

武汉大学 2018-2019 第一学期期末考试

线性代数 B (A 卷)

1. (10 分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & a & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & a \end{vmatrix} \quad (a-i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n-1).$$

2. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = A^{-1} - B$, 求矩阵 $B^{-1} - A$.

3. (10 分) 考虑向量 $\alpha_1 = (1 \ 3 \ 2 \ 0)^T, \alpha_2 = (7 \ 0 \ 14 \ 3)^T, \alpha_3 = (2 \ -1 \ 0 \ 1)^T, \alpha_4 = (5 \ 1 \ 6 \ 2)^T, \alpha_5 = (2 \ -1 \ 4 \ 1)^T$ (1) 求向量组的秩; (2) 求此向量组的一个极大线性无关组, 并把其余向量分别用该极大线性无关组表示。

4. (10 分) 已知向量组 $\beta_1 = (1 \ 0 \ 2)^T, \beta_2 = (1 \ \lambda \ 0)^T, \beta_3 = (1 \ 1 \ \mu)^T$ 与向量组 $\alpha_1 = (1 \ 1 \ 1)^T, \alpha_2 = (1 \ 2 \ 3)^T$ 有相同的秩, 并且 β_3 可由 α_1, α_2 线性表示, 求 m, n 的值。

5. (16 分) a 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = a \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = a \\ x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 6 \end{cases}$$
 有无穷多组解? 并求通解。

6. (8 分) 若三阶方阵 A 与对角方阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 相似, 求行列式 $|6A^{-1} - 2I|$ 的值 (其中 A^{-1} 为矩阵 A 的逆矩阵)。

7. (8 分) 求向量 $\beta = (5 \ -1 \ 3)^T$, 在基 $\alpha_1 = (1 \ 0 \ 1)^T, \alpha_2 = (1 \ 1 \ 0)^T, \alpha_3 = (1 \ 1 \ 1)^T$ 下的坐标。

8. (12 分) 设有矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (1) 写出矩阵 A 的二次型 f ; (2) 求一个正交相似变换

矩阵 P , 将 A 化为对角矩阵; (3) 判断 f 是否是正定二次型。

9. (8 分) 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 证明 A 与 B 等价的充要条件为 $R(A) = R(B)$ 。

10. (8 分) 设 A 是 n 阶方阵, I 是 n 阶单位矩阵, $A+I$ 可逆, 且 $f(A) = (I-A)(I+A)^{-1}$,

证明 (1) $(I+f(A))(I+A) = 2I$; (2) $f(f(A)) = A$

武汉大学 2018-2019 第一学期期末考试

线性代数 B (A 卷) 解答

1. (10 分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & a & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & a \end{vmatrix} \quad (a-i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n-1).$$

解 原式 =
$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1-a & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-a & 0 & 0 & 0 & a-(n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - \sum_{i=2}^{n-1} i \frac{a-1}{a-i} & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= (a - \sum_{i=2}^{n-1} i \frac{a-1}{a-i}) \prod_{i=2}^{n-1} a(a-i) \quad 10 \text{ 分}$$

2. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = A^{-1} - B$, 求矩阵 $B^{-1} - A$.

解 $\because AB = A^{-1} - B \therefore (A+E)B = A^{-1}, A+E = A^{-1}B^{-1} \therefore A(A+E) = B^{-1}$ (4 分)

则 $B^{-1} = A(A+E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 8 分

故 $B^{-1} - A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 10 分

3. (10 分) 考虑向量 $\alpha_1 = (1 \ 3 \ 2 \ 0)^T, \alpha_2 = (7 \ 0 \ 14 \ 3)^T, \alpha_3 = (2 \ -1 \ 0 \ 1)^T, \alpha_4 = (5 \ 1 \ 6 \ 2)^T, \alpha_5 = (2 \ -1 \ 4 \ 1)^T$ (1) 求向量组的秩; (2) 求此向量组的一个极大线性无关组, 并把其余向量分别用该极大线性无关组表示.

$$\text{解 } \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 向量组的秩为 } 3, \quad 7 \text{ 分}$$

$$\text{极大线性无关组为 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \quad \alpha_4 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_5 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \quad 10 \text{ 分}$$

4. (10 分) 已知向量组 $\beta_1 = (1 \ 0 \ 2)^T, \beta_2 = (1 \ \lambda \ 0)^T, \beta_3 = (1 \ 1 \ \mu)^T$ 与向量组 $\alpha_1 = (1 \ 1 \ 1)^T, \alpha_2 = (1 \ 2 \ 3)^T$ 有相同的秩, 并且 β_3 可由 α_1, α_2 线性表示, 求 λ, μ 的值.

解

β_3 可由 α_1, α_2 线性表示, 即 $\beta_3, \alpha_1, \alpha_2$ 线性相关

所以 $|\beta_3, \alpha_1, \alpha_2| = 0$, 解得 $\mu = 1$. 5 分

又由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与 α_1, α_2 有相同的秩, 即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩为 2

所以 $|\beta_3, \beta_1, \beta_2| = 0$, 解得 $\lambda = 2$. 10 分

5. (16 分) a 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = a \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = a \\ x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 6 \end{cases}$$
 有无穷多组解? 并求通解.

解:

方程组的增广矩阵

$$(A | B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 2 & a \\ 1 & 5 & -10 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 4 & 0 & 0 & 2a \\ 1 & 5 & -10 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-5r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 4 & 0 & 0 & 2a \\ -4 & 0 & 0 & 6-5a \end{array} \right) \\ \xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 6-3a \\ -4 & 0 & 0 & 6-5a \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ -4 & 0 & 0 & 6-5a \\ 0 & 0 & 0 & 6-3a \end{array} \right) \quad 9 \text{ 分}$$

如果方程组有无穷多组解, 则 $\text{rank}(A | B) = 2 \quad \therefore 6-3a = 0$ 12

当 $a = 2$ 时原方程有无数个解, 且原方程等价于
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 = -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 + 2c \\ x_3 = c \end{cases} \quad 16 \text{ 分}$$

6. (8 分) 若三阶方阵 A 与对角方阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 相似, 求行列式 $|6A^{-1} - 2I|$ 的值 (其中 A^{-1} 为矩阵 A 的逆矩阵).

解:

因为 $|A| = 1 \times 2 \times (-3) = -6 \neq 0$, 当 A 的特征值为 λ , 则 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}$, 4 分

又 $\frac{6}{\lambda} - 2$ 是 $6A^{-1} - 2I$ 的特征值, 因为 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, -3, 所以 3 阶方阵 $6A^{-1} - 2I$ 的特征值为: 4, 1, -4, 则 $|6A^{-1} - 2I| = 4 \times 1 \times (-4) = -16$ 8 分

7、(8 分) 求向量 $\beta = (5 \ -1 \ 3)^T$, 在基 $\alpha_1 = (1 \ 0 \ 1)^T, \alpha_2 = (1 \ 1 \ 0)^T, \alpha_3 = (1 \ 1 \ 1)^T$ 下的坐标。

解 求向量 $\beta = (5 \ -1 \ 3)^T$, 在基 $\alpha_1 = (1 \ 0 \ 1)^T, \alpha_2 = (1 \ 1 \ 0)^T, \alpha_3 = (1 \ 1 \ 1)^T$ 下的坐标。

解

法一 设向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases} \quad (4 \text{ 分}) \quad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \end{cases} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{法二 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} \beta \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{而 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{故有 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad 8 \text{ 分}$$

8、(12 分) 设有矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (1) 写出矩阵 A 的二次型 f ; (2) 求一个正交相似变换矩阵 P ,

将 A 化为对角矩阵; (3) 判断 f 是否是正定二次型。

解:

$$(1) f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3 \quad 2 \text{ 分}$$

$$(2) |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda)-4] = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5) = 0$$

可得特征值: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ 5 分

相应的特征向量为: 对于 $\lambda_1 = 1$, 解齐次线性方程组 $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$

$$(A - E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{得基础解系 } \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{对于 } \lambda_2 = 2, \text{ 解齐次线性方程组 } (A - 2E)\vec{x} = \vec{0}, (A - 2E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{得基础解系 } \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 对于 } \lambda_3 = 5, \text{ 解齐次线性方程组 } (A - 5E)\vec{x} = \vec{0}$$

$$(A-5E)=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=x_3 \\ x_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{得基础解系 } \vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

实对称矩阵 A 三个特征不相同, $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3$ 必两两正交, 对 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3$ 单位化

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{\xi}_1}{\|\vec{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{p}_2 = \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{p}_3 = \frac{\vec{\xi}_3}{\|\vec{\xi}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad 10 \text{ 分}$$

(3) 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都为正, 所以 f 是正定二次型。 12 分

9、(8 分) 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 证明 A 与 B 等价的充要条件为 $R(A) = R(B)$ 。

证明: (必要性) 初等变换不改变矩阵的秩, 所以 ~~$RA=RB$~~ 4 分

(充分性) 设 $R(A) = R(B) = r$, 则 A, B 的标准型都为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 即 A, B 都与 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 等价, 从而 A 与 B 等价。 8 分

10、(8 分) 设 A 是 n 阶方阵, I 是 n 阶单位矩阵, $A+I$ 可逆, 且 $f(A) = (I-A)(I+A)^{-1}$,

证明 (1) $(I+f(A))(I+A) = 2I$; (2) $f(f(A)) = A$

解 (1) 由 $f(A) = (I-A)(I+A)^{-1}$ 所以有

$$(I+f(A))(I+A) = (I+A) + (I-A)(I+A)^{-1}(I+A) = (I+A) + (I-A) = 2I \quad 4 \text{ 分}$$

(2) 由 $f(A) = (I-A)(I+A)^{-1}$, 故 $f(f(A)) = (I-f(A))(I+f(A))^{-1}$

有 (1) 知, $(I+f(A))^{-1} = \frac{1}{2}(I+A)$ 且由已知 $f(A) = (I-A)(I+A)^{-1}$

$$\text{故有 } f(f(A)) = (I-f(A))(I+f(A))^{-1} = [I - (I-A)(I+A)^{-1}] \frac{1}{2}(I+A)$$

$$= [\frac{1}{2}(I+A) - \frac{1}{2}(I-A)] = A \quad 8 \text{ 分}$$