal{K}_{14}, \mathcal{K}_2), \mathcal{F}(\mathcal{K}_{14}, \dots, \mathcal{K}_{14}, \mathcal{K}_5)$ – клики в графах $\Gamma_{3n}(\mathbb{F}), \Gamma_{3n+1}(\mathbb{F}), \Gamma_{3n+2}(\mathbb{F})$ соответственно, а их размеры $14^n, 2 \cdot 14^n, 5 \cdot 14^n$. Эти примеры и дают нужные оценки кликовых чисел □

Отметим, что оценка не дает сильно хороших результатов. Ассимптотически нижняя оценка это $O(\sqrt[3]{14}^n) \sim O(2.41^n)$. Однако верхняя оценка из теоремы 2.4 $\binom{2n}{n} - 1$, ассимптотичски $O(\frac{4^n}{\sqrt{n}})$ – чуть лучше $O(4^n)$.

Далее будет сформулровано утверждение про нерасширяемость блочной клики (Теорема 2.21). Однако для начала сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 2.20. *Пусть $A \in GL_n(\mathbb{F})$, $m < n$. Обозначим* $E^i_j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *где λ находится в i-ой строке и j-ом столбце. Тогда найдутся $i_1, \dots, i_t$, $j_1, \dots, j_t$, $\alpha_1, \dots \alpha_t$, такие, что $0 < i_1, \dots i_t \leq m, m < j_1, \dots j_t \leq n, \alpha_1, \dots \alpha_t \in \mathbb{F}$, и у матрицы $(E^{i_1}_{j_1}(\alpha_1) \dots E^{i_t}_{j_t}(\alpha_t) A)$ верхние m строк и столбцов образуют невырожденную подматрицу.*

Доказательство. $E^i_j(\lambda)$ – матрица элементарного преобразования, $E^i_j(\lambda)A$ – матрица, полученная из A прибавлением к i-ой строке j-ой умноженной на λ. Пусть B_0 это подматрица A состоящая из m первых столбцов A. Так как A невырождена, значит столбцы B_0 линейно независимы.

Построим последовательность $B_0, B_1, \dots B_m$ матриц $n \times m$, такую, что $B_k = E^k_{j_k}(\alpha_k)B_{k-1}, j_k > m$ и первые k строк B_k линейно независимы.

Будем строить последовательность по индукции по k ($k \leq m$).

База, $k = 0$. B_0 уже построена.

Шаг, $k-1 \to k$. Заметим, что B_{k-1} получена из B_0 домножением слева на матрицу элементарного преобразования, у B_0 столбцы были линейно независимы, а элементарные преобразования не портят линейную независимость, значит столбцы B_{k-1} линейно независимы. Также первые $k-1$ строк линейно независимы.

- Если k-ая строка линейно независима с предыдущими, значит положим $B_k = E^k_n(0)B_{k-1} = B_{k-1}$, тогда в B_k первые k строк будут линейно независимы.

- Иначе, докажем, что найдется строка среди $m+1$-ой – n-ой, которая будет линейно независима с первыми $k-1$ строками.

  Пусть такой строки не нашлось, тогда есть $n-m+1$ строка линейно зависимая с первыми $k-1$. Следовательно существует ряд элементарных операций к строкам, который зануляет эти $n-m+1$ строки. При этом эти операции не нарушают линейную независимость столбцов. Значит, нашлось m столбцов, у которых только $m-1$ ненулевых позиций ($n-m+1$ строка из n занулена), которые линейно независимы. Но размерность пространства таких столбцов $m-1$, значит m столбцов найтись не могло. Откуда есть строка $t, m < t \leq n$, линейно независима с $k-1$ первыми строками. Тогда если ее прибавить к k-ой строке, получим строку, линейно независимую с предыдущими, откуда все k строк поучатся линейно независимы. Поэтому положим $B_k = E^k_t(1)B_{k-1}$.

Таким образом, мы смогли построить B_k, удовлетворяющий условиям. Значит предположение индукции верно.

Получаем, что $B_m = E^m_{j_m}(\alpha_m)E^{m-1}_{j_{m-1}}(\alpha_{m-1})\dots E^1_{j_1}(\alpha_1)B_0$, у B_m первые m строк линейно независимы, значит они образуют невырожденную матрицу.

Заметим, что $m < j_1, j_2, \dots j_m \leq n$, первые m столбцов у $E^m_{j_m}(\alpha_m)E^{m-1}_{j_{m-1}}(\alpha_{m-1})\dots E^1_{j_1}(\alpha_1)A$ как раз образуют B_m. Значит у матрицы $(E^m_{j_m}(\alpha_m)E^{m-1}_{j_{m-1}}(\alpha_{m-1})\dots E^1_{j_1}(\alpha_1)A)$ первые m строк и столбцов образуют невырожденную матрицу. □

Теорема 2.21. *Если $\mathcal{F}^1_{n_1}, \mathcal{F}^2_{n_2}, \dots \mathcal{F}^k_{n_k}$ – нерасширяемые клики графов $\Gamma_{n_1}(\mathbb{F}), \Gamma_{n_2}(\mathbb{F}), \dots, \Gamma_{n_k}(\mathbb{F})$, тогда блочная клика $\mathcal{F}(\mathcal{F}^1_{n_1}, \mathcal{F}^2_{n_2}, \dots \mathcal{F}^k_{n_k})$ также нерасширяема.*

Доказательство. Пусть нашлась невырожденная матрица $A \notin \mathcal{F}$, которой можно расширить клику. Докажем, что такого не может быть по индукции по k – количеству изначальных клик:

База, $k = 1$.

$\mathcal{F} = \mathcal{F}^1_{n_1}$, значит, эту клику нельзя дополнить никакой матрицей.

Шаг, $k \to k+1$.

$\mathcal{F}$ – блочная клика из клик $\mathcal{F}^1_{n_1}, \dots \mathcal{F}^{k+1}_{n_{k+1}}$. Найдем такую матрицу из клики $\mathcal{F}$, что её сумма с A невырождена.

Пусть $m = n_1 + \dots + n_k$, U – подматрица $m \times m$ матрицы A, состоящая из m первых столбцов и строк.

Будем применять к A элементарные операции, каждая из которых будет прибавлять к строчке от 1 до m строчку от $m+1$ до n умноженную на число. Такими операциями можно добиться чтобы подматрица U стала невырожденной, что доказывается в следующей лемме.

Пусть $E^{i_1}_{j_1}(\alpha_1), E^{i_2}_{j_2}(\alpha_2), \dots E^{i_t}_{j_t}(\alpha_t)$ матрицы из леммы 2.20, которые приводят A к нужному виду. Также положим $P = E^{i_1}_{j_1}(\alpha_1)E^{i_2}_{j_2}(\alpha_2)\dots E^{i_t}_{j_t}(\alpha_t), A' = PA, U'$ – подматрицу A' из певых m строк и столбцов, по построению U' невырожденная.

Рассмотрим клику $\mathcal{F}'$ полученную из $\mathcal{F}$ домножением всех матриц слева на P.

Если в $\mathcal{F}$ была матрица $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1} \end{pmatrix}$, то в $\mathcal{F}'$ ей будет соответствовать матрица

$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1} \end{pmatrix}$, так как P это ряд элементарных операций прибавляющих к верхним m строчкам нижние, умноженные на коэффициенты.

Тогда если построить блочную клику из k первых клик $\mathcal{F}^1_{n_1} \dots \mathcal{F}^k_{n_k}$, то ее нельзя дополнить невырожденной матрицей U', значит найдется такая матрица V в этой клике, что $U' + V$ невырождена.

Рассмотрим всевозможные матрицы $B' = \begin{pmatrix} & & & * \\ & V & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}$, где $X \in \mathcal{F}^{k+1}_{n_{k+1}}$. $B' \in \mathcal{F}'$.

Докажем, что найдется X, что $A' + B'$ невырождена.

$A' = \begin{pmatrix} & & & \times \\ & U' & & \vdots \\ & & & \times \\ \times & \dots & \times & C \end{pmatrix}$, $A' + B' = \begin{pmatrix} & & & \times + * \\ & U' + V & & \vdots \\ & & & \times + * \\ \times & \dots & \times & C + X \end{pmatrix}$. Так как $U' + V$ невырождена, существует ряд элементарных операций со строками, приводящий $\begin{pmatrix} & & & \times \\ & U' + V & & \vdots \\ & & & \times \\ \times & \dots & \times & C \end{pmatrix} \to$ $\begin{pmatrix} & & & \times \\ & U' + V & & \vdots \\ & & & \times \\ 0 & \dots & 0 & C' \end{pmatrix}$. Притом все операции верхние m строк прибавляют к нижним с какими-то коэффициентами. Тогда эти же операции приводят $A' + B'$ к $\begin{pmatrix} & & & \times + * \\ & U' + V & & \vdots \\ & & & \times + * \\ 0 & \dots & 0 & C' + Y \end{pmatrix}$. Заметим, что C' – невырождена, так как она стоит на блочной диагонали верхнетреугольной невырожденной матрицы $\begin{pmatrix} & & & \times \\ & U' + V & & \vdots \\ & & & \times \\ 0 & \dots & 0 & C' \end{pmatrix}$. Поймем, как Y зависит от X. Мы применяем к B' операции к строчкам, набор которых зависит только от A' и V, до этого мы из матрицы $\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & V & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}$, получили матрицу B', тоже применяя не зависящие от X операции к строчкам. Откуда есть общий набор элементарных операций над строками, который переводит матрицу $\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & V & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}$ в матрицу $\begin{pmatrix} & & & * \\ & V & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & Y \end{pmatrix}$. Значит на самом деле к X тоже применяются элементарные операции над строками не зависящие от него. Откуда $Y = QX$, где матрица Q – невырождена и не зависит от X.

Клика $\mathcal{F}^{k+1}_{n_{k+1}}$ не расширяется, эквивалентная ей клика $\mathcal{F'}^{k+1}_{n_{k+1}}$, полученая из первой домножением слева на Q также не расширяется (если эту клику можно расширить матрицей M, то исходную клику можно расширить матрицей $Q^{-1}M$). Значит, для невырожденной C' найдется такой $Y \in \mathcal{F'}^{k+1}_{n_{k+1}}$, что $C' + Y$ невырождена. Тогда $X = Q^{-1}Y$ лежит в $\mathcal{F}^k_{n_{k+1}}$. Рассмотрим B' для этого X. Получим, что $A' + B'$ приводится элементарными преобразованиями к виду блочной верхнетреугольной матрицы, на диагонали которой стоят невырожденные матрицы $U' + V, C' + Y$. Значит она сама будет невырожденной. Но элементарные преобразования не меняют вырожденность, откуда и исходная матрица невырождена. Тем самым для матрицы A' мы нашли матрицу B' из клики $\mathcal{F}'$, которая дает невырожденную сумму. Тогда в $\mathcal{F}$ найдется $B = P^{-1}B'$, $\det(A+B) = \det(P^{-1}(A'+B')) = \det P^{-1}\det(A'+B') \neq 0$. Значит матрица A не может дополнить клику – предположение индукции верно.

Вывод: $\mathcal{F}$ нерасширяемая клика. $\square$

3 Многодольные подграфы $\Gamma_2(\mathbb{F})$

В данном разделе будет исследован вопрос: какие полные многодольные подграфы вложены в $\Gamma_2(\mathbb{F})$. Результат сформулирован в теореме 3.7.

Лемма 3.1. *Если $\mathbb{F}$ – бесконечное поле, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, то $K(\infty,\infty,\infty,\infty) \subset \Gamma_2(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Положим $A^i_j = \left\{ \begin{pmatrix} i & a \\ 0 & j \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F} \right\}$.

Тогда $A^1_1, A^1_{-1}, A^{-1}_1, A^{-1}_{-1}$ бесконечные подмножества $GL_2(\mathbb{F})$, в каждом множестве любые две матрицы не соединены ребром в $\Gamma_2(\mathbb{F})$. При этом любые две матрицы из разных множеств будут соединены, потому что у их суммы на диагонали появится 0. Значит подграф из матриц $A^1_1 \cup A^1_{-1} \cup A^{-1}_1 \cup A^{-1}_{-1}$ является $K(\infty,\infty,\infty,\infty)$. $\square$

Лемма 3.2. *Если $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, то $K(1,1,1,1,1,1) \not\subseteq \Gamma_2(\mathbb{F})$*

Доказательство. Известно, что $\omega(\Gamma_2(\mathbb{F})) = 5$ ([1, Теорема 2]), значит не существует 6 матриц, попарно соединенных ребрами, соответственно, $K(1,1,1,1,1,1)$ не вложен в $\Gamma_2(\mathbb{F})$. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Если матрицы $A_1, A_2, A_3, A_4, X_1, X_2$ образуют $K(1,1,1,1,2)$ в $\Gamma_2(\mathbb{F})$, так что X_1 и X_2 в одной доле, а остальные матрицы в разных долях, то:*

- $\det X_1 \neq \det X_2$
- $\det A_1 + \det A_2 + \det A_3 + \det A_4 + \det X_1 + \det X_2 = 0$.

Доказательство. Пусть многочлен $F_A(X) = \det(A+X)$. Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, то

$$F_A(x,y,z,t) = xt - yz + dx - cy - bz + at + ad - bc. \tag{4}$$

Рассмотрим многочлены $F_{A_1}, F_{A_2}, \ldots, F_{X_1}, F_{X_2}$. Они принадлежат пространству $\mathbb{F}_{\leq 2}[x,y,z,t]$, более того, нелинейная часть этих многочелнов составляет слагаемое $xt - yz$, поэтому эти многочлены лежат в пространстве $\langle xt - yz, x, y, z, t, 1\rangle$, размерность которого равна 6.
Тогда 7 многочленов $F_{A_1}, F_{A_2}, F_{A_3}, F_{A_4}, F_{X_1}, F_{X_2}, \det(X)$ линейно зависимы. Значит найдутся нетривиальные коэффициенты $a_1, a_2, a_3, a_4, b, x_1, x_2$(не все равные нулю), что:

$$a_1F_{A_1}(X) + a_2F_{A_2}(X) + a_3F_{A_3}(X) + a_4F_{A_4}(X) + b\det(X) + x_1F_{X_1}(X) + x_2F_{X_2}(X) \equiv 0 \tag{5}$$

Подставим в это равенство многочленов матрицу A_i. Так как A_i соединено с A_j и с X_j, то $F_{A_j}(A_i) = 0$ и $F_{X_j}(A_i) = 0$. Следовательно получим $a_iF_{A_i}(A_i) + b\det(A_i) = 0 \Rightarrow$
$(4a_i + b)\det(A_i) = 0 \Rightarrow b = -4a_i$ и $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Тогда посмотрим на коэффициент при слагаемом $xt - yz$ в равенстве (5), с одной стороны он равен $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b + x_1 + x_2 = 4a_1 + b + x_1 + x_2 = x_1 + x_2$, с другой стороны это тождественно равный нулю многочлен, поэтому $x_1 + x_2 = 0$, значит $x_2 = -x_1$

Предположим, что $b = 0$. Тогда $a_i = 0 \Rightarrow x_1 \neq 0$ и $x_1F_{X_1} - x_1F_{X_2} = 0 \Rightarrow F_{X_1} = F_{X_2}$. Из (4) следует, что коэффициенты при x, y, z и t, являющиеся элементами матриц X_1 и X_2, совпадают. Значит сами матрицы X_1 и X_2 совпадают, но они различны — противоречие.
Откуда $b \neq 0$, тогда $a_i \neq 0$, и можно поделить равенство на a_1, получим:

$$F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3} + F_{A_4} - 4\det + cF_{X_1} - cF_{X_2} \equiv 0 \tag{6}$$

Теперь подставим в это равенство X_1. X_1 и A_i соединены ребром, откуда $F_{A_i}(X_1) = 0$. Получим: $-4\det(X_1) + 4c\det(X_1) - c\det(X_1 + X_2) = 0$, также подставим X_2, аналогично получим $-4\det(X_2) + c\det(X_1 + X_2) - 4c\det(X_2) = 0$. Сложим два полученных выражения: $-4(\det(X_1) + \det(X_2)) + 4c(\det(X_1) - \det(X_2)) = 0$. Выходит $c(\det(X_1) - \det(X_2)) = \det(X_1) + \det(X_2)$. Если $\det(X_1) - \det(X_2) = 0$, то $\det(X_1) + \det(X_2) = 0$, значит $\det(X_1) = \det(X_2) = 0$, чего быть не могло. Откуда получаем свойство $\det(X_1) \neq \det(X_2)$, а также выражаем коэффициент $c = \dfrac{\det(X_1) + \det(X_2)}{\det(X_1) - \det(X_2)}$.
Теперь посмотрим на свободный член многочлена из равенства (6). Он равен: $\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(A_4) + c(\det(X_1) - \det(X_2)) = \det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(A_4) + \det(X_1) + \det(X_2) = 0$.
Таким образом, получили второе свойство. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле,* $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$. $K(1,1,1,1,3) \not\subseteq \Gamma_2(\mathbb{F})$

Доказательство. Пусть нашлись матрицы из $GL_2(\mathbb{F})$, образующие $K(1,1,1,1,3)$:

$$\begin{matrix} & & & & X_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & X_2 \\ & & & & X_3 \end{matrix}$$

Если выбрать матрицы $A_1, A_2, A_3, A_4, X_1, X_2$, то по лемме 3.3 получаем, что $\det(X_1) \neq \det(X_2)$, а также сумма определителей этих матриц равна нулю.
Теперь выберем $A_1, A_2, A_3, A_4, X_1, X_3$: снова сумма определителей этих матриц равна нулю. Она отличается от предыдущей суммы заменой $\det(X_2)$ на $\det(X_3)$, но при этом имеет то же значение, следовательно $\det(X_2) = \det(X_3)$.
Осталось выбрать матрицы $A_1, A_2, A_3, A_4, X_2, X_3$, и также получить, что $\det(X_2) \neq \det(X_3)$, что приводит к общему противоречию. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле,* $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$. $K(1,1,1,2,2) \not\subseteq \Gamma_2(\mathbb{F})$

Доказательство. Пусть нашлись матрицы, образующие 5-дольный подграф $K(1,1,1,2,2)$:

$$\begin{matrix} & & & X_1 & Y_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & & \\ & & & X_2 & Y_2 \end{matrix}$$

Воспользуемся леммой 3.3: Если выбрать $A_1, A_2, A_3, Y_1, X_1, X_2$, получим, что $\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(Y_1) + \det(X_1) + \det(X_2) = 0$.

Аналогично выбрав $A_1, A_2, A_3, Y_1, X_1, X_2$, получим, что $\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(Y_2) + \det(X_1) + \det(X_2) = 0$.

Следовательно $\det(Y_1) = \det(Y_2)$.

Осталось выбрать матрицы $A_1, A_2, A_3, X_1, Y_1, Y_2$ и получить, что $\det(Y_1) \neq \det(Y_2)$ — противоречие. $\square$

Лемма 3.6. *Если* $\mathbb{F}$ *– бесконечное поле,* $\mathrm{char}\ \mathbb{F} \neq 2$. $K(1,1,1,1,1) \subset \Gamma_2(\mathbb{Q})$ *и* $K(1,1,1,1,2) \subset \Gamma_2(\mathbb{Q})$.

Доказательство. $K(1,1,1,1,1) \subset K(1,1,1,1,2)$, поэтому достаточно доказать для второго графа.

Предъявим пример такого подграфа:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Можно убедиться непосредственно, что данные матрицы образуют $K(1,1,1,1,2)$. Более общая конструкция приведена в лемме 4.7. $\square$

Замечание. Данный пример был найден с помощью программы. Ее можно найти в репозитории [5] (Программа `parts11112.cpp`). Программа сначала генерирует все невырожденные матрицы с небольшими дробями, по модулю не превосходящими 2, со знаменателем не больше 4. Далее перебираются всевозможные 4 матрицы, образующие клику и дополняются 5 и 6 матрицами (функция generate_clique_for_2x2). По лемме 3.4 таких матриц может быть всего 2, поэтому пытаться искать их перебором бессмысленно. Можно составить условия, что матрицы соединены с кликой ребрами и получить уравнения на коэффициенты. Далее упростить и решить систему с помощью метода Гаусса. В итоге получится квадратное уравнение от одной неизвестной (за исключением некоторых вырожденных случаев). Решая его, проверяем, что получено рациональное число и что матрицы получились невырожденными. Если все выполняется, программа выводит их и завершается.

Программа нашла матрицы со знаменателем 3, однако если умножить все числа на 3, то получится такой же подграф, при этом все коэффициенты будут целыми.

Благодаря леммам 3.1–3.6 можно однозначно определить, какие полные многодольные подграфы вложены в $\Gamma_2(\mathbb{F})$.

Теорема 3.7. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– бексонечное поле,* $\mathrm{char}\ \mathbb{F} \neq 2$. *Полный k-дольный подграф G вложен в $\Gamma_2(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $k \leq 5$ и в случае $k = 5$ G изоморфен $K(1,1,1,1,1)$ или $K(1,1,1,1,2)$.*

Доказательство.

- Во-первых, любой граф, в котором не более 4 долей, вложен в $K(\infty, \infty, \infty, \infty)$, соответственно является подграфом $\Gamma_2(\mathbb{F})$ (по лемме 3.1).
- Во-вторых, любой граф, в котором 6 и более долей, не вложен в $\Gamma_2(\mathbb{F})$, так как $K(1,1,1,1,1,1)$ не вложен (по лемме 3.2).
- И наконец, для 5-дольных графов, только $K(1,1,1,1,1)$ и $K(1,1,1,1,2)$ вложены в $\Gamma_2(\mathbb{F})$. Они вложены по лемме 3.6. Пусть $K(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \subset \Gamma_2(\mathbb{F})$. Тогда $d_i < 3$, иначе $K(1,1,1,1,3)$ вложен в него, а такого не может быть (по лемме 3.4), также если $d_i = d_j = 2$, то $K(1,1,1,2,2)$ вложен в него, чего быть тоже не может (по лемме 3.5). Следовательно не более одной доли содержат две вершины, из чего получаем, что и хотели: 5-дольный подграф либо $K(1,1,1,1,1)$, либо $K(1,1,1,1,2)$.

□

Следствие 3.8. *В графе $\Gamma_2(\mathbb{Q})$ клику из 4 матриц можно дополнить до максимальной либо* 0*, либо* 1*, либо* 2 *способами до максимальной.*

Оказывается, что каждый из случаев достигается.

Утверждение 3.9. *Существует клика размера* 4*, которая не достраивается до максимальной (размера 5) в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$, но достраиваются до $K(1,1,1,1,2)$ в $\Gamma_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. В качестве клики подойдут матрицы:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -7/4 \\ -1/2 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -7/4 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 7/4 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

С помощью программы был найден данный пример, и получено, что он достраивается до $K(1,1,1,1,2)$ в $\Gamma_2(\mathbb{R})$. Можно получить, что если $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ дополняет пример до клики, то $x = -\frac{47}{80} - \frac{3}{8}t, y = \frac{151}{80} - \frac{9}{8}t, z = -\frac{163}{160} + \frac{9}{16}t$, а для t должно быть выполнено: $\frac{33}{128}t^2 - \frac{1679}{640}t + \frac{11953}{12800} = 0$ и $\frac{33}{128}t^2 - \frac{1789}{640}t - \frac{24613}{12800} \neq 0$, существует два иррациональных решения, удовлетворяющих этим уравнениям: $t = \frac{1679}{330} \pm \frac{2\sqrt{151537}}{165}$. Откуда найдутся две матрицы из $GL_2(\mathbb{R}) \setminus GL_2(\mathbb{Q})$, дополняющие данную клику до максимальной.

Программа, которая нашла данный пример расположена в репозитории [5] (Программа `addition-in-R.cpp`). В ней перебирались 4 матрицы с маленькими коэффициентами в случайном порядке, и проверялось, имеет ли система уравнений на 5-ю матрицу иррациональное решение. После того, как программа нашла 4 матрицы, был выведен общий вид системы, и то какие получились уравнения на коэффициенты. □

Утверждение 3.10. *Существует клика размера* 4*, которая достраивается до максимальной (размера 5) в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$ единственным образом.*

Доказательство. В статье [1] был приведен пример максимальной клики:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

В этом примере для любых 4 матриц существует только одна матрица, с ними соединенная (оставшаяся матрица клики). Этот факт можно проверить непосредственно, зафиксировав 4 матрицы, и составить систему уравнений на неизвестную матрицу, с ними соединенную. Например, если оставить первые 4 матрицы, то система получится такой:

$$\begin{cases} xt - yz + x + t + 1 = 0 \\ xt - yz - y - z - 1 = 0 \\ xt - yz + y + z - 1 = 0 \\ xt - yz - 2x + y - z + 1 = 0 \\ xt - yz \neq 0 \end{cases}$$

У такой системы только одно решение $x = 0, y = -1, z = 1, t = -2$, получаем пятую матрицу клики. Аналогично можно проделать с любыми другими 4-я матрицами клики.

Из этого следует, что любые 4 матрицы клики (7) достраиваются до максимальной клики единственным образом.

Замечание. Для экономии времени и точности вычислений была написана программа, которая проверяет сколькими способами можно дополнить клику размера 4. Программа строила систему из 4 уравнений, решала ее, после чего проверяла, что последнее уравнение тоже выполнено (определитель не нулевой).

Код программы можно найти в репозитории [5] (Программа `clique-addition.cpp`). □

Пример из леммы 3.6 показывает, что существует клика размера 4 достраиваемая двумя способами до максимальной.

4 Клики в $\Gamma_2(\mathbb{F})$

Данный раздел посвящен изучению неэквивалентных клик в $\Gamma_2(\mathbb{F})$.

В регулярном графе матриц над полем $\mathbb{Q}$ стандартными будем называть изоморфизмы следующего вида:

- $$X \to UXV, \text{ где } U, V \in GL_n(\mathbb{Q}) \tag{8}$$
- $$X \to UX^TV, \text{ где } U, V \in GL_n(\mathbb{Q}) \tag{9}$$

Лемма 4.1. *Отображения (8), и (9) действительно являются автоморфизмами регулярного графа матриц.*

Доказательство. Во-первых, оба отображения являются биекциями $GL_n(\mathbb{Q})$ (они обратимы).

Во-вторых, рассмотрим любые две матрицы A, B. Под действием некоторого отображения (8) A переходит в $UAV = A'$, B переходит в $UBV = B'$.

$\det(A' + B') = \det(U(A+B)V) = \det(U)\det(A+B)\det(V)$, откуда $\det(A+B) = 0 \Leftrightarrow \det(A' + B') = 0$. Значит отображение сохраняет смежность вершин.

Аналогично с (9), (дополнительно используется тождество $\det(X^T) = \det(X)$). □

Определение 4.2. Будем называть два множества A, B эквивалентными, если существует стандартный изоморфизм φ такой, что $\varphi(A) = B$.

В действительности такое отношения является отношением эквивалентности. Тождественное отображение переводит A в A. ($X \to EXE$). Отображения обратимы, значит отношение симметрично. А также композиция двух отображений является отображением нужного вида (например композиция $X \to U_1X^TV_1$ и $X \to U_2XV_2$, это $X \to (U_1V_2^T)X^T(U_2^TV_1))$, откуда выполнена транзитивность.

Для того чтобы проверять два множества на эквивалентность, нужно перебирать для каждой матрицы первого множества ее образ при отображении и для полученных точек проверять, существуют ли подходящие U, V.

Так как этот процесс слишком громоздкий, его можно оптимизировать. Для этого была написана программа, проверяющая два множества матриц $GL_2(\mathbb{Q})$ на эквивалентность. Программу можно найти в репозитории [5] (Хедер `isomorphism.h`)

Пусть в одном множестве матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а во втором множестве матрицы $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Будем проверять существует ли отображение, переводящее $B \to A$.

Для начала программа перебирает перестановку p, какая матрица в какую будет переходить.

Пусть зафиксирована некоторая перестановка p, теперь необходимо проверить, существуют ли такие матрицы U, V, что $A_i = UB_{p_i}V$, пусть матрица $V = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, тогда можно n способами выразить матрицу U^{-1}: $U^{-1} = B_{p_i}V(A_i)^{-1}$. Выражаем каждый из 4 коэффициентов U^{-1} через x, y, z, t линейным образом (в программе эти выражения лежат в массиве U_coefficients). Так как матрица U одна, получаем, что все эти n выражений должны совпадать. Приравняем первое выражение ко всем остальным. Получим $4(n-1)$ уравнений на переменные x, y, z, t. Для конкретной перестановки p получили систему уравнений на x, y, z, t, которые должны быть выполнены. Более того x, y, z, t должны образовывать невырожденную матрицу V. Если эти два условия выполнены, то отображение найдется. Аналогичный процесс с транспозицией.

Далее в программе рассматриваются всевозможные системы на x, y, z, t (полученные выражением U^{-1}), они записаны в массиве $ways$. И проверяется, существует ли у системы ненулевое решение, которое образует невырожденную матрицу V. Если хотя бы для одной системы нашлось решение, то два множества эквивалентны, иначе нет.

В утверждении 3.10 использовался пример (7). Если зафиксировать первые три матрицы в клике из этого примера и дополнить клику другими матрицами до клики максимального размера (в данном случае размера 5), то получится эквивалентная клика.

Лемма 4.3. *Матрицы* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *можно дополнить до максимальной клики регулярного графа только матрицами* $\begin{pmatrix} b-1 & b \\ -b & -b-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{b}-1 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b}-1 \end{pmatrix}$ *(для произвольного* $b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$*)*

Доказательство. Попробуем дополнить клику матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Так как она соединена ребрами с другими матрицами, получаем уравнения на a, b, c, d:

$$\begin{cases} (a+1)(d+1) - bc = 0 \\ ad - (b+1)(c+1) = 0 \\ ad - (b-1)(c-1) = 0 \\ ad - bc = t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + a + d + 1 = 0 \\ t - b - c - 1 = 0 \\ t + b + c - 1 = 0 \\ ad - bc = t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -b - c = 0 \\ t = 1 \\ a + d = -2 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ d = -2 - a \\ a(-2-a) + b^2 = 1 \\ b^2 = (a+1)^2 \end{cases}$$

Значит, необходимо и достаточно, чтоб $c = -b, d = -2 - a$ и либо $a + 1 = b$, либо $a + 1 = -b$.

В первом случае получаем, что матрица будет иметь вид 1 $\begin{pmatrix} b-1 & b \\ -b & -b-1 \end{pmatrix}$, а во втором – вид 2 $\begin{pmatrix} -b-1 & b \\ -b & b-1 \end{pmatrix}$.

Теперь мы хотим добавить в клику две матрицы, одна с $b = b_1$, а вторая с $b = b_2$. Есть три случая:

- Обе матрицы имеют вид 1, тогда $(b_1 - 1 + b_2 - 1)(-b_1 - 1 - b_2 - 1) - (b_1 + b_2)(-b_1 - b_2) = 4 - (b_1 + b_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 4 \neq 0$, значит, сумма невырождена. Они не могут лежать в клике.
- Обе матрицы имеют вид 2, тогда $(-b_1 - 1 - b_2 - 1)(b_1 - 1 + b_2 - 1) - (b_1 + b_2)(-b_1 - b_2) = 4 - (b_1 + b_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 4 \neq 0$, значит, сумма невырождена. Они не могут лежать в клике.
- Одна матрица имеет вид 1, а вторая вид 2. Тогда $(b_1 - 1 - b_2 - 1)(-b_1 - 1 + b_2 - 1) - (b_1 + b_2)(-b_1 - b_2) = 4 - (b_1 - b_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 4(1 + b_1 b_2)$. Чтоб матрицы лежали в клике, это значение должно быть равно 0, откуда $b_2 = -\frac{1}{b_1}$.

Получаем, что одна матрица будет иметь вид $\begin{pmatrix} b-1 & b \\ -b & -b-1 \end{pmatrix}$, а вторая $\begin{pmatrix} \frac{1}{b}-1 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b}-1 \end{pmatrix}$.

Так как они обе имеют вид 1 или 2, значит, при добавлении в клику каждая из них не испортит свойство клики, а так как их сумма вырождена, то их обе можно добавить в клику. $\square$

Теорема 4.4. *Пусть A, B – клики $\Gamma_2(\mathbb{F})$ максимального размера* ($\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$)*, содержащие матрицы* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Тогда A, B – эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим за $C_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ – клику из примера. Докажем, что любая клика A, содержащая матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, эквивалентна C_0.

В силу леммы 4.3 получаем, что

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b-1 & b \\ -b & -b-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{b}-1 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b}-1 \end{pmatrix} \right\}$$

.

Найдем матрицы U, V, такие, что $UC_0V = A$.

Если $b = 1$, то подойдет $U = V = E$, так как клики совпадают.

Теперь, если $b \neq 1$, положим $V = \begin{pmatrix} \frac{b+1}{b-1} & 1 \\ 1 & \frac{b+1}{b-1} \end{pmatrix}, U = V^{-1}$ ($\det V = \frac{(b+1)^2}{(b-1)^2} - 1 \neq 0$, значит, V – обратима, U – корректно определена и тоже обратима.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b+1}{b-1} \\ \frac{b+1}{b-1} & 1 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} V = -U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b+1}{b-1} \\ \frac{-3b+1}{b-1} & \frac{-3b-1}{b-1} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} b-1 & b \\ -b & -b-1 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} b-1 & b \\ -b & -b-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} b-1 & b \\ -b & -b-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-b-1}{b-1} \\ \frac{-b+3}{b-1} & \frac{-b-3}{b-1} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \frac{1}{b}-1 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b}-1 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{b}-1 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} \frac{1}{b}-1 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b}-1 \end{pmatrix}$$

Из пяти полученных равенств получаем требуемое, все матрицы A получены из C_0 домножением на обратимые матрицы.

Дальше в силу транзитивности и симметричности эквивалентности получаем: A, B эквивалентны C_0, значит эквивалентны между собой. □

В тотальном графе матриц 2×2 над конечным полем все максимальные клики эквивалентны, это указано в статье [2, секция 2, лемма 2.6]. Однако в регулярном графе дело обстоит иначе.

Теорема 4.5. *В случае* $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2, \mathbb{F} \ncong \mathbb{Z}_3$, *существуют две максимальные неэквивалентные клики* W_1 *и* W_2 *в* $\Gamma_2(\mathbb{F})$.

Доказательство. При данных условиях на поле в нем существуют 4 различных элемента: $0, 1, -1, \alpha$.

Рассмотрим две клики:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \alpha+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \alpha-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix} \right\}$$

С первой кликой мы сталкивались выше. Докажем, что второе множество тоже клика. Почти каждая попарная сумма матриц зануляет столбец или строку. Остается проверить две суммы:

$\begin{pmatrix} -1 & \alpha+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \alpha+1 \\ -2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$ – вырождена.

$\begin{pmatrix} -1 & \alpha-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \alpha-1 \\ -2 & \alpha-1 \end{pmatrix}$ – вырождена.

Значит, W_2 действительно клика.

Пусть для W_1 и W_2 существуют такие матрицы, что $UW_1V = W_2$ или $UW_1^TV = W_2$.

Заметим, что в W_1 есть противоположные матрицы (матрицы, в сумме дающие нулевую матрицу): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. После домножения на обратимые матрицы или транспонирования они останутся противоположными, значит, и в W_2 тоже есть две противоположные матрицы.

Но $\alpha + 1 \neq 0, \alpha - 1 \neq 0$, откуда в W_2 противоположных матриц нет. Следовательно, эти две клики не эквивалентны. □

Замечание. В случае поля $\mathbb{F} \cong \mathbb{Z}_3$ любые две клики эквивалентны.

Матриц не так много, поэтому можно перебрать все варианты клик и проверить, что они эквивалентны между собой. Для того, чтобы убедиться в этом, была написана программа, находящая все клики, и проверяющая, эквивалентны ли пары клик между собой. Для начала все матрицы были записаны в массив *Gl*, потом функция *GetCliques* рекурсивно искала все клики и записывала их в *allcliques*. Функция *EquivalentCliques* проверяла две клики на эквивалентность В силу транзитивности эквивалентности, нужно было проверять эквивалентны ли все клики какой-то одной. Код программы расположен по ссылке: `https://github.com/1van9/Cliques_in_regular_graphs/blob/main/Equivalent_cliques/main.cpp`.

Таким образом в $\mathbb{Z}_3$ любые две клики эквивалентны. А в остальных полях характеристики отличной от 2 найдутся две неэквивалентные клики.

В лемме 3.6 был предоставлен пример, полученный программой. Однако, его можно обобщить до бесконечной параметрической серии примеров.

Определение 4.6. Для $n, m \in \mathbb{Q}$ обозначим за $k(n, m)$ множество матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} n & n \\ n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & n \\ n & 2n-m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ n & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ -2m-n & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & 2m-n \\ -n & m \end{pmatrix} \right\}$$

Лемма 4.7. *Если $n \neq 0, m \neq 0, n \neq \pm m$, тогда $k(n, m)$ является $K(1, 1, 1, 1, 2)$ подграфом $\Gamma_2(\mathbb{Q})$*

Доказательство. Для начала докажем, что все матрицы различны и невырождены:

Так как $n \neq 0, m \neq 0 \Rightarrow n \neq -n, m \neq -m$. Значит матрица 1 не совпадает с 3, 4, 5, 6 матрицами, 2 также не совпадает с ними, 3 не совпадает с 4 и 5, 4 не совпадает 6. Так как $m \neq n \Rightarrow m \neq 2n-m$, то есть 1 не совпадает с 2. Остается проверить, что не совпадают 3, 6, а также 4, 5. Следует из неравенств: $n \neq 2m - n$ и $n \neq -2m - n$.

Для проверки невырожденности посчитаем определители:
$\det_1 = n(m-n), \det_2 = n(n-m), \det_3 = n(n-m), \det_4 = n(n+m)$,
$\det_5 = -n(n+m), \det_6 = n(m-n)$

Никакой из определителей не равен нулю в силу ограничений.

Теперь поймем, как матрицы связаны ребрами.

Есть матрицы с противоположными строками, а именно: 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 1 и 6, 2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 2 и 6, 3 и 4, 3 и 5, 4 и 6. Они соединены ребрами

Сложим матрицы 1 и 2, получим $\begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}$ – вырождена, значит они соединены. Осталось проверить 3 и 6, а также 4 и 5.

Сумма 3 и 6 дает $\begin{pmatrix} -2n & -2n \\ 2m & 2m \end{pmatrix}$ – вырожденную матрицу. Сумма 4 и 5 дает $\begin{pmatrix} -2n & -2m \\ -2n & -2m \end{pmatrix}$ – вырожденную матрицу.

Получаем, что матрицы соединены друг с другом, за исключением 5 и 6, откуда это подграф $K(1, 1, 1, 1, 2)$ □

Определение 4.8. Пусть $k'(n, m)$ – первые 5 матриц $k(n, m)$, то есть

$$\left\{ \begin{pmatrix} n & n \\ n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & n \\ n & 2n-m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ n & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ -2m-n & -m \end{pmatrix} \right\}$$

Определение 4.9. Пусть $k''(n, m)$ – матрицы $k(n, m)$ без пятой, то есть

$$\left\{ \begin{pmatrix} n & n \\ n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & n \\ n & 2n-m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ n & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & 2m-n \\ -n & m \end{pmatrix} \right\}$$

$k'(n, m)$ и $k''(n, m)$ образуют клику для $n, m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, n \neq \pm m$.

Программой было проверено, что для малых натуральных $n_1, m_1, n_2, m_2 (n_1 \neq m_1, n_2 \neq m_2)$, если $\frac{n_1}{m_1} \neq \frac{n_2}{m_2}$ и $\frac{n_1}{m_1} \neq \frac{m_2}{n_2}$, то максимальные клики $k'(n_1, m_1)$ и $k'(n_2, m_2)$ не эквивалентны. Откуда возникает гипотеза, что данная серия дает бесконечное множество неэквивалентных максимальных клик.

Программа расположена в репозитории [5] (Программа `clique_series.cpp`)

Теорема 4.10. *В $\Gamma_2(\mathbb{Q})$ существует бесконечное число попарно неэквивалентных максимальных клик. А именно $k'(n, 1)$ для натурального $n > 1$.*

Доказательство.

Докажем, что $k'(n_1, 1)$ не эквивалентно $k'(n_2, 1)$, для $1 < n_1 < n_2$.

Пусть существует φ, переводящее матрицы $k'(n_1, 1)$ в матрицы $k'(n_2, 1)$, тогда существуют U, V, такие что $\varphi(X) = UXV$ или $\varphi(X) = UX^TV$, пусть $\det(U) = a, \det(V) = b, (a \neq 0, b \neq 0)$, тогда $\det(\varphi(X)) = ab \det X$

Вспомним, какие определители матриц $k'(n, 1)$: $\det_1 = n(1-n), \det_2 = n(n-1), \det_3 = n(n-1), \det_4 = n(n+1), \det_5 = -n(n+1)$

Заметим, что φ переводит матрицы с разным определителем в матрицы с разным, а матрицы с одинаковым в матрицы с одинаковым. Значит матрицы 2 и 3 из $k'(n_1, 1)$ должны перейти во вторую и третью матрицы $k'(n_2, 1)$. Откуда $n_2(n_2-1) = an_1(n_1-1)b \Rightarrow n_2(1-n_2) = an_1(1-n_1)b$, откуда первая матрица $k'(n_1, 1)$ переходит в первую матрицу $k'(n_2, 1)$. Для четвертой матрицы остается два варианта, откуда имеем: $an_1(n_1+1)b = \pm n_2(n_2+1)$. Получаем, что с одной стороны $ab = \dfrac{n_2(n_2-1)}{n_1(n_1-1)}$, с другой стороны: $ab = \pm\dfrac{n_2(n_2+1)}{n_1(n_1+1)}$. Так как $n_1 > 1$ и $n_2 > 1$ получаем, что $ab > 0 \Rightarrow ab = \dfrac{n_2(n_2+1)}{n_1(n_1+1)} \Rightarrow \dfrac{(n_2+1)}{(n_1+1)} = \dfrac{(n_2-1)}{(n_1-1)}$ то есть $n_2n_1 - n_2 + n_1 - 1 = n_2n_1 - n_1 + n_2 - 1 \Rightarrow n_1 - n_2 = n_2 - n_1$, но $n_2 > n_1$, следовательно выражения имеют разный знак. Противоречие – отображения φ не существует.

Значит любые две клики в последовательности не эквивалентны. Получили бесконечное множество неэквивалентных максимальных клик. □

Пример из статьи Акбари (7) существенно отличается от полученной в этой работе серии клик $k'(n, m)$.

Утверждение 4.11. *Пример максимальной клики* (7) *не изоморфен кликами* $k'(n, m)$ *и* $k''(n, m)$*, для* $n, m \neq 0, n \neq \pm m$.

Доказательство. Дело в том, что $k'(n, m)$ и $k''(n, m)$ достраивается до 5-дольного подграфа $K(1, 1, 1, 1, 2)$, другими словами, найдется матрица, которая соединена еще с 4 матрицами этой клики. А в примере (7) для любых 4 матриц существует только одна матрица, с ними соединенная. Данный факт доказывался в утверждении 3.10. Из него следует, что клика (7) не изоморфна кликам $k'(n, m)$, $k''(n, m)$. □

Для некоторой классификации максимальных клик можно ввести параметр *расширяемости* клики $\mathcal{F}$ – количество способов дополнить клику до подграфа $K(1, 1, 1, 1, 2)$. (Обозначение $\operatorname{expand}(\mathcal{F})$)

Утверждение 4.12. $\operatorname{expand}(\mathcal{F}) \leq 5$

Доказательство. Чтобы расширить клику до графа $K(1, 1, 1, 1, 2)$, нужно выбрать выбрать одну из 5 матриц, и подобрать к ней в долю еще одну матрицу. Заметим, что подобрать матрицу можно только 1 способом, иначе будет многодольный подграф $K(1, 1, 1, 1, 3)$. Значит расширить клику можно не более чем 5 способами. □

Оказывается, что существуют клики со всеми параметрами расширяемости от 0 до 5. Примеры 4.13 - 4.18 были найдены с помощью программы:

Пример 4.13.

$$\operatorname{expand}\left(\left\{\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5 & -5\\ 5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5 & -5\\ -5 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{15}{2} & -\frac{5}{2}\\ -5 & -3\end{pmatrix}\right\}\right) = 0$$

Пример 4.14.

$$\operatorname{expand}\left(\left\{\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5 & -5\\ 5 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5 & -5\\ -\frac{16}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{245}{13} & \frac{115}{13}\\ -\frac{127}{13} & \frac{23}{13}\end{pmatrix}\right\}\right) = 1$$

Пример 4.15.

$$\operatorname{expand}\left(\left\{\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & -2\\ -4 & -1\end{pmatrix}\right\}\right) = 2$$

Пример 4.16.

$$\operatorname{expand}\left(\left\{\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5 & -5\\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{175}{11} & \frac{65}{11}\\ -\frac{78}{11} & -\frac{10}{11}\end{pmatrix}\right\}\right) = 3$$

Пример 4.17.

$$\operatorname{expand}\left(\left\{\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\right\}\right) = 4$$

Пример 4.18.

$$\operatorname{expand}\left(\left\{\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -5\\ 6 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5 & -3\\ -5 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{89}{11} & -\frac{1}{11}\\ \frac{9}{11} & -\frac{9}{11}\end{pmatrix}\right\}\right) = 5$$

Список литературы

[1] S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari // The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite // https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379509003036

[2] Jinming Zhou, Dein Wong & Xiaobin Ma // Automorphism group of the total graph over a matrix ring, Linear and Multilinear Algebra

[3] S. Akbari, M. Aryapoor, M. Jamaali // Chromatic number and clique number of subgraphs of regular graph of matrix algebras // https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379511006537

[4] I. Tomon // On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras // https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379515001378

[5] Репозиторий с программами // https://github.com/1van9/Subgraphs_of_regular_graph