矩阵的表示

$n \times n$的矩阵B将n元向量映射成n元向量

$$B: x \mapsto Bx$$

线性映射：

$B(kx) = kBx,\ B(x_1 + x_2) = Bx_1 + Bx_2$

给定线性映射f的形式，如何确定其矩阵形式?

只需考虑线性映射f**在R^n的基**上的作用

设$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$为$R^n$的一组基，且

$$\boldsymbol{f(\alpha_i) = \sum_j B_{ji}\alpha_j\ \forall i = 1, \ldots, n}$$

则f的矩阵表示为ABA^{-1}（为什么？）

问题：给定f，如何选取$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$使得矩阵表示最简?

第5章 特征值和特征向量 矩阵的对角化

5.1 矩阵的特征值和特征向量 相似矩阵

5.1.1 特征值和特征向量的基本概念

定义5.1 设A是复数域C上的n阶矩阵，如果存在数$\lambda \in \mathbf{C}$和非零n维向量$\boldsymbol{x}$，使得

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称λ为A的特征值，$\boldsymbol{x}$为A的属（对应)于特征值λ的特征向量。

注意：特征向量 $\boldsymbol{x}$ 是非零向量，是齐次线性方程组

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

的非零 解。 λ应满足

$$|\lambda I - A| = 0$$

即λ是多项式 $\det(\lambda I - A)$ 的零点。

定义5.1 设n阶矩阵$A=(a_{ij})$,则

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 A的 特征多项式。

$(\lambda I-A)$ 称为A的 特征矩阵。$|\lambda I-A|=0$ 称为A的特征方程。

n 阶矩阵A的特征多项式在复数域上的 n 个根都是矩阵A的特征值，其k重根叫做 k 重特征值（代数重数）。

例 1 n 阶对角矩阵A，上(下)三角形矩阵B的特征值都是它们的n个主对角元 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$。

因为它们的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=|\lambda I-B|=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

例 2 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & -4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ 的特征值及特征向量。

解：A的特征方程为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda+4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 0\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ 2 & -2 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)^2=0$$

A的特征值为：$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-2$(二重特征值)。

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ -2 & 4 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

V_{λ_1}

对于$\lambda_1=0$，求解$(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

得基础解系：$\boldsymbol{x}_1=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$。

$k\,\boldsymbol{x}_1(k\neq 0$为任意常数)是$A$的属于$\lambda_1$的全部特征向量。

对于$\lambda_2=-2$，求解$(\lambda_2 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

得基础解系：$\boldsymbol{x}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$。

$k_1\boldsymbol{x}_2+k_2\boldsymbol{x}_3\quad(k_1, k_2$是不全为零的任意常数)

是A关于λ_2的全部的特征向量。

5.1.2 特征值和特征向量的性质

定理5.1 若$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$是$A$属于$\lambda_0$的两个的特征向量，则$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$也是$A$属于$\lambda_0$的特征向量(其中 k_1, k_2是任意常数，但 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$)。

证： $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$是齐次线性方程组$(\lambda \boldsymbol{I}- A)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，所以，

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$$

也是$(\lambda \boldsymbol{I}- A)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，故当 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$ 时，也是A的属于λ_0的特征向量。

$(\lambda \boldsymbol{I}- A)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的**解空间**称为$A$的关于$\lambda$ **的特征子空间**，记作V_λ。

$$\dim V_\lambda = n - \mathrm{r}\,(\lambda \boldsymbol{I}- A)$$

如例 2 中， $V_{\lambda_1} = \{\, k\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=[-1, -1, 1]^{\mathrm{T}}, k \in \mathbf{R}\}=L([-1, -1, 1]^{\mathrm{T}})$;

$V_{\lambda_2} = \{k_1\boldsymbol{x}_2+k_2\boldsymbol{x}_3 \mid \boldsymbol{x}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}}, k_1,k_2 \in \mathbf{R}\}$
$=L([1, 1, 0]^{\mathrm{T}}, [1, 0, 1]^{\mathrm{T}})$

定理5.2 若n 阶矩阵$A=(a_{ij})$的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$　　(2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$

称A的主对角元的和 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 为A的迹，记作 $\mathrm{tr}(A)$。

***证**：设

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & 0-a_{12} & \cdots & 0-a_{1n}\\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & 0-a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0-a_{n1} & 0-a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix} \quad (*)$$

$$=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_k\lambda^{n-k}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

(*)式可表示为 2^n 个行列式之和，其中展开后含λ^{n-1}项的行列式有下面n个：

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a_{n2} & \cdots & \lambda \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

它们的和等于

$$-(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}=-\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\lambda^{n-1}, \text{即 } c_1=-\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)$$

(*)式中不含λ的常数项为

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n|A|, \quad \text{即 } c_n=(-1)^n|A|$$

所以，

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\mathbf{A}|$$

由根与系数的关系及常数项相等，得 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 和 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$

由定理5.2 **得**：矩阵A可逆的充要条件是 A的任意一个特征值不等于零；或 A为奇异阵的充要条件是A至少有一个特征值等于零。

A的一个特征值可对应很多特征向量；但 A的一个特征向量不能属于不同的特征值。

性质1 若λ是A的特征值, x **是**A的属于λ 的特征向量。则

(1) $k\lambda$ 是kA的特征值（k为任意常数）；

(2) λ^m是A^m的特征值;

(3)若A可逆，则λ^{-1}为A^{-1}的一个特征值，而且x 仍然是矩阵kA, A^m和A^{-1}的分别对应于特征值 $k\lambda, \lambda^m$ 和 λ^{-1}的特征向量。

证 (2)(3) 由$A x= \lambda x$ 得

$A^2 x= A(\lambda x)= \lambda (A x)= \lambda (\lambda x)= \lambda^2 x$，继续得$A^m x= \lambda^m x$。

$A^{-1}(A x)= A^{-1}(\lambda x)= \lambda (A^{-1} x)$, 所以， $A^{-1} x= \lambda^{-1} x$。

性质2　矩阵A和A^{T}的特征值相同。

证：　$\det(\lambda I- A) =\det (\lambda I-A)^{\mathrm{T}}$

$= \det ((\lambda I)^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}})= \det (\lambda I-A^{\mathrm{T}})$

*__定理5.3__　**设**A是n阶矩阵，若

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1\ (j=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1\ (i=1,2,\cdots,n)$$

有一个成立，则A的所有特征值$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的模（对实特征值是指绝对值）$|\lambda_i|<1$。

证明：对任意的i=1,2,…,n，设λ_i为A的特征值，x≠0为对应的特征向量。

记
$$|x_k| = \max\{|x_1|, |x_2| \cdots, |x_n|\},$$

我们有
$$|x_k| > 0 且 \frac{|x_j|}{|x_k|} \le 1 (j = 1, 2, \cdots, n).$$

下证$|\lambda_i|<1$。为此，考虑$A x=\lambda_i x$的第k个方程

$$\lambda_i x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j .$$

我们可得：

$$|\lambda_i| = \frac{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j\right|}{|x_k|} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|}{|x_k|} |a_{kj}| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| < 1。$$

例3 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

(1) 求A的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角阵。

解 (1)

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda+2 & -2\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ -2 & \lambda & -2\\ 1 & \lambda & \lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ -2 & \lambda & -2\\ 3 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2(\lambda+2)=0$$

A的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=0$ (二重特征值), $\lambda_3=-2$。

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$，求解$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

得基础解系:

$\boldsymbol{x}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$,

则$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2(\forall k_1, k_2$不全为0)是$A$的属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的全部特征向量。

对于$\lambda_3=-2$，求解$(\lambda_3 I-A)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，　即

$$\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

得基础解系：　$\boldsymbol{x}_3=[-1,-2,1]^{\mathrm{T}}$

A的属于λ_3的全部特征向量为 $k_3\,\boldsymbol{x}_3$ ($k_3\neq0$为任意常数)。

解：(2) 将 $A\,\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i\,(i=1,2,3)$ 排成矩阵

$$\mathbf{A}[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3]=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

取

$$\mathbf{P}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3]=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \Lambda=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

则 $AP=P\Lambda$, 且 $|P|\neq0$，所以，

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

为对角矩阵。

5.1.3 相似矩阵及其性质

定义5.3 对于矩阵A, B，若存在可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=B$，则称A相似于B，记作$A\sim B$ 。

矩阵的相似关系是一种等价关系，具有以下性质：

(1) 自反性 $A\sim A$；

(2) 对称性 若$A\sim B$，则$B\sim A$；

(3) 传递性 若$A_1\sim A_2$, $A_2\sim A_3$，则$A_1\sim A_3$。

相似矩阵还有以下性质：

(1) $C^{-1}(kA+t\,B)\,C=k\,C^{-1}AC+t\,C^{-1}B\,C\ (k,\,t\in F)$;

(2) $C^{-1}(AB)C=(C^{-1}AC)\,(C^{-1}B\,C)$;

(3) 若$A\sim B$，则$A^m\sim B^m$（m为正整数）；

(4) 若$A\sim B$，则$f(A)\sim f(B)$，

其中 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$是个多项式。

$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I\ \ (a_i\in F,\ i=0,1,\cdots,m)$，

$f(B)=a_mB^m+a_{m-1}B^{m-1}+\cdots+a_1B+a_0I$。

定理5.4 若矩阵A与B相似，则它们的特征多项式相等，

即 $$|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$$

证 $A\sim B$，即存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=B$$

即 $$|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP|$$
$$= |P^{-1}(\lambda I - A)P|$$
$$= |P^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|P|$$
$$= |\lambda I - A|$$

思考：B的特征值和特征向量是什么？

注意：此定理的逆命题不成立。例如：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$|\lambda I - A| = |\lambda I - B| = (\lambda - 2)^2$，但 A 与 B 不相似，因为对任何可逆矩阵P， $P^{-1}A P = P^{-1}(2I) P = 2I = A \neq B$ 。

5.2 矩阵可对角化的条件

定理5.5 n 阶矩阵A与对角阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。

证 **必要性** 设$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\Lambda$, 即

$$AP=P\Lambda \tag{1}$$

将矩阵P 按列分块为 $P=[x_1, x_2,\cdots, x_n]$, (1)式即为

$$\mathbf{A}[x_1,x_2,\cdots,x_n]=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{2}$$

得 $$A x_j=\lambda_j x_j \quad (x_j\neq 0, j=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

即$x_1, x_2,\cdots, x_n$是A的n个线性无关的特征向量(因为P可逆，所以$x_1, x_2,\cdots, x_n$线性无关)。必要性得证。

充分性 若A有n个线性无关的特征向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，即(3)式成立，由(3)式可得(2)式，从而(1)式成立。充分性得证。

A与对角阵Λ相似，Λ的主对角元是A的特征值，若不计其排列顺序，则Λ唯一，称Λ为A的相似标准形。

与对角阵相似的矩阵, 称为可对角化矩阵。

定理5.6 矩阵A属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证：设A的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其对应的特征向量分别为$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$。

对m作归纳法。

当$m=1$时，$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{0}$，线性无关；假设$m=k$时，命题成立；对$m=k+1$，设

$$a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+a_k\boldsymbol{x}_k+a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0} \qquad (1)$$

则 $$\boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+a_k\boldsymbol{x}_k+a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1})=\boldsymbol{0}$$

即 $$a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k+a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0} \qquad (2)$$

$\lambda_{k+1}(1)-(2)$ 得

$$a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1+a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2+\ldots+a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$$

由于$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$线性无关，$a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)=0$，$i=1,2,\ldots,k$，

又因为$\lambda_{k+1}\neq\lambda_i$，所以，$a_i=0$，$i=1,2,\ldots,k$。代入(1)，得$a_{k+1}=0$。

所以，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{k+1}$线性无关。由归纳法得证。

推论：n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个不同的特征值，则$\boldsymbol{A}$与对角阵相似。

注意：这里的条件是充分的，但不是必要的。

*定理5.7　设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是$n$ 阶矩阵A的m个互不相同的特征值，属于λ_i 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}} \qquad (i=1.2,\cdots,m),$$

则由$r_1+r_2+\cdots+r_m$个向量组成的向量组

$$\left\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r_i}} \mid i=1,2,\cdots,m\right\} \tag{1}$$

是线性无关的。

证：设 $\sum_{i=1}^{m}\left(k_{i_1}\boldsymbol{x}_{i_1}+k_{i_2}\boldsymbol{x}_{i_2}+\cdots+k_{i_{r_i}}\boldsymbol{x}_{i_{r_i}}\right)=\mathbf{0}$, 记

$$\boldsymbol{y}_i=k_{i_1}\boldsymbol{x}_{i_1}+k_{i_2}\boldsymbol{x}_{i_2}+\cdots+k_{i_{r_i}}\boldsymbol{x}_{i_{r_i}} \tag{2}$$

(1)式化为

$$\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2+\cdots+\boldsymbol{y}_m=\mathbf{0} \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{y}_i$是A属于λ_i的特征向量或为零向量。但$\boldsymbol{y}_i$不能是A属于λ_i 的特征向量。否则，

由于不同特征值对应的的特征向量是线性无关的， 即有

$y_1+\cdots+y_i\neq\mathbf{0}$ $(i=1,\cdots,m)$， （3）式不能成立。所以，

$$y_1=\cdots=y_m=\mathbf{0} \tag{4}$$

再由 $\boldsymbol{x}_{i_1},\boldsymbol{x}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ 线性无关, 和(4), (2) 得

$$k_{i_1}=k_{i_2}=\cdots=k_{i_{r_i}}=0$$

即 $\left\{x_{\mathbf{i}_1},x_{\mathbf{i}_2},\cdots,x_{\mathbf{i}_{\mathbf{r}_\mathbf{i}}}\,\middle|\,i=1,2,\cdots,m\right\}$ 是线性无关的。

定理5. 8 设λ_0是n阶矩阵A的 k 重特征值，属于λ_0 的线性无关的特征向量的最大个数为 l （几何重数），则 $k\geq l$。

证：由 $\quad Ax_i=\lambda_0 x_i,\ x_i\neq 0,\quad i=1,\cdots,l \qquad (1)$

将 $\{x_1, x_2, \cdots, x_l\}$ 扩充为 C^n 的基 $\{x_1, \cdots, x_l, x_{l+1}, \cdots, x_n\}$，

$x_{l+1},\cdots,x_n$ 一般不是特征向量，但 $Ax_j\in C^n$，可用 C^n 的基表示：

$$Ax_j = b_{1j}x_1+\cdots+b_{lj}x_l+b_{l+1,j}x_{l+1}+\cdots+b_{nj}x_n,\quad j=l+1,\ldots,n \qquad (2)$$

将(1)、(2)式中的 n 个等式写成一个矩阵等式：

$$A[x_1,\cdots x_l, x_{l+1},\cdots,x_n]$$

$$=[x_1,\cdots x_l, x_{l+1},\cdots,x_n]\begin{bmatrix} \lambda_0 & \cdots & 0 & b_{1,l+1} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_0 & b_{l,l+1} & \cdots & b_{ln} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{l+1,l+1} & \cdots & b_{l+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,l+1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

记 $P=[x_1,\cdots, x_l, x_{l+1},\cdots, x_n]$，(3)式为：

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_0 I_1 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_0 I_l & B_1\\ 0 & B_2\end{bmatrix}$$

因为相似矩阵的特征多项式相同。

$$|\lambda I-A|=|\lambda I-P^{-1}AP|=\begin{vmatrix}(\lambda-\lambda_0)I_l & -B_1\\ 0 & \lambda I_{n-l}-B_2\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_0)^l|\lambda I_{n-l}-B_2|$$

由于 $|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_0)^l|\lambda I_{n-l}-B_2|$ 及 $|\lambda I_{n-l}-B_2|$

是λ的 $n-l$ 次多项式,所以 , λ_0 是A的大于或等于l 重的特征值，即 $k\geq l$ 。

$(\lambda_0 I-A)x=0$ 的基础解系含 $l=n-\mathrm{r}(\lambda_0 I-A)$个解向量，

即

$$\dim V_{\lambda_0}=l$$

所以 , λ_0 的特征子空间的维数小于或等于特征值的重数，
即几何重数小于等于代数重数

$$\dim V_{\lambda_0}\leq k$$

***定理5.9** n 阶矩阵A与对角阵相似的充要条件是: A的每个特征值对应的特征向量线性无关的最大个数等于该特征值的重数（每个特征子空间的维数等于该特征值的重数）。

证明：设

$$|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}|=\sum_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_i)^{r_i},$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$互异且$r_1+r_2+\cdots+r_m=n$。

先证明充分性：由于对应于λ_i的特征向量有r_i个线性无关，又m个特征值互异，由定理5.7， A有n个线性无关的特征向量，依据定理5.5， A与对角矩阵相似。

再证明必要性。用反证法，设有一个特征值λ_i对应的线性无关的特征向量的最大个数$l_i<\lambda_i$的重数r_i，则由定理5.8可知，A的线性无关的特征向量个数小于n，故A不能与对角矩阵相似。

作业：第247页至第248页

1(1，6)、2、3、4、8、9、11、14

例1 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

问A是否与对角阵相似？若与对角阵相似，求对角矩阵Λ及可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，再求A^k (k为正整数)。

解：
$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-2)^3=0$$

A的特征值为

$$\lambda_1 = -2\ (\text{单重根}),\ \lambda_2 = 2\ (\text{三重根})$$

对于$\lambda_1 = -2$，求解$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。

即
$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

属于λ_1的特征向量为$\{ k\boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_1 = [1,1,1,1]^{\mathrm{T}}, k \neq 0 \}$。

对于$\lambda_2 = 2$，求解$(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$,

得基础解系 $\boldsymbol{x}_{21} = [1,-1,0,0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{x}_{22} = [1, 0, -1, 0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{x}_{23} = [1,0,0\ -1]^{\mathrm{T}}$

A有4个线性无关的特征向量，所以，A与对角阵相似。

取 $\mathbf{P}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_{21},\boldsymbol{x}_{22},\boldsymbol{x}_{23}]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&2\end{bmatrix}$

则 $$P^{-1}AP=\Lambda$$

由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$，

$A^k=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^k P^{-1}$

所以

$$A^k=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^k&&&\\&2^k&&\\&&2^k&\\&&&2^k\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{cases}2^{k+1}\boldsymbol{I}_4, & \text{当}k\text{为偶数，}\\ 2^{k-1}\boldsymbol{A}, & \text{当}k\text{为奇数。}\end{cases}$$

例2 n 阶矩阵A 为主对角元全为2的上三角矩阵，且存在$a_{ij}\neq 0(i<j)$，问A是否与对角阵相似？

解： 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^n=0$$

$\lambda=2$ 是A的n重特征值。因为

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\geq 1$$

$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含$n-\mathrm{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\leq n-1$个解向量，

即A的线性无关的特征向量少于n个， A不与对角阵相似。

*例3 矩阵如例1，$f(x)=x^3-2x+5$, 求可逆阵P和对角阵Λ,使得 $P^{-1}f(A)P=\Lambda$, 其中 $f(A)=A^3-2A+5I$。

解： (见教材P231 "(4) 若$A\sim B$，则$f(A)\sim f(B)$")

由 $P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(-2, 2, 2, 2)$, 得

$$A=P\Lambda P^{-1}$$

于是 $f(A)=A^3-2A+5I$

$$=(P\Lambda P^{-1})^3-2(P\Lambda P^{-1})+5I$$

$$=P(\Lambda^3-2\Lambda+5I)P^{-1}$$

$$=Pf(\Lambda)P^{-1}$$

所以，$P^{-1}f(A)P=f(\Lambda)$

$$=\mathrm{diag}(f(-2), f(2), f(2), f(2))$$

$$=\mathrm{diag}(1, 9, 9, 9)$$

例4 设A是n阶幂等矩阵($A^2=A$)，$r(A)=r$ $(0<r\le n)$。证明: A相似于$\Lambda=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其中1的个数等于$r(A)$。

证：设 $A\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i$，从而$A^2\boldsymbol{x}_i=\lambda_i^2\boldsymbol{x}_i$，又$A^2=A$，

所以$\lambda_i^2=\lambda_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$。于是，$\lambda_i=0$ 或 1，由

$$A^2=A,\quad A-A^2=A(I-A)=0$$

得 $$r(A)+r(I-A)\le n \tag{1}$$

又 $$r(A)+r(I-A)\ge r(A+(I-A))=r(I)=n \tag{2}$$

由(1) 和(2)得：$r(A)+r(I-A)=n$，或 $r(I-A)=n-r(A)$,

即$\lambda_1=1$时，$(I-A)\boldsymbol{x}=0$

因此，含 $n-(n-r)=r$个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-r}$；

$\lambda_2=0$时，$(\lambda_2 I-A)\boldsymbol{x}=0$，**即** $A\boldsymbol{x}=0$

因此，含$n-r$个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n$。

记 $$[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n]=P,$$

则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其中1的个数等于$r$。

作业：第249页

16、17、19、22、23

5.3 实对称矩阵的对角化

5.3.1 实对称矩阵的特征值和特征向量

定义5.4 元素为复数的矩阵和向量称为复矩阵和复向量。

定义5.5 设

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$ 为复矩阵

$$\overline{\mathbf{A}}=\left(\overline{a_{ij}}\right)_{m\times n}$$

$\overline{A}$叫做A 的共轭矩阵

其中 $\overline{a_{ij}}$是a_{ij} 的共轭复数。

显然 $$\overline{\overline{\mathbf{A}}}=\mathbf{A};\quad \overline{\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)}=\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^{\mathrm{T}}$$

当 A为实对称矩阵时， $$\overline{\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)}=\mathbf{A}$$

共轭矩阵有以下性质:

(1) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}, \quad (k\in \mathrm{C});$

(2) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B};$

(3) $\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}};$

(4) $\left(\overline{\mathbf{AB}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\overline{\mathbf{B}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^{\mathrm{T}};$

(5) 若A可逆，则 $\overline{\mathbf{A}^{-1}}=\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^{-1};$

(6) 若A为方阵，则 $\det\overline{A}=\overline{\det A};$

(7) 若 x 为 n 维复向量， $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^2\geq 0$$

当且仅当 x=**0时**等号成立。

定理5.10 实对称矩阵A的特征值都是实数。

证 设λ是A的任一个特征值，$\left(\overline{A}\right)^{\mathrm{T}} = A$，$Ax = \lambda x \ (x \neq 0)$。

只需证 $\overline{\lambda} = \lambda$。

$$\lambda\left(\overline{x}\right)^{\mathrm{T}} x = \left(\overline{x}\right)^{\mathrm{T}}(\lambda x) = \left(\overline{x}\right)^{\mathrm{T}}(Ax) = \left(\overline{x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overline{A}\right)^{\mathrm{T}} x$$

$$= \left(\overline{\overline{\mathrm{A}}x}\right)^{\mathrm{T}} x = \left(\overline{\mathrm{A}x}\right)^{\mathrm{T}} x = \left(\overline{\lambda x}\right)^{\mathrm{T}} x = \overline{\lambda}\left(\overline{x}\right)^{\mathrm{T}} x$$

由于$x \neq 0$时，$\left(\overline{x}\right)^{\mathrm{T}} x > 0$，故得 $\overline{\lambda} = \lambda$，即$\lambda$都是实数。

定理5.11 实对称矩阵A的属于不同特征值的特征向量是正交的。

证 设 $A x_i = \lambda_i x_i$，$x_i \neq 0$ $(i=1, 2)$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$（实数），则

$$\lambda_1 x_2^{\mathrm{T}} x_1 = x_2^{\mathrm{T}} A x_1 = x_2^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} x_1$$

$$= (A x_2)^{\mathrm{T}} x_1 = (\lambda_2 x_2)^{\mathrm{T}} x_1$$

$$= \lambda_2 x_2^{\mathrm{T}} x_1$$

而$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$x_2^{\mathrm{T}} x_1 = (x_1, x_2) = 0$，即$x_1$与$x_2$是正交的。

5.3.2 实对称矩阵的对角化

定理5.12 对于n阶实对称矩阵A，存在n阶正交矩阵T，使得

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

证 用数学归纳法。$n=1$，结论显然成立；

假设对$n-1$阶实对称矩阵B，存在$n-1$阶正交矩阵Q，使得$Q^{-1}BQ=\Lambda_1$。对n阶矩阵A，设$Ax_1=\lambda_1x_1$，其中x_1是长度为1的特征向量。现将x_1扩充为$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Ax_j\ (\in\mathbf{R}^n)$可由这组基线性表示：

$$A[x_1,x_2,\cdots,x_n]=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & b_{2n} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$$

记$P=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$(P为正交矩阵)，上式用分块矩阵表示为

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{b}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

由于$P^{-1}=P^{T}$， $(P^{-1}AP)^{T}=P^{T}A^{T}(P^{-1})^{T}=P^{-1}AP$，所以它是实对称矩阵。

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & b\\ 0 & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ b^{T} & B^{T}\end{bmatrix}=(P^{-1}AP)^{T}$$

因此，$b=0$，$B=B^{T}$为$n-1$阶实对称矩阵。由归纳假设，可知存在$n-1$阶正交矩阵Q，使得$Q^{-1}BQ=\Lambda_1$。令

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix},\quad S^{T}S=I \quad (S\text{为正交阵})$$

$$S^{-1}(P^{-1}AP)S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & Q^{-1}BQ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_1\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

令$T=PS$（两个正交矩阵之积也是正交矩阵），$T^{-1}=T^{T}$，即得

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值。

例 1 设 $A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$, 求正交矩阵$T$，使$T^{-1}AT$为对角矩阵。

解

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\0&\lambda-1&\lambda-1\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&4\\0&\lambda-1&0\\2&4&\lambda-9\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&4\\2&\lambda-9\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0,$$ 得 $\begin{cases}\lambda_1=1(\text{二重})\\\lambda_2=10\end{cases}$

对于特征值$\lambda_1=1$，由$(\lambda_1 I-A)\,x=\mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得基础解系：$\boldsymbol{x}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{x}_2=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$

用Schmidt正交化方法，先正交化，取

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{x}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix},$$ 可取$\boldsymbol{\beta}_2=[2,4,5]^{\mathrm{T}}$，

将β_1, β_2单位化:

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{\sqrt{5}}{5}[-2,\quad 1,\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{5}}{15}[2,\quad 4,\quad 5]^{\mathrm{T}}$$

对于特征值λ_2=10，由$(\lambda_2 I - A)\,x=\mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得 $x_3=(1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$，将其单位化得

$$\gamma_3 = \frac{1}{3}[1,\quad 2,\quad -2]^{\mathrm{T}}$$

取正交矩阵

$$T = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} -2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/15 & 1/3 \\ \sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

则有

$$T^{-1} A\, T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathrm{diag}(1, 1, 10)$$

例 2 证明：若 n 阶实对称矩阵A和B的特征值相同，则$A \sim B$，且存在正交矩阵T，使

$$T^{-1} A T = B。$$

证 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A和B的特征值，则存在正交阵T_1和T_2，使得

$$T_1^{-1} A T_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = T_2^{-1} B T_2$$

于是 $T_2 T_1^{-1} A T_1 T_2^{-1} = B$

令$T = T_1 T_2^{-1}$（T是正交矩阵，且$T^{-1} = T_2 T_1^{-1}$），就有

$$T^{-1} A T = B$$

例3 若n阶实对称矩阵A和B的特征值完全相同，证明存在正交矩阵T和 n 阶矩阵Q，使$A=QT$ 和 $B=TQ$ 同时成立。

证 **由于**实对称矩阵与对角阵Λ相似，对角元为特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，所以，

$$A\sim\Lambda\sim B$$

且存在正交阵T_1 使

$$T_1^{-1}AT_1=B \quad 或 \quad A=T_1B\,T_1^{-1}$$

记 $T_1^{-1}= T$ （T还是正交阵），$AT_1=Q$，$B= TQ$，则

$$A= T_1B\,T_1^{-1}=T_1TQ\,T_1^{-1}=IQT=QT$$

命题成立。

例4 设A和B都是n阶实对称矩阵，若存在正交矩阵T，使$T^{-1}AT$, $T^{-1}BT$都是对角阵，则AB是实对称矩阵。

证 由$(AB)^T=B^TA^T=BA$，所以，AB对称的充要条件是A, B可交换。设

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=\Lambda_1$$

$$T^{-1}BT=\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)=\Lambda_2$$

则 $\Lambda_1\Lambda_2=\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \cdots, \lambda_n\mu_n)=\Lambda_2\Lambda_1$，于是

$$AB=T\Lambda_1T^{-1}\cdot T\Lambda_2T^{-1}$$

$$=T\Lambda_1\Lambda_2T^{-1}$$

$$=T\Lambda_2\Lambda_1T^{-1}=T\Lambda_2T^{-1}\cdot T\Lambda_1T^{-1}$$

$$=BA$$

所以，$(AB)^T=BA=AB$, 即AB是实对称矩阵。

作业：第249页至第250页

24(1，3，5)、25、27

第五章习题课：第247页至第252页

4、5、6、10、12、13、18、20、21、
22、26、27、30、32、34、35、36、
37、38、41、42、46

作业：第250页至第252页

29、31、33、39、40、43、44、45