# 武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
# 线性代数 A 参考答案（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1+C_2+\cdots+C_n}{=}\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^n a_i & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{C_2-a_2C_1\\ \vdots \\ C_n-a_nC_1}}{=}(x+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^n a_i)x^{n-1}$$

二、（10 分）**设** $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$**，计算** $A^{2022}$

解：记$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha^T\alpha=3$

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}=-\alpha\alpha^T$$

$$A^{2022}=\left(-\alpha\alpha^T\right)^{2022}=\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)^{2021}\alpha^T=-3^{2021}A$$

三、（12 分）

**已知$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=6,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$**

**证明：（1）$\boldsymbol{B}^k=6^{k-1}\boldsymbol{B}$　(2)$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$不可逆　(3)$\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$都可逆**

**证明：（1）$\boldsymbol{B}^k=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\right)^k=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}\right)^{k-1}\boldsymbol{\beta}^T=6^{k-1}\boldsymbol{B}$**

**(2)$\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\right)^2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{B}+6\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+4\boldsymbol{B}$**

**$\left(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\right)=\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}+4\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{I}=0$**

**所以$|\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}|=0$或$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$,从而$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$不可逆。**

**(3)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{I}$**

**所以$|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}|\neq 0,|\boldsymbol{A}|\neq 0$**

**即$\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$都可逆**

四、（10 分）**求$\boldsymbol{X}$,使得$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$.**

**解：若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.**

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}，\text{所以}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

五、（10 分）**设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵（$\boldsymbol{n}\geq 2$), $\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，证明**

$$\boldsymbol{R}(A^*)=\begin{cases}\boldsymbol{n}, & \boldsymbol{R}(A)=\boldsymbol{n},\\ \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{R}(A)=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1},\\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{R}(A)\leq \boldsymbol{n}-\boldsymbol{2}.\end{cases}$$

证明：当$R(A)=n, |A|\neq 0, AA^{*}=|A|E \Rightarrow |A^{*}|\neq 0 \Rightarrow R(A^{*})=n$

当$R(A)=n-1$, $A$至少有一个$n-1$阶子式不为0，从而$A^{*}\neq 0$，有$R(A^{*})\geq 1$.

另一方面由于$A^{*}A=|A|E=0$，得到$R(A^{*})+R(A)\leq n$, 所以$R(A^{*})=1$.

当$R(A)\leq n-2$, $A$所有$n-1$阶子式都为0，从而$A^{*}=0$，有$R(A^{*})=0$.

六、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} -x_1-2x_2+ax_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=b \\ 4x_1+5x_2+10x_3=2 \end{cases},$$

问 $a, b$ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在有无穷多解时求其通解。

解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5b-2 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix},$$

当$a\neq -4$, $R(A)=R(\overline{A})=3$,方程组有唯一解。

当$a=-4$, $b\neq 1$, $R(A)=2<R(\overline{A})=3$,方程组无解。

当$a=-4$, $b=1$, $R(A)=R(\overline{A})=2<3$,方程组有无穷多解，此时

$$\overline{A}\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5b-2 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组的解为$x=\begin{pmatrix} 3 \\ -2-2c \\ c \end{pmatrix}$, $c\in R$.

七、（14 分） 求$R^4$的子空间$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+x_2-x_3-x_4=0\}$的基和维数，

并将$W$的基扩充为$R^4$ 的基。

解：$R^4$的子空间$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+x_2-x_3-x_4=0\}$的基

即为线性方程组$x_1+x_2-x_3-x_4=0$的线性无关解，维数为线性无关解的个数。

$W$的基$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$

将$W$的基扩充为$R^4$ 的基 $:\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$

八、（12 分）

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)^T$，$a_1\neq 0, A=\alpha\alpha^T$,(1) 证明 0是$A$的$n-1$重特征值；

（2）求$A$的非0特征值和非0特征值对应的特征向量。

(1) 证明：注意到$A$ 是$n$阶实对称矩阵，故$A$与对角阵$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$相似。

由于$R(A)=1$,即知$\Lambda$的对角元只有一个非0，即0是$A$的$n-1$重特征值。

(2)根据特征值的性质，$n$个特征值之和为$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

所以另一个非零特征值为$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

当$\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，对应的特征向量为$k\alpha, k\neq 0$。

九、（12 分）**已知二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$$

**（1）写出二次型 $f$ 的矩阵表达式；**

**（2）用正交变换把二次型 $f$ 化为标准形，并写出相应的正交矩阵；**

解：(1) 二次型的矩阵形式为$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-3&0\\-2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+3&0\\2&0&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda+4)$

$A$ 的三个特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-3,\lambda_3=-4$。

由 $(2E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$

由 $(-3E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_2=-3$ 的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

由 $(-4E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_3=-4$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

因 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 是分别属于三个不同特征值的特征向量，故正交。

单位化，$\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

令 $Q=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{30}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{2}{\sqrt{30}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，有 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -3 & \\ & & -4\end{pmatrix}$。

经过正交变换 $x=Qy$,

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=y^T\Lambda y=2y_1^2-3y_2^2-4y_3^2$