Sprawozdanie: Analiza Błędów Sumowania w n-Kącie

Tymoteusz Herkowiak, Marcin Panasko

17.03.2025

Streszczenie

W tej pracy zbadaliśmy, jak błędy w obliczeniach komputerowych wpływają na sumowanie wektorów w wielokącie foremnym. Suma powinna być bliska zera, ale przez ograniczenia komputera pojawiają się małe błędy. Sprawdziliśmy trzy hipotezy (H1-H3), żeby zobaczyć, jak różne sposoby sumowania radzą sobie z tym problemem.

1 Wyniki i Analiza

1.1 Konstrukcja wierzchołków (H1)

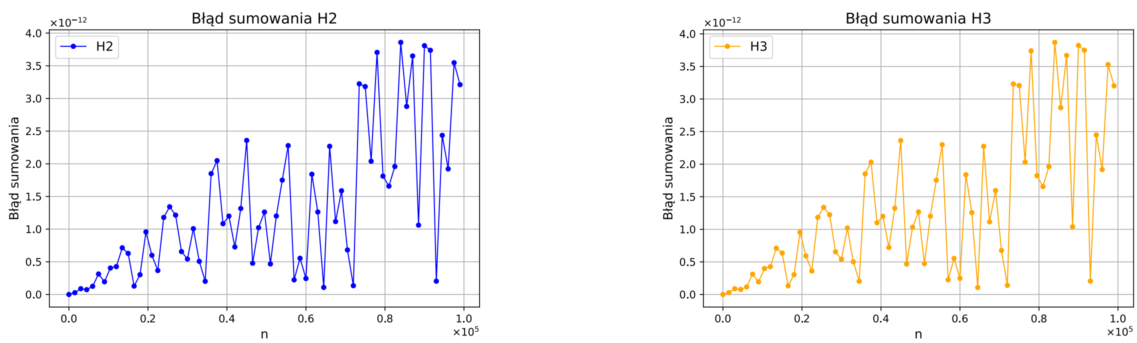
Na początek obliczyliśmy wierzchołki wielokąta foremnego, zaczynając od punktu $\mathbf{v}_0 = (1, 0)$. W idealnym świecie, po dodaniu wszystkich wektorów $\mathbf{w}_i$, powinniśmy wrócić dokładnie do tego samego miejsca, czyli $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_0$. Przez ograniczenia w dokładności (używamy typu `double`) i małe błędy w obliczeniach funkcji takich jak cos() czy sin(), końcowy punkt trochę różni się od startowego.

Te różnice są bardzo małe – mieszczą się w granicach od 10^{-15} do 10^{-14}, co jest normalne dla takich obliczeń.

1.2 Błędy sumowania (H2, H3)

Sprawdziliśmy dwa sposoby sumowania wektorów: - H2 – dodajemy w kolejności, w jakiej są podane, - H3 – najpierw sortujemy wektory, a potem je sumujemy.

Wyniki pokazaliśmy na wykresach poniżej (Rysunek 1).



(a) H2 (b) H3

Rysunek 1: Błędy sumowania dla różnych n

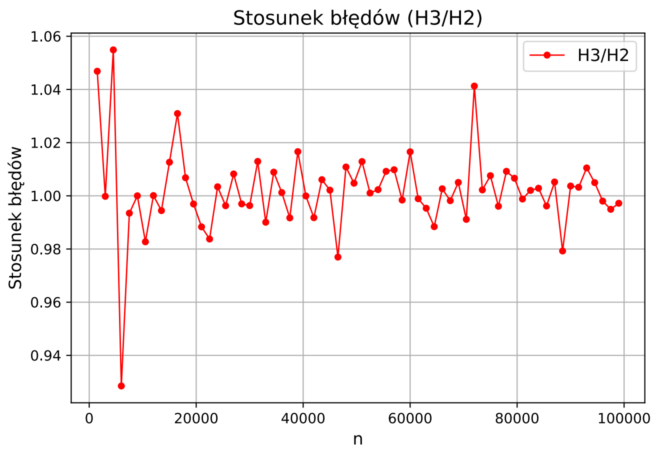
-Wykres H2 (lewy): Błąd w metodzie H2 zmienia się od 0 do 4×10^{-12}. Na początku, przy małych wartościach n (do 20000), błąd jest prawie zerowy. Potem rośnie, szczególnie w okolicach $n = 0.8\times10^5$, gdzie osiąga najwyższe wartości. Później się uspokaja i oscyluje między 1×10^{-12} a 2×10^{-12}. To pokazuje, że im więcej liczb sumujemy, tym bardziej błąd może się zmieniać. Dla niektórych wartości n błąd pozostaje niski, co pokazuje, że zależność ta nie jest liniowa.

-Wykres H3 (prawy): Błąd w metodzie H3 też mieści się w granicach od 0 do 4×10^{-12}. Wygląda bliźniaczo do H2.

Podsumowanie: Obie metody mają błędy rzędu 10^{-12}, obie metody wydają się dawać bliźniacze efekty, nie można stwierdzić większej dokładności którejś z nich na podstawie tych wykresów.

1.3 Stosunek błędów (H3/H2)

Porównaliśmy, jak bardzo różnią się błędy między metodami H3 i H2, dzieląc błąd H3 przez błąd H2. Wyniki pokazano na Rysunku 2.

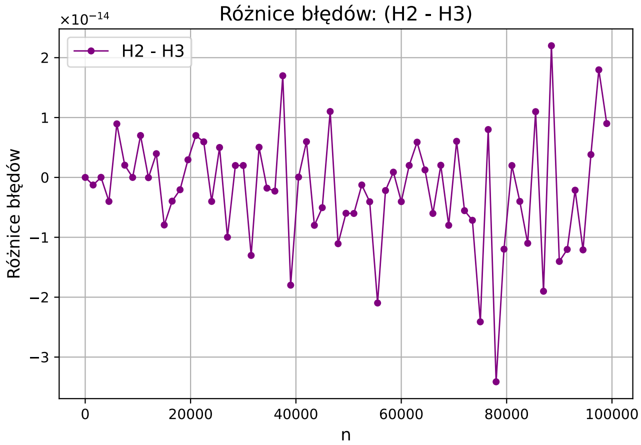


Rysunek 2: Stosunek błędów $\frac{H3}{H2}$.

- Stosunek $\frac{H3}{H2}$ zmienia się od około 0.92 do 1.06.
- Dla większości wartości n jest bardzo blisko 1, co oznacza, że obie metody dają podobne wyniki.
- Są jednak miejsca, gdzie H3 daje większy błąd – na przykład przy $n = 0.72 \times 10^5$ i w okolicach 0, stosunek dochodzi do 1.06, czyli H3 ma błąd o 6% większy niż H2.
- Czasem H3 jest lepsze, bo stosunek spada do 0.94, ale te różnice są naprawdę małe i nie wskazują na wyraźną przewagę jednej metody.

1.4 Różnice błędów (H2 – H3)

Sprawdziliśmy, o ile błąd H2 różni się od błędu H3, odejmując je od siebie. Wyniki pokazano na Rysunku 3.



Rysunek 3: Różnice błędów $H2 - H3$

- Różnice $H2 - H3$ mieszczą się w granicach od -4×10^{-14} do 3×10^{-14}.
- Kiedy różnica jest ujemna (np. przy $n = 0.88 \times 10^5$), oznacza to, że H3 daje większy błąd niż H2.
- Kiedy różnica jest dodatnia (np. przy ok. $n = 0.38 \times 10^5$), to H2 ma większy błąd.
- Te różnice są bardzo małe, więc obie metody działają podobnie.

2 Podsumowanie Wyników

Z naszych obliczeń wynika, że błędy w obu metodach (H2 i H3) mieszczą się w granicach od 0 do 10^{-12}, czyli są bardzo małe i bliskie temu, co komputer może dokładnie policzyć (typ `double`). Metoda H3 czasem daje trochę większy błąd niż H2, a czasem mniejszy, ale różnice nie są duże. Gdyby suma nie była tak bliska zeru, różnice między metodami mogłyby być łatwiejsze do zauważenia.

3 Wnioski

W naszym przypadku, gdzie suma wektorów jest prawie zerowa, obie metody (H2 i H3) działają bardzo podobnie – żadna nie jest wyraźnie lepsza. Błędy są na poziomie, który wynika z ograniczeń komputera, więc nie da się ich bardziej zmniejszyć bez zmiany sposobu obliczeń.

Uwagi

Zakres pracy członków zespołu:

- Kod w C zrobiliśmy prawie cały wspólnie na zajęciach, wymieniając się uwagami i wprowadzając poprawki. Później jedynie dostosowaliśmy wielkość n oraz sposób zapisu danych do pliku na potrzeby skryptu w Pythonie tworzącego wykresy.

- Zaczeliśmy prace nad skryptem w Pythonie wspólnie, po czym Tymoteusz zajął się dostosowaniem outputu kodu w C do potrzeb Pythona zgodnie z naszym konceptem, a Marcin kontynuował pracę nad kodem Pythona tworzącym wykresy. Na koniec wspólnie dostosowywaliśmy wielkość i przeskoki między kolejnymi n na potrzeby czytelności wykresów.
- Tworząc sprawozdanie podzieliliśmy się po połowie, Tymoteusz zrobił Wstęp i 1.1, 1.2, Marcin 1.3, 1.4, Podsumowanie.