Om att chansa på traditionella kryssfrågeprov lönar sig

Ion Lund*
Luleå tekniska universitet
97187 Luleå

16 september 2025

Sammanfattning

I denna rapport redovisar vi hur vi har löst två uppgifter som handlar om hur många poäng man kan förvänta sig att få om man chansar sig genom ett prov med kryssfrågor.

1 Introduktion

Avklarad övningsuppgift 1! Ändra titeln så att den istället lyder: "Att chansa på traditionella kryssfrågeprov lönar sig".

Generera ett nytt dokument baserat på LaTeX-manuset och kolla att det blir rätt. Experimentera gärna med olika varianter innan du går vidare!

När du är klar med uppgiften så byt namn på själva uppgiftsomgivningen från `uppgift` till `avklarad`. Ändra alltså `\begin{uppgift}` och `\end{uppgift}` till `\begin{avklarad}` respektive `\end{avklarad}`. Detta ändrar texten överst till vänster i rutan så att du enkelt kan se hur långt du kommit om du t ex behöver ta en paus.

Ovanstående gäller för alla övningsuppgifter nedan trots att det inte upprepas.

*Email: `ionlun-5@student.ltu.se`

Avklarad övningsuppgift 2! Ändra så att du står som författare. Byt även ut mailadressen till din egen studentmail.

I denna rapport, som är en del av kursmaterialet i kursen D0015E datateknik och ingenjörsvetenskap vid Luleå tekniska universitet, redovisar vi hur vi har löst följande två uppgifter som berör chansningar på kryssfrågeprov:

Avklarad övningsuppgift 3! Skriv om ovanstående (långa) mening till två meningar med samma betydelse, där den första meningen förklarar att rapporten är en del av kursmaterialet och den andra säger att rapporten berör chansningar på kryssfrågeprov. Se till att etiketten (`d0010e`) fortfarande följer direkt efter kurskoden.

1. Vad är det förväntade antalet poäng man får på en enskild fråga om man chansar utan att ens titta på svarsalternativen?

2. Hur många poäng kan man totalt förvänta sig att få på ett prov om man chansar på alla frågor?

Uppgifterna behandlas i var sitt avsnitt nedan.

Övningsuppgift 4. Ange några anledning till att denna rapport skrivits. Använd en `enumerate`-omgivning och räkna upp följande anledningar: Lära sig mer om chansningar och lära sig LaTeX.

2 Definitioner och inledande beteckningar

För att resonera om kryssfrågor och prov inför vi några definitioner.

Övningsuppgift 5. Med `\textbf` får man **fet stil**. Ändra så att ordet ”definitioner” ovan skrivs med fet stil.

En *kryssfråga* är en fråga till vilken det finns ett mängd *svarsalternativ*, eller bara *svar*, varav minst ett är *korrekt*.

Övningsuppgift 6. Inför följande definition av *fråga*:

> En fråga uttrycks med hjälp av en frågesats och är en språkhandling avsedd att frambringa information.

Svar som inte är korrekta kallas *felaktiga*. Ett *prov* är en mängd kryssfrågor som alla har $k \geq 1$ svarsalternativ varav $r \leq k$ är korrekta.

Övningsuppgift 7. Skriv en mening om att det alltid finns minst ett korrekt svar. Inkludera en olikhet som relaterar r till 1 (och k).

Exempel 1. *Om två svar av fem är korrekta på en kryssfråga så är $r = 2$ och $k = 5$.*

Övningsuppgift 8. Lägg till ytterligare ett exempel i vilket ett svar av fyra är korrekt.

På varje fråga får högst ett svarsalternativ väljas. Ett korrekt svar ger 1 poäng medan felaktiga svar och obesvarade frågor ger 0 poäng. Poängen på alla frågorna summeras ihop till provets *totalpoäng*. Vid chansning, dvs val av svar på måfå, antar vi att sannolikheten för att välja ett visst svar är likformigt fördelad. För att resonera omkring vad chansning ger så använder vi oss av grundläggande sannolikhetslära [1].

Övningsuppgift 9. I slutet av manuset kan du se hur kommandot `\bibitem` används för att skriva in en referens till en källa – i detta fall en mattebok som i manuset ges nyckelordet `grimaldi` – i omgivningen `thebibliography`. Här ovan syns hur denna källa sen refereras i löptexten med kommandot `\cite{grimaldi}`. I slutet av manuset kan man rada upp godtyckligt många källor. Varje källa ska då inledas av `\bibitem` och ett unikt nyckelord som får väljas fritt.

1. Lägg till följande källa:

Håkan Jonsson. *Motivating and Preparing First-Year Students in Computer and Engineering Science*. Proceedings of the ASEE/IEEE 43rd Frontiers in Education Conference. Oklahoma City, Oklahoma, USA, Oct 22-26, 2013.

2. Referera sen till den nya källan direkt efter kurskoden D0015E på sidan **??**. Skriv ett tilde (`~`) som klister mellan kurskoden och `\cite`-kommandot med den nya källans nyckelord.

3 Antal poäng på en enskild fråga

Övningsuppgift 10. Ta bort ordet <u>enskild</u> från titeln på avsnitt 3.

Första uppgiften handlar om vad den förväntade poängen på en kryssfråga är om man bara svarar på måfå.

3.1 Sannolikheter

Låt X_i vara en stokastisk variabel (även kallad *slumpvariabel*) vars värde är poängen på fråga i. Utfallsrummet Ω som involverar X_i innehåller då de två oberoende händelserna $\{X_i$ är 0, X_i är 1$\}$ som motsvarar 0 respektive 1 poäng på frågan.

Övningsuppgift 11. Skriv ett stycke, i vilket du har med två slumpvariabler X_i och X_j där $i \neq j$, och förklarar att de är oberoende om deras händelser är oberoende. Två händelser är oberoende om utfallet av den ena händelsen inte påverkar utfallet av den andra händelsen.

För att få poäng ska man välja en av de r korrekta svaren bland de totalt k svarsalternativ som finns. Enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen, där sannolikheten är antalet gynnsamma händelser delat med totala antalet händelser, gäller då att

$$P(X_i = 1) = \frac{r}{k}, \tag{1}$$

där P är en sannolikhetsfunktion.

Övningsuppgift 12. Använd en `itemize`-omgivning och förklara att det för en sannolikhetsfunktion P gäller dels att sannolikheten $P(H)$ för att en given händelse H, av de möjliga händelser som kan inträffa, är mindre än eller lika med 1 (vilket går att uttrycka matematiskt som en olikhet) dels att summan av sannolikheterna för alla möjliga händelser är precis 1 (som går att uttrycka som en likhet med en summasymbol).

Övningsuppgift 13. Lägg här till den ekvation som du får om du bryter ut r ur ekvation 1. Skriv nåt i stil med att "Det betyder t ex att..." och så ekvationen.

För komplementhändelsen $X_i = 0$, dvs att svaret är felaktigt, gäller då att

$$\begin{aligned} P(X_i = 0) &= 1 - P(X_i = 1) \\ &= 1 - \frac{r}{k} \\ &= \frac{k-r}{k}. \end{aligned} \tag{2}$$

Övningsuppgift 14. Lägg till en motsvarande uträkning som, rad för rad som i uträkningen av ekvation 2, istället visar vad $P(X_i = 1) \cdot P(X_i = 1)$ är uttryckt i r och k. Alltså, något i stil med:

$$\begin{aligned} P(X_i = 0) \cdot P(X_i = 1) &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned} \tag{3}$$

På sista raden ska du ha nått fram till en produkt $g(r)h(k)$, där $g(r)$ är en funktion som beror av r medan $h(k)$ är en funktion som beror av k. Ett exempel på sådan produkt, som dock *inte* är vad du kommer att komma fram till, är

$$4r\frac{k}{k+1}$$

där alltså $g(r) = 4r$ och $h(k) = k/(k+1)$.

Övningsuppgift 15. Tänk ut varför produkten $P(X_i = 0) \cdot P(X_i = 1)$ i ekvation 3 alltid är mindre än eller lika med 1. Lägg till en mening om det.

Med hjälp av sannolikheterna kan vi beräkna det förväntade väntevärdet av poängen på fråga i.

Övningsuppgift 16. Här är två uppgifter som ankyter till etiketter och referenser till etiketter.

1. Lägg till en mening som refererar till ekvationen i uppgift 14. Fantisera ihop något om att vi *kanske* skulle kunna använda denna ekvation senare i rapporten.
2. Ändra din mening till att avse nästa avsnitt, det om väntevärde, genom att lägga till en etikett efter den avsnittsrubriken och referera till den.

3.2 Väntevärde

För att beteckna en stokastisk variabels väntevärde använder man *väntevärdesoperatorn* E. För en godtycklig stokastisk variabel A är väntevärdet definierat som

$$E[A] = \sum_x xP(A = x),$$

där $\sum_x$ betecknar att vi summerar över alla värden som slumpvariabeln kan anta.

Övningsuppgift 17. Ändra så att ekvationen blir numrerad.

Denna definition ger oss, tillsammans med ekvationerna 1 och 2, att det förväntade antalet poäng är

$$\begin{aligned} E[X_i] &= 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) \\ &= P(X_i = 1) \\ &= \boxed{\frac{r}{k}}, \end{aligned} \tag{4}$$

vilket är svaret på uppgift 1.

Övningsuppgift 18. Förutom summor kan man uttrycka det mesta matematiskt både vackert och funktionellt med LaTeX, t ex integraler. Med koden `$\int_0^x  f(x) \, \text{d}x$` får vi $\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$ eller

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

om vi sätter uttrycket i en matematikomgivning (`displaymath` i detta fall). Storleken på integreringssymbolen anpassas, precis som summatecknet tidigare, efter var det ska skrivas ut. Två saker:

- Sekvensen `\,` står för ett litet mellanrum när det står i matematisk text. Vi behöver tala om för LaTeX att det ska vara ett mellanrum för annars skrivs allt ihop som $f(x)\mathrm{d}x$ då det ska vara $f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Sen så används `\text` för att få in vanlig text i matematisk text. Vårt d är ju operatorn d och inte variabeln d. Många struntar dock i denna skillnad och använder d för både operator och variabel. Man får göra som man vill så länge det inte uppstår tvetydigheter.

Uppgifter:

1. Ändra först exemplets övre intervallgräns till 5 och byt sen ut $f(x)$ mot $\sin x$. Det senare skrivs `\sin x`.

   För varje trigonometrisk funktion, t ex sin, finns ett kommando i LaTeX som ser till att dess namn skrivs ut rätt i matematisk text. Cosinus skrivs t ex `\cos` medan man använder `\log` för logaritmer.

2. Ta bort det inledande bakåtsnedstrecket från `\sin`, det vill säga lämna kvar endast `sin`. Observera skillnaden. Stoppa tillbaka bakåtsnedstrecket så att $\sin x$ skrivs ut rätt igen.

3. Ändra nu gränsen till 10, dvs byt ut `^x` mot `^{10}`.

   Klammerparenteserna behövs för att hålla samman siffrorna. Utan klammerparenteser blir exponenten endast den första 1:an. Testa med både `^10` och `^{10}` så ser du denna skillnad.

4. Ändra istället gränsen till 1000 och byt ut `\sin x` mot polynomet `x^2`. Även denna gräns måste klamras ihop som i föregående deluppgift.

   Tecknet `^`, ibland kallat "upphöjttecken", används för såväl exponenter som övre gränser på summor och integraler.

5. Ändra polynomet x^2 till ett tredjegradspolynom i x. Variera termernas koefficienterna.

6. Ändra slutligen gränsen till `\infty`, oändligheten (∞). Här kan man, men behöver inte, använda klamrarna.

   Detta beror på att det inledande bakåtsnedstrecket i `\infty` signalerar starten på ett kommando, vilket då läses in i sin helhet innan något annat görs. Klamrar fungerar på samma sätt. När den vänstra klammerparentesen påträffas så signalerar detta starten på något som ska sitta ihop. Detta något avslutas i och med att klammerparentesen till höger påträffas. När däremot siffor och bokstäver påträffas så hanteras de en i taget.

Exempel 2. *Om två svar av fem är korrekta, och således $r = 2$ och $k = 5$, är väntevärdet $E[X_i] = 0.4$.*

4 Förväntad totalpoäng

När vi nu vet vilket poäng en enskild fråga förväntas komma att ge kan vi lösa uppgift 2 och beräkna den förväntade totalpoängen på ett prov. För detta syfte inför vi ännu en slumpvariabel

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

där n är antalet frågor på provet.

Övningsuppgift 19. Skriv med hjälp av ett summatecken ($\sum$) en ny ekvation som säger att Y_∞ är summan $X_1 + X_2 + \cdots + X_\infty$, poängen på ett prov med ett oändligt antal frågor.

Eftersom operatorn E per definition är *linjär*, dvs för alla X och Y är $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$, så är väntevärdet

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \end{aligned}$$

Övningsuppgift 20. Komplettera ekvationen ovan med två förenklingssteg mellan första och sista raden enligt följande.

1. Lägg först till ett mellansteg där summan inom parantesen i högerledet utvecklas medan E står kvar utanför paranteserna. Använd `\cdots`.

2. Lägg till ytterligare ett steg där parantererna tas bort och E distribueras in till summans termer.

vilket, enligt ekvation 4, betyder att

$$E[Y] = \boxed{\frac{rn}{k}}$$

är svaret på uppgift 2.

Exempel 3. *Om vi tänker oss ett konkret fall med $n = 30$ frågor som var och en har $k = 5$ svarsalternativ, varav exakt $r = 2$ är korrekta, blir det förväntade antalet poäng*

$$\begin{aligned} E[Y] &= \frac{2 \cdot 30}{5} \\ &= 12 \end{aligned}$$

om man chansar på alla frågorna.

Övningsuppgift 21. Lägg till ett exempel som beräknar den förväntade poängen i en situation som den du skrev om i övningsuppgift 8.

Övningsuppgift 22. Lägg här till ett avslutande avsnitt med rubriken "Tack", som skapas med kommandot `\section`, i vilket du namnger och tackar några lärare, t ex lärare i matematik, du tidigare haft för att de hjälpt dig lära dig så mycket att du kunnat göra uppgifterna i denna övning.

Referenser

[1] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics - An Applied Introduction*. Addison-Wesley, 2003.