集合的基本概念和运算

陆月明
ymlu@bupt.edu.cn

内容提纲

1. 集合的基本概念

2. 集合的基本运算

3. 集合中元素的计数

集合与元素

1。 **集合**:一些可确定的可分辩事物构成的整体;

2。 **元素**:构成集合的事物;

① 26个英文字母;

② 班里全体成员;

③ 全体中国人;

④ 坐标平面的点;

集合的表示方法

1. 集合通常用大写的英文字母来标记.

   例如N代表自然数集合,Z代表整数集合,Q代表有理数集合,R代表实数集合;C代表复数集合.

2. 集合的表示:列举法;

   ① A={a, b, c, d}

3. 集合的表示:限制条件法;

   ① $A=\{x|3<x\leqslant 6\}$

4. 集合中元素之间是相异的;

集合与元素的关系

1. $A = \{a, \{b, c\}, d\}$

① $a \in A$

② $\{b, c\} \in A$

③ $b \notin A$

集合与集合的关系

1. 设A、B为集合，如果B中的每个元素都是A中的元素，则称B为A的子集合，简称子集。这时也称B被A包含，或A包含B，记作$B\subseteq A$，如果B不被A包含，记作$B \not\subseteq A$。

   ① A={0,1,2}, B={0,1},C={1,2}则有$B\subseteq A$, $C\subseteq A$,但$B \not\subseteq C$.
   因为存在0,$0\in B$,但$0\notin C$.

集合相等

1. 设A,B为集合,如果A⊆B且B ⊆A,则称A与B相等,记作A=B.符号化表示为 A=B⇔ A⊆B∧B ⊆A. 如果A和B不相等,则记作A≠B.
   ① 两个集合相等的充分必要条件是他们具有相同的元素.例如 A={x|x是小于等于3的素数},B={x|x=2∨x=3}. 则A=B.

真子集

1. 设 A,B为集合,如果$B\subseteq A$且$B\neq A$,则称B是A的真子集,记作$B\subset A$.如果B不是A的真子集,则记作$B\not\subset A$.这时 $B \nsubseteq A$ 或则B=A.

① {0,1}是{0,1,2}的真子集,但{1,3}和{0,1,2}不是 {0,1,2}的真子集.

空集

1. 不含任何元素的集合叫做空集,记作$\varnothing$.空集可以符号化表示为$\varnothing=\{x|x\neq x\}$.
2. 空集是一切集合的子集.
   ① 证明:任何集合A,由子集定义有
   $\varnothing\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)$
3. 推论:空集是唯一的.
   ① 假设存在空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$,由定理有$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$和$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$,根据集合相等定义可知$\varnothing_1=\varnothing_2$.

例题

1. 确定下列命题是否为真

① $\varnothing \subseteq \varnothing$

② $\varnothing \in \varnothing$

③ $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

④ $\varnothing \in \{\varnothing\}$

n元集 和 m元子集

1. 含有n个元素的集合简称n 元集,它的含有m个(m≤n)元素的子集称为它的**m元子集**.
2. A={a,b,c},求A的全部子集.
   ① 0元子集,即空集,只有1个∅.
   ② 1元子集,即单元集, C_3^1 个 {a},{b},{c}
   ③ 2 元子集 C_3^2 个 {a,b},{a,c}{b,c}
   ④ 3元子集1个 {a,b,c}
3. n元集的集合个数为: $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$

幂集

1. 设A为集合,把A的全体子集构成的集合叫做A的**幂集**,记作P(A),符号化成
   $P(A)=\{x|x\subseteq A\}$
2. 设 $A=\{a,b,c\}$,则
   $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\{a,b,c\}\}$
3. 计算以下幂集
   ① $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$
   ② $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
   ③ $P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

全集

1. 如果所涉及的集合都是某个集合的子集,则称这个集合为全集,记作E.
   ① 如实数集合R,为全集,是相对的概念.

内容提纲

1. 集合的基本概念

2. 集合的基本运算

3. 集合中元素的计数

集合的运算符

1. 并　$\cup$
2. 交　$\cap$
3. 相对补　$-$
4. 绝对补　$\sim$
5. 对称差　$\oplus$

运算符的定义

- 设A, B为集合, A与B的并集$A\cup B$, 交集$A\cap B$, B对A的相对补集$A-B$分别定义如下:

① $A\cup B=\{x \mid x\in A \lor x\in B\}$;

② $A\cap B=\{x \mid x\in A \land x\in B\}$;

③ $A-B=\{x \mid x\in A \land x\notin B\}$;

例题

1. $A=\{1, 2, 3\}$， $B=\{1, 4\}$， $C=\{3\}$
   ① $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}= B\cup A$
   ② $A\cap B=\{1\}= B \cap A$
   ③ $A-B=\{2, 3\}$
   ④ $B-A=\{4\}$
   ⑤ $C-A=\varnothing$
   ⑥ $B \cap C= \varnothing$
2. 当两个集合的交集是空集时，称他们是<u>不交</u>的.

绝对补

1. 设E为全集, $A \subseteq E$, 则称A对E的相对补集为A的绝对补集, 记作~A. 即

   ① $\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$

2. 例如

   $E=\{0, 1, 2, 3\}$, $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{0, 1, 2, 3\}$, $C=\varnothing$,

   则$\sim A=\{3\}$, $\sim B=\varnothing$, $\sim C=\{0, 1, 2, 3\}=E$

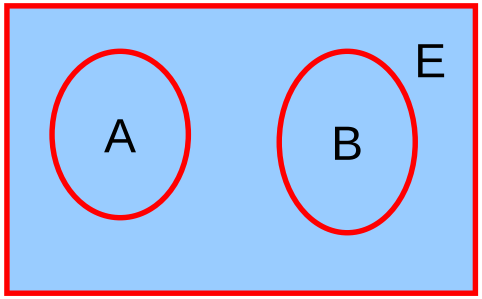
对称差

1. 设A, B为集合, 则A与B的<u>对称差</u>是 $A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)$
2. 例如 $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$ 则有 $A \oplus B=\{0, 1\} \cup \{3\}=\{0, 1, 3\}$
3. 对称差的<u>等价定义</u>为 $A \oplus B=(A \cup B)-(A \cap B)$

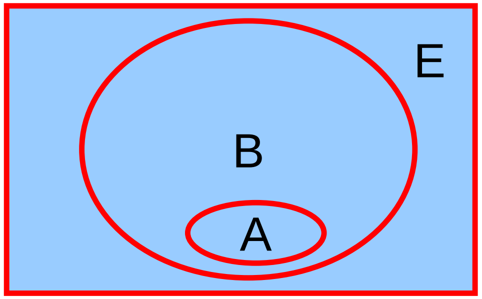
文氏图

1. 集合之间的关系与运算可以用<u>文氏图</u>表示.
2. 文氏图表示方法:
   ① 画大矩形表示全集E;
   ② 在矩形中画一些圆, 圆内部表示集合, 如果不作特殊说明这些集合圆应该是不相交的.
   ③ 如果不相交, 则应该相离.
   ④ 阴影部分为新组成的集合.

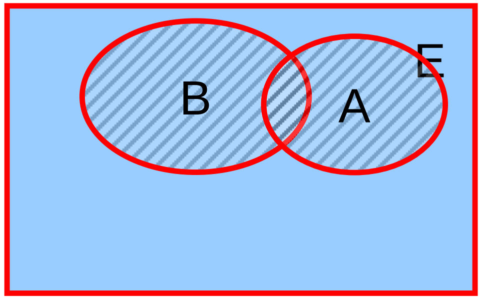
例题



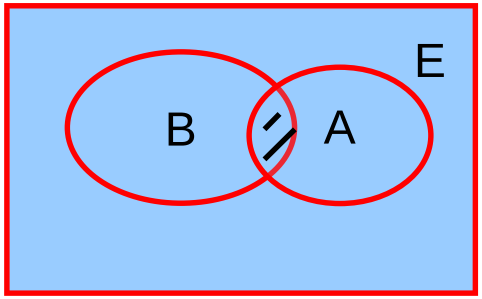
A∩B=∅



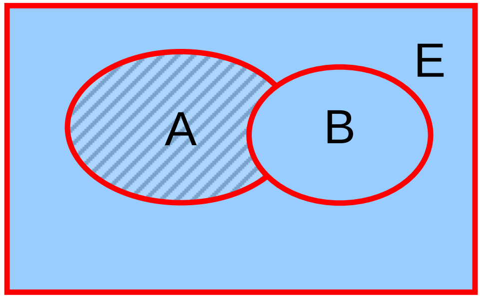
A⊂B



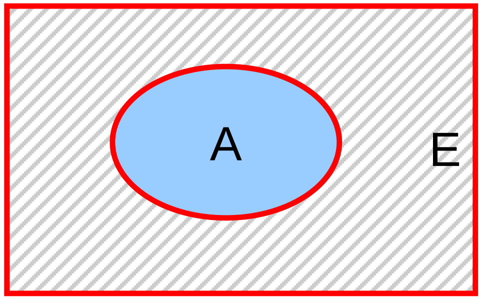
A∪B



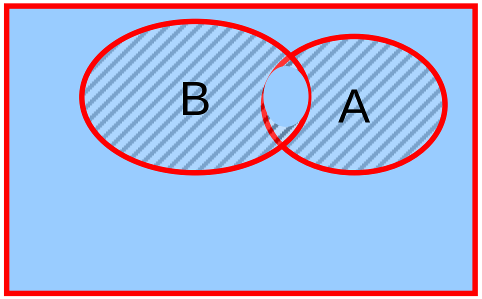
A∩B



A-B



~A



A⊕B

算律(Ⅰ)

1. 幂等律: $A \cup A = A$

   $A \cap A = A$

2. 交换律: $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

3. 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. 同一律: $A \cup \varnothing = A$

   $A \cap E = A$

5. 零律: $A \cap \varnothing = \varnothing$

   $A \cup E = E$

算律(2)

1. **排中律: $A \cup \sim A = E$**
2. **矛盾律: $A \cap \sim A = \varnothing$**
3. **吸收律: $A \cup (A \cap B) = A$**

   $A \cap (A \cup B) = A$
4. **德.摩根律: $A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$**

   $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$

   $\sim(B \cap C)=(\sim B \cup \sim C)$

   $\sim(B \cup C)=(\sim B \cap \sim C)$

   $\sim\varnothing=E$; $\sim E=\varnothing$
5. **双重否定: $\sim(\sim A)=A$**

证明

- 证明$A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$

证明:对任意的x,

$x \in A-(B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in (B \cup C))$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$

$\Leftrightarrow x \in (A-B) \wedge x \in (A-C)$

$\Leftrightarrow x \in (A-B) \cap (A-C)$

重要结果

1. $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$
   $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$
2. $A - B \subseteq A$
3. $A - B = A \cap \sim B$
4. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$
5. $A \oplus B = B \oplus A$
6. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
7. $A \oplus \varnothing = A$
8. $A \oplus A = \varnothing$
9. $A \oplus B = A \oplus C \Leftrightarrow B = C$

证明(Ⅰ)

- 证明$(A-B)\cup B= A\cup B$

  证明: $(A-B)\cup B=(A\cap\sim B)\cup B$

  $=(A\cup B)\cap(\sim B\cup B)$

  $=(A\cup B)\cap E= A\cup B$

证明(2)

1. 设 $A\subseteq B$, 证明$\sim B\subseteq \sim A$

证明： $A\subseteq B \Leftrightarrow B\cap A=A$

$\sim B \cup \sim A=\sim(A \cap B)= \sim A$

$\Leftrightarrow \sim B\subseteq \sim A$

例题

1. 化简$(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)-((A\cup(B-C))\cap A)$

   解:因为$A\cup B\subseteq A\cup B\cup C, A\subseteq A\cup(B-C)$

   所以$(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)-((A\cup(B-C))\cap A)$

   $=(A\cup B)-A=B-A$

例题

1. 已知$A \oplus B = A \oplus C$,证明$B=C$.

证明: $A \oplus B = A \oplus C$

所以: $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$

$(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$

$\varnothing \oplus B = \varnothing \oplus C$

所以: $B=C$

内容提纲

1。集合的基本概念

2。集合的基本运算

3。集合中元素的计数

基数、有穷集、无穷集

1. 集合A={1,2,…,n},它含有n个元素,可以说这个集合的**基数**是n,记作 card A=n也可记作|A|=n.

① $|\varnothing|=0$;

2. 设A为集合,若存在自然数n(0也是自然数),使得|A|=card A=n,则称A为**有穷集**,否则称**无穷集**。

① {a,b,c}为有穷集;

② N,R,Z,Q为无穷集.

例题

- 求在1和1000之间不能被5或6,也不能被8整除的数的个数。(文氏图法)

|A|=1000/5=200

|B|=1000/6=166

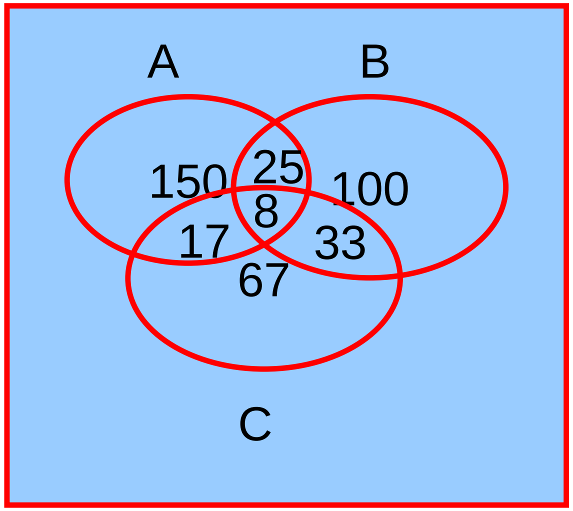
|C|=1000/8=125

|A∩B∩C|=1000/[5,6,8]=1000/120=8

|A ∩B|=1000/[5,6]=1000/30=33

|A∩C|=1000/[5,8]=1000/40=25

|B∩C|=1000/[6,8]=1000/24=41



| A∪B ∪ C | =400.

则不能被5,6和8整除的数有600个.

包含排斥定理

- S不具有性质$p_1, p_2, \ldots, p_n$的元素数是：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$$

$$=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i \cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i \cap A_j \cap A_k|+$$

$$\ldots+(-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

证明

1. 如果x不具有这m条性质，则左边等于 1，
   ① 设x不具有这m条性质,则右边为:$x \in S$, $x \notin A_1 \cap A_2$, $x \notin \ldots$
   $1-0+0-0+\ldots+(-1)^m.0=1$
2. 如果x至少有其中的一条性质，则左边等于0.
   ① 设x至少具有这m条性质中n条,则右边为:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^m C_n^m \qquad (n \le m)$$

$$= C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^m C_n^n = 0$$

推论

- 在S中至少具有一条性质的元素数是

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

证明：$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}|$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$$

实例

- **求在1和1000之间不能被5或6,也不能被8整除的数的个数.**

$|A|=1000/5=200$

$|B|=1000/6=166$

$|C|=1000/8=125$

$|A\cap B\cap C|=1000/[5,6,8]=1000/120=8$

$|A\cap B|=1000/[5,6]=1000/30=33$

$|A\cap C|=1000/[5,8]=1000/40=25$

$|B\cap C|=1000/[6,8]=1000/24=41$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=1000-(200+166+125)+$$
$$(33+25+41)-8=600$$

例题

某班有25个学生,其中14个人会打篮球,12个人会打排球,6人会打篮球和排球,5人会打篮球和网球,还有2人会打这三种球,而6个会打网球的人都会打另一种球,求不会打这三种球的人数.

解: $|A|=12$(排球),$|B|=6$(网球),$|C|=14$(篮球) ,$|S|=25$

$|A\cap C|=6$,$|B\cap C|=5$, $|A\cap B\cap C|=2$,

$|A\cap B|=3$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=25-(12+6+14)+(3+6+5)-2=5$$

例题

一个班里有50个学生,在第一次考试中有26人得5分,在第二次考试中有21人得5分,如果两次考试中都没得5分的有17人,那么两次考试都得5分的有多少人?

解: $|S| = 50, |A|=26, |B|=21, |\sim A \cap \sim B| = 17$

$$|\sim A \cap \sim B| = |S| - (|A|+|B|) + (|A \cap B|)$$

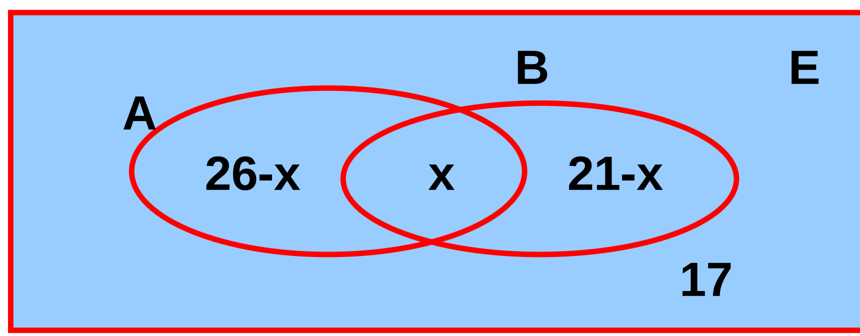
$$|A \cap B| = |\sim A \cap \sim B| - |S| + (|A|+|B|)$$

$$= 17 - 50 + 26 + 21 = 14$$

文氏图法

$(26-x)+x+(21-x)+17=50$

$x=14$



第三次作业

1. P74 页： 3.14。
2. P74 页： 3.18.

谢谢!