

## 第 6 章 机械振动

物体在某一位置附近所做的来回往复运动叫做**机械振动** (mechanical vibration)。生活中，机械振动的例子不胜枚举。例如钟摆的运动、脉搏的跳动、发动机气缸内活塞的运动等。振动并不限于机械振动，例如交流电路中电流和电压随时间周期性地变化也是振动。广义地说，任何一个物理量在某一数值附近随时间作周期性地变化均可称为振动。尽管各种振动的物理机制各不相同，但它们有着共同的基本规律。为此，我们以直观的机械振动为例来讨论振动的基本规律。

在各种振动中，**简谐振动** (simple harmonic motion) 是最简单最基本的振动，任何复杂的振动都可以看成是两个或多个简谐振动的合成。所以本章主要讨论简谐振动的特征和运动规律，以及振动的合成等问题，并简要分析阻尼振动、受迫振动、共振等现象。

### § 6.1 简谐振动

#### 6.1.1 简谐振动的动力学特征

我们以弹簧振子为例来讨论简谐振动的动力学特征。如图 6.1 所示，在光滑水平面上有一个轻质弹簧（弹簧的质量相对于振动物体来说可以忽略不计），一端固定，另一端系一个质量为  $m$  的物体（可视为质点），这样的弹簧和质点构成的系统称为**弹簧振子** (spring oscillator) 或称为**谐振子** (harmonic oscillator)。

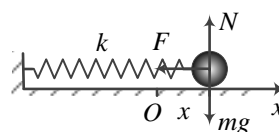


图6.1 光滑水平面上的弹簧振子

当弹簧为原长时，质点所受的合力为零，处于平衡状态，此时质点所在的位置就是平衡位置。如果使物体相对平衡位置发生一个小位移后释放，这时由于弹簧被拉长或压缩，便有指向平衡位置的弹性力作用在物体上，使物体加速向平衡位置运动，由于惯性，物体能够通过平衡位置，过平衡位置后，在弹性力的作用下，物体做减速运动直到速度为零，接着又加速向平衡位置运动。这样，在弹性力和惯性两个因素的共同作用下，物体就在其平衡位置附近往复运动，如图 6.2 所示。弹簧振子的这种往复运动就称为简谐振动。下面分析系在弹簧上的质点做简谐振动时的受力特点。

以物体（可视为质点）的平衡位置为坐标原点，弹簧的拉伸方向（即向右）为  $x$  轴的正方向。按照胡克定律，在弹性范围内，物体所受的**弹性力**  $F$  与弹簧的伸长量  $x$ （即物体相对平衡位置的位移）的大小成正比，方向相反，即

$$F = -kx \quad (6.1)$$

式中  $k$  是弹簧的劲度系数，负号表示力和位移的方向相反。

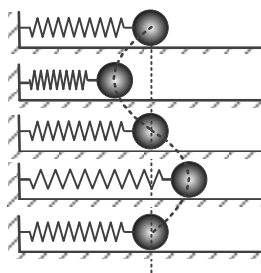


图6.2 弹簧振子的简谐振动

这就是弹簧振子做简谐振动时的受力特点，即**物体做简谐振动时，受到的合外力的大小与物体相对平衡位置的位移的大小成正比，方向相反**。这种力也称为**正比反向力**。

上述做简谐振动物体的受力特点尽管是从光滑水平面上的弹簧振子中导出的，但这个结论具有普遍性，或者说所有在某一直线上做简谐振动的物体受到的合外力都是正比反向力，例如竖直振动的弹簧振子等，它是我们判断一个物体是否做简谐振动的评判标准之一。

在研究简谐振动时，如果坐标原点不在质点的平衡位置处，那么质点所受到的合外力与物体的位置坐标（即相对于坐标原点的位移）将满足  $F = -kx + b$  的形式，其中  $k$ 、 $b$  都是常数，这样的力称为**线性回复力**。这种力可以通过坐标平移变换： $x' = x - \frac{b}{k}$ ，简化为正比

反向力： $F = -kx'$ 。因此，当合外力为线性回复力时，物体的运动也是简谐振动。

如果弹簧振子振动幅度过大，弹簧形变超出弹性范围，则回复力不再遵从胡克定律，回复力与位移大小不满足线性关系，这时弹簧振子的运动就不再是简谐振动。

## 6.1.2 简谐振动的运动学特征——振动表达式

### 1. 简谐振动的微分方程

对于上述弹簧振子，根据牛顿第二定律  $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$ ，可得质点的加速度为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x \quad (6.2)$$

由于  $k$  和  $m$  都是正的常量，令

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (6.3)$$

代入式（6.2）并移项，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (6.4)$$

式（6.4）称为**简谐振动的动力学微分方程**。它是任意一个做简谐振动的物体必须满足的一个微分方程。式中， $x$ 既可以看作是物体相对于平衡位置的位移，也是以平衡位置为坐标原点时质点的位置坐标。

### 2. 简谐振动表达式

简谐振动的动力学微分方程是一个二阶常系数线性齐次微分方程，它的通解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.5a)$$

或等价地表示为

$$x = A \sin(\omega t + \varphi') \quad (6.5b)$$

由三角函数变换关系可知式 (6.5a) 与式 (6.5b) 中  $\varphi$  与  $\varphi'$  的关系为

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

式 (6.5) 中的  $A$  和  $\varphi$  (或  $\varphi'$ ) 是待定常数, 它们由初始条件确定, 即由  $t=0$  时物体的位置  $x_0$  和速度  $v_0$  来确定。它们的物理意义和确定方法将在 (6.1.3) 中讨论。由上述讨论可知, 物体做简谐振动时, 该物体相对平衡位置的位移随时间按余弦 (或正弦) 规律变化, 式 (6.5) 称为**简谐振动的表达式**。

**特别提醒:** 在后面的讨论中, 我们均采用余弦函数式 (6.5a) 来表示简谐振动。

广义地说, 任何一个物理量, 只要其量值随时间按式 (6.5) 所示的正弦或余弦规律变化, 都是简谐振动。

简谐振动的表达式有时也可以用复指数形式表示, 即

$$x = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \quad (6.6)$$

取上式的实部就是简谐振动的余弦函数表达式 (6.5a)。复指数形式在交流电路分析或频谱分析中比较方便。

### 3. 质点做简谐振动的速度和加速度

在简谐振动的余弦函数表达式 (6.5a) 中,  $x$  既是质点在振动过程中某一时刻离开平衡位置的位移, 也是质点在任意时刻的位置坐标。于是, 根据质点运动学中速度和加速度的定义, 可以得到质点做简谐振动时的速度和加速度分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = -v_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.7)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -a_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.8)$$

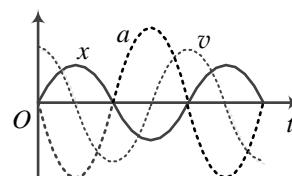


图6.3 简谐振动的位置 (位移)、速度、加速度随时间变化的曲线

上两式中  $v_m = \omega A$ ,  $a_m = \omega^2 A$  分别是简谐振动物体的速度和加速度的幅值。由此可见, 质点做简谐振动时, 其速度和加速度也随时间作周期性的变化。图 6.3 画出了做简谐振动物体的位置坐标 (即相对于平衡位置的位移)、速度和加速度随时间变化的函数关系 ( $\varphi = -\pi/2$ ), 其中“ $x-t$ ”曲线常称为**振动曲线**。

## 6.1.3 描述简谐振动的物理量

### 1、振幅

由简谐振动的表达式 (6.5a) 可知, 当  $|\cos(\omega t + \varphi)| = 1$  时, 振动物体相对于平衡位置的位移达到最大值, 即  $x_m = A$ ,  $A$  就称为**振幅** (amplitude)。由此不难看出: 振幅  $A$  给出了振动物体的运动范围  $[-A, A]$ 。

## 2. 周期、频率和圆频率

**周期** 振动物体完成一次完整振动所经历的时间称为**周期** (period), 用  $T$  来表示。每隔一个周期, 物体的振动状态 (指物体的位置坐标和速度) 就完全重复一次, 由此可得关于  $T$  的方程如下

$$\begin{aligned}x &= A \cos[\omega(t+T) + \varphi] = A \cos(\omega t + \varphi) \\v &= -\omega A \sin[\omega(t+T) + \varphi] = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

满足上述二式的  $T$  的最小值应为:  $\omega T = 2\pi$ , 所以

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.9)$$

**频率** 单位时间内物体所做的完全振动的次数称为**频率** (frequency), 用  $\nu$  表示。频率的单位是赫兹 (Hz), 简称赫。频率与周期的关系为

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (6.10)$$

由式 (6.9) 和式 (6.10) 得

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{或} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (6.11)$$

式 (6.11) 表明,  $\omega$  表示物体在  $2\pi$  秒时间内所做的完全振动次数, 称为振动的**圆频率** (circular frequency) 或**角频率** (angular frequency), 它的单位是弧度/秒 ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ )。对于弹簧振子,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 所以弹簧振子的周期和频率分别为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6.12)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.13)$$

由于弹簧振子的质量  $m$  和劲度系数  $k$  是弹簧振子系统固有的参数 (与外界和自身运动状态无关), 所以这样的周期和频率完全决定于振动系统自身的性质, 因此常称之为**固有周期** (natural period) 和**固有频率** (natural frequency)。

利用周期  $T$ 、频率  $\nu$  和角频率  $\omega$  的关系, 简谐振动表达式还可改写为

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad \text{或} \quad x = A \cos(2\pi\nu t + \varphi) \quad (6.14)$$

## 3. 相位和初相位

由式 (6.5a) 和式 (6.7) 可知, 对已知角频率  $\omega$  和振幅  $A$  的简谐振动, 振动物体在任意时刻  $t$  的运动状态 (位置和速度) 都由  $(\omega t + \varphi)$  决定。 $(\omega t + \varphi)$  称为简谐振动的**相位** (phase)。不难看出, **相位是决定简谐振动运动状态的物理量**。其中  $\varphi$  是  $t=0$  时刻的相位, 称为**初相**

位，简称**初相**（initial phase），初相决定了振动物体的初始运动状态。在一个周期内，振动物体每一时刻的运动状态都不相同，这些状态依次对应于从  $0$  到  $2\pi$  的相位变化。例如，在用余弦函数表示的简谐振动中，若某时刻  $\omega t + \varphi = 0$ ，即相位为零，则由式（6.5a）和式（6.7）可知该时刻物体的位置和速度分别为  $x = A$ ， $v = 0$ ，表示物体在正最大位移处，速度为零；当  $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$  时，则在该时刻  $x = 0$ ， $v = -\omega A$ ，表示物体在平衡位置处，并以最大速率向  $x$  轴负方向运动；当  $\omega t + \varphi = \frac{3\pi}{2}$  时， $x = 0$ ， $v = \omega A$ ，这时物体也在平衡位置，但以最大速率向  $x$  轴正方向运动。可见，在一个周期之内，不同的相位表示不同的运动状态。另一方面，由于振动具有周期性，每隔一个周期的时间，物体的运动状态就会完全重复（即物体的位置和速度完全复原），但是相位改变  $2\pi$ 。因此相位是描述物体振动状态的重要物理量。

相位概念的应用之一是比较两个简谐振动在“步调”上的差异。设有两个同方向、同频率的简谐振动，它们的振动表达式分别为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

它们在任意时刻的**相位差**为

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

这表明两个具有相同频率的简谐运动在任意时刻的相位差，都等于其初相位之差。当  $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$  时，两振动物体将同时到达各自位移的最大值或最小值，同时通过各自的平衡位置并向同一个方向运动，通俗地说它们的振动步调完全一致，这种情况称为**同相**，两个同相振动的  $x-t$  曲线关系如图 6.4 所示。

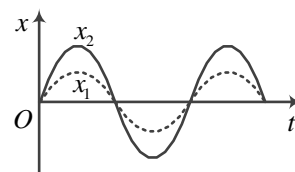


图6.4 两个同相振动的振动曲线

当  $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$  时，两个振动的步调完全相反，即一个物体如果到达正的最大位移时，另一个物体恰好到达负的最大位移处；当它们同时通过平衡位置时，其运动方向恰好相反。这种情况称为**反相**，两个反相振动的  $x-t$  曲线的关系如图 6.5 所示。

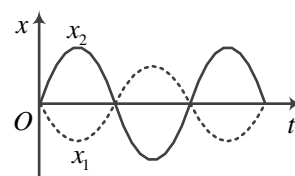


图6.5 两个反相振动的振动曲线

当  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  为其它值时，如果  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$ ，则称第二个简谐振动相位**超前**第一个振动  $\Delta\varphi$ ，或者说第一个振动相位**落后**于第二个振动  $\Delta\varphi$ 。由于当两个振动的相位差为  $2\pi$  时，两个振动的步调一致，因此振动相位的超前与落后具有相对性。例如当  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$  时，我们既可以说  $x_2$  的振动相位超前  $x_1$  的相位  $\frac{3\pi}{2}$ ，也可以说成  $x_2$  的振动相位落后  $x_1$  的相位  $\frac{\pi}{2}$ 。

图 6.6 画出了两个同频率、不同初相的简谐振动  $x_1$  和  $x_2$  的**振动曲线**。简谐振动  $x_1$  和  $x_2$  具

有恒定的相位差  $\varphi_2 - \varphi_1$ ，在步调上  $x_2$  比  $x_1$  超前一段时间

$$\Delta t = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega}.$$

相位也可以用来比较不同物理量之间变化的步调。

例如，比较物体做简谐振动时速度、加速度和位移变化的步调，如果我们把速度和加速度的表达式（6.7）和式

（6.8）改写为

$$v = -v_m \sin(\omega t + \varphi) = v_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = -a_m \cos(\omega t + \varphi) = a_m \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

通过比较可以看出， $x$ 、 $v$  和  $a$  除了幅值不同外，相位也不相同，速度的相位比位移的相位超前  $\pi/2$ ，加速度的相位比速度的相位超前  $\pi/2$ ，比位移的相位超前  $\pi$ ，或者说加速度和位移的相位相反。

#### 4. $A$ 和 $\varphi$ 的确定

现在介绍用振动物体的初始运动状态（即初始条件）确定简谐振动表达式中两个积分常数  $A$  和  $\varphi$  的方法。

振动物体在  $t=0$  时刻的运动状态由初始位置  $x_0$  和初速度  $v_0$  决定，称为振动的**初始条件**。由振动表达式（6.5a）和速度表达式（6.7），可得

$$x_0 = A \cos \varphi \quad (6.14)$$

$$v_0 = -\omega A \sin \varphi \quad (6.15)$$

由此两式可求得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (6.16)$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \quad (6.17)$$

对于一个给定的弹簧振子， $\omega$  是已知的，因此式（6.16）和（6.17）表明简谐振动的振幅  $A$  和初相  $\varphi$  可由振动物体的初始条件确定。这里需要特别注意的是，所有的反三角函数都是多值函数，即便将  $\varphi$  的取值范围限定在  $[0, 2\pi]$  或  $[-\pi, \pi]$  范围内，满足式（6.17）的  $\varphi$  仍然有两个可能值，其中只有一个能同时满足由初始条件给定的式（6.14）和（6.15）。所以在求  $\varphi$  时，必须首先要根据  $x_0$  和  $v_0$  的正负，利用式（6.14）和（6.15）判断  $\varphi$  所在的象限，再根据式（6.17）或将  $A$  代回式（6.14）求出  $\varphi$ 。例如当  $x_0 > 0$ 、 $v_0 < 0$  时， $\varphi$  的值在第一象限；而当  $x_0 > 0$ 、 $v_0 > 0$  时， $\varphi$  的值在第四象限。

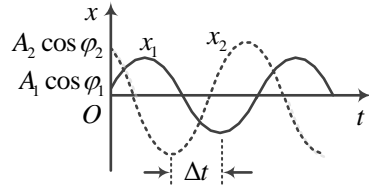


图6.6 两个初相不同的  $x \sim t$  曲线

## 6.1.4 简谐振动的旋转矢量表示法

为了形象、直观地分析简谐振动，并为后面讨论简谐振动的合成提供简捷的图解方法，我们来介绍简谐振动的旋转矢量表示法。所谓**旋转矢量**（rotating vector）就是一个绕固定点  $O$ 、沿逆时针方向以一定的角速度匀速旋转的矢量。如图 6.7 所示，为了能在旋转矢量和简谐振动  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  之间建立对应关系，人们规定：

- (1) 旋转矢量  $\mathbf{A}$  的大小（长度）等于简谐振动的振幅  $A$ ；
- (2) 矢量  $\mathbf{A}$  的旋转方向总是沿逆时针方向；
- (3) 矢量  $\mathbf{A}$  旋转的角速度等于简谐振动的角频率  $\omega$ ；
- (4) 矢量  $\mathbf{A}$  在初始时刻与  $x$  轴之间的夹角就等于简谐振动的初相位  $\varphi$ 。

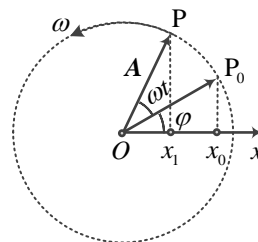


图6.7 简谐振动的旋转矢量表示法

于是，矢量  $\mathbf{A}$  在旋转过程中，其顶端  $P$  将绕  $O$  点以角速度  $\omega$  做匀速圆周运动，这样的圆周称为简谐振动的参考圆。而在任意时刻  $t$ ，矢量  $\mathbf{A}$  与  $x$  轴的夹角为  $(\omega t + \varphi)$ ，这就相当于谐振动的相位，同时矢量  $\mathbf{A}$  的端点  $P$  在  $x$  轴上投影点的位置坐标为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ 。这表明**旋转矢量  $\mathbf{A}$  在旋转过程中，其端点  $P$  在  $x$  轴上投影点的运动规律就是简谐振动。**

由此可知，旋转矢量表示法最大的优点就是形象、直观，不仅将比较抽象的、难以理解的“相位”概念用直观的“角度”形象的表示出来，还能直观地表示出相位变化的周期性。此外，还能直观地表示两个谐振动之间相位的超前与落后关系。例如，下列两个简谐振动

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad , \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

设  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$ ，它们的旋转矢量图如图 6.8 所示，可见  $x_2$  的振动相位超前  $x_1$  的相位为  $\Delta\varphi$ ，或  $x_1$  的振动相位落后  $x_2$  的相位为  $\Delta\varphi$ 。

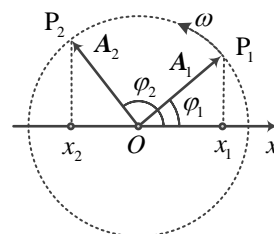


图6.8 两个简谐振动相位的超前与落后关系

特别是在讨论多个同频率、同方向的简谐振动的合成问题是，利用旋转矢量法更直观、方便。

**例 6.1** 一质点沿  $x$  轴做简谐振动，以平衡位置为坐标原点，振幅  $A = 0.10\text{m}$ ，周期  $T = 1.0\text{s}$ 。当  $t = 0\text{s}$  时，质点位于  $x_0 = 0.05\text{m}$  处，且向  $x$  轴正方向运动。试求

- (1) 此简谐振动的表达式；
- (2)  $t = T/2$  时质点相对平衡位置的位移、速度和加速度；
- (3) 质点从  $x = -0.05\text{m}$  处向  $x$  轴负方向运动，第一次到达平衡位置时所需的时间。

**解：**（1）设简谐振动的表达式为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ 。由题意可知

$$A = 0.10\text{m}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

再由物体运动的初始条件可得

$$x_0 = 0.10 \cos \varphi = 0.05 \text{ m} \quad ①$$

$$v_0 = -A\omega \sin \varphi = -0.2\pi \sin \varphi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} > 0 \quad ②$$

由①式可知  $\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$ ，但由②式可知  $\sin \varphi < 0$ ，即  $\varphi$  只能在第 3、4

象限中取值。所以只能取  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ 。将  $A$ 、 $\omega$  和  $\varphi$  代入振动表达式，可得

$$x = 0.10 \cos(2\pi t - \pi/3) \text{ (SI)}$$

若利用旋转矢量法求振动初相位  $\varphi$  则更为方便和直观。其方法是：首先作一个参考圆，根据初始条件（ $x_0 = 0.05\text{m} = A/2$  和  $v_0 > 0$ ）画出旋转矢量在初始时刻的位置，如图 6.9 中的  $A_0$ 。则该矢量与  $x$  轴的夹角就是初相位  $\varphi$ ，由图可以直观地得出

$$\varphi = -\pi/3$$

(2) 将 (1) 中的振动表达式分别对时间求一阶和二阶导数，可得物体的速度和加速度分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.20\pi \sin(2\pi t - \pi/3) \text{ (SI)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.40\pi^2 \cos(2\pi t - \pi/3) \text{ (SI)}$$

再将  $t = T/2 = 0.5\text{s}$  代入位置、速度和加速度的表达式，可得  $t = T/2$  时质点相对平衡位置的位移、速度和加速度分别为

$$x = 0.10 \times \cos(2\pi \times 0.5 - \pi/3) = -0.05 \text{ (m)}$$

$$v = -0.20\pi \times \sin(2\pi \times 0.5 - \pi/3) = -0.10\pi \times \sqrt{3} = -0.54 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$a = -0.40\pi^2 \times \cos(2\pi \times 0.5 - \pi/3) = 0.40\pi^2 \times 0.5 = 2.0 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2})$$

(3) 由于反三角函数是多值函数，所以本小题如果用代数方法求解，其分析讨论的过程将比较复杂，所以这里将直接采用旋转矢量法来求解。

首先作一个参考圆，使其半径等于谐振动的振幅。然后在参考圆上画出物体在  $x = -0.05\text{m}$  处并向  $x$  轴负方向运动时对应的旋转矢量  $A_1$ ，再画出物体第一次通过平衡位置时对应的旋转矢量  $A_2$ 。注意到旋转矢量的旋转方向总是沿逆时针方向，于是旋转矢量以角速度  $\omega$  转到从  $A_1$  转到  $A_2$  时所需的时间  $\Delta t$  就是所求的时间。由旋转矢量图 (6.10)，可以直观地看出

$$\omega \Delta t = 5\pi/6$$

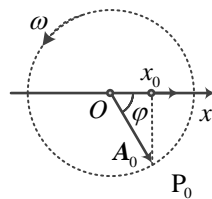


图6.9 例6.1用旋转矢量法求初相

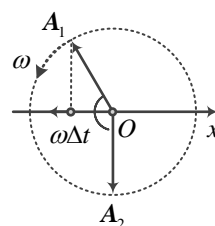


图6.10 例6.1用旋转矢量法求运动时间



所以所求的最小时间为

$$\Delta t = \frac{5\pi}{6\omega} = \frac{5}{12} \text{ (s)}$$

**例 6.2** 在光滑的水平桌面上有一轻弹簧，其左端固定，右端连着一个质量  $m = 20\text{g}$  的物体，弹簧的劲度系数  $k = 0.72\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。现以物体的平衡位置为坐标原点，水平向右为  $x$  轴的正方向。

(1) 把物体从平衡位置向右拉到  $x_0 = 0.05\text{m}$  处停下后再释放，求简谐振动表达式；

(2) 在上述条件下，求  $t = 2.0\text{s}$  时物体所受的力；

(3) 如果物体在  $x_0 = 0.05\text{m}$  处释放时，同时使物体具有向右的初速度  $v_0 = 0.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，再求简谐振动表达式。

**解：**(1) 设简谐振动的表达式为  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 。由题意可知，弹簧振子的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.72\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}{0.02\text{kg}}} = 6.0 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

再由初始条件，可得

$$x_0 = A\cos\varphi = 0.05\text{m} \quad \text{①}$$

$$v_0 = -A\omega\sin\varphi = 0 \quad \text{②}$$

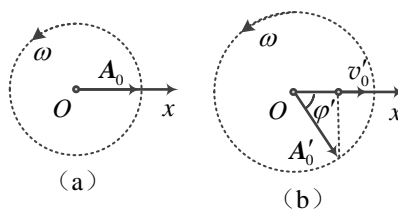


图6.11 例题6.2解图

所以物体的振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.05 \text{ m}$$

将  $A$  代入①式，可得：  $\varphi = 0$

由此可得简谐振动的表达式为

$$x = 0.05\cos(6.0t) \text{ (m)}$$

(2) 由上述结果可得，当  $t = 2.0\text{s}$  时，弹簧的伸长量为

$$x = 0.05\cos(6.0 \times 2.0)\text{m} = 4.22 \times 10^{-2} \text{ m}$$

所以物体所受的合力为

$$F = -kx = 0.72 \times 4.22 \times 10^{-2} \text{ (N)} = -3.0 \times 10^{-2}$$

式中 “-” 表示受力的方向指向左边。

(3) 由题意可知，物体的初始运动条件为

$$x'_0 = A'\cos\varphi' = 0.05\text{m} \quad \text{③}$$

$$v'_0 = -A'\omega\sin\varphi' = 0.3\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{④}$$

由式③④可得物体的振幅和初相分别为

$$A' = \sqrt{x_0'^2 + \frac{v_0'^2}{\omega^2}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$\tan \varphi' = \frac{-v_0'}{\omega x_0'} = -1, \quad \varphi' = -\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$

再由旋转矢量图 6.11 (b) 可知,  $\varphi'$  应在第四象限, 所以选取:  $\varphi' = -\frac{\pi}{4}$ 。

由此可得简谐振动表达式为

$$x = 0.0707 \cos\left(6.0t - \frac{\pi}{4}\right)$$

**例题 6.3** 一个做简谐振动的物体, 其振动曲线如图 6.12 所示。试求该振动的表达式。

**分析:** 质点的振动曲线不仅给出了质点的位置坐标随时间变化的函数关系, 同时因  $v = dx/dt$ , 即振动曲线上任意一点的斜率代表了该时刻的速度, 所以还可以从曲线上得到质点在任意时刻的运动方向。当斜率为正时, 表示质点沿  $x$  轴正方向运动; 斜率为负时, 表示沿  $x$  轴负方向运动。

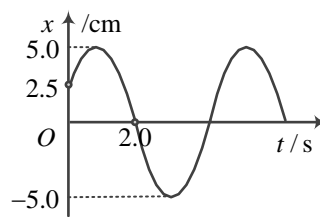


图6.12 例6.3图

**解:** 设这一简谐振动的表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

由图 6.12 可知, 振幅  $A = 5.0 \text{ cm} = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。当  $t = 0$  时

$$x_0 = A \cos \varphi = A/2$$

$$v_0 = -A\omega \sin \varphi > 0$$

由旋转矢量图 (见图 6.13), 可知  $\varphi$  应在第 4 象限, 故取  $\varphi = -\pi/3$ 。

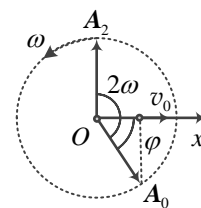


图6.13 例6.3解图

由图 6.12 还可得到, 在  $t = 2.0 \text{ s}$  时

$$x_2 = A \cos(2\omega + \varphi) = 0$$

$$v_2 = -A\omega \sin(2\omega + \varphi) < 0$$

考虑到  $t = 2.0 \text{ s}$  时质点的振动还不到半个周期, 所以有

$$2\omega + \varphi = \pi/2$$

即

$$\omega = \frac{\pi/2 - \varphi}{2} = \frac{\pi/2 + \pi/3}{2} = \frac{5\pi}{12} \text{ (rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

由此得简谐振动的表达式为

$$x = 5.0 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{5}{12}\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

当然, 本题中的角频率  $\omega$  也可以从旋转矢量图上更加方便、直观地求出。方法是: 在旋转矢量图 6.13 上分别画出  $t = 0$  和  $t = 2 \text{ s}$  时刻对应的矢量  $A_0$ 、 $A_2$ 。由图可以直观地看出,

旋转矢量在这 2s 内从  $A_0$  位置沿逆时针方向转到  $A_2$  位置时, 旋转矢量转过的角度为  $\frac{5\pi}{6}$ , 即

$$2\omega = \frac{5\pi}{6}, \text{ 所以 } \omega = \frac{5\pi}{12}。$$

## § 6.2 单摆和复摆

简谐振动不仅仅限于上述弹簧振子情况, 实际上只要某个物理量随时间的变化关系满足式 (6.4) 或式 (6.5) 都可以称为简谐振动。例如在小角度摆动的情况下, 摆动物体的运动也是简谐振动 (常称为角谐振动)。下面分别讨论单摆和复摆做简谐振动的运动规律。

### 6.1 单摆

一根不能伸缩的细线, 上端固定 (或一根刚性轻杆, 上端与无摩擦的铰链相连), 下端悬挂一个体积很小的重物, 将重物拉离平衡位置后释放, 则重物可在竖直平面内来回摆动, 这种装置称为**单摆** (simple pendulum), 如图 6.14 所示。通常把重物叫做摆锤, 细线叫做摆线。当摆线竖直时, 摆锤所受合力为零, 位于其平衡位置  $O'$  处。摆锤在摆动时相当于在绕悬挂点  $O$  做定轴转动, 以垂直纸面向外作为转轴的正方向, 则在某一时刻摆线相对平衡位置 (竖直方向) 的角位移为  $\theta$  时, 若摆锤在平衡位置  $O'$  右边,  $\theta$  为正, 在左边,  $\theta$  为负。在忽略空气阻力的条件下, 摆锤受到重力  $mg$  对转轴  $O$  的力矩为

$$M = -mgl \sin \theta \quad (6.18)$$

式中的负号表示力矩  $M$  的方向与角位移  $\theta$  的方向相反,  $l$  是摆长 (摆锤重心到悬挂点  $O$  的距离)。当  $\theta$  很小时 (小于  $5^\circ$ ),  $\sin \theta \approx \theta$ , 所以

$$M = -mgl\theta \quad (6.19)$$

根据转动定律:  $M = I\alpha = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , 可得摆锤摆动时的角加速度为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \quad (6.20)$$

令

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad (6.21)$$

则式 (6.20) 可改写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (6.22)$$

方程 (6.22) 与简谐振动的微分方程式 (6.4) 在数学形式上完全相同。所以单摆做小角度摆动时也是简谐振动, 其振动的角频率和周期分别为

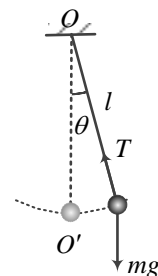


图6.14 单摆

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6.23)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6.24)$$

其振动表达式可写为

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.25)$$

式中  $\theta_m$  是最大角位移，即角振幅， $\varphi$  为初相位，它们均由初始条件决定。

式 (6.19) 表示的力矩和角位移成正比而反向，和弹簧振子受到的弹性力  $F = -kx$  类似。这种形式上类似弹性力的回复力（矩）称为**准弹性力**。

在小角度摆动的情况下，单摆的振动周期完全决定于振动系统本身的性质，即决定于重力加速度  $g$  和摆长  $l$ ，与振幅无关，所以单摆可以用来计时。式 (6.24) 还表明，通过测量单摆的周期，可以测量重力加速度，这是实验上测量重力加速度  $g$  的一种常用方法。

## 6.2 复摆

一个可绕固定轴  $O$  在竖直平面内摆动的刚体称为**复摆** (compound pendulum)，如图 6.15 所示。设复摆的质量为  $m$ ，对轴  $O$  的转动惯量为  $I$ ，平衡时，摆的重心  $C$  在轴  $O$  的正下方，两者的距离  $OC = l$ 。摆动时，连线  $OC$  相对于平衡位置的角位移  $\theta$  随时间变化。若以垂直纸面向外作为转轴  $O$  的正方向，则重心  $C$  在平衡位置右边时，角位移  $\theta$  为正，左边时为负。于是在任意时刻复摆受到的重力矩为

$$M = -mgl \sin \theta$$

式中的负号表明重力矩  $M$  的方向与角位移  $\theta$  的方向相反。当摆角很小（小于  $5^\circ$ ）时， $\sin \theta \approx \theta$ ，则

$$M = -mgl\theta$$

若忽略转轴上的摩擦阻力矩，并忽略空气阻力，则上式就是复摆受到的

合外力矩。再由转动定律  $M = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ，可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \theta = 0 \quad (6.26)$$

显然，式 (6.26) 就是简谐振动的运动学微分方程，所以在摆角很小时，复摆的运动也是简谐振动，其角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (6.27)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (6.28)$$

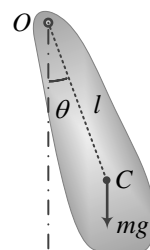


图6.15 复摆



图6.16 机械自鸣钟

式 (6.27) 和 (6.28) 表明, 当摆角很小时, 复摆的角频率和周期也完全决定于振动系统自身的性质。如果用实验测出摆的质量  $m$ 、重心到转轴的距离  $l$  以及摆的周期  $T$ , 就可以求得此物体绕转轴  $O$  的转动惯量  $I$ 。复摆的应用之一就是计时, 传统机械自鸣钟的钟摆就是一个复摆 (或单摆), 如图 6.16 所示。

## § 6.3 简谐振动的能量

我们仍以光滑水平面上的弹簧振子为例来讨论简谐振动系统的能量特点。以振子的平衡位置为坐标原点, 根据式 (6.5a) 和式 (6.7), 可得在任意时刻  $t$ , 振动物体的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

将  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  代入上式, 上式可改写为

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (6.29)$$

若取物体在平衡位置时的势能为零, 则系统的弹性势能为

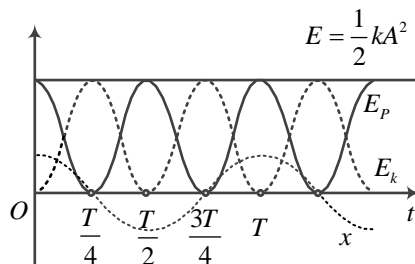


图6.17 弹簧振子的势能、动能和总能量随时间的变化

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (6.30)$$

由式 (6.29) 和式 (6.30) 可知, 简谐振动系统的动能和势能都随时间  $t$  作周期性的变化, 当物体的位移最大时, 势能达到最大值, 动能为零; 但物体的位移为零时, 势能为零, 而动能达到最大值。系统在任意时刻的总机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (6.31)$$

式 (6.31) 表明: 简谐振动系统的动能和势能虽然都随时间而变化, 但总机械能却不随时间变化。这是由于系统做简谐振动时只有保守内力 (弹性力) 做功, 系统的机械能守恒的缘故。式 (6.31) 还表明: **简谐振动系统的总能量与振幅的平方成正比**。特别提醒: 上述结论尽管是从弹簧振子这个特例中导出的, 但对于任何宏观的简谐振动系统都是正确的。

图 6.17 表示了弹簧振子的动能、势能随时间的变化曲线 (设  $\varphi = 0$ ), 做为比较, 同图画出了位移随时间的变化曲线。从图可见, 动能和势能变化的频率是弹簧振子振动频率的两倍, 总能量不变。

由式 (6.31) 可知, 对于给定的简谐振动系统 ( $k$  已知), 振幅可由总能量来计算, 这给出了求振幅的又一种方法。

此外, 我们也可以由能量守恒定律导出弹簧振子做简谐振动时的运动学微分方程。因为弹簧振子系统的总能量

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常量}$$

将上式对时间求导，有

$$mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

由于  $v = \frac{dx}{dt}$ ， $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ，于是上式可改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

这就是弹簧振子的运动学微分方程（6.4）。从能量关系导出物体的运动学微分方程的方法，对于不便采用受力分析的力学系统或者在非力学系统的研究中是十分有用的。

**例 6.4** 质量为  $m = 0.10\text{kg}$  的物体，以振幅  $A = 1.0 \times 10^{-2}\text{m}$  做简谐振动，其最大加速度为  $a_m = 4.0\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。试求：（1）振动的周期；（2）通过平衡位置时的动能；（3）总能量；（4）物体在何处时，其动能和势能相等？

**解：**（1）由  $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$ ，可知： $a_m = A\omega^2$ ，所以得

$$\omega = \sqrt{\frac{a_m}{A}} = \sqrt{\frac{4.0}{1.0 \times 10^{-2}}} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ (s)}$$

（2）通过平衡位置时物体的速度最大，所以

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 2.0 \times 10^{-3} \text{ (J)}$$

（3）总能量

$$E = E_{k,\max} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ (J)}$$

（4）因  $E_k + E_p = E$ ，所以当  $E_k = E_p$  时， $E_p = \frac{1}{2}E = 1.0 \times 10^{-3} \text{ J}$ ，再由

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

可得

$$x = \pm \sqrt{\frac{2E_p}{m\omega^2}} = \pm 0.707 \times 10^{-2} \text{ (m)}$$

## § 6.4 简谐振动的合成

在实际问题中，常会碰到一个质点同时参与几个振动的情况。例如，当两列声波同时到达空间某点时，该处介质中的质元将同时参与两个振动；再如振动的机器上悬挂的弹簧振子

的运动是机器的振动和弹簧引起的振动两者的合成运动。一般来说，振动的合成是比较复杂的，下面只研究几种简单而基本的简谐振动的合成。

### 6.4.1 两个同方向同频率的简谐振动的合成

设一个质点同时参与了两个在同一直线上进行的、同频率的简谐振动，取这一直线为  $x$  轴，这两个振动可表示为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

式中  $\omega$  是简谐振动的圆频率， $A_1$ 、 $A_2$  和  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  分别表示两个振动的振幅和初相位。因为  $x_1$  和  $x_2$  都是沿  $x$  轴的位移，所以该质点的合位移  $x$  为上述两个位移的代数和，即

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

为了能形象、直观地得到合成运动的规律，我们用旋转矢量表示法来讨论。如图 6.17 (a) 所示，首先画出与两个简谐振动相对应的旋转矢量  $A_1$  和  $A_2$ ，它们与  $x$  轴的夹角就是这两个简谐振动的相位。由于这两个振动的角频率相同，所以两个旋转矢量的角速度  $\omega$  也相同。由此可知  $A_1$  和  $A_2$  在旋转过程中的夹角保持不变，这样它们的合矢量  $A$  的大小也不变，并且以相同的角速度  $\omega$  旋转。换句话说合矢量  $A$  也是一个旋转矢量，所以合矢量  $A$  的末端在  $x$  轴上的投影点的运动也是简谐振动，其运动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

同时注意到在任意时刻合矢量  $A$  的末端在  $x$  轴上的投影点坐标恰好是  $A_1$  和  $A_2$  的末端在  $x$  轴上投影点的坐标之和（也就是两个分振动的位移之和），由此得

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.32)$$

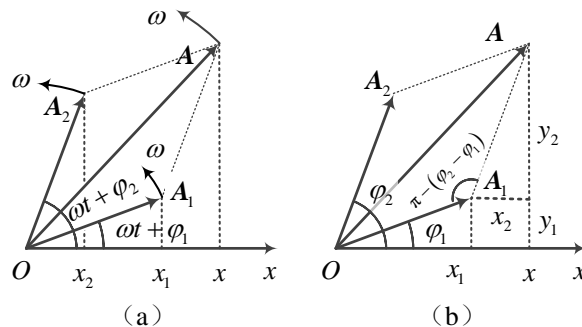


图6.18 两个同方向、同频率的简谐振动的和合成

这表明，两个同方向、同频率的简谐振动的合成运动仍然是一个同方向、同频率的简谐振动。可以证明，这一结论适用于任意多个同方向、同频率的简谐振动的合成。

为了得到合振动的振幅  $A$  和初相  $\varphi$ ，我们不妨假设旋转矢量  $A_1$ 、 $A_2$  在初始时刻和  $x$  轴

的夹角分别为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ ，如图 6.17 (b) 所示，则由余弦定理和几何关系可得

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (6.33)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (6.34)$$

现在来讨论合振动的振幅。从式 (6.33) 可以看出，合振幅不仅与两个分振动的振幅  $A_1$ 、 $A_2$  有关，还与两个分振动的相位差  $\varphi_2 - \varphi_1$  有关。下面先讨论两个特例。

(1) 若相位差  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ ， $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  则， $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ ，于是

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = A_1 + A_2 \quad (6.35)$$

即当两振动同相或相位差为  $2\pi$  的整数倍时，合振幅等于原来两个振动的振幅之和，这时合振幅达到最大值。合成结果为振动加强。

(2) 若相位差  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$ ， $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  则， $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ ，于是

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = |A_1 - A_2| \quad (6.36)$$

即当两个振动反相或相位差为  $\pi$  的奇数倍时，合振幅等于两分振动振幅之差的绝对值。这时合振幅达到最小值，合成结果为振动减弱。如果  $A_1 = A_2$ ，则  $A = 0$ ，振动合成的结果使质点处于静止状态。

在以后研究机械波、光波等波动过程的干涉和衍射现象时，经常会用到以上这两个特例。

在一般情形下，当  $\varphi_2 - \varphi_1$  取其他任意值时，合振动的振幅在最大值  $A_1 + A_2$  与最小值  $|A_1 - A_2|$  之间。由此可见，两个振动的相位差对振动的合成起着重要作用。

**例 6.5** 两个同方向、同频率的简谐振动的表达式分别为

$$x_1 = 3\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) (\text{SI}), \quad x_2 = 4\cos\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right) (\text{SI})$$

求合振动的表达式。

**解：**利用合振动的振幅和相位公式，可得合振动的振幅为

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = 5(\text{m}) \end{aligned}$$

合振动的相位为

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \\ &= \arctan \frac{3\sin \pi/4 + 4\sin 3\pi/4}{3\cos \pi/4 + 4\cos 3\pi/4} = \arctan(-7) \end{aligned}$$

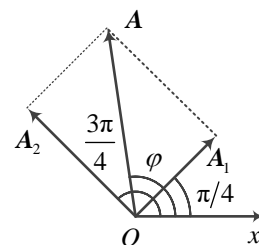


图6.19 例6.5图

再结合  $t=0$  时刻  $x_1$ 、 $x_2$  对应的旋转矢量  $A_1$  和  $A_2$  及其矢量合成图 6.18，通过其合矢量  $A$  的



方向，可知合振动  $x = x_1 + x_2$  的初相位在第二象限，即

$$\varphi = \arctan(-7) = 180^\circ - 81.87^\circ = 98.13^\circ = 1.71\text{rad}$$

实际上这一结果也可以从旋转矢量图 6.18，由几何关系更加方便直观的求出，即

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 5 \text{ (SI)} \quad , \quad \varphi = 45^\circ + \arctan \frac{4}{3} = 98.13^\circ$$

所以，合振动表达式为

$$x = 5 \cos(10t + 1.71) \text{ (SI)}$$

本题表明，在求合振动的相位时，要结合旋转矢量图首先判断其所在的象限，才可以正确求解。

## \*\* 6.4.2 多个同方向同频率的简谐振动的合成

现在来考察当一个质点同时参与  $N$  个同方向、同频率的简谐振动时，质点的合成运动情况。为简单起见，假设它们的振幅相等，都为  $a$ ，初相分别为  $0, \beta, 2\beta, 3\beta, \dots$ ，相应的振动表达式分别为

$$x_1 = a \cos(\omega t)$$

$$x_2 = a \cos(\omega t + \beta)$$

$$x_3 = a \cos(\omega t + 2\beta)$$

.....

$$x_N = a \cos[\omega t + (N-1)\beta]$$

由上一节的讨论可知，它们的合运动仍然是简谐振动，即合振动的表达式可写为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中  $A$  和  $\varphi$  分别是合振动的振幅和初相。为了直观地求出合振动的振幅和初相，我们仍然采用旋转矢量法来讨论。利用矢量的多边形合成法则，我们将各简谐振动相对应的旋转矢量在初始时刻的矢量  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ ，首尾相连，一一排列起来，如图 6.20 所示。则从  $A_1$  的始端  $O$  到  $A_N$  的末端  $P$  画一个有向线段  $\overline{OP}$ ，则  $\overline{OP}$  就是合振动的旋转矢量  $A$  在  $t=0$  时刻的位置，合矢量  $A$  的大小就是合振动的振幅，它与  $x$  轴的夹角  $\varphi$  就是合振动的初相。因

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = \dots = |A_N| = a$$

且相邻两个矢量的夹角均为  $\beta$ ，所以各矢量的端点位于同一个外接圆的圆周上，外接圆的圆心在  $C$  点，它是各矢量的垂直平分线的公共交点。

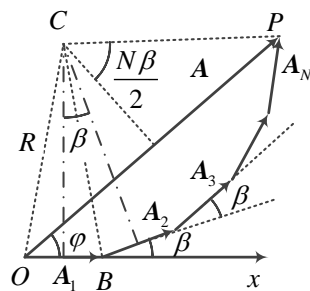


图6.20 多个同方向同频率的简谐振动的叠加

下面采用几何方法求出合振动的振幅  $A (= \overline{OP})$  和初相  $\varphi (= \angle POB)$ 。从图 6.18 不难看出,  $A_1$  和  $A_2$  的垂直平分线, 两者相交于外接圆的圆心  $C$  点, 它们的夹角显然为  $\beta$ , 合矢量  $A$  对圆心  $C$  的张角  $\angle OCP = N\beta$ 。假设外接圆的半径为  $R$ , 则合矢量的长度为

$$A = 2R \sin \frac{N\beta}{2}$$

又在三角形  $\triangle OCB$  中可以得到:  $a = 2R \sin \frac{\beta}{2}$ , 所以得

$$A = a \sin \frac{N\beta}{2} / \sin \frac{\beta}{2} \quad (6.38)$$

其与  $x$  轴的夹角

$$\varphi = \angle POB = \angle COB - \angle COP = \frac{\pi - \beta}{2} - \frac{\pi - N\beta}{2} = \frac{N-1}{2} \beta$$

这就是合振动的初相。最后求得合振动的表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = a \frac{\sin(N\beta/2)}{\sin(\beta/2)} \cos\left(\omega t + \frac{N-1}{2} \beta\right)$$

下面来讨论两种特殊情况

(1) 若  $\beta = \pm 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 则由 (6.38) 式, 可得

$$A = A_{\max} = Na$$

在旋转矢量图中, 这时  $N$  个矢量的方向都相同, 见图 6.21

(a), 所以合振动的振幅最大。

(2) 若  $\beta = \pm 2k\pi/N$  ( $k = 1, 2, \dots$ , 但  $k \neq nN$ , 其中  $n$  是整数), 这时, 旋转矢量图中的  $N$  个矢量依次相连构成了封闭的多边形, 见图 6.21 (b), 因此合振幅为零, 即:  $A = 0$ 。

多个同方向、同频率的谐振动的合成在多光束干涉、光栅衍射中具有重要应用。

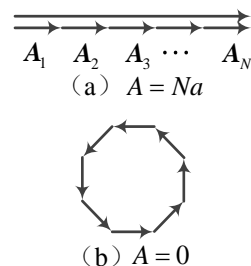


图6.21 合振幅的最大值与最小值

### 6.4.3 两个同方向不同频率的简谐振动的合成 拍

当两个同方向不同频率的简谐振动合成时, 在旋转矢量图示法中,  $A_1$ 、 $A_2$  的旋转速度就不相同。这样,  $A_1$ 、 $A_2$  之间的夹角将随着时间而改变, 因此, 合矢量  $A$  的长度将随时间而改变。当  $A_1$ 、 $A_2$  之间的夹角为零时, 合矢量达到最大值, 即合振动加强; 当  $A_1$ 、 $A_2$  反方向时, 合矢量最小, 即合振动减弱。在其它情况下, 合矢量的大小介于最大值和最小值之间。可见合矢量  $A$  所代表的合振动不再是简谐振动, 而是比较复杂的运动。这里只研究两个简谐振动频率之差远小于两个简谐振动频率的合成情况。这时, 合振动的振幅随时间缓慢地、周期性地变化, 这种现象称为**拍** (beat)。拍现象很容易用实验来演示。取两支频率相

差很小的音叉，分别敲击这两支音叉，听到的声音强度不随时间变化；如果同时敲击两支音叉，将会听到“嗡”、“嗡”、“嗡”……时强时弱的声音，这反映出合振动的振幅存在时强时弱的周期性变化，这就是拍的现象。频率相差越小，振幅变化越缓慢，也就越容易被观测到。下面从合振动表达式出发对拍现象作定量讨论。

为使问题简化，设两个简谐振动的振幅都是  $A$ ，初相都是  $\varphi$ ，角频率分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ，设两个简谐振动的振动表达式分别为

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

利用三角函数的和差化积公式，可得合振动的表达式为

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi\right) \quad (6.39)$$

上式是两个关于时间  $t$  的余弦函数之积，所以合运动不再是简谐振动。一般情况下，这样的合运动相当复杂。这里仅讨论在  $|\omega_2 - \omega_1|$  远小于  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的情况。此时，式中第一项因子（相对于第二项）随时间缓慢变化，第二项因子随时间快速变化，相应的角频率为  $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \omega_1$

（或  $\omega_2$ ）。因此可将式（6.39）给出的合成运动看成是角频率为  $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ ，振幅为

$\left|2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\right|$  的振动。显然，这样的合振动不再是简谐振动，因为其振幅随时间缓慢变化。

由于振幅的缓慢变化是周期性的，所以合成振动出现时强时弱的拍现象。因余弦函数的绝对值以  $\pi$  为周期，所以振幅变化的周期  $T'$  满足

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T' = \pi$$

即

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$$

合振幅变化的频率，即拍频为

$$\nu = \frac{1}{T'} = \nu_2 - \nu_1$$

若  $\nu_2 < \nu_1$ ，则拍频  $\nu = \nu_1 - \nu_2$ ，综合两种情况，得拍频的表达式为

$$\nu = |\nu_2 - \nu_1| \quad (6.40)$$

即拍频的数值等于两分振动的频率之差。图 6.22 画出了两个分振动以及合振动的位移-时间

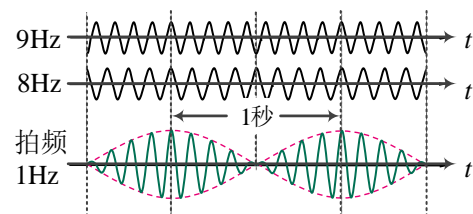


图6.22 两个同方向、不同频率的简谐振动的合成 拍现象

曲线，从图可看出，合振动的振幅随时间作缓慢变化。

拍现象在技术上有重要应用。例如，乐器中的双簧管利用两个簧片振动频率的微小差别产生悦耳的拍音；在给乐器校音时，首先调节到使乐器音和标准音叠加出现拍音，然后继续调节使拍频逐渐变小直至消失来校准乐器发音；拍现象还可用来测量频率：把一个未知频率的振动和另一已知频率的振动叠加产生拍后，测量合成振动的拍频、就可以求出未知的频率。拍现象和多普勒效应（参见第 7 章）一起，还常用于测量运动物体的速度，如测速雷达、卫星地面跟踪等。此外，在各种电子学测量仪器中，也常常用到拍现象。

## \*\*6.4.4 谐振分析和频谱

在自然界和工程技术中的振动，绝大多数不是简谐振动，而是复杂的振动。处理这类问题，往往把复杂振动看成由一系列不同频率的简谐振动的合成，或者说可以把复杂振动分解为一系列不同频率的简谐振动。现在来看一个频率之比为 1:2 的两个简谐振动合成的例子。设

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + A_2 \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

合振动的  $x-t$  曲线，如图 6.23 所示。可以看出合振动不再是简谐振动，但仍然是周期性振动，而且振动的频率与分振动中的最低频率（基频）相等。如果分振动不止两个，而且它们的振动频率是基频的整数倍（倍频），则它们的合振动仍然是周期运动，其频率等于基频。图 6.24 是频率为  $\nu$ ,  $2\nu$ ,  $3\nu$ ,  $\dots$  的简谐振动合成为频率等于基频的方波的情况。

既然一系列倍频简谐振动的合成是频率等于基频的周期运动，那么，与之相反，任意一个周期性振动都可以分解为一系列简谐振动之和，各个分振动的频率都是原振动频率的整数倍，其中与原振动频率相等的频率称为**基频**

（fundamental frequency），其他的频率则依照各自相对于基频的倍数而相应地称为二倍频、三倍频、 $\dots$ 。这种把一个复杂的周期性振动分解为一系列简谐振动之和的方法称为**频谱分析**（frequency analysis）。通常把一个实际的振动所包含的各种谐振成分的振幅和它们的频率的关系称为这个振动的**频谱**（frequency spectrum）。由傅里叶(J. Fourier) 级数或傅里叶积分的理论可知，周期性振动的频谱是线状谱，

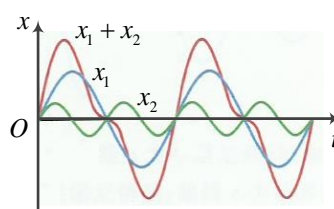


图6.23 频率比为1:2的两个谐振动的合成

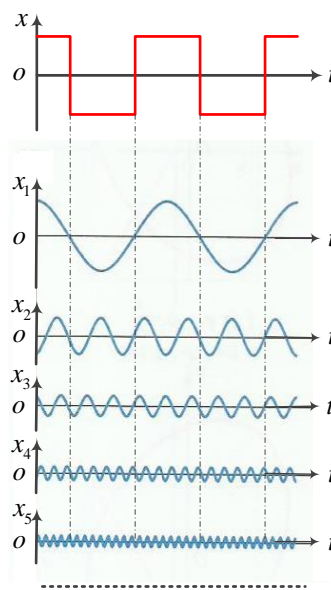


图6.24 方波信号的谐振分析

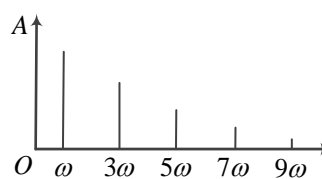


图6.25 方波信号的频谱

而非周期性振动的频谱是连续谱，图 6.25 给出了方波信号的频谱。

谐振分析或频谱分析在实际应用和理论研究中都是十分重要的。对振动信号进行频谱分析有助于了解测试对象的动态特性，从而对其性能做出评价，或者发现造成有害振动的原因，为防止振动破坏提供依据。在无线电技术中为了增强或消除某些频率的振动，就必须知道振动的频率分布信息。光学中，也常常需要把包含各种频率的复色光分解成一系列具有单一频率的单色光然后进行处理。

近年来，配备有数字电子计算机的专用仪器相继问世，如频率分析仪、快速傅里叶变换处理机等，使用这类仪器可以在很短时间内完成频谱分析。

### 6.4.5 两个相互垂直的同频率简谐振动的合成

当一个质点在同一平面内，同时参与两个振动方向相互垂直的简谐振动时，质点的位移是这两个振动的位移的矢量和。在一般情形下，质点将在平面上做曲线运动，曲线的形状将由两个振动的频率、振幅和相位差来决定。

设两个同频率的简谐振动分别在  $x$  轴和  $y$  轴上进行，振动表达式分别为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

在任一时刻  $t$ ，质点的位置是  $(x, y)$ 。当  $t$  改变时， $(x, y)$  也改变。上述两个方程也是质点运动轨迹的参量方程。如果把参量  $t$  消去，得到的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (6.41)$$

不难看出，式 (6.41) 表示了一个椭圆方程。因为质点的位移  $x$  和  $y$  在有限范围内变动，所以椭圆轨迹不会超出以  $2A_1$  和  $2A_2$  为边长的矩形区域。椭圆的形状由两个分振动的振幅  $A_1$ 、 $A_2$  和相位差  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  来决定。下面分析几种特殊情形。

(1) 若相位差  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ，则由式 (6.41) 可得

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

此时，质点的轨迹是一条通过坐标原点的直线。直线的斜率为这两个振动的振幅之比，如图 6.26 (a) 所示。在任意时刻  $t$ ，质点离开坐标原点的距离为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

所以合运动是平衡位置在坐标原点  $O$ 、沿直线  $y = \frac{A_2}{A_1} x$  的简谐振动，频率等于原来的频率，

振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

(2) 若两个振动的相位差为

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$ ，则式 (6.41) 可改写为

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x$$

这时质点在第 2、4 象限中一条直线上做同频率的简谐振动，其振幅也等于

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ ，如图 6.26 (e) 所示。

(3) 若相位差  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ ，则式 (6.41) 变为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

即质点运动的轨迹是以坐标轴为主轴的椭圆，如图 6.26 (c) 所示。椭圆上的箭头表示质点运动的方向。若  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2$ ，质点运动的轨迹也是以坐标轴为主轴的椭圆，但运动方向与上例相反，如图 6.26 (g) 所示。图 6.26 (b)、(h) 是两个分振动的相位差为  $\pi/4$  和  $7\pi/4$  时，合振动的轨迹。图 6.26 (d)、(f) 是两个分振动的相位差为  $3\pi/4$  和  $5\pi/4$  时合振动的轨迹。

当两个振动的振幅相等 ( $A_1 = A_2$ )，且  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$  或  $3\pi/2$  时，合成运动的轨迹将由椭圆变为圆。

通过以上分析可知：一个沿直线的简谐振动，或匀速圆周运动，或某些椭圆运动都可以分解成两个相互垂直的简谐振动的合运动。这在圆偏振光、椭圆偏振光的产生与鉴别中有重要应用。

### \*6.4.6 两个相互垂直的不同频率简谐振动的合成

两个相互垂直的、不同频率的、简谐振动的合成运动一般比较复杂，合成运动轨迹随时间变化，不稳定。如果两个相互垂直的简谐振动的频率差异很小，则合运动的轨迹将不断地按照图 6.26 所示的顺序在上述的矩形范围内由直线逐渐变成椭圆，又由椭圆逐渐变成直线，并重复进行。但是，当两个振动的频率成简单的整数比时，可得到稳定、封闭的合成运动轨迹。图 6.27 给出了当两个振动方向相互垂直、具有不同频率比 ( $\nu_x : \nu_y = 2:1$ 、 $3:1$  和  $3:2$ ) 和不同相位差的两个简谐振动的合成运动的轨迹图。这样的轨迹曲线叫做李萨如图形。

由图可知，若分别作一条横线 ( $x$  轴) 和竖线 ( $y$  轴) 与李萨如图形相切，则两振动的频率比和李萨如图形与横、竖线的切点数成反比关系，即

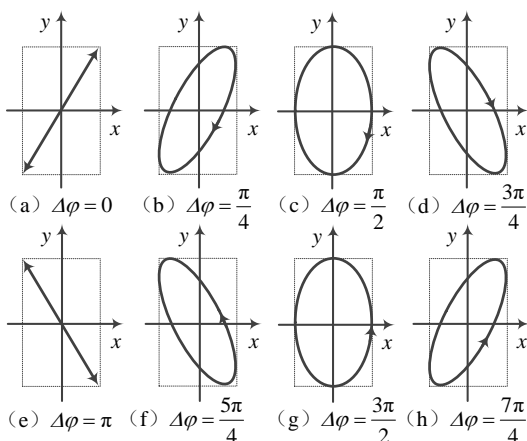


图6.26 两个同频率振动方向互相垂直的两个谐振动的合成  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  且  $\varphi_1 = 0$ 。

$$\frac{\nu_y}{\nu_x} = \frac{\text{图形与 } x \text{ 轴的切点数}}{\text{图形与 } y \text{ 轴的切点数}}$$

若已知一振动频率，利用上式可求得另一个振动的频率。

利用李萨如图形，除了可求得振动的频率外；还可以确定两振动的相位关系，这是无线电技术中常用的测定频率、确定相位关系的方法。

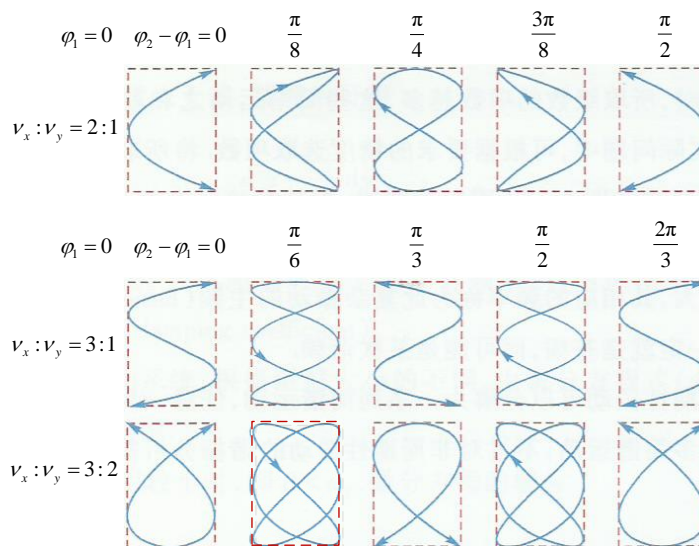


图6.27 李萨如图形

## \* § 6.5 阻尼振动 受迫振动 共振

从动力学的角度来看，在 § 6.1 中所讨论的简谐振动属于无阻尼自由振动，系统没有能量损耗，也不与外界交换能量，所以能量保持不变，振幅保持不变，是一种理想情况。但是实际的振动系统总是有阻尼的，当没有外界的能量补充时，振幅要随时间衰减，最后停止振动，这称为阻尼振动。要维持振动，就需要施加周期性的外力，对系统做正功，给系统补充能量，这就是受迫振动。本节研究阻尼振动、受迫振动、共振及其相关的一写问题。

### \*6.5.1 阻尼振动

上面已指出，实际的振动系统，当没有外界的能量补充时，振幅都要随时间衰减。这种振幅随时间衰减的振动称为**阻尼振动**（damped vibration）。振幅衰减的原因，一是有摩擦阻力的存在，振动系统要不断地克服摩擦阻力而做功，将振动的能量逐渐转变为热能而耗散掉，因而使振幅逐渐减小，这称为**摩擦阻尼**；二是振动的能量将以波的形式向四周传播，振动系统的能量转化为波的能量，从而使振动的振幅衰减，这称为**辐射阻尼**。本节只研究摩擦阻尼引起的阻尼振动。

这里主要考察摩擦阻力与速度成正比，即  $f = -\gamma v$  的情况，式中  $\gamma$  称为**阻力系数**。当系统的运动速度不大时，空气、水等流体的粘滞阻力就属这种情形。仍以弹簧振子为例，设

弹簧振子在粘滞性流体中振动，在考虑了粘滞阻力后，弹簧振子的动力学微分方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (6.42)$$

$\gamma$  的大小由物体的形状、大小、表面状况以及流体的性质决定。令

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{\gamma}{m} \quad (6.43)$$

$\omega_0$  是阻尼不存在时振动系统的角频率， $\beta$  称为**阻尼系数**（或衰减常数）。于是式（6.42）可写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.44)$$

这是一个二阶线性常微分方程。此方程的解，根据阻尼大小的不同，可分为三种情况。

（1）当阻尼较小，即  $\beta < \omega_0$  时，此方程的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.45)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (6.46)$$

是阻尼振动的角频率。 $A_0$  和  $\varphi$  仍然是由初始条件所决定的两个积分常数， $t=0$  时

$$x_0 = A_0 \cos \varphi \quad v_0 = -\beta x_0 - \omega A_0 \sin \varphi$$

由此可得

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \right)^2} \quad (6.47)$$

$$\varphi = \arctan \left( -\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega x_0} \right) \quad (6.48)$$

$\varphi$  角所在的象限由  $x_0$  和  $v_0$  的符号确定；当  $\beta=0$  时，式（6.47）和式（6.48）就分别退化成式（6.17）和式（6.18）。式（6.45）为阻尼振动的表达式，其中的  $A_0 e^{-\beta t}$  可以看作是随时间变化的振幅，它随时间按指数规律衰减。

在图 6.28 中画出了阻尼振动的位移时间曲线，并用虚线表示了振幅衰减的情况。阻尼越大，振幅衰减得越快。显然阻尼振动不是简谐振动，它也不是严格意义下的周期运动，因为位移并不能恢复原值。尽管如此，人们仍然习惯于把因子  $\cos(\omega t + \varphi)$  的相位变化  $2\pi$  所经历的时间叫做周期。这样，阻尼振动的周期为

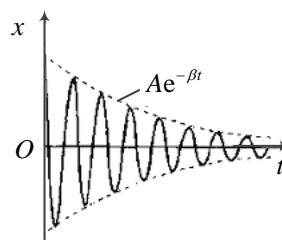


图6.28 阻尼振动的位移时间曲线



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (6.49)$$

显然

$$T > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

这表明，由于阻尼的影响，阻尼振动的周期比无阻尼振动系统的固有周期  $T_0$  要长。以上讨论的这种阻尼较小的情况称为

**欠阻尼**。

(2) 阻尼过大，即当  $\beta > \omega_0$  时，方程的解为

$$x = Ae^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

式中  $A$  和  $B$  是待定常数。此时物体不做振动，慢慢回到平衡位置。如图 6.29 中的曲线  $b$  所示。这种情况称为**过阻尼**。

(3) 如果阻尼使得  $\beta = \omega_0$ ，这种情况称为**临界阻尼**，方程的解为

$$x = e^{-\beta t} (A + Bt)$$

式中  $A$  和  $B$  是待定常数。此时物体刚刚不能做振动，并且很快回到平衡位置。位移时间曲线如图 6.29 中的曲线  $c$  所示。其回到平衡位置所需的时间比过阻尼短。因此，当物体偏离平衡位置时，如果要它在不发生振动的情况下，最快地恢复到平衡位置，通常采用施加临界阻尼的方法。例如，用各种指针式仪表进行测量时，需要仪表指针尽快停止在所指示的刻度处，这时应尽可能地把仪表系统调节到临界阻尼状态。

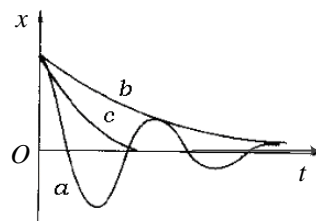


图6.29 欠阻尼、过阻尼、临界阻尼

## \*6.5.2 受迫振动

摩擦阻尼总是存在的，只能减小而不能完全消除它。所以实际的振动物体如果没有能量补充，最后都要停止下来。为了使物体能够长时间地稳定振动，通常要对振动系统施加一个周期性的外力，对系统做功，不断为系统补充能量。当补充的能量与耗散的能量相等时，系统就能做等幅振动。物体在周期性外力的作用下发生的振动称为**受迫振动** (forced vibration)。这种周期性外力叫策动力（或强迫力）。受迫振动是很常见的，例如，如果当电动机转子的质心不在转轴上时，电动机工作时它的转子就会对基座产生一个周期性外力而使基座做受迫振动；扬声器中的线圈在通有音频电流时，与线圈相连的纸盆在周期性外加磁力的作用下受迫振动而发声；人们听到声音也是耳膜在声波的周期性压力作用下做受迫振动的结果。

设策动力随时间按余弦规律变化，为  $H \cos \omega t$ 。式中  $H$  是策动力的最大值，称为力幅。 $\omega$  为策动力的角频率。由于还受到弹性力和阻力的作用，物体做受迫振动的动力学微分方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + H \cos \omega t$$

令  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $2\beta = \frac{\gamma}{m}$ ,  $h = \frac{H}{m}$ , 上式可改写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h \cos \omega t \quad (6.50)$$

此方程的通解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.51)$$

式 (6.51) 表明, 受迫振动可以看成是两个振动的叠加, 一个振动由式 (6.51) 中的第一项表示, 它是一个振幅衰减的阻尼振动, 经过一段时间后, 这一分振动就减弱到可以忽略不计, 称为**暂态解**; 另一个振动就是式 (6.51) 中第二项所表示的振幅不变的振动, 称为**稳态解**。因此, 经过一段时间, 受迫振动达到稳定状态后的振动就由下式表示

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.52)$$

这是一个等幅振动, 其角频率  $\omega$  就是策动力的角频率。将上式代入 (6.50), 可以求得处于稳定状态的受迫振动的振幅为

$$A = \frac{h}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \quad (6.53)$$

而稳态受迫振动与策动力之间的相位差为

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.54)$$

受迫振动达到稳定状态时, 振幅  $A$  和相位差  $\varphi$  都与初始条件无关。

### \*6.5.3 共振

由式 (6.53) 可以推知, 在  $\omega_0$ 、 $\beta$ 、 $h$  不变的条件下, 稳态受迫振动的振幅随策动力的角频率而改变, 与物体的初始运动状态无关。图 6.30 给出了振幅  $A$  随  $\omega$  变化的情况。

由此可知, 当策动力的频率为某一特殊值时, 受迫振动的振幅将达到最大值, 这一现象称为**共振** (resonance)。相应的频率称为共振频率, 用  $\omega_r$  表示。利用求极值的方法, 由式

(6.53) 可以求得共振频率为

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (6.55)$$

此时的最大振幅为

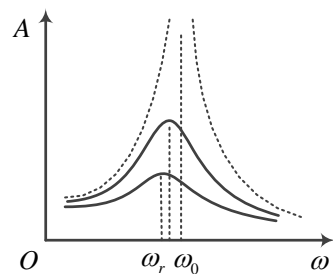


图6.30 不同阻尼时振幅与策动力频率的关系

$$A = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (6.56)$$

一般来说，共振频率  $\omega_r$  不等于系统的固有振动频率  $\omega_0$ 。只有当阻尼很小 ( $\beta \ll \omega_0$ ) 时，共振频率  $\omega_r$  才接近于固有振动频率  $\omega_0$ ，这时振幅将趋于无限大，系统发生强烈共振。

将式 (6.52) 对时间  $t$  求导数，得到做受迫振动的物体在稳态时的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

其中速度振幅为

$$v_m = \omega A = \frac{\omega h}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \quad (6.57)$$

式 (6.57) 表明，物体的受迫振动的速度同样与策动力的角频率  $\omega$  相关。图 6.31 给出了几种阻尼下速度振幅的频率响应曲线。由图 6.31 可见，策动力的角频率  $\omega$  与系统的固有振动的角频率  $\omega_0$  相等时，即在  $\omega = \omega_0$  时，速度振幅达到最大值。此现象称为**速度共振**。

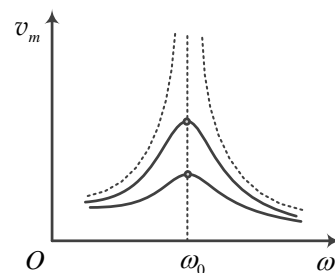


图6.31 不同阻尼时速度振幅与策动力频率的关系

共振现象是极为普遍的。在声、光、无线电、原子内部以及工程技术中都常遇到。共振现象有有利的一面。许多仪器就是利用共振原理设计的，例如利用原子核内的核磁共振可以探测物体的内部结构以及进行医疗诊断；收音机利用电磁共振(电谐振)进行选台；一些乐器利用共振来提高音响效果。共振也有不利的一面，共振时因为系统振幅过大会造成设备的损坏。例如，1940年11月7日，竣工只有四个月的美国塔科马大桥在风力的作用下产生共振而坍塌。共振现象有利有弊，应该掌握共振的规律，利用其有利的一面，减轻有害的一面。

## \*\* § 6.6 非线性系统简介

到目前为止，我们讨论的力学系统都属于线性系统。线性系统的主要特征就是物体的动力学行为可以用一组线性微分方程表示，其解满足线性叠加原理，结合初始条件或边界条件，可以得到能够精确反应物体运动过程的代数解（或数值解）。但是在自然界和工程技术中大多数的实际问题是非线性的，即描述这些现象的方程式大多是非线性方程。在本节将以大角度摆为例对非线性问题做一个简单讨论，并简单介绍混沌现象。

### \*\*6.6.1 大角度摆的非线性问题

对单摆（或复摆），当摆角  $\theta$  角不是很小时，由于  $\sin \theta$  不能近似等于  $\theta$ ，它的动力学微分方程为

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin\theta$$

令  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$ ，则上式可改写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad (6.58)$$

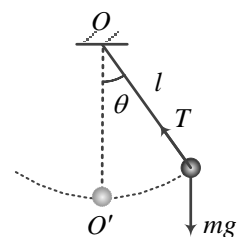


图6.32 大角度单摆

式中  $\omega_0$  是小角度振动时的固有角频率。因为方程 (6.58) 中含有因变量  $\theta$  的非线性项  $\sin\theta$ ，所以它是一个非线性方程。

对于非线性因素较弱，略去非线性因素又不从根本上影响最后结果的问题，可以用线性方程对非线性方程做近似处理，这种方法称为线性化方法，如处理单摆的小角度摆动问题时就用了这种方法。有很多问题，这种简化是合理的。但对许多非线性问题，这种简化会带来很大误差，甚至面目全非，线性化方法就不适用了，人们不得不研究直接求解非线性问题的方法，但非线性微分方程的求解在数学上是非常复杂的。下面将用相图法对非线性振动做定性描述。

相图法是由法国数学家、物理学家庞加莱 (Jules Henri Poincaré) 首先提出。具体方法是将质点的位置 (角位置) 作为横坐标轴，将速度 (角速度) 作为纵坐标轴所构成的直角坐标平面，称为相平面。所谓“相”指的是某种运动状态，用位置 (角位置) 和速度 (角速度) 来表示。对应于相平面上的一个点称为相点。当物体运动状态发生变化时，相点就在相平面内运动，其轨迹称为相迹或相图。它将物体运动状态显示出来，展现了运动的全貌。因此，通过对相图的研究，可以了解系统的稳定性、运动趋势等特征。相图的描述方法已成为研究非线性振动的基本方法之一。

下面用相图来讨论大角度摆问题。令  $\frac{d\theta}{dt} = p$ ，则由式 (6.56) 表示的状态方程可改写为

$$\frac{dp}{dt} = -\omega_0^2 \sin\theta$$

从中消去时间变量  $t$  得

$$\frac{dp}{d\theta} = -\omega_0^2 \frac{\sin\theta}{p}$$

对上式积分得

$$\frac{1}{2} p^2 + \omega_0^2 (1 - \cos\theta) = h \quad (6.59)$$

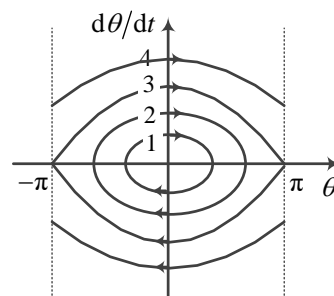


图6.33 大角度摆在不同初始条件下的相迹

由这个方程，对一系列的  $h$  取值，在相图  $(p, \theta)$  上可画出一系列的相迹。见图 6.33。当  $h$  很小时，见图中曲线 1，相迹近似为一个椭圆，单摆做稳定的小幅振动；当  $h = \omega_0^2$  时，相迹仍然闭合，见图中曲线 2，单摆做幅角  $= \pi/2$  的稳定振动； $h$  大于  $2\omega_0^2$  时，相迹分裂为上下

两支，见图中曲线 4，相迹不再闭合，上面一支表示摆锤沿逆时针方向做圆周运动，下面一支表示沿顺时针方向做圆周运动； $h = 2\omega_0^2$  时，上下两条相迹在  $\theta = \pm\pi$  处相交，见图中曲线 3，交点处的相图表示沿  $\theta$  正（或负）方向运动的摆锤到达正上方位置  $\theta = \pm\pi$  时，角速度为零，其后的运动可能沿原来的方向运动（转动），也可能反向运动（摆动），说明在此  $h$  值的条件下，摆锤在正上方时处于一种随机运动状态。 $h = 2\omega_0^2$  时的相迹是摆动和转动的分界线。

## 6.6.2 混沌现象

从大角度摆的情况可以看出，非线性动力学微分方程的解取决于初始条件，初始条件不同，其解的形式有可能完全不同。不仅如此，非线性系统可能还会出现对初始条件极为敏感的，结果更为复杂的混乱运动状态。初始条件的细微差异，经过一段时间的累积，就会导致完全不同的结果，使得系统未来的运动状态完全无法预测而呈现出“随机”行为。我们将这种用决定论的方法描述的系统出现了随机的、无规则运动，称为**混沌**（chaos）。

当然，不是所有的非线性系统都会出现混沌现象，例如由式（6.56）或式（6.57）所描述的非线性系统，对初值不太敏感，不会出现混沌。但是如果考虑阻尼的影响，并加上一个周期性的外力，于是大角度摆的运动微分方程可写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2[1 + A\sin(pt)]\sin\theta = 0$$

其中， $\delta$  为阻尼系数， $A$ 、 $p$  是周期性外力的力幅和频率。

研究表明，当  $A$  在一定的范围内取值时，可以出现不同的转动或振动状态；但当  $A$  在另外的区域内取值时，则会出现很随机的混沌运动状态。在相图上表现为一条永不重复、非常混乱的相迹，如图 6.34 所示。

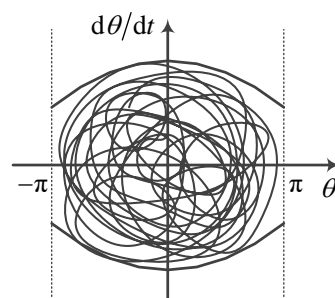


图6.34 混沌相迹图

混沌是非线性系统普遍存在的现象。自然界中存在的许多复杂运动，大多与混沌有关。对于出现混沌的非线性系统来说，要通过给定的初始条件精确的确定其未来的运动状态，实际上是办不到的。1963 年，美国气象学家洛伦茨在研究气象演变的动力学方程时，曾提出“蝴蝶效应”来比喻非线性系统对初值的敏感性。他把大气在初值上的微小差异比喻成一只蝴蝶扇动了一下翅膀，尽管这对大气的初值影响极小，但其结果可能在地球的另一个地方导致一场风暴。由此他得出结论，长期的天气预报是不可能的。混沌现象不仅存在于物理学、化学、生物学、气象学等自然科学领域，甚至在社会学、经济学领域也存在混沌现象，例如股市的长期预测实际上也是不可能的。

## 思考题

6.1 什么是简谐运动？下列运动中哪个是简谐运动？

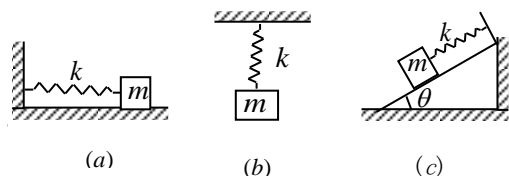
(1) 拍皮球时球的运动；

- (2) 圆锥摆的运动；  
 (3) 一个滑块在半径很大的光滑凹球面底部的小幅滑动。

6.2 下列叙述是否正确，为什么？

- (1) 若物体受到一个总是指向平衡位置的合力，则物体必定做简谐振动。  
 (2) 简谐振动过程能量守恒。因此，凡是能量守恒的过程就是简谐振动。

6.3 倔强系数为  $k$  的弹簧和一个质量为  $m$  的物体组成一振动系统，若弹簧本身的质量不计，弹簧的自然长度为  $l_0$ ，物体与平面以及斜面间的摩擦不计。在如图所示的三种情况中，振动周期是否相同。



题 6.3 图

6.4 如果把一个弹簧振子和一个单摆拿到月球上去，它们的振动周期将如何改变？

6.5 任何一个实际的弹簧都是有质量的，如果考虑弹簧的质量，弹簧振子的振动周期将变大还是变小？

6.6 当一个弹簧振子的振幅增大到原来的两倍时。试分析它的下列物理量将受到什么影响：振动的周期、最大速度、最大加速度和振动的能量。

6.7 把一个单摆从其平衡位置拉开，使悬线与竖直方向成一小角度  $\theta$ ，然后放手任其摆动。如果从放手时开始计算时间，此  $\theta$  角是否是振动的初相？单摆的角速度是否是振动的角频率？

6.8 同一简谐振动的位移、速度和加速度之间的相位差是多少？谁比谁超前？

6.9 已知一个做简谐运动的物体，在  $t=0$  时正越过平衡位置，用旋转矢量图说明由此条件能否确定物体振动的初相。

6.10 什么是拍现象？在拍现象的合成振动中， $A(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$  的频率是  $\frac{|\nu_1 - \nu_2|}{2}$ ，可为什么拍频是  $\nu_b = |\nu_1 - \nu_2|$ ？

6.11 如何改变稳态受迫振动的频率？改变这个频率时，受迫振动的振幅会受到什么影响？

## 习 题

6.12 一轻弹簧上端固定，下端铅直地悬挂一个质量为  $m$  的物体，设该物体以周期  $T=2.0\text{s}$  振动。今在该物体上再附加一个  $2.0\text{kg}$  的小铁块，这时周期变化为  $3.0\text{s}$ 。试求物体的质量  $m$ 。

6.13 一弹簧振子的质量为  $0.500\text{kg}$ ，测得其振动周期为  $1.250\text{s}$ ，当它的振幅为  $20.0\text{cm}$  时，试求弹簧振子的角频率、弹簧的劲度系数、振子的最大速度和最大加速度。

6.14 一物体放在水平木板上，物体与板面间的静摩擦系数为  $0.50$ 。

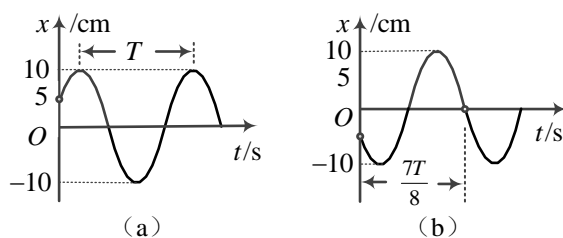
- (1) 若此板沿水平方向做简谐振动，频率为  $2.0\text{Hz}$ ，要使物体在板上不致滑动，振幅的最大值为多少？  
 (2) 若令此板改做竖直方向的简谐振动，振幅为  $0.50\text{m}$ ，要使物体一直保持与板接触的最大频率是多少？

6.15 一物体沿  $x$  轴做振幅为  $20\text{cm}$ ，周期为  $1.6\text{s}$  的简谐振动，物体质量为  $0.20\text{kg}$ 。当  $t=0$  时，物体位于  $x$  轴上  $-10\text{cm}$ ，且向  $x$  轴负方向运动。试求：

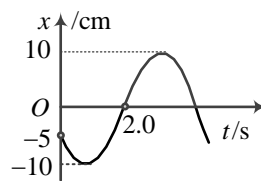
- (1) 物体的振动表达式；  
 (2)  $t=1.0\text{s}$  时物体所受的合外力的大小和方向；  
 (3) 由起始位置开始第二次运动到平衡位置时所需的时间。

6.16 物体做简谐振动的振动曲线分别如图 (a) 和 (b) 所示，图中  $T$  作为已知值。试分别写出它们

的简谐振动表达式。



习题6.16图



习题6.17图

6.17 某质点做简谐振动的振动曲线如图所示，试求：

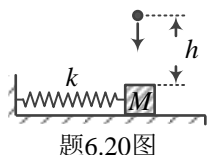
- (1) 质点的振动表达式；
- (2) 质点从初始位置出发，第一次运动到正最大位移时所需的时间。

6.18 一弹簧振子沿  $x$  轴做简谐振动，以平衡位置作为坐标原点。已知振动物体的最大位移为  $x_m = 0.40\text{m}$ ，最大速度为  $v_m = 0.80\pi\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，受到的最大恢复力为  $F_m = 0.80\text{N}$ 。假定在  $t=0$  时刻，振子的位移为  $0.2\text{m}$ ，速度沿  $x$  轴的负方向。试求：

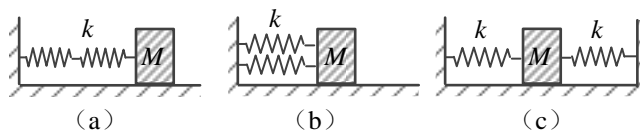
- (1) 此弹簧振子的振动表达式；
- (2) 振动系统的总能量；
- (3) 动能和势能相等时物体的位置。

6.19 质量为  $0.20\text{kg}$  的物体在竖直方向做简谐振动，振幅为  $5.0\text{cm}$ ，周期为  $0.25\text{s}$ ，以竖直向上为  $x$  轴的正方向，开始振动时物体在负方向的最大位移处。试求在  $0.10\text{s}$  时物体的动能和系统的势能。

6.20 一个水平面上的弹簧振子，轻质弹簧的劲度系数为  $k$ ，所系物体的质量为  $M$ ，振幅为  $A$ 。现有一质量为  $m$  的小物体从高度  $h$  处自由下落。当振子在最大位移处，小物体正好落在  $M$  上，并粘在一起，这时系统的振动周期、振幅和振动能量有何变化？如果小物体是在振子到达平衡位置时落在  $M$  上，这些量又怎样变化？



题6.20图



题6.21图

6.21 两个倔强系数均为  $k$  的相同的轻质弹簧，按图示的不同方式连接一个质量为  $m$  的物体，组成一振动系统。试求它们的振动周期。

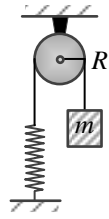
6.22 定滑轮的半径为  $R$ ，转动惯量为  $I$ ，一根不可伸长的轻绳绕过滑轮，一端与固定的轻质弹簧相连接，弹簧的倔强系数为  $k$ ；另一端挂一质量为  $m$  的物体，如图所示。现将  $m$  从平衡位置向下拉一微小距离后放手，证明物体做简谐振动，并求振动周期。设绳与滑轮间无滑动，轴的摩擦及空气阻力不计。

6.23 一匀质杆长为  $1.00\text{m}$ ，可绕其一端的水平轴在竖直平面内做小角度摆动（可视为简谐振动），把一个与杆质量相等的质点固定在杆上离轴为  $h$  的地方，用  $T_0$  表示未加质点时杆的振动周期，用  $T$  表示加上质点后的周期。试求：

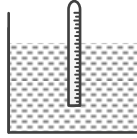
- (1) 当  $h = 0.50\text{m}$  和  $h = 1.00\text{m}$  时的比值  $T/T_0$ ；
- (2) 是否存在某个  $h$  值，使  $T/T_0 = 1$ ？

6.24 如图所示，质量为  $m$  的比重计悬浮在密度为  $\rho$  的液体中，比重计圆管横截面积为  $S$ 。试证明：

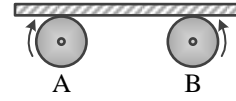
在不计液体的黏滞阻力和液面的起伏时，比重计在竖直方向的自由振动是简谐振动，并求振动周期。



题6.22图



题6.24图



题6.25图

6.25 如图所示，一质量为  $m$  的匀质直杆放在两个迅速旋转的轮上，两轮旋转方向相反，轮间距  $l = 20\text{cm}$ ，杆与轮之间的摩擦系数  $\mu = 0.18$ ，证明：在此情况下直杆做简谐振动，并求其振动周期。

6.26 有两个同方向、同频率的简谐振动，它们的振动表达式如下

$$x_1 = 0.12 \cos\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) (\text{SI}) \quad , \quad x_2 = 0.10 \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right) (\text{SI})$$

(1) 求它们合成振动的表达式；

(2) 若另有一振动： $x_3 = 0.14 \cos(10\pi t + \varphi_3)$  (SI)，问  $\varphi_3$  为何值时， $x_1 + x_3$  的合振幅为最大； $\varphi_3$  为何值时， $x_2 + x_3$  的合振幅为最小。

6.27 已知一质点同时参与两个同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1 = 0.20 \cos(10\pi t + 5\pi/6) (\text{SI}) \quad , \quad x_2 = 0.20 \cos(10\pi t + \pi/2) (\text{SI})$$

试求：该质点合振动的表达式。

6.28 两个同方向、同频率的简谐振动，其合振动的振幅  $A = 0.170\text{m}$ ，合振动的位相与第一个振动的位相之差为  $45^\circ$ ，若第一个振动的振幅  $A_1 = 0.240\text{m}$ ，试求第二个振动的振幅及第一、第二两个振动的相位差。

6.29 三个同方向、同频率的简谐振动分别为

$$x_1 = 0.2 \cos(10\pi t) (\text{SI}) \quad , \quad x_2 = 0.2 \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI}) \quad , \quad x_3 = 0.2\sqrt{2} \cos\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) (\text{SI})$$

试求出合振动的表达式。

6.30 一物体同时参与如下两个互相垂直的、同频率的简谐振动

$$x = 0.05 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) (\text{SI}) \quad , \quad y = 0.05 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI})$$

式中  $T$  为周期。求合成运动的轨迹方程，并用旋转矢量法画出合成运动轨迹图。

6.31 将频率为  $358\text{Hz}$  的标准音叉和一待测频率的音叉产生的振动合成，测得拍频为  $4.0\text{Hz}$ 。若在待测频率音叉上粘一小块橡皮泥，则拍频将减小，求待测音叉的固有频率。

6.32 一物体做阻尼振动，开始时其振幅为  $0.16\text{m}$ 。经  $60$  秒后振幅减为  $0.08\text{m}$ ，问

(1) 阻尼系数  $\beta$  是多少？

(2) 再经历多长时间振幅减至  $0.04\text{m}$ ？

6.33 质量为  $3.0\text{kg}$  的物体连接在一倔强系数为  $1200\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  的弹簧上做阻尼振动，阻力系数  $\gamma = 72.0\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$ ，求阻尼振动的角频率  $\omega$ 。

6.34 质量为  $2.0\text{kg}$  的物体连接在一倔强系数为  $1650\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  的弹簧上做受迫振动，周期性外力



$F = 100 \cos 30t$  (N)，阻力系数为  $\gamma = 40.0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ 。试求：

- (1) 稳定振动时的角频率  $\omega$ ；
- (2) 外力的角频率为多少时系统出现位移共振现象？共振时振幅是多少？