Momenet D om texter och LaTeX

Extramaterial till uppgift 2 i form av åtta lösningsskisser.

OBS! Dessa skisser är inte perfekta utan visar bara ofullständiga exempel med idéer på hur man kan skriva och vad man kan ha med.

Skisserna är scannade och av varierande kvalité men förstorar man texten så går alla att läsa.

Grå rutor döljer detaljer i skisserna som bland annat röjer författarnas identiteter.

Hjälpförlaga 1

1

[redacted]

titel + namn + datum etc

Sammanfattning

I denna rapporten redogörs lösningar till uppgift 14 ur det bifogade skolverksdokumentet* för Matematik D.

*skolverket

Introduktion

I denna rapport redogörs lösningar samt resonemang kring de deluppgifter som ingår i uppgift 14 ur det bifogade skolverksdokumentet.

~~Vad är derivatan för funktionen~~

frågorna utgår från en backe, vars kurva följer

(1) den generella formeln $y = 0{,}5e^{-ax^2}$ i intervallet $0 \leq x \leq 2{,}5$

a. Bestäm backens lutning för $x = 0{,}8$ då $a = 1$, d.v.s. $y = 0{,}5e^{-x^2}$

b. Ställ upp en ekv. för bestämmning av x-värdet i den punkt där backen med en sådan (Eq: (1)) banprofil är brantast.

c. Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1{,}0$

[redacted]

(2) Ha ~~för att~~ att beräkna y ((upprepa uppg. först ?))

Då ekvationen för y är tillkänd (Ekv: (2)) kan vi beräkna $y'(0,8)$ genom att först derivera y med hjälp av derivningsregler och får

[redacted]

$$y' = -x \cdot e^{-x^2}$$

vilket ger

[redacted]

$$y'(0,8) = -0,8 \cdot e^{-0,8^2}$$

$$\approx -0,42$$

En backe av sådan banprofil är som brantast när derivatan för funktionen är som störst, dvs. när $|y'|$ är som störst. En sådan punkt kan hittas där $y''=0$. (andraderivatan)

Vanligtvis kan det vara intressant att veta vad för sorts 0-punkt man hittar men är i nuläget inte relevant då det är underförstått i uppg. att det är en nedförsbacke.

Således ger alltså $y''=0$ x-värden för ~~extrempunkter~~ max punkter

~~I uppg. a i i i :~~

I och med att a inte längre är ~~definierat~~ ~~måste beräknas nu~~.

andraderivatan kan beräknas genom att dela upp derivatans inre och yttre funktioner och kan härledas som följer:

$$y' = -ax \cdot e^{-ax^2}$$

$$y'' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

[redacted]

$$\begin{cases} f(x) = -ax \\ f'(x) = -a \\ g(x) = e^{-ax^2} \\ g'(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2} \end{cases}$$

$$= -a \cdot e^{-ax^2} + 2a^2x^2 \cdot e^{-ax^2}$$

$$= a \cdot e^{-ax^2}(2ax^2 - 1)$$

då $a \cdot e^{-ax^2} > 0$ är det inte relevant för att hitta 0-ställen

$$2ax^2 - 1 = 0$$

3

c $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$; $x=1$

ahvähä d. hän lähtiä
Grön 4B

[redacted]

$1^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2$

$1 = \frac{1}{2a}$

$2a = 1$

$a = 0{,}5$

[redacted]

$x^2 = \frac{1}{2a}$

$2a = \frac{1}{x^2}$

$a = \frac{1}{2x^2}$

[redacted]

Ha $y = 0.5e^{-x^2}$

Bestäm $y'(0,8)$

gammal, inte mannen

$y' = -xe^{-x^2}$; $-e^{-x^2}x$

$y'(0.8) = -0,42$

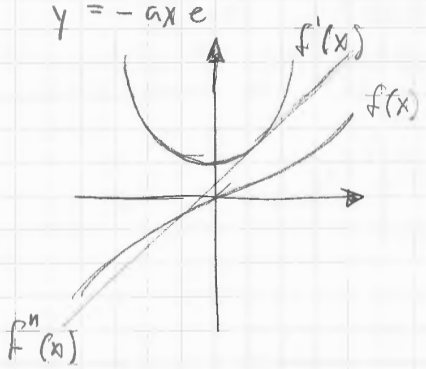
[redacted]

[redacted]

Ställ up en ekv. för

$y = 0,5e^{-ax^2}$

1. $y' = -axe^{-ax^2}$



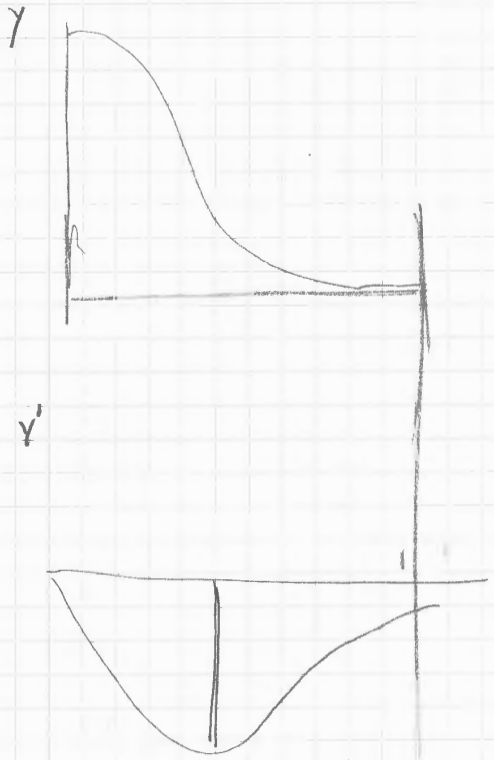
$f''(x) = x$

$f'(x) = x^2/2 + C$

$f(x) = x^3/2 + C^2/2 + D$

Ex. $\frac{3}{2}x^3 + x^2/2 + x$

y lutar mest där |derivatan| är som störst



[redacted]

Störst negativ lutning

Hjälpförlaga 2

[redacted]

Begreppsförståelse, Modellering

[redacted] *

Luleå Tekniska Universitet
97187 Luleå, Sverige

17 september 20[redacted]

[redacted]

[redacted]

Sammanfattning

Genom en given funktion på en kurva skulle vi lösa tre stycken deluppgifter vilka kräver kunskap i derivering. I den här uppgiften ska vi undersöka lutning på kurvan vid given punkt, ställa upp en ekvation för bestämning av x-värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast och till slut lösa ut den sökta variabeln där lutningen är som störst vid en given punkt.

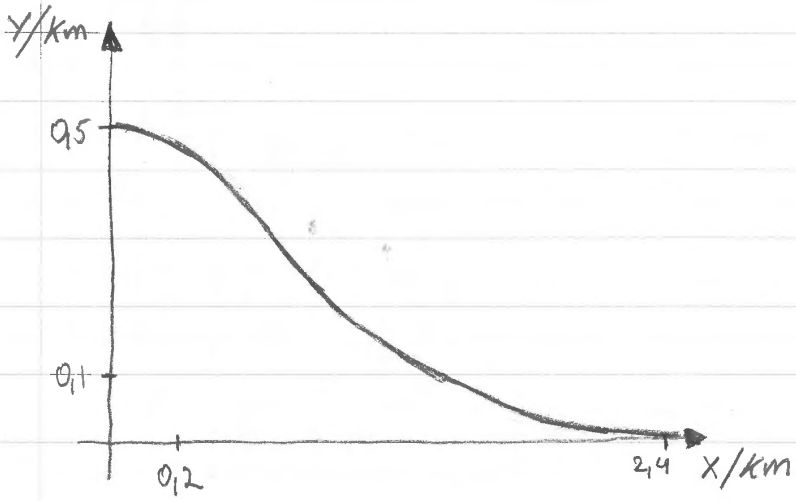
Deluppgifterna kommer att ha olika svårighetsgrad som prövar elevens förståelse i derivering av sammansatta funktioner, bestämning av lutning vid given punkt samt tillämpning av andraderivatan.

1 Introduktion

Man kan se på derivatan som en förändrings-hastighet i en punkt. Där derivatan hjälper en att ta reda på sökt information. Tillämpning kan ses som beräkning av bland annat max, min punkt för en funktion som beskriver något. I detta fall blev det en kurva av en skidbacke. Genom att ställa rätt fråga så kan man få ut var backen är som brantast, var den börjar och var den slutar med mera.

[redacted]

Vi utgår från att backens kurva kan definieras enligt följande ekvation:



Figur 1: en skidbacke har fallhöjden 500 meter. Banprofilen ser du i bilden ovan.

$$Y = 0{,}5 \cdot e^{-x^2}$$

Och löser följande uppgifter

a) Bestäm backens lutning för $x = 0{,}8$

Ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil som ovan ges av funktionen

$$y = 0.5 \cdot e^{-ax^2}, \quad 0 \leq x \leq 2{,}5$$

där a är en positiv konstant.

b) Ställ upp en ekvation för bestämning av x-värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast.

c) Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1{,}0$

Obs! Man använder sig utav den föregående uppgift för att lösa den sista delen.

[redacted]

2 Uppgift och lösning

Utgå från den givna ekvationen:

$$y = 0{,}5 \cdot e^{-x^2}$$

a) I uppgiften så skulle vi beräkna backens lutning. Det vill säga, derivatan av ekvationen. Och sedan sätta in i punkten för $x = 0{,}8$

Genom att använda kedjeregeln

$$(f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x))$$

så för vi att

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right) = \frac{d}{dx} e^u \frac{du}{dx}, \text{ där } u = -x^2 \text{ och } \frac{d}{du}(e^u) = e^u$$

Och där

$$\frac{d}{dx}(-x^2) = -2x \text{ ty, } \frac{d}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

[redacted]

Vilket ger oss

$$-0{,}5\left(\frac{2x}{e^{x^2}}\right) = -\frac{x}{e^{x^2}} = -x \cdot e^{-x^2}$$

Insättning av punkten slutligen ger

$$y'(0{,}8) \approx 0{,}42$$

Notera att i denna uppgift så bröt jag ut konstanten 0,5 i början på uppgiften. Detta för att underlätta beräkningen.

[redacted]

b) I den här uppgiften skulle det bestämmas en ekvation där lutningen är som brantast.

$$y = 0{,}5 \cdot e^{-ax^2}$$

så får vi att

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{d}{dx} e^u \frac{du}{dx}, \text{ där } u = -ax^2 \text{ och } \frac{d}{du}(e^u) = e^u$$

och där

$$\frac{d}{dx}(-ax^2) = -2ax \text{ ty, } \frac{d}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

vilket ger oss

$$-0{,}5\left(\frac{2ax}{e^{ax^2}}\right) = \frac{-ax}{e^{ax^2}} = -ax \cdot e^{-ax^2}$$

$$y' = -ax \cdot e^{-ax^2}$$

Det lutar mest där y-prim är störst, alltså där y-bis är lika med noll.

Om vi skriver

$$y' = -\frac{ax}{e^{ax^2}}$$

så följer vi kvotregeln

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Och löser sedan ut

$$y'' = \frac{(-a \cdot e^{ax^2}) - (-ax(2ax \cdot e^{ax^2}))}{(e^{ax^2})^2}$$

Vilket skrivs om till

$$\frac{-ae^{ax^2} + 2a^2x^2e^{ax^2}}{(e^{ax^2})^2}$$

Om vi sedan bryter ut och sätter lika med noll

$$\frac{ae^{ax^2}(-1+2ax^2)}{(e^{ax^2})^2} = 0$$

Så ser vi att den enda gången funktionen är lika med noll är då täljaren är lika med noll Annars är den ju odefinierad så

$2ax^2 - 1 = 0$ då $ae^{ax^2} > 0$

$1 = 2ax^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2a} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$

c) Utifrån beräkningar från delmoment b så fick vi fram att $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$

Löser vi sedan ut a ur ekvationen

$x = \sqrt{\frac{1}{2a}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2a} \Rightarrow a = \frac{1}{2x^2}$ då $x = \pm 1$ så

får vi a till

$$a = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Slutligen ger vi ett svar på alla delmoment.

a) $y'(0{,}8) \approx 0{,}42$

b) $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$

c) $a = 0{,}5$

Hjälpförlaga 3

[redacted]

Lösning av uppgift 14 NP i Mat. 1)

[redacted] (Samuel i fotnoten)

Luleå Tekniska universitet

971 87 Luleå, Sverige

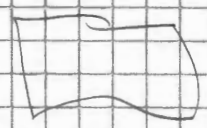
Dagens datum

I detta dokument står det om uppgift 14, frågor och lösningar.
I uppgiften vi ska lösa så ser vi en skidbacke med fallhöjden 500 meter. Bandprofilen ser vi i figur 1. I uppgiften finns vi tre delar av uppgifter att lösa. Den första ska vi beräkna lutningen för backen vid 0,8 km. I andra uppgiften ska vi beräkna vart backen är brantast. I sista uppgiften ska vi göra backen så brant som möjligt då x är 1,0 genom att ändra konstant

Eqs 1

[redacted]

Figur 1



Figur 1: Höjden y km är en funktion av sträckan x km som samlet mellan y och x ges av Eqs 1 då x är

Eqs 1 $(y = 0{,}5e^{-x^2}),\ 0 \le x \le 2{,}5$

uppgift a)

I första frågan är vår uppgift att räkna ut lutning då $x = 0{,}8$ i eqs. 1

lösning a) först skriver vi vår funktion och derivera den

$$y = 0{,}5e^{-x^2}$$

$$y' = -xe^{-x^2}$$

Efter det kan vi sätt in värdet på x vi fick i uppgiften

$$y'(0{,}8) = -0{,}8e^{-0{,}8^2}$$

Det är allmänt sätt att beskriva backar med liknande profil som i figur 1 ges av funktionen

$y = 0{,}5e^{-ax^2}$, $0 \leq x \leq 2{,}5$, där a är en konstant.

uppgift b)

Nu ska vi ställa upp en ekvation för att bestämma vilket x-värde i den punkt där backar med Eqs 2 som funktion är brantast.

Lösning b)

För att se vart backen är brantast så ska vi beräkna där y' är störst alltså då y'' är 0.

Då ska vi derivera HL andra derivatan

$y = 0{,}5e^{-ax^2}$

$y' = -ax \cdot e^{-ax^2}$

för att få andra derivatan användar vi produktregel

$f(x) = -ax \quad f' = -a$

$g(x) = e^{-ax^2} \quad g' = -2ax \cdot e^{-ax^2}$

$y'' = -a \cdot e^{-ax^2} + 2a^2x^2 \cdot e^{-ax^2}$

$0 = a \cdot e^{-ax^2}(2ax^2 - 1)$

$a \cdot e^{-ax^2} > 0$

$0 = 2ax^2 - 1$

$x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$

Där $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ är vilen brantaste delen av backen.

uppgift c)

I sista uppgiften ska vi bestämma a så att backen är brantast för $x = 1{,}0$

lösning c) vi vet att backen är brantast då $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ det kan vi skriva om som

$$a = \frac{1}{2x^2}$$

nu kan vi sätta in det x-värde vi fick i uppgiften

$$a = \frac{1}{2 \cdot 1^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= 0{,}5$$

Då $x = 1{,}0$ får vi den brantaste backen med $a = 0{,}5$.

Referenser

1 författare

Hjälpförlaga 4

[redacted]

GIVET:

$$y = 0{,}5e^{-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2{,}5$$

ⓐ Vad är backens lutning då $x = 0{,}8$

LÖSNING:

Lutningen ges av derivatan $\frac{dy}{dx}(y)$ för funktionen $y = 0{,}5e^{-ax^2}$ med $x = 0{,}8$.

Derivatan: $y' = -0{,}5e^{-x^2} \cdot 2x$

Lutningen då $x = 0{,}8$: $y'(0{,}8) = -0{,}5^{-0{,}8^2} \cdot 2 \cdot 0{,}8 = -0{,}42$

SVAR:

Lutningen är $\underline{-0{,}42}$ då $x = 0{,}8$

ⓑ Ställ upp en ekvation för bestämning av x-värdet i den punkt där backar med den givna banprofilen är brantast.

Givet:

Backar med given banprofil kan beskrivas genom sambandet

$$y = 0{,}5e^{-ax^2} \quad \text{för} \quad 0 \leq x \leq 2{,}5 \qquad (1)$$

[redacted]

För att få ut största värde på lutningen y', används andra derivatan y''. Där maximipunkten är $x \Leftrightarrow y'' = 0$.

Produktregeln säger att

$$y = f(x) \cdot g(x) \implies y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

I detta fall är

$$f(x) = -ax \qquad f'(x) = -a$$
$$g(x) = e^{-ax^2} \qquad g'(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2} \qquad (2)$$

(2) : (1) ger att

$$y'' = -ae^{-ax^2} + 2a^2x^2e^{-ax^2}$$
$$= ae^{-ax^2}(2ax^2 - 1)$$

[redacted]

~~Eftersom~~ $ae^{-ax^2} > 0$ måste

$$y'' = 0 = 2ax^2 - 1 \implies x = \underline{\sqrt{\frac{1}{2a}}} \quad (3)$$

ⓒ Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1{,}0$

(3) med '$x = 1{,}0$' ger att

$$a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

SVAR: $\underline{a = 0{,}5}$

Hjälpförlaga 5

[redacted]

Sammanfattning

Introduktion

- Skriv upp de 3 frågorna

Givet

- Skriv om höjden, y och x i bild

a) bestäm backens lutning för $x = 0{,}8$

$$y = 0{,}5e^{-(x^2)}$$

lutningen är derivatan

"eftersom lutningen är det samma som derivatan får vi"

$$y' = -x \cdot e^{-(x^2)}.$$

[redacted]

Lutningen i $x = 0{,}8$ är därför

$$y'(0{,}8) = -0{,}8 \cdot e^{-(0{,}8^2)} = -0{,}42.$$

b) Ställ upp en ekvation....

$$y = 0{,}5e^{-ax^2}, \quad 0 \leq x \leq 2{,}5, \quad a \text{ är positiv konstant}$$

$$y = 0{,}5e^{-ax^2}$$

$$y' = -ax \cdot e^{-ax^2}$$

backen är brantast då andraderivatan är lika med 0.

~~multiplikationssatsen~~ (?) $\Rightarrow y'' = f(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g(x)$

PRODUKTREGELN!

[redacted]

$f(x) = -ax$

$f'(x) = -a$

$g(x) = e^{-ax^2}$

$g'(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2}$

vilket betyder

$$y'' = -a \cdot e^{-ax^2} + 2a^2x^2 \cdot e^{-ax^2} =$$

$$= ae^{-ax^2}(2ax^2 - 1)$$

$a \cdot e^{-ax^2} > 0$

$0 = 2ax^2 - 1$

$x = (\pm)\sqrt{\frac{1}{2a}}$

[redacted]

c) ~~Redovisa~~ Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1$

(tidigare) $\Rightarrow$ $a = \frac{1}{2x^2}$

Om $x = 1$ $\Rightarrow$ $a = \frac{1}{2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Backen är brantast då $a = 0{,}5$ om $x = 1$

$$y'' = a^2 \cdot 2e^{-ax^2} \cdot x^2 - ae^{-ax^2}$$

$$a^2 \cdot 2e^{-ax^2} \cdot x^2 - ae^{-ax^2} = 0$$

$$a^2 \cdot 2\cancel{e^{-ax^2}} \cdot x^2 = a \cdot \cancel{e^{-ax^2}}$$

$$a \cdot 2 \cdot x^2 = 1$$

$$x = (\pm) \sqrt{\frac{1}{2a}}$$

najs

[redacted]

Hjälpförlaga 6

a) Vi vet att $y = 0{,}5^{-x^2}$

För att få lutningen deriverar vi y

$y' = 2x \cdot -0{,}5e^{-x^2} = -x \cdot e^{-x^2}$

$y'(0{,}8) = -0{,}8 \cdot e^{-0{,}8^2} \approx -0{,}42$

– eller + spelar ingen roll eftersom det är en lutning

Svar: Backens lutning för $x = 0{,}8$ är $0{,}42$

b) Lutningen är störst där y' är störst

alltså där y'' är 0 och vi tar därför reda

på x-värdet när $y'' = 0$

$y = 0{,}5 \cdot e^{-ax^2}$

$y' = a \cdot 2x \cdot -0{,}5e^{-ax^2}$

$= -ax \cdot e^{-ax^2}$

produktregeln säger:

$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x) \rightarrow f''(x) = g''(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h''(x)$

$f''(x) = -ax \cdot e^{-ax^2}$

$g'(x) = -ax \rightarrow g''(x) = -a$

$h'(x) = e^{-ax^2} \rightarrow h''(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2}$

→

fortsättning

$y' = -ax \cdot e^{-ax^2}$

$y'' = -a \cdot e^{-ax^2} + -ax \cdot -2ax \cdot e^{-ax^2}$

$= -a \cdot e^{-ax^2} + 2a^2x^2 \cdot e^{-ax^2}$

$= a \cdot e^{-ax^2} \cdot (2ax^2 - 1) = 0$

För att hela ekvationen ska bli 0 räcker det att $(2ax^2 - 1) = 0$

$2ax^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2a}$

$x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$

c) Vi använder samma ekvation som i b), $2ax^2 - 1 = 0$

Ifall $x = 1$ så får vi

$2a - 1 = 0$

$a = 0{,}5$

Svar: $a = 0{,}5$

Hjälpförlaga 7

[redacted]

a) Bestäm backens lutning för $x=0,8$

$y=0,5e^{-ax^2}$ = höjden

Derivera funktionen för att få lutningen

$y'(x)=-xe^{-x^2} \Rightarrow y'(0,8)=-0,8e^{-0,64} \Rightarrow y'(0,8)=-0,42$

---

b) Värdet på x i den brantaste punkten

$y=0,5e^{-ax^2}$, $0 \leq x \leq 2,5$ och a är en positiv konstant.

produktregeln $= y'(x)=f'(x)g(x)+f(x)+g'(x)$

Börja med att räkna ut lutningen, alltså derivera

$y'(x)=-axe^{-ax^2}$

Dela upp i inre och yttre derivator och derivera igen

$f(x)=-ax$

$g(x)=e^{-ax^2}$

$y''(x)=-ae^{-ax^2}+(-ax(-2axe^{-ax^2})) \Rightarrow$ [redacted]

$\Rightarrow y''(x)=-ae^{-ax^2}+2a^2x^2e^{-ax^2} = ae^{-ax^2}(2ax^2-1)$

a = en positiv konstant ~~ma~~ alltså gäller $ae^{-ax^2}>0$ och då även att $2ax^2-1=0$ eftersom andraderivatan ska bli noll då backen är brantast där

$2ax-1=0$

$ax^2=\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$

---

c) Bestäm a så att backen är brantast för $x=1$

$1=\sqrt{\frac{1}{2a}} \Rightarrow a=\frac{1}{2\cdot 1}=0,5$

Hjälpförlaga 8

En skidbacke har fall höjd 500 meter, och sträckan 2,5 km

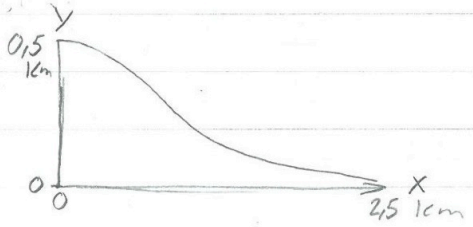


fig 1 (lite text)...

Höjden y km är en funktion av sträckan x km.

Sambandet mellan y och x ges av:

$y = 0{,}5e^{-x^2}$, i intervallet $0 \leq x \leq 2{,}5$ km

Ett allmänt sätt att beskriva backen med liknande banprofil som Fig 1 ges av funktionen

$y = 0{,}5e^{-ax^2}$, $0 \leq x \leq 2{,}5$ km (där a är en positiv konstant)

3 värdet a bestäms när sträckan $x = 1{,}0$ ger den brantaste lutningen.

[redacted]

I) Backens lutning ges av första derivatan y' av funktionen

$y = 0{,}5e^{-x^2}$

Derivering med avseende på x ger:

$y \Rightarrow y' = -xe^{-x^2}$

II Insättning av $x = 0{,}8$ ger:

$y' = -0{,}8e^{-0{,}8^2} = -0{,}4218339392$

Svar: lutningen avrundat till en decimal är $\approx -0{,}4$

funktionen, ger ~~en~~ negativt värde på lutningen eftersom den är fallande för $x = 0{,}8$.

Backen är som brantast för det värdet på x i Andra derivatan y'' för funktionen $y = 0{,}5e^{-ax^2}$ som är lika med noll då är y' som störst.

d.v.s för villet värde på x ger $y''(x) = 0$

I) första derivatan y' med avseende på x

$y = 0{,}5e^{-ax^2} \Rightarrow y' = -axe^{-ax^2}$

Andra derivatan y'' med avseende på x och produkt regeln.

$y' = -axe^{-ax^2} \Rightarrow y'' = 2a^2x^2e^{-ax^2} - ae^{-ax^2}$

II) Ekvations uppställning för $y'' = 0$

$2a^2x^2e^{-ax^2} - ae^{-ax^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{2a^2x^2e^{-ax^2}}{e^{-ax^2}} = \frac{ae^{-ax^2}}{e^{-ax^2}}$

$= 2a^2x^2 = a$

$= x^2 = \frac{1}{2a} = x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$

[redacted]

3.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

I) $x = 1$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$(\sqrt{2a})^2 = 1^2$$

$$2a = 1^2$$

$$a = \frac{1}{2}$$