线性代数复习 2023

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学　数学与统计学院

May 30, 2023

1. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

1. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

2. 伴随矩阵的定义. 重要公式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

教材 P.150 习题 34

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 证明:

$$(1)\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & 当\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & 当\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & 当\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$$

$$(2)\quad \left|\boldsymbol{A}^*\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}.$$

3. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系由

$$n - \mathrm{r}(A)$$

个线性无关的解向量构成 (n 是未知量的个数).

3. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由

$$n-\mathrm{r}(A)$$

个线性无关的解向量构成 (n 是未知量的个数).

4. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解、无解的充要条件.

5. 特征值性质:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$
$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left| \boldsymbol{A} \right|.$$

6. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, 且 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. 即 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量.

矩阵	特征值	特征向量
$\boldsymbol{A}$	λ	$\boldsymbol{x}$

6. 设 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$, 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 即 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量.

矩阵	特征值	特征向量
$\boldsymbol{A}$	λ	$\boldsymbol{x}$
$k\boldsymbol{A}$	$k\lambda$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}^m$	λ^m	$\boldsymbol{x}$
$\varphi(\boldsymbol{A})$	$\varphi(\lambda)$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}^*$	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$	λ	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$

⑥ 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 且 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. 即 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量.

矩阵	特征值	特征向量
$\boldsymbol{A}$	λ	$\boldsymbol{x}$
$k\boldsymbol{A}$	$k\lambda$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}^m$	λ^m	$\boldsymbol{x}$
$\varphi(\boldsymbol{A})$	$\varphi(\lambda)$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}^*$	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$	λ	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$

线性组合: $2\boldsymbol{A}^3 + 3\boldsymbol{A}^{-1} + 4\boldsymbol{A}^*$. 复合: $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$, $(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

1 概览

- 必会
- 及格线题目

2 带参数的线性方程组解的讨论

3 向量空间

4 矩阵方程

5 矩阵及向量组的秩

6 矩阵的对角化

7 二次型

1. 带参量的线性方程组解的讨论.

1. 带参量的线性方程组解的讨论.

例 0.1 (2020–2021 学年第二学期)

五、(12 分) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + ax_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b, \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 2, \end{cases}$ 试问: 当 a, b 满足什么条件时, 方程组有 (1) 唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解? 在有无穷多解时, 求出对应的齐次线性方程组的基础解系以及该非齐次方程组的通解.

2. 找出极大无关组, 并表示余下的向量.

2. 找出极大无关组, 并表示余下的向量.

例 0.2 (2018–2019 学年第一学期)

3. (10 分) 考虑向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(7,0,14,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(5,1,6,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(2,-1,4,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求向量组的秩;

(2) 求此向量组的一个极大线性无关组, 并把其余向量分别用该极大线性无关组表示.

3. 二次型化为标准型, 判断正定性.

3. 二次型化为标准型, 判断正定性.

例 0.3 (2020–2021 学年第二学期)

八、（6 分）用正交变换将实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

化为标准形, 并判断此二次型是否正定.

例 1.1

设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1. \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

例 1.1

设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1. \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

例 1.1

设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1. \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

例 1.1

设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1. \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时,

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解.

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = 1$ 时,

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

出现矛盾方程, 方程组无解.

(3) 当 $\lambda = -2$ 时,

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=-3. \end{cases}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

(3) 当 $\lambda = -2$ 时, 方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=-3. \end{cases}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得方程组的通解为

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=-3. \end{cases}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得方程组的通解为

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(1,1,1)^{\mathrm{T}}+(-1,-2,0)^{\mathrm{T}}(k\in\mathbb{R}).$$

例 1.2 (2021-2022 第二学期)

六、(10 分) 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,b,c)^{\mathrm{T}}$. 试问: 当 a, b, c 满足什么条件时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 但表示不唯一，并求一般表达式.

例 1.2 (2021-2022 第二学期)

六、(10 分) 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a, 2, 10)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-2, 1, 5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 1, 4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1, b, c)^{\mathrm{T}}$. 试问: 当 a, b, c 满足什么条件时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 但表示不唯一，并求一般表达式.

解: 设线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}. \tag{1}$$

例 1.2 (2021-2022 第二学期)

六、(10 分) 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,b,c)^{\mathrm{T}}$. 试问: 当 a, b, c 满足什么条件时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 但表示不唯一，并求一般表达式.

解: 设线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}. \tag{1}$$

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-(a+4),$$

1. 由克拉默法则, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时,

1. 由克拉默法则, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 线性方程组 (1) 有唯一解,

1. 由克拉默法则, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 线性方程组 (1) 有唯一解, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一.

1. 由克拉默法则, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 线性方程组 (1) 有唯一解, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一.

下面讨论 $a = -4$ 时的情形.

1. 由克拉默法则, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 线性方程组 (1) 有唯一解, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一.

下面讨论 $a = -4$ 时的情形. 此时

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right)$$

1. 由克拉默法则, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 线性方程组 (1) 有唯一解, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一.

下面讨论 $a = -4$ 时的情形. 此时

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times 2]{r_2 \times 2} \left(\begin{array}{ccc:c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2b \\ 20 & 10 & 8 & 2c \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 3 & 2c+5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & -1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3b+1 \end{array}\right),$$

1. 由克拉默法则, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 线性方程组 (1) 有唯一解, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一.

下面讨论 $a = -4$ 时的情形. 此时

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times 2]{r_2 \times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2b \\ 20 & 10 & 8 & 2c \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 3 & 2c+5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3b+1 \end{array}\right),$$

2. 当 $a = -4$ 且 $c + 1 - 3b \neq 0$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = 3,$$

1. 由克拉默法则, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 线性方程组 (1) 有唯一解, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一.

下面讨论 $a = -4$ 时的情形. 此时

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times 2]{r_2 \times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2b \\ 20 & 10 & 8 & 2c \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 3 & 2c+5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3b+1 \end{array}\right),$$

2. 当 $a = -4$ 且 $c + 1 - 3b \neq 0$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = 3,$$

线性方程组 (1) 无解, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

3. 当 $a=-4$ 且 $c+1-3b=0$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2<n=3,$$

线性方程组 (1) 有无穷多解.

3. 当 $a=-4$ 且 $c+1-3b=0$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2<n=3,$$

线性方程组 (1) 有无穷多解. 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&0&-b-1\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

得通解为

$$\begin{cases}x_1= & k,\\ x_2=-2k & -b-1,\\ x_3= & 2b+1.\end{cases}$$

3. 当 $a=-4$ 且 $c+1-3b=0$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2<n=3,$$

线性方程组 (1) 有无穷多解. 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&0&-b-1\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

得通解为

$$\begin{cases}x_1= & k,\\ x_2= -2k & -b-1,\\ x_3= & 2b+1.\end{cases}$$

其中 $k\in\mathbb{R}$.

3. 当 $a=-4$ 且 $c+1-3b=0$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2<n=3,$$

线性方程组 (1) 有无穷多解. 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&0&-b-1\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

得通解为

$$\begin{cases}x_1= & k,\\x_2= & -2k \quad -b-1,\\x_3= & \qquad 2b+1.\end{cases}$$

其中 $k\in\mathbb{R}$. 此时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 且表示法不唯一,

3. 当 $a=-4$ 且 $c+1-3b=0$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2<n=3,$$

线性方程组 (1) 有无穷多解. 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&0&-b-1\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

得通解为

$$\begin{cases}x_1= & k,\\x_2=-2k & -b-1,\\x_3= & 2b+1.\end{cases}$$

其中 $k\in\mathbb{R}$. 此时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 且表示法不唯一,

$$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}_1-(2k+b+1)\boldsymbol{\alpha}_2+(1+2b)\boldsymbol{\alpha}_3,\quad k\in\mathbb{R}.$$

例 1.3 (2017 年 6 月)

讨论 a, b 为何值时, 方程 $ax_1 + x_2 + x_3 = 4$ 与方程组

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3bx_2 + x_3 = 9, \end{cases}$$

无公共解, 有唯一公共解, 有无穷多公共解, 并写出相应的公共解?

解: 问题等价于 a, b 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3bx_2 + x_3 = 9, \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷多解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4\\ 1 & b & 1 & 3\\ 1 & 3b & 1 & 9\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_2]{}\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4\\ 1 & b & 1 & 3\\ -2 & 0 & -2 & 0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & 0 & 4\\ 0 & b & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right),$$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 3b & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_2]{} \left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} a-1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & b & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

(1) $b=0$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$, 无解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 3b & 1 & 9 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_2]{}\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} a-1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & b & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

(1) $b=0$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$, 无解.

(2) $b\neq 0$ 时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} a-1 & 0 & 0 & 4-\frac{3}{b} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{b} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

若 $a=1$ 且 $b\neq 0$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$, 无解.

若 $a=1$ 且 $b\neq 0$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$, 无解.

若 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$, 则

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{4b-3}{b(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{b} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4b-3}{b(a-1)} \end{array}\right),$$

若 $a=1$ 且 $b\neq 0$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$, 无解.

若 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$, 则

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & \frac{4b-3}{b(a-1)}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{b}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4b-3}{b(a-1)}\end{array}\right),$$

此时方程组有唯一解 $\left(\frac{4b-3}{b(a-1)},\frac{3}{b},-\frac{4b-3}{b(a-1)}\right)$.

注解

1. $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 可以用克拉默法则破题.

注解

1. $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 可以用克拉默法则破题.
2. 特别小心 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵的情形.

注解

1. $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 可以用克拉默法则破题.
2. 特别小心 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵的情形.
   回到最基本的解法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 进行初等行变换.

例 1.4 (2022 年 6 月, 10 分)

设线性方程组 (I): $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \end{cases}$ 与方程 (II): $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

例 1.4 (2022 年 6 月, 10 分)

设线性方程组 (I): $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \end{cases}$ 与方程 (II): $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

解: 即方程组 (I) 与 (II) 联立所得方程组

$$(\mathrm{III}): \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$$

有解.

对联立方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,3,4]{r_i - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_1,\, r_4-r_2]{r_2 \leftrightarrow r_4,\, r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3-3a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-(a+1)r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{array}\right).$$

对联立方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right)\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_1,\,r_4-r_2]{r_2\leftrightarrow r_4,\,r_3-3r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a^2-1&3-3a\\0&0&a-1&1-a\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-(a+1)r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&a^2-3a+2\end{array}\right).$$

方程组 (III) 有解 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$,

对联立方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,3,4]{r_i - r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_1,\, r_4-r_2]{r_2\leftrightarrow r_4,\, r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3-3a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-(a+1)r_3]{r_3\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{array}\right).$$

方程组 (III) 有解 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 故

$$a^2 - 3a + 2 = 0.$$

即 $a = 1$ 或 $a = 2$.

1. $a = 1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. $a=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. $a=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组 (III) 的通解, 即两方程组的公共解为:

$$\boldsymbol{x}=k(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 是任意常数.

2. 当 $a=2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$.

2. 当 $a=2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. 当 $a=2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. 当 $a=2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得方程组 (III) 的唯一解, 即两方程组的公共解为:

$$\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

注释

出现了很多“求公共解”的题目, 另外也有“同解”的题目.
要注意这两个问题的区别.

例 1.5 (2021 年 12 月, 12 分)

设 (I) 和 (II) 都是 3 元非齐次线性方程组.

(I) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$, k_1, k_2 为任意常数;

(II) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$, k 为任意实数.

求 (I) 和 (II) 的公共解.

例 1.5 (2021 年 12 月, 12 分)

设 (I) 和 (II) 都是 3 元非齐次线性方程组.

(I) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$, k_1, k_2 为任意常数;

(II) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$, k 为任意实数.

求 (I) 和 (II) 的公共解.

解: 存在 k_1, k_2 使得

$$\boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

于是 $\boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}_1$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 即

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}_1\right) = \mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right).$$

对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}_1)$ 进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 2 & k+1 \\ 0 & 1 & 2k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix},$$

得 $k = \frac{1}{2}$, 从而 (I) 和 (II) 有公共解:

$$\boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\xi}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)^{\mathrm{T}}.$$

另解: 先求出方程组 (I) 和 (II), 或者说它们的同解方程组.

另解: 先求出方程组 (I) 和 (II), 或者说它们的同解方程组. 以下的叙述忽略这个差别.

另解: 先求出方程组 (I) 和 (II), 或者说它们的同解方程组. 以下的叙述忽略这个差别.

已知 (I) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

另解: 先求出方程组 (I) 和 (II), 或者说它们的同解方程组. 以下的叙述忽略这个差别.

已知 (I) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

因 (I) 对应的齐次方程, 有两个线性无关解,

另解: 先求出方程组 (I) 和 (II), 或者说它们的同解方程组. 以下的叙述忽略这个差别.

已知 (I) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

因 (I) 对应的齐次方程, 有两个线性无关解, 故设该齐次方程组为

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

另解: 先求出方程组 (I) 和 (II), 或者说它们的同解方程组. 以下的叙述忽略这个差别.

已知 (I) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

因 (I) 对应的齐次方程, 有两个线性无关解, 故设该齐次方程组为

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

代入 $\boldsymbol{\alpha}_1$, 得 $b = -a$;

另解: 先求出方程组 (I) 和 (II), 或者说它们的同解方程组. 以下的叙述忽略这个差别.

已知 (I) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

因 (I) 对应的齐次方程, 有两个线性无关解, 故设该齐次方程组为

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

代入 $\boldsymbol{\alpha}_1$, 得 $b = -a$; 再代入 $\boldsymbol{\alpha}_2$, 得 $c = a$.

另解: 先求出方程组 (I) 和 (II), 或者说它们的同解方程组. 以下的叙述忽略这个差别.

已知 (I) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

因 (I) 对应的齐次方程, 有两个线性无关解, 故设该齐次方程组为

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

代入 $\boldsymbol{\alpha}_1$, 得 $b = -a$; 再代入 $\boldsymbol{\alpha}_2$, 得 $c = a$. 故 (I) 对应的齐次方程为

$$ax_1 - ax_2 + ax_3 = 0, \quad \text{即 } x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

由特解 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 知方程组 (I) 为

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2. \tag{2}$$

已知 (II) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

已知 (II) 的通解为: $\boldsymbol{\xi}_2 + k\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$.
则对应齐次方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = k, \\ x_2 = k, \\ x_3 = 2k. \end{cases}$$

选 x_2 为自由未知量, 得

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 2x_2. \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ \quad -2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

由特解 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}$, 得方程组 (II) 为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ \quad -2x_2 + x_3 = \ \ 0. \end{cases}$$

联立方程组 (I) 和 (II), 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = \ \ 2, \\ x_1 - x_2 \qquad\quad\ = -1, \\ \quad -2x_2 + x_3 = \ \ 0. \end{cases}$$

联立方程组 (I) 和 (II), 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = \ \ 2, \\ x_1 - x_2 \qquad\quad = -1, \\ \quad -2x_2 + x_3 = \ \ 0. \end{cases}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right),$$

得所求公共解为

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)^{\mathrm{T}}.$$

对于方程组 (I), 也可以直接由基础解系, 求得对应齐次方程组.

对于方程组 (I), 也可以直接由基础解系, 求得对应齐次方程组.

齐次方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$,

对于方程组 (I), 也可以直接由基础解系, 求得对应齐次方程组.

齐次方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 简化得其等价向量组

$$(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad (0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

对于方程组 (I), 也可以直接由基础解系, 求得对应齐次方程组.

齐次方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 简化得其等价向量组

$$(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad (0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

齐次方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_1 + c_2, \\ x_3 = \qquad c_2. \end{cases}$$

对于方程组 (I), 也可以直接由基础解系, 求得对应齐次方程组.

齐次方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 简化得其等价向量组

$$(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad (0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

齐次方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_1 + c_2, \\ x_3 = \qquad c_2. \end{cases}$$

故所求齐次方程组为 $x_2 = x_1 + x_3$, 即 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

例 1.6

下列两个方程组同解, 试确定 a, b, c 之值.

$$
\text{(I)}\ \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1. \end{cases}
$$

$$
\text{(II)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}
$$

例 1.6

下列两个方程组同解, 试确定 a, b, c 之值.

$$\text{(I)}\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1. \end{cases}$$

$$\text{(II)}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

解: 方程组 (II)

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

解: 方程组 (II)

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

其通解为 $\boldsymbol{\xi} = k \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

将特解 $\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入 (I),

将特解 $\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入 (I), 得到

$$\begin{cases} 6 - 4a - 1 = 1, \\ 12 - 4 - b = 4, \\ 12 - 8 - 3 = 1, \end{cases}$$

将特解 $\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入 (I), 得到

$$\begin{cases} 6 - 4a - 1 = 1, \\ 12 - 4 - b = 4, \\ 12 - 8 - 3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 4. \end{cases}$$

将特解 $\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入 (I), 得到

$$\begin{cases} 6 - 4a - 1 = 1, \\ 12 - 4 - b = 4, \\ 12 - 8 - 3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 4. \end{cases}$$

令 $k = -1$, 得 $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

将特解 $\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入 (I), 得到

$$\begin{cases} 6-4a-1=1, \\ 12-4-b=4, \\ 12-8-3=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=4. \end{cases}$$

令 $k=-1$, 得 $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 代入 (I), 得

$$2+3-c=1, \Rightarrow c=4.$$

将特解 $\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入 (I), 得到

$$\begin{cases} 6-4a-1=1, \\ 12-4-b=4, \\ 12-8-3=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=4. \end{cases}$$

令 $k=-1$, 得 $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 代入 (I), 得

$$2+3-c=1, \Rightarrow c=4.$$

故 $a=1$, $b=4$, $c=4$.

向量空间

1. 基的定义及判定, 求向量在给定基下的坐标, 过渡矩阵;

向量空间

1. 基的定义及判定, 求向量在给定基下的坐标, 过渡矩阵;
2. 内积, Schmidt 正交化方法, 正交矩阵的定义及判定;

例 2.1 (基本题型)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

例 2.1 (基本题型)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

1. 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

例 2.1 (基本题型)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

1. 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.
2. 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

例 2.1 (基本题型)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

- (I) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.
- (II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解: (I) 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - kr_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

且

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - kr_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

且

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - kr_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

得证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 设 ξ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,

(II) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(II) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(II) 设 ξ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

(II) 设 ξ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

(II) 设 ξ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \text{即}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0.\quad(3)$$

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$,

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (3) 有非零解,

注意到 ξ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (3) 有非零解, 从而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = -k = 0.$$

注意到 ξ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (3) 有非零解, 从而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = -k = 0.$$

将 $k = 0$ 代入齐次方程组 (3), 解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0,\ c \in \mathbb{R}.$$

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (3) 有非零解, 从而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = -k = 0.$$

将 $k = 0$ 代入齐次方程组 (3), 解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0,\ c \in \mathbb{R}.$$

故所求向量为 $\boldsymbol{\xi} = c\boldsymbol{\alpha}_1 - c\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 c 为非零常数. $\square$

例 3.1 (2014 考研, 11 分 ★★★★★)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

1. 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;
2. 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

例 3.1 (2014 考研, 11 分 ★★★★★)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

1. 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;
2. 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

分析: 即求解矩阵方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}.$$

例 3.1 (2014 考研, 11 分 ★★★★★)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

1. 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系;
2. 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

分析: 即求解矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{I}.$$

等价于求解 3 个线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

☞ **这个观点极为重要:**

解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 等价于解线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2,\cdots$$

$\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量.

☞ **这个观点极为重要:**

解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 等价于解线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2,\cdots$$

$\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量.

解: (I) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

☞ **这个观点极为重要:**

解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 等价于解线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2,\cdots$$

$\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量.

解: (I) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

得方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,-3,-1)^{\mathrm{T}}$.

(II) 对矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ 施以初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

(II) 对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$ 施以初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

记 $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,

(II) 对矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ 施以初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

记 $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 \text{ 的通解为 } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\boldsymbol{\alpha},\ k_1 \text{ 为任意常数;}$$

(II) 对矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ 施以初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

记 $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 \text{ 的通解为 } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\boldsymbol{\alpha},\ k_1 \text{ 为任意常数;}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2 \text{ 的通解为 } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\boldsymbol{\alpha},\ k_2 \text{ 为任意常数;}$$

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{e}_3$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\boldsymbol{\alpha}$, k_3 为任意常数.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_3$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\boldsymbol{\alpha}$, k_3 为任意常数.

于是所求矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\boldsymbol{\alpha}, k_2\boldsymbol{\alpha}, k_3\boldsymbol{\alpha}),$$

k_1, k_2, k_3 为任意常数.

或记为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1 \\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}.$$

☞ 上述题型与平时所练习的求解矩阵方程 $AX = B$ 不同: 这里的矩阵方程 A 不是方阵.

☞ 上述题型与平时所练习的求解矩阵方程 $AX = B$ 不同: 这里的矩阵方程 A 不是方阵.

求解方法: 转化为多个线性方程组的求解.

☞ 上述题型与平时所练习的求解矩阵方程 $AX = B$ 不同: 这里的矩阵方程 A 不是方阵.

求解方法: 转化为多个线性方程组的求解.

这类题目的要点: 明白矩阵方程和一般的线性方程组之间的关系.

例 3.2

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(1) 问 a,b,c 为何值时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$?

(2) 求矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 的全部解.

例 3.2

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(1) 问 a, b, c 为何值时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$?

(2) 求矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的全部解.

解: (1) 由

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & a & b & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1 \end{array}\right)$$

可知当 $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ **时**,

$$\xrightarrow{r_2 \div 2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1 \end{array}\right)$$

可知当 $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$.

(2) 由 (1) 知当 $a=1, b=1, c=1$ 时, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

(2) 由 (1) 知当 $a=1, b=1, c=1$ 时, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(2) 由 (1) 知当 $a=1, b=1, c=1$ 时, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2}$$

(2) 由 (1) 知当 $a=1, b=1, c=1$ 时, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccr} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得

$$\text{由}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\text{得}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_1 \\ -k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} (k_1\text{ 为任意常数}).$$

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_2 \\ 1-k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$ (k_2 为任意常数).

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_3 \\ -1-k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$ (k_3 为任意常数).

故所求矩阵方程的通解为:

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 & 1-k_3 \\ -k_1 & 1-k_2 & -1-k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数. $\square$

矩阵及向量组的秩

1. 求矩阵的秩及最高阶非零子式;

矩阵及向量组的秩

1. 求矩阵的秩及最高阶非零子式;
2. 矩阵秩的性质;

矩阵及向量组的秩

1. 求矩阵的秩及最高阶非零子式;
2. 矩阵秩的性质;
3. 判定向量组的线性相关性;

矩阵及向量组的秩

1. 求矩阵的秩及最高阶非零子式;
2. 矩阵秩的性质;
3. 判定向量组的线性相关性;
4. 求向量组的秩, 极大无关组及线性表示式.

例 4.1

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

求向量组的秩、极大无关组、线性表示式

例 4.1

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})$,

求向量组的秩、极大无关组、线性表示式

例 4.1

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -2, 3, -1, 2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 2, -2, -3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (5, 0, 7, -5, -4)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (3, -1, 5, -3, -1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换:

求向量组的秩、极大无关组、线性表示式

例 4.1

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1,r_5-2r_1]{r_2+2r_1,r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2.

取 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是其一个极大无关组,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2.

取 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是其一个极大无关组, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2.

取 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是其一个极大无关组, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \qquad \boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2.$$

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量,

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量, 总是将它们作为列向量构造矩阵 (Why?),

说明

1. 不管所给向量是**行向量**还是**列向量**, 总是将它们作为列向量构造矩阵 (Why?), 再对矩阵进行初等行变换.

说明

1. 不管所给向量是**行向量**还是**列向量**, 总是将它们作为列向量构造矩阵 (Why?), 再对矩阵进行初等行变换.
2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组,

说明

1. 不管所给向量是**行向量**还是**列向量**, 总是将它们作为列向量构造矩阵 (Why?), 再对矩阵进行初等行变换.
2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组, 那么只需将矩阵化为行阶梯形矩阵即可以得到结果:

说明

1. 不管所给向量是**行向量**还是**列向量**, 总是将它们作为列向量构造矩阵 (Why?), 再对矩阵进行初等行变换.
2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组, 那么只需将矩阵化为行阶梯形矩阵即可以得到结果: 非零行的行数即为所求的秩,

说明

1. 不管所给向量是**行向量**还是**列向量**, 总是将它们作为列向量构造矩阵 (Why?), 再对矩阵进行初等行变换.
2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组, 那么只需将矩阵化为行阶梯形矩阵即可以得到结果: 非零行的行数即为所求的秩, 每个非零行的非零首元所在列即为极大无关组.

求抽象的向量组的秩

例 4.2

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$, 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

例 4.2

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$, 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

解: 由已知可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$$

例 4.2

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$, 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

解: 由已知可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$$

求抽象的向量组的秩

例 4.2

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$, 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

解: 由已知可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{因为}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0.$$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0$. 所以

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩相等, 为 r.

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_1, \\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\alpha}_m &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_m.
\end{aligned}$$

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1&=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_1,\\
\boldsymbol{\alpha}_2&=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\boldsymbol{\alpha}_m&=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_m.
\end{aligned}$$

即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价,

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_1, \\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot \\
\boldsymbol{\alpha}_m &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_m.
\end{aligned}$$

即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 等价, 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r.

例 5.1 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

例 5.1 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

分析: $\boldsymbol{A}$ **可对角化** $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2$ **对应** 2 **个线性无关的特征向量** $\Longleftrightarrow$ **方程** $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ **有两个线性无关的解** $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=1$.

例 5.1 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & a & 2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

分析: **$\boldsymbol{A}$ 可对角化** $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2$ **对应 2 个线性无关的特征向量** $\Longleftrightarrow$ **方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解** $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=1$.

解: 特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$$

例 5.1 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

分析: $\boldsymbol{A}$ **可对角化** $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2$ **对应** 2 **个线性无关的特征向量** $\Longleftrightarrow$ **方程** $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **有两个线性无关的解** $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=1$.

解: 特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&5&5\\0&4-\lambda&3\\0&a&2-\lambda\end{vmatrix}$$

例 5.1 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

分析: $\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2$ 对应 2 个线性无关的特征向量 $\Longleftrightarrow$ 方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=1$.

解: 特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&5&5\\0&4-\lambda&3\\0&a&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

1. 如果 $\lambda = 1$ 为特征方程的二重根,

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=(1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

1. 如果 $\lambda=1$ 为特征方程的二重根, 则 $\lambda=1$ 为

$$\lambda^2-6\lambda+8-3a=0$$

的单根.

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

1. 如果 $\lambda = 1$ 为特征方程的二重根, 则 $\lambda = 1$ 为

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a = 0$$

的单根. 由

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

1. 如果 $\lambda=1$ 为特征方程的二重根, 则 $\lambda=1$ 为

$$\lambda^2-6\lambda+8-3a=0$$

的单根. 由

$$1-6+8-3a=0 \Rightarrow a=1.$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a).$$

1. 如果 $\lambda = 1$ 为特征方程的二重根, 则 $\lambda = 1$ 为

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a = 0$$

的单根. 由

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

此时

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

1. 如果 $\lambda = 1$ 为特征方程的二重根, 则 $\lambda = 1$ 为

$$\lambda^2-6\lambda+8-3a=0$$

的单根. 由

$$1-6+8-3a=0 \Rightarrow a=1.$$

此时

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

1. 如果 $\lambda=1$ 为特征方程的二重根, 则 $\lambda=1$ 为

$$\lambda^2-6\lambda+8-3a=0$$

的单根. 由

$$1-6+8-3a=0 \Rightarrow a=1.$$

此时

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5) = (1-\lambda)^2(5-\lambda),$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

1. 如果 $\lambda=1$ 为特征方程的二重根, 则 $\lambda=1$ 为

$$\lambda^2-6\lambda+8-3a=0$$

的单根. 由

$$1-6+8-3a=0 \Rightarrow a=1.$$

此时

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5) = (1-\lambda)^2(5-\lambda),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8-3a).$$

1. 如果 $\lambda = 1$ 为特征方程的二重根, 则 $\lambda = 1$ 为

$$\lambda^2-6\lambda+8-3a=0$$

的单根. 由

$$1-6+8-3a=0 \Rightarrow a=1.$$

此时

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5) = (1-\lambda)^2(5-\lambda),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=5$.

因为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$$

因为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$,

因为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量有

因为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量有 2 个,

因为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&5&5\\0&3&3\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量有 2 个, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

2. 如果 $\lambda = 1$ 不是特征方程的二重根,

2. 如果 $\lambda=1$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 应为一完全平方,

2. 如果 $\lambda = 1$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a$ 应为一完全平方, 从而

$$8 - 3a = 9$$

2. 如果 $\lambda=1$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 应为一完全平方, 从而

$$8-3a=9 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}.$$

2. 如果 $\lambda = 1$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a$ 应为一完全平方, 从而

$$8 - 3a = 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

此时

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$$

2. 如果 $\lambda = 1$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a$ 应为一完全平方, 从而

$$8 - 3a = 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

此时

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (1 - \lambda)(\lambda - 3)^2,$$

2. 如果 $\lambda = 1$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a$ 应为一完全平方, 从而

$$8 - 3a = 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

此时

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (1 - \lambda)(\lambda - 3)^2,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为

2. 如果 $\lambda = 1$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a$ 应为一完全平方, 从而

$$8 - 3a = 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

此时

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (1-\lambda)(\lambda - 3)^2,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$.

因为

$$\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}$$

因为

$$\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$,

因为

$$
\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的线性无关的特征向量只有 1 个,

因为

$$
\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的线性无关的特征向量只有 1 个, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

因为

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的线性无关的特征向量只有 1 个, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

例 5.2

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

例 5.2

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

例 5.2

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

例 5.2

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n,\ \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$

例 5.2

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 必可以对角化,

例 5.2

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 必可以对角化, 故 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\mathrm{diag}(n, 0, \cdots, 0)$.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量,

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda-n \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=n, \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda=0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1,

$$
|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.
$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成. 即 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成. 即 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

故 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\mathrm{diag}(n, 0, \cdots, 0)$,

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\left|\begin{array}{cccc}\lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda-n\end{array}\right|=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=n, \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda=0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成. 即 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

故 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\operatorname{diag}(n,0,\cdots,0)$, 得证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$. □

例 5.3 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. 求 a, b 的值;
2. 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

例 5.3 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- (I) 求 a, b 的值;
- (II) 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解: (I) 相似的矩阵有相同的特征值,

例 5.3 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. 求 a, b 的值;
2. 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解: (I) 相似的矩阵有相同的特征值, 又由公式 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\left|\boldsymbol{A}\right|$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$,

例 5.3 (基本题)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解: (I) 相似的矩阵有相同的特征值, 又由公式 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\left|\boldsymbol{A}\right|$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$, 知

$$\begin{cases} 0+3+a=1+b+1, \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \ \ 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

得

$$
\begin{cases}
3+a=b+2, \\
2a-3=b.
\end{cases}
$$

故 $a=4$, $b=5$.

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4$, $b=5$.

(II) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，为计算方便，可以先求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4$, $b=5$.

(II) **求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，为计算方便，可以先求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.**

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

得

$$\begin{cases} 3 + a = b + 2, \\ 2a - 3 = b. \end{cases}$$

故 $a = 4$, $b = 5$.

(II) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，为计算方便，可以先求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 5 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5).$$

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4$, $b=5$.

(II) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，为计算方便，可以先求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (3, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(3,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=5$ 时, 由

$$5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

所以

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

例 5.4

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

1. 当 $k = 1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?
2. 当 $k = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

例 5.4

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

1. 当 $k = 1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?
2. 当 $k = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k = 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,

例 5.4

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

1. 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?
2. 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定存在正交矩阵 Q,

例 5.4

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

1. 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?
2. 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵.

但满足条件的正交矩阵, 不唯一.

(2) 当 $k = 0$ 时,

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$$

(2) 当 $k = 0$ 时,

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

(2) 当 $k = 0$ 时,

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1),$$

(2) 当 $k=0$ 时,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-1),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,

(2) 当 $k=0$ 时,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$

(2) 当 $k=0$ 时,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(2) 当 $k=0$ 时,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-1),$$

$\boldsymbol{A}$ **的特征值为** $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-1.$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$,

(2) 当 $k=0$ 时,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$, 所以

对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量只有一个,

(2) 当 $k=0$ 时,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$, 所以对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量只有一个, 故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似.

求实对称矩阵的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$

例 5.5

已知 $1,1,-1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量.

1. 能否求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量? 若能, 试求出对应的特征向量; 若不能, 则说明理由.
2. 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

求实对称矩阵的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$

例 5.5

已知 $1, 1, -1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

1. 能否求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量? 若能, 试求出对应的特征向量; 若不能, 则说明理由.
2. 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

解: (1) 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

求实对称矩阵的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$

例 5.5

已知 $1, 1, -1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

1. 能否求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量? 若能, 试求出对应的特征向量; 若不能, 则说明理由.
2. 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

解: (1) 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的. 设对应于特征值 λ_3 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3$,

例 5.5

已知 $1, 1, -1$ 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

1. 能否求得 A 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量? 若能, 试求出对应的特征向量; 若不能, 则说明理由.
2. 能否由此求得实对称矩阵 A? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

解: (1) 实对称矩阵 A 对应于不同特征值的特征向量是正交的. 设对应于特征值 λ_3 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 平行于 $\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2$.

由

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

由

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},$$

故取

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

由

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},$$

故取

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_3 = (k, -k, 0)^{\mathrm{T}}$ $(k \neq 0)$.

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

$$(2)\ 令\ \boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则有

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则有

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$, 于是

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则有

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(1,1,-1)$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(1,1,-1)\boldsymbol{P}^{-1}$,

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之; 若不能, 则说明理由.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 则有

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(1,1,-1)$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(1,1,-1)\boldsymbol{P}^{-1}$, 因为

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\1&2&-1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&1&0\\0&-1&-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \div (-1)]{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)
$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow{r_1-2r_2}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0
\end{array}\right)
$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

例 6.1

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

例 6.1

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$

例 6.1

设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(0,1,2)$ 相似.

例 6.1

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$ 相似.

相似的矩阵有相同的特征多项式,

例 6.1

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$ 相似. 相似的矩阵有相同的特征多项式, 从而

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ a & 1-\lambda & b \\ 1 & b & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & & \\ & 1-\lambda & \\ & & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a - b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a - b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

比较系数可得

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a-b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

比较系数可得

$$\begin{cases} 2 - a^2 - b^2 = 2, \\ (a-b)^2 = 0. \end{cases}$$

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a-b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

比较系数可得

$$\begin{cases} 2 - a^2 - b^2 = 2, \\ (a-b)^2 = 0. \end{cases}$$

故 $a = b = 0$. $\square$

例 6.2

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,

记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

1. 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.
2. 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

例 6.2

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,

记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

1. 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.
2. 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解: (I) 注意到

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

记 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$$

记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 则

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

记 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

同理

$$(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 则

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

同理

$$(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

从而

$$f(x_1,x_2,x_3)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},$$

记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 则

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

同理

$$(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

从而

$$f(x_1,x_2,x_3)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},$$

又 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$,

记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 则

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

同理

$$(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

从而

$$f(x_1,x_2,x_3)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},$$

又 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$, 得证二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(II) 设 γ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(II) 设 γ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 γ 的方向, 则 γ 是唯一确定的.)

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 γ 的方向, 则 γ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$,

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(II) 设 γ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 γ 的方向, 则 γ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 γ 的方向, 则 γ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是正交的单位向量,

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(II) 设 γ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 γ 的方向, 则 γ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \gamma^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是正交的单位向量, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1, \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1.$$

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是正交的单位向量, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1, \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1.$$

同样地, $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间也有类似的表达式, 比如

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma} = 0.$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \\
&= \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

得证 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}$$

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量.

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 1 + 1 = 2$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 1 + 1 = 2 < 3,$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 1 + 1 = 2 < 3,$$

故 $|\boldsymbol{A}| = 0$,

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 1 + 1 = 2 < 3,$$

故 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1+1=2<3,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=0$, 即 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

从而 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 2, 1, 0.

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 1 + 1 = 2 < 3,$$

故 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

从而 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 2, 1, 0. 证毕. $\square$

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$,

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

另外, **见教材** P.153 **习题** 63: **设** $\boldsymbol{A}$ **是** n **阶矩阵**, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, **证明**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

另外, 见教材 P.153 **习题** 63: **设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, 证明:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

(2) 由 $\left|\boldsymbol{A}\right| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

另外, **见教材** P.153 **习题** 63: **设** $\boldsymbol{A}$ **是** n **阶矩阵**, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, **证明**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

(2) 由 $\left|\boldsymbol{A}\right| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 若 $\left|\boldsymbol{A}\right| = 0$, 则 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

例 6.3 (基本题)

设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

1. 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体形式;
2. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;
3. 求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;
4. 在 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

例 6.3 (基本题)

设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

1. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的具体形式;
2. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;
3. 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;
4. 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是二次型的矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 即有

例 6.3 (基本题)

设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

1. 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体形式;
2. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;
3. 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;
4. 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是二次型的矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 即有

$$\begin{cases} -a=a-b, \\ 2b-1=c-2, \\ 2-c=-3. \end{cases}$$

例 6.3 (基本题)

设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

1. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的具体形式;
2. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;
3. 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;
4. 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是二次型的矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 即有

$$\begin{cases} -a=a-b, \\ 2b-1=c-2, \\ 2-c=-3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=2, \\ c=5. \end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 故二次型的具体形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3.$$

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，故二次型的具体形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3.$$

(2)

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 6-\lambda & -3 \\ 3 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -6 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)[18-9\lambda+\lambda^2-18]=(4-\lambda)\lambda(\lambda-9).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9.$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_1]{r_3\div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 9.$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1 = (-1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$,

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=9.$

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_1]{r_3\div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1=0$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1\ (k_1\neq 0)$.

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_2 = 4$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{p}_2$ $(k_2 \neq 0)$.

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 4r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_3 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3 = 9$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{p}_3$ $(k_3 \neq 0)$.

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化,

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

则有正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型化为标准形

$$f = 4y_2^2 + 9y_3^2.$$

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变,

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值,

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ 下的最值,

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ 下的最值, 因为

$$0 \leqslant 4y_2^2 + 9y_3^2 \leqslant 9,$$

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ 下的最值, 因为

$$0 \leqslant 4y_2^2 + 9y_3^2 \leqslant 9,$$

故所求的最大值为 9,

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ 下的最值, 因为

$$0 \leqslant 4y_2^2 + 9y_3^2 \leqslant 9,$$

故所求的最大值为 9, 最小值为 0. $\square$

例 7.1 (经典例题 ★★★★★)

n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \left[x + (n-1)a\right](x-a)^{n-1}.$$

例 7.1 (经典例题 ★★★★★)

n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \left[x + (n-1)a\right](x-a)^{n-1}.$$

及其衍生:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{x_i - a}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a).$$

其中 $x_i \neq a$.

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\,.$$

其中 $x_i \neq a_i$.

经常出现的题型:

例 7.2 (2016 年 1 月, 10 分)

已知方阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}$ 的值.

经常出现的题型:

例 7.2 (2016 年 1 月, 10 分)

已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14}$ 的值.

解: $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$

经常出现的题型:

例 7.2 (2016 年 1 月, 10 分)

已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14}$ 的值.

解: $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$,

经常出现的题型:

例 7.2 (2016 年 1 月, 10 分)

已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14}$ 的值.

解: $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, $A_{14} = (-1)^{1+4}M_{14}$

经常出现的题型:

例 7.2 (2016 年 1 月, 10 分)

已知方阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}$ 的值.

解: $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13}$, $A_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=-M_{14}$.

经常出现的题型:

例 7.2 (2016 年 1 月, 10 分)

已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14}$ 的值.

解: $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, $A_{14} = (-1)^{1+4}M_{14} = -M_{14}$. 故

$$A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14} = A_{11} - A_{12} + 2A_{13} + 2A_{14}$$

经常出现的题型:

例 7.2 (2016 年 1 月, 10 分)

已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14}$ 的值.

解: $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, $A_{14} = (-1)^{1+4}M_{14} = -M_{14}$. 故

$$A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14} = A_{11} - A_{12} + 2A_{13} + 2A_{14}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

经常出现的题型:

例 7.2 (2016 年 1 月, 10 分)

已知方阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}$ 的值.

解: $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13}$, $A_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=-M_{14}$. 故

$$\begin{aligned} A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14} &= A_{11}-A_{12}+2A_{13}+2A_{14} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

还有一种求行列式, 使用公式

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$