2009-2010 第二学期《高数》试题解

一、计算下列各题（6×8 分）

1、设向量$\vec{a}+3\vec{b}$与$7\vec{a}-5\vec{b}$垂直，$\vec{a}-4\vec{b}$与$7\vec{a}+2\vec{b}$垂直，求向量$\vec{a},\vec{b}$之间的夹角。

2、求曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程。

3、计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中$D=\{(x,y)|0\le y\le x, x^2+y^2\le 2x\}$。

4、设$z=f(x,y)$由$z-y+xe^{z-y-x}=0$所确定，求dz。

5、将函数$f(x)=\dfrac{1}{3-x}$展开成x的幂级数。

6、计算$\iiint\limits_\Omega x^2dxdydz$其中$\Omega$是由三个坐标平面与平面$x+y+z=1$围成的闭区域。

解、1、$\begin{cases}(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0\\(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}+2\vec{b})=0\end{cases}$，$\begin{cases}7|\vec{a}|^2-15|\vec{b}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\7|\vec{a}|^2-8|\vec{b}|^2-26\vec{a}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$，

$\begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{\dfrac{74}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}}\\|\vec{b}|=\sqrt{6\vec{a}\cdot\vec{b}}\end{cases}$。$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\sqrt{\dfrac{7}{444}}$，$(\vec{a},\vec{b})=\arccos\sqrt{\dfrac{7}{444}}$。

2、$F=-z+\dfrac{x^2}{2}+y^2$，$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(x,2y,-1)=(2,2,-1)$，$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=3\end{cases}$。

所求切平面：$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$。即：$2x+2y-z=3$

3、$$\begin{aligned}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\rho d\rho=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta\\&=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{10}{9}\sqrt{2}\end{aligned}$$。

4、$dz-dy+e^{z-y-x}dx+xe^{z-y-x}(dz-dx-dy)=0$

$dz=\dfrac{(x-1)e^{z-x-y}}{1+xe^{z-x-y}}dx+dy$。

5、$f(x)=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}x^n(-3<x<3)$。

6、$$\iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz = \int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$$
$$= \int_0^1 x^2[(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2]dx = \frac{1}{60}$$ 。

二、（10 分）计算曲线积分 $\int_L (x+e^{\sin y})dy-(y-\frac{1}{2})dx$ 其中 L 是位于第一象限的直线段 $x+y=1$ 与位于第二象限的圆弧 $x^2+y^2=1$，逆时针方向。

解、$\int_{L+[-1,1]}(x+e^{\sin y})dy-(y-\frac{1}{2})dx = 2\iint_D dxdy = 2(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}) = 1+\frac{\pi}{2}$，

$\int_L (x+e^{\sin y})dy-(y-\frac{1}{2})dx = 2\iint_D dxdy = 2(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}) = 1+\frac{\pi}{2}-\int_{-1}^1\frac{1}{2}dx = \frac{\pi}{2}$。

三、（10 分）计算曲面积分 $\iint_\Sigma (2x+z)dydz+zdxdy$ 其中 Σ 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，其法方向与 z 轴正向成锐角。

解、补上向里的顶 Σ_1，$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)dydz+zdxdy = -3\iiint_\Omega dxdydz = -3\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy$

$= -3\int_0^1 \pi zdz = -\frac{3}{2}\pi$。

$\iint_\Sigma (2x+z)dydz+zdxdy = -\frac{3}{2}\pi + \iint_{\Sigma_1^-}(2x+z)dydz+zdxdy = -\frac{1}{2}\pi$。

四、（10 分）判断级数 $\sum_{n=2}^\infty (-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性，若收敛，请说明是绝对收敛还是条件收敛。

解、记 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$。$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0(x>3)$。当 $n>3$ 时 $\frac{\ln n}{n}$ 单调下降。

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$。故级数 $\sum_{n=2}^\infty (-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 收敛。

因为 $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}(n>3)$，所以 $\sum_{n=2}^\infty\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right|$ 发散。原级数条件收敛。

五、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^\infty nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数。

解、$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域：$-1 < x < 1$。

设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$。$\int_0^x s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$

$s(x) = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$。

六、（12 分）求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3$ 在椭圆域 $D = \left\{(x, y)\middle| x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$ 上的最大值和最小值。

解、$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x = 0 \\ f_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$。$f(0,0) = 3$。

在椭圆上，$\varphi(y) = f(x, y) = -\frac{5}{4}y^2 + 4(-2 \le y \le 2)$。$\varphi'(y) = -\frac{5}{2}y = 0$ 得 $y = 0$。$\varphi(-2) = -1, \varphi(0) = 4, \varphi(2) = -1$。

$f(x, y)$ 在 D 上的最大值：4，最小值：-1。