武汉大学 2014-2015 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

一、（8 分）设 A 与 B 可交换，且 A 可逆，A^* 为 A 的伴随矩阵，试证明 A^* 与 B 也可交换。

证明　由 $A^*=|A|A^{-1}$　　$AB=BA$，得 $A^{-1}B=BA^{-1}$　　故 $A^*B=BA^*$　　　8 分

二、（10 分）设 $A^2+AB+A=0$，其中 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$，（$a,b,c$ 是互不相等的正实数）求方阵 B.

解　$|A|=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$　　　5 分

故由 $A(A+B+E)=0$ 知 $A+B+E=0$，$B=-E-A=\begin{pmatrix} -1-a & -b & -c \\ -c & -1-a & -b \\ -b & -c & -1-a \end{pmatrix}$　10 分

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$.

解　$(A+2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2-4E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}-4E=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$　　6 分

$(A+2E)^{-1}(A^2-4E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　　10 分

或 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)=(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-2E)=A-2E\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　10 分

四、（8 分）解关于 x 的方程 $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-2)-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (n-1)-x \end{vmatrix}=0$.

解　因为 $D(x)$ 是 $n-1$ 次多项式. 又 $D(k)=0,(k=0,1,2,\cdots,(n-1).)$

故 $x_k=k,(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 为原方程的全部解.　　　8 分

五、（12 分）设 $\alpha_1=(1,-1,5,2)$，$\alpha_2=(-2,3,1,0)$，$\alpha_3=(4,-5,9,4)$，$\alpha_4=(0,4,2,-3)$，$\alpha_5=(-7,18,2,-8)$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个最大无关组，并用最大无关组线性表出向量组中其它的向量。

解 令 $A=\left[\alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\ \alpha_4'\ \alpha_5'\right]$，对 A 作初等行变换：$A\to\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ 8 分

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是所求的一个最大无关组，

且有 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_4$，$\alpha_5=-\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4$ 12 分

六、(10 分)在 R^4 中, 向量 α 基: $\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,1,1,0),\alpha_3=(0,0,1,1),\alpha_4=(0,0,0,1),$ 下的坐标为 $(2,3,1,2)$; 求 α 在基: $\beta_1=(1,2,0,0),\beta_2=(0,2,3,0),\beta_3=(0,0,2,4),$ $\beta_4=(3,0,0,2)$ 下的坐标.

解 $\alpha=($ 2 , 5 , 4 设 $\alpha=x_1\beta_1+\cdots+x_4\beta_4$，得 $\begin{pmatrix}1&0&0&3\\2&2&0&0\\0&3&2&0\\0&0&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\4\\3\end{pmatrix}$ 5 分

它有唯一解: $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\frac{13}{8},\frac{7}{8},\frac{11}{16},\frac{1}{8}).$

故 α 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_4$ 下的坐标为: $(\frac{13}{8},\frac{7}{8},\frac{11}{16},\frac{1}{8})$ 10 分

七、（15 分）设有方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0\\3x_1+2x_2+3x_3=-1\\-x_1+4x_2+mx_3=k\end{cases}$，问 m,k 为何值时, 方程组有唯一解?无解?有无穷多解?在有无穷多解时, 求出一般解.

解 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&3&1&0\\3&2&3&-1\\-1&4&m&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&0\\0&1&0&\frac{1}{7}\\0&0&m+1&k-1\end{bmatrix}$ 5 分

①当 $m\neq-1$ 时, 方程组有唯一解,

②当 $m=-1,k\neq1$ 时, 方程组无解.

③当 $m=-1$ 且 $k=1$ 时, 方程组有无穷多解.

此时 $\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&3&1&0\\0&1&0&\frac{1}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-\frac{3}{7}\\0&1&0&\frac{1}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore X=k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{1}{7}\\0\end{bmatrix}$ 15 分

八、（15 分）用正交变换化二次型 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准形，写出所用正交变换及 f 的标准形，并指出 f 是否为正定二次型。

解 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$ ， $\lambda_3=4$

$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T$，$e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$，$e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$ 10 分

在正交变换$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$之下。

f 化成标准形：$2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$，f 不是正定二次型。 15 分

九、（7 分）设向量β可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表出，但不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表出，证明：向量组$U:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与向量组$V:\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}$,β等价。

证明　由已知V可由U线性表出，而$\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}$可由$V$线性表出，因而只要能证明$\alpha_r$可由$V$线性表出则$U$与$V$等价

设$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1} + k_r\alpha_r$则$k_r \neq 0.$否则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表出，与已知矛盾故$k_r \neq 0.$于是$\alpha_r = -\frac{1}{k_r}(\beta - k_1\alpha_1 - \cdots - k_{r-1}\alpha_{r-1}),$即$\alpha_r$可由$V$线性表出，所以向量组$U:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与向量组$V:\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}$,β等价。 7 分

十、（5 分）设有实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = X^{\mathrm{T}}AX$，式中$X = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, A = (a_{ij})_{nxn}$，并设$A$的最小特征值为$\lambda_1$，最大特征值为$\lambda_2$，试求在附加条件$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$（$R$为实数)之下，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的最小值与最大值.

解　设A的特征值依次是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，存在正交矩阵$T$，

经变换$X = TY,(Y = (y_1,y_2,\cdots,y_n)^T)$，后$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

且$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = Y^TY = X^TT^TTX = X^TX = R^2$

则$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \geq \lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1 R^2$，取$\alpha = T\begin{pmatrix} \mathrm{R} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，则

$\alpha' A\alpha = \lambda_1 R^2$，故所求最小值为$\lambda_1 R^2$，类似地

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \leq \lambda_2(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_2 R^2$

取$\beta = T\begin{pmatrix} \mathrm{R} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$，则$\beta' A\beta = \lambda_2 R^2$故所求最大值为$\lambda_2 R^2$。 5 分