武汉大学 2021-2022 学年第一学期《线性代数 B》期中考试试卷答案

一、单项选择题(每小题 3 分，共 15 分)

(1) C **(2)** C **(3)** C **(4)** A **(5)** D

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

(1) $(a-b)^3$ **(2)** -156 **(3)** $-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$ **(4)** $k(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}+(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意实数. **(5)** $a=1$

三、(10 分) 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix};$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1)\end{vmatrix}$$

$=(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

四、(10 分) 解下列矩阵方程：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}，其中 \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

解 由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

方法 1：先求出 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，因为

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

方法 2：也可用由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 作初等行变换

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\;\vdots\;\boldsymbol{B}\right)\xrightarrow{r}\left(\boldsymbol{E}\;\vdots\;\boldsymbol{X}\right),$$

此解法优点是少算一次矩阵乘法，可以适当减少计算量.

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\;\vdots\;\boldsymbol{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_3\div 3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

五、(10 分) 设 3 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda+1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda+1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时:

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解　设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，将分量代入得到方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)\ x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)\ x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+(1+\lambda)\ x_3=\lambda^2.\end{cases}$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换.

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\-\lambda&\lambda&0&\lambda\\-\lambda^2-2\lambda&-\lambda&0&\lambda^2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\-\lambda&\lambda&0&\lambda\\-\lambda^2-3\lambda&0&0&\lambda^2+\lambda\end{array}\right).$$

若 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda^2+3\lambda\neq0$, 即 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表达式唯一.

若 $\lambda=0$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=1<3$，方程组有无穷多解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

若 $\lambda=-3$，则 $R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

六、(10 分) 求向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(3,-2,-1,b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=(-2,6,10,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_5=(4,-1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组.

解　对下列矩阵作初等行变换，

$$
(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\-1&3&-2&6&-1\\1&5&-1&10&6\\3&1&b&a&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&6&-4&12&2\\0&4&b-9&a+6&-2\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&b-11&a-2&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-(b-11)r_3]{r_3\div(-7)}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&a-2&3-b\end{pmatrix}.
$$

故

（1）当$a=2,b=3$时，向量组的秩为3，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$（或$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$）为一个极大无关组；

（2）当$a\neq 2$时，向量组的秩为4，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$为一个极大无关组；

（3）当$b\neq 3$时，向量组的秩为4，且$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_5$为一个极大无关组.

七、(10 分) 设四元齐次线性方程组

$$
(\mathrm{I})\quad\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}.
$$

还知道另一齐次线性方程组(II)的通解为

$$
k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}.
$$

求方程组(I)与(II)的公共解.

解 由已知，方程组(I)的系数矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，故(I)的通解为

$$
k_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}.
$$

方法 1：令$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，解得：

$$
k_1=-k,\quad k_2=k_3=k_4=k,\quad k\text{为任意常数},
$$

故其公共解为

$$
-k(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad k\text{为任意常数}.
$$

方法 2：将(II)的通解代入方程组(I)，则有

$$
\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\k_1+2k_2-k_2=0\end{cases},
$$

得$k_1=-k_2$. 故向量$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$满足方程组(I)(II). 即方程组(I)，(II)有公共解，所有公共解是$k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$（k为任意常数）.

八、(10 分) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，证明：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$均可逆，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证 由$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，可得$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，即

$$
(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},
$$

从而$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$均可逆，且$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$.

此时有$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，可得$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}$，从而$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

九、(10 分) 设$\boldsymbol{A}$为$n\times m$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$m\times n$矩阵，其中$n<m$，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明$\boldsymbol{B}$的列向量线性无关.

证 由相关结论有$n=R(\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{AB})\le\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$，故$R(\boldsymbol{B})\ge n$，由于$\boldsymbol{B}$为$m\times n$矩阵，有$R(\boldsymbol{B})=n$，从而$\boldsymbol{B}$的列向量线性无关.