Rapport på lösning för uppgift 14

Ion Lund*

Luleå tekniska universitet
971 87 Luleå, Sverige

22 september 2025

Sammanfattning

Uppgift 14 är en matematik uppgift från en av Skolverkets prov.[1] Rapporten innehåller detaljerade lösningar för deluppgift A, B, och C. Vi går också genom vad varje fråga vill att vi egentligen ska svara på, och vad våra lösningar egentligen betyder.

1 Introduktion

Vi blir medvetna om en skidbacke som har fallhöjden 500 meter. Banprofilen ser du i en bild med höjden y km som är en funktion av sträckan x km. [1] Sambandet mellan y och x ges av att

$$y = 0,5e^{-x^2}$$
$$0 \leq \; x \leq 2,5$$

2 Deluppgift A

2.1 Frågan

Deluppgift A [1] vill att man ska lösa för backens lutning där $x = 0,8$.
Vi ska alltså derivera en sammansatt funktion för att bestämma lutningen i en viss punkt på backen. I frågan använder vi oss av sambanden:

$$y = 0,5e^{-x^2}$$
$$x = 0,8$$

*email: `ionlun-5@student.ltu.se`

2.2 Lösningen

$$
\begin{aligned}
x &= 0,8 \\
y &= 0,5e^{-x} \\
y'(0,8) &= -0,8 \cdot e^{-(0,8)} \\
&= -0,42.
\end{aligned} \tag{1}
$$

2.3 Motiveringen

Vi bestämde lutningen som $x = 0,8$ och eftersom att lutningen är det samma som derivatan får vi då att $y' = -x \cdot e^{-(x)}$. Därifrån är det bara att byta ut x mot $0,8$ och lösa uppgiften.

3 Deluppgift B

3.1 Frågan

Deluppgift B [1] vill att vi ska ställa upp en ekvation för bestämning av x-värdet. I frågan får vi ny relevant information om att ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil som i uppgift A kan ges av funktionen:

$$y = 0,5e^{-ax} \quad , \quad 0 \leq x \leq 2,5 \text{ där } a \text{ är en positiv konstant.}$$

3.2 Lösningen

$$
\begin{aligned}
y &= 0,5e^{-ax} \\
y' &= -ax \cdot e^{-ax} \\
y'' &= f(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g(x) \\
f(x) &= -ax \\
f'(x) &= -a \\
g(x) &= e{-}ax \\
g'(x) &= -2ax \cdot e^{-ax} \\
y'' &= -a \cdot e^{-ax} + 2ax \cdot e^{ax} \\
&= ae^{-ax}(2ax - 1) \\
a \cdot e^{-ax} &> 0 \\
0 &= 2ax - 1 \\
x &= + - \sqrt{\frac{1}{2a}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

3.3 Motiveringen

Med hjälp av derivering för y-funktionen, så kan vi lösa ut x från potensen. Vi gör en till derivering för att veta funktionens maximi- och minimipunkt. I den andra deriveringen så får då varje funktion ett värde, och man kan då byta ut funktionerna mot variablerna. $a \cdot e^{-ax} > 0$ och vi kan göra om det till en andragradsfunktion och använda en formel för att veta hur vi löser för x.

4 Deluppgift C

4.1 Frågan

Deluppgift C [1] vill att vi ska bestämma a så att backen är brantast för $x = 1,0$.

4.2 Lösningen

$$\begin{aligned} \text{(Tidigare)} => a &= \frac{1}{2x} \\ \text{Om } x = 1 => a &= \frac{1}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 0,5 \end{aligned} \tag{3}$$

4.3 Motiveringen

Det här är en väldigt simpel lösning. Vi vet redan sen innan att $a = \frac{1}{2x}$, och vi vet också att $x = 1$, och kan då enkelt byta ut variabeln mott dess värde för att få att $a = 0,5$.

5 Diskussion [och slutsatser]

I den här uppgiften har vi löst tre stycken olika deluppgifter. I deluppgift A [1] löste vi för backens lutning vid en specifik punkt. Ekvation 1 var en av flera lösningar på problemet, men anledningen till att vi körde med den ekvationen var för att den är väldigt kort och enkel att förstå samt skriva.

I deluppgit B [1] ställde vi upp ekvationen nr. 2 för bestämning av x-värdet i den punkt där backar med en sån banprofil är brantast. Det var en mer komplicerad uppgift då vi behövde använda oss av andraderivatan, samt att det ser ut som en stor röra av variabler. Men egentligen är den här lösningen så enkelt som det kan bli, och det blir mindre komplicerat när vi skriver definitionerna för funktionerna i andraderivatan. Därifrån kan vi få fram en andragradsfunktion för att lösa vad x blir.

Deluppgift C [1] är den lättaste uppgiften, då vi får reda på vad x är lika med, samt att tack vare ekvation 2 så vet vi då redan vad a är lika med. Ekvation 4.2 blir då en enkel uppgift där vi endast behöver skriva in numren för att få vårat svar.

Hela uppgiften går ut på att vi ska visa våran kunskap inom derivering, andraderivering, och funktioner. Det som är utmanande med uppgiften är att kunna förstå vad allting ska användas till och hur man gör det, men när man väl förstår teorin bakom problemen och vilka ekvationer och steg som kan vara nödvändiga för problemlösningen så är det inga större problem för att klara uppgifterna.

Referenser

[1] Skolverket. *Likvärdig bedömning i matematik med stöd av nationella prov.* Skolverket, 2004.