武汉大学 2023-2024 学年第一学期期末考试
线性代数 A（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

（符号说明：E 表示单位阵，方阵 A 的伴随矩阵记为 A^*）

一、（10 分）计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

二、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，计算 A^{2024}

三、（12 分）设 A 为 3 阶方阵，其伴随矩阵为 A^*，且 $|A| = \frac{1}{2}$，求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - A^*\right|$

四、（10 分）设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

五、（10 分）设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 3，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为它的三个解向量，且 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 + \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$，求方程组的通解。

六、（10 分）已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，设向量组

$\beta_1 =$（$m-1$）$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$，$\beta_2 = \alpha_1 + (m+1)\alpha_2 + \alpha_3$，

$\beta_3 = -\alpha_1 - (m+1)\alpha_2 + (m-1)\alpha_3$，

试讨论：（1）当 m 取何值时可使得向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关？（2）当 m 取何值时可使得向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关？

七、（14 分）在四维实向量构成的向量空间 R^4 中, 已知：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}。$$

（1）已知$\gamma=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，求$\gamma$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标；

（2）试问参数a如何取值可使$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$为$R^4$的基；

（3）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵$P$。

八、（12分）已知1，1，－1 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值，向量$\alpha=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$是$A$ 的对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量，

（1）能否求得 A 的属于$\lambda_3=-1$的特征向量？若能，试求出该特征向量，若不能，则说明理由。

（2）能否由此求得实对称阵 A ？若能，试求之，若不能则说明理由。

九、（12 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$，

（1）写出二次型对应的矩阵；

（2）用正交变换把二次型f化为标准形，并写出相应的正交矩阵。