线性代数复习课

一、内容提要

二、典型例题

一、内容提要

❖行列式的性质

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

性质2 行列式中某一行的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

性质3 若行列式某一行的元素都是两数之和, 则该行拆开, 原行列式可以表为相应的两个行列式之和.

性质4 对换两行, 行列式值反号.

性质5 若有两行元素对应成比例, 则行列式值为零.

性质6 把行列式某一行的各元素乘以同一数加到另一行对应的元素上去, 行列式的值不变.

- 设 A, B 为 n 阶矩阵, 则有 $|AB| = |A| \cdot |B|$.

一、内容提要

❖Laplace[按行列展开]定理

行列式等于某一行(列)的元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

- 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$$

一、内容提要

❖伴随阵

设 A 为 n 阶方阵, A_{ij} 为(i,j)元的代数余子式, 记

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称 A^* 为方阵 A 的[转置]伴随阵.

❖伴随阵的性质

设 A^* 为 n 阶方阵 A 的伴随阵, 则有

(1) $AA^* = A^*A = |A|E_n$;

(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

一、内容提要

❖ 逆矩阵

如果存在矩阵 B, 使

$$AB = BA = E$$

那么, 称方阵 A 为**可逆的**, 并称 B 为 A 的逆矩阵.

• 如果 $|A| \neq 0$, 那么, 称方阵 A 为**非奇异矩阵**.

❖ 逆阵计算公式

非奇异矩阵 A 的逆阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

❖**定理** 设 A, B 为 n 阶方阵, 若 $AB = E$, 则 A, B 可逆, 且有 $A^{-1} = B,\ B^{-1} = A.$

一、内 容 提 要

❖逆矩阵的性质

设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, 则有

(1) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(3) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}\ (k \neq 0)$;

(4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(5) $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(6) $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*} = \dfrac{1}{|A|}A$.

一、内容提要

❖ 分块对角阵的性质

设 $A_i(i=1,\cdots,s)$都是方阵， $A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_s)$.

(1) $|A|=|A_1|\cdots|A_s|$;

(2) $A^n=\mathrm{diag}(A_1^{\mathrm{n}},\cdots A_s^n)$;

(3) A 可逆的充分必要条件是 $A_i(i=1,\cdots,s)$都可逆, 且有

$$A^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},\cdots,A_s^{-1})$$

• 设 A, B 都是方阵, 则有

$$\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$$

一、内容提要

❖等价矩阵

如果矩阵 A 经过有限次初等(行, 列)变换，化为矩阵 B, 就称矩阵 A 与 B (行, 列)等价, 记为 $A \sim B$.

- 矩阵 A 与 B 行等价的充要条件是: 存在可逆矩阵 P, 使 $B = PA$.
- 矩阵 A 与 B 列等价的充要条件是: 存在可逆矩阵 Q, 使 $B = AQ$.

具体地有

$$(A,E) \xrightarrow{r} (PA,P), \quad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} AQ \\ Q \end{pmatrix}$$

一、内容提要

❖ 行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_r & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{a_1 a_2 \cdots a_r \neq 0})$$

❖ 行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & & 0 & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & * & \mathbf{0} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

一、内容提要

❖矩阵的秩

如果矩阵 A 的等价标准形为

$$U=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

那么称 U 中单位阵的阶数 r 为矩阵 A 的秩, 记为 $R(A)$.

性质1 等价矩阵有相等的秩.

性质2 $R(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$.

性质3 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $R(A)=n$.

性质4 行阶梯形矩阵的秩为非零行的行数.

一、内容提要

❖矩阵的秩

性质5 $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A).$

性质6 $R(A_i) \le R\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$

性质7 $R(A+B) \le R(A) + R(B).$

性质8 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}.$

性质9 若$A_{m\times n}B_{n\times l} = O$，则$R(A) + R(B) \le n.$

一、内容提要

❖矩阵初等变换的应用

- 逆矩阵的初等变换求法

$$(A \vdots E) \xrightarrow{r} (E \vdots A^{-1})$$

- 线性方程组的最简形解法

将线性方程组的增广矩阵化为行最简形, 写出同解方程组, 解便一目了然.

- 矩阵方程 $AX = B$, $XA = B$ 的初等变换解法

$$(A \vdots B) \xrightarrow{r} (E \vdots A^{-1}B)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

一、内 容 提 要

❖ 线性方程组的可解性定理

设 n 元线性方程组 $Ax=b$.

(1) 当 $R(A,b)>R(A)$ 时，方程组无解；

(2) 当 $R(A,b)=R(A)=n$ 时，方程组有唯一解；

(3) 当 $R(A,b)=R(A)<n$ 时，方程组有无穷多解.

- n 元方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $R(A)<n$.
- 当 A 为方阵时，$Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$.
- $AX=B$ 有解的充要条件是 $R(A)=R(A,B)$.

一、内容提要

❖ 齐次通解结构定理

设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$，其中 $r=R(A)$，则 $Ax=0$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},\quad (k_1,\cdots,k_{n-r}\text{为任意数})$$

❖ 非齐次通解结构定理

设 $x=\eta^*$ 是 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解（称特解），$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 是导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*,\quad (k_1,\cdots,k_{n-r}\text{为任意数})$$

一、内容提要

❖线性组合

设有向量组 $a_1,\cdots,a_m$ 及向量 b, 如果存在一组数 $k_1,\cdots,k_m$, 使

$$b=k_1a_1+\cdots+k_ma_m$$

那么, 称向量 b 为向量组$a_1,\cdots,a_m$ 的一个线性组合, 并称向量 b 可由向量组 $a_1,\cdots,a_m$ **线性表示**.

- 设 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_1,\cdots,a_m)$, 则线性方程组 $Ax=b$ 有一组解 $x_i=k_i\ (i=1,\cdots,m)$, 等价于

$$b=k_1a_1+\cdots+k_ma_m$$

一、内容提要

❖ 线性相关性

设有向量组 $a_1,\cdots,a_m$，如果存在一组不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_m$，使

$$k_1a_1+\cdots+k_ma_m=0$$

那么, 称 $a_1,\cdots,a_m$ 线性相关. 否则, 称 $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关.

❖ 基本性质

(1) 若向量 b 可由向量组 $a_1,\cdots,a_m$ 线性表示, 则向量组 $b,a_1,\cdots,a_m$ 线性相关.

(2) 若部分组线性相关, 则整个向量组也线性相关.

(3) 若向量组线性无关, 则任一部分组也线性无关.

一、内容提要

❖ 线性相关性

设有向量组 $a_1,\cdots,a_m$，如果存在一组不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_m$，使

$$k_1a_1+\cdots+k_ma_m=0$$

那么，称 $a_1,\cdots,a_m$ 线性相关. 否则，称 $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关.

• $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关，也即向量方程 $x_1a_1+\cdots+x_ma_m=0$ 只有零解.

❖ 定理

向量组 $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关的充分必要条件是

$$R(a_1,\cdots,a_m)=m$$

一、内容提要

❖向量组的秩

设 A 为一向量组, A 中线性无关向量组所含向量个数的最大值 r, 称为向量组 A 的秩, 记为 $R(A)$.

❖向量组的最大无关组

设向量组 A 的秩为 r, 如果 $a_1, \cdots, a_r$ 为 A 中一个线性无关向量组, 那么称 $a_1,\cdots,a_r$ 为 A 的一个最大无关组.

❖最大无关组的性质

设 A 为一向量组, 则部分组 $a_1,\cdots,a_r$ 为 A 的一个最大无关组的充分必要条件是

(1) $a_1,\cdots,a_r$ 线性无关;

(2) A 中任一向量可由 $a_1,\cdots,a_r$ 线性表示.

一、内 容 提 要

❖秩与最大无关组的一个算法

• 初等行变换保持矩阵的列向量组的线性关系.

化矩阵 A 为行最简形 A_0, 通过观察 A_0, 便知 A 的列向量组的秩和一个特定的最大无关组，以及 A 的其余列向量在该最大无关组下的线性表示.

例 设 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的秩为3，一个最大无关组为 a_1,a_2,a_4，且有 $a_3 = 2a_1 + 4a_2$, $a_5 = 3a_1 + 5a_2 - 7a_4$

一、内容提要

❖向量组的线性表示

若向量组 B 中的任一向量都可由向量组 A 中的向量线性表示，就称向量组 B 可由向量组 A 线性表示.

- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示的充要条件是

$$R(A)=R(A,B)$$

- 若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，则 $R(B)\le R(A)$.

❖等价向量组

可以相互线性表示的两个向量组，称等价向量组.

- 向量组 A 与向量组 B 等价的充分必要条件是

$$R(A)=R(B)=R(A,B)$$

一、内 容 提 要

❖向 量 空 间

设 R^n 的非空集 V 满足条件：

(1) 若 $a\in V, b\in V$, 则 $a+b\in V$;

(2) 若 $a\in V, k\in \mathrm{R}$, 则 $ka\in V$,

那么, 称 V 为一个向量空间.

- 当非空集 V 满足条件(1),(2)时, 称 V 对线性运算封闭.
- 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 是一个向量空间.

❖子 空 间

设有向量空间 V_1 及 V_2, 若 $V_1\subset V_2$, 就称 V_1 是 V_2 的子空间. 当 $V_1\neq V_2$ 时, 称 V_1 是 V_2 的**真子空间**.

一、内容提要

❖ 向量空间的基和维数

称向量空间 V 的任一最大无关组为 V 的一个基.

称向量空间 V 的秩为 V 的维数, 记为 $\dim V$.

❖ 基的性质

设 V 为一个向量空间, 则 V 中向量组 $a_1,\cdots,a_r$ 为V 的一个基的充分必要条件是

(1) $a_1,\cdots,a_r$ 线性无关;

(2) V 中任一向量可由 $a_1,\cdots,a_r$ 线性表示.

• n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为解空间S 的一个基, $\dim S = n-R(A)$.

一、内 容 提 要

❖ 生成空间

设有向量组 $A: a_1,\cdots, a_m$, 记

$$L(A)=\{k_1a_1+\cdots+k_ma_m \mid k_1,\cdots,k_m\in \mathbf{R}\}$$

称 $L(A)$ 为由向量组 A 生成的向量空间, 简称生成空间.

称 $a_1,\cdots, a_m$ 为**生成元**.

❖ 向量组线性表示的等价说法

设有向量组 $A: a_1,\cdots, a_s$, $B: b_1,\cdots, b_t$. 则有

(1) $L(A)$ 为 $L(B)$ 的子空间的充分必要条件是 A 组可由 B 组线性表示;

(2) $L(A)=L(B)$ 的充分必要条件是 A 组与 B 组等价.

一、内容提要

❖ **向量在基下的坐标**

设 V 为一个 r 维向量空间, 则 V 中任意 r 个线性无关向量 $a_1,\cdots,a_r$ 为 V 的一个基, 且有

$$V = L(a_1,\cdots,a_r)$$

V 中任一向量 a 可唯一地表示为

$$a = k_1a_1 + \cdots + k_ra_r$$

称 $(k_1,\cdots,k_r)$ 为 a 在基 $a_1,\cdots,a_r$ 下的坐标.

一、内容提要

❖ 过渡矩阵

设 $a_1,\cdots,a_r$ 及 $b_1,\cdots,b_r$ 是向量空间 V 的两个基, 则存在 r 阶矩阵 P, 使

$$(b_1,\cdots,b_r)=(a_1,\cdots,a_r)P$$

称此关系式为基变换公式.

- 称矩阵 P 为从基 $a_1,\cdots,a_r$ 到基 $b_1,\cdots,b_r$ 的过渡矩阵.
- 过渡矩阵是可逆矩阵.

一、内容提要

❖向量的内积

设有 n 维向量 $a=(a_1,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,\cdots,b_n)$, 记

$$[a,b]=ab^{\mathrm{T}}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

称 $[a,b]$ 为向量 a 与 b 的内积.

• 若 $[a,b]=0$, 则称向量 a 与 b 正交.

❖向量的范数

称 $\sqrt{[a,a]}$ 为向量 a 的范数(或长度), 记为 $\|a\|$.

❖向量的夹角

非零向量 a 与 b 的夹角为 $\arccos\dfrac{[a,b]}{\|a\|\cdot\|b\|}$

一、内容提要

❖规范正交基

r 维向量空间 V 中, 任一正交单位向量组 $e_1, \cdots, e_r$, 称为 V 的一个规范正交基.

❖正交矩阵

1 定义**:**

如果 $A^{\mathrm{T}}A = E$ $(A^{-1} = A^{\mathrm{T}})$, 则称方阵 A 为正交矩阵.

2 运算性质

①正交矩阵之积为正交阵

②正交矩阵的转置为正交阵

③正交矩阵的伴随矩阵为正交矩阵

④正交矩阵**A**的行列式 $|A| = 1$ 或 -1

一、内容提要

3　正交矩阵的判定

A为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A的行（列）向量组是 n 维行（列）向量为正交单位向量。

A 为 n 阶正交阵的充分必要条件是 A 的列(行)向量组为 R^n 的一个规范正交基.

$$A=(a_{ij})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\in R^{n\times n}$$

$$A\text{为正交矩阵}\Leftrightarrow \alpha_i'\alpha_j=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

$$A\text{为正交矩阵}\Leftrightarrow \beta_i\beta_j'=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

❖ 正交变换

若 P 为正交阵, 则称线性变换 $y=Px$ 为正交变换.

正交变换保持向量的内积不变.

一、内容提要

❖方阵的特征值

- 称 n 次多项式 $|\lambda E - A|$ 为 A 的**特征多项式**.
- 称 n 次方程 $|\lambda E - A|=0$ 的根为方阵 A 的**特征值**.
- 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的所有特征值, 则有

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

❖特征值的性质

(1) $|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$;

(2) $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \boxed{a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}$. A 的**迹**, 记为 $\mathrm{tr}(A)$.

- 设 f 是一个多项式, 若 λ 为方阵 A 的一个特征值, 则 $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 的一个特征值.

一、内容提要

❖方阵的特征向量

设 λ 为方阵 A 的特征值, 称方程组

$$(\lambda E - A)\,x = 0$$

的任一非零解为方阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

• 对应于 n 阶矩阵 A 的特征值 λ 有 $n-R(\lambda E-A)$ 个线性无关的特征向量, 称属于 λ 的线性无关特征向量组.

❖定理 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个不相同的特征值, $p_1,\cdots,p_m$ 为对应的特征向量, 则 $p_1,\cdots,p_m$ 线性无关.

❖定理 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个不相同的特征值, $A_1,\cdots,A_m$ 分别为属于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 的线性无关特征向量组, 则由 $A_1,\cdots,A_m$ 的并集构成的向量组线性无关.

一、内容提要

❖相似矩阵

设 A, B 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 P, 使

$$P^{-1}AP = B$$

那么, 称 B 是 A 的相似矩阵. 称 P 为相似变换矩阵.

- 矩阵的相似具有反身性、对称性和传递性.

❖定理

相似矩阵有相同的特征多项式(特征值).

推论 若对角阵 Λ 是 A 的相似矩阵, 则 Λ 以 A 的特征值为对角元素.

一、内容提要

❖**定理**

n 阶方阵 A 与对角阵相似的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

❖**定理**

设 λ 是 n 阶矩阵 A 的 k 重特征值, 则

$$n - R(\lambda E - A) \le k$$

- 称 k 为特征值 λ 的代数重数.
- 称 $n - R(\lambda E - A)$ 为特征值 λ 的几何重数.

❖**定理**

方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A的每一特征值的几何重数等于代数重数.

一、内容提要

❖方阵相似对角化的算法

(1) 求出 n 阶方阵 A 的所有特征值 λ_i.

(2) 求 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的一个基础解系.

(3) 将求出的 n 个特征向量排成矩阵 $P = (p_1, \cdots, p_n)$, 则

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \ (Ap_i = \lambda_i p_i)$$

❖可对角化矩阵的多项式计算

当 $P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 时, $A = P\Lambda P^{-1}$,

$$f(A) = Pf(\Lambda)P^{-1} = P\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

一、内容提要

1. 二次型及其矩阵表示

定义6.1 含有n个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

称为n元二次型，

用矩阵表示为 $f(X) = X^T AX$

其中向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，矩阵 $A = (a_{ij})_n$，$a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1,2,\cdots,n)$

所以 A是对称矩阵，A称为二次型 $f(X)$的矩阵，

$f(X)$称为对称矩阵A的二次型，并称A的秩为该二次型的秩.

2. 二次型的标准形

只含平方项的二次型

$$f(X)=X^TAX=Y^T(C^TAC)Y=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

称为$f(X)$的标准形或法式.

特别地，当标准形中的系数$d_i\ (i=1,2,\cdots,n)$只取**1**，**-1**或**0**时，

称这时的标准形为$f(X)$的规范形，即

$$f(X)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_r^2$$

二次型的标准形不唯一，但其规范形唯一（在实变换下）.标准形中所含非零平方项的项数等于二次型的秩.

3.合同变换

对于n阶方阵A, B，如果存在可逆方阵C，使

$$C^T AC = B$$

则称A, B为合同矩阵或称A与B合同，变换$C^T AC = B$称为合同变换，矩阵C称为合同变换矩阵.

对任意可逆方阵C，若A对称，则$C^T AC$也对称且

$$R(A) = R(C^T AC)$$

用可逆变换把实二次型化为标准形等同于用合同变换把实对称矩阵化为对角矩阵.实对称矩阵可以用正交的相似变换对角化，又正交的相似变换也是合同变换.

一、内容提要

4.化二次型为标准型方法和步骤

（1）用正交变换化二次型为标准形

定理　任给实二次型 $f(X)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \ (a_{ij}=a_{ji})$

总有正交变换 $X=PY$

使 $f(X)$ 化为标准形

$$f(Y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $f(X)$ 的矩阵 $A=(a_{ij})_n$ 的特征值.

步骤:

- 第一步 写出二次型 $f(X)$ 所对应的实对称矩阵 A ;
- 第二步 求出 A 的所有特征值;
- 第三步 对 A 的每一特征值求出对应的特征向量，把对应于特征单根的特征向量规范化，对应于特征重根的特征向量正交化、规范化;
- 第四步 以全体正交规范化向量为列向量构成正交矩阵 P ，得正交变换 $X=PY$;
- 第五步 写出标准形 $f(Y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$,

其中 $\lambda_i(i=1\cdots n)$ 为 A 的特征值，其顺序应和 P 中的列特征向量顺序相对应.

以上步骤与把实对称矩阵化为对角阵的步骤基本一致.

一、内 容 提 要

(2) 用配方法化二次型为标准形

这种方法是将二次型的各项归并成完全平方项，即不含交叉项，再对这些平方项引入新变量以达到二次型成为关于新变量的平方项之和. 具体做法是：

如果二次型中含有某 x_i 的平方项，则先把含 x_i 的各项集中，按 x_i 配成完全平方，然后按此法对其它变量配方，直至都配成平方项；如果二次型中不含平方项，但有某个 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$，则先作一个可逆的线性变换：

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j, \\ x_j = y_i - y_j, \\ x_k = y_k, \quad k \neq i, j \end{cases}$$

使二次型出现平方项，再按上面方法配方.

一、内容提要

5. 惯性定理

一个二次型的标准形是不唯一的，但其所含非零项的项数是确定的（即二次型的秩）.不仅如此，在限定变换为实变换时，标准形中正平方项的个数是不变的（从而负平方项的个数也是不变的）.

6. 正定二次型

设有实二次型 $f(X)=X^TAX$ ，如果对任何 $X\neq 0$ 都 $f(X)>0$（ $f(0)=0$ ），则称 $f(X)$ 为正定二次型，并称对称矩阵 A 是正定的，记作 $A>0$；如果对任何 $X\neq 0$ 都有 $f(X)<0$ 则称 $f(X)$ 为负定二次型，并称对称矩阵 A 是负定的，记作 $A<0$.

一、内容提要

判断实二次型正定的充要条件

(1) 实二次型标准形中的个系数全为正;

(2) 实二次型的矩阵的特征值全为正;

(3) 实二次型的矩阵的各阶顺序主子式全大于零.

至于$f(x)$ 的负定性可通过 $f(x)$ 的正定性来判断.

二、典型例题

例1 设 a_1, a_2, a_3, b 均为3维列向量，矩阵 $A=(a_1, a_2, a_3)$, $B=(3a_1, 2a_2, b)$，且已知行列式 $\det A=2$, $\det B=-6$. 计算 $\det(3A-B)$ 和 $\det(3A+B)$.

解

$$\det(3A-B)=\det(0,a_2,3a_3-b)=0$$

$$\det(3A+B)=\det(6a_1,5a_2,3a_3+b)$$

$$=30\det(a_1,a_2,3a_3+b)$$

$$=30[\det(a_1,a_2,3a_3)+\det(a_1,a_2,b)]$$

$$=30[3\det A+\frac{1}{6}\det B]=150$$

例2 设 $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$，计算 $2M_{31}+M_{33}+M_{34}$.

解

$$2M_{31}+M_{33}+M_{34}$$

$$=2A_{31}+0A_{32}+1A_{33}+(-1)A_{34}$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -8 & 0 & 4 & -6\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 16 & 0 & -2 & 7\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-8 & 4 & -6\\ 2 & 1 & -1\\ 16 & -2 & 7\end{vmatrix} \xlongequal[c_3+c_2]{c_1-2c_2} -\begin{vmatrix}-16 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 20 & -2 & 5\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-16 & -2\\ 20 & 5\end{vmatrix}=-(-80+40)=40$$

例3 $\alpha=(1,2,1)^T, \beta=(2,-1,2)^T, A=\alpha\beta^T$ 求 A^{101}

解

$$A=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}[2,-1,2]=\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\beta^T\alpha=[2,-1,2]\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2$$

$$A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=(\beta^T\alpha)\alpha\beta^T$$

$$A^{101}=\alpha\underbrace{(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)}_{100}\beta^T=(\beta^T\alpha)^{100}(\alpha\beta^T)=2^{100}A$$

例4 求 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 3x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数。

解 $f(x) \xlongequal{r_2-2r_1,\, r_3-3r_1,\, r_4-4r_1} \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix}.$

由行列式的定义知 $f(x)$ 为2次多项式，故 $f(x)=0$ 的根的个数为2.

例5 已知1998, 2196, 2394, 1818 都能被18 整除.

证明 4阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 8 \end{vmatrix}$也能被18 整除.

证 $$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+10c_3+100c_2+1000c_1} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 1998 \\ 2 & 1 & 9 & 2196 \\ 2 & 3 & 9 & 2394 \\ 1 & 8 & 1 & 1818 \end{vmatrix}.$$

由于第4项各数均可以被18 整除，即可以提出因子18，从而4阶行列式能被18 整除.

例6 计算矩阵 A_{2n} 的行列式, 其中

$$A_{2n}=\begin{pmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{pmatrix}$$

解

$$|A_{2n}|=\begin{vmatrix} a_n & b_n & \\ c_n & d_n & \\ & & A_{2(n-1)} \end{vmatrix}=(a_nd_n-b_nc_n)|A_{2(n-1)}|$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})|A_{2(n-2)}|=\cdots$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})\cdots(a_2d_2-b_2c_2)|A_2|$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$$

例7. 设$A=\mathrm{diag}(1, -2, 1)$, $A^*BA=2BA-8E$, 求B.

解 由 $A^*BA=2BA-8E$ 得:

$$(A^*-2E)BA=-8E,$$

$$B=-8(A^*-2E)^{-1}A^{-1}=-8[A(A^*-2E)]^{-1}$$

$$=-8(AA^*-2A)^{-1}=-8(|A|E-2A)^{-1}$$

$$=-8(-2E-2A)^{-1}=4(E+A)^{-1}$$

$$=4[\mathrm{diag}(2, -1, 2)]^{-1}$$

$$=4\mathrm{diag}(\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2})=2\mathrm{diag}(1, -2, 1).$$

例8. 已知矩阵A的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，

且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$, 求B.

解 由 $|A^*|=|A|^3=8$, 得 $|A|=2$.

由 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 得： $AB=B+3A$,

于是 $B = 3(A-E)^{-1}A = 3[A(E-A^{-1})]^{-1}A$

$$= 3(E - \frac{1}{2}A^*)^{-1} = 6(2E - A^*)^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例9 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,

且 $A^2+AB-A=E$, 求 A^9 和 B.

解 $A^2=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=9E$

$$A^8=(A^2)^4=(9E)^4=3^8E$$

$$A^9=3^8A$$

$$=\begin{pmatrix}6561&-13122&13122\\-13122&6561&13122\\13122&13122&6561\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}A$$

$$AB=E+A-A^2$$

$$B=A^{-1}(E+A-A^2)$$

$$=A^{-1}+E-A$$

$$=\frac{1}{9}A+E-A$$

$$=E-\frac{8}{9}A$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&16&-16\\16&1&-16\\-16&-16&1\end{pmatrix}$$

例10 设 A 满足方程 $A^2+2A-E=O$, 证明 A 与 $A+3E$ 都可逆, 并求它们的逆阵.

证明 由 $A^2+2A-E=O$, 得

$$A(A+2E)=E$$

因此 A 可逆, 且有 $A^{-1}=A+2E$.

$$A^2+2A-E=A(A+3E)-A-E$$

$$=A(A+3E)-(A+3E)+2E$$

$$=(A-E)(A+3E)+2E$$

$$(A-E)(A+3E)=-2E$$

$$\frac{1}{2}(E-A)(A+3E)=E$$

因此 $A+3E$ 可逆, 且有 $(A+3E)^{-1}=\frac{1}{2}(E-A)$.

例11 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $AB = B + A$, 求 B.

解 $|A|^3 = |A^*| = 64$, $|A| = 4$, 由 $AB = B + A$, 得

$$B = A^{-1}B + E, \quad (E - A^{-1})B = E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \quad E - A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = (E - A^{-1})^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_3]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 + 2r_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-0.5\, r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$B = (E - A^{-1})^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

例12 设

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&3&3&4\\1&2&2&3\\0&0&3&4\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$A=(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$, 求 A^n.

解 $A=(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$

$$=[C(E-C^{-1}B)]^{\mathrm{T}}=(C-B)^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix},$$

令 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$,

则有

$$A_1^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2A_1,$$

$$A_1^n=2^{n-1}A_1,\ A_2=2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

$$A_2^n=2^n\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^n=2^n\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix},$$

$$A^n=\begin{pmatrix}A_1^n&O\\O&A_2^n\end{pmatrix}$$

$$=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2n&2\end{pmatrix}$$

例13 设A为3阶方阵，$|A| = \frac{1}{2}$，求$\left|(2A)^{-1} - 5A^*\right|$

解

$$A^* = |A|A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$$

$$\left|(2A)^{-1} - 5A^*\right| = \left|\frac{1}{2}A^{-1} - \frac{5}{2}A^{-1}\right| = \left|-2A^{-1}\right|$$

$$= (-2)^3 \frac{1}{|A|} = -16$$

例14 $\alpha_1=(2,1,4,3)^T,\alpha_2=(-1,1,-6,6)^T$

$\alpha_3=(-1,-2,2,-9)^T,\alpha_4=(1,1,-2,7)^T,\alpha_5=(2,4,4,9)^T$

求向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 一个最大无关组,并把其余向量用该最大无关组表出.

解

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的秩=?　　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关吗?

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是最大无关组吗?

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$$

总结

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{array} \end{array} \xrightarrow{r} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{array} \end{array}$$

	β_1,β_2,β_4是右边的最大无关组
$\Leftrightarrow$	$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是左边的最大无关组
	$\beta_3=-\beta_1-\beta_2$
$\Leftrightarrow$	$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$
	$\beta_5=4\beta_1+3\beta_2-3\beta_4$
$\Leftrightarrow$	$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$

矩阵的行初等变换不改变矩阵的列向量组的线性关系。

例15 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=n$, 证明

$$R(AB)=R(B)$$

证1 因 $R(A)=n$, 可知 A 的等价标准形为

$$F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$$ (也是行最简形)

于是存在 m 阶可逆矩阵 P, 使 $A=PF$. 因此

$$R(AB)=R(PFB)=R(FB)=R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=R(B)$$

例16 两个向量组有相同的秩，并且其中一个可以被另一个线性表示，则这两个向量组等价。

证明：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$这俩个向量组的秩都是$r$,并设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$可用$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$线性表示

下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性表示

显然$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$线性表示

故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$与$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$等价。

故$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s，\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t\}=r\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t\}$
$=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}=r$

显然$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$的极大无关组一定是

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$

的极大无关组，所以向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可由它线性表示

即$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$线性表示

例17 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，向量 β_1 可由其线性表示，而向量β_2不能由其线性表示，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,l\beta_1+\beta_2$ 必线性无关。

证明：设有数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k(l\beta_1+\beta_2)=0 \qquad （1）$$

则必有$k=0$，否则由（1）式知β_2可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1$ 线性表示，又由题设 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，故β_2可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示与题设矛盾，故$k=0$,从而有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，故

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,l\beta_1+\beta_2$ 线性无关。

例18 设线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$

就参数 a, b ，讨论方程组的解的情况，有解时并求出解。

解法1 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯阵。

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[(3)+(1)\times(-a)]{(2)+(1)\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(3)+(2)\times a} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \end{array}\right] \xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(2)+(3)\times(-b)} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & (a-1)b & 1-4b+2ab \end{array}\right]$$

（1）当 $(a-1)b\neq 0$ 时，有唯一解

$$x_1=\frac{2b-1}{(a-1)b},\ x_2=\frac{1}{b},\ x_3=\frac{1-4b+2ab}{(a-1)b}$$

(2) 当 $a=1$，且 $1-4b+2ab=1-2b=0$，即 $b=1/2$ 时，有无穷多解

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & (a-1)b & 1-4b+2ab \end{array}\right] \quad a=1,\ b=1/2 \text{ 时，化为} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

于是方程组的一般解为 $x = (2, 2, 0)^T + k(-1, 0 ,1)^T$（$k$为任意常数）

（3）当 $a=1, b\neq 1/2$ 时， $1-4b+2ab \neq 0$， 方程组无解。

（4）当 $b=0$ 时，$1-4b+2ab = 1\neq 0$ 时, 方程组无解。

（原方程组中后两个方程是矛盾方程）

解法2

系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = b(1-a)$

（1）当（$1-a)\,b \neq 0$时，$D\neq 0$，方程组有唯一解。

（2）当 $a=1, b=1/2$ 时， $D=0$， $r(A)= r(A,b)=2$, 有无穷多解。

（3）当 $a=1, b\neq 1/2$ 时， $D=0$， $r(A)=2, r(A,b)=3$,无解。

（4）当 $a\neq 1$, $b=0$时， $D=0$, $r(A)=2$, $r(A, b)=3$, 无解。

例19 设

$$(a_1,a_2,a_3,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&2&3&4\\2&3&a^2&a\end{pmatrix}$$

问 a 取什么值时,

(1) b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 且表示式唯一;

(2) b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 但表示式不唯一;

(3) b 不可由a_1,a_2,a_3线性表示.

解 对 $(A, b)=(a_1,a_2,a_3,b)$ 施行初等行变换

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&2&3&4\\2&3&a^2&a\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&1&2&6\\0&1&a^2-2&a+4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&1&2&6\\0&0&a^2-4&a-2\end{pmatrix}$$

(1)当$a\neq\pm2$ 时, $R(A,b)=R(A)=3$, b可由a_1,a_2,a_3线性表示, 且表示式唯一(因a_1,a_2,a_3线性无关);

(2)当 $a=2$ 时, $R(A,b)=R(A)=2$, b可由a_1,a_2,a_3线性表示, 但表示式不唯一(因a_1,a_2,a_3线性相关);

(3)当 $a=-2$ 时, $R(A,b)\neq R(A)$, b 不可由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

例20 设矩阵$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, 其中a_3,a_4线性无关, $a_3=2a_1+a_2$, $a_4=3a_1+2a_2$. 向量$b=a_1+a_2+a_3+a_4$, 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解 由$a_3=2a_1+a_2$, $a_4=3a_1+2a_2$知$\xi_1=(2,1,-1,0)^T$, $\xi_2=(3,2,0,-1)^T$为方程组 $Ax=0$ 的两个解, 且有$a_1=2a_3-a_4$, $a_2=2a_4-3a_3$. 又因a_3,a_4线性无关, 所以a_3,a_4为a_1,a_2,a_3,a_4的一个最大无关组, 秩 $R(A)=2$. 易知 $R(\xi_1,\xi_2)=2=4-R(A)$, 因此 ξ_1,ξ_2为方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

由 $b=a_1+a_2+a_3+a_4$ 知$\eta=(1,1,1,1)^T$为方程组 $Ax=b$的一个特解. 因此, 方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\2\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathrm{R})$$

例21 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 8 & -1 & 1\end{pmatrix}$

(1) 求A的列向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 的秩和一个最大无关组,并把其余向量用此最大无关组线性表示;

(2) 求 $Ax=0$ 的通解.

解 (1) 化 A 为**行最简形**:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & -1\\ 0 & -7 & 2 & 4\\ 0 & -7 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3/7 & 13/7\\ 0 & 1 & -2/7 & -4/7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a_1, a_2, a_3, a_4 的秩为2,

一个最大无关组为a_1, a_2, 且有

$$a_3=\frac{3}{7}a_1-\frac{2}{7}a_2,\ a_4=\frac{13}{7}a_1-\frac{4}{7}a_2$$

(2) $Ax=0$ 的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+(3/7)x_3+(13/7)x_4=0\\ x_2-(2/7)x_3-(4/7)x_4=0\end{cases}$$

令**自由未知元** $x_3=k_1,\ x_4=k_2$,

得 $Ax=0$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-3/7\\ 2/7\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-13/7\\ 4/7\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

其中 k_1, k_2 为任意数.

例23 求一个齐次方程组, 使它的基础解系为

$$\xi_1 = (0,1,2,3)^T \quad \xi_2 = (3,2,1,0)^T$$

解 设所求的齐次方程组为 $Ax = 0$, 则 $A[\xi_1, \xi_2] = O$

记之为 $AB=O$,这相当于要解矩阵方程, 习惯把未知

的 A 放在右边, 转置 $B^T A^T = O$,只需解 $B^T x = 0$

然后再把这些解拼成 A^T 的列(A 的行)即可.

解 $B^T x = 0$ 得基础解系

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = (1,-2,1,0)^T$, $\alpha_2 = (2,-3,0,1)^T$

取 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 即可.

例 26 已知 R^3 的两组基为：$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 及 $B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$

其中：$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,3,3)^T,\alpha_3=(2,7,1)^T;\beta_1=(3,1,4)^T$

$\beta_2=(5,2,1)^T,\beta_3=(1,1,-6)^T$

（1）求向量 $\gamma=(3,6,2)^T$ 在基 B_1 下的坐标；

（2）求从B_1 到 B_2 的过渡矩阵；

（3）求向量 γ 在基 B_2 下的坐标。

解：（1）设所求坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，即有：

$$\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$

方程组整理得：
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+7x_3=6 \\ x_1+2x_3+x_3=2 \end{cases}$$

对其增广矩阵进行初等行变换：

$$(A|b)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 7 & 6\\ 1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

即方程组得解为：$x_1=-2, x_2=1, x_3=1$

即 $\gamma_{B_1}=(-2,1,1)^T$

（2）设所求过渡矩阵为 A 即有：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$$

于是：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$$

（3）设向量 $\gamma_{B_2}=y=(y_1,y_2,y_3)$ 则

$$(y_1,y_2,y_3)^T=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}(153,-106,83)^T$$

本题如果直接利用公式 $y=A^{-1}x$.来求 y ，计算 A^{-1} 时计算量较大，为了避免繁琐的运算，可采用如下方法之一求解：

（1）因为 $A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 所以 $A^{-1}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$

（2）设 $\gamma_{B_2}=y=(y_1,y_2,y_3)^T$ ，解方程组 $y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3=\gamma$ 即可

由例6知，只要知道了旧基底到新基底的过渡变换矩阵，就易计算出向量在新基底下的坐标。

例27 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一组基，而

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

（1）证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是 R^n 的一组基，并写出由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵；

（2）设 $\alpha\in R^n,\alpha$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $(n,n-1,\cdots,2,1)$ 求 α 在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标。

解：1）设矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 对矩阵B进行初等列变换：

后一列减去前一列得：

$$r(B)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$$

所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是 R^n 的一组基。

或由定理知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是 R^n 的一组基。

而
$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

故从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2）
$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A^{-1}\begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 α 在基 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 下的坐标为:

$$\alpha_B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例28 求方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 方阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \\ 0 & -1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-3, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1.$

例28 求方阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 当 $\lambda_1=-3$ 时, 解方程组 $(-3E-A)x=0$. 由

$$-3E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&1\\-1&-3&1&-1\\-1&1&-3&-1\\1&-1&-1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-3\\-1&-3&1&-1\\-1&1&-3&-1\\-3&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-3\\0&-4&0&-4\\0&0&-4&-4\\0&-4&-4&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&0&1\\0&0&-4&-4\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,

方阵 A 对应于 $\lambda_1=-3$ 的全部特征向量为 $k_1p_1\ (k_1\neq 0)$.

例28 求方阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 当 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 解方程组 $(E-A)x=0$. 由

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$

方阵 A 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 的全部特征向量为

$$k_2p_2+k_3p_3+k_4p_4\quad (k_2,k_3,k_4\ \text{不同时为零})$$

例29 设矩阵 A 与 B 相似，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a, b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

解 (1) 因 A 与对角阵 B 相似，知 A 的特征值为 2, 2, b.

由特征值的性质得

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{vmatrix}=6(a-1)=4b$$

$$\mathrm{tr}(A)=5+a=4+b$$

求得 $a=5,\ b=6$.

例29 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a, b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

解 (2) 当 $\lambda=2$ 时, 解方程组 $(2E-A)x=0$, 得基础解系

$$p_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ p_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

当 $\lambda=6$ 时, 解方程组 $(6E-A)x=0$, 得基础解系

$$p_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$$

取可逆矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

则有 $P^{-1}AP=B$.

例29 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a, b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

解 (3) $A=PBP^{-1},\ \ A^n=PB^nP^{-1}.$

$$P^*=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-3&-3&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$|P|=1\times2+(-1)\times(-3)+1\times1=-4$$

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^*=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-3&-3&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例29 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a,b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

解 (3) $A=PBP^{-1},\ \ A^n=PB^nP^{-1}.$

$$A^n=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-3&-3&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=-2^{n-2}\begin{pmatrix}3^n-5&3^n-1&1-3^n\\2(1-3^n)&-2(3^n+1)&2(3^n-1)\\3^{n+1}-3&3^{n+1}-3&-3^{n+1}-1\end{pmatrix}$$

例30 设 A, B为n阶矩阵, λ 为AB的非零特征值, 证明 λ 也为 BA 的特征值.

证明 存在非零向量 p, 使 $ABp = \lambda p$. 于是

$$BA(Bp) = B(ABp) = B(\lambda p) = \lambda(Bp)$$

由 $\lambda \neq 0,\ p \neq 0$, 可知 $Bp \neq 0$. 因此 λ 为 BA 的特征值.

(而 Bp 为对应的特征向量)

例31 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值，求 a 的值，并讨论 A 可否相似对角化.

解 方阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2-\lambda & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 3\\ -1 & -a-1 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

例31 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值，求 a 的值，并讨论 A 可否相似对角化.

解 若 $\lambda=2$ 是二重特征值，则 $\lambda=2$ 是

$$\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$$

的根，求得 $a=-2$.

$$2E-A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(2E-A)=1$，$\lambda=2$ 的几何重数为 2，等于代数重数，从而 A 可相似对角化.

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

例31 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值，求 a 的值，并讨论 A 可否相似对角化.

解 若 $\lambda=2$ 不是二重特征值，则

$$\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$$

有重根 $\lambda=4$，求得 $a=-2/3$.

$$4E-A=\begin{pmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&2/3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(4E-A)=2$，$\lambda=4$ 的几何重数为 1，小于代数重数 2，从而 A 不可相似对角化.

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

例32 将二次型

$$f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

通过正交变换 $x = Py$,化成标准形.

解　1．写出对应的二次型矩阵，并求其特征值

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{pmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 18)^2(\lambda - 9)$$

从而得特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18.$

2. 求特征向量

将 $\lambda_1 = 9$ 代入 $(A - \lambda E)x = 0$, 得基础解系

$$\xi_1 = (1/2, 1, 1)^T.$$

将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ 代入 $(A - \lambda E)x = 0$, 得基础解系

$$\xi_2 = (-2, 1, 0)^T, \ \xi_3 = (-2, 0, 1)^T.$$

3. 将特征向量正交化

取 $\alpha_1 = \xi_1, \quad \alpha_2 = \xi_2, \quad \alpha_3 = \xi_3 - \dfrac{[\alpha_2, \xi_3]}{[\alpha_2, \alpha_2]}\alpha_2,$

得正交向量组

$$\alpha_1 = (1/2, 1, 1)^T, \ \alpha_2 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$\alpha_3 = (-2/5, -4/5, 1)^T.$$

4．将正交向量组单位化，得正交矩阵 P

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad (i = 1,2,3),$

得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

所以 $$P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

于是所求正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$

例33 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 正定，求t的范围.

解：因为A正定，所以 $|A_i|>0 (i=1,2,3)$

$$|A_1|=1>0; \ |A_2|=\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix}=1-t^2>0;$$

$$|A_3|=|A|=\begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-5t^2-4t>0$$

由 $\begin{cases} 1-t^2>0 \\ -5t^2-4t>0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} -1<t<1 \\ -\dfrac{4}{5}<t<0 \end{cases}$

于是得到 t 的取值范围是：$-\dfrac{4}{5}<t<0$

例34 判别二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$ 是否正定.

解： $f=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$

$$=2(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2)+4x_2^2+3x_3^2$$

$$=2(x_1-x_3)^2+4x_2^2+3x_3^2\geq 0$$

且等号成立当且仅当 $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$

所以二次型正定.

例35 设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$

证明：二次型的秩等于矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$ 的秩.

证:

$$f=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2=\sum_{i=1}^{s}\left((x_1,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{in} \end{bmatrix}(a_{i1},\cdots,a_{in})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

$$=(x_1,\cdots,x_n)\left(\sum_{i=1}^{s}\begin{bmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\cdots\\a_{in}\end{bmatrix}(a_{i1},\cdots,a_{in})\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}=X'A'AX$$

$(A'A)'=A'A$ 可知，f 的矩阵为 $\mathrm{B}=\mathrm{A}'\mathrm{A}$,有

$r(B)=r(\mathrm{A}'\mathrm{A})=r(\mathrm{A})$.

例36. 设A是n级是实对称矩阵，

证明：存在一正实数c使对任一实n维向量X都有

$$|X'AX| \le cX'X.$$

证:

$$\because |X'AX| = |\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j| \le \sum_{i,j} |a_{ij}||x_i||x_j| \quad \text{令} a = \max_{i,j} |a_{ij}|,$$

则$|X'AX| \le a\sum_{i,j} |x_i||x_j|$

可得 $$|X'AX| \le a\sum_{i,j} \frac{x_i^2 + x_j^2}{2} = an\sum_i x_i^2 = cX'X.$$

其中 $c=an$.

例37. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x'Ax=ax_1^2+2x_2^2-3x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$，其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为1，特征值之积为$-12$.

(1)求a,b的值;

(2)利用正交变换将二次型f化为标准型，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.(2003年数学3)

解法1

(1)二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵为$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

设A的特征值为$\lambda_i\,(i=1,2,3)$,由题设有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12$$

解得$a=1, b=2$.

(2)由矩阵A的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

得A的特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3.$

对于$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$,解齐次线性方程组$(2E - A)x = 0$,

得其基础解系$\xi_1 = (2,0,1)', \xi_2 = (0,1,0)'.$

对于$\lambda_3 = -3$,解齐次线性方程组$(-3E - A)x = 0$,

得其基础解系$\xi_3 = (1,0,-2)'.$

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3已是正交向量组,为得到规范正交向量组,只需将ξ_1,ξ_2,ξ_3单位化,

由此得$\eta_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})',\eta_2=(0,1,0)',\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}})'$

令矩阵$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$,

则P为正交矩阵,在正交变换$x=Py$下,有

$$P'AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix},$$且二次型的标准形为

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$

解法2

(1)二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}.$

A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -b \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)[\lambda^2 - (a-2)\lambda - (2a+b^2)]$$

设A的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$

则$\lambda_1 = 2, \lambda_2 + \lambda_3 = a-2, \lambda_2\lambda_3 = -(2a+b^2),$

由题设得$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + (a-2) = 1,$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2(2a+b^2) = 12,$ 解得$a = 1, b = 2.$

(2)由(1)可得A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3,$

以下解法同解法(1).

例38 设$f(x)=x'Ax$是一实n元二次型,

若有n维向量x_1,x_2,使$f(x_1)>0, f(x_2)<0$,试证：

（1）x_1和x_2线性无关；

（2）存在n维向量$x_0\neq 0$,使$f(x_0)=0$.

证:(1)由$f(x_1)>0$知$x_1\neq 0$,从而x_1线性无关.

于是,若x_1和x_2线性相关,

则x_2可由x_1线性表示：$x_2=kx_1, k\in R$,

且$f(x_2)=f(kx_1)=(kx_1)'A(kx_1)$

$=k^2x_1'Ax_1=k^2f(x_1)\geq 0$,

与题设$f(x_1)<0$相矛盾．故x_1和x_2线性无关.

(2)考虑实函数

$G(t)=(tx_1+(1-t)x_2)'A(tx_1+(1-t)x_2),t\in R,$

显然它在R上连续,

且由题设知$G(0)=f(x_2)<0,G(1)=f(x_1)>0,$

因此,存在$t_0\in(0,1)$,使$G(t_0)=0,$

即存在n维向量x_0,使$f(x_0)=0$,其中$x_0=t_0x_1+(1-t_0)x_2.$

由(1)知,$x_0\neq 0.$

例39 设二次型$f(x)=x'Ax$的正、负惯性指数都不为零，

试证：存在非零向量$x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}$，

使$f(x^{(1)})>0, f(x^{(2)})=0, f(x^{(3)})<0$.

证：设$f(x)$的正惯性指数为p，秩为r，则有$0<p<r$，

且有可逆变换$x=Cy\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

使得$f(x)=f(Cy)=\sum_{i=1}^{p}y_i^2-\sum_{j=p+1}^{r}y_i^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由于$|C|\neq 0$，故以下三个向量均不为零：

$x^{(1)}=C(1,0,\cdots,0)', x^{(2)}=C(1,0,\cdots,\underset{(r)}{1},\cdots,0)'$,

$x^{(3)}=C(0,\cdots,\underset{(r)}{1},\cdots,0)'$

将其代入式（2），

得$f(x^{(1)})=1>0, f(x^{(2)})=1-1=0, f(x^{(3)})=-1<0$.

例40 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,矩阵$B=(kE+A)^2$,

其中k为实数,E为单位矩阵.求对角矩阵

Λ,使B与Λ相似,并求k为何值时,B正定.

解：由$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$

可得A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$.于是

$B=(kE+A)^2$的特征值为$\lambda_1=k^2, \lambda_2=\lambda_3=(k+2)^2$.

由于A为实对称矩阵,故B亦为实对称矩阵,从而

$$B\sim\begin{pmatrix} k^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & (k+2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix} k^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & (k+2)^2 \end{pmatrix}$$

由上面的结果立即得到:当$k\neq 0,-2$时,

B的全部特征值均为正数,这时B为正定阵.

例41 设$A=(a_{ij})$是一个n阶正定阵,$b_1,b_2\cdots,b_n$是n个非零实数,试证:$B=(a_{ij}b_ib_j)$也是正定阵.

证:因为A正定,所以存在n阶可逆阵P,使$A=P'P$,令

$$Q=\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

则$Q'=Q$，且由$b_1,b_2\cdots,b_n\neq 0$知Q可逆，

于是由矩阵的乘法知

$$B=(a_{ij}b_ib_j)=Q'AQ=Q'(P'P)Q=(PQ)'(PQ)$$

显然PQ可逆，故B为正定阵.