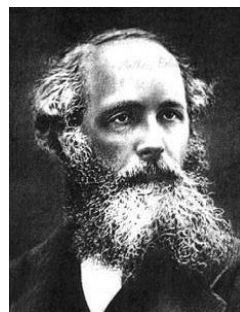


第十五章 电磁场与电磁波

在上一章中，我们已经知道，麦克斯韦为了解释产生感生电动势的原因，提出了**涡旋电场**的概念，即变化的磁场可以激发涡旋电场。随后麦克斯韦又大胆地提出了**位移电流**假设，指出变化的电场反过来也可以激发磁场。这样涡旋电场和位移电流完整地揭示了电场和磁场具有内在联系的两个侧面，表明电场和磁场是一个具有内在联系的统一体，麦克斯韦将它称为**电磁场**（electromagnetic field），并于 1864 年底归纳总结出了电磁场的基本方程组，称为**麦克斯韦方程组**。接着，麦克斯韦又提出了**电磁波**（electromagnetic wave）的概念，从理论上证明了电磁波只能是横波，其在真空中的传播速度就等于光速，并由此断言，“光是媒质中起源于电磁现象的横波”，从而开创了光的电磁理论。



麦克斯韦

本章将首先学习麦克斯韦提出的位移电流概念，以及全电流安培环路定律。然后介绍麦克斯韦归纳总结出的关于电磁场运动的基本方程组——麦克斯韦方程组，最后讨论电磁波的产生、传播及其基本性质。

§ 15.1 位移电流 全电流安培环路定律

§ 15.2 麦克斯韦方程组

§ 15.3 电磁波

15.3.1 LC 电磁振荡

麦克斯韦电磁场理论最主要的成就就是预言了电磁波的存在，并且以横波形式在空间传播。“涡旋电场”假设的实质是变化的磁场可以激发电场，“位移电流”假设的实质是变化的电场可以激发磁场。于是，变化的电场和磁场互相激发，以波动的形式在空间传播，从而形成电磁波。麦克斯韦预言电磁波的存在完全是他从理论上推出来的，直到 20 多年后的 1888 年，才由德国物理学家赫兹从实验上证实了电磁波的存在。

要产生电磁波，必须要有波源。下面，我们先介绍由一个电容 C 和一个自感线圈 L 组成的 LC 振荡电路，如图 15.4 所示。首先由电源对电容 C 充电，使电容器两极板上带等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$ ，此时电容器两端电压 U 等于电源电动势 \mathcal{E} 。然后使用换向开关，使电容器 C 与自感线圈 L 串联。在电容器放电前的瞬间，自感线圈中没有电流，电路中的电磁能量就是电容器内部两极板之间电场的能量。如图 15.5 (a) 所示。

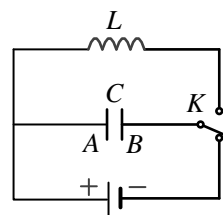


图 15.4 LC 振荡电路

电容器开始放电时，由电磁感应定律可知，电路中的电流逐渐增大，电容器极板上的电荷逐渐减少。电容器放电结束时，极板上的电荷变为零，电路中的电流达到最大值，同时自感线圈中的磁感强度达到最大值，如图 15.5 (b) 所示。如果不计电路的焦耳损耗和辐射损耗，则电容器中的电场能量将全部转化为线圈中的磁场能量。

此后，电路中的电流逐渐减小，并开始对电容器反向充电。当电流减为零时，反向充电结束，电容器内部的电场强度达到最大，线圈中的磁场能量反过来转化为电容器中的电场能量。如图 15.5 (c) 所示。

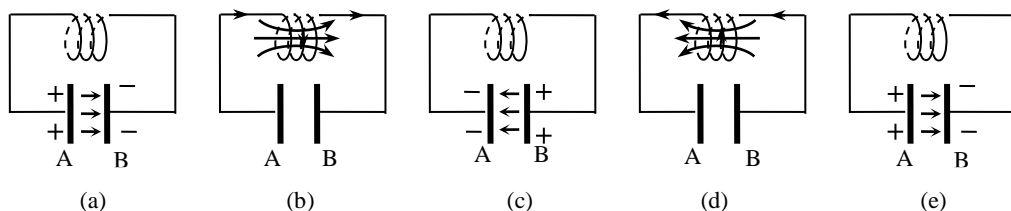


图 15.5 LC 振荡电路中的电磁振荡过程

然后，电容器又通过线圈进行放电，电流逐渐增大。不过，电路中电流的方向与图 15.5 (b) 中的方向相反，如图 15.5 (d) 所示。电场能量又逐渐被转换成磁场能量。

接着，电容器又被反向充电，磁场能量再一次被转换成电场能量，如图 15.5 (e) 所示。从而完成了一个完整的电磁振荡过程。只要回路中的焦耳热损耗和电磁辐射损耗可以忽略不计，这种电磁振荡将一直维持下去。可以证明，无阻尼 LC 振荡电路的固有振荡频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (15.15)$$

15.3.2 电磁波的产生与传播

虽然， LC 振荡回路可以产生电磁振荡，但还不能作为一个有效的发射电磁波的波源。其中一个主要原因是电场和磁场主要集中在电容器内部和线圈内部，无法向外部辐射；另一个原因是，电磁波的辐射功率与频率的 4 次方成正比，而在一般的振荡电路中，因 L 和 C 的数值较大，由式 15.15 得到的固有振荡频率较低，所以辐射功率很低，几乎可以忽略不计。要将 LC 振荡回路中的电磁能量有效地发射出去，必须要满足两个条件：①频率要高，②电路要开放。显然，要提高频率，就要尽量减小线圈的自感 L 和电容器的电容 C ；而电路开放就是要尽量让电磁能量向空间散发出去。

根据这样的设想，我们可以通过对 LC 振荡回路作适当的改造，来实现电磁波的发射。由螺线管线圈的自感系数公式 $L = \mu_0 n^2 V$ ，可知：可以通过减少线圈的匝数来减小 L ；由平行板电容器的电容公式 $C = \epsilon_0 S/d$ ，可知：可以通过减小两极板的面积 S ，并增加极板间的距离 d 来减小 C 。由此看来，其理想的极限情况就是将 LC 振荡回路拉成一根直导线，如图 15.6 (c) 所示，这就是我们所熟知的发射天线。电视发射塔顶部那根长长的“直圆柱体”、无线通讯基站上一根根直立的“金属杆”等等，都属于这类发射天线。当高频交变电流在天线内往复振荡时，在天线的两端就会出现正负交替的等量的异号电荷，形成所谓的“振荡电偶极子”。虽然这些实际天线比振荡电偶极子模型复杂的多，但基本的辐射原理是相同的。

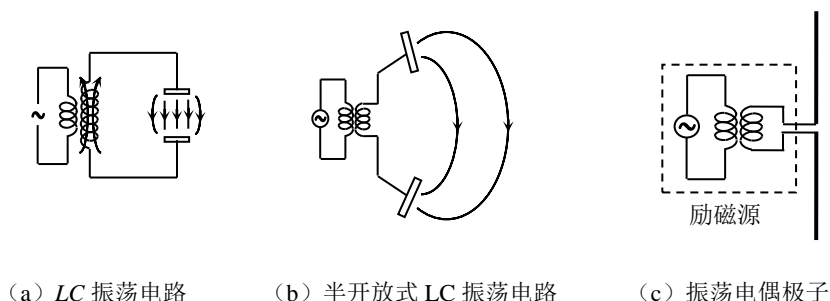


图 15.6 由 LC 振荡电路向振荡电偶极子的转变

下面，我们以振荡电偶极子模型来简述电磁波的辐射规律。我们将**电矩随时间作迅速周期性变化的电偶极子称为振荡电偶极子**。最简单的振荡电偶极子模型是电矩随时间按余弦或正弦规律进行变化，即

$$p = p_0 \cos \omega t$$

式中： p_0 是电偶极子电矩的振幅（电矩的最大值）， ω 是振荡圆频率。

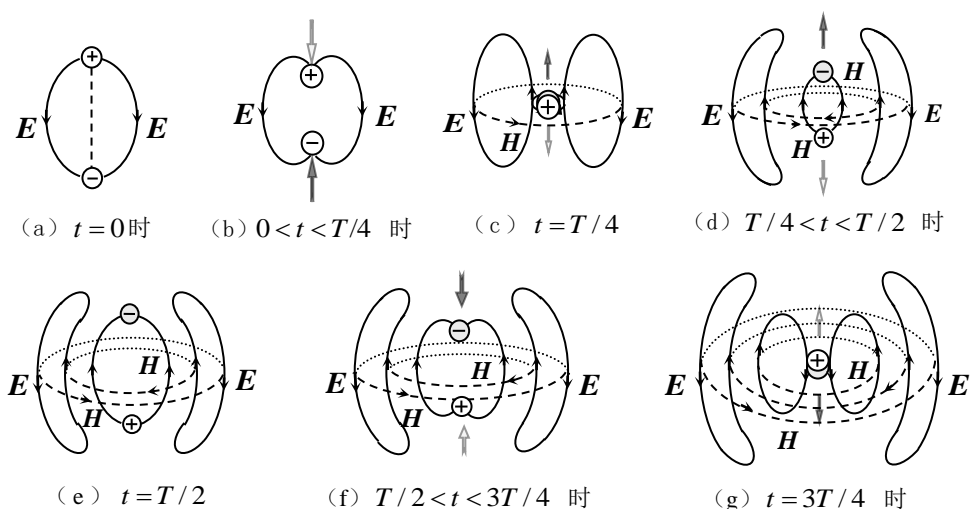


图 15.7 振荡电偶极子附近电场线的变化

由于振荡电偶极子中的正负电荷在不断地运动，所以电场线也随时间而变化，并以有限的速度在空间传播。在电偶极子中心附近的近场区域内，即离偶极子中心的距离 r 远小于波长的区域内，电场线的瞬时分布与静态电偶极子的电场线相近；但在距离振荡电偶极子中心较远的区域内，电场强度 \mathbf{E} 的量值不与同一时刻的电荷位置相对应，而是与较早前某一时刻的电荷位置相对应。现参考图 15.7，作示意说明如下：当 $t=0$ 时，正负电荷中心相距 l ，其中一对电场线如图 15.7 (a) 所示；当两电荷逐渐靠近时，电场线也发生变化，如图 15.7 (b) 所示；当 $t=T/4$ 时，两电荷重合，一根闭合的电场线便形成了，如图 15.7 (c) 所示；然后该闭合的电场线脱离电荷，并向外扩张，同时随着电荷的运动，产生了新的电场线，如图 15.7 (d) — (g)。当然在产生变化的涡旋电场的同时，还将激发出闭合的涡旋磁场，其磁感线是以振荡电偶极子的轴线为中心、并与轴线垂直的同心圆环，如图中的虚线所示。随着时间的推移，电场线和磁场线便以横波的形式向外扩张，由近及远地传播出去。在远离振荡电偶极子的地方，即在 $r \gg \lambda$ 的波场区，波阵面趋于球形，如图 15.8 所示。

若以振荡电偶极子的中心为坐标原点，以振子轴线为极轴的球坐标来描述电磁场，通过求解麦克斯韦方程组可以得到（过程略），在 $r \gg \lambda$ 的波场中任意一点 P 处的电场强度 \mathbf{E} 和磁场强度 \mathbf{H} 的数值分别为：

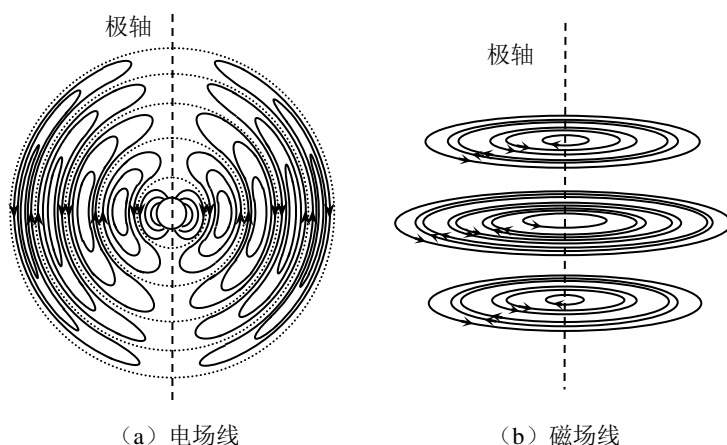


图 15.8 振荡电偶极子附近的电磁场

$$E(r, t) = \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi \epsilon u^2 r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) \quad (15.16)$$

$$H(r, t) = \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi u r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) \quad (15.17)$$

式中： ω 为振荡电偶极子的圆频率， p_0 为振荡电偶极子电矩的振幅， r 为从振荡电偶极子中心到 P 点的位矢 \mathbf{r} 的大小， θ 为位矢 \mathbf{r} 与极轴的夹角， u 为电磁波的传播速度。

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 、 $\mu = \mu_0 \mu_r$ ，为介质的绝对电容率和绝对磁导率。

可以证明，电磁波的传播速度为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (15.18)$$

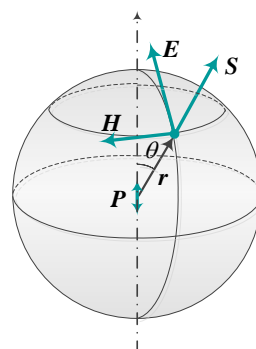


图15.9 在波场区中， \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{r} 互相垂直

此外，在波场中的任一点 P 处， \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的方向与波的传播方向互相垂直，并成右手螺旋关系，如图 15.9 所示。

在距离振荡电偶极子足够远（ r 很大）的一个小范围内， θ 及 r 的变化很小，可以视为常量。这时电场强度和磁场强度的振幅 E_0 和 H_0 也可视为常量。于是式 (15.16) 和式 (15.17) 可以写成：

$$E(r, t) = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) = E_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) \quad (15.19)$$

$$H(r, t) = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) = H_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) \quad (15.20)$$

上两式通常称为平面电磁波的波函数（或波动表达式）。这说明在离振荡电偶极子很远的地方，电磁波可以视为平面电磁波。

15.3.3 电磁波的主要性质

根据以上讨论，电磁波的主要性质归纳如下：

1、电磁波是横波。波场中任意一点处的电场强度 \mathbf{E} 、磁场强度 \mathbf{H} 都与波的传播方向 \mathbf{r} 垂直，并且 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 和 \mathbf{r} 三者成右手螺旋关系，即 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向就是 \mathbf{r} 的方向，如图 15.9 或图 15.10 所示。

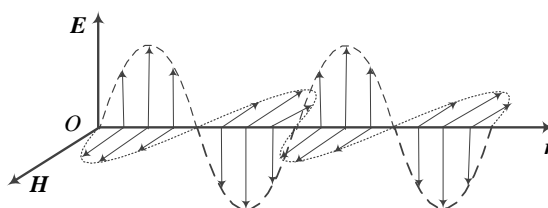


图15.5 平面电磁波的传播示意图

2、 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 同相位，且数值大小成比例。 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 的相位相同，这一点可以从式 (15.16)、和式 (15.17) 中明显看出。将式 (15.16) 与式 (15.17) 相除，并注意到 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ，可得

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H \quad (15.21)$$

3、电磁波在真空中的传播速度与真空中的光速相等。由式 (15.18) 可知，电磁波在真空中的传播速度为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \times 8.854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

这个数值与真空中的光速 c 完全相等。麦克斯韦正是由此预言，光就是一种电磁波。从而为光的电磁理论奠定了理论基础。

以上结论虽然是从振荡电偶极子激发的电磁波中得到的，但具有普遍性，适用于所有的电磁波。

15.3.4 电磁波的能量和动量

1. 电磁波的能量密度

电磁波是变化的电场和变化的磁场在空间的传播过程。由于电场和磁场都具有能量，因此电磁波是具有能量的，电磁波的传播必然伴随着能量的传播。这种以波的形式传播出去的能量称为辐射能，能量的辐射方向就是电磁波的传播方向。

在电场和磁场中已经得到电场和磁场的能量密度分别为：

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

由此可得，电磁波的能量密度为

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$$

再利用式（15.21）得：

$$w = \epsilon E^2 = \sqrt{\epsilon \mu} EH = \frac{EH}{u} \quad (15.22)$$

由于 E 和 H 都是时间和空间的周期函数，所以电磁场的能量密度 w 也是时间和空间的周期函数。对于平面电磁波，由式（15.19）和（15.20）可得：

$$w = \epsilon E_0^2 \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right)$$

由此不难得到，电磁波的平均能量密度为：

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} w dt = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0 H_0}{u} \quad (15.23)$$

2. 电磁波的强度

电磁波在单位时间内通过与波的传播方向垂直的单位截面内的电磁波的能量称为**电磁波的能量流密度**，并用符号 S 表示。如图 15.11 所示，设电磁波沿 r 方向传播， dA 是垂直于传播方向上的某一截面。若电磁波的能量密度为 w ，则 dt 时间内通过该截面的电磁波的能量为 $w \cdot u dt \cdot dA$ ，所以电磁波的能量流密度为

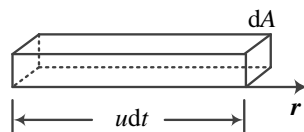


图15.11 电磁波的能量流密度

$$S = \frac{w \cdot u dt \cdot dA}{dA} = w \cdot u = EH \quad (15.24)$$

考虑到能量的辐射方向与电磁波的传播方向一致，即与 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向相同，又 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ，所以上式可以用矢量形式表示，即

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (15.25)$$

式中矢量 \mathbf{S} 称为**能流密度矢量**，又称为**坡印廷矢量**。不难看出， \mathbf{S} 与 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 三者的方向成右手螺旋关系，如图 15.12 所示。

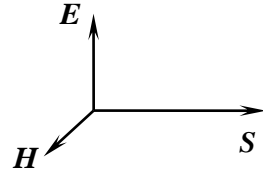


图 15.12 \mathbf{S} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 的方向

把式 (15.19) 和 (15.20) 代入式 (15.24) 得

$$S = E_0 H_0 \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right)$$

上式表明：平面电磁波的能流密度矢量（即坡印廷矢量）的大小是时间 t 和距离 r 的周期函数。能流密度的大小对时间的平均值称为**电磁波的强度**，即

$$\bar{S} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_0 H_0 \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) dt = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} u \varepsilon E_0^2 \quad (15.26)$$

在波动光学中，我们把电磁波的强度称为光强，并用符号 I 表示，即

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} u \varepsilon E_0^2 \quad (15.27)$$

式中 u 为电磁波的传播速度， ε 是介质的电容率，在真空中， $u = c$ ， $\varepsilon = \varepsilon_0$ 。上式表明：**在电磁波或光波中，波的强度与该点电场强度振幅的平方成正比。**

3. 电磁波的动量

电磁波不仅具有能量，而且还具有动量。根据相对论的能量与动量关系，在真空中单位体积内电磁波的动量为

$$P = \frac{w}{c} = \frac{EH}{c^2} \quad (15.28)$$

动量的方向就是电磁波的传播方向，即与 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向相同，所以单位体积内电磁波动量的矢量表达式为

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (15.29)$$

我们知道，能量和动量是物质运动的量度。所以电磁场是物质的一种存在形式，它与实物粒子一样，都是客观存在的。

15.3.5 电磁波谱

实验表明，电磁波的波长范围很广，没有上下限的限制，从无线电波、红外线、可见光、紫外线到 X 射线和 γ 射线等都是电磁波。它们的本质完全相同，只是波长（或频率）有很大的差异。由于波长不同，它们就有不同的特性，而且产生的方式也各不相同。为了便于比较，人们按照它们的波长（或频率）大小依次排列，叫做电磁波谱，如图 15.13。

在电磁波谱中，波长最长的是无线电波（其波长范围从几毫米到几千公里），波长从长到短可分为长波、中波、短波、超短波和微波。通常无线电波由振荡电路产生。长波在介质中传播时损耗很小，常用于远距离通讯和导航；中波多用于航海和航空定向及无线广播；短波多用于无线广播、无线通讯等；超短波、微波多用于电视、雷达、导航及其它特殊用途。

可见光的波长范围在 400 nm ~ 760 nm 之间，不同的波长对应于不同的颜色，其波长与颜色的对应关系如图 15.14 所示。

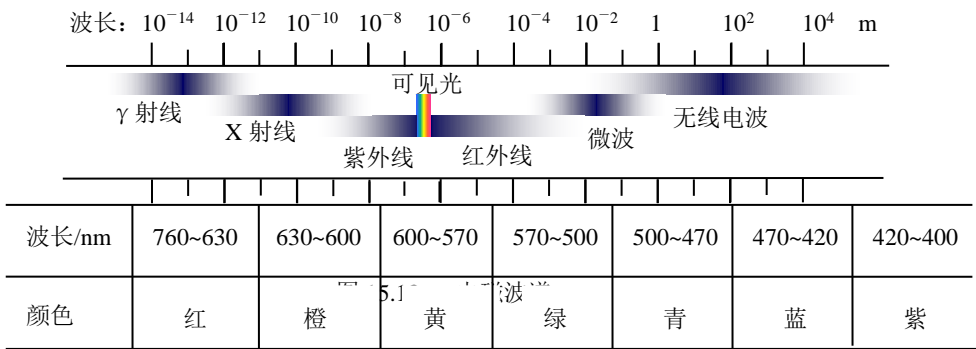


图 15.14 颜色与波长的对应关系

波长在 760nm 到 1mm 之间的电磁波，不能引起人的视觉，由于它处于可见红光的外侧，所以称为红外线。根据波长的大小，红外线又可以分为近红外、中红外、远红外等。近红外线，波长为 0.75~1.50 μ m 之间；中红外线，波长为 1.50~6.0 μ m 之间；远红外线，波长为 6.0~1000 μ m 之间。红外线的应用非常广泛，在军事上通过红外成像和红外摄影制作的夜视仪进行夜间观测，在人造卫星上用红外遥感进行资源勘探和军事监测，在工农业生产上用红外线的热效应来烘烤物体。随着红外发光技术和探测技术的不断改进，红外线技术在光通讯（红外遥控、PC 数据通讯）、自动控制与安全防盗、医学检查和治疗等领域的应用越来越广泛。

波长在 10nm 到 400nm 之间的电磁波叫做紫外线。它能引起化学反应、生物效应和荧光效应。根据生物效应的不同，将紫外线按照波长划分为四个部分：A波段(400~315nm)，又称为黑斑效应紫外线；B波段(315~280nm)，又称为红斑效应紫外线；C波段(280~200nm)，又称为灭菌紫外线；D波段(200~5nm)，又称为真空紫外线。医学上常用C波段紫外线来消毒、杀菌；在金融和商业领域，常利用紫外线的荧光效应制作防伪标记。

红外线、可见光和紫外线这三部分电磁波统称为光辐射，它们都是由炽热的物体、气体放电以及其它光源中原子或分子的外层电子发生能级跃迁时所产生的。

X射线（亦称伦琴射线），波长范围在 5nm 到 0.004nm 之间。它是由高速运动的电子被急剧减速时（如快速电子射到金属靶时）或原子的内层电子发生能级跃迁时产生的。它的能量很大，具有很强的穿透能力，也能使底片感光。是无损探伤、透视人体内部病变以及分析物质（晶体）结构的有力工具。

波长比 X射线更短的是 γ 射线，它是原子核内部状态发生变化时产生的电磁辐射。许多放射性同位素都会发射 γ 射线。 γ 射线的能量比 X射线还要大，穿透能力也更强。可用于工业无损检测，进行放射性实验，产生高能粒子，还可借助它研究天体、认识宇宙。

需要指出的是，电磁波谱图中各波段主要是按照产生方式或探测方法的不同来划分的，随着科学技术的发展，用各种不同的方式产生的电磁波会有一些共同的波段，从而会出现不同波段互相重叠的情况。

思考题

15.1 什么是位移电流？它与传导电流有何区别？

15.2 关于位移电流的概念，下列说法正确的是（ ）。

- A. 位移电流就是变化的电场，它在数值上等于电场强度对时间的变化率。
- B. 位移电流只能在非导体中传播。
- C. 位移电流是一种假设，实际上并不存在。
- D. 位移电流由变化的电场产生，其大小等于电位移通量对时间的变化率。

15.3 微波炉的加热原理是什么？

15.4 简述全电流安培环路定律

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum I_i + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$$

中各项的物理意义，并说明这个方程所揭示的物理意义。

15.5 在对某电容器充电时,测得某一时刻的充电电流为 0.5A ,则电容器两极板之间的位移电流为多少?在充电电路切断后,电容器极板间的位移电流还有吗?

15.6 在 LC 电磁振荡电路中,电场能量和磁场能量是怎样交替转换的?

15.7 普通的 LC 振荡电路为什么不能有效地发射电磁波?要有效地发射电磁波,应如何改造 LC 振荡电路?

15.8 电磁波的主要性质有哪些?

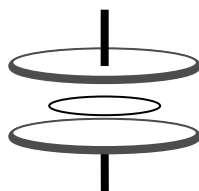
15.9 什么是坡印廷矢量?

15.10 在电磁波谱上,从无线电波到 γ 射线,各波段的电磁波是怎样产生(发射)的?

习 题

15.11 试证明平行板电容器充电时,极板间的位移电流 $I_D = C \frac{dU}{dt}$,式中 C 为平行板电容器的电容, U 为两极板间的电压。

15.12 一个圆形平行板电容器,如右图所示,极板的半径 10 mm ,两极板间夹着一层相对电容率为 4.0 、厚为 0.50 mm 的均匀电介质,两极板上加一正弦电压 $U = 1.0 \times 10^3 \sin(2\pi \times 10^6 t)\text{ V}$ 。试求:



习题 15.12 的图

(1) 两极板间位移电流密度及位移电流的最大值;

(2) 极板内离极板中心 5.0 mm 处磁感应强度的最大值。

15.13 给一个极板面积为 S , 电容为 C 的平行板电容器充电,充电电流为 $i = I_0 e^{-t/\tau}$ (SI), 式中 τ 为电路的时间常数。 $t=0$ 时,极板上已有电荷 q_0 , 忽略电容器内电场的边缘效应,试求:

(1) 极板上电压 u 随时间 t 的变化关系;

(2) t 时刻两极板之间的位移电流密度 j_D 及两极板之间总的位移电流 I_D 。

15.14 真空中,一平面电磁波的电场强度的波动表达式由下式给出:

$$E_x = 0.60 \cos \left[2\pi \times 10^6 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}, \quad E_y = 0$$

试求:该电磁波的波长、频率、传播方向以及磁场强度的波动表达式。

15.15 已知真空中的平面电磁波沿 x 轴正向传播,电场沿 y 轴方向振动,电场强度的幅值为 $E_0 = 6.0 \times 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$,试求:

(1) 磁场强度的振动方向及振幅;

(2) 该平面电磁波的平均能量密度和强度。

15.16 一平面电磁波在介质中传播,假设磁场强度的振幅 $H_0 = 2.90 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$,介质的相对电容率 $\epsilon_r = 10.0$,相对磁导率 $\mu_r = 100$,试求:

(1) 电磁波在此介质中的传播速度;

(2) 电磁波的强度。

15.17 一广播电台的辐射功率是 10KW, 假定辐射场均匀地分布在以电台为中心的半曲面上, 试求:

(1) 距离电台 10Km 处, 该电磁波的强度;

(2) 距离电台 10Km 处, 电磁波中电场强度和磁场强度的振幅。

15.18 一气体激光器发出的光强可达 $3.0 \times 10^{18} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。试计算该激光束中电场强度和磁场强度的振幅。

*15.19 振荡电偶极矩的振幅为 p_0 的偶极子天线, 其辐射的电磁波中的电场强度和磁场强度的振幅可以分别用式 (15.16)、(15.17) 表示。试证明:

(1) 该电磁波在 (r, θ, φ) 出的强度为

$$\bar{S} = \frac{\mu p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^2 u}$$

式中: u 是电磁波的传播速度;

(2) 振荡电偶极子的平均辐射 (总) 功率为:

$$\bar{P} = \frac{\mu p_0^2 \omega^4}{12\pi u}$$

此式也称为辐射功率的拉莫尔 (Larmor) 公式。[提示: 球坐标系中的面积元公式为 $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$,

则通过此面元的平均辐射功率为: $d\bar{P} = \bar{S} \cdot dA$]