第2章　逻辑代数

2.1　逻辑代数与基本逻辑运算

2.2　逻辑函数与变换

2.3　逻辑函数的化简

2.4　逻辑函数化简中的几个特殊问题

2.1　逻辑代数与基本逻辑运算

一、基本逻辑运算和逻辑函数

1、逻辑

所谓“逻辑”是指“条件”与“结果”的关系。

单位	性别	电影票	能否进场
非	男	无	否
非	男	有	不会出现
非	女	无	否
非	女	有	不会出现
是	男	无	否
是	男	有	不会出现
是	女	无	否
是	女	有	能

一种状态	高电位	有脉冲	闭合	真	上	…	0 (1)
另一种状态	低电位	无脉冲	断开	假	下	…	1 (0)

2、逻辑变量

逻辑代数中的变量（逻辑变量）只能取两个值——0和1，而没有中间值。

单位	性别	电影票	能否进场
非	男	无	否
非	男	有	不会出现
非	女	无	否
非	女	有	不会出现
是	男	无	否
是	男	有	不会出现
是	女	无	否
是	女	有	能

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	d
0	1	0	0
0	1	1	d
1	0	0	0
1	0	1	d
1	1	0	0
1	1	1	1

3、逻辑函数

（1）概念：Z=F（A、B、C、D…）逻辑即是“条件”与“结果”的关系。

（2）特点：

A、逻辑函数与自变量的关系由有限个基本逻辑运算（与、或、非）决定。

B、自变量和函数的值都只能取0或1。

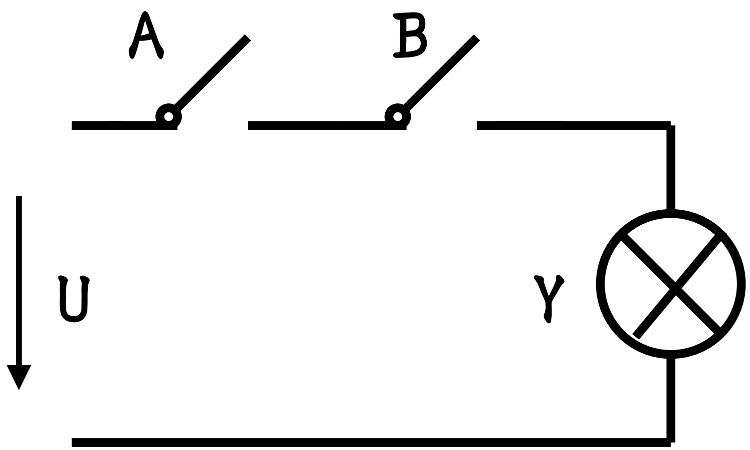
4、基本逻辑运算———三种

与（ and ）、**或**（or ）、 **非**（ not ）

(1) “与”逻辑关系和与门

概念

决定事件发生的各条件中，所有条件都具备，事件才会发生（成立）。



规定： 开关合为逻辑“1”

开关断为逻辑“0”

灯亮为逻辑“1”

灯灭为逻辑“0”

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0

真值表特点: 有0则0，全1则1

与逻辑关系表示式

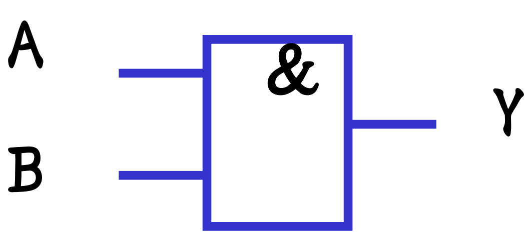
$L = A \cdot B = AB$

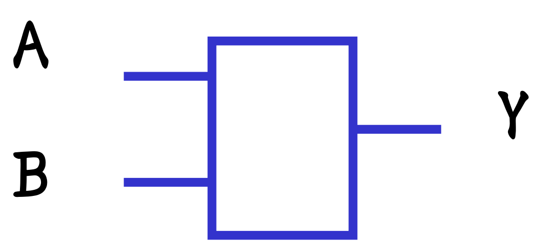
与逻辑运算规则 — 逻辑乘

$0 \cdot 0 = 0$　　$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$　　$1 \cdot 1 = 1$

与门符号：

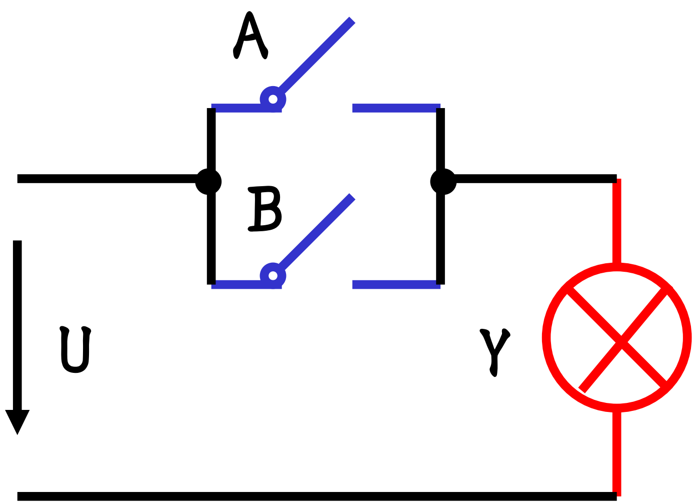




(2) “或”逻辑关系和或门

概念

决定事件发生的各条件中，有一个或一个以上的条件具备，事件就会发生（成立）。



开关合为逻辑“1”，开关断为逻辑“0”；灯亮为逻辑“1”， 灯灭为逻辑“0” 。

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

特点:任1 则1，全0则0

或逻辑关系表示式　　$L=A+B$

运算规则 —— 逻辑加

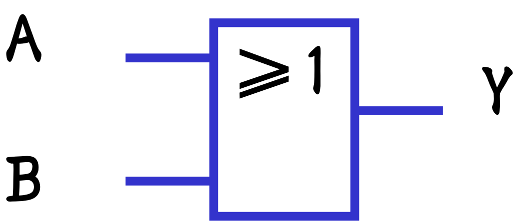
$0+0=0$

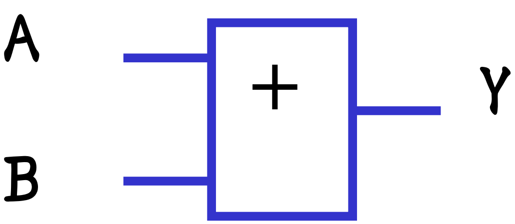
$0+1=1$

$1+0=1$

$1+1=1$

或门符号：

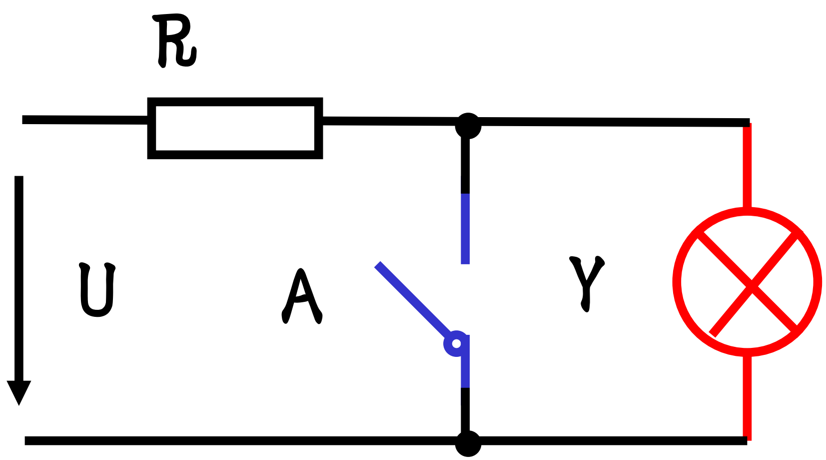




(3) “非”逻辑关系和非门

A、概念

决定事件发生的条件只有一个，条件不具备时事件发生（成立），条件具备时事件不发生。



B、真值表

A	Y
0	1
1	0

特点：1则0，0则1

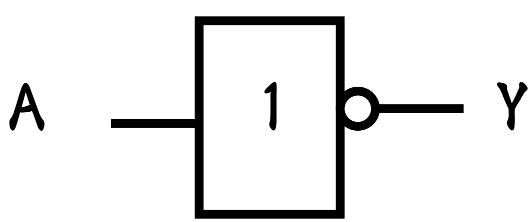
关系表示式：　$Y=\overline{A}$

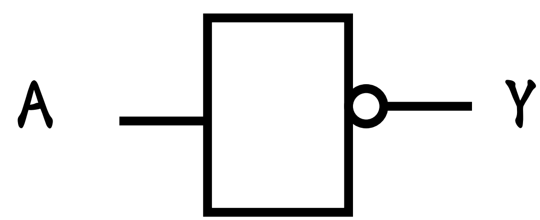
运算规则：

$\overline{0}=1$

$\overline{1}=0$

符号：





非逻辑—— 逻辑反

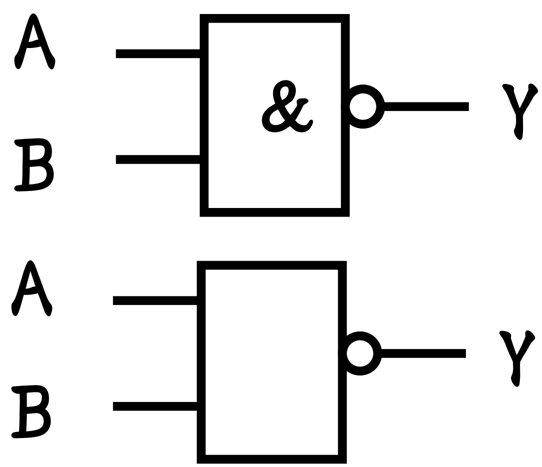
二、基本逻辑关系的扩展

将基本逻辑门加以组合，可构成“与非”、“或非”、“异或”等门电路。

1、与非门

表示式：$Y = \overline{AB}$

符号：



多个逻辑变量时： $Y=\overline{AB\ C}$

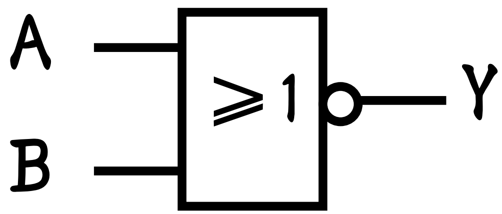
真值表

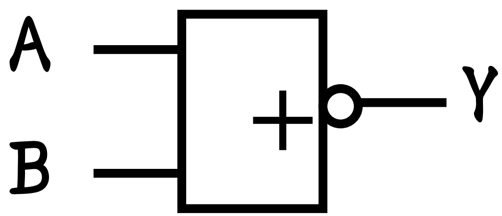
A B AB
Y
0 0
0 1
0 1
0 1
1 0
0 1

2、或非门

表示式： $Y=\overline{A+B}$

符号：





真值表

A	B	A+B

Y

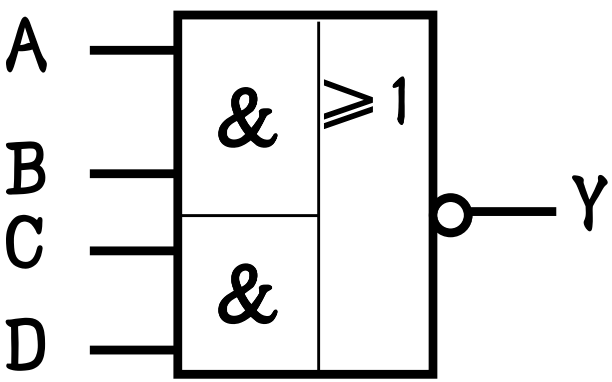
0 0
0 1
0 1
1 0
1 0
0
1 1
1 0

多个逻辑变量时： $Y=\overline{A+B+C}$

3、与或非门

表示式： $Y=\overline{AB+CD}$

符号：

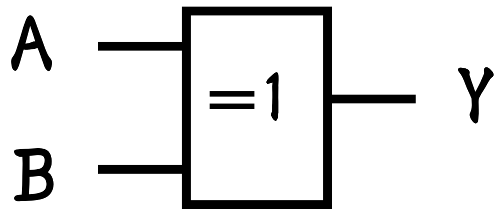


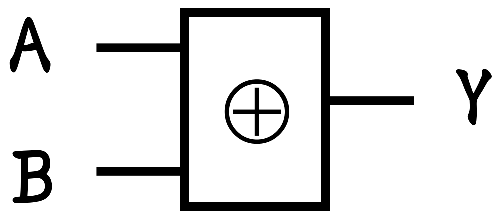
A B C D	Y
0 0 0 0	1
0 0 0 1	1
0 0 1 0	1
0 0 1 1	0
0 1 0 0	1
0 1 0 1	1
0 1 1 0	1
0 1 1 1	0
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	1
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	0
1 1 1 0	0
1 1 1 1	0

4、 异或门

表示式： $Y = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

符号：





真值表特点： 相同则0，

不同则1

真值表

A　$\bar{B}$　$A\bar{B}$　AB

Y

0　0　0

0　0

0　1　1

0　1

1　0　0

1　1

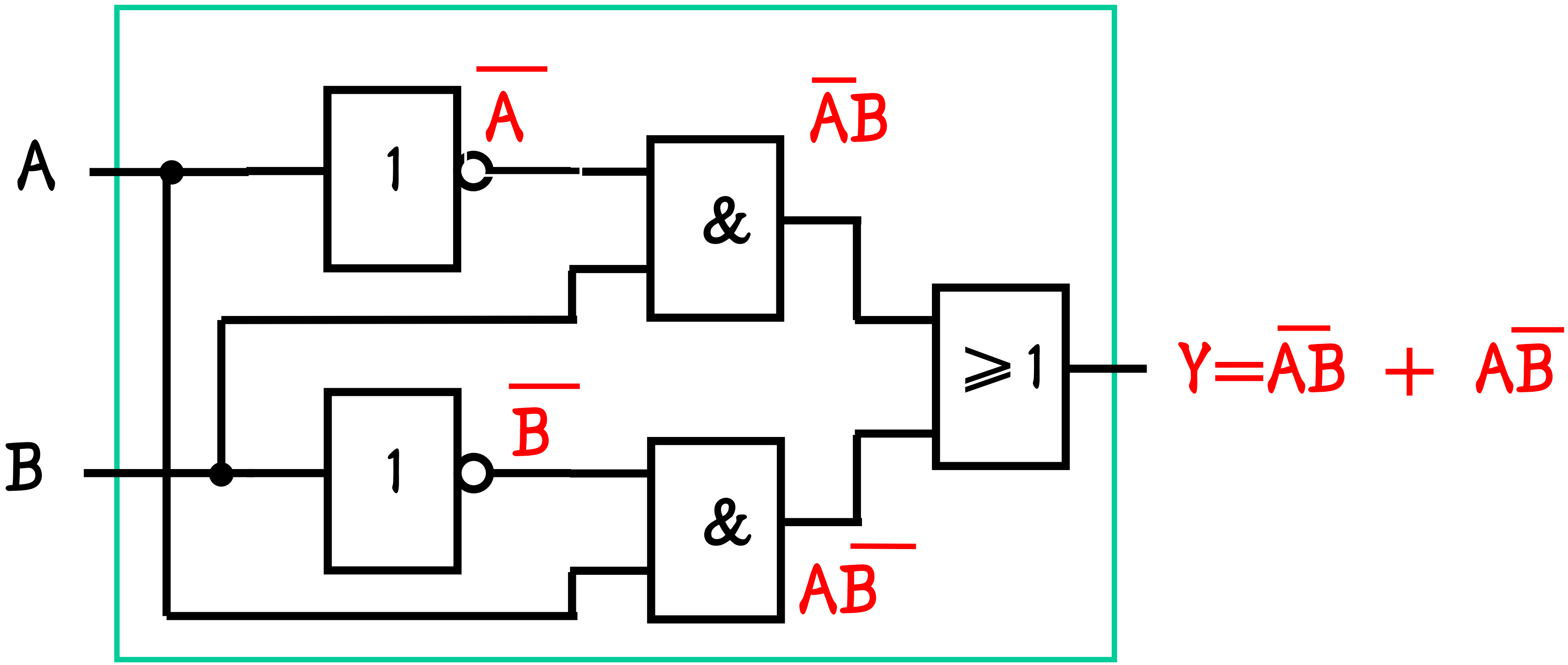
0　0

“同或”　$Z = A \odot B = \bar{A}\bar{B} + AB = \overline{A \oplus B}$

4、 异或门

用基本逻辑门组成异或门

表示式：$Y = A \oplus B = \bar{A}B + \bar{A}B$



门电路小结

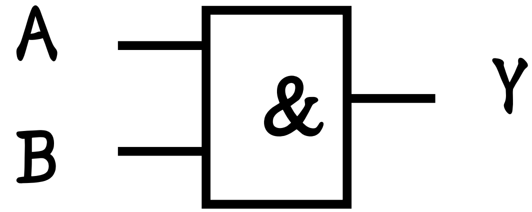
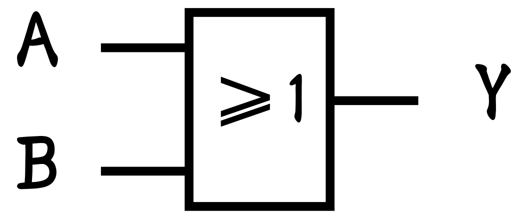
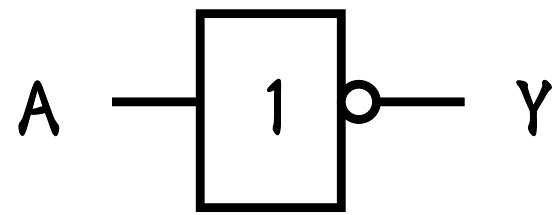
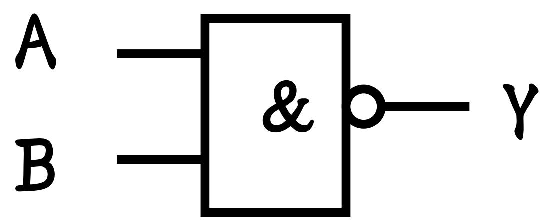
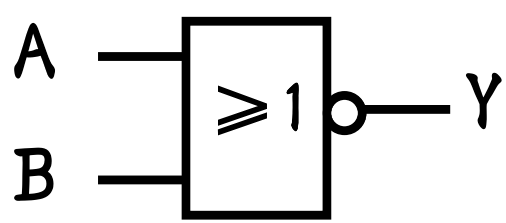
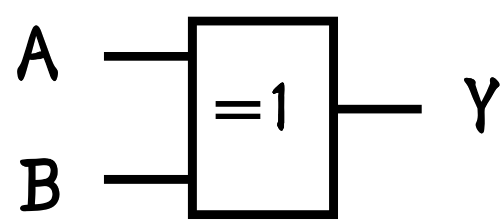
- 门电路是实现一定逻辑关系的电路。
- 实现方法： 1、用二极管、三极管实现

  2、数字集成电路(大量使用)

  1）TTL集成门电路

  2）MOS集成门电路
- 类型：与门、或门、非门、与非门、或非门、异或门 ……。

门电路小结

门电路	符号	表示式
与门		$Y=AB$
或门		$Y=A+B$
非门		$Y=\overline{A}$
与非门		$Y=\overline{AB}$
或非门		$Y=\overline{A+B}$
异或门		$Y=A\oplus B$

三、逻辑函数的相等

1、定义：设有两个逻辑函数

$$F=f(x_1, x_2, \cdots x_n) \qquad G=g(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

其变量都为$x_1, x_2, \cdots x_n$，如果对应于变量$x_1, x_2, \cdots x_n$的任何一组变量取值，F，G的值都相等，则称这两个函数相等，记为F=G。

2、判断逻辑函数是否相等的方法

（1）真值表法

（2）利用逻辑代数的定理、定律和规则进行证明。

例：　　$F=\overline{xy}$　　　　$G=\overline{x}+\overline{y}$

x　　y	x y	$F=\overline{xy}$	$\overline{x}$　　$\overline{y}$	$G=\overline{x}+\overline{y}$
0　　0	0	1	1　　1	1
0　　1	0	1	1　　0	1
1　　0	0	1	0　　1	1
1　　1	1	0	0　　0	0

它们的真值表完全相同，故F和G是相等的。

四、关于逻辑函数的书写

(1) 进行“非”运算，可不加括号。如：$\overline{A}$，$\overline{A+B}$

(2) 在一个表达式中，既有“与”运算，又有“或”运算，则按先“与”后“或”的规则省去括号。如：$(A\cdot B)+(C\cdot D)\rightarrow A\cdot B+C\cdot D$

(3) “与”运算符一般可省去。如：$A\cdot B\rightarrow AB$

(4) 由于“与”，“或”运算都满足结合律，因此：$A+(B+C)=A+B+C$，$(AB)C=ABC$。

五、逻辑代数的基本定律

1、基本关系

加运算规则： $0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=1$

$A+0=A$，$A+1=1$，$A+A=A$，$A+\overline{A}=1$

乘运算规则： $0\cdot0=0$　$0\cdot1=0$　$1\cdot0=0$　$1\cdot1=1$

$A\cdot0=0$　$A\cdot1=A$　$A\cdot\overline{A}=0$

$A\cdot A=A$

非运算规则： $\overline{0}=1$

$\overline{1}=0$

$\overline{\overline{A}}=A$

2.逻辑代数基本定律

交换律:　$A+B = B+A$

$AB=BA$

结合律:　$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$

$ABC=(AB)C=A(BC)$

分配律： $A(B+C)=AB+AC$　　$A+BC=(A+B)(A+C)$

证明： 右边 $=(A+B)(A+C)$

$=AA+AB+AC+BC$ ；分配律

$=A+A(B+C)+BC$ ；结合律, $AA=A$

$=A(1+B+C)+BC$ ；结合律

$=A\cdot 1+BC$ ；

$1+B+C=1$

$=A+BC$ ；$A\cdot 1=1$

=左边

吸收律

原变量吸收规则： $A+AB=A$

> 注： 红色变量被吸收掉！

反变量吸收规则： $A+\overline{A}B=A+B$

$\overline{A}+AB=\overline{A}+B$

证明： $A+\overline{A}B=A+AB+\overline{A}B$

$=\overline{A}+(A+A)B$

$=A+1\cdot B$;

$A+A=1$

$=A+B$

混合变量吸收规则：

$$AB+A\overline{B}=A$$

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

证明：

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$$

$$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$$

$$=AB(1+C)+\overline{A}C(1+B)$$

$$=AB+\overline{A}C$$

摩根定理（反演定理）

$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$　　　　$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

证明：

<u>用真值表证明</u>

A　B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0　0	1	1
0　1	1	1
1　0	1	1

六、逻辑代数的基本规则

1.代入规则

对逻辑等式中的任意变量A，若将所有出现A的位置都代之以同一个逻辑函数，则等式仍然成立。

例：若：$A(B+C)=AB+AC$

$$C \longrightarrow C+D$$

则：$A[B+(C+D)]=AB+A(C+D)$

意义：利用这条规则和现有的等式，可以推出更多的等式，而无需证明。

六、逻辑代数的基本规则

2.反演规则

对于任何一个逻辑函数F，若将F表达式中所有的“·”和“+”互换，“0”和“1”互换，原变量和反变量互换，并保持运算优先顺序不变，则可得到F的反函数。

例：$F=\bar{A}\cdot\bar{B}+C\cdot D \rightarrow \bar{F}=(A+B)\cdot(\bar{C}+\bar{D})$

$$F=A+\overline{B+\bar{C}+\overline{D+\bar{E}}} \rightarrow \bar{F}=\bar{A}\cdot\overline{\bar{B}\cdot C\cdot\overline{\bar{D}\cdot E}}$$

注意：

①反演规则的意义在于利用它求一个函数的反函数。

②运用反演规则时，不是一个变量上的反号应该保留。

③变换时，应注意先“与”后“或”，先括号内后括号外的顺序。

3.对偶规则

对于任何一个逻辑函数F，若将F表达式中所有的“·”和“+”互换，“0”和“1”互换，并保持运算优先顺序不变，则所得到新的函数称为函数F的对偶函数F'。

例：$F=(A+\overline{B})\cdot(A+C)\rightarrow F'=A\cdot\overline{B}+AC$

$$F=A+B\overline{C}\rightarrow F'=A(B+\overline{C})$$

$$F=\overline{\overline{A}+\overline{B+\overline{C}}}\rightarrow F'=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B\cdot\overline{C}}}$$

若 $F' = F$　　　　　　　　　　称函数为自对偶函数

例：　$F = (A+\overline{C})\overline{B} + A(\overline{B}+\overline{C})$

$$F' = (A\overline{C}+\overline{B})(A+\overline{B}\,\overline{C}) = (A+\overline{B})(\overline{C}+\overline{B})(A+\overline{B})(A+\overline{C})$$

$$= A(\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{C}) + \overline{B}(\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{C})$$

$$= (\overline{B}+\overline{C})(A+A\overline{C}) + (\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C})(A+\overline{C})$$

$$= (A+\overline{C})\overline{B} + A(\overline{B}+\overline{C}) = F$$

注意：转换时应先“与”后“或”，先括号内后括号外的顺序。

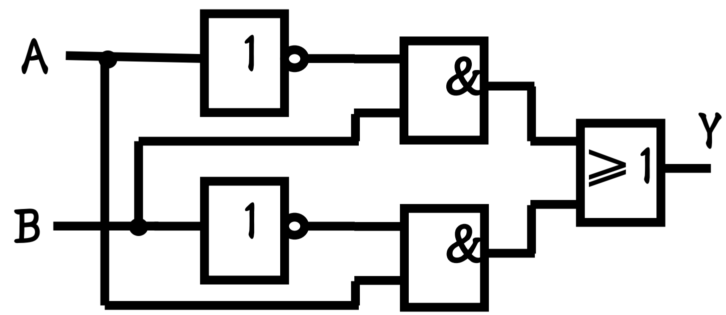
对偶规则：当某个逻辑恒等式成立时，其对偶式的等式也成立。

2.2 逻辑函数的表示与变换

一、逻辑函数的表示方法

四种表示方法

逻辑电路图：



逻辑代数式(逻辑表示式， 逻辑函数式)

$$Y=\bar{A}B + \bar{A}B$$

真值表：将逻辑函数输入变量取值的不同组合与所对应的输出变量值用列表的方式一一对应列出的表格。

N个输入变量 $\longrightarrow$ 2^n 种组合。

卡诺图

真值表

A	Y
0	1
1	0

一输入变量，二种组合

A	B
Y	
0	0
1	
0	1
1	
1	0

二输入变量，四种组合

A	B	C
Y		
0	0	
0	0	
0	0	
1	0	
0	1	
0	0	
0	1	
1	0	
1	0	
0	0	

三输入变量，八种组合

（四输入变量）

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0

A	B	C	D	Y
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

四输入变量，16种组合

二、各种表示方法之间的转换

1、由真值表求逻辑表达式

（1）把真值表中逻辑函数值为1的变量组合挑出来；

（2）若输入变量为1，则写成原变量，若输入变量为0，则写成反变量；

（3）把每个组合中各个变量相乘，得到一个乘积项；

（4）将各乘积项相加，就得到相应的逻辑表达式。

例：试设计一个三人表决器

A B C	表决结果 Z
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

2、由逻辑表达式列出真值表

按照逻辑表达式，对逻辑变量的各种取值进行计算，求出相应的函数值，再把变量取值和函数值一一对应列成表格。

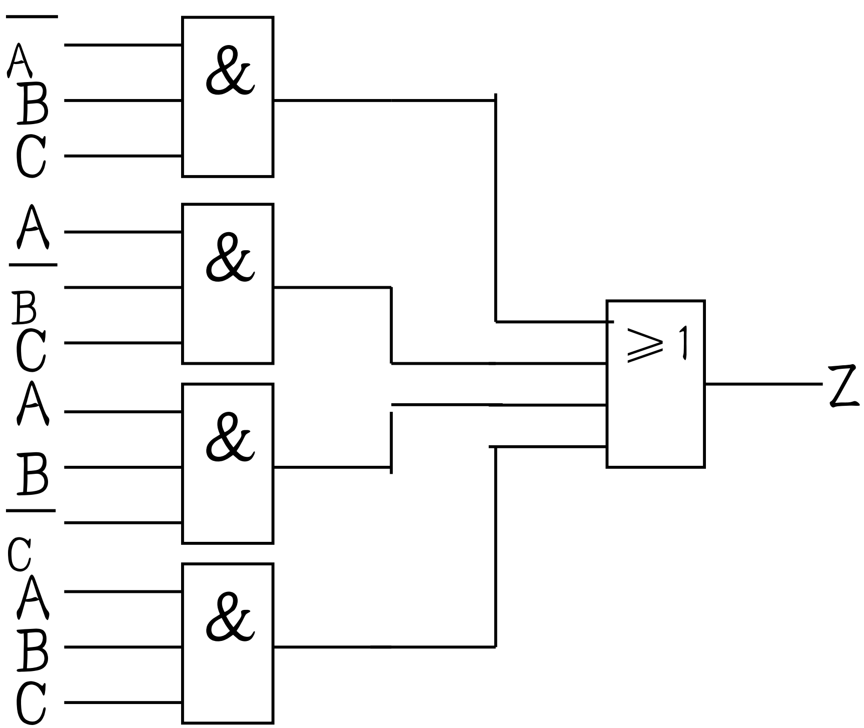
$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

A B C	表决结果 Z
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

3、由逻辑函数式求逻辑电路

(1) 画出所有的逻辑变量；
(2) 用“非门”对变量中有“非”的变量取“非”；
(3) 用“与门”对有关变量的乘积项，实现逻辑乘；
(4) 用“或门”对有关的乘积项，实现逻辑加；

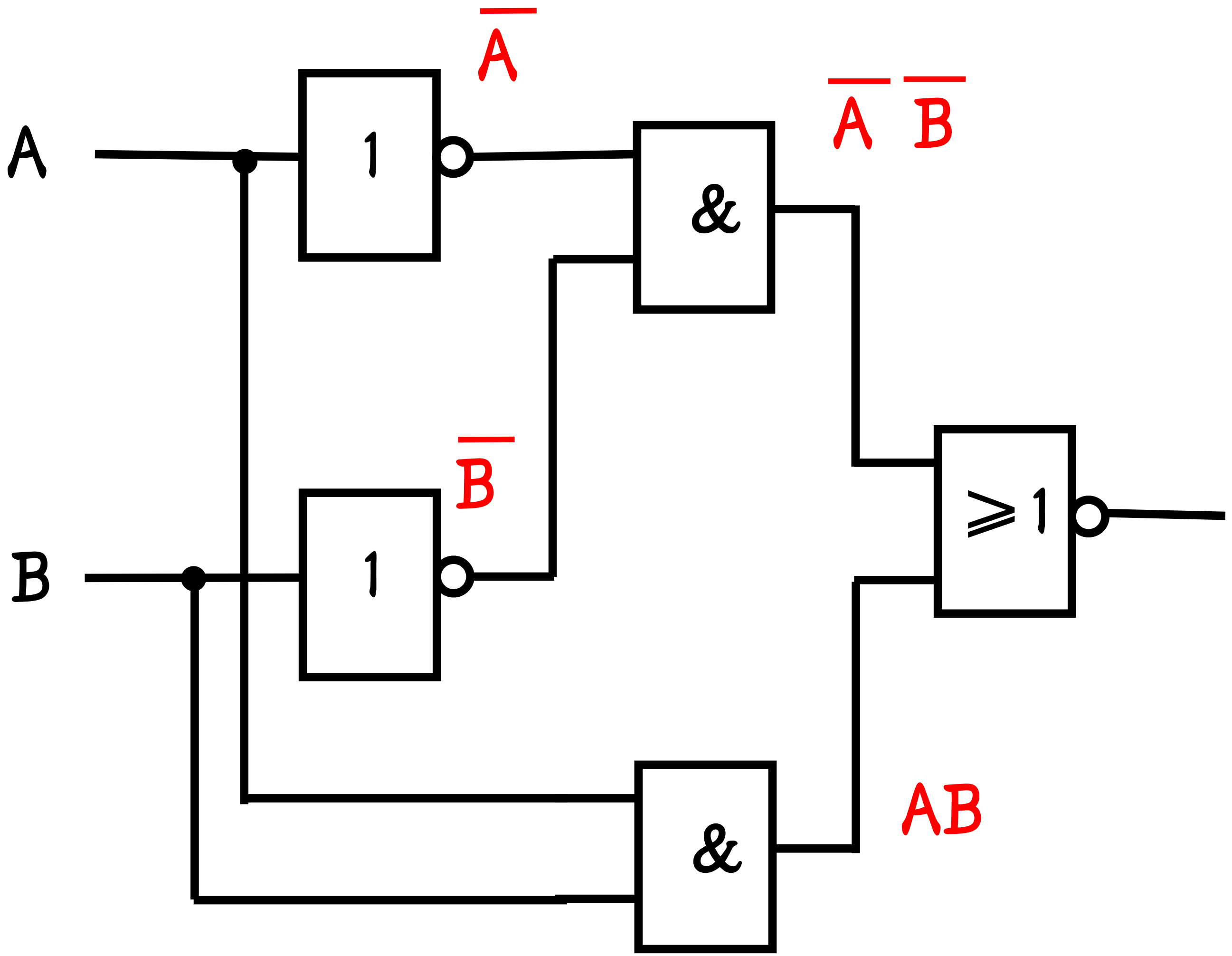
$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$



A B C	表决结果 Z
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

4、由逻辑图求逻辑表达式

由输入到输出，按照每个门的符号写出每个门的逻辑函数，直到最后得到整个逻辑电路的表达式。



$Y=\overline{\overline{A}\,\overline{B}+AB}$

三、逻辑函数的标准形式

1、最小项

1）定义：若n个变量组成的与项中，每个变量均以原变量或反变量的形式出现一次且仅出现一次，则称该“与项”为n个变量的最小项。

例：设 A，B，C是三个逻辑变量，其最小项为

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，$\bar{A}\bar{B}C$，$\bar{A}B\bar{C}$，$\bar{A}BC$，$A\bar{B}\bar{C}$，$A\bar{B}C$，$AB\bar{C}$，ABC

不是最小项的与项：AB，AC，A(B+C)，…

2）最小项的编号：

把使该最小项为1的取值组合视作二进制数，则相应的十进制数作为最小项的编号。用$(m)_{(N)10}$表示。

$$A\bar{B}C = m_5$$

1 0 1

2、标准“与—或”式

1）由最小项相“或”构成的逻辑表达式，称为标准“与—或”式。

$$F(A,B,C)=\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC \quad =m_2+m_4+m_7=\sum m(2,4,7)$$

或写成 $F(A,B,C)=\sum(2,4,7)$

2）一个逻辑函数的标准“与—或”式是唯一的。

3）任何一个逻辑函数都可表示成为标准“与—或”式。其方法如下：

代数法：① 将函数表示成为一般的“与—或”式；

② 反复利用$X=X(Y+\overline{Y})$，将表达式中所有非最小项的“与”项扩展成为最小项。

例：$F(A,B,C)=\overline{(A\overline{B}+B\overline{C})\cdot\overline{AB}}$

$$
\begin{aligned}
&=\overline{A\overline{B}+B\overline{C}}+AB=\overline{A\overline{B}}\cdot\overline{B\overline{C}}+AB\\
&=(\overline{A}+B)(\overline{B}+C)+AB=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}C+BC+AB\\
&=\overline{A}\,\overline{B}(C+\overline{C})+\overline{A}C(B+\overline{B})+BC(A+\overline{A})+AB(C+\overline{C})\\
&=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+AB\overline{C}+ABC\\
&=\sum m(0,1,3,6,7)
\end{aligned}
$$

例：$F(A,B,C)=A\overline{B}+C$

$$
\begin{aligned}
&= A\overline{B}(C+\overline{C})+(A+\overline{A})(B+\overline{B})C \\
&= \overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C+ABC \\
&= \sum m(1,3,4,5,7)
\end{aligned}
$$

真值表法：将在真值表中，输出为1所对应的最小项相加，即为标准“与—或”式

$$F(A,B,C)=\sum m(2,5,6)$$

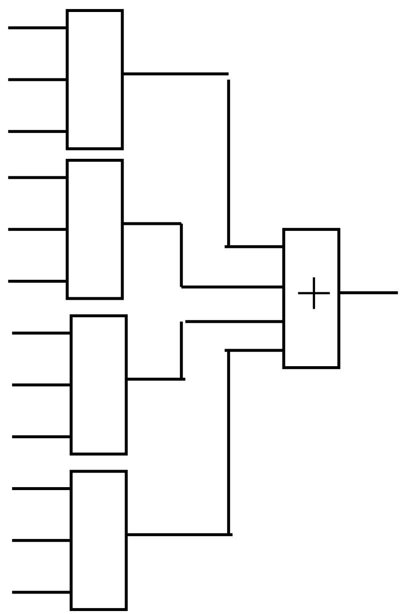
A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

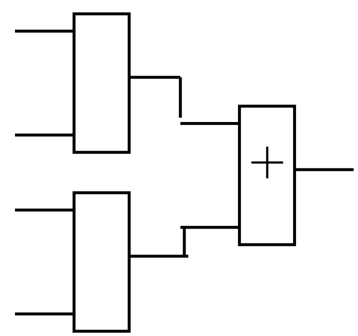
2.3　逻辑函数的化简

一、化简的意义和最简的概念

例：试证明下面两式具有相同的逻辑功能，并比较它们的逻辑图。

$Z_1 = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C$ 和 $Z_2 = AB + \overline{A}C$





$$\begin{aligned} Z_1 &= ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C \\ &= AB(C + \overline{C}) + \overline{A}C(B + \overline{B}) \\ &= AB + \overline{A}C = Z_2 \end{aligned}$$

即Z_1、Z_2具有相同的逻辑功能

1、化简的意义

（1）节省器材；

（2）提高了工作的可靠性；

2、最简的概念

（1）“与或”表达式化简的意义

① 任何一个表达式都不难展开成“与或”表达式；

② 从一个最简的“与或”表达式可以比较容易地得到其他类型的最简式。

（2）最简“与或”表达式

① “与”项的个数最少；

② 每个“与”项中的因子数最少；

二、代数化简法

例1：化简

$$F = A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

提出AB

$$= A\overline{B}C + AB(\overline{C} + C)$$

=1

$$= A\overline{B}C + AB$$

提出A

$$= A(\overline{B}C + B)$$

反变量吸收

$$= A(C + B)$$

$$= AC + AB$$

例2 将 $Y=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+ABC+\bar{A}BC+AB\bar{C}$ 化为最简逻辑代数式。

$$Y=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+ABC+\bar{A}BC+AB\bar{C}$$

$$=\bar{A}B(\bar{C}+C)+\bar{A}\bar{B}C+AB(C+\bar{C})$$ ；$\bar{C}+C=1$

$$=\bar{A}B+\bar{A}\bar{B}C+AB$$

$$=(\bar{A}+A)B+\bar{A}\bar{B}C$$

$$=B+\bar{B}\bar{A}C$$

$A+\bar{A}B=A+B$

$$=B+AC$$

例3 将Y化简为最简逻辑代数式。

$$Y = A\overline{B} + (\overline{A} + B)CD$$

解：$Y = A\overline{B} + (\overline{A} + B)CD$　　　；$A = \overline{\overline{A}}$

$= A\overline{B} + \overline{\overline{(\overline{A} + B)}}CD$　　　；利用反演定理

$= A\overline{B} + \overline{A\overline{B}}\,CD$　　　；将$A\overline{B}$当成一个变量，

$= A\overline{B} + CD$　　　利用公式$A + \overline{A}B = A + B$

1、并项法：

运用定理 $A+\bar{A}=1$，将两项合并成一项，从而消去一个变量。

$$Z=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}$$

$$=(A+\bar{A})\bar{B}\bar{C}+(A+\bar{A})B\bar{C}$$

$$=\bar{B}\bar{C}+B\bar{C}=\bar{C}$$

$$Z=A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}=A\bar{B}(C+\bar{C})=A\bar{B}$$

$$Z=A(BC+\bar{B}\bar{C})+A(B\bar{C}+\bar{B}C)$$

$$=A(BC+\bar{B}\bar{C})+A\overline{(BC+\bar{B}\bar{C})}=A$$

2、吸收法：

利用A+AB=A消去多余的项

$$Z=A\bar{B}+A\bar{B}CD(E+F)=A\bar{B}$$

3、消去法：

利用 $A+\overline{A}B=A+B$ 消去多余的因子

$$Z=AB+\overline{A}C+\overline{B}C=AB+(\overline{A}+\overline{B})C=AB+\overline{AB}C=AB+C$$

$$Z=\overline{A}+AB+DE=\overline{A}+B+DE$$

也可利用 $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$ 消去多余的项

4、配项法：

利用 $A=A(B+\overline{B})$ 作配项用，然后消去更多的项

$$Z=AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$$

$$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC=AB+\overline{A}C$$

也可利用 $A+1=1$ 或 $A+A=A$ 来配项

$$Z=ABC+\overline{A}BC+\overline{AB}C=ABC+\overline{A}BC+\overline{AB}C+ABC$$

$$=(A+\overline{A})BC+(\overline{AB}+AB)C=BC+C=C$$

3、消去法：

利用 $A = A(B + \overline{B})$ 作配项用，然后消去更多的项

$$Z = AB + \overline{A}C + \overline{B}C = AB + (\overline{A} + \overline{B})C = AB + \overline{AB}\,C = AB + C$$

$$Z = \overline{A} + AB + DE = \overline{A} + B + DE$$

也可利用 $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$ 消去多余的项

4、配项法：

$$\begin{aligned} Z &= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B = A\overline{B} + B\overline{C} + (A + \overline{A})\overline{B}C + \overline{A}B(C + \overline{C}) \\ &= A\overline{B} + B\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} \\ &= (A\overline{B} + A\overline{B}C) + (B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}) + (\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC) \\ &= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C \end{aligned}$$

5、综合运用：

$$Z = AD + A\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD + A\overline{B}EF + \overline{B}EF$$

$$= A + AB + \overline{A}C + BD + \overline{B}EF$$

$$= A + \overline{A}C + BD + \overline{B}EF = A + C + BD + \overline{B}EF$$

小结：

用代数法化简，一开始不可能知道它的最简式，只能在简化的过程中方能够逐渐清楚。

化简步骤：首先把表达式转换成“与或”表达式，然后用较易的并项法，吸收法和消去法化简函数式，最后再考虑能否用配项法给予展开化简。

适合于简单的逻辑函数化简。

三、卡诺图化简法

（一）、最小项

1）定义：若n个变量组成的与项中，每个变量均以原变量或反变量的形式出现一次且仅出现一次，则称该“与项”为n个变量的最小项。

例：设 A，B，C是三个逻辑变量，其最小项为

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ， $\bar{A}\bar{B}C$ ， $\bar{A}B\bar{C}$ ， $\bar{A}BC$ ， $A\bar{B}\bar{C}$ ， $A\bar{B}C$ ， $AB\bar{C}$ ， ABC

不是最小项的与项：AB，AC，A(B+C)，…

2）最小项的编号：

把使该最小项为1的取值组合视作二进制数，则相应的十进制数作为最小项的编号。用$(m)_{(N)10}$表示。

$$A\bar{B}C = m_5$$

1 0 1

（二）卡诺图

1、构成：

卡诺图是将代表最小项的小方格按相邻原则排列而成的平面方格图。

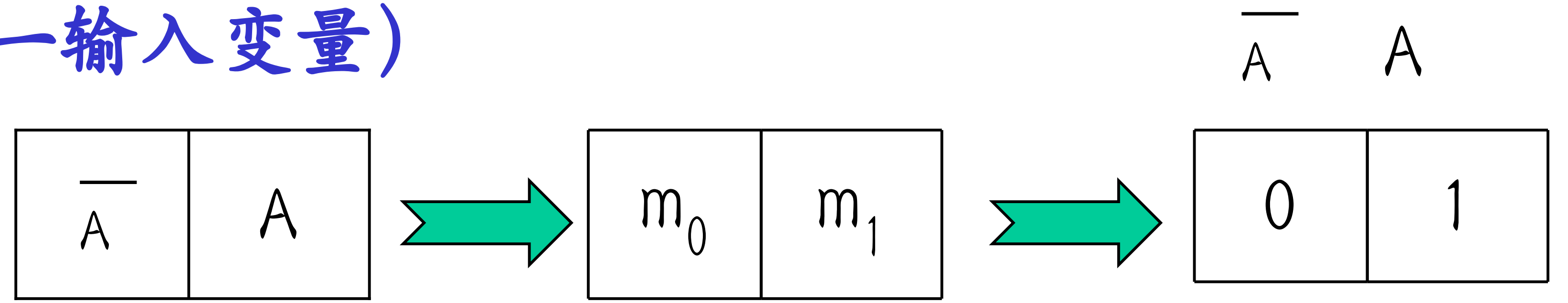
2、画法

基本原则：在相邻方格中填入相邻的最小项。

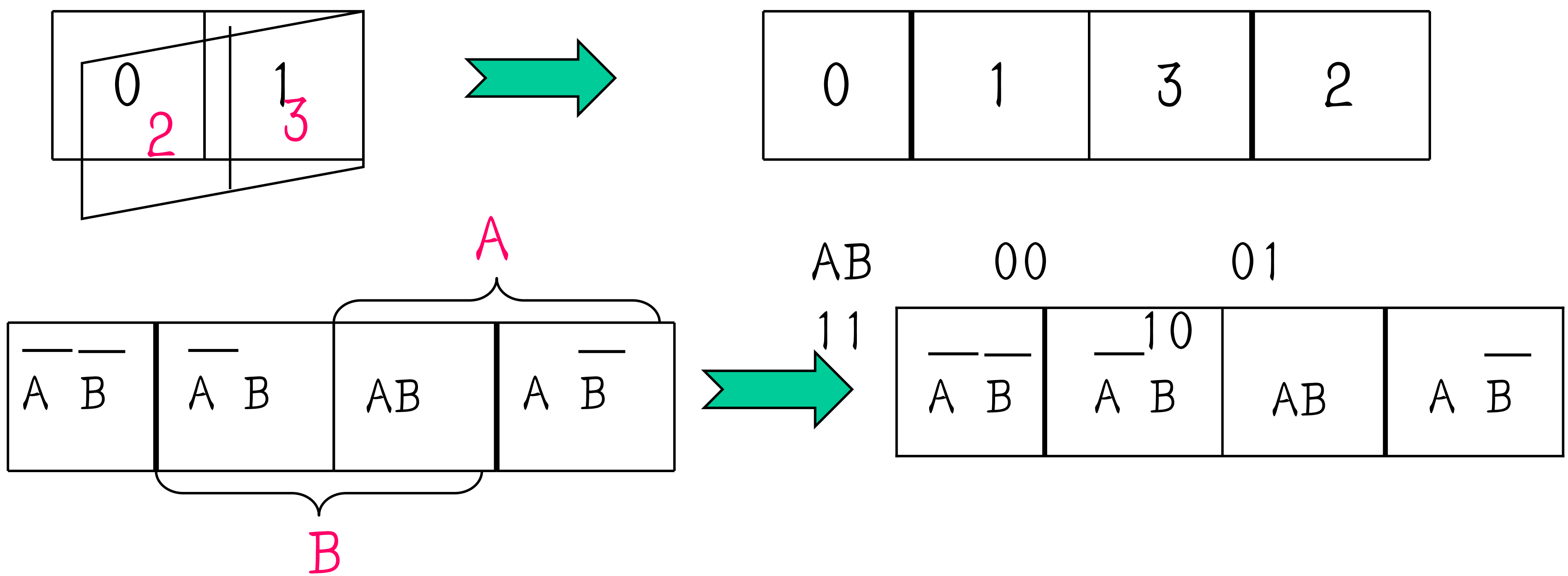
方法：折叠展开法

2、画法

(一输入变量)



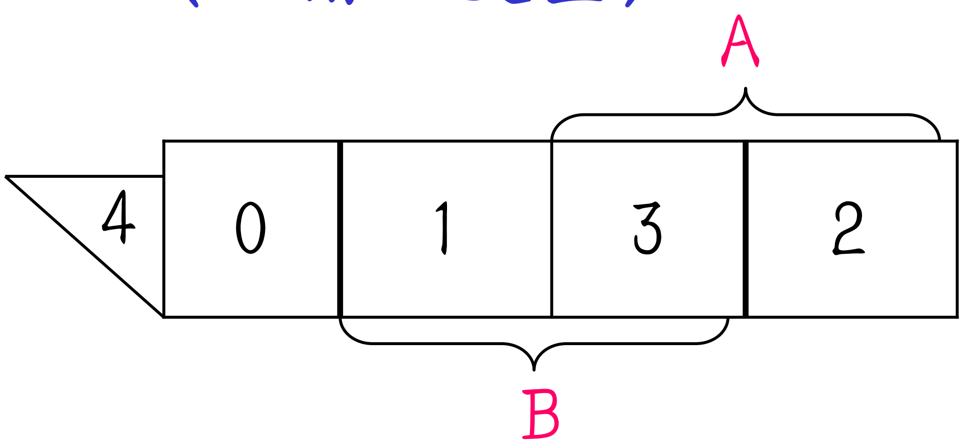
(二输入变量)



2、画法

Z=Z（A，B，C）

(三输入变量)



A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

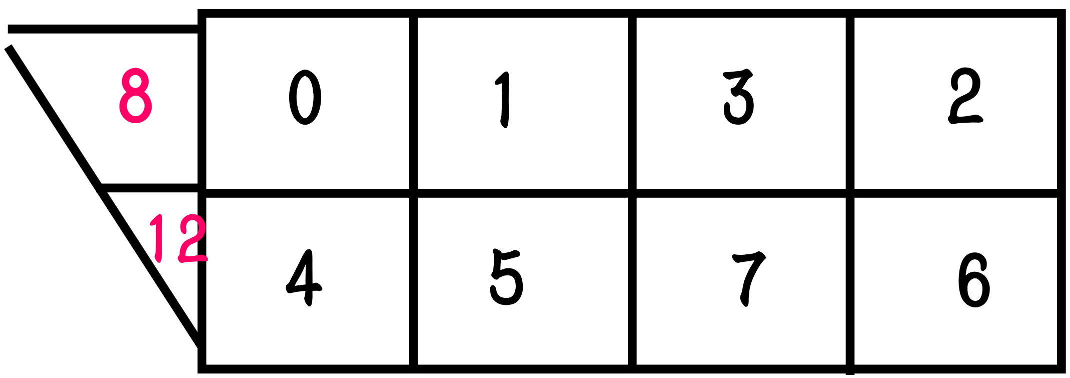
B

	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	$\overline{A}\,BC$	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$
A	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	$A\,\overline{B}\,C$	ABC	$AB\,\overline{C}$

C

2、画法

（四输入变量）　Z=Z（A，B，C，D）



AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

2、画法

四变量卡诺图单元格的编号

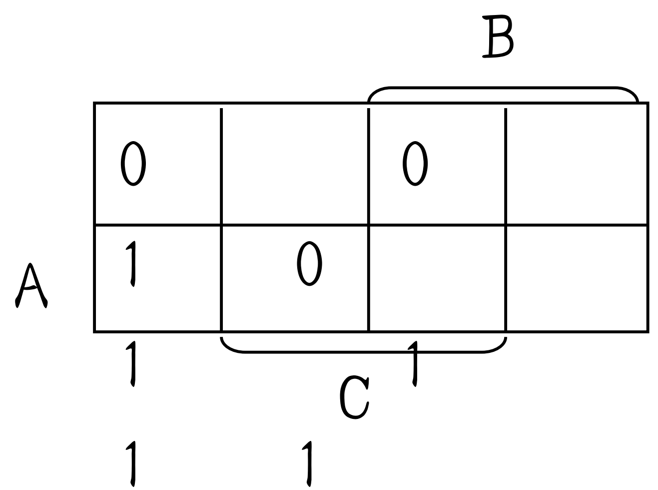
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

			C	C	
	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	
	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$	B
A	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$	B
A	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$	
		D	D		

（三）.作逻辑函数的卡诺图

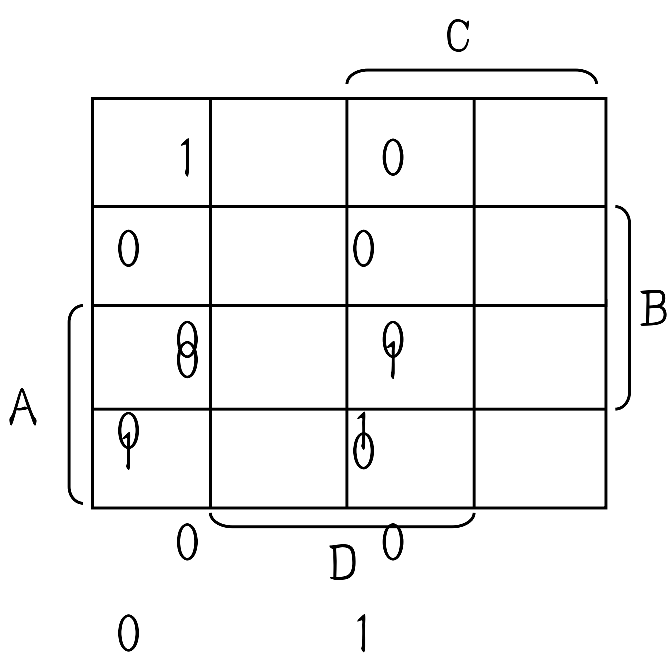
已知真值表填卡诺图：在其相应的小方格中填入0或1。

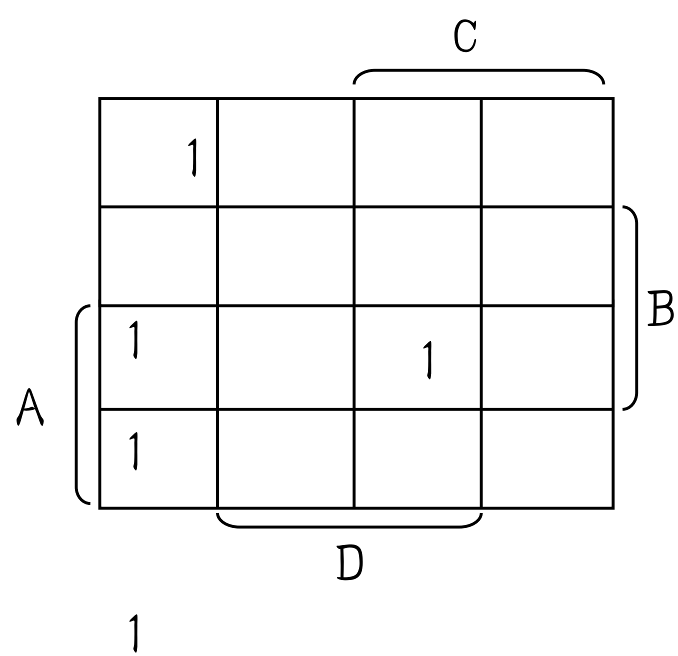
序号	A B C	$Z=A+BC$
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	1
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	1



已知逻辑函数填卡诺图：先将函数化为标准“与或”式，再填入图中。在卡诺固上找出和表达式中最小项对应的小方格填1，其余小方格填0(或以空白代替0)即可得到相应卡诺图。

例如：$F(A,B,C,D)=\sum(0,6,10,13,15)$





未用最小项表达的逻辑函数的卡诺图

对与或表达式表示的函数，可按照卡诺图上与的公共性、或的叠加性、非的否定性作出相应卡诺图；对某一“与”项按顺序对各个变量在图中找对应的方格区，各方格区的重合方格，即为该“与”项所对应的方格，然后再选加其他“与”项，相重的不再写1。

例 $F(A,B,C,D)$

$$=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+B\bar{C}+\bar{A}\bar{C}+A$$

			C	C	
	1	1			
	1	1			B
A	1	1	1	1	B
A	1	1	1	1	
		D	D		

（四）用卡诺图化简逻辑函数

1、化简的依据

卡诺图直观、清晰反映了最小项的相邻关系。根据并项定理，任意两个相邻项可以合并为一项，合并后消去互补变量。

$\bar A\bar B\bar C\bar D$	$\bar A\bar B\bar C D$	$\bar A\bar B CD$	$\bar A\bar B C\bar D$
$\bar A B\bar C\bar D$	$\bar A B\bar C D$	$\bar A BCD$	$\bar A BC\bar D$
$AB\bar C\bar D$	$AB\bar C D$	$ABCD$	$ABC\bar D$
$A\bar B\bar C\bar D$	$A\bar B\bar C D$	$A\bar B CD$	$A\bar B C\bar D$

如：方格13和15为

$$AB\bar C D + ABCD = ABD(C+\bar C) = ABD$$

即消去了相邻方格中不相同的那个因子。

(1) 两个相邻的1方格圈在一起，消去一个变量，

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1		
1				

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{A}\,\overline{B}$$

(a)

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	
1				

$$\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC=\overline{A}C$$

(b)

A \ BC	00	01	11	10
0		1		
1		1		

$$A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{B}C$$

(c)

A \ BC	00	01	11	10
0				
1	1			1

$$A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}=A\overline{C}$$

(d)

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1		
11		1		
10				

$$\overline{A}B\overline{C}D+AB\overline{C}D=B\overline{C}D$$

(e)

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	
01				
11				
10			1	

$$\overline{A}\,\overline{B}CD+A\overline{B}CD=\overline{B}CD$$

(f)

(2) 四个相邻的1方格圈在一起，消去两个变量

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C = \bar{B}$

(a)

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} = \bar{C}$

(b)

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11				
10		1	1	

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD = \bar{B}D$

(c)

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11				
10				

$\bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} = \bar{A}B$

(d)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} = \bar{B}\bar{D}$

(e)

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11	1	1		
10				

$\bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D = B\bar{C}$

(f)

(3) 八个相邻的1方格圈在一起，消去三个变量

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

$$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD+\bar{A}BC\bar{D}+$$
$$AB\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}D+ABCD+ABC\bar{D}=B$$

(a)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+$$
$$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+A\bar{B}CD+A\bar{B}C\bar{D}=\bar{B}$$

(b)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1			1
10	1			1

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+$$
$$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+ABC\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}=\bar{D}$$

(c)

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11			1	1
10			1	1

$$\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}BCD+ABCD+A\bar{B}CD+$$
$$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+ABC\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}=C$$

(d)

2、化简的方法

（1）填好卡诺图；

（2）合并最小项；根据相邻原则，画卡诺圈，并写出每个圈的“与”项。

（3）将每个圈的“与”项相加，即得到简化后的逻辑表达式；

3、画卡诺圈的原则

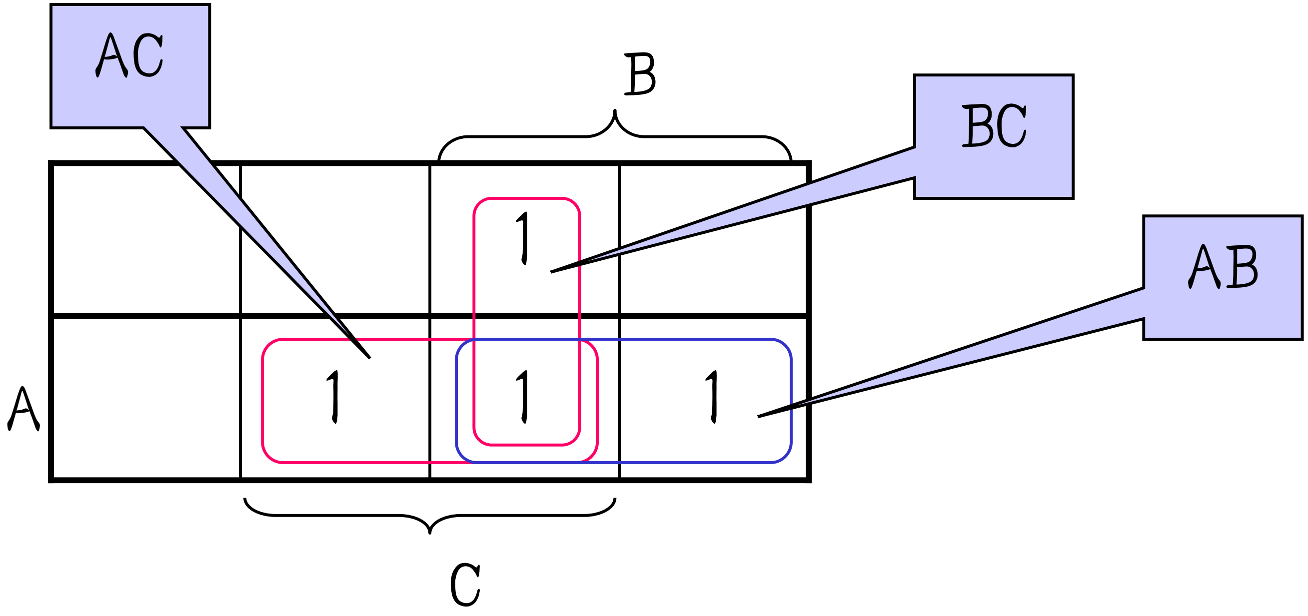
· 在覆盖所有1方格的前题下，卡诺圈的个数应尽可能少。

· 在满足合并规律的前题下，卡诺圈应尽可能大。

· 每个1方格至少被一个卡诺圈包围，根据需要也可以被多个卡诺圈包围。

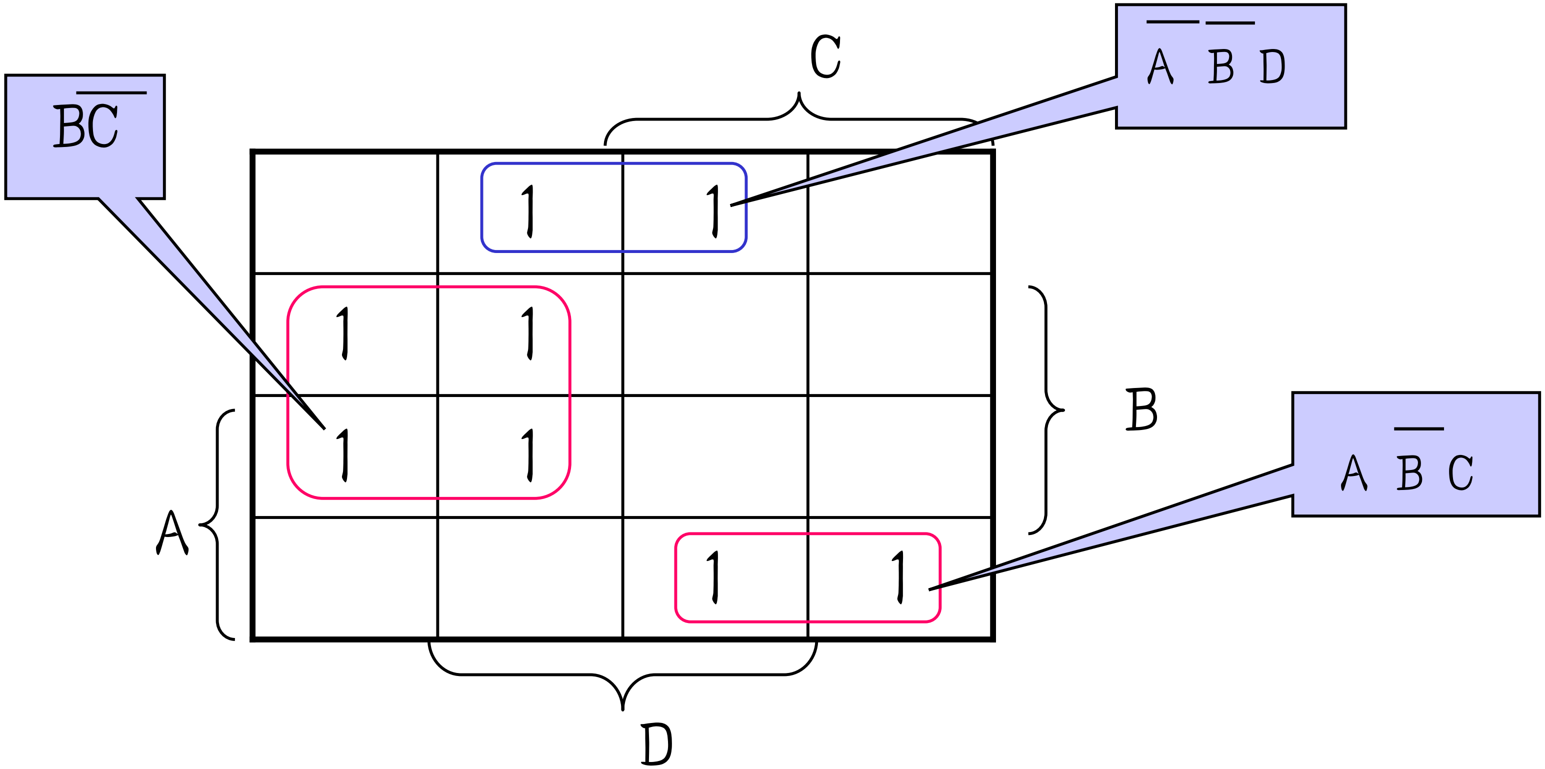
· 画圈的次序是“先大后小”

例1、$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC + AB\overline{C}$



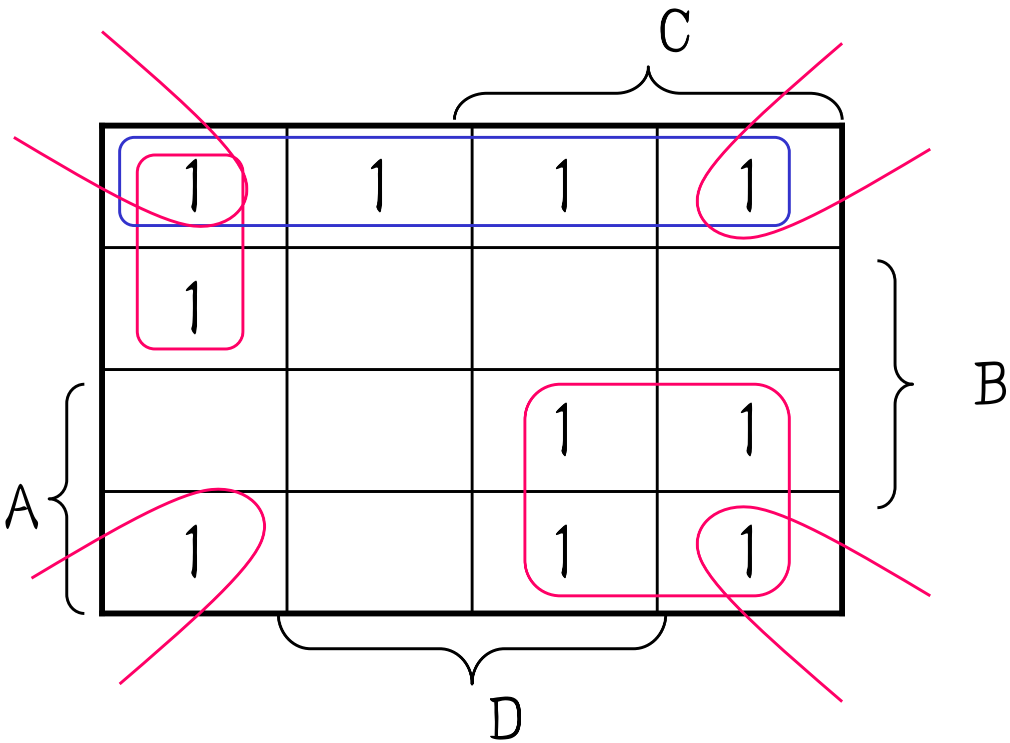
F=AC+BC+AB

例2、$F = \overline{B}CD + B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + A\overline{B}C$



$F = BC + \overline{A}\,\overline{B}D + A\overline{B}C$

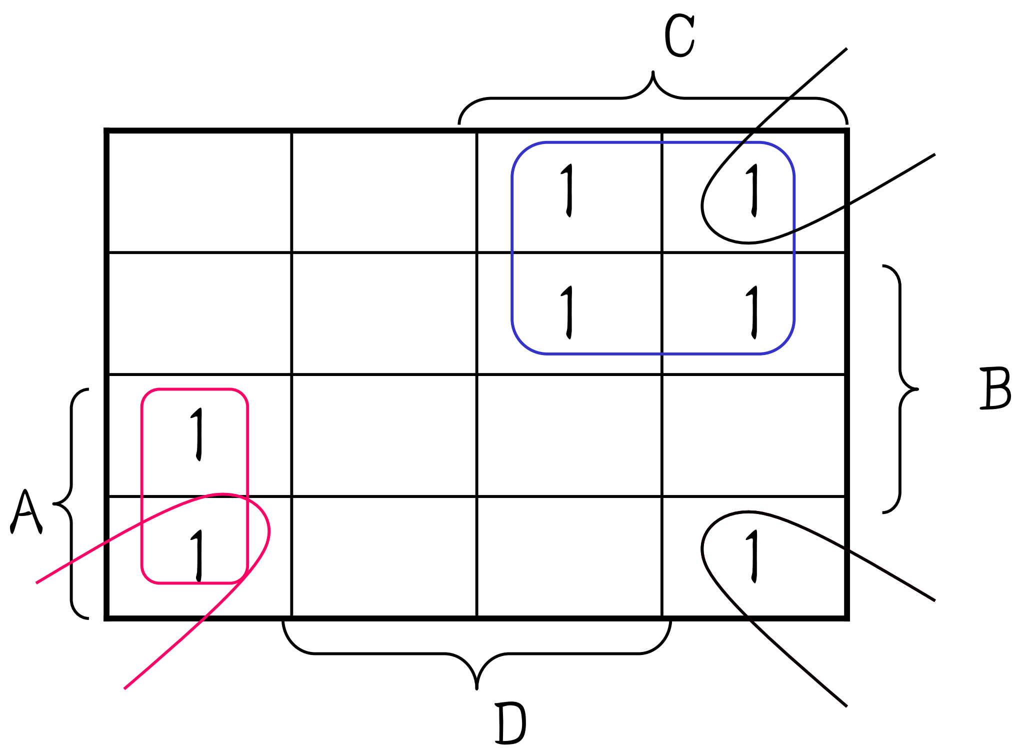
例3、$F(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,3,4,8,10,11,14,15)$



$$F=\overline{A}\,\overline{B}+AC+\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{D}$$

四个角为相邻的方格。

例4、$F(A, B, C, D)=\sum(2,3,6,7,8,10,11)$

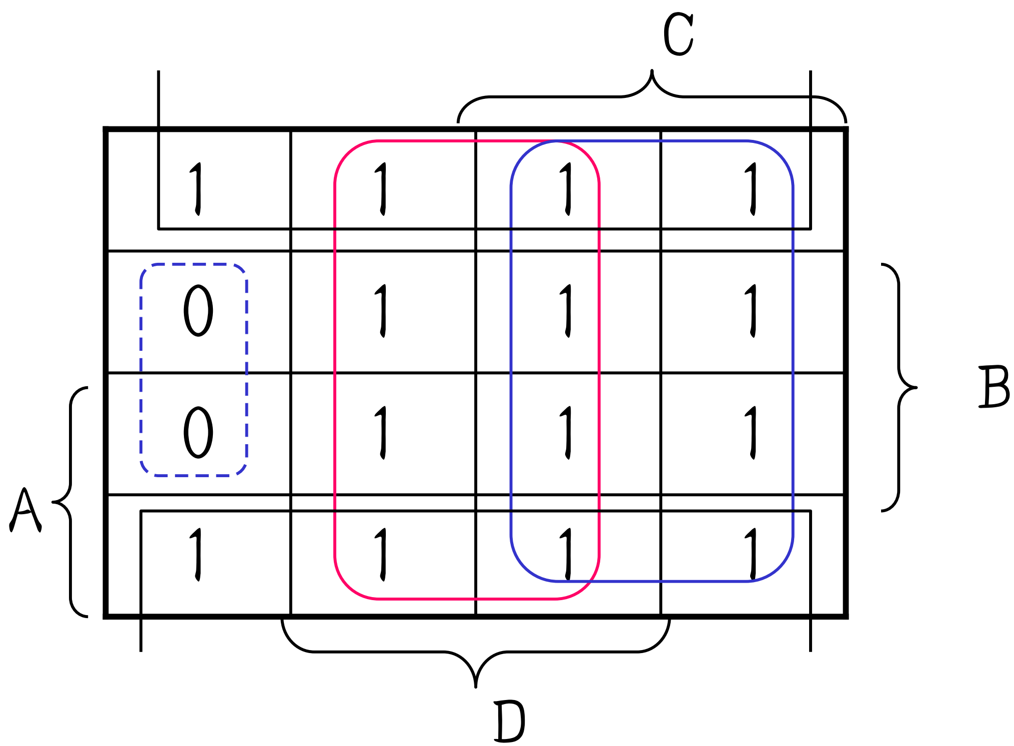


$$F=\bar{A}C+A\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{D}$$

$$F=\bar{A}C+A\bar{C}\bar{D}+\bar{B}C\bar{D}$$

函数的最简“与或”式不一定是唯一的。

例5、$F(A, B, C, D) = \sum(0,1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15)$



$$F = \overline{B} + C + D$$

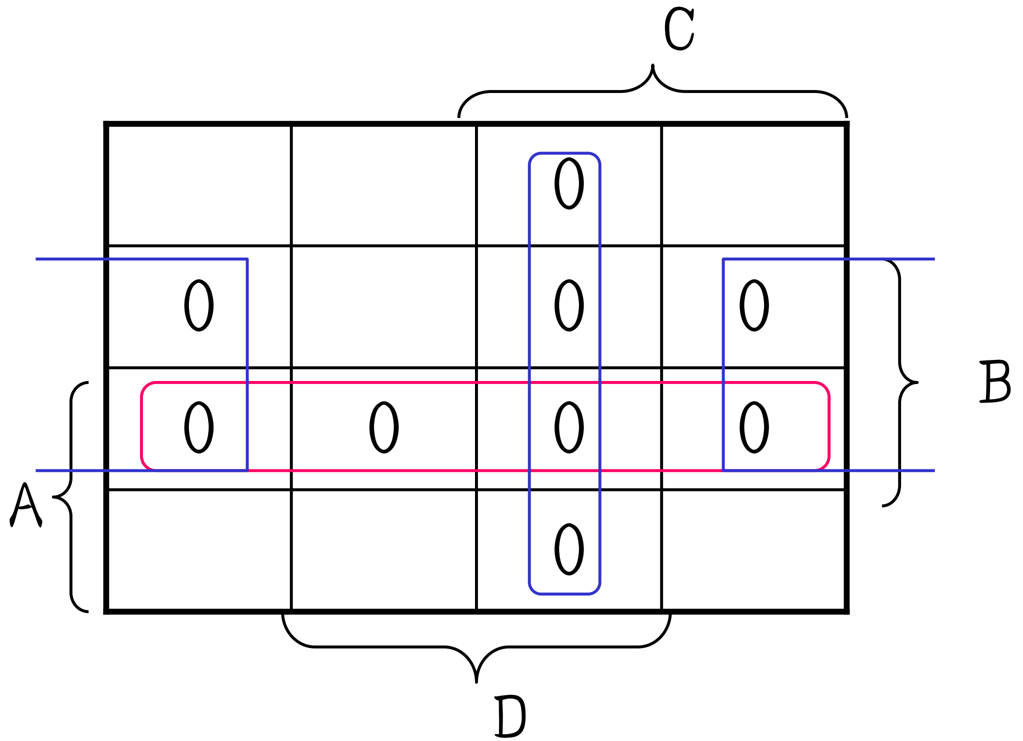
$$\overline{F} = B\overline{C}\,\overline{D}$$

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{B\overline{C}\,\overline{D}}$$

$$= \overline{B} + C + D$$

若卡诺图中各小方格被1占去了大部分，这时采用包围0的方法化简更简单，即先求出非函数，再对非函数求非，得到F。

例8、$F(A,B,C,D)=\prod(3,4,6,7,11,12,13,14,15)$



自己练习

2.4 逻辑函数化简中的几个特殊问题

一、具有约束的逻辑函数的化简

1、约束、约束项、约束条件

（1）什么是约束?

在设计工作中（在真值表内）对应于某些变量的取值组合根本不会出现，即这些变量间存在着严格的互相制约关系，则称这些变量是一组有约束的变量。

例如：用A、B、C三个按钮分别去控制计算器的加法、减法和除法三种操作中的一种，这样，任何时候三个变量只能有一个变量为1，即A、B、C三个变量取值只可能出现000，001，010，100四种组合，而不会出现011，101，110，111。

（2）约束条件

这种互相制约关系，可以用下试表示：

$\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC=0$ ———约束条件

（3）约束项———约束条件中所包含的最小项称为约束项

2、具有约束的逻辑函数的化简

（1）约束条件在化简中的作用

三八妇女节，某单位包了一场电影，票只发给在本单位工作的女同志，试分析该问题。

单位	性别	电影票	能否进场
非	男	无	否
非	男	有	不会出现
非	女	无	否
非	女	有	不会出现
是	男	无	否
是	男	有	不会出现
是	女	无	否
是	女	有	能

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	d
0	1	0	0
0	1	1	d
1	0	0	0
1	0	1	d
1	1	0	0
1	1	1	1

2、具有约束的逻辑函数的化简

（1）约束条件在化简中的作用

三八妇女节，某单位包了一场电影，票只发给在本单位工作的女同志，试分析该问题。

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	d
0	1	0	0
0	1	1	d
1	0	0	0
1	0	1	d
1	1	0	0
1	1	1	1

逻辑函数：$Z=ABC$

$\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C=0$

化简 $\overline{A}C+\overline{B}C=0$

（1）在代数化简法中的应用

$Z=ABC+\overline{A}C+\overline{B}C$

$=C(AB+\overline{A}+\overline{B})$

$=C(AB+\overline{AB})=C$

说明：

$$F(A,B,C)=\sum m(7)+\sum d(1,3,5)$$

一、具有约束的逻辑函数的化简

2、具有约束的逻辑函数的化简

（1）约束条件在化简中的作用

三八妇女节，某单位包了一场电影，票只发给在本单位工作的女同志，试分析该问题。

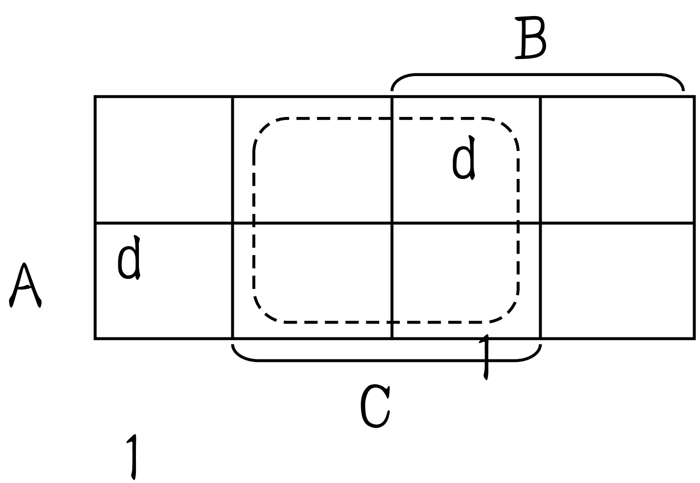
逻辑函数：Z=ABC

$$\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C=0$$

化简 $\overline{A}C+\overline{B}C=0$

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	d
0	1	0	0
0	1	1	d
1	0	0	0
1	0	1	d
1	1	0	0
1	1	1	1

2）在卡诺图化简法中的应用



Z=C

在化简过程中，约束项是当作0还是1是任意的，可根据函数尽量得到简化而定。

一、具有约束的逻辑函数的化简

例1：已知真值表如图，用卡诺图化简。

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	d
1	1	0	1
1	1	1	1

101状态是无关状态。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	d	1	1

认为是1

F=A

一、具有约束的逻辑函数的化简

例2： $Z(A,B,C,D)=\sum m(1,2,5,6,9)+\sum d(10,11,12,13,14,15)$

例3： $Z(A,B,C,D)=\sum m(3,4,5,10,11,12)+\sum d(0,1,2,13,14,15)$

C, B, A, D

	1		1
	1		1
0	d	d	d
	1	d	d

$$Z=\overline{C}D+C\overline{D}$$

C, B, A, D

d	d	1	d
1	1	0	0
1	d	d	d
		1	1

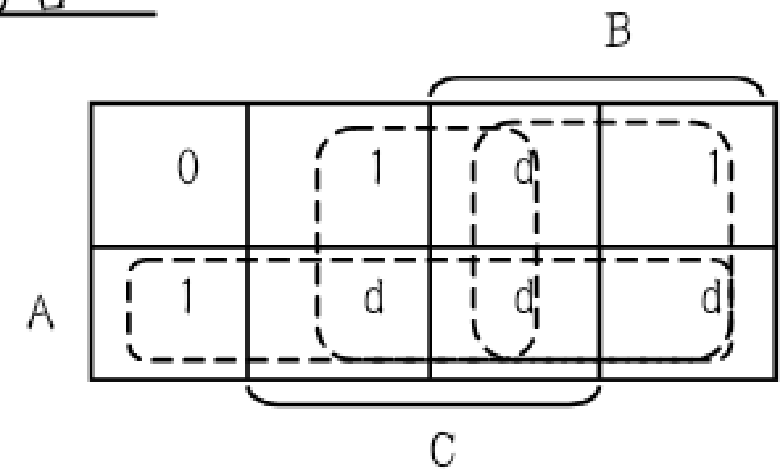
$$Z=B\overline{C}+\overline{B}C$$

二、变量互相排斥的逻辑函数的化简

在一组变量中，如果只要有一个变量取值为1，则其它的变量的值就一定是0，有这种约束的变量——互相排斥的变量。

计算器操作运算问题的真值表

A（加法）	B（减法）	C（除法）	Z（机器工作与否）
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	d
1	0	0	1
1	0	1	d
1	1	0	d
1	1	1	d

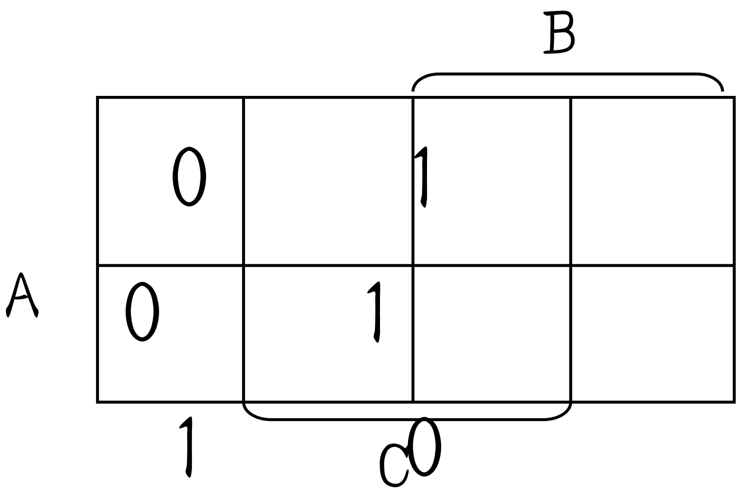


Z=A+B+C

此结论可以推广到多个变量的情况，只要是变量互相排斥且变量取值组合为000…0时，函数值为0，则函数可以表示为变量取值为1时，输出为1的各变量相加。

三、逻辑函数的“异或”实现

例：Z(A, B, C)= $\sum m(1,2,4,7)$



当函数的卡诺图上1方格和0方格各占一半，且相间排列，该函数无法通过画卡诺圈化简，此时，该函数可用“异或”来描述，并且“异或”表达式比其它形式要简单。

$$
\begin{aligned}
Z(A,B,C) &= \sum m(1,2,4,7) \\
&= A\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C \\
&= \overline{(A\bar{B} + \bar{A}B)}C + (A\bar{B} + \bar{A}B)\bar{C} \\
&= \overline{A \oplus B}\,C + (A \oplus B)\bar{C} \\
&= A \oplus B \oplus C
\end{aligned}
$$

第二章结束

谢谢