武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
线性代数 C（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，计算 A^{2022}

三、（12 分）设有三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} 和 $\left|A^{*}-3A^{-1}\right|$.

四、（12 分）

设4元非齐次线性方程组的系数矩阵A的秩为3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是它的三个解向量，且

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，求该方程组的通解。

五、（15 分）求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a \\ -10 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

的秩，并求出该向量组的一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

六、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda + 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \end{cases},$$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

七、（9 分）

设A为n阶方阵,已知β为n维非零列向量，若存在正整数k,使得$A^k\beta \neq 0$,且$A^{k+1}\beta=0$，则向量组β，$A\beta$，$A^2\beta,\cdots A^k\beta$线性无关。

八、（10 分） 证明二次型$f=x^T Ax$在$\|x\|=1$时的最大值为最大特征值，最小值为最小特征值。

九、（12 分）**已知二次型**

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3,$$

（1）写出二次型 f 的矩阵；

（2）用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.