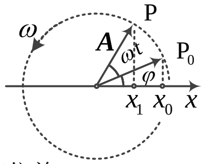
第 6 章　机械振动

一、知识点网络框图

- 机械振动
  - 简谐振动
    - 简谐振动的特征
      - 1、动力学特征：$F=-kx$
      - 2、动力学微分方程：$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2+\omega^2x=0$
      - 3、运动学特征（振动表达式）：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$
      - 速度：$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$　加速度：$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)$
      - 4、能量特征 $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$
    - 描述简谐振动物理量
      - 振幅: A 、频率: ν 、角频率: ω 、周期: T 、相位 $\omega t+\varphi$ ，初相: φ
      - $T=1/\nu$ 、 $\omega=2\pi\nu$ 、 $T=2\pi/\omega$
      - 弹簧振子：$\omega=\sqrt{k/m}$ 、单摆：$\omega=\sqrt{g/l}$ 、复摆：$\omega=\sqrt{mgl/I}$
      - A 与 φ 由初始运动状态确定：
        - $x_0=A\cos\varphi$ ，$v_0=-\omega A\sin\varphi$
        - $A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$ ，$\varphi=\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$
      - 旋转矢量表示法：用角度形象地表示相位和相位差



    - 简谐振动的合成
      - 同方向、同频率的谐振动的合成
        - $x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega t+\varphi_2)=A\cos(\omega t+\varphi)$
        - $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$ ；$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$
      - 同方向、不同频率的谐振动的合成　拍现象
        - $x=A\cos(2\pi\nu_1t+\varphi)+A\cos(2\pi\nu_2t+\varphi)$
        - $=2A\cos\left[\pi(\nu_2-\nu_1)t\right]\cos\left[\pi(\nu_2+\nu_1)t+\varphi\right]$
        - 拍频 $\nu_{拍}=|\nu_2-\nu_1|$
      - 振动方向互相垂直频率成整数倍关系的谐振动的合成-李萨如图形
  - 阻尼振动：振幅随时间衰减的振动，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$
  - 受迫振动：在周期性策动力的作用下发生的振动，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=h\cos\omega t$
  - 共振：当策动力的频率 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ 时，振幅达到最大值的振动

二、基本要求

1、掌握简谐振动的特征和规律，能建立一维简谐振动的动力学微分方程，确定简谐振动的特征量（周期与频率），理解其解的物理意义；

2、掌握描述简谐振动的物理量（特别是相位）的物理意义及其相互关系；

3、熟练掌握描述简谐振动的几种常用方法（解析法，旋转矢量法，图像法），并能熟练地根据振动物体的初始条件求出振动表达式；

4．熟练掌握同方向，同频率简谐振动的合成规律，了解拍现象，理解两个相互垂直的简谐振动合成的规律和特点，了解李萨如图形；

5．了解阻尼振动、受迫振动的规律，了解共振现象及其发生的条件和特点。

三、主要内容

（一）简谐振动的特征

1. 简谐振动的动力学特征

如果物体振动时所受的合外力（或合外力矩）满足

$$F=-kx \quad （或：M=-k\theta）$$

即物体受到的合外力（或合外力矩）的大小与物体相对平衡位置的位移（或角位移）的大小成正比，方向相反，则物体做简谐振动。这是简谐振动的动力学特征。

2．简谐振动的运动学特征

以弹簧振子（$F=-kx$）为例，利用牛顿第二运动定律$F=ma=m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，可得简谐振动物体的动力学微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

式中：$\omega=\sqrt{k/m}$，称为弹簧振子的角频率。该微分方程的通解为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

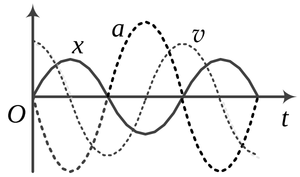


图 6.1 简谐振动物体的位置（位移）、速度、加速度曲线

即物体离开平衡位置的位移按照余弦（或正弦）规律变化，这称为简谐振动的运动学特征。上式称为简谐振动的振动表达式（或运动方程）。

由振动表达式可得，振动物体的速度和加速度分别为

$$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \quad , \quad a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

做简谐振动时，物体的位置（即物体相对于平衡位置的位移）、速度和加速度随时间变化的函数曲线如图 6.1 所示（图中 $\varphi=-\pi/2$ ），其中“ $x-t$ ”曲线称为振动曲线。

3、描述简谐振动的物理量　A 和 φ 的确定方法

在振动表达式中， A 和 φ 称为简谐振动的振幅和初相位，它们由物体的初始运动状态（ x_0、 v_0 ）确定，即通过求解下列方程组

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad v_0 = -A\omega\sin\varphi$$

可得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi=\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

ω 称为简谐振动的角频率。对弹簧振子： $\omega=\sqrt{k/m}$ ； 对于单摆： $\omega=\sqrt{g/l}$ ， 对于复摆： $\omega=\sqrt{mgl/I}$ 。它与周期 T 、频率 ν 的关系为

$$T=2\pi/\omega \qquad \omega=2\pi\nu \qquad T=1/\nu$$

$\omega t+\varphi$ 称为物体的相位，它决定了物体在 t 时刻的运动状态。

4. 简谐振动的旋转矢量表示法

旋转矢量与简谐振动的对应关系为：矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小（长度）等于简谐振动的振幅 A；矢量 $\boldsymbol{A}$ 旋转的角速度等于简谐振动的角频率 ω，旋转方向总是沿逆时针方向；矢量 $\boldsymbol{A}$ 在初始时刻与 x 轴之间的夹角等于简谐振动的初相位 φ，在任意时刻的夹角等于任意时刻的相位 $\omega t+\varphi$ 。于是旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 在旋转过程中，其端点 P 在 x 轴上投影点的运动就是简谐振动。

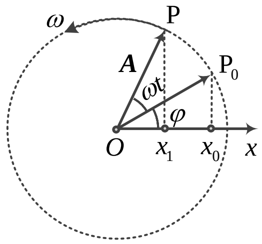


图6.7 简谐振动的旋转矢量表示法

利用旋转矢量可以将相位“ $\omega t+\varphi$ ”和初相位“ φ ”形象地用角度表示。

5. 简谐振动的能量特征

以光滑水平面上的弹簧振子为例，振子动能和系统的势能分别为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \qquad E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

振动系统的总机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} kA^2$$

这表明：简谐振动系统的机械能守恒，且振动系统的总能量与振幅的平方成正比。

（二）、简谐振动的合成

1. 两个同方向、同频率的简谐振动的合成

设一个质点同时参与两个同方向、同频率的简谐振动

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

则该质点合运动的方程为

$$x_{合} = x_1 + x_2 = A_{合} \cos\left(\omega t + \varphi_{合}\right)$$

这表明，两个同方向、同频率的简谐振动的合成运动仍然是简谐振动。其中

$$A_{合} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)} \qquad \tan\varphi_{合} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

若相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$， $k = 0$，1，2，…，则 $A_{合} = A_1 + A_2$，合振动振幅最大；

若相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$， $k = 0$，1，2，…，则 $A_{合} = \left|A_1 - A_2\right|$，合振动振幅最小。

2. 两个同方向不同频率的简谐振动的合成　拍

设两个同方向的简谐振动的振动表达式分别为

$$x_1 = A\cos\left(2\pi\nu_1 t + \varphi\right) \qquad x_2 = A\cos\left(2\pi\nu_2 t + \varphi\right)$$

则合振动的表达式为

$$x = 2A\cos\left[\pi\left(\nu_2 - \nu_1\right)t\right]\cos\left[\pi\left(\nu_2 + \nu_1\right)t + \varphi\right]$$

当 $\left|\nu_2 - \nu_1\right|$ 远小于 ν_1 和 ν_2 时，由上式给出的合成运动可看成是频率为 $\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}$ 、振幅为 $\left|2A\cos\left[\pi\left(\nu_2 - \nu_1\right)t\right]\right|$ 的振动。显然，这样的振动其振幅将随时间做缓慢地、周期性地变化，这样的现象称为拍现象。振幅强弱变化的频率称为拍频，其值为

$$\nu = \left|\nu_2 - \nu_1\right|$$

3．**两个相互垂直的同频率简谐振动的合成**

设一个质点同时参与两个振动方向互相垂直、频率相同的简谐振动

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

则质点合运动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \sin^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

一般情况下，质点的运动轨迹是一个椭圆，其形状由两个振动的相位差和振幅之比决定。

若两个振动的频率不同，但形成严格的整数倍关系，则合成运动的轨迹是一条封闭曲线，称为李萨如图形。

（三）阻尼振动 受迫振动 共振

1. 阻尼振动

振幅随时间逐渐衰减的振动称为阻尼振动。其振动的动力学微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

式中 β 称为阻尼系数。当阻尼较小，即 $\beta < \omega_0$ 时，上述方程的通解为

$$x = A_0\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

式中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ，称为阻尼振动的角频率。

2. 受迫振动与共振

物体在周期性外力的作用下发生的振动称为受迫振动，这种周期性外力叫策动力。其动力学微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = h\cos\omega t$$

经过一段时间，受迫振动达到稳定状态后的振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

其中，受迫振动的振幅为： $A = \dfrac{h}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}$ 。当 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时，振幅达到最大值

$$A_{\max} = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

这种情况称为共振

四、典型例题解法指导

本章题型主要有以下几类：

1、求证物体做简谐振动，并求振动的特征量（周期和频率）。这类问题一般可以从动力学的角度来证明，即通过受力分析，利用 $F=ma$ 或 $M=I\alpha$，证明振动物体受的合外力满足：$F=-kx$，或加速度满足：$a=-\omega^2 x$ 即可。

2、根据振动物体的初始运动条件或振动曲线，求解振动表达式。这类问题的核心就是要确定振动物体的三个特征量 A、ω 和 φ。求解这类问题需要熟练应用振动表达式的标准形式，并借助旋转矢量找出初始条件和各特征量之间的关系。

3、简谐振动的合成类问题。求解这类问题通常有两种方法：解析法和旋转矢量法，但两种方法往往需要配合使用。

相位是描述简谐振动的核心，所以解决简谐振动问题的关键是确定其相位和初相。

例 6.1 如图所示，一劲度系数为 k 的轻弹簧，一端固定在墙上，另一端用一根不可伸长的轻绳、跨过滑轮与质量为 m 的重物相连。开始时用外力托住重物 m 使弹簧无伸长，现撤去外力，使重物运动。设绳与滑轮无相对滑动，且不计轮轴上的摩擦阻力矩，滑轮可视为质量为 M、半径为 R 的匀质圆盘，其转动惯量为 $I=\dfrac{1}{2}MR^2$。

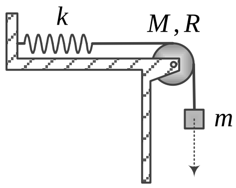


图 6.1 例 6.1 图

（1）证明：撤去外力后，重物做简谐振动，并求振动周期；

（2）以刚撤去外力时为计时起点，物体的平衡位置为坐标原点，向下为运动的正方向，求重物的振动表达式。

分析： 要求证一个物体做简谐振动，就是要证明物体在任意时刻受到的合外力（或加速度）的大小与物体离开平衡位置时的位移的大小成正比，方向相反。

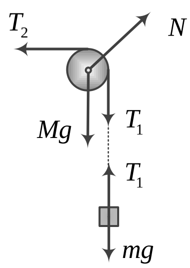


图 6.1 例 6.1 解图

解：（1）以撤去外力后，重物的平衡位置为坐标原点，向下为 x 轴的正方向。假设在某一时刻物体离开平衡位置的位移为 x，对重物和定滑轮作受力分析，如图所示。由牛顿第二定律和定轴

转动定律，可得

$$mg - T_1 = ma \qquad ①$$

$$T_1 R - T_2 R = I\alpha \qquad ②$$

式中 $I = \frac{1}{2}MR^2$，T_2 为弹簧的弹性力。由于物体在平衡位置时，弹簧的伸长量为 $\frac{mg}{k}$，所以

$$T_2 = k\left(x + \frac{mg}{k}\right) = kx + mg \qquad ③$$

又

$$a = \alpha R \qquad ④$$

联立方程组①～④，求解可得

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2k}{2m+M}x$$

这表明物体加速度的大小与物体离开平衡位置的位移的大小成正比，方向相反，所以重物做简谐振动。将上式与简谐振动的微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$ 作比较可知，物体的振动角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{2m+M}}$$

所以振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2m+M}{2k}}$$

（2）设振动表达式为： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 。由题意可知，在初始时刻（计时起点）

$$x_0 = A\cos\varphi = -A = -\frac{mg}{k}$$

$$v_0 = -A\omega\sin\varphi = 0$$

由此得： $A = \frac{mg}{k}$， $\varphi = \pi$，所以物体的振动表达式为

$$x = \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{2m+M}}t + \pi\right)$$

例 6.2 已知一质点做简谐振动，其振动曲线（$x \sim t$）如图 6.3 所示。试求该质点的振动表达式。

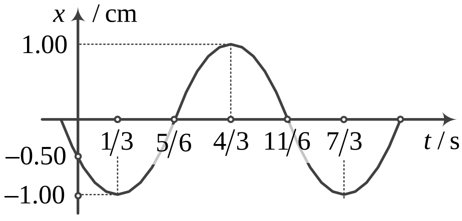


图 6.3　例 6.2 图

分析：通常由振动曲线可知振幅和周期，所以关键是如何求出振动的初相位。由振动速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ 可知，振动曲线上任意一点的斜率代表了对应时刻的振动速度。所以由振动曲线可得到初始时刻（或某个给定任意时刻）的振动状态，即振动物体的位置和速度的方向（正负），由此可确定初相位，从而求出振动表达式。

解：设简谐振动表达式为：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$。

由图可知：$A = 1.00\text{cm}$、$T = \dfrac{7}{3}\text{s} - \dfrac{1}{3}\text{s} = 2\text{s}$，所以：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

又由图可知：$t = 0$ 时，$x_0 = -0.50\text{cm}$，$v_0 < 0$，即：

$$x_0 = A\cos\varphi = 0.10\cos\varphi = -0.50 \quad ①$$

$$v_0 = -A\omega\sin\varphi = -0.10\pi\sin\varphi < 0 \quad ②$$

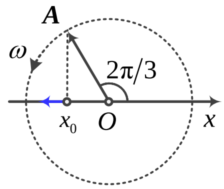


图 6.4 用旋转矢量法求初相

由①式得：$\varphi = \pm\dfrac{2}{3}\pi$，又由②式得：$\sin\varphi > 0$，所以

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

也可用旋转矢量法确定 φ，如图 6.4 所示。因为 $x_0 = -A/2$、$v_0 < 0$，初始时刻的旋转矢量只能位于第 II 象限，$\boldsymbol{A}$ 与 x 轴正方向的夹角为 $2\pi/3$，即 $\varphi = 2\pi/3$。根据以上所得振动表达式为

$$x = 0.10\cos(\pi t + 2\pi/3)\text{cm}$$

例 6.3 一个质量为 10g 的物体做简谐振动，其振幅为 0.24m，周期为 4.0s，当 $t = 0\text{s}$ 时，位移为 0.24m。试求：

（1）$t = 0.5\text{s}$ 时，物体所在位置；

（2）$t = 0.5\text{s}$ 时，物体所受合外力的大小和方向；

（3）由起始位置运动到 $x = 0.12\text{m}$ 处所需的最少时间；

（4）在 $x = 0.12\text{m}$ 处，物体的速度、动能以及振动系统的势能和总能量。

分析：本题首先要从已知条件，求出质点的振动表达式，并由此求出在某一特定时刻的物理量。在求振动过程经历的时间时，用旋转矢量辅助求解是最简单的方法。

解：（1）已知 $A=0.24\text{m}$，$T=4\text{s}$，则角频率：$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$。又由题意可知：$t=0\text{s}$ 时，$x_0=0.24\text{m}$，即：$x_0=A\cos\varphi=A=0.24\text{m}$，所以

$$\varphi=0$$

由此得质点的振动表达式为

$$x=0.24\cos\frac{\pi}{2}t\ \text{m} \qquad ①$$

所以 $t=0.5\text{s}$ 时，物体的位置坐标为

$$x=0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}\times0.5\right)\ \text{m}=0.17\ \text{m}$$

（2）根据简谐振动中加速度与位移的关系可得 $t=0.5\text{s}$ 时的加速度为

$$a=-\omega^2x=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2x=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times0.17\text{m}\cdot\text{s}^{-2}=-0.42\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

物体受力为

$$F=ma=-0.01\times0.42\ \text{N}=-4.2\times10^{-3}\ \text{N}$$

式中“–”号表示受力方向与 x 轴方向相反。

（3）画出物体在初始位置和 $x=0.12\text{m}$ 处的旋转矢量：$\boldsymbol{A}_0$、$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$，如图 6.5 所示，其中 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 都与位置 $x=0.12\text{m}$ 相对应。不难看出，物体从初始位置运动到 $x=0.12\text{m}$ 处所需的最短时间就是旋转矢量以角速度 $\omega=\pi/2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$、从 $\boldsymbol{A}_0$ 逆时针转到 $\boldsymbol{A}_1$ 所需的时间 $\Delta t_{\min}$，即

$$\omega\Delta t_{\min}=\Delta\varphi_{\min}=\frac{\pi}{3}$$

所以所需最短时间为

$$\Delta t_{\min}=\frac{\pi}{3\omega}=\frac{2}{3}\text{s}$$

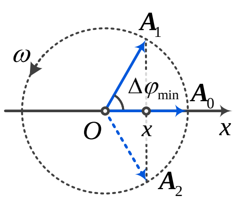


图 6.5 例 6.3 解图

（4）在 $x=0.12\text{m}$ 处，物体的振动相位为

$$\omega t+\varphi=\arccos\left(x/A\right)=\arccos 0.5=\pm\frac{\pi}{3}\pm 2k\pi$$

所以物体的振动速度为

$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=-\frac{\pi}{2}\times 0.24\times\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\pm 2k\pi\right)\mathrm{m\cdot s^{-1}}=\pm 0.326\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由此得物体的动能

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 0.01\times(-0.326)^2\,\mathrm{J}\approx 5.3\times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

物体的势能

$$E_P=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2=\frac{1}{2}\times 0.01\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times 0.12^2\,\mathrm{J}\approx 1.8\times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

系统的总能量

$$E=E_P+E_K=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\approx 7.1\times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

例 6.4 一个质量为m'的盘子系于竖直悬挂的轻弹簧下端，弹簧的劲度系数为k，如图 6.6 所示，现有一个质量为m的黏性物体，自离盘高为h处掉落在盘子上，且与盘子黏在一起。以物体掉在盘上的瞬时作为计时起点，试求盘子的振动表达式。

分析：系统的振动角频率由$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+m'}}$给出，而初速度由动量守恒定律求出。适当选取坐标系以确定初始条件，从而可求出振动初相位和振幅。

解：取物体掉在盘子上以后的平衡位置为坐标原点O，竖直向下为x轴正方向。则在平衡位置O点处，弹簧在原有伸长的基础上又伸长了l，且

$$l=mg/k$$

物体m从高度h处落到盘上时的速度为

$$v_m=\sqrt{2gh}$$

由动量守恒定律可知，物体落在盘上后，盘子获得的初速度v_0满足

$$mv_m=(m+m')v_0$$

即

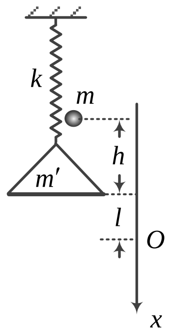


图 6.6 例 6.4 图

$$v_0=\frac{mv_m}{m+m'}=\frac{m}{m+m'}\sqrt{2gh}$$

若以物体掉落在盘子上的瞬间为振动的计时起点，则由上述分析可知，在$t=0$时

$$x_0=A\cos\varphi=-m'g/k$$

$$v_0=-A\omega\sin\varphi=\frac{mv_m}{m+m'}=\frac{m}{m+m'}\sqrt{2gh}$$

其中振动角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+m'}}$$

所以振幅为

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+m')g}}$$

初相满足

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}=\sqrt{\frac{2kh}{(m+m')g}}$$

又由$x_0<0$、$v_0>0$，可知φ在第 3 象限，所以

$$\varphi=\pi+\arctan\sqrt{\frac{2kh}{(m+m')g}}$$

最后得振动表达式为

$$x=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+m')g}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m+m'}}t+\arctan\sqrt{\frac{2kh}{(m+m')g}}+\pi\right)$$

讨论：若取向上为坐标轴的正方向，则$t=0$时，$x_0'>0$，$v_0'<0$，初相φ在第 1 象限，但振幅和角频率不变。

例 6.5 一个质点同时参与两个同方向、同频率的简谐振动，它们的振动曲线如图 6.7 所示，试求这两个简谐振动合成运动的振动表达式。

分析：由振动曲线可求出两简谐振动的周期、振幅和初相。求合振动时，既可以用公式法求出合振动的振幅和初相，也可以用旋转矢量方法求解。

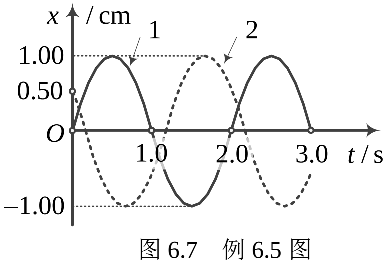


图 6.7　例 6.5 图

解： 由图可知两振动的振幅为 $A_1 = A_2 = 1.00\text{cm}$，振动周期 $T = 2.0\text{s}$，故振动角频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

对于振动 1，$t = 0$ 时，$x_{10} = 0$，$v_{10} > 0$，故其初相：$\varphi_1 = -\pi/2$ 或 $3\pi/2$

对于振动 2，$t = 0$ 时，$x_{20} = A_2/2 = 0.50\ \text{cm}$，$v_{20} < 0$，故其初相：$\varphi_2 = \pi/3$

所以合振动的振幅为

$$A_{合} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0.52\ \text{cm}$$

对于合振动的初相位，需要借助旋转矢量，首先确定其所在象限，然后再用解析式确定其大小。由旋转矢量图（见图 6.8 所示）可知，合成振动的初相在第 4 象限，所以由

$$\tan\varphi_{合} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

得

$$\varphi_{合} = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = -15^\circ = -\frac{\pi}{12}$$

或者直接由图中的几何关系可得

$$\varphi_{合} = -\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{12}$$

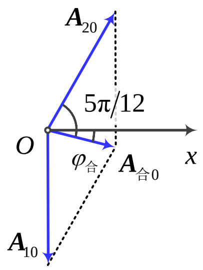


图 6.8 例 6.5 解图

故合振动的表达式为

$$x_{合} = A_{合}\cos\left(\omega t + \varphi_{合}\right) = 0.52\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{12}\right)\ \text{cm}$$

五、自我测试题

6.1 一个质点做周期为 T 的简谐振动。从平衡位置到最大位移的一半时所需的最短时间为（　　　　）。

A．$T/2$　　　B．$T/4$　　　C．$T/6$　　　D．$T/12$

6.1 答案： D

解： 由旋转矢量图可知：$\omega\Delta t_{\min} = \frac{2\pi}{T}\Delta t_{\min} = \frac{\pi}{6}$，所以 $\Delta t_{\min} = \frac{T}{12}$。

6.2 在理想情况下，弹簧振子的振动频率为$\nu=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。如果弹簧的质量不能忽略，则振动频率将（　　　　）。

A．增大　　　B．减小　　　C．不变　　　D．不能确定

6.2 答案：B

解：弹簧的质量不能忽略时，振子的有效质量会增大，所以频率会减小。

6.3 两个劲度系数分别为k_1和k_2的弹簧串联后，下面再挂一个质量为m的物体，构成一个竖直方向的弹簧振子，则该弹簧振子的振动周期为（　　　　）。

A．$2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1+k_2)}{2k_1k_2}}$　　B．$2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$　　C．$2\pi\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$　　D．$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

6.3 答：B

解：因为两个弹簧串联后的等效劲度系数为$k=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$，所以周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$$

6.4 将一根劲度系数为k的弹簧截成相等的两段，然后将它们并联起来，再在下面挂一个质量为m的物体，构成一个竖直方向的弹簧振子，则该弹簧振子的振动周期为（　　　　）。

A．$2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　B．$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　　C．$\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　D．$\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

6.4 答案：D

解：将劲度系数为k弹簧截成相等的两段时，每段弹簧的劲度系数为$2k$，并联后的总劲度系数为$k'=2\cdot 2k=4k$，所以振动周期为：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k'}}=\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

6.5 一质点做简谐振动，其振动表达式为$x=A\cos(\omega t+\pi/4)$，则在$t=T/4$时刻，物体的加速度为

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$　　B．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}A\omega^2$　　D．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}A\omega^2$

6.5 答案：A

解： $a=-A\omega^2\cos(\omega t+\pi/4)=-A\omega^2\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}+\pi/4\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$

6.6　一弹簧振子在光滑的水平面上做简谐振动，已知振子的势能最大值为 100J，当振子处在最大位移的一半时，其动能为（　　）

A．100J　　　　B．75J　　　　C．50J　　　　D．25J

6.6 答案：B

解：对弹簧振子 $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$。当 $x=\frac{1}{2}A$ 时

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2=\frac{1}{4}E$$

所以振子的动能为

$$E_k=E-E_p=\frac{3}{4}E=75\text{J}$$

6.7 一个质点同时参与两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为

$$x_1=\cos(5t+\pi/4)\ \text{cm}\qquad x_2=\sqrt{3}\cos(5t+3\pi/4)\ \text{cm}$$

则该质点合振动的表达式为（　　　　）。

A. $x=0.73\cos(5t+3\pi/4)$ cm　　　　B. $x=2.0\cos(5t+7\pi/12)$ cm

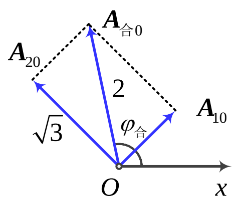
C. $x=2.0\cos(5t+5\pi/12)$ cm　　　　D. $x=2.0\cos(5t+\pi/2)$ cm

6.7 答案：B

解：由旋转矢量图可知合振动的振幅和初相分别为

$$A=2.0\ \text{cm}\ 、\ \varphi=\pi/4+\pi/3=7\pi/12$$

所以选 B

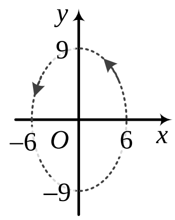


测试题 6.7 解图

6.8 如图所示是两个互相垂直的同频率简谐振动合成后的椭圆轨迹，已知质点在 x 方向的振动表达式为：$x=6\cos\omega t$，质点在椭圆轨迹上沿逆时针方向运动，则质点在 y 方向的振动表达式应为（　　　　）

A．$y=9\cos(\omega t+\pi/2)$　　B．$y=9\cos(\omega t-\pi/2)$

C．$y=9\cos\omega t$　　D．$y=9\cos(\omega t+\pi)$



测试题 6.8 图

6.8 答案： B

解题提要： 合成轨迹为正椭圆，表明相位差为 $\pi/2$，可排除 C、D 选项，然后用两个互相垂直的旋转矢量的合成做图法判断 B 正确。

6.9 一弹簧振子做简谐振动，振幅为 A，周期为 T，其运动方程用余弦函数表示。若 $t=0$ 时，（1）振子在负的最大位移处，则初相为__________；（2）振子在平衡位置，且向正方向运动，则初相为__________；（3）振子在位移 $A/2$ 处，且向负方向运动，则初相为__________。

6.9 答案：$\pm\pi$；$-\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$；$\dfrac{\pi}{3}$。

解题提要：可利用旋转矢量图示法求解。

6.10 无阻尼自由简谐振动的周期和频率由_______决定，其振幅和初相由_______决定。

6.9 答案：振动系统的性质；振动物体的初始运动状态，即初始条件

6.11 一物体做简谐振动，其振动的最大速度 $v_{\max}=5.0\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$，振幅 $A=2.0\ \mathrm{cm}$。当物体通过 $A/2$，并向 x 轴正向运动时记为计时起点，则物体的振动表达式为_________。

6.11 答案： $x=2.0\cos(2.5t-\pi/3)\ \mathrm{cm}$

解： 由 $v_{\max}=\omega A$，可知：$\omega=\dfrac{v_{\max}}{A}=\dfrac{5}{2}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$。又由题意可知

$$x_0=A\cos\varphi=A/2 \quad、\quad v_0=-A\omega\sin\varphi>0$$

由此解得：$\varphi=-\pi/3$。所以振动表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=2.0\cos(2.5t-\pi/3)\ \mathrm{cm}$$

6.12 一个简谐振动系统，其振动周期为 T，以余弦函数表达其运动方程时，初相为零。则在 $0\le t\le T/2$ 的时间范围内，系统在_________时刻的动能和势能相等。

6.12 答案： $T/8$ 和 $3T/8$

解：由题意可知，质点的振动表达式为：$x=A\cos\dfrac{2\pi}{T}t$，又振动系统的总能量和势能分别为

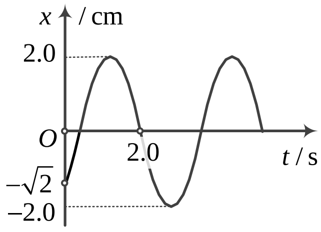
$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2 \quad , \qquad E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2\frac{2\pi}{T}t$$

所以当系统的振动势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2\frac{2\pi}{T}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2$$

时，动能和势能相等。由此可解得：$t=T/8$ 或 $t=3T/8$

6.13 如图所示为一质点的振动曲线，试求该质点的振动表达式。



测试题 6.13 图

6.13 答案： $x=2.0\cos\left(\frac{5\pi}{8}t-\frac{3\pi}{4}\right)$ cm

解： 设振动表达式为：$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$

由图可知：$A=2.0\text{cm}$，在 $t=0$ 时刻

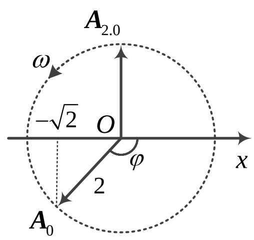
$$x_0=2.0\cos\varphi=-\sqrt{2} \quad , \quad v_0=-A\omega\sin\varphi>0$$

由此得振动的初相位为：$\varphi=-\frac{3\pi}{4}$

在 $t=2.0\text{s}$ 时，质点第 2 次通过平衡位置，且速度小于零，即

$$x_2=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\times 2.0-\frac{3\pi}{4}\right)=0$$

$$v_{2.0}=-\frac{2\pi A}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\times 2.0-\frac{3\pi}{4}\right)<0$$



测试题 6.13 解图

结合旋转矢量图，可得

$$\frac{2\pi}{T}\times 2.0-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \qquad \text{即} \qquad T=\frac{16}{5}\text{s}$$

所以简谐振动的表达式为

$$x=2.0\cos\left(\frac{5\pi}{8}t-\frac{3\pi}{4}\right)\ \text{cm}$$

6.14　三个同方向、同频率的简谐振动：$x_1=\sqrt{2}\cos 4\pi t$，$x_2=\sqrt{2}\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$，

$x_3 = 3\cos\left(4\pi t + \frac{3}{4}\pi\right)$，试利用旋转矢量法求合振动表达式。

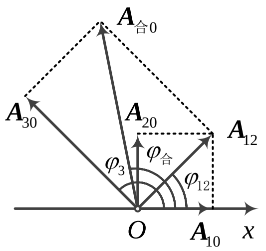
6.14 答案： $x_{合} = \sqrt{13}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{3}{2}\right)$

解题提要： 分别作 3 个简谐振动在初始时刻对应的旋转矢量 $\boldsymbol{A}_{10}$、$\boldsymbol{A}_{20}$ 和 $\boldsymbol{A}_{30}$，如图所示。先求 $\boldsymbol{A}_{10}$ 和 $\boldsymbol{A}_{20}$ 的合矢量 $\boldsymbol{A}_{12}$ 及其相位 φ_{12}，然后再求 $\boldsymbol{A}_{30}$ 和 $\boldsymbol{A}_{12}$ 的合矢量 $\boldsymbol{A}_{合}$ 及其相位 $\varphi_{合}$。由图可知：

$$A_{12} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 2，\quad \varphi_{12} = \pi/4$$

$$A_{合} = \sqrt{A_{12}^2 + A_3^2} = \sqrt{2^2 + 3^3} = \sqrt{13}$$

$$\varphi_{合} = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{A_3}{A_{12}} = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{3}{2}\ （在第 2 象限）$$

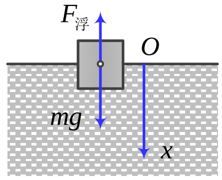


测试题 6.14 解图

所以合振动的表达式为

$$x_{合} = \sqrt{13}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{3}{2}\right)$$

6.15 一个边长为 l、密度为 $\rho_{木}$ 的立方体木块，在密度为 $\rho_{水}$（$\rho_{木} < \rho_{水}$）的水面上上下浮动。求证：木块在水面上浮动时做简谐振动，并求振动周期。



测试题 6.15 图

6.15 答案：$2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_{木} l}{\rho_{水} g}}$

证明：取液面为坐标原点，竖直向下为 x 轴的正方向，当木块处于平衡位置时，木块的吃水深度为 x_0，则由浮力定律和平衡条件可得

$$\rho_{木} l^3 g = \rho_{水} l^2 x_0 g$$

即

$$x_0 = \frac{\rho_{木}}{\rho_{水}} l$$

当吃水深度为 x 时，木块所受的合力为

$$F=\rho_{木}l^3g-\rho_{水}l^2xg=-\rho_{水}l^2g\left(x-\frac{\rho_{木}}{\rho_{水}}l\right)=-\rho_{水}l^2g\left(x-x_0\right)$$

作坐标平移，令 $x'=x-x_0$，此 x' 就是以木块的平衡位置为坐标原点时，木块向下移动的距离，则

$$F=-\rho_{水}l^2gx'$$

这表明在新的坐标系中，木块受到的合外力的大小与 $x'=x-x_0$ 成正比，方向相反。所以物体做简谐振动。因木块的质量 $m=\rho_{木}l^3$，由 $F=ma$，可得

$$a=\frac{\mathrm{d}x'^2}{\mathrm{d}t^2}=\frac{F}{m}=-\frac{\rho_{水}g}{\rho_{木}l}x'$$

将上式与 $a=-\omega^2x'$ 作比较，可得木块的振动角频率和周期分别为

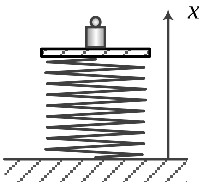
$$\omega=\sqrt{\frac{\rho_{水}g}{\rho_{木}l}}\quad ,\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\rho_{木}l}{\rho_{水}g}}$$

6.16 如图所示，木板上放置一个质量 $m=0.5\mathrm{kg}$ 的砝码，木板在竖直方向做简谐振动，频率 $\nu=2\mathrm{Hz}$，振幅 $A=0.05\mathrm{m}$。以竖直向上为正方向，当木板恰好通过平衡位置并向上运动时为计时起点，试求：

（1）木板的振动表达式；

（2）在振动过程中，砝码对木板的最大和最小压力；

（3）当木板的振幅为多大时，砝码将脱离木板？



测试题 6.16 图

6.16 答案： $x=0.05\cos\left(4\pi t-\pi/2\right)\ \mathrm{m}$；$39\mathrm{N}$、$0.95\mathrm{N}$；$0.062\mathrm{m}$

解：（1）由题意可知 $t=0$ 时，$x_0=A\cos\varphi=0$，$v_0=-A\omega\sin\varphi>0$，由此得振动初相位：$\varphi=-\pi/2$。所以振动表达式为

$$x=A\cos\left(2\pi\nu t+\varphi\right)=0.05\cos\left(4\pi t-\pi/2\right)\ \mathrm{m}$$

（2）因砝码在木板上随木板一起作简谐振动，其振动的加速度为

$$a=-\omega^2x=-0.8\pi^2\cos\left(4\pi t-\pi/2\right)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

又由受力分析及 $F=ma$ 可知

$$F_N-mg=ma$$

式中 F_N 是木板对砝码的支持力，所以

$$F_N = mg + ma = 0.5\left[9.8 - 0.8\pi^2\cos\left(4\pi t - \pi/2\right)\right]\ \mathrm{N}$$

由此可得，砝码对木板的最大和最小压力分别为

在最低点处： $F_{N,\max} = 0.5\left[9.8 + 0.8\pi^2\right]\ \mathrm{N} = 8.8\mathrm{N}$

在最高点处： $F_{N,\min} = 0.5\left[9.8 - 0.8\pi^2\right]\ \mathrm{N} = 0.95\mathrm{N}$

（3）当木板的最大振幅为 $A_{\max}$ 时，木板的最大加速度为 $a_{\max} = \omega^2 A_{\max} = 16\pi^2 A_{\max}$，砝码脱离木板的条件为

$$F_{N,\min} = mg - ma_{\max} = mg - m16\pi^2 A_{\max} \le 0$$

由此得

$$A_{\max} \ge \frac{g}{16\pi^2} = 0.062\mathrm{m}$$