2011-2012 下期中题解

一、（10 分）设直线$L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$及平面$\pi:x+y+z=0$。1）求直线$L$在平面$\pi$上的投影直线$L_0$的方程；2）求直线$L_0$绕$z$轴转一周所成的曲面的方程。

解：设过L且与π垂直的平面是$\pi_0:x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$，即$\pi_0:(1+\lambda)x+(1-\lambda)y-(1-\lambda)z-1+\lambda=0$。其法向量$\vec{n}_0=\{1+\lambda,1-\lambda,\lambda-1\}$与$\pi:x+y+z=0$的法向量$\vec{n}=\{1,1,1\}$垂直。解$1+\lambda+1-\lambda+\lambda-1=0$得$\lambda=-1$。$\pi_0:y-z-1=0$。因此$L_0:\begin{cases}y-z-1=0\\x+y+z=0\end{cases}$。

设直线L_0绕z轴转一周所成的曲面是Σ。$\forall M(x,y,z)\in\Sigma$，它必是某点$M_0(x_0,y_0,z)\in L_0$扫出来的。$\begin{cases}y_0-z-1=0\\x_0+y_0+z=0\end{cases}$，$y_0=1+z,x_0=-1-2z$。$M,M_0$到$z$轴的距离相等。因此

$$\Sigma:(1+z)^2+(1+2z)^2=x^2+y^2$$

即

$$\Sigma:x^2+y^2=5z^2+6z+2$$

二、（8 分）设$f(x,y)=\sqrt[3]{x^5-y^3}$，求$f_x(0,0)$。

解：$\varphi(x)=f(x,0)=x^{\frac{5}{3}},f_x(0,0)=\varphi'(0)=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{x=0}=0$。

三、（12 分）讨论$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在（0,0）点的连续性，可导性和可微性。

解：$0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，又$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$，$f(x,y)$在（0,0）点连续。

$$\varphi(x)=f(x,0)\equiv0,\psi(y)=f(0,y)\equiv0,f_x(0,0)=\varphi'(0)=0,f_y(0,0)=\psi'(0)=0,$$

$f(x,y)$ 在（0,0）可偏导。

如果 $z=f(x,y)$ 在（0,0）可微，则 $dz\big|_{(0,0)}=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y=0$，

$\Delta z-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]=\Delta z=\circ\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$。但是，令 $\Delta y=k\Delta x$，

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{k\Delta x^2}{\Delta x^2+k^2\Delta x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ 不存在。$f(x,y)$ 在（0,0）不可微。

四、（10 分）设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

解：$\dfrac{\partial g}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial u}+x\dfrac{\partial f}{\partial v}$，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y\left(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+\dfrac{\partial f}{\partial v}+x\left(y\dfrac{\partial f}{\partial v\partial u}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$，

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial v}+x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$；$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial v}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$。

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\left(x^2+y^2\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+4xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+2\dfrac{\partial f}{\partial v}=x^2+y^2+4xyf_{12}+2f_2$。

五、（8 分）试证明曲面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 上任一点处的切平面都过原点。

证：$F(x,y,z)=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)-z$。在 $\left(x,y,xf\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$ 点，

$$\vec{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}=\left\{f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right),f'\left(\frac{y}{x}\right),-1\right\}$$

切平面

$$\left[f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right](X-x)+f'\left(\frac{y}{x}\right)(Y-y)-Z+xf\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

用 $X=0,Y=0,Z=0$ 代入上方程左边

$$-x\left[f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]-yf'\left(\frac{y}{x}\right)+xf\left(\frac{y}{x}\right)\equiv 0$$

故曲面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 上任一点 $\left(x,y,xf\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$ 处的切平面都过原点。

六、（10 分）已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$，并且 $f(1,1)=2$，求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$。

$z=x^2+C(y),C'(y)=\frac{\partial z}{\partial y}=-2y,C(y)=-y^2+c,f(x,y)=x^2-y^2+c$，由 $f(1,1)=2$ 得 $c=2$。$f(x,y)=x^2-y^2+2$。

在 D 的边界上，$y^2=9-9x^2$，$g(x)=f(x,y)=10x^2-7(-1\le x\le 1)$。

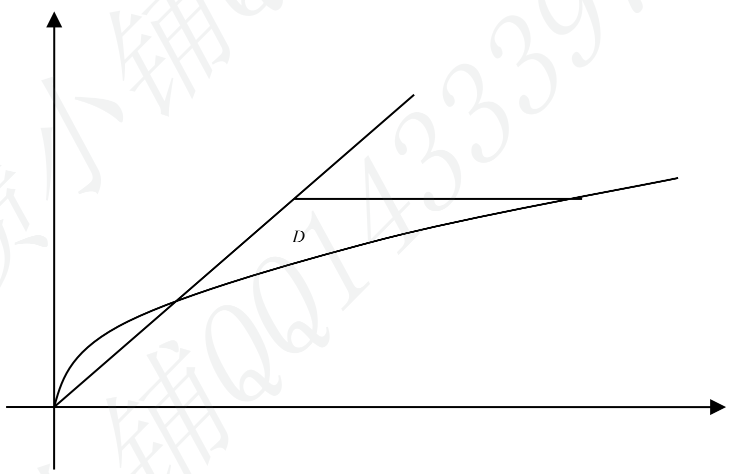
令 $g'(x)=20x=0$ 得 $x=0$。$g(0)=-7,g(-1)=g(1)=3$。$g_{\min}=-7,g_{\max}=3$。

在 D 的内部，让 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $x=y=0$。$f(0,0)=2$。

故，$\underset{D}{f_{\min}}=-7,\underset{D}{f_{\max}}=3$。

七、（10 分）计算二重积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$。

解：$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy=\iint\limits_D \sin\frac{\pi x}{2y}dxdy$，其中 D 如下图。



把 D 当作 Y 型区域。

$$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$$

$$=-\int_1^2\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_{x=y}^{x=y^2}dy=-\int_1^2\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}dy=-\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos x dx$$

$$=-\frac{8}{\pi^3}\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

八、（10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 9\right\}$。

解：$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|dxdy=\iint\limits_{D_1}\left(4-x^2-y^2\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2-4\right)dxdy$，其中

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\},D_2=\left\{(x,y)\middle|4\le x^2+y^2\le 9\right\}$$

用极坐标计算。

$$\iint\limits_{D_1}\left(4-x^2-y^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(4\rho-\rho^3\right)d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[2\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 d\theta=8\pi$$

$$\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2-4\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3\left(\rho^3-4\rho\right)d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}\rho^4-2\rho^2\right]_2^3 d\theta=\frac{25}{2}\pi$$

$$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|dxdy=\frac{41}{2}\pi$$

九、（10 分）计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega(x+z)dV$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成。

解：根据对称性，$\iiint\limits_\Omega xdV=0$。用球面坐标计算。

$$\iiint\limits_\Omega(x+z)dV=\iiint\limits_\Omega zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{8}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi=\frac{1}{8}\pi$$

十、（12 分）设有一小山，取它的底面所在平面为 xOy 坐标面，其底部所占区域为 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2-xy\le 75\right\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$。

（1）设$M(x_0,y_0)$为区域D上一点，问$h(x,y)$在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为$g(x_0,y_0)$，试写出$g(x_0,y_0)$的表达式。

（2）现若利用此小山开展攀岩活动，为此需要在D的边界$x^2+y^2-xy=75$上寻找使得（1）中$g(x,y)$最大的点作为攀登的起点，试确定该点的位置。

解：（1）$h_x(x_0,y_0)=-2x_0+y_0, h_y(x_0,y_0)=-2y_0+x_0$，$h(x,y)$在$M(x_0,y_0)$点沿平面上方向

$$\overrightarrow{grad}h(x_0,y_0)=\{-2x_0+y_0,-2y_0+x_0\}$$

的方向导数最大。此方向导数的最大值为

$$g(x_0,y_0)=\left|\overrightarrow{grad}h(x_0,y_0)\right|=\sqrt{(-2x_0+y_0)^2+(-2y_0+x_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$$

（2）解条件极值问题

$$\begin{cases} f=5x^2+5y^2-8xy \\ x^2+y^2-xy=75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f=375-3xy \\ x^2+y^2-xy=75 \end{cases}$$

$$L=375-3xy+\lambda\left(x^2+y^2-xy-75\right)$$

$$\begin{cases} L_x=-3y+\lambda(2x-y)=0 & (1) \\ L_y=-3x+\lambda(2y-x)=0 & (2) \\ L_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0 & (3) \end{cases}$$

如果$\lambda=0$，前二方程解得$x=y=0$不满足第三式。所以$\lambda\neq0$。$(1)\cdot x-(2)\cdot y$得$x^2=y^2$。

用$y=x$代入(3)得$y=x=\pm\sqrt{75}$；用$y=-x$代入(3)得$-y=x=\pm5$。根据问题的实际，$y=-x$时f大，攀登的起点是(5,-5)或(-5,5)。