2009-2010 第二学期《高等数学》期中试题解

一、（10 分）求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}$。

解、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3t}{\sqrt{t+1}-1}=6$。

二、（12 分）证明直线 $L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x=-2(z+2)\\ y=0\end{cases}$，是异面直线，并求 L_1 与 L_2 间的距离及 L_1 与 L_2 的公垂线的方程。

解、设垂足分别是 $(3+4t,3+t,-1+t)$ 和 $(-4-2\tau,0,\tau)$。则 $\vec{s}=\{7+4t+2\tau,3+t,-1+t+\tau\}$。$\begin{cases}4(7+4t+2\tau)+3+t+-1+t+\tau=0\\ -2(7+4t+2\tau)+0(3+t)+-1+t+\tau=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}t=-5\\ \tau=\dfrac{20}{3}\end{cases}$。$\vec{s}=\left\{\dfrac{1}{3},-2,\dfrac{2}{3}\right\},M_0(-\dfrac{52}{3},0,\dfrac{20}{3})$。$L_1$ 与 L_2 的公垂线的方程：

$$\frac{x+\frac{52}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{y}{-2}=\frac{z-\frac{20}{3}}{\frac{2}{3}}$$

又 $\vec{s}_1=\{4,1,1\}\not\parallel\vec{s}_2=\{-2,0,1\}\Rightarrow L_1\not\parallel L_2$，故 L_1 与 L_2 是异面直线。

三、（9 分×2）设 $f(x,y,z)=ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

1、求 $\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}$；

2、求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV$，其中 $\Omega:1\le x^2+y^2+z^2\le 4,y\ge 0,z\ge 0$。

解、1、$\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2yze^{-(x^2+y^2+z^2)},\dfrac{\partial f}{\partial y\partial x}=4xyze^{-(x^2+y^2+z^2)},\\ \dfrac{\partial f}{\partial z\partial y\partial x}=4xye^{-(x^2+y^2+z^2)}-8xyz^2e^{-(x^2+y^2+z^2)}\end{array}$。

2、$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 r\cos\varphi e^{-r^2} r^2 \sin\varphi dr$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_1^4 te^{-t}dt = \frac{\pi}{4}(2e^{-1}-5e^{-4})$$ 。

四、（9 分×2）设有旋转抛物面方程 $z = 2-(x^2+y^2)$

1、在此旋转抛物面位于第一卦限部分上求一点，使该点处的切平面与三坐标面围成的四面体的体积最小；

2、设 $V = \ln(4-z)^3 - 24(\ln x + \ln y)$，其中 $x = x(y,z)$ 由方程所确定，求 $\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}$ 。

解、1、设切点为 $(u,v,2-(u^2+v^2))$。$\vec{n} = \{2u,2v,1\}$，切平面：

$$2u(x-u)+2v(y-v)+z-2+(u^2+v^2)=0$$

坐标轴截距为 $\frac{u^2+v^2+2}{2u},\frac{u^2+v^2+2}{2v},u^2+v^2+2$。求

$$U = \frac{\left(u^2+v^2+2\right)^3}{4uv}$$

的最小值。

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{6u^2v\left(u^2+v^2+2\right)^2 - v\left(u^2+v^2+2\right)^3}{4u^2v^2} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{6v^2u\left(u^2+v^2+2\right)^2 - u\left(u^2+v^2+2\right)^3}{4u^2v^2} = 0 \end{cases}$$ ，$u = v = \frac{1}{\sqrt{2}}$。所要求的点是

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$$

2、由 $z = 2-(x^2+y^2)$ 得 $dz = -(2xdx+2ydy), dx = -\frac{y}{x}dy - \frac{1}{2x}dz, \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{1}{2x}$。

$$\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} = \left[\frac{3}{z-4} - \frac{24}{x}\left(-\frac{1}{2x}\right)\right]_{(1,1,1)} = 12-1 = 11。$$

五、（8 分）讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点偏导数的存在性、方向导数的存在性、可微性。

解、1）$\varphi(x) = f(x,0) \equiv 0, \psi(y) = f(0,y) \equiv 0$。$f_x(0,0) = \varphi'(0) = 0, f_y(0,0) = \psi'(0) = 0$

都存在。

2）对于任意方向 $\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial\vec{l}}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\dfrac{t^2\cos^2\alpha t\cos\beta}{t^2\cos^2\alpha+t^2\cos^2\beta}}{t}=\cos^2\alpha\cos\beta$

都存在。

3）由 1），若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，则 $dz\big|_{(0,0)}=0dx+0dy$，当 $x\to0,y\to0$ 时

$\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\circ\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$。但是，若令 $y=kx$ 则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^3\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

六、（9 分）计算二重积分 $\iint\limits_D(y^3e^{x^2+y^2}+e^{x+y})d\sigma$，其中 D 是由直线 $x+y=1,x+y=-1,x-y=-1,x-y=1$ 围成的区域。

解、根据对称性，$\iint\limits_D y^3e^{x^2+y^2}d\sigma=0$。

$$\iint\limits_D(y^3e^{x^2+y^2}+e^{x+y})d\sigma=\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma=\int_{-1}^0dx\int_{-1-x}^{x+1}e^{x+y}dy+\int_0^1dx\int_{x-1}^{1-x}e^{x+y}dy$$
$$=\int_{-1}^0\left(e^{2x+1}-e^{-1}\right)dx+\int_0^1\left(e-e^{2x-1}\right)dx=\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}+e-\frac{e-e^{-1}}{2}=e-e^{-1}$$
。

七、（8 分）求下列曲线所围区域 D 的面积：

$$y^2=px,y^2=qx,xy=a,xy=b(0<p<q,0<a<b)$$

解、所给曲线有四个交点 $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{p}},\sqrt[3]{pa}\right),\left(\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{p}},\sqrt[3]{pb}\right),\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{q}},\sqrt[3]{qa}\right),\left(\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{q}},\sqrt[3]{qb}\right)$。

如果 $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{p}}\le\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{q}}$，面积

$$A=\iint\limits_D dxdy=\int_{\sqrt[3]{\frac{a^2}{q}}}^{\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}}dx\int_{\frac{a}{x}}^{\sqrt{qx}}dy+\int_{\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}}^{\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}}dx\int_{\sqrt{px}}^{\sqrt{qx}}dy+\int_{\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}}^{\sqrt[3]{\frac{b^2}{p}}}dx\int_{\sqrt{px}}^{\frac{b}{x}}dy$$

$$=\int_{\sqrt[3]{\frac{a^2}{q}}}^{\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}}\left(\sqrt{qx}-\frac{a}{x}\right)dx+\int_{\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}}^{\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}}\left(\sqrt{qx}-\sqrt{px}\right)dx+\int_{\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}}^{\sqrt[3]{\frac{b^2}{p}}}\left(\frac{b}{x}-\sqrt{px}\right)dx$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{q}}{3}x^{\frac{3}{2}}-a\ln x\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{\frac{a^2}{q}}}^{\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right)x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}}^{\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}}+\left(b\ln x-\frac{2\sqrt{p}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}}^{\sqrt[3]{\frac{b^2}{p}}}。$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{q}}{3}x^{\frac{3}{2}}-a\ln x\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{\frac{a^2}{q}}}^{\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right)x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}}^{\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}}+\left(b\ln x-\frac{2\sqrt{p}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}}^{\sqrt[3]{\frac{b^2}{p}}}$$

$$=\frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{q}{p}$$

对于 $\sqrt[3]{\frac{a^2}{p}}\geq\sqrt[3]{\frac{b^2}{q}}$ 结果也一样。

八、(9 分)设 Ω 是上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的空间立体。求 Ω 在 xOy 面上的投影区域。

解、由 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$ 消去 z 得 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $\Omega_{xy}:x^2+y^2\leq 1, z=0$。

九、(8 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调增加,试证:$\iint\limits_D(e^y f(y)+y-x)d\sigma\geq(e-1)\int_0^1 f(y)dy$,其中 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$。

解、由对称性,$\iint\limits_D(y-x)d\sigma=0$,$\iint\limits_D(e^y f(y)+y-x)d\sigma=\iint\limits_D e^y f(y)d\sigma$。

$(e-1)\int_0^1 f(y)dy=\iint\limits_D e^y f(x)d\sigma$。

$$\iint\limits_D(e^y f(y)+y-x)d\sigma-(e-1)\int_0^1 f(y)dy=\iint\limits_D e^y\left[f(y)-f(x)\right]d\sigma$$
$$=\iint\limits_D e^x\left[f(x)-f(y)\right]d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(e^x-e^y\right)\left[f(x)-f(y)\right]d\sigma\geq 0$$

这是因为 $\left(e^x-e^y\right)\left[f(x)-f(y)\right]\geq 0((x,y)\in D)$。不等式得证。