

Rapport på lösning för uppgift 14

Ion Lund*

Luleå tekniska universitet
971 87 Luleå, Sverige

September 19, 2025

Abstract

Här skriver du en kort sammanfattning av rapporten som innehåller det viktigaste.

1 Introduktion

Vi blir medvetna om en skidbacke som har fallhöjden 500 meter. Banprofilen ser du i en bild med höjden y km som är en funktion av sträckan x km. Sambandet mellan y och x ges av att

$$y = 0,5e^{-x^2}$$
$$0 \leq x \leq 2,5$$

2 Deluppgift A

2.1 Frågan

Deluppgift A vill att man ska lösa för backens lutning där $x = 0,8$. Vi ska alltså derivera en sammansatt funktion för att bestämma lutningen i en viss punkt på backen. I frågan använder vi oss av sambanden:

$$y = 0,5e^{-x^2}$$
$$x = 0,8$$

*email: ionlun-5@student.ltu.se

16 2.2 Lösningen

$$\begin{aligned}x &= 0,8 \\y &= 0,5e^{-x} \\y'(0,8) &= -0,8 \cdot e^{-(0,8)} \\&= -0,42.\end{aligned}\tag{1}$$

17 2.3 Motiveringen

18 Vi bestämde lutningen som $x = 0,8$ och eftersom att lutningen är det samma som
19 derivatan får vi då att $y' = -x \cdot e^{-(x)}$. Därifrån är det bara att byta ut x mot $0,8$ och
20 lösa uppgiften.

21 3 Deluppgift B

22 3.1 Frågan

23 Fråga B vill att vi ska ställa upp en ekvation för bestämning av x -värdet. I frågan får vi ny
24 relevant information om att ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil
25 som i uppgift A kan ges av funktionen:

$$y = 0,5e^{-ax} \quad , \quad 0 \leq x \leq 2,5 \text{ där } a \text{ är en positiv konstant.}$$

26 3.2 Lösningen

$$y = 0,5e^{-ax}\tag{2}$$

$$y' = -ax \cdot e^{-ax}\tag{3}$$

$$y'' = f(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g(x)\tag{4}$$

$$f(x) = -ax$$

$$f'(x) = -a$$

$$g(x) = e^{-ax}$$

$$g'(x) = -2ax \cdot e^{-ax}$$

$$\begin{aligned}y'' &= -a \cdot e^{-ax} + 2ax \cdot e^{ax} \\&= ae^{-ax}(2ax - 1)\end{aligned}$$

$$a \cdot e^{-ax} > 0$$

$$0 = 2ax - 1$$

$$x = + - \sqrt{\frac{1}{2a}}\tag{5}$$

27 3.3 Motiveringen

28 Med hjälp av derivering för y -funktionen, så kan vi lösa ut x från potensen.

29 Vi gör en till derivering för att veta funktionens maximi- och minimipunkt.

30 I den andra deriveringen så får då varje funktion ett värde, och man kan då byta ut
31 funktionerna mot variablerna. $a \cdot e^{-ax} > 0$ och vi kan göra om det till en andragradsfunktion

32 och använda en formel för att veta hur vi löser för x .

33 4 Deluppgift C

34 4.1 Frågan

35 Fråga C vill att vi ska bestämma a så att backen är brantast för $x = 1, 0$.

36 4.2 Lösningen

$$\begin{aligned} \text{(Tidigare)} \Rightarrow a &= \frac{1}{2x} \\ \text{Om } x = 1 \Rightarrow a &= \frac{1}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 0,5 \end{aligned} \tag{6}$$

37 4.3 Motiveringen

38 Det här är en väldigt simpel lösning. Vi vet redan sen innan att $a = \frac{1}{2x}$, och vi vet också
39 att $x = 1$, och kan då enkelt byta ut variabeln mot dess värde för att få att $a = 0,5$.

40 5 Diskussion [och slutsatser]

41 Sammanfatta vad som avhandlats i rapporten, vad du kommit fram till, och sätt det i
42 sitt sammanhang.

43 References

- 44 [1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The L^AT_EX Companion*.
45 Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993.
- 46 [2] Albert Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. (German) [*On the*
47 *electrodynamics of moving bodies*]. Annalen der Physik, 322(10):891–921, 1905.