

武汉大学 2012-2013 学年第二学期

《线性代数 B》(工科 54 学时) 试题

一. (10 分) 已知 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$ 为向量空间 \mathbb{R}^3 的一组基, 求向量 $\beta = (2, 0, 0)^T$ 在这组基下的坐标向量.

二. (10 分) 已知 A 为 3 阶矩阵, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且满足方程 $2A^{-1}B = B - 4I$, I 为 3 阶单位阵, 求矩阵 A .

三. (12 分) 已知四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

1. 计算四阶行列式 D 的值; 2. 计算四阶行列式 D 的第一行元素的代数余子式之和.

四. (10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(2, 1, 0)$, 且 $r(A - AB) = 2$, 求参数 t 的值.

五. (16 分) 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ b \\ 4 \end{pmatrix}$, 问 a, b 为何值时

1. β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;
2. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并写出表示式;
3. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 用无穷多方式线性表示? 并写出一般表示式;
4. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 并在此时求它的秩和一个最大无关组, 且用该最大无关组表示其余向量.

六. (14 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2,

1. 求 a 的值;
2. 求正交变换 $x = Qy$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形.

七. (12 分) 设 A 为三阶实对称阵, 且满足条件 $A^2 + 2A = O$, 已知 A 的秩 $r(A) = 2$,

1. 求 A 的全部特征值;
2. 计算 $|A + 4I|$;
3. 当 k 为何值时, $A + kI$ 为正定阵, 其中 I 为 3 阶单位阵.

八. (8 分) 已知 A 为 3 阶方阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 A 的 3 个不同的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别为相应的特征向量, 又 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 试证: $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

九. (8 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 n 维非零实向量, $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, k_1, k_2 为使得 $\alpha_4 \neq 0$ 的任意常数, 以下结论若正确, 请证明; 若不正确, 请举出反例.

1. 若 α_3 与 α_1 正交, 且 α_3 与 α_2 也正交, 则 α_3 与 α_4 正交.
2. 若 α_3 与 α_1 线性无关, 且 α_3 与 α_2 也线性无关, 则 α_3 与 α_4 线性无关.

武汉大学 2012-2013 学年第二学期

《线性代数 D》(工科 36 学时) 试题

一. (10 分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

二. (15 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $A^*BA = 2BA - 9E$, 求 B .

三. (15 分) 设向量组 $A: \alpha_1 = (1, 3, 2, 0)^T, \alpha_2 = (7, 0, 14, 3)^T, \alpha_3 = (2, -1, 0, 1)^T, \alpha_4 = (5, 1, 6, 2)^T$

1. 求向量组的秩; 2. 求向量组的一个最大线性无关组, 并把其余向量分别用求得的最大无关组线性表示.

四. (15 分) 问 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + (\lambda - 5)x_3 = \lambda + 1 \\ 2x_1 + (5 - \lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ (2 - \lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ 有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

五. (15 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$

1. 把二次型 f 写成 $f = X^TAX$ 的形式;

2. 求矩阵 A 的特征值与特征向量.

3. 求正交矩阵 P , 使 f 通过正交变换 $x = Py$ 化为标准形.

六. (15 分) 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 求 $|A^3 - 5A^2 + 7A|$.

七. (7 分) 证明: 设矩阵 A 为 n 阶非零实对称矩阵, 则存在 n 维列向量 X , 使得 $X^TAX \neq 0$.

八. (8 分) 证明: 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵, $n < m$, 且 $AB = E$, 证明 B 的列向量组线性无关.