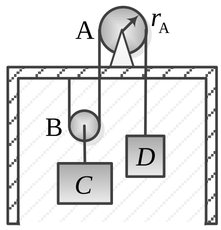
第 4 章　刚体力学 习题解答

4.1—4.6　答案略

4.7　如图所示，A 为电动机带动的绞盘，其半径 $r_A = 0.25\text{m}$，B 为一动滑轮，重物 C 在电动机带动下以其初速度 $v_0 = 4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 向上作匀速运动。当电动机停止工作时，C 开始做匀减速运动，其加速度量值为 $a_C = 0.5\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$。假设绳不可伸长、绳与绞盘间无滑动。试求：在任意时刻 t



习题4.7图

(1) 配重 D 的速度和加速度；

(2) 绞盘 A 的角速度和角加速度。

解：(1) 由题意可知，当绳不可伸长时，配重 D 的位移、速度和加速度的大小均是重物 C 的两倍，但运动方向相反，C 向上，D 向下运动。以向下为 D 的运动正方向，则

$$a_D = -2a_C = -1.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$v_D = v_{D0} - a_D t = 2v_{C0} - 2a_C t = 8.0 - t \text{ (SI)}$$

(2) 由于绳与绞盘间无相对滑动，所以绞盘 A 的边缘上任意一点做圆周运动的速率和切向加速度的大小与配重 D 的速度和加速度大小相同。再由角量与线量的关系，得 A 的角速度和角加速度分别为（以顺时针为正）

$$\omega = \frac{v_D}{r_A} = \frac{8.0 - t}{0.25} \text{ (SI)} = 32 - 4t \text{ (SI)}$$

$$\alpha = \frac{a_D}{r_A} = -4.0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

4.8　一电唱机的转盘以 $n = 78 \text{ rev}\cdot\text{min}^{-1}$ 的转速匀速转动。

(1) 求转盘上与转轴相距 $r = 15\text{cm}$ 处 P 点的线速度 v 和法向加速度 a_n；

(2) 在电动机断电后，转盘在恒定的阻力矩作用下减速，并在 $t = 15\text{s}$ 内停止转动，求转盘在停止转动前的角加速度 α 及断电后转过的圈数 N。

解：(1) 转盘角速度为

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi\times 78}{60} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 8.17 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

所以 P 点的线速度和法向加速度分别为

$$v_p = \omega r = 1.23 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad , \quad a_n = \omega^2 r = 10.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) 断电后，转盘的角加速度和转过的圈数分别为

$$\alpha = \frac{0-\omega}{t} = -0.545 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2} \quad , \quad N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega t}{2} = 9.75\text{rev}$$

4.9　小轿车发动机的转速在 4.0s 内由 $800 \text{ rev}\cdot\text{min}^{-1}$ 均匀地提高到 $3000 \text{ rev}\cdot\text{min}^{-1}$。

（1） 求在这段时间内发动机的平均角加速度和转过的转数；

（2） 若在发动机的转轴上装有一半径为 0.10m 的飞轮，试求在 $t=3\text{s}$ 时飞轮边缘上任意一点的切向加速度和法向加速度的大小。

4.9 解：（1）由匀变速转动的规律可知，发动机的角加速度为

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{(3000-800)\times 2\pi/60}{4}\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})=57.6(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$$

转过的转数为

$$N=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\approx 127\ (\text{rev})$$

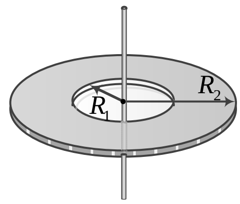
（2）在 $t=3\text{s}$ 时飞轮的角速度为

$$\omega=\omega_0+\alpha t=800\times 2\pi/60+57.6\times 3=257\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$$

所以飞轮边缘上任意一点的切向和法向加速度的大小为

$$a_\tau=r\alpha=5.67\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) \qquad , \qquad a_n=r\omega^2=6.6\times 10^3\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

4.10 如图所示，计算一个质量为 m，内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的空心圆盘绕通过盘心并与盘面垂直的固定轴的转动惯量。假设质量 m 在盘面上均匀分布。

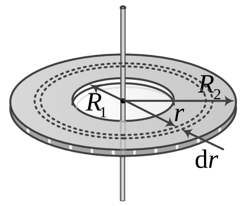


习题4.10图

解：由题意可知，该圆盘单位面积上的质量（即质量的面密度）为

$$\sigma=\frac{m}{\pi(R_2^2-R_1^2)}$$

可将圆盘看作一系列半径不同的同心细圆环的叠加。任取一个半径为 r、宽度为 $\text{d}r$ 的细圆环，其面积为 $\text{d}s=2\pi r\text{d}r$，质量为 $\text{d}m=\sigma 2\pi r\text{d}r$，则该细圆环对转轴的转动惯量为



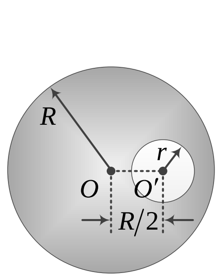
习题4.10解图

$$\text{d}I=r^2\text{d}m=\sigma 2\pi r^3\text{d}r=\frac{2m}{R_2^2-R_1^2}r^3\text{d}r$$

所以整个空心圆环的转动惯量为

$$I=\int r^2\text{d}m=\int_{R_1}^{R_2}\frac{2m}{R_2^2-R_1^2}r^3\text{d}r=\frac{1}{2}m\left(R_2^2+R_1^2\right)$$

4.11 在质量为 M、半径为 R 的匀质圆盘上，挖出一个半径为 r（$r<R/2$）的圆孔，圆孔的中心在盘半径的中点 O' 处，如图所示。求剩余部分对通过原来的盘心 O 且与盘面垂直的轴的转动惯量。



习题4.11图

4.11 解：对通过盘心且与盘面垂直的轴而言，完整圆盘的转动惯量为

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2$$

利用平行轴定理，挖去部分（小圆盘）的对 O 轴的转动惯量为

$$I_2 = \frac{1}{2}mr^2 + m\left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{4}mR^2$$

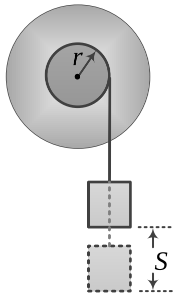
其中：$m = \frac{M}{\pi R^2}\pi r^2 = \frac{M}{R^2}r^2$，代入上式，得

$$I_2 = \frac{1}{4}M\left(r^2 + \frac{2r^4}{R^2}\right)$$

根据转动惯量的可加性，所求剩余部分的转动惯量为

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{4}M\left(2R^2 - r^2 - 2\frac{r^4}{R^2}\right)$$

4.12 一质量为 m 的物体悬于一条轻绳的一端，绳的另一端绕在一轮轴的轴上，轮轴的半径为 r，轴沿水平方向且垂直于轮轴面，如图所示。整个装置架在光滑的固定轴承之上，绳与轮轴之间没有相对滑动。当物体从静止释放后，在时间 t 内下降的距离为 S。试求整个轮轴的转动惯量（用 m、r、t 和 S 表示）。

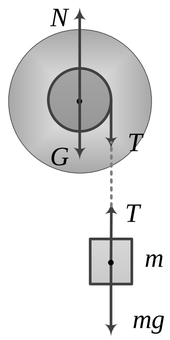


习题4.12图

4.12 解： 首先用隔离体法对轮轴和重物进行受力分析，如图所示。对重物和滑轮分别用牛顿运动定律和转动定律得

$$mg - T = ma \quad ①$$

$$Tr = I\alpha \quad ②$$



习题4.12解图

因轮轴和绳之间没有相对滑动，由角量与线量的关系有

$$a = r\alpha \quad ③$$

联立方程①、②、③式，可解得

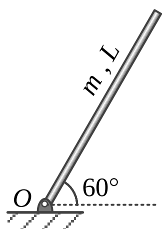
$$I = m\left(\frac{g}{a} - 1\right)r^2 \quad ④$$

又 $S = \frac{1}{2}at^2$ 即 $a = \frac{2S}{t^2}$ ⑤

将⑤式代入④式，可得轮轴的；转动惯量为

$$I = mr^2\left(\frac{gt^2}{2S} - 1\right)$$

4.13 一长为 L 的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴 O 转动，如图所示。抬起另一端使棒向上与水平面成 $60°$，然后无初转速地将棒释放。已知棒对轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，其中 m 和 L 分别为棒



习题4.13图

的质量和长度。试求棒转到水平位置时的角速度。

解：由题意可知，当棒转到与水平面的夹角为θ时，棒只受重力和轴对棒的支持力，其中支持力通过转轴O，不产生力矩。所以，棒受到的合外力矩为

$$M=-mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

式中的符号表示力矩M的方向与角位移$\mathrm{d}\theta$（即转轴）的方向相反。由转动定律

$$M=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=I\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

即

$$I\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}=-mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

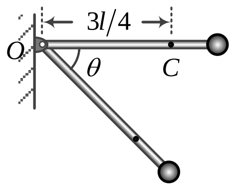
对上式分离变量，并取定积分，有

$$\int_0^{\omega}I\omega\mathrm{d}\omega=\int_{60^\circ}^{0}-mg\frac{L}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

积分可得

$$\omega=\sqrt{\frac{mgL\sin60^\circ}{I}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{2L}}$$

4.14 如图所示，长为 l、质量为 m 的匀质细杆，可绕通过杆的端点并与杆垂直的固定轴 O 转动。杆的另一端连接一质量为 m 的小球，杆从水平位置由静止开始释放。忽略轴处的摩擦，当杆转至与水平方向成θ角时，试求：



习题4.14图

（1）棒的角速度；

（2）距转轴为$3l/4$处 C 点的法向加速度是多少？

4.14 解：杆和小球作为一个整体对 O 轴的转动惯量为

$$I=I_{棒}+I_{球}=\frac{1}{3}ml^2+ml^2=\frac{4}{3}ml^2$$

又系统受的重力对转轴O的力矩为

$$M=mg\frac{l}{2}\cos\theta+mgl\cos\theta=\frac{3}{2}mgl\cos\theta$$

由转动定律

$$M=I\alpha=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=I\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

可得

$$I\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}=\frac{3}{2}mgl\cos\theta$$

对上式分离变量并取定积分，有

$$\int_0^{\omega} I\omega \mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta} \frac{3}{2} mgl\cos\theta \mathrm{d}\theta$$

由此得，棒的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3mgl\sin\theta}{I}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}\sin\theta}$$

（2）利用角量与线量的关系，C 点的法向加速度为

$$a_n = \omega^2 r_c = \frac{9g}{4l}\sin\theta \cdot \frac{3}{4}l = \frac{27g}{16}\sin\theta$$

4.15　以 $M = 20\ \mathrm{N \cdot m}$ 的恒力矩作用在有固定轴的转轮上，经 $t_1 = 10\ \mathrm{s}$ 使该轮的转速由零增大到 $N = 100\,\mathrm{rev \cdot min^{-1}}$ 。此时撤去该力矩，转轮因摩擦力矩的作用经 $t_2 = 100\mathrm{s}$ 而停止。试推算此转轮对其固定轴的转动惯量。（假设摩擦力矩是一个常量）

4.15 解： 由题意可知，有外力矩作用时，转轮的角加速度为

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1 - \omega_{10}}{t_1} = \frac{2\pi N}{t_1}$$

由转动定律，可知

$$M - M_f = I\alpha_1 = I\frac{2\pi N}{t_1} \qquad ①$$

同理，在没有外力矩作用时转轮的角加速度为

$$\alpha_2 = \frac{\omega_2 - \omega_{20}}{t_2} = -\frac{2\pi N}{t_2}$$

由转动定律，有

$$-M_f = I\alpha_2 = -I\frac{2\pi N}{t_2} \qquad ②$$

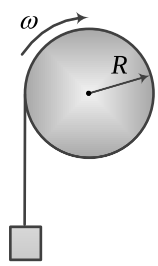
再由①②两式，可得

$$M = \frac{2\pi N}{t_1} I + M_f = \frac{2\pi N}{t_1} I + \frac{2\pi N}{t_2} I = 2\pi N I\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$$

由此解得刚体的角动量为

$$I = \frac{Mt_2t_2}{2\pi N\left(t_2 + t_2\right)} = 17.4\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

4.16　一轴承光滑的定滑轮，质量为 $M = 2.00\mathrm{kg}$ ，半径为 $R = 0.100\mathrm{m}$ ，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量为 $m =$ 5.00 kg 的物体，如图所示。已知定滑轮的转动惯量为 $I = \frac{1}{2}MR^2$ ，其初角速度 $\omega_0 = 10.0\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$，方向垂直纸面向里，绳与轮没有相对滑动。试求：



习题4.16图

(1) 定滑轮的角加速度的大小和方向；

(2) 绳中的张力；

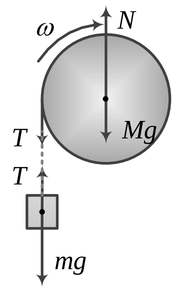
(3) 定滑轮的角速度变化到$\omega=0$时，物体上升的高度；

4.16 解：(1) 对滑轮和物体分别作受力分析，如图所示。不难理解物体向上作减速运动，加速度方向向下。为此以向下作为物体运动的正方向，则转轴的正方向垂直纸面向外，根据牛顿运动定律和转动定律，有

$$mg-T=ma$$

$$TR=I\alpha$$

$$a=r\alpha$$



习题4.16解图

由上述方程可解得

$$\alpha=\frac{mgR}{I+mR^2}=\frac{2mg}{\left(2m+M\right)R}=81.7\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

方向垂直纸面向外。

(2) 绳中的张力为

$$T=\frac{I\alpha}{R}=\frac{Mmg}{2m+m}=8.17\mathrm{N}$$

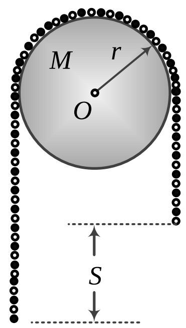
(3) 由匀变速转动的规律：$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta$，可得当$\omega=0$时，滑轮转过的角度为

$$\theta=-\frac{\omega_0^2}{2\beta}=-0.612\ \mathrm{rad}$$

所以物体上升的高度

$$h=R\left|\theta\right|=6.12\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

4.17 质量为m_0的匀质圆盘，可绕通过盘中心并垂直于盘面的固定光滑轴转动，转动惯量为$\frac{1}{2}m_0r^2$。一根长为l，质量为m的匀质柔软绳索挂在圆盘上，如图所示。设绳与圆盘间无相对滑动，试求当圆盘两侧绳长之差为s时，绳的加速度的大小。



习题4.17图

4.17 解：设某一时刻圆盘两侧的绳长分别为x_1、x_2（$x_1<x_2$），如图所示。可将绳分为三段，即长度分别为x_1、x_2的两段绳和绕在盘上的一段，由于绕在盘上的一段谁盘一起转动，所以可将它和盘作为一个整体来讨论。假设在 1、2 两点处绳中的张力分别为T_1、T_2，则由牛顿定律和转动定律可得

$$x_2\rho g-T_2=x_2\rho a$$

$$T_1-x_1\rho g=x_1\rho a$$

$$T_2r-T_1r=I\alpha$$

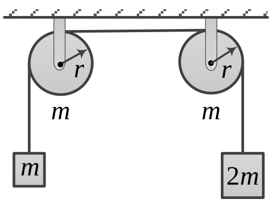
且

$$a=r\alpha$$

式中：$\rho = m/l$ 是绳的线密度，$I = \dfrac{1}{2}m_0 r^2 + \pi r\rho \cdot r^2$ 是绕在盘上的绳与盘作为整体的转动惯量。联立以上方程，并取 $x_2 - x_1 = s$，可得绳的加速度为

$$a = \frac{2mgs}{(2m + m_0)l}$$

4.18 一柔软的轻绳跨过两个质量均为 m、半径均为 r 的匀质圆盘状定滑轮，绳的两端分别挂着质量为 m 和 $2m$ 的重物，如图所示。绳与滑轮间无相对滑动，轮轴光滑无摩擦。两个定滑轮的转动惯量均为 $\dfrac{1}{2}mr^2$。现将由两个定滑轮以及质量为 m 和 $2m$ 的重物组成的系统从静止开始释放，试求两滑轮之间绳中的张力。



习题4.18图

4.18 解：由于两滑轮均有转动惯量，且处于加速转动中，所以各段绳中的张力不同，用隔离体法对个物体作受力分析，如图所示。由牛顿定律和转动定律，有

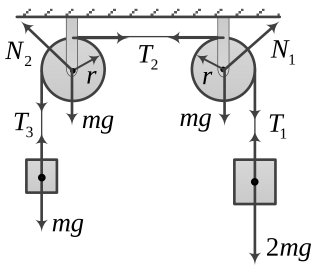
$$2mg - T_1 = 2ma$$

$$T_3 - mg = ma$$

$$T_1 r - T_2 r = I\alpha$$

$$T_2 r - T_3 r = I\alpha$$

且 $a = r\alpha$ ，$I = \dfrac{1}{2}mr^2$

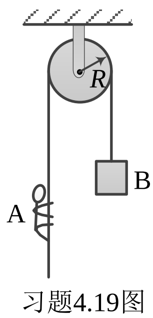


习题4.18解图

联立以上各式，可得两轮之间绳的张力为

$$T_2 = \frac{11}{8}mg$$

4.19 一轻绳绕过一个定滑轮，轮轴光滑无摩擦，滑轮的半径为 R，质量为 $M/4$，均匀分布在其边缘上。绳子的 A 端有一质量为 M 的人抓住了绳端，而在绳的另一端 B 系了一个质量为 $M/2$ 的重物，如图所示。设人相对于绳匀速向上爬时，绳与滑轮间无相对滑动，求 B 端重物上升的加速度？（已知滑轮对通过滑轮中心且垂直于轮面的轴的转动惯量 $I = \dfrac{1}{4}MR^2$）



习题4.19图

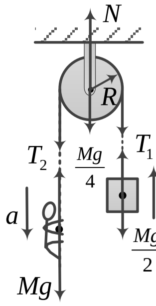
4.19 解：对于人、物圆盘分别用隔离体法进行受理分析，如图所示。由于人相对于绳匀速向上爬动，表明人相对于绳的加速度为零，即人与绳具有相同的加速度，设其大小为 a，方向向下。则重物 B 以加速度 a 向上作加速运动。对于人、物和圆盘分别用牛顿定律和转动定律，有

对人： $$Mg - T_2 = Ma \quad ①$$

对重物：
$$T_1-\frac{1}{2}Mg=\frac{1}{2}Ma \qquad ②$$

对滑轮：
$$T_2R-T_1R=I\alpha=\frac{1}{4}MR^2\alpha \qquad ③$$

又因绳与滑轮无相对滑动，所以
$$a=r\alpha \qquad ④$$



习题4.19解图

联立①、②、③、④式，可得
$$a=\frac{2}{7}g$$

4.20 试用刚体定轴转动的动能定理重新求解习题 4.14。

4.20 解：（1）杆和小球作为一个整体对 O 轴的转动惯量为
$$I=I_{棒}+I_{球}=\frac{1}{3}ml^2+ml^2=\frac{4}{3}ml^2$$

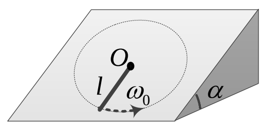
当棒从水平位置转到与水平线成θ角的过程中，只有重力（或重力矩）在做功，其大小为
$$A_G=mg\frac{l}{2}\sin\theta+mgl\sin\theta=\frac{3}{2}mgl\sin\theta$$

所以由动能定律：
$$A_G=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

可得棒的角速度为：
$$\omega=\sqrt{\frac{2A}{I}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}\sin\theta}$$

（2）C 点的法向加速度为：
$$a_n=\omega^2r_c=\frac{9g}{4l}\sin\theta\cdot\frac{3}{4}l=\frac{27g}{16}\sin\theta$$

4.21 质量为 m 长为 l 的均匀细杆，如图所示。放在倾角为 α 的光滑斜面上，可以绕通过杆上端且与斜面垂直的光滑固定轴 O 在斜面上转动。要使此杆能绕轴转动一周，至少应使杆以多大的初始角速度 ω_0 转动？（提示：棒在转动过程中机械能守恒）



习题4.21图

4.21 解：若要使杆能绕轴转动一周，必须使杆达到最高点 B 时的角速度 $\omega_B\geq 0$。由于杆在转动过程中只有重力在做功，所以对杆与地球组成的系统，机械能守恒。以 O 点为重力势能的零点，有
$$\frac{1}{2}I\omega_0^2-mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\alpha=mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\alpha+\frac{1}{2}I\omega_B^2$$

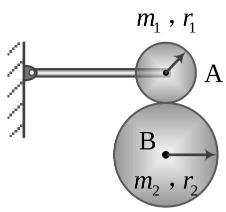
其中转动惯量：
$$I=\frac{1}{3}ml^2$$

由此解得：
$$\omega_0=\sqrt{\omega_B^2+\frac{2mgl\sin\theta}{I}}=\sqrt{\omega_B^2+\frac{6g\sin\theta}{l}}$$

当取 $\omega_B=0$时，可得 ω_0 的最小值为

$$\omega_0 \geq \sqrt{\frac{6g\sin\alpha}{l}}$$

4.22 质量为m_1、半径为r_1的匀质圆轮 A，以角速度ω绕通过其中心的水平光滑轴转动，此时将它放在质量为m_2、半径为r_2的另一匀质圆轮 B 上，B 轮原为静止，但可绕通过其中心的水平光滑轴转动。放置后 A 轮的重量由 B 轮支持，如图所示（水平横杆的质量不计）。设两轮间的摩擦系数为μ。A、B 轮对各自转轴的转动惯量分别为$\frac{1}{2}m_1r_1^2$和$\frac{1}{2}m_2r_2^2$。证明：从 A 轮放在 B 轮上到两轮间没有相对滑动为止，经过的时间为



习题4.22图

$$t = \frac{m_2 r_1 \omega}{2\mu g\left(m_1 + m_2\right)}$$

4.22 证明：由题意可知，两轮在相对滑动过程中，两轮之间的摩擦力为

$$f_{12} = f_{21} = \mu m_1 g \qquad ①$$

对 A 轮由角动量定理可得： $$\int_0^t M_1 \mathrm{d}t = \int_0^t f_{21} r_1 \mathrm{d}t = I_1\omega_1 - I_1\omega_{10}$$

即： $$f_{21} r_1 t = I_1\omega_1 - I_1\omega \qquad ②$$

同理对 B 轮有： $$\int_0^t M_2 \mathrm{d}t = \int_0^t f_{12} r_2 \mathrm{d}t = f_{12} r_2 t = I_2\omega_2 - I_2\omega_{20}$$

考虑到 B 轮原来静止，所以有： $$f_{12} r_2 t = I_2\omega_2 \qquad ③$$

又当两轮间没有相对滑动时，两轮的角速度ω_1和ω_2必有如下关系

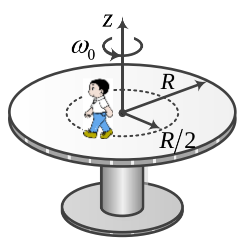
$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \qquad ④$$

联立①②③④可解得： $$\omega_2 = \frac{I_1 r_1 r_2}{I_1 r_2^2 + I_2 r_1^2}\omega = \frac{m_1 r_1}{\left(m_1 + m_2\right) r_2}\omega \qquad ⑤$$

将③、⑤式代入②式，可得

$$t = \frac{m_2 r_1 \omega}{2\mu g\left(m_1 + m_2\right)}$$

4.23 在半径为R、质量为M具有光滑竖直固定中心轴的水平圆盘上，有一人静止站立在距转轴为$R/2$处，人的质量是圆盘质量的$1/10$，开始时载人圆盘对地以角速度ω_0匀速转动。现在此人相对于圆盘以速率v沿与圆盘转动的相反方向绕轴作圆周运动，如图所示。已知圆盘对中心轴的转动惯量为$\frac{1}{2}MR^2$。试求：



习题4.23图

（1）圆盘对地的角速度；

（2）欲使圆盘对地静止，人在该圆周上相对于圆盘的速度v的大小及方向？

4.23 解:（1）当人以速率 v 沿相对圆盘转动相反的方向走动时，圆盘对地的角速度为 ω，则由速度叠加原理可知，人相对于地角速度为

$$\omega' = \omega - \frac{v}{R/2} = \omega - \frac{2v}{R} \qquad ①$$

将人与盘视为一个共轴系统，人在盘上走动时系统受对转轴的合外力矩为零，故系统的角动量守恒，所以有

$$\left[\frac{1}{2}MR^2 + \frac{M}{10}\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right]\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega + \frac{M}{10}\left(\frac{1}{2}R\right)^2\omega' \qquad ②$$

将①式代入②式，得

$$\omega = \omega_0 + \frac{2v}{21R} \qquad ③$$

（2）欲使盘对地静止，则式③必为零，即

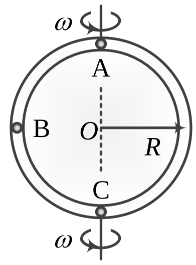
$$\omega = \omega_0 + \frac{2v}{21R} = 0$$

由此得，人相对于圆盘的速度为

$$v = -\frac{21R\omega_0}{2}$$

式中负号表示人的走动方向与上一问中人走动的方向相反，即与盘的初始转动方向一致。

4.24　空心圆环可绕光滑的竖直固定轴 AC 自由转动，转动惯量为 I_0，环的半径为 R，初始时环的角速度为 ω_0。质量为 m 的小球静止在环内最高处 A 点，由于某种微小干扰，小球沿环向下滑动，问小球滑到与环心 O 在同一高度的 B 点和环的最低处 C 点时，环的角速度及小球相对于环的速度各为多大?（设环的内壁和小球都是光滑的，小球可视为质点，环截面半径 $r << R$）



习题4.24图

4.24 解： 选小球和环为系统。系统在运动过程中所受合外力矩为零，故角动量守恒；同时若以地球、小球和环作为一个系统时，由于只有重力做功，故机械能守恒，取过环心的水平面为重力势能零势面。

当小球从 A 到 B 点时

$$I_0\omega_0 = \left(I_0 + mR^2\right)\omega_B \qquad ①$$

又小球在 B 点时，除了有随环一起作圆周运动的速度 $\omega_B R$ 之外，还有相对于环的运动速度 v_B，两者方向互相垂直，所以有

$$\frac{1}{2}I_0\omega_0^{\ 2} + mgR = \frac{1}{2}I_0\omega_B^2 + \frac{1}{2}m\left(\omega_B^2R^2 + v_B^2\right) \qquad ②$$

联立①②，可得

$$\omega_{\mathrm{B}} = \frac{I_0\omega_0}{I_0 + mR^2}$$

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{2gR + \frac{I_0\omega_0^2 R^2}{mR^2 + I_0}}$$

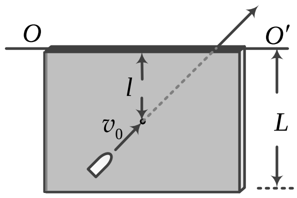
当小球滑到 C 点时，由角动量守恒定律，可得

$$I_0\omega_0 = I_0\omega_{\mathrm{C}} \qquad \text{即} \qquad \omega_{\mathrm{C}} = \omega_0$$

即系统的角速度又回复至ω_0。又由机械能守恒定律知，小球在 C 的动能完全由重力势能转换而来，即

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mg\left(2R\right) \qquad \text{所以} \qquad v_{\mathrm{C}} = \sqrt{4gR}$$

4.25 一块宽$L = 0.60\mathrm{m}$、质量$m_0 = 1.0\mathrm{kg}$的均匀薄木板，可绕水平固定轴OO'无摩擦地自由转动。当木板静止在平衡位置时，有一质量为$m = 10\times10^{-3}\mathrm{kg}$的子弹垂直击中木板上的 A 点，A 离转轴$OO'$距离$l = 0.36\mathrm{m}$，子弹击中木板前的速度为$500\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，穿出木板后的速度为$200\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。试求



习题4.25图

(1) 子弹给予木板的冲量；

(2) 木板获得的角速度。

（已知：木板绕OO'轴的转动惯量$I = \frac{1}{3}m_0L^2$）

4.25 解：(1) 子弹受到的冲量为

$$I = \int F\mathrm{d}t = m\left(v - v_0\right)$$

由牛顿第三定律，子弹对木块的冲量为

$$I' = \int F'\mathrm{d}t = -\int F\mathrm{d}t = m\left(v_0 - v\right) = 3.0\ \ \mathrm{N\cdot s}$$

方向与$\boldsymbol{v}_0$相同。

(2) 若将子弹和木板作为一个共轴系统，则该系统在碰撞过程中满足角动量守恒条件。所以有

$$mv_0l = mvl + I\omega$$

所以木板获得的角速度为

$$\omega = \frac{mv_0l - mvl}{I} = \frac{3\left(mv_0l - mvl\right)}{m_0L^2} = 9.0\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

4.26 如图所示，长为l的轻杆，两端各固定质量分别为m和$2m$ 的小球，杆可绕水平光滑固定轴O在竖直面内转动，转轴O距两端分别为$l/3$和$2l/3$。轻杆原来静止在竖直位置。今有一质量也为m的小球，以水平速度v_0与杆下端小球m 作对心碰撞，碰后以$v_0/5$的速

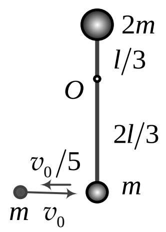
度返回，试求碰撞后轻杆所获得的角速度，并判断该碰撞是否为完全弹性碰撞。

4.26 解：将杆与两小球视为一“刚体”，水平飞来小球与刚体视为一个共轴系统。则在小球与刚体的碰撞过程中系统的角动量守恒，所以有

$$mv_0\frac{2l}{3}=-m\frac{v_0}{5}\frac{2l}{3}+I\omega \qquad ①$$

又“刚体”的转动惯量为

$$I=m\left(\frac{2l}{3}\right)^2+2m\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{2}{3}ml^2 \qquad ②$$



习题4.26图

将②代入①，可得轻杆获得的角速度为

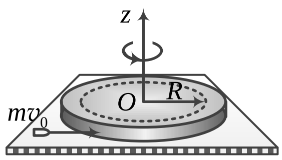
$$\omega=\frac{6v_0}{5l}$$

可以证明，碰撞后系统损失的机械能为

$$-\Delta E=\frac{1}{2}mv_0^2-\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{5}\right)^2+\frac{1}{2}I\omega^2\right]=0$$

即碰撞前后系统的机械能守恒，所以该碰撞为完全弹性碰撞。

4.27　一质量均匀分布的圆盘，质量为m_0，半径为R，放在一粗糙水平面上（圆盘与水平面之间的摩擦系数为μ），圆盘可绕通过其中心O的竖直固定光滑轴转动。开始时，圆盘静止，一质量为m的子弹以水平速度v_0垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上，求



习题4.27图

(1) 子弹击中圆盘后，盘所获得的角速度；

(2) 经过多少时间后，圆盘停止转动。

（已知圆盘绕通过O的竖直轴的转动惯量为$\frac{1}{2}m_0R^2$，忽略子弹重力造成的摩擦阻力矩）

4.27 解：(1) 以子弹和圆盘为一个“共轴”系统。在子弹击中圆盘的过程中，因系统的内力矩远大于圆盘受到的摩擦力矩，所以可近似认为系统对轴O的角动量守恒，即

$$mv_0R=\left(I+mR^2\right)\omega=\left(\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2\right)\omega$$

所以盘获得的角速度为

$$\omega=\frac{2mv_0}{\left(m_0+2m\right)R}$$

(2) 以$\sigma=\frac{m_0}{\pi R^2}$表示圆盘单位面积的质量，在盘上任取一个面积为$\mathrm{d}s=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$的质元，则该质元受到的摩擦力对转轴$O$的力矩为

$$\mathrm{d}M_f = r\mathrm{d}f = r\cdot\mu g\mathrm{d}m = r\cdot\mu g\sigma r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \mu g\sigma r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

所以整个圆盘受到的摩擦力矩的大小为

$$M_f = \int_0^{2\pi}\int_0^R \mu g\sigma r^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\mu m_0 gR$$

设经过Δt时间圆盘停止转动，按角动量定理有

$$-M_f\Delta t = 0-\left(I+mR^2\right)\omega$$

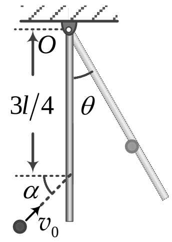
所以

$$\Delta t = \frac{\left(I+mR^2\right)\omega}{M_f} = \frac{mv_0R}{2\mu m_0 gR/3} = \frac{3mv_0}{2\mu m_0 g}$$

4.28　一质量为m_0、长为l的均匀细棒，悬在通过其上端O且与棒垂直的水平光滑固定轴上，开始时自由下垂，如图所示。现有一质量为m的小泥团以与水平方向夹角为α的速度v_0击在距离O为$3l/4$处，并粘在其上。求：

(1) 细棒被击中后的瞬时角速度；

(2) 细棒摆到最高点时，细棒与竖直方向间的夹角θ。



习题4.28图

4.28 解：(1) 选细棒、泥团为系统。泥团击中后其转动惯量为

$$I = \frac{1}{3}m_0l^2 + m\left(3l/4\right)^2 = \frac{1}{3}m_0l^2 + \frac{9}{16}ml^2$$

在泥团与细棒碰撞过程中对轴O的角动量守恒

$$mv_0\cdot\left(3l/4\right)\cdot\sin\left(90^\circ+\alpha\right) = I\omega$$

$$\omega = \frac{mv_0\cos\alpha\cdot 3l/4}{I} = \frac{mv_0\cos\alpha\cdot 3l/4}{\frac{1}{3}m_0l^2+\frac{9}{16}ml^2} = \frac{36mv_0\cos\alpha}{\left(16m_0+27m\right)l}$$

(2) 在上摆至最大摆角的过程中，只有重力在做功。故由定轴转动的动能定理，有

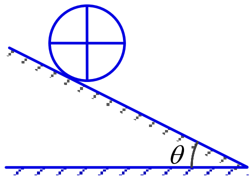
$$-m_0g\frac{l}{2}\left(1-\cos\theta\right) - mg\frac{3l}{4}\left(1-\cos\theta\right) = 0-\frac{1}{2}I\omega^2$$

由此可解得

$$\theta = \cos^{-1}\left[1-\frac{\left(16m_0+27m\right)l\omega^2}{\left(48m_0+72m\right)g}\right]$$

$$=\cos^{-1}\left[1-\frac{54m^2v_0^2\cos^2\alpha}{\left(2m_0+3m\right)\left(16m_0+27m\right)gl}\right]$$

4.29 一飞轮是由质量为m、半径为R的铁环与两根长度都为$2R$、质量都为m的直铁棒焊接在一起而成的，放置在倾角为θ的斜面上，如图所示。由静止释放后，飞轮沿斜面向下做纯滚动，试求：



题 4.29 图

（1）该飞轮对通过其质心并与圆面垂直的轴的转动惯量；

（2）飞轮质心的加速度以及飞轮所受摩擦力的大小和方向；

4.29 解：（1）飞轮对通过其质心并与圆面垂直的轴的转动惯量为

$$I = mR^2 + \frac{1}{12}m(2R)^2 \times 2 = \frac{5}{3}mR^2$$

（2）设斜面对飞轮的静摩擦力 F_f 的方向平行于斜面向上，则由质心运动定律和转动定律，可得

$$3mg\sin\theta - F_f = 3ma_C$$

$$F_f R = I\alpha$$

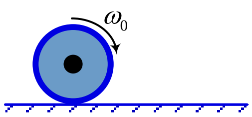
由纯滚动的条件： $a_C = \alpha R$

由此解得： $a_C = \frac{9}{14}g\sin\theta$

$$F_f = \frac{15}{14}mg\sin\theta$$

因 $F_f > 0$，表明静摩擦力的方向沿斜面向上。

4.30 如图所示，一质量为 m、半径为 R 的飞轮，其转动惯量 $I = \frac{3}{4}mR^2$。现让飞轮以高速 ω_0 绕其自身轴旋转，然后置于水平地面上，已知飞轮与地面之间的滑动摩擦系数为 μ。试求飞轮在地面上开始作纯滚动时质心的速度。



题 4.30 图

4.30 解：飞轮在地面上做纯滚动之前，飞轮与地面之间有相对滑动，所以飞轮受重力 mg、地面的支持力 F_N 和滑动摩擦力 F_f 三个力的作用，如图所示。由质心运动定律和转动定律，可得

$$F_f = ma_C$$

$$-F_f R = I\alpha$$

又由题意可知： $I = \frac{3}{4}mR^2$， $F_f = \mu mg$， 由此可解得

$$a_C = \mu g \quad , \quad \alpha = -\frac{4\mu g}{3R}$$

经过时间 t 飞轮质心的速度和绕质心转动的角速度分别为

$$v_C = a_C t = \mu g t \quad , \quad \omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{4\mu g}{3R}t$$

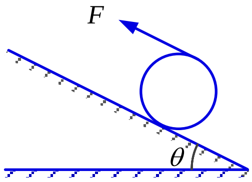
假设飞轮开始做纯滚动的时刻为 t，则必然有： $v_C = \omega R$，即

$$\mu gt = \omega_0 R - \frac{4\mu g}{3} t$$

由此得 $t = \dfrac{3\omega_0 R}{7\mu g}$，所以飞轮开始做纯滚动时，质心的速度为

$$v_C = \mu gt = \frac{3}{7}\omega_0 R$$

4.31 如图所示，一质量为 m、半径为 R 的均匀圆环放置在倾角为 θ 的斜面上，环上绕有细绳。现以平行于斜面方向的恒力 F 拉绳，使环由静止开始沿斜面向上做纯滚动，试求圆环质心的加速度以及圆环所受静摩擦力的大小和方向。



题 4.31 图

4.31 解： 设斜面对圆环的静摩擦力 F_f 的方向平行于斜面向上，并以平行于斜面向上作为运动的正方向，由质心运动定律和转动定律，可得

$$F + F_f - mg\sin\theta = ma_c$$

$$FR - F_f R = I\alpha = mR^2\alpha$$

由纯滚动的条件： $a_c = \alpha R$

由此解得： $a_c = \dfrac{F}{m} - \dfrac{1}{2} g\sin\theta$

$$F_f = \frac{1}{2} mg\sin\theta$$

因 $f > 0$，表明静摩擦力的方向沿斜面向上。