2002～2003学年第二学期《高等数学》期末考试试题B卷答案

一、选择题:

1.B　2.C　3.D　4.D　5.C

一、 填空题:

1. $-\dfrac{3}{2}$　2. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$；3. 　1；4、 $\dfrac{1}{2}$；5. 　$\dfrac{\pi}{4}$

二、（10 分）设方程 $e^{y+z} - x\sin z = e$ 确定了点 $(x, y) = (0,1)$ 附近的一个隐函数

$z = z(x, y)$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\,1)}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\,1)}$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,\,1)}$.

解　$z(0,1) = 0$　　　　（1 分）

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sin z}{e^{y+z} - x\cos z},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\,1)} = 0,$$　　　　（4 分）

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^{y+z}}{e^{y+z} - x\cos z},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\,1)} = -1,$$　　　　（7 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\cos z \cdot z_y (e^{y+z} - x\cos z) - \sin z (e^{y+z} - x\cos z)'_y}{(e^{y+z} - x\cos z)^2},\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,\,1)} = -\frac{1}{e}$$　　　　（10 分）

三、（8 分）求过直线 $L: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ 的平面 π，使它平行于直线

$L': \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$.

解　$L: \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

设平面 π：$2x - y + 2 + \lambda(y + 2z - 2) = 0$，　　　　（3 分）

$\vec{n} = \{2, \lambda - 1, 2\lambda\}$，$\vec{s} = \{3,2,1\}$

$\pi \,//\, L' \Rightarrow$ $\vec{n} \perp \vec{s}$，即 $\{2, \lambda - 1, 2\lambda\} \cdot \{3,2,1\} = 0$，　　　　（6 分）

解得 $\lambda = -1$，所以，所求平面为 $\pi: x - y - z + 2 = 0$　　　　（8 分）

四、（共 24 分，每小题 8 分）计算下列各题：

1、$\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}\sin^3 xdx$

解 1 $I=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}\sin^3 xdy$ （4 分）

$=\int_0^{\pi}\sin^4 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx$ （6 分）

$=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}$ （8 分）

解 2 $I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}(\cos^2 x-1)d(\cos x)$

$=\int_0^1[-\frac{2}{3}\cos^3(\arcsin y)+2\cos(\arcsin y)]dy$ （3 分）

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{2}{3}\cos^3 t+2\cos t)\cos tdt$ （$\arcsin y=t, y=\sin t$）

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{2}{3}\cos^4 t+2\cos^2 t)dt$ （6 分）

$=(-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}$ （8 分）

2、$\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$，其中 $D:x^2+y^2\le ax\ (a>0)$。

解 $D:0\le r\le a\cos\theta$，$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$， （2 分）

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}dr$ （4 分）

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{3})(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta$

$=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$ （6 分）

$=\frac{2}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})=\frac{a^3}{9}(3\pi-4)$ （8 分）

3、. 计算积分 I=$\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dV$，其中 Ω 是 yOz 面上的直线 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的曲面与平面 $z=1$，$\boldsymbol{z}=2$ 所围成的空间区域

解 1 由设, $\Omega:\boldsymbol{z}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$ 与 $z=1$, $\boldsymbol{z}=2$ 所围.

$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，在柱坐标系下： $\Omega_1:0\le\boldsymbol{r}\le1,\ 0\le\theta\le2\pi,\ 1\le\boldsymbol{z}\le2$

$\Omega_2: 1 \le \boldsymbol{r} \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{z} \le 2$ （3 分）

$$I = I_1 + I_2 = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dv + \iiint\limits_{\Omega_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dv$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{e^z}{r} r dr d\theta dz + \iiint\limits_{\Omega_2} \frac{e^z}{r} r dr d\theta dz$$

$$= \iint\limits_{D_1} dr d\theta \int_1^2 e^z dz + \iint\limits_{D_2} dr d\theta \int_r^2 e^z dz$$ （6 分）

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_1^2 e^z dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_r^2 e^z dz = 2\pi\boldsymbol{e}^2 - 2\pi\boldsymbol{e} + 2\pi\boldsymbol{e}$$

$$= 2\pi\boldsymbol{e}^2$$ （8 分）

解 2 $\mathrm{I} = \int_1^2 dz \iint\limits_{D_Z} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \qquad D_z: x^2+y^2 \le z^2$ （3 分）

$$= \int_1^2 e^z dz \iint\limits_{D_{r\theta}} \frac{1}{r} r dr d\theta \qquad D_{r\theta}: 0 \le r \le z, 0 \le \theta \le 2\pi$$ （6 分）

$$= \int_1^2 e^z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z dr$$

$$= 2\pi e^2$$ （8 分）

五、 （ 10 分）求圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $2z-y=3$ 所围成的立体的表面积.

解 1 交线 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ 2z-y=3 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影为：$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1 \\ z=0 \end{cases}$,

故立体的投影区域 $D_{xy}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{(y-1)^2}{4} \le 1 \\ z=0 \end{cases}$ （3 分）

圆锥面部分的表面积：

$$S_1 = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2} dxdy$$ （5 分）

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+(\frac{x}{z})^2+(\frac{y}{z})^2} dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2}\cdot\pi\sqrt{3}\cdot\sqrt{4} = 2\sqrt{6}\pi$$ （7 分）

平面部分的表面积：

$$S_1=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+0+(\frac{1}{2})^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{5}}{2}dxdy=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\pi\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{15}\pi$$ （9 分）

所以，立体的表面积 $S=S_1+S_2=\pi(2\sqrt{6}+\sqrt{15})$。 （10 分）

解 2　交线 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\2z-y=3\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影为：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1\\z=0\end{cases}$

故立体的投影区域 $D_{xy}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{(y-1)^2}{4}\le 1\\z=0\end{cases}$ （3 分）

圆锥面法向量 $\vec{n}_1=\{x,y,-z\}$，平面法向量 $\vec{n}_2=\{0,-1,2\}$， （5 分）

$|\cos(\vec{n}_1\hat{,}\vec{k})|=\dfrac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$|\cos(\vec{n}_2\hat{,}\vec{k})|=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ （7 分）

立体的表面积：

$$S=S_1+S_2=\frac{A(D_{xy})}{|\cos(\vec{n}_1\hat{,}\vec{k})|}+\frac{A(D_{xy})}{|\cos(\vec{n}_2\hat{,}\vec{k})|}=\pi(2\sqrt{6}+\sqrt{15})$$ （10 分）

六、（ 10 分 ） 在 曲 面 $S:z=x^2+2y^2$ 上 求 一 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ ， 使 它 到 平 面 $\pi:x-y+2z+6=0$ 的距离最短.

解 1　距离最短(或最长)时，曲面 S 在点 P 的切平面平行于平面 π； （3 分）

故切平面法向 $\vec{n}=\{2x_0,4y_0,-1\}//\{1,-1,2\}$，

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{-1}=\frac{-1}{2},$$ （7 分）

解得 $x_0=-\dfrac{1}{4},y_0=\dfrac{1}{8}$，从而 $z_0=\dfrac{3}{32}$，得到唯一的点 $P(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{32})$，由几何意义知，$P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 π 的距离最短。 （10 分）

解 2 $d^2(P,\pi)=\frac{1}{6}(x_0-y_0+2z_0+6)^2$ （2 分）

问题转化为：在条件 $z_0=x_0{}^2+2y_0{}^2$ 下，求 $d^2(P,\pi)$ 的最小值点。

将 x_0,y_0,z_0 换成 x,y,z，构造拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda)=(x-y+2z+6)^2+\lambda(x^2+2y^2-z)$ （5 分）

$L_x=2(x-y+2z+6)+2\lambda x=0$

$L_y=-2(x-y+2z+6)+4\lambda y=0$

$L_z=4(x-y+2z+6)-\lambda=0$

$L_\lambda=x^2+2y^2-z=0$ （7 分）

解得 $x_0=-\frac{1}{4},y_0=\frac{1}{8}$， $z_0=\frac{3}{32}$，

由几何意义知，$P(x_0,y_0,z_0)$ 为最小值点，它是 $P(-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{3}{32})$ （10 分）

八 解 ① $I=\frac{1}{R^3}\iint\limits_{\Sigma}\!\!\!\!\!\!\bigcirc \mathrm{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{R^3}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{R^3}\times\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi$。

②设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， $P=\frac{x}{r^3}$， $Q=\frac{y}{r^3}$， $R=\frac{z}{r^3}$，

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5},$$

又 Σ 不包含有原点在其内部，故可以用高斯公式，

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0。$$

③作小球面 Σ_ε： $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$， ε 充分小，取其内侧。

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=0+\iint\limits_{-\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{-\Sigma_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{\varepsilon^3}\times\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi。$$