字母表 (*Alphabet*)

- 字母表∑是一个有穷符号集合
  - 符号：字母、数字、标点符号、…

例：

- 二进制字母表：{ 0,1 }
- *ASCII*字符集
- *Unicode*字符集

字母表上的运算

- 字母表$\sum_1$和$\sum_2$的乘积(*product*)
  - $\sum_1\sum_2 = \{ab|a \in \sum_1, b \in \sum_2\}$

例： $\{0, 1\}\{a, b\} = \{0a, 0b, 1a, 1b\}$

字母表上的运算

- 字母表Σ_1和Σ_2的**乘积**($product$)
- 字母表Σ的**n次幂**($power$)

$$\begin{cases} \Sigma^0 = \{\, \varepsilon \,\} \\ \Sigma^n = \Sigma^{n-1}\Sigma,\ n \geq 1 \end{cases}$$

例： $\{0, 1\}^3 = \{0, 1\}\ \{0, 1\}\ \{0, 1\}$
$= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

字母表的n次幂：长度为n的符号串构成的集合

字母表上的运算

- 字母表Σ_1和Σ_2的**乘积**(*product*)
- 字母表Σ的***n*次幂**(*power*)
- 字母表Σ的**正闭包**(*positive closure*)
  - $\Sigma^+ = \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ \ldots$

例：$\{a, b, c, d\}^+ = \{a, b, c, d,$
$aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, \ldots,$
$aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, \ldots\}$

字母表的正闭包：长度正数的符号串构成的集合

字母表上的运算

- 字母表Σ_1和Σ_2的**乘积**(*product*)
- 字母表Σ的***n*次幂**(*power*)
- 字母表Σ的**正闭包**(*positive closure*)
- 字母表Σ的**克林闭包**(*Kleene closure*)
  - $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^+ = \Sigma^0 \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$

例：$\{a, b, c, d\}^* = \{\varepsilon, a, b, c, d,$
$aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, \ldots,$
$aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, \ldots\}$

字母表的克林闭包：任意符号串（长度可以为零）构成的集合

串(*String*)

- 设∑是一个字母表，$\forall x \in \sum^*$，x称为是∑上的一个串
  - 串是字母表中符号的一个有穷序列
- 串s的长度，通常记作$|s|$，是指s中符号的个数
  - 例: $|aab|=3$
- 空串是长度为0的串，用 ε（*epsilon*）表示
  - $|\varepsilon|= 0$

串上的运算——连接

- 如果 x和y是串，那么x和y的**连接**(concatenation)是把y附加到x后面而形成的串，记作xy
  - 例如，如果 x=dog且 y=house，那么xy=doghouse
  - 空串是连接运算的单位元(identity)，即，对于任何串s都有，$\varepsilon s = s\varepsilon = s$

设x,y,z是三个字符串，如果 $x=yz$，则称y是x的**前缀**，z是x的**后缀**

串上的运算——幂

- 串s的幂运算

$$\begin{cases} s^0 = \varepsilon, \\ s^n = s^{n-1}s,\ n \geq 1 \end{cases}$$

- $s^1 = s^0 s = \varepsilon s = s$， $s^2 = ss$， $s^3 = sss$， …
- 例：如果 $s = ba$，那么$s^1 = ba$，$s^2 = baba$，$s^3 = bababa$，…

串s的n次幂：将n个s连接起来

自然语言的例子——句子的构成规则

- <句子> → <名词短语> <动词短语>
- <名词短语> → <形容词> <名词短语>
- <名词短语> → <名词>
- <动词短语> → <动词> <名词短语>
- <形容词> → ***little***
- <名词> → ***boy***
- <名词> → ***apple***
- <动词> → ***eat***

未用尖括号括起来部分表示**语言的基本符号**

尖括号括起来部分称为**语法成分**

文法的形式化定义

$$G = (V_T, V_N, P, S)$$

- V_T： 终结符集合

  终结符（*terminal symbol*）是文法所定义的语言的基本符号，有时也称为*token*

- 例: $V_T = \{ apple, boy, eat, little \}$

文法的形式化定义

$G = (V_T, V_N, P, S)$

- V_T： 终结符集合
- V_N： 非终结符集合

非终结符(*nonterminal*) 是用来表示语法成分的符号，有时也称为“语法变量”

- 例： V_N = { <句子>, <名词短语>, <动词短语>, <名词>, … }

文法的形式化定义

$G = (V_T, V_N, P, S)$

- V_T：终结符集合
- V_N：非终结符集合
- P ：产生式集合

$V_T \cap V_N = \Phi$

$V_T \cup V_N$：文法符号集

产生式(production)描述了将终结符和非终结符组合成串的方法

产生式的一般形式：

$$\alpha \rightarrow \beta$$

读作：α定义为β

- $\alpha \in (V_T \cup V_N)^+$，且$\alpha$中至少包含$V_N$中的一个元素：称为产生式的头(head)或左部(left side)
- $\beta \in (V_T \cup V_N)^*$：称为产生式的体(body)或右部(right side)

文法的形式化定义

$$G = (V_T, V_N, P, S)$$

- V_T： 终结符集合
- V_N： 非终结符集合
- P ： 产生式集合

产生式(*production*)描述了将终结符和非终结符组合成串的方法

产生式的一般形式:

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 例： $P =$ {
<句子> → <名词短语> <动词短>,
<名词短语> →<形容词> <名词短语>,
…
}

文法的形式化定义

$$G = (V_T, V_N, P, S)$$

- V_T： 终结符集合
- V_N： 非终结符集合
- P ： 产生式集合
- S ： 开始符号

$S \in V_N$。开始符号(*start symbol*)表示的是该文法中最大的语法成分

- 例： S = <句子>

文法的形式化定义

$$G = (V_T, V_N, P, S)$$

- V_T： 终结符集合
- V_N： 非终结符集合
- P ： 产生式集合
- S ： 开始符号

expression

例： $G = (\{ \text{id}, +, *, (,) \}, \{E\}, P, E)$

$$P = \{ E \rightarrow E + E, \quad E \rightarrow E * E, \quad E \rightarrow (E), \quad E \rightarrow \text{id} \}$$

约定：
不引起歧义的前提下，可以只写产生式

$$G: E \rightarrow E + E$$
$$E \rightarrow E * E$$
$$E \rightarrow (E)$$
$$E \rightarrow \text{id}$$

产生式的简写

- 对一组有相同左部的α产生式

$$\alpha \to \beta_1, \alpha \to \beta_2, \ldots, \alpha \to \beta_n$$

可以简记为：

$$\alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$$

读作：α定义为β_1，或者β_2，…，或者β_n。

β_1，β_2，…，β_n称为α的候选式(*Candidate*)

- 例

$$\begin{aligned} &E \to E + E \\ &E \to E * E \\ &E \to (E) \\ &E \to \mathbf{id} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathbf{id}}$$

符号约定

- 下述符号是终结符
  - (a) 字母表中排在前面的小写字母，如 a、b、c
  - (b) 运算符，如 +、*等
  - (c) 标点符号，如括号、逗号等
  - (d) 数字0、1、. . . 、9
  - (e) 粗体字符串，如**id**、**if**等

符号约定

- 下述符号是终结符
- 下述符号是非终结符
  - (*a*) 字母表中排在前面的大写字母，如*A*、*B*、*C*
  - (*b*) 字母*S*。通常表示开始符号
  - (*c*) 小写、斜体的名字，如 *expr*、*stmt*等
  - (*d*) 代表程序构造的大写字母。如*E*(表达式)、*T*(项)和*F*(因子)

符号约定

- 下述符号是终结符
- 下述符号是非终结符

终结符	a, b, c	终结符号串	$u, v, ..., z$
非终结符	A, B, C		
文法符号	X, Y, Z	文法符号串	α, β, γ

- 字母表中排在后面的大写字母（如X、Y、Z）表示文法符号（即终结符或非终结符）
- 字母表中排在后面的小写字母（主要是u、v、...、z）表示终结符号串（包括空串）
- 小写希腊字母，如α、β、γ，表示文法符号串（包括空串）
- 除非特别说明，第一个产生式的左部就是开始符号

自然语言的例子

文法：

①<句子> → <名词短语><动词短语>

②<名词短语> → <形容词><名词短语>

③<名词短语> → <名词>

④<动词短语> → <动词><名词短语>

⑤<形容词> → *little*

⑥<名词> → *boy*

⑦<名词> → *apple*

⑧<动词> → *eat*

有了文法（语言规则），如何判定一个词串是否是满足文法的句子?

单词串： *little boy eats apple*

推导 (*Derivations*)和归约(*Reductions*)

- 给定文法$G=(V_T, V_N, P, S)$，如果 $\alpha \to \beta \in P$，那么可以将符号串$\gamma\alpha\delta$中的α替换为β，也就是说，将$\gamma\alpha\delta$重写(rewrite)为$\gamma\beta\delta$，记作 $\gamma\alpha\delta \Rightarrow \gamma\beta\delta$。此时，称文法中的符号串 $\gamma\alpha\delta$ 直接推导(directly derive)出 $\gamma\beta\delta$
  - 简而言之，就是用产生式的右部替换产生式的左部

推导 (Derivations)和归约(Reductions)

- 如果$\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1$，$\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$，$\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3$，…，$\alpha_{n-1} \Rightarrow \alpha_n$，则可以记作$\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_{n-1} \Rightarrow \alpha_n$，称符号串 α_0**经过n步推导**出α_n，可简记为$\alpha_0 \Rightarrow^n \alpha_n$
  - $\alpha \Rightarrow^0 \alpha$
  - 正闭包
  - $\Rightarrow^+$表示“经过正数步推导”
  - kleene闭包
  - $\Rightarrow^*$表示“经过若干（可以是0）步推导”

推导 (*Derivations*)和归约(*Reductions*)

例

文法：

① <句子> → <名词短语><动词短语>

② <名词短语> → <形容词><名词短语>

③ <名词短语> → <名词>

④ <动词短语> → <动词><名词短语>

⑤ <形容词> → *little*

⑥ <名词> → *boy*

⑦ <名词> → *apple*

⑧ <动词> → *eat*

自顶向下

推导

<句子> ⇒ <名词短语><动词短语>

⇒ <形容词><名词短语><动词短语>

⇒ *little* <名词短语><动词短语>

⇒ *little* <名词><动词短语>

⇒ *little boy* <动词短语>

⇒ *little boy* <动词><名词短语>

⇒ *little boy eats* <名词短语>

⇒ *little boy eats* <名词>

⇒ *little boy eats apple*

自底向上

归约

回答前面的问题

- 有了文法（语言规则），如何判定某一词串是否是该语言的句子?
  - 句子的推导（派生）-从生成语言的角度
  - 句子的归约 -从识别语言的角度

均根据规则

句型和句子

- 如果 $S \Rightarrow^* \alpha$，$\alpha \in (V_T \cup V_N)^*$，则称$\alpha$是$G$的一个句型 (sentential form)
  - 一个句型中既可以包含终结符，又可以包含非终结符，也可能是空串
- 如果 $S \Rightarrow^* w$，$w \in V_T^*$，则称w是G的一个句子(sentence)
  - 句子是不包含非终结符的句型

例

<句子>⇒ <名词短语> <动词短语>

⇒ <形容词> <名词短语> <动词短语>

⇒ ***little*** <名词短语> <动词短语>

⇒ ***little*** <名词> <动词短语>

⇒ ***little boy*** <动词短语>

⇒ ***little boy*** <动词><名词短语>

⇒ ***little boy eats*** <名词短语>

⇒ ***little boy eats*** <名词>

句子 ⇒ ***little boy eats apple***

句型

语言的形式化定义

- 由文法G的开始符号S推导出的所有句子构成的集合称为**文法G生成的语言**，记为$L(G)$。即

$$L(G)=\{w \mid S \Rightarrow^* w, w \in V_T^*\}$$

文法 $E \rightarrow E+E \mid E*E \mid (E) \mid \mathrm{id}$
生成的语言中包含多少个句子？

无穷个句子，文法解决了无穷语言的有穷表示

例

- 文法G

① $S \to L \mid LT$

② $T \to L \mid D \mid TL \mid TD$

letter

③ $L \to a \mid b \mid c \mid \ldots \mid z$

digit

④ $D \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid 9$

$$
\begin{aligned}
T &\Rightarrow TL \\
&\Rightarrow TDL \\
&\Rightarrow TDDL \\
&\Rightarrow TLDDL \\
&\ldots \\
&\Rightarrow TD\ldots LDDL \\
&\Rightarrow DD\ldots LDDL
\end{aligned}
$$

该文法生成的语言是：标识符

请写出无符号整数和浮点数的文法

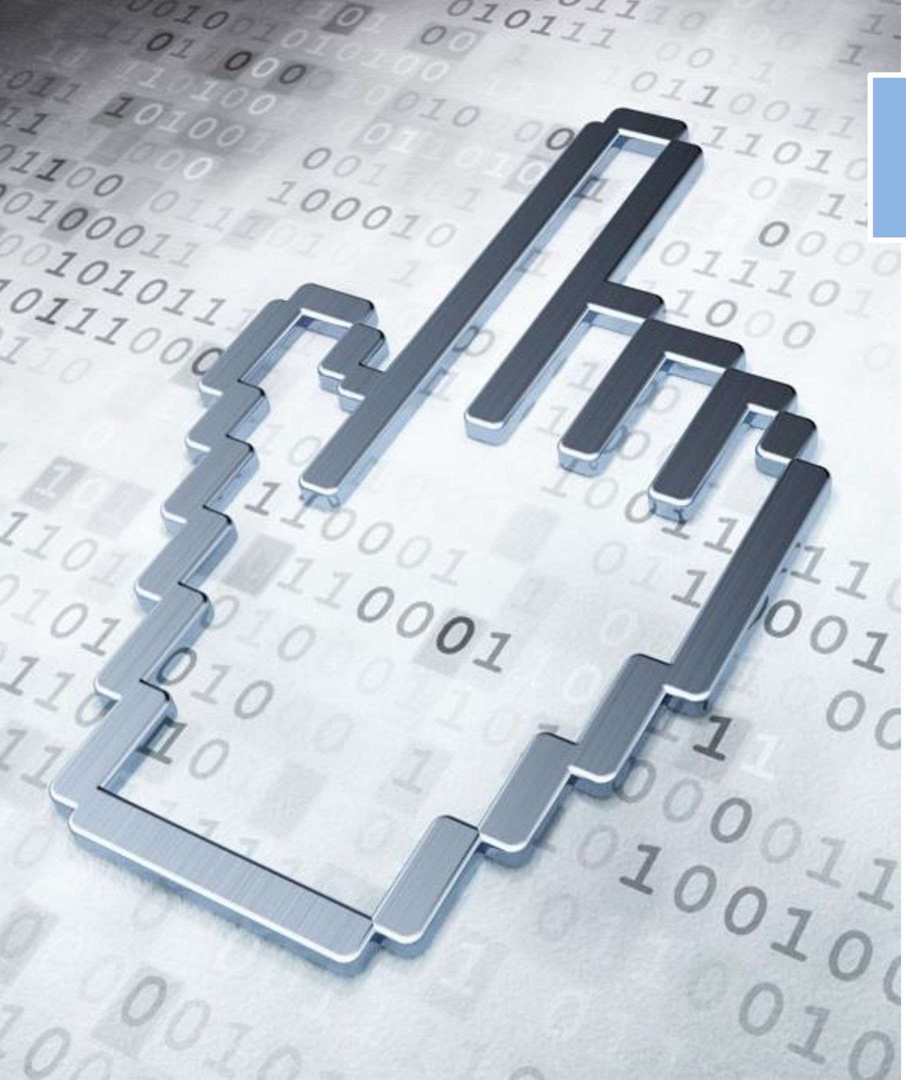
作业

T：字母数字串

语言上的运算

运算	定义和表示
L和M的并	$L\cup M=\{s \mid s$属于L或者s属于$M\}$
L和M的连接	$LM=\{st \mid s$属于L且t属于$M\}$
L的幂	$\begin{cases} L^0=\{\varepsilon\} \\ L^n=L^{n-1}L,\ n\geqslant 1 \end{cases}$
L的Kleene闭包	$L^*=\cup_{i=0}^{\infty}L^i$
L的正闭包	$L^+=\cup_{i=1}^{\infty}L^i$

例：令$L=\{A, B, \cdots, Z, a, b, \cdots, z\}$，$D=\{0, 1, \cdots, 9\}$。则$L(L\cup D)^*$表示的语言是标识符



提纲

2.1 基本概念

2.2 文法的定义

2.3 语言的定义

2.4 文法的分类

2.5 CFG的语法分析树

2.6 非上下文无关的语言构造

Chomsky 文法分类体系

- 0型文法 (*Type*-0 *Grammar*)
- 1型文法 (*Type*-1 *Grammar*)
- 2型文法 (*Type*-2 *Grammar*)
- 3型文法 (*Type*-3 *Grammar*)

0型文法 (*Type-0 Grammar*)

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 无限制文法(*Unrestricted Grammar*) /短语结构文法

  (*Phrase Structure Grammar, PSG*)

  - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$， α中至少包含1个非终结符

- 0型语言

  - 由0型文法G生成的语言$L(G)$

1型文法 (*Type*-1 *Grammar*)

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 上下文有关文法(*Context-Sensitive Grammar*, *CSG*)
  - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P, \quad |\alpha| \leq |\beta|$
  - 产生式的一般形式： $\alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \beta \alpha_2 \ (\beta \neq \varepsilon)$
- 上下文有关语言（1型语言）
  - 由上下文有关文法(1型文法) G生成的语言$L(G)$

CSG中不包含ε-产生式

2型文法 (*Type-2 Grammar*)

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 上下文无关文法 (*Context-Free Grammar, CFG*)
  - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$，$\alpha \in V_N$
  - 产生式的一般形式：$A \rightarrow \beta$

例：

$S \rightarrow L \mid LT$

$T \rightarrow L \mid D \mid TL \mid TD$

$L \rightarrow a \mid b \mid c \mid d \mid \ldots \mid z$

$D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid 9$

2型文法 (*Type*-2 *Grammar*)

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 上下文无关文法 (*Context-Free Grammar, CFG*)
  - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$，$\alpha \in V_N$
  - 产生式的一般形式：$A \rightarrow \beta$
- 上下文无关语言（2型语言）
  - 由上下文无关文法 (2型文法) G生成的语言$L(G)$

3型文法 (*Type*-3 *Grammar*)

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- **正则文法** (***Regular Grammar, RG***)
  - **右线性(*Right Linear*)文法**：$A \rightarrow wB$ 或 $A \rightarrow w$
  - **左线性(*Left Linear*) 文法**：$A \rightarrow Bw$ 或 $A \rightarrow w$
  - 左线性文法和右线性文法都称为正则文法

例（右线性文法）

① $S \rightarrow a \mid b \mid c \mid d$

② $S \rightarrow aT \mid bT \mid cT \mid dT$

③ $T \rightarrow a \mid b \mid c \mid d \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5$

④ $T \rightarrow aT \mid bT \mid cT \mid dT \mid 0T \mid 1T \mid 2T \mid 3T \mid 4T \mid 5T$

文法G（ 上下文无关文法）

① $S \rightarrow L \mid LT$

② $T \rightarrow L \mid D \mid TL \mid TD$

③ $L \rightarrow a \mid b \mid c \mid d$

④ $D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5$

3型文法 (*Type*-3 *Grammar*)

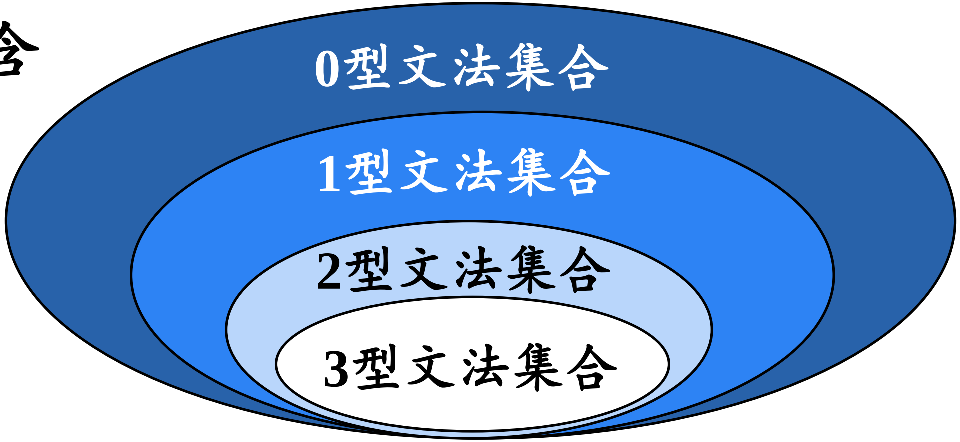
$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 正则文法 (*Regular Grammar, RG*)
  - 右线性(*Right Linear*)文法： $A \rightarrow wB$ 或 $A \rightarrow w$
  - 左线性(*Left Linear*) 文法： $A \rightarrow Bw$ 或 $A \rightarrow w$
  - 左线性文法和右线性文法都称为正则文法
- 正则语言（3型语言）
  - 由正则文法 (3型文法) G生成的语言$L(G)$

正则文法能描述程序设计语言的多数单词

四种文法之间的关系

- 逐级限制
  - 0型文法：α中至少包含1个非终结符
  - 1型文法（CSG）：$|\alpha| \le |\beta|$
  - 2型文法（CFG）：$\alpha \in V_N$
  - 3型文法（RG）：$A \to wB$ 或 $A \to w$ （$A \to Bw$ 或 $A \to w$）
- 逐级包含



CFG 的分析树

G:

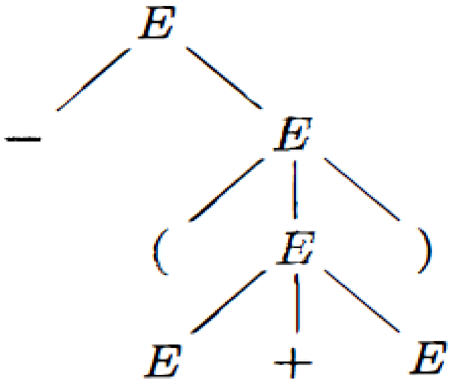
① $E \rightarrow E + E$

② $E \rightarrow E * E$

③ $E \rightarrow - E$

④ $E \rightarrow (E)$

⑤ $E \rightarrow \mathbf{id}$



- 根节点的标号为文法开始符号
- 内部结点表示对一个产生式$A \rightarrow \beta$的应用，该结点的标号是此产生式左部A。该结点的子结点的标号从左到右构成了产生式的右部β
- 叶结点的标号既可以是非终结符，也可以是终结符。从左到右排列叶节点得到的符号串称为是这棵树的产出(*yield*)或边缘(*frontier*)

分析树是推导的图形化表示

- 给定一个推导 $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n$，对于推导过程中得到的每一个句型$\alpha_i$，都可以构造出一个边缘为$\alpha_i$的分析树

推导过程：$E \Rightarrow -E \Rightarrow -(E) \Rightarrow -(E+E) \Rightarrow -(\mathrm{id}+E) \Rightarrow -(\mathrm{id}+\mathrm{id})$

文法：

① $E \rightarrow E + E$

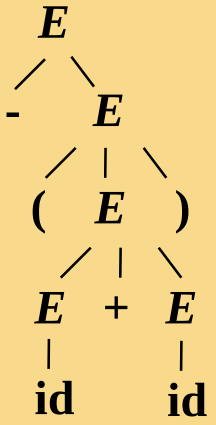
② $E \rightarrow E * E$

③ $E \rightarrow -E$

④ $E \rightarrow (E)$

⑤ $E \rightarrow \mathrm{id}$

分析树：



(句型的）短语

- 给定一个句型，其分析树中的每一棵子树的边缘称为该句型的一个**短语**(*phrase*)
  - 如果子树只有父子两代结点，那么这棵子树的边缘称为该句型的一个**直接短语**(*immediate phrase*)

文法：

① $E \rightarrow E + E$

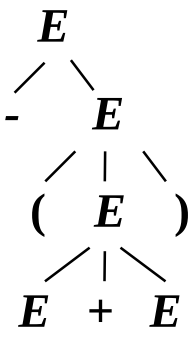
② $E \rightarrow E * E$

③ $E \rightarrow - E$

④ $E \rightarrow (E)$

⑤ $E \rightarrow \mathbf{id}$

分析树：



短语：

- $-(E+E)$
- $(E+E)$
- $E+E$

直接短语：

- $E+E$

直接短语一定是某产生式的右部

但产生式的右部不一定是给定句型的直接短语

例

文法：

①<句子> → <动词短语>

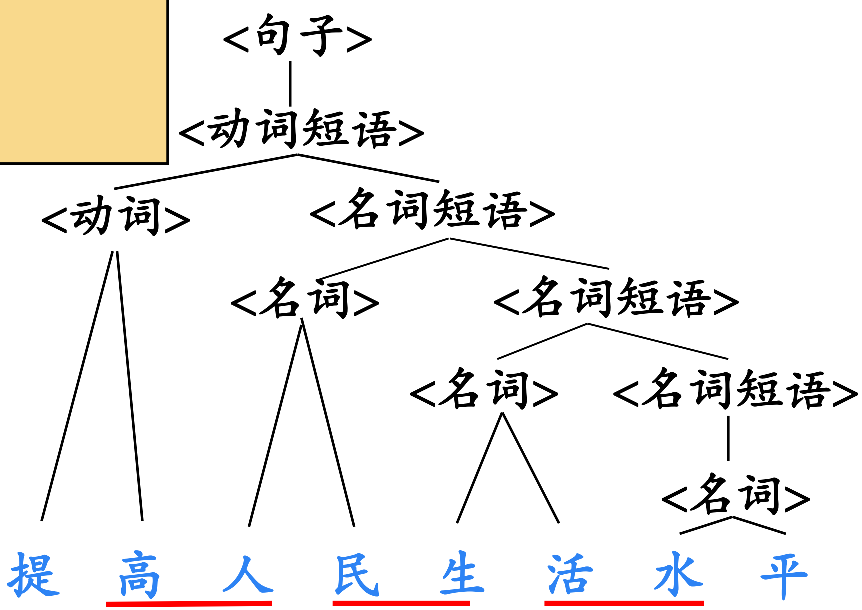
②<动词短语> → <动词> <名词短语>

③<名词短语> → <名词> <名词短语> | <名词>

④<动词> → 提 高

⑤<名词> → 高 人 | 人 民 | 民 生 | 生 活 | 活 水 | 水 平

输入：提 高 人 民 生 活 水 平

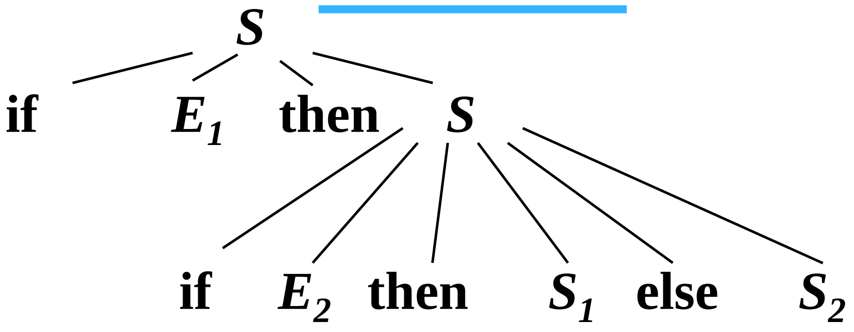


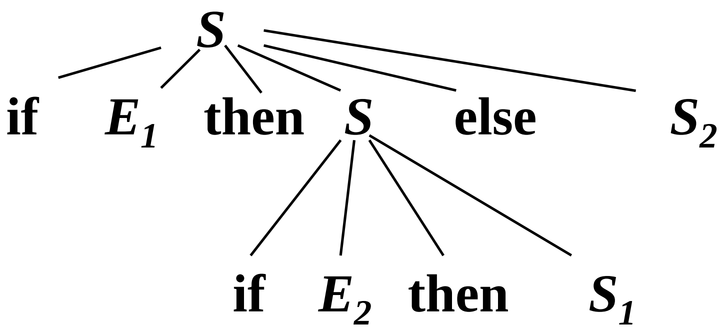
二义性文法 (*Ambiguous Grammar*)

- 如果一个文法可以为某个句子生成多棵分析树，则称这个文法是二义性的

例

- 文法
  - $S \rightarrow$ **if** E **then** S
    | **if** E **then** S **else** S } 条件语句
    | *other* ← 其他语句
- 句型
  - **if** E_1 **then** **if** E_2 **then** S_1 **else** S_2



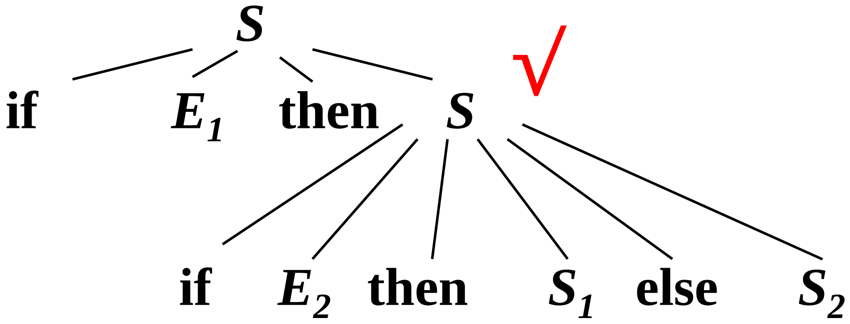


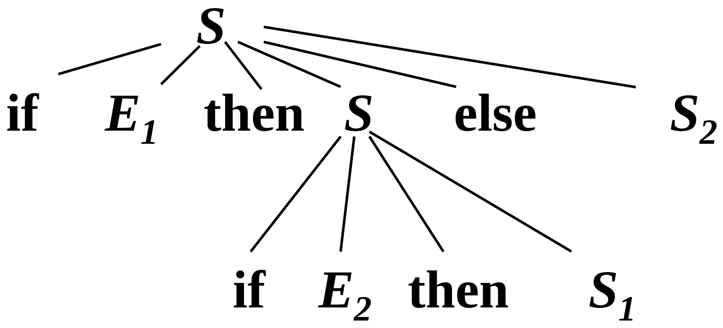
例

- 文法
  - $S \rightarrow$ **if** E **then** S
    $\quad\quad|$ **if** E **then** S **else** S
    $\quad\quad|$ *other*

消歧规则：每个else和最近的尚未匹配的if匹配

- 句型
  - **if** E_1 **then if** E_2 **then** S_1 **else** S_2





二义性文法的判定

- 对于任意一个上下文无关文法，不存在一个算法，判定它是无二义性的；但能给出一组充分条件，满足这组充分条件的文法是无二义性的
  - 满足，肯定无二义性
  - 不满足，也未必就是有二义性的