

第 3 章 运动的守恒定律

人们在研究机械运动及其与其它运动形式之间的相互联系和相互转化的过程中，逐步形成了一些新的物理概念和物理规律，其中特别重要的是能量、动量和角动量三个基本概念及其相应的三个守恒定律。通过实践发现，这些守恒定律比牛顿定律具有更大的普遍性，它们不仅适用于宏观物体的机械运动过程，而且也适用于微观粒子的运动过程，它们从不同角度为运动不灭原理提供了可靠的自然科学的依据。在力学中，这些守恒定律都可以从牛顿运动定律推导出来，但通过对近代物理更深入的研究表明，这些守恒定律都是时空对称特性的具体表现，是自然界的基本守恒定律。

牛顿运动定律给出了单个质点所受的力与因该力而产生的加速度之间的瞬时关系，于是物体的运动问题视乎就是求解运动方程的数学问题。但事实上并非如此，在力学中，我们不仅要研究力的瞬时效应，而且还要研究力持续作用时，力对时间和空间的积累效应与质点运动状态的变化之间的关系；不仅要研究单个质点的运动，还要研究质点系的运动，以便使问题得以简化、使数学处理更为方便。本章将在牛顿定律的基础上，讨论力对空间的积累作用以及力和力矩对时间的积累作用，并导出质点和质点系的动能定理、动量定理、角动量定理，以及相关的三个守恒定律。

§ 3.1 功 质点的动能定理

本节将首先讨论力对空间的积累效应对质点运动的影响，并建立功和能的概念。

3.1.1 功

1. 恒力的功

在力学中，**功**（work）是作用于物体上的力与物体在力的方向上通过的位移大小的乘积。如果质点 M 在一个大小和方向均不变的恒力 \mathbf{F} 的持续作用下，沿某一直线运动，产生的位移为 $\Delta\mathbf{r}$ ，如图 3.1 所示，则恒力 \mathbf{F} 在位移 $\Delta\mathbf{r}$ 上对物体所做的功为

$$A = F|\Delta\mathbf{r}|\cos\alpha \quad (3.1)$$

式中 α 是恒力 \mathbf{F} 与位移 $\Delta\mathbf{r}$ 的夹角，按矢量标积的定义，上式可写为

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (3.2)$$

即恒力的功等于恒力与质点在恒力的持续作用下产生的位移的标量积（简称标积或点积）。

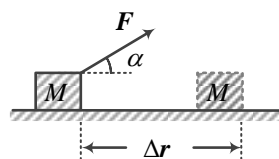


图3.1 恒力的功

由功的定义式可知：功是标量，它只有大小，没有方向，但有正负。功的正负由 \mathbf{F} 与 $\Delta \mathbf{r}$ 之间的夹角 α 决定。当

$\alpha < \pi/2$ 时，功为正，说明该力对物体做正功；当 $\alpha > \pi/2$ 时，功为负，即该力对物体做负功，或者说物体克服该力做功；当 $\alpha = \pi/2$ 时，功为零，即该力对物体不做功，例如物体做曲线运动时，作用于物体上的法向分力就不做功。另外，因为位移的值与参考系的选择有关，所以功的数值也与参照系的选择有关。

2. 变力的功

如果物体受到变力 \mathbf{F} 的作用且做曲线运动，那么上面给出的功的计算公式就不能直接套用。解决这类问题就要利用微积分的概念。首先将质点运动的曲线路径分割成许多足够小的直线位移 $\Delta \mathbf{r}_i$ 的集合，如图 3.2 所示，使得变力 \mathbf{F} 在任意第 i 段位移 $\Delta \mathbf{r}_i$ 上均可看作是恒力 \mathbf{F}_i ，于是在 $\Delta \mathbf{r}_i$ 上变力 \mathbf{F} 做的功为

$$\Delta A_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (3.3)$$

当 $\Delta \mathbf{r}_i \rightarrow 0$ 时， $\Delta \mathbf{r}_i$ 可记为 $d\mathbf{r}$ ， ΔA_i 记为 dA ，则上式可写为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \alpha |d\mathbf{r}| \quad (3.4)$$

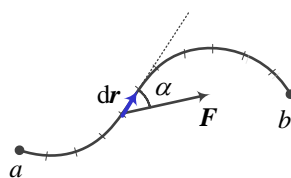


图3.2 变力的功

式中 dA 称为变力 \mathbf{F} 在元位移 $d\mathbf{r}$ 上对物体做的元功。于是当物体从 a 点沿曲线路径 L 运动到 b 点时，变力 \mathbf{F} 对物体所做的总功就等于在各段元位移上元功的代数和，这种求和在数学上体现为曲线积分，即

$$A = \int_{a(L)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a(L)}^b F \cos \alpha |d\mathbf{r}| = \int_{a(L)}^b F_r ds \quad (3.5)$$

式中 $ds = |d\mathbf{r}|$ ， F_r 是力 \mathbf{F} 在元位移 $d\mathbf{r}$ 方向上（也就是轨迹的切线方向上）的投影。式(3.5)就是计算变力做功的一般公式。

在直角坐标系中，由于

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

那么式 (3.5) 可表示为

$$A = \int_{a(L)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a(L)}^b F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (3.6)$$

由式 (3.6) 给出的变力做功的积分式在数学上称为对坐标的曲线积分。所以功是力对空间的积累效应，力做功的多少与物体运动的路径密切相关。在一般情况下，力做功的数值不仅与物体的起点和终点位置有关，还与物体经过的具体路径 L 有关。这也是这类曲线积分的特点。

3. 合力的功

当质点受到 N 个力 \mathbf{F}_i ($i=1,2,3,\dots,N$) 的共同作用时，合力 \mathbf{F} 可表示为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N$$

于是，当物体从 a 点沿路径 L 运动到 b 点时，合力 \mathbf{F} 对物体所做的总功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{a(L)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a(L)}^b (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{a(L)}^b \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{a(L)}^b \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{a(L)}^b \mathbf{F}_N \cdot d\mathbf{r} = A_1 + A_2 + \dots + A_N \end{aligned} \quad (3.7)$$

式 (3.7) 表明：合力所做的功等于各分力做功的代数和。

3.1.2 功率

力在单位时间内做的功，称为**功率** (power)，用符号 P 表示。假设力 \mathbf{F} 在 Δt 时间内做的功为 ΔA ，则这段时间内 \mathbf{F} 的平均功率为

$$\bar{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (3.8)$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，可得 \mathbf{F} 在某一时刻的瞬时功率为

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.9)$$

即瞬时功率等于力矢量和速度矢量的标量积。功率的大小反应了力做功的快慢程度。功率越大，做同样的功所花费的时间就越少，做功的效率也越高。

在国际单位制中，功的单位是：焦耳，符号 J ($1\text{J}=1\text{N}\cdot\text{m}$)；功率的单位是：瓦特，符号 W ($1\text{W}=1\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$)。

3.1.3 质点的动能定理

当物体在合外力 \mathbf{F} 的作用下，从 a 点沿曲线 L 运动到 b 点时，我们用 \mathbf{v}_a 和 \mathbf{v}_b 分别表示它在起点 a 和终点 b 处的速度，如图 3.3 所示。由式 (3.5)，合外力 \mathbf{F} 在这个过程中所做的功为

$$A = \int_{a(L)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a(L)}^b F \cos \alpha |d\mathbf{r}| = \int_{a(L)}^b F_{\tau} ds$$

根据牛顿第二定律在曲线切线方向的分量式，有

$$F_{\tau} = ma_{\tau} = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{ds}$$

所以有

$$F_{\tau} ds = mv dv$$

积分可得

$$A = \int_{a(L)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_a}^{v_b} mv dv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (3.10)$$

式中的 $\frac{1}{2}mv^2$ 叫物体的**动能** (kinetic energy)，用 E_k 表示，即

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.11)$$

这样，式 (3.10) 就可写成

$$A = E_{kb} - E_{ka} \quad (3.12)$$

式 (3.10) 或式 (3.12) 常被叫做质点的**动能定理** (theorem of kinetic energy)。质点的动能定理表明：**合外力对物体做的功等于物体动能的增量**。若合外力对物体做正功，则物体的动能增加；若合外力做负功，则物体的动能减少。

应该指出，质点的动能定理适用于物体的任何运动过程，物体在合外力的持续作用

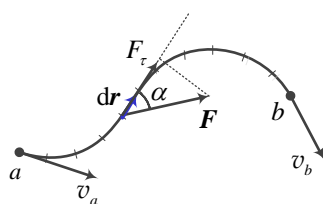


图3.3 质点功能定理的推导

下经历某一段路程，不管合外力是否是变力，也不管物体运动状态如何复杂，其路程是曲线还是直线，合外力对物体所做的功总是等于物体动能的增量。这样，动能定理在解决某些力学问题时，往往比直接运用牛顿第二定律的瞬时关系要简便得多。

动能和功的单位是一样的，但是物理意义不同。功反映了力对空间的累积效果，其大小取决于过程，是个过程量；动能的大小取决于物体的运动状态，它是个状态量，或者叫做状态函数。动能定理启示我们：功是物体在某个过程中能量改变的一种量度。这个观点将有助于我们去识别与理解其它形式的能量。

最后应该指出，由于位移和速度的相对性，功和动能也都有相对性，它们的大小都依赖于参考系的选择。例如，一颗飞行着的子弹，对速度和它一样的飞机来说动能等于零，这颗子弹对飞机上的乘客毫无威胁。但对固定在地面上的物体来说，它将射到物体内部，具有很大的破坏性和杀伤力。尽管如此，动能定理的形式与参考系的选择无关。这使得人们能够方便地应用动能定理求解有关力学问题。

例题 3.1 一个质量 $m = 10\text{kg}$ 的物体，在合外力 $F = 5 + 4x$ (SI) 的作用下，沿 x 轴做直线运动。已知在 $x_A = 1.0\text{ m}$ 处，物体的速度为 $v_A = 2.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。试求：

- (1) 当物体从 A 处运动到 B 处 ($x_B = 10.0\text{ m}$) 的过程中，合外力所做的功；
- (2) 物体在 B 处的速率。

解：(1) 由题意可知，合外力的方向与物体的运动方向相同，所以物体在 x 处 $\text{d}x$ 元位移内，合外力做的元功为

$$\text{d}A = \mathbf{F} \cdot \text{d}\mathbf{r} = F\text{d}x = (5 + 4x)\text{d}x$$

于是物体从 A 到 B 的过程中，合外力做的总功为

$$A = \int_{1.0}^{10.0} (5 + 4x)\text{d}x = 243\text{ (J)}$$

- (2) 由质点的动能定理

$$A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

可得物体到达 B 处时的速率为

$$v_B = \sqrt{\frac{2A}{m} + v_A^2} = \sqrt{\frac{2 \times 243}{10} + 4} = 7.25\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

例题 3.2 如图 3.4 所示，一根截面积为 S 、长为 l 、密度为 ρ 的圆柱体竖直悬挂在

水面上，圆柱体的底面刚好与水面接触。已知 $\rho > \rho_{\text{水}}$ 。现将悬绳剪断，圆柱体竖直插入水中。不计水的粘滞阻力。试用动能定理求出圆柱体的上端面刚好没入水中时，圆柱体的下沉速度。

解：由题意可知。圆柱体受的重力为

$$G = mg = \rho g Sl$$

方向向下。当圆柱体插入水中的深度为 x 时，受到的浮力为

$$F_{\text{浮}} = \rho_{\text{水}} g Sx$$

方向向上。以向下为正方向，圆柱体受合外力为

$$F = G - F_{\text{浮}} = \rho g Sl - \rho_{\text{水}} g Sx$$

所以在插入过程中合外力做的总功为

$$A = \int_0^l F dx = \int_0^l (\rho g Sl - \rho_{\text{水}} g Sx) dx = \left(\rho - \frac{1}{2} \rho_{\text{水}} \right) g Sl^2$$

再由质点的动能定理

$$A = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} \rho Sl v^2$$

可得圆柱体的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2A}{\rho Sl}} = \sqrt{\frac{2\rho - \rho_{\text{水}}}{\rho} gl}$$

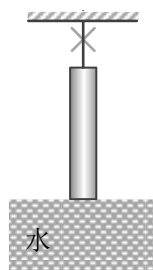


图3.4 例3.2图

§ 3.2 保守力 势能

3.2.1 保守力与非保守力

由上节可知，功由积分式 $A = \int_{a(L)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 给出，这类积分在数学上称为对坐标的曲线积

分。根据这类积分的特点，在一般情形下，力 \mathbf{F} 做功的大小不仅与物体的始末位置有关，还与物体经过的具体路径有关。也就是说，物体从 a 点运动到 b 点时，经过不同的路径，力做功的数值一般不一样。但是也有一些力做功只与物体的始末位置有关，而与物体的运动路径无关，如重力（或者恒力）的功、万有引力的功、弹性力的功、静电力的功等

都有这种特点。

人们将做功与物体的运动路径无关，只与物体的始末位置有关的力称为保守力（conservative force），否则就是非保守力（non-conservative force），非保守力也称为耗散力。

显然，如果物体沿任意闭合路径运动一周，则作用于物体上的保守力 $\mathbf{F}_{\text{保}}$ 所做的功一定为零，即

$$\oint_L \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (3.13)$$

式中 L 是任意的一个闭合路径。式（3.13）可以看作是判断 \mathbf{F} 是不是保守力的充分必要条件。即如果 \mathbf{F} 是保守力，则一定满足式（3.13）；反之，如果 \mathbf{F} 满足式（3.13），则它就是保守力。而对于非保守力 $\mathbf{F}_{\text{非保}}$ ，则必有

$$\oint_L \mathbf{F}_{\text{非保}} \cdot d\mathbf{r} \neq 0 \quad (3.14)$$

在力学里，常见的保守力有重力、万有引力和弹性力。其他的力如摩擦力、流体的粘滞阻力、爆炸力等都是非保守力。

3.2.2 几种常见保守力的功

1. 重力的功

假设有一个质量为 m 的质点在重力场中由 a 点沿任意路径 L 运动到 b 点，如图 3.5 所示，在 O -xyz 直角坐标系中，作用于质点上的重力 $\mathbf{G} = -mg\mathbf{k}$ ，质点在 a 、 b 两点相对于坐标原点的高度分别为 h_a 和 h_b 。则当质点从 a 点运动到 b 点的过程中，重力的功为

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \int_a^b \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (-mg\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_{h_a}^{h_b} -mgdz = mgh_a - mgh_b \end{aligned} \quad (3.15)$$

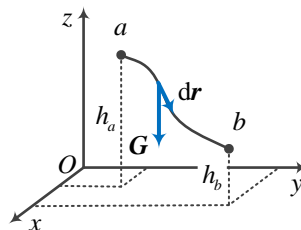


图3.5 重力的功

式（3.15）表明，重力的功只与质点始、末位置的高度有关，而与物体具体所经过的路径无关。所以重力是保守力。

2. 万有引力的功

设质量为 m 的质点，在质量为 M 的引力场内，沿任一路径由 a 点运动到 b 点，如图 3.6 示。在与 M 相对静止的参照系中，取 M 为坐标原点，则 m 受到的万有引力为

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}^0$$

式中 \mathbf{r}^0 是从 M 指向 m 的单位矢量。于是在任一元位移 $d\mathbf{r}$ 上，万有引力的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = G \frac{Mm}{r^2} |d\mathbf{r}| \cos \theta \quad (3.16)$$

由图 (3.6) 可知

$$|d\mathbf{r}| \cos \theta = |d\mathbf{r}| \cos(\pi - \alpha) = -|d\mathbf{r}| \cos \alpha = -dr \quad (3.17)$$

于是

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{Mm}{r^2} dr \quad (3.18)$$

所以当 m 由 a 点运动到 b 点时，万有引力做功为

$$A_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_a}^{r_b} -G \frac{Mm}{r^2} dr = \left(-G \frac{Mm}{r_a} \right) - \left(-G \frac{Mm}{r_b} \right) \quad (3.19)$$

显然万有引力的功只与物体的始、末位置有关，而与路径无关。因此万有引力是保守力。

3. 弹性力的功

一端被固定的轻弹簧，另一端系一个质量为 m 的物体。若以弹簧没有形变（即没有伸长或压缩）时 m 的位置为坐标原点 O ，弹簧伸长方向为 x 的正方向，如图 3.7 所示。

由胡克定律可知，当弹簧的伸长量为 x 时，物体受到的弹性力为

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

当物体从 a 点运动到 b 点时，弹性力做功为

$$A_{ab} = \int_{x_a}^{x_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_a}^{x_b} (-kx\mathbf{i}) \cdot (dx\mathbf{i})$$

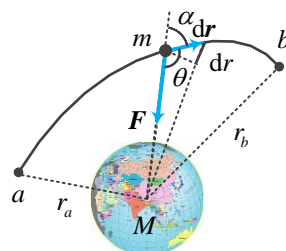


图3.6 万有引力的功

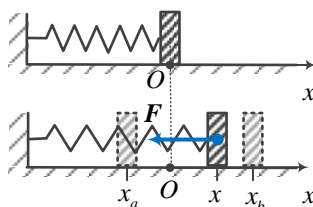


图3.7 弹性力的功

$$= \int_{x_a}^{x_b} -kx dx = \frac{1}{2} kx_a^2 - \frac{1}{2} kx_b^2 \quad (3.20)$$

不难看出，弹性力的功也只与物体的始、末位置有关而与路径无关，因此弹性力也是保守力。

3.2.3 势能

归纳上述保守力做功的特点：

重力的功 $A_{ab} = mgh_a - mgh_b \quad (3.21)$

万有引力的功 $A_{ab} = \left(-G \frac{Mm}{r_a} \right) - \left(-G \frac{Mm}{r_b} \right) \quad (3.22)$

弹性力的功 $A_{ab} = \frac{1}{2} kx_a^2 - \frac{1}{2} kx_b^2 \quad (3.23)$

可以看出，各种保守力做的功都等于关于物体位置的两个函数项之差。由于功是物体能量变化的量度，所以上面的每一项都应具有能量的量纲，或者说每一项都对应于物体在该位置时拥有一种能量。为此，我们可以引入**势能** E_p 的概念。**所谓势能**(potential energy)，就是物体在保守力场中，与物体位置相对应的能量。

若物体在保守力场中从 a 点运动到 b 点，物体在 a 、 b 两点的势能分别为 E_{pa} 和 E_{pb} ，则保守力做的功与势能的关系为

$$A_{ab} = E_{pa} - E_{pb} \quad (3.24)$$

式(3.24)表明，**保守力做的功等于势能的减少量**。保守力做正功，势能减少；保守力做负功，势能增加。

将式(3.21)~(3.23)和式(3.24)比较，可得三种常见势能的表达式为

重力势能 $E_p = mgh \quad (3.25)$

万有引力势能 $E_p = -G \frac{Mm}{r} \quad (3.26)$

弹性势能 $E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.27)$

对于势能概念，还必须注意以下几点：

(1) **势能具有相对性**。势能的大小与势能零点的选取有关。理论上来说势能的零点可以任意选取。由式(3.24)可知, 如果选 b 点为零势能点, 即若取: $E_{pb} = 0$, 则物体在 a 点的势能为

$$E_{pa} = A_{ab} = \int_a^b \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.28)$$

即物体在 a 点的势能在数值上等于将物体从 a 点沿任意路径运动到零势能点时, 保守力做的功。

不难看出, 式(3.26)中万有引力势能为负是因为规定了无穷远处($r \rightarrow \infty$)为零势能点的结果。

(2) **势能是属于发生保守力作用的系统所共有的**。例如重力势能是属于受重力作用的物体和地球组成的系统共有的; 万有引力势能是两个发生万有引力的物体系统共有的; 弹性势能是弹簧和与弹簧相连的物体组成的系统共有的。

(3) **势能是物体位置的单值函数, 是状态量, 而功是过程量**。

(4) **只有在保守力场中, 才可以引入相应的势能概念**。不存在与非保守力相关的势能。

3.2.4 势能曲线

表示势能与相对位置关系的图形, 称为**势能图**。若势能仅与相对位置的一个坐标(如 h 、 r 或 x)有关, 这种势能图称为**势能曲线**。重力、万有引力和弹性力的势能曲线如图3.8示。

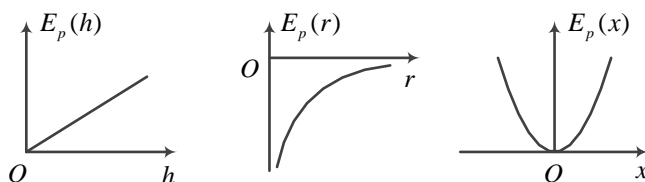


图3.8 重力、万有引力、弹性力势能曲线

在一维情况下, 按势能的定义, 保守力 $\mathbf{F}_{\text{保守}}$ 在位移 $d\mathbf{x}$ 上的元功等于势能增量的负值, 即

$$dA = F_{\text{保守}} dx = -dE_p \quad \text{或者} \quad F_{\text{保守}} = -\frac{dE_p}{dx} \quad (3.29)$$

式 (3.29) 表明, 在一维情况下, 保守力 $F_{\text{保守}}$ 的大小正比于势能曲线的斜率, 方向指向势能减小的方向。

利用式 (3.29) 还可以说明, 势能曲线上每一个局部的最低点都是稳定的平衡点。每当质点偏离了稳定的平衡点时, 都会受到指向平衡点的力, 即质点可以围绕这些平衡点做振动。反之, 势能曲线上每个局部的最高点都是不稳定的平衡点。一旦质点偏离了不稳定的平衡点, 质点就会远离而去。因此, 利用势能曲线还可以求出系统的平衡位置并判断系统的稳定性。

§ 3.3 功能原理 机械能守恒定律

3.3.1 质点系的动能定理

上面, 我们讨论了单个质点的动能定理。在许多实际问题中, 我们往往会将多个质点作为一个系统来讨论。这种由多个质点组成的系统通常被称为质点系 (particle system)。在质点系内, 每个质点受到力均可分为内力和外力两类。我们将质点系内部各个质点之间的相互作用力称为内力 (internal force), 将系统外的质点对系统内各质点的作用力称为外力 (external force)。由于作用力和反作用力总是成对出现的, 且大小相等, 方向相反, 所以系统中每一对内力的矢量和必为零, 即系统内力的矢量和必为零。

下面, 我们将单个物体 (质点) 的动能定理向质点系推广。设质点系由 n 个质点组成, 各质点的质量分别为 m_1 、 m_2 、 \dots 、 m_n 。由于系统内每个质点受的力都可分为外力和内力两类, 故对第 i 个质点应用动能定理, 有

$$A_i = A_{i \text{ 外力}} + A_{i \text{ 内力}} = \Delta E_{ik} = E_{ik} - E_{ik_0} \quad (3.30)$$

式中 $A_{i \text{ 外力}}$ 、 $A_{i \text{ 内力}}$ 分别是第 i 个质点受到的系统的外力对它做的功和系统的内力对它所做的功。 E_{ik} 和 E_{ik_0} 是该质点在这一过程中的末动能和初动能。将每个质点的上述方程相加, 有

$$\sum_i A_{i \text{ 外力}} + \sum_i A_{i \text{ 内力}} = \sum_i \Delta E_{ik} = \sum_i E_{ik} - \sum_i E_{ik_0} \quad (3.31)$$

若令 $A_{\text{外力}} = \sum_i A_{i \text{ 外力}}$, $A_{\text{内力}} = \sum_i A_{i \text{ 内力}}$ 分别表示作用于质点系上所有外力做的总功和所

有内力做的总功； $\Delta E_k = \sum_i \Delta E_{ik} = \sum_i E_{ik} - \sum_i E_{ik_0} = E_k - E_{k_0}$ 表示质点系总动能的增量。

则式 (3.31) 可写为

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{内力}} = \Delta E_k = E_k - E_{k_0} \quad (3.32)$$

式 (3.32) 就是**质点系的动能定理**，它说明作用于质点系上的所有外力和内力所做功的总和等于质点系总动能的增量。

值得注意的是，尽管系统的内力总是成对出现的，内力的矢量和一定为零，且不改变系统总动量和总角动量（参见后面两节），但内力可以改变系统的总动能，即系统所有内力做的总功不一定等于零。例如在炸弹飞行时发生爆炸的前后瞬间，如果我们将爆炸后各个碎片作为一个系统，则在爆炸后各碎片的动能之和远大于爆炸前炸弹的飞行动能，其原因是在爆炸过程中爆炸力（系统的内力）做了功。又如在两个物体的非弹性碰撞过程中（见本章§3.5），若以两个发生碰撞的物体作为一个系统，由于碰撞时系统内力做负功消耗了能量，使碰撞后系统的动能减小。

3.3.2 系统的功能原理

对系统的内力来说，它们有保守力和非保守力之分，因此，内力的功相应地可分为保守内力的功 $A_{\text{保守内力}}$ 和非保守内力的功 $A_{\text{非保守内力}}$ ，即

$$A_{\text{内力}} = A_{\text{保守内力}} + A_{\text{非保守内力}} \quad (3.33)$$

其中保守内力的功可以表示为质点系势能增量的负值（即系统势能的减少量）

$$A_{\text{保守内力}} = -\Delta E_p = E_{p_0} - E_p \quad (3.34)$$

这样，质点系的动能定理式 (3.32) 就可表示为

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = \Delta E_k + \Delta E_p = (E_k - E_{k_0}) + (E_p - E_{p_0}) \quad (3.35)$$

令 $E = E_k + E_p$ 表示质点系的动能和势能之和，我们称其为质点系的**机械能**（mechanical energy）。则有

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = \Delta E = E - E_0 \quad (3.36)$$

式 (3.36) 表明，当质点系从状态 1 变化到状态 2 时，作用于质点系上所有外力做的功和非保守内力做的功的总和等于系统机械能的增量，这就是**质点系的功能原理**（work-energy

principle)。

在实际应用中，还应注意以下两点：

(1) 在质点系的动能定理表达式(3.32)中，等式左边的功是作用于系统内所有的外力和所有的内力的总功，等式右边只是系统动能的增量。所以用动能定理求解实际问题时，我们应该计算所有力（包括重力、弹性力和万有引力等）的功，而不必考虑势能问题。

(2) 在质点系的功能原理表达式(3.35)或(3.36)中，等式左边只有外力的功和非保守内力的功，右边是系统机械能的增量。此外，由于势能属于系统所有，所以在利用功能原理讨论问题时，首先要明确系统的划分（即系统内所包含的物体），以确定哪些是外力、哪些是非保守内力和保守内力。在计算功时，只需计算外力的功和非保守内力的功；在计算势能时，要注意系统内是否有相应的保守内力。例如，若系统内包含了地球，则重力属于系统的保守内力，重力的功不需讨论，而用重力势能的增量来代替。反之，若系统内不含地球，则重力作为系统的外力，表达式中应出现重力做功项，而没有重力势能项。简单来说，在功能原理的应用中，**保守力的功和相应的势能增量不可重复计算**。

(3) 功能原理只能对惯性系适用。所以式(3.36)中涉及的位移、速度等必须是相对于同一个惯性参照系的。

例题 3.3 如图 3.9 所示，在水平桌面上放置一个质量为 m 木块， m 的一端与一个劲度系数为 k 、固定于墙上的弹簧相连， m 的另一端通过一根不可伸长的轻绳和一个轻滑轮与另一个重物 M 相连，木块 m 与桌面的滑动摩擦系数为 μ 。其余的摩擦可忽略不计。试分别以：(1) m 、 M 、桌面为系统，(2) m 、 M 、桌面和弹簧为系统，(3) m 、 M 、桌面、弹簧和地球为系统，用功能原理写出当 M 从静止开始下降距离为 d 时， M 的速度 v 满足的关系式。

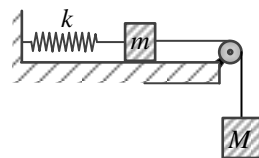


图3.9 例题3.3图

解：(1) 在 m 、 M 、桌面系统中，系统的外力有重力 mg 、 Mg 、弹簧的弹性力 $F = -kx$ 、内力有 m 、 M 之间通过绳子传递的相互拉力 T （本题中绳中各处张力大小相等）、桌面对 m 的支持力 N 和摩擦力 $f = \mu mg$ ，所以由功能原理可列出关系式

$$Mgd - \frac{1}{2}kd^2 - \mu mgd = \frac{1}{2}(M+m)v^2 \quad (1)$$

(2) 在 m 、 M 、桌面和弹簧为系统中,除了两个重力 mg 、 Mg 是外力之外,其他的力都是系统的内力,由于弹性力是保守内力,所以相应的关系式为

$$Mgd - \mu mgd = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}kd^2 \quad (2)$$

(3) 当我们将所有相关的物体都放在一个系统内时,则所有物体所受的力都是系统的内力,其中重力和弹性力是保守内力,所以表达式为

$$-\mu mgd = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}kd^2 - Mgd \quad (3)$$

不难看出,上例中式①②③在数学上是完全等价的,但是 $\frac{1}{2}kd^2$ 和 Mgd 在各式中的物理意义是不同的。

3.3.3 机械能守恒定律

由式 (3.35) 或 (3.36) 可知: 如果 $A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = 0$, 则

$$E = E_0 = \text{衡量} \quad \text{或} \quad E_k + E_p = E_{k_0} + E_{p_0} = \text{衡量} \quad (3.37)$$

即在一个力学过程中,如果作用于质点系上的所有外力和非保守内力均不做功,或做的总功为零,则质点系的机械能守恒。这一结论称为质点系的机械能守恒定律 (law of conservative of mechanical energy)。

机械能守恒定律表明:

(1) 质点系的机械能守恒的条件是: 在一个过程中,既没有外力做功,也没有非保守内力(如摩擦力、爆炸力、流体的粘滞阻力等耗散力)做功,或者外力和非保守内力做的总功为零;

(2) 在满足守恒条件时,质点系的总机械能可以在动能和势能之间转化,也可以在质点系内各物体之间转移,但在转化和转移过程中保持总机械能不变。

例题 3.4 如图 3.10 所示,一个劲度系数为 k 的轻质弹簧,上端固定,下端挂一个质量为 m 的重物。先用手将重物托住,使弹簧保持原长。然后突然放手,使重物从静止开始运动。试求 (1) 当弹簧伸长量为 x 时,物体的运动速度; (2) 弹簧的最大伸长量。

解：(1) 若以弹簧、重物和地球为系统，则当托住重物的支持力撤去后，系统内只有重力、和弹性力两个保守内力在做功，没有外力和非保守内力做功，所以系统的机械能守恒。

以物体初始位置为重力势能的零势能点，弹簧无形变时为弹性势能的零点，则当物体有初始位置下降 x 时，由系统的机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

所以，重物的速度为

$$v = \pm \sqrt{2gx - \frac{k}{m}x^2}$$

(2) 当弹簧达到最大伸长时，物体的速度 $v = 0$ ，由上述结果可得弹簧的最大伸长量为

$$x = \frac{2mg}{k}$$

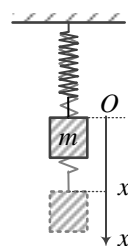


图3.10 例题3.4图

3.3.4 能量守恒定律

在机械运动范围内，我们讨论的能量只是动能和势能。由于物质运动的多样性，后面我们还会讨论热能、电磁能、核能等多种形式的能量。人们在长期的生产实践中发现，当系统的机械能增加或减小时，必定有等值的其它形式的能量减少或增加，从而使系统的机械能和其他形式的能量的总和保持不变。由此可见，在自然界还存在着比机械能守恒定律更为普遍的能量守恒定律。

对于一个不受外界影响的封闭系统（有时也称为孤立系统），系统内各种不同形式的能量可以互相转换，也可以从系统的一部分转移到另一部分，但不论系统内发生一个什么样的过程，能量既不会消失也不会产生，系统的总能量恒定不变。这就是能量守恒定律（The law of conservation of energy）。

能量守恒定律是从大量的实验事实中归纳总结出来的结论。它适用于任何一种变化过程，无论是物理的、化学的、生物的，也无论是宏观的、微观的、宇观的都适用，它是自然界中具有最大普适性的基本定律之一。在早期对 β 衰变的研究中，实验结果似乎

不遵守能量守恒定律，一些物理学家也据此主张放弃能量守恒定律，但是年轻的泡利（1900--1958，1945 年诺贝尔奖获得者）坚持认为能量一定守恒，他认为当时实验上的差别在于人们未能捕捉到一个中性的、质量很小、但穿透力很强的幽灵，并在 1930 年大胆地提出了“中微子”假说。1956 年美国物理学家莱因斯和柯万在实验中直接观测到了中微子，捍卫了能量守恒定律。莱因斯因此获 1995 年诺贝尔物理学奖。

能量守恒定律还表明，凡是违背能量守恒定律的过程是不可能实现的。历史上曾经有许多人企图发明一种“永动机”，它能够不消耗能量而能够连续不断地对外做功，或者只消耗很少的能量而做大量的功。显然这种机器违反了能量守恒定律，所以研制这种永动机的努力只能以失败而告终。

§ 3.4 动量 动量定理 动量守恒定律

3.4.1 动量与冲量 质点的动量定理

所谓**动量**（momentum），就是指物体的质量与其速度的乘积，并用符号 \mathbf{P} 表示，即

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \quad (3.38)$$

显然，动量是矢量，其方向就是物体速度的方向。不难看出，动量决定了物体的运动状态，所以动量是状态量。在直角坐标系中，动量可表示为

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} = mv_x \mathbf{i} + mv_y \mathbf{j} + mv_z \mathbf{k} \quad (3.39)$$

利用动量概念，可将牛顿第二定律写成如下形式

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (3.40)$$

即作用于质点上的合外力等于质点的动量对时间的变化率。实际上，式（3.40）才是牛顿在其名著《自然哲学的数学原理》中给出的牛顿第二定律的数学表达式。

若将式（3.40）改写成微分形式，则有

$$\mathbf{F}(t)dt = d\mathbf{P} = d(m\mathbf{v}) \quad (3.41)$$

式中，乘积 $\mathbf{F}(t)dt$ 称为力 $\mathbf{F}(t)$ 在 dt 时间内的元冲量，并用符号 $d\mathbf{I}$ 表示，即

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F}(t)dt \quad (3.42)$$

$d\mathbf{P} = d(m\mathbf{v})$ 是质点的动量在 dt 时间内的增量。式（3.41）表明质点在一段时间内所受合

外力的冲量等于质点在该段时间内动量的增量，这称为质点的动量定理（theorem of momentum）。式（3.41）就是质点动量定理的微分形式。它指出：要使质点的动量（即运动状态）发生变化，不仅要有力的作用，还要力持续作用一段时间。

若质点在合外力 $\mathbf{F}(t)$ 的持续作用下沿一曲线轨迹运动，在 t_1 时刻速度为 \mathbf{v}_1 ，动量 $\mathbf{P}_1 = m\mathbf{v}_1$ ，在 t_2 时刻，速度为 \mathbf{v}_2 ，动量 $\mathbf{P}_2 = m\mathbf{v}_2$ 。对式（3.41）两边同时积分，可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} m d\mathbf{v} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 \quad (3.43)$$

式中： $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$ 是作用于质点上的合外力 $\mathbf{F}(t)$ 在 $t_1 \rightarrow t_2$ 时间内的冲量（impulse），用符号

\mathbf{I} 表示，即

$$\mathbf{I} = \int d\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt \quad (3.44)$$

于是，式（3.43）可简写为

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \Delta \mathbf{P} \quad (3.45)$$

式（3.43）或（3.45）同样表明：作用于质点上的合外力在一段时间内的冲量等于该物体在这段时间内动量的增量。所以式（3.43）或（3.45）称为动量定理的积分形式。

由冲量的定义式（3.42）和（3.44）可知，冲量是矢量，它描述了力对时间的积累作用。质点的动量定理表明，合外力对时间的积累效果将使质点的动量发生变化。

由于动量定理的表达式（3.41）、（3.43）或（3.45）均为矢量形式，它们在直角坐标系中的分量形式为

$$F_x(t) dt = dP_x \quad \text{或} \quad I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} = \Delta P_x \quad (3.46a)$$

$$F_y(t) dt = dP_y \quad \text{或} \quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} = \Delta P_y \quad (3.46b)$$

$$F_z(t) dt = dP_z \quad \text{或} \quad I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} = \Delta P_z \quad (3.46c)$$

式（3.46）表明：在一段时间内合外力沿某一方向上的分力的冲量等于质点的动量在该方

向上的增量，或者说合外力在某一方向上的冲量只会改变质点在该方向上的动量分量。

质点的动量定理对于处理冲击、碰撞等力学问题时是非常方便的。在这类问题中，物体之间力的作用时间极短，变化却很大，这种力称为**冲力**。冲力虽然很难测量，但是人们通常不需要了解它在这极短时间内的变化细节，因此可以用**平均冲力**来描述它。此外在打击、碰撞类问题中，由于冲力的作用时间极其短暂，且冲力远远大于重力、摩擦力等，所以在这类问题中，重力、摩擦力的冲量一般可以忽略不计。于是，根据动量定理，可以得到平均冲力的定义为

$$\overline{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt}{t_2 - t_1} = \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} = \frac{mv_2 - mv_1}{t_2 - t_1} \quad (3.47)$$

例题 3.5 一辆质量为1000kg 的小轿车，其初始滑行速度为 $1.0\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，然后在发动机牵引力的作用下做加速运动。假设牵引力随时间的函数关系为 $F = 600t - 30t^2 (\text{SI})$ ，不计地面摩擦和空气阻力。

(1) 试用质点的动量定理，求小轿车在10s 时的速度；

(2) 在0~10s 内发动机牵引力做的功。

解：(1) 由题意可知，小轿车受到的合外力等于发动机的牵引力，其在0~10s 内的冲量为

$$I = \int_0^{10} F dt = \int_0^{10} (600t - 30t^2) dt = 2.0 \times 10^4 (\text{N} \cdot \text{s})$$

由质点的动量定理： $I = mv - mv_0$ ，可得小轿车在10s 时的速度为

$$v = \frac{I}{m} + v_0 = \frac{2.0 \times 10^4}{1000} + 1.0 = 21 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \approx 76 (\text{km} \cdot \text{h}^{-1})$$

(2) 由质点的动能定理，可知作用于小轿车上的合外力（即牵引力）做的功为

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 2.2 \times 10^5 (\text{J})$$

例题 3.6 一只质量为0.60kg 的篮球，以 $10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度射到竖直的篮板上，被篮板弹回时的速度也是 $10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，速度方向与篮板的夹角均是 60° ，如图 3.11 所示。假设篮球与篮板的平均作

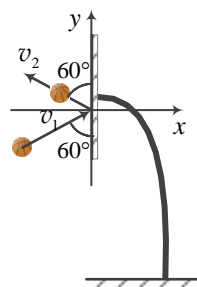


图3.11 例3.6图

用时间是 20ms。试求：篮球对篮板的平均作用力。

解：取直角坐标系如图 3.11 所示，其中 x 轴垂直指向篮板， y 轴竖直向上。以篮球为研究对象，则篮球在与篮板碰撞前后的动量分别为

$$\mathbf{P}_1 = m\mathbf{v}_1 = mv_1 \sin 60^\circ \mathbf{i} + mv_1 \cos 60^\circ \mathbf{j} = (3\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\mathbf{P}_2 = m\mathbf{v}_2 = -mv_2 \sin 60^\circ \mathbf{i} + mv_2 \cos 60^\circ \mathbf{j} = (-3\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

所以篮球受到篮板对它的平均作用力为

$$\overline{\mathbf{F}}_{\text{板-球}} = \frac{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6\sqrt{3}\mathbf{i}}{20 \times 10^{-3}} = -520\mathbf{i} (\text{N})$$

式中符号表示方向与 x 轴反向。根据牛顿第三定理，篮球对篮板的平均作用力为

$$\overline{\mathbf{F}}_{\text{球-板}} = -\overline{\mathbf{F}}_{\text{板-球}} = 520\mathbf{i} (\text{N})$$

不难看出，这个力的数值远远大于篮球自身的重力（约为 6N）。

例 3.7 质量为 m 的均质柔软链条，长为 L ，上端悬挂，下端刚好与地面接触，如图 3.12 所示。因悬挂点松脱使链条自由下落。试求链条落到地面上的长度为 l 时，链条对地面的作用力。

解 依题意，链条每单位长度的质量 $\lambda = \frac{m}{L}$ ，落到地面上长度为 l 的一段链条质量为

$$m_1 = \lambda l = \frac{m}{L} l, \quad m_1 \text{ 受重力 } m_1 g、\text{地面支承力 } N_1 \text{ 的作用而处于静}$$

止状态，所以有

$$N_1 = m_1 g = \frac{mg}{L} l$$

m_1 对地面的作用力 N'_1 与 N_1 大小相等，方向相反，即

$$N'_1 = N_1 = \frac{mg}{L} l$$

N'_1 的方向向下。

另外，由于链条正在下落过程之中，当下落在地面上的链条长度为 l 时，未落地部分仍在继续向下运动，此时其速度大小为 $v = \sqrt{2gl}$ （自由落体）。所以，在 dt 时间内，将有长度为 $dl = vdt$ 的一小段链条继续落地。设该小段链条的质量为 dm ，则有

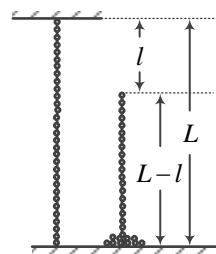


图3.12 例题3.7图

$$dm = \lambda dl = \frac{m}{L} v dt$$

dm 刚接触地面时，速率为 v ，动量大小为 $v dm = v \lambda dl = \frac{m}{L} v^2 dt$ 。在 dt 时间内由于受地面冲量作用使动量变为零。设地面作用于 dm 的平均冲力为 N_2 ，方向向上，忽略 dm 所受重力，取竖直向下为正方向，根据质点的动量定理，有

$$-N_2 dt = 0 - \frac{m}{L} v^2 dt$$

由此可得

$$N_2 = \frac{m}{L} v^2 = \frac{m}{L} 2gl$$

dm 对地面的作用力 N'_2 与 N_2 大小相等，方向相反，即

$$N'_2 = N_2 = \frac{2m}{L} gl$$

N'_2 的方向向下。

综上所述，当链条落到地面上长度为 l 时，链条对地面总作用力的大小为

$$F = N'_1 + N'_2 = \frac{3m}{L} gl$$

可见，在链条下落的过程中，由于链条和地面之间的“碰撞”，链条对地面将产生附加作用力，这个附加作用力比链条静止在地面上时对地面的作用力还要大。当链条全部落到地面上的瞬间（ $l = L$ ），链条对地面的作用力（ $F = 3mg$ ）是链条自重的 3 倍。

例 3.8 图 3.13 表示传送带以水平速度 v_0 将煤卸入静止的车厢内，每单位时间内有质量为 m_0 的煤卸出，传送带顶部与车厢底板高度差为 h ，开始时车厢是空的，不考虑煤堆高度的改变。以煤刚开始卸到车厢地板上时为计时起点。试求在 t 时刻煤对车厢的作用力。

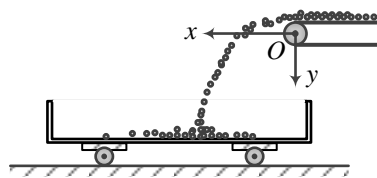


图3.13 例题3.8图

解：首先建立直角坐标系 $O-xy$ 如图 3.13 所示。由题意可知，在 t 时刻，已经卸入车厢内的煤的质量为 $m = m_0 t$ ，这部分煤相对于车厢是静止的，它对于车厢的作用力 N_1 就等于煤的重力，即

$$N_1 = mg \mathbf{j} = m_0 t g \mathbf{j}$$

同时，在 t 时刻 dt 时间内还有质量为 $dm = m_0 dt$ 的煤继续卸入车厢内。将 dm 视为质点，它在到达车厢地板前的一瞬间，煤的速度为 $v_0 \mathbf{i} + \sqrt{2gh} \mathbf{j}$ ，到达车厢后的速度变成零，所以其动量的增量为

$$d\mathbf{P} = -m_0 (v_0 \mathbf{i} + \sqrt{2gh} \mathbf{j}) dt$$

显然，这是由于 dm 受到了外力——车厢地板对煤的作用力 N'_2 和重力 $dm g \mathbf{j}$ 共同作用的结果。根据质点的动量定理，有

$$N'_2 + dm g \mathbf{j} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -m_0 (v_0 \mathbf{i} + \sqrt{2gh} \mathbf{j})$$

注意到上式中的重力 $dm g \mathbf{j}$ 为无穷小量，可以忽略不计，所以车厢地板对 dm 的作用力为

$$N'_2 = -m_0 (v_0 \mathbf{i} + \sqrt{2gh} \mathbf{j})$$

再由牛顿第三定律，可得 dm 对车厢地板的冲力为

$$N_2 = -N'_2 = m_0 (v_0 \mathbf{i} + \sqrt{2gh} \mathbf{j})$$

综上所述，在 t 时刻煤对车厢地板的总作用力为

$$\mathbf{N} = N_1 + N_2 = m_0 v_0 \mathbf{i} + (m_0 g t + m_0 \sqrt{2gh}) \mathbf{j}$$

3.4.2 质点系的动量定理

上面，我们讨论了单个质点的动量定理。在实际问题中，我们还需要讨论质点系总动量的变化与系统内各质点受力之间的关系。假设质点系由 n 个质点组成，各质点的质量分别为 m_1 、 m_2 、 \dots 、 m_n 。由于系统内每个质点受的力都可分为外力和内力两类，所以可将系统内的第 i 个质点受的力表示为

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i \text{ 外}} + \mathbf{F}_{i \text{ 内}} = \mathbf{F}_{i \text{ 外}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{i j}$$

式中 $\mathbf{F}_{i j}$ 是质点系内第 j 个质点对第 i 个质点的作用力。由质点的动量定理，有

$$\mathbf{F}_i dt = (\mathbf{F}_{i \text{ 外}} + \mathbf{F}_{i \text{ 内}}) dt = \left(\mathbf{F}_{i \text{ 外}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{i j} \right) dt = d\mathbf{P}_i = d(m_i \mathbf{v}_i) \quad (3.48)$$

显然此式对系统内所有的质点都成立，将每个质点的上述方程求和，可得

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \text{ 外}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \text{ 内}} \right) dt = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \text{ 外}} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{i j} \right) \right) dt = \sum_{i=1}^n d\mathbf{P}_i = d\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \right) \quad (3.49)$$

由于内力总是成对出现的，且每一对内力的大小相等、方向相反，即 $\mathbf{F}_{i j} = -\mathbf{F}_{j i}$ ，故系统中内力的矢量和必为零，即

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \text{ 内}} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{i j} \right) = 0 \quad (3.50)$$

所以式 (3.49) 可以表示为

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \text{ 外}} \right) dt = d\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \right) \quad \text{或} \quad \mathbf{F} dt = d\mathbf{P} \quad (3.51)$$

式中 $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \text{ 外}}$ 、 $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$ 分别称为质点系受到的合外力和质点系的总动量（即质点系中各质点动量的矢量和）。对式 (3.51) 两边同时积分，可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{P}_1}^{\mathbf{P}_2} d\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i 2} - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i 1} \quad (3.52)$$

式 (3.51) 和 (3.52) 均表明，质点系在一段时间内受到的合外力的冲量等于在该段时间内系统总动量的增量。这一结论称为质点系的动量定理，式 (3.51) 和 (3.52) 分别是动量定理的微分形式和积分形式。动量定理表明，只有外力的冲量才可以改变系统的总动量，内力的作用不能改变系统的总动量。例如坐在车内的人，无论人用多大的力作用于车上，作用时间有多长，只要没有外力的冲量，均不可能让人车系统的总动量发生变化。

动量定理在直角坐标系中的分量形式为

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = P_{x2} - P_{x1} = \sum_{i=1}^n m_i v_{ix2} - \sum_{i=1}^n m_i v_{ix1} \quad (3.53a)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_y dt = P_{y2} - P_{y1} = \sum_{i=1}^n m_i v_{iy2} - \sum_{i=1}^n m_i v_{iy1} \quad (3.53b)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_z dt = P_{z2} - P_{z1} = \sum_{i=1}^n m_i v_{iz2} - \sum_{i=1}^n m_i v_{iz1} \quad (3.53c)$$

式 (3.53) 表明, 合外力沿某个方向的冲量只能改变系统在该方向上的动量。

3.4.3 动量守恒定律

由质点系动量定理的表达式 (3.51) 或 (3.52) 可知, 对于质点系来说, 如果系统不受外力作用, 或所受外力的矢量和为 0 时, 即: $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$, 则系统的总动量恒定不变,

即

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{恒矢量} \quad (3.54)$$

这一结论称为质点系的**动量守恒定律** (law of conservation of momentum)。

在理解或应用动量守恒定律时, 要注意以下几点:

(1) 动量守恒定律和动量定理一样, 只有在惯性系中才成立, 而且在使用时必须选择同一个惯性参考系;

(2) 当系统受合外力为零时, 系统的总动量守恒, 但是由于内力的存在, 系统内各质点的动量是可以改变的, 换句话说尽管内力不能改变系统的总动量, 但内力可以使动量在系统内部发生转移;

(3) 当合外力不等于零时, 系统的总动量不守恒, 但如果合外力的方向不变, 始终沿着某个给定的方向, 则在与合外力垂直的方向上, 系统的总动量也是守恒的;

(4) 在某些过程中 (如水平面上两个物体的碰撞、炸弹爆炸等), 由于内力的作用时间极为短暂、且内力远远大于外力 (如重力、摩擦力等), 这时可以略去外力对系统的作用, 认为系统的总动量仍然是守恒的;

(5) 动量守恒定律是自然界中最普遍、最基本的守恒定律之一, 无论是宏观过程、还是微观过程, 也无论是低速运动、还是高速运动, 动量守恒定律总是成立的。所以它是比牛顿运动定律更普遍、更基本的自然规律。

例 3.9 如图 3.14 所示, 在光滑水平面上放有一质量为 M 的直角三角形柱体, 在其斜面上又放一质量为 m 的小直角三角形柱体。 M 的水平直角边的边长为 a , m 的水平直角边的边长为 b , 两者接触面的倾角为 θ 。开始时, m 静止于 M 的顶端, 然后由静止开

始沿 M 的斜面向下滑动。试求当 m 的下边缘滑到水平面时, M 在水平面上移动的距离。

解: 将两个三角形滑块作为一个系统来考虑, 由于水平桌面是光滑的, 系统在水平方向所受外力为零, 故 M 与 m 组成的系统在水平方向上动量守恒。以水平向右为 x 轴的正方向, 设 m 和 M 相对于桌面 (同一惯性参照系) 沿水平方向的速度分别为 v_x 和 V_x , 则有

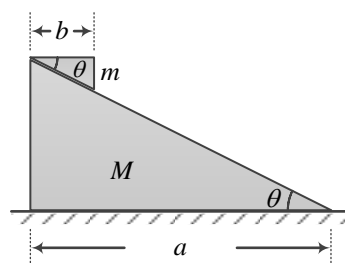


图3.14 例题3.9图

$$mv_x + MV_x = 0 \quad (1)$$

由于动量守恒定律只适用于惯性系, 所以这里的速度 v_x 和 V_x 都是相对地面的。根据相对运动中的速度叠加原理, 设 m 相对于 M 的水平速度为 v'_x , 则有

$$v_x = v'_x + V_x \quad (2)$$

将式②代入式①, 可得

$$mv'_x + (M + m)V_x = 0$$

设 m 从顶端到地面的时间为 t , 上式两边乘以 dt 并积分有

$$m \int_0^t v'_x dt + (M + m) \int_0^t V_x dt = 0$$

显然: $\int_0^t V_x dt = \Delta x$, 即为 M 在时间 t 内在水平面上移动的距离; 而 $\int_0^t v'_x dt = a - b$ 表示 m

相对于 M 在水平方向滑动的距离, 则有

$$m(a - b) + (M + m)\Delta x = 0$$

所以 M 在水平面上移动的距离为

$$\Delta x = -\frac{m(a - b)}{(M + m)}$$

负号表示 M 的移动方向与 x 轴正方向相反, 即与 m 沿水平方向的速度相反。

§ 3.5 碰撞

3.5.1 碰撞及其分类

碰撞是一种常见的自然现象，也是物理学中一个很重要的研究内容。所谓**碰撞**（collision），是指两个物体相互作用的持续时间极为短暂，同时其运动状态发生迅速变化的现象。在宏观领域内，物体间的相互作用力表现为接触力，故碰撞往往发生在两个物体直接接触的时候。例如台球桌上两个台球之间的碰撞、交通事故中两

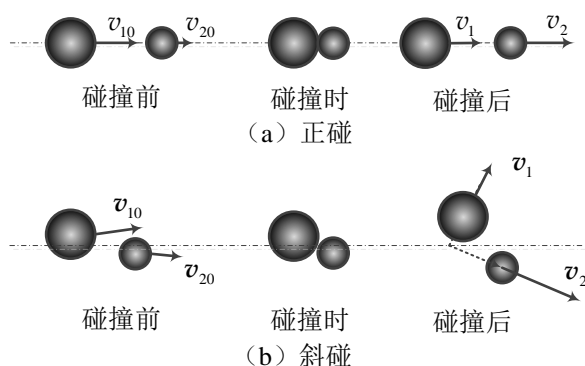


图3.15 正碰与斜碰

辆汽车之间的碰撞，建筑工地上重锤与桩柱之间的碰撞等等。在微观领域内，如分子与分子、 α 粒子与原子核之间的相互作用是非接触式的，由于双方有很强的相互斥力，迫使它们在接触前就偏离了原来的运动方向而分开，这种微观粒子之间的碰撞通常称为**散射**（scattering）。在宇宙中，天体间的碰撞也频繁发生。1994 年休梅克—利维号彗星与木星的碰撞则是人类首次成功预报的较大规模的天体相碰现象。在碰撞中，由于两物体相互作用的时间极短，相互作用力（通常称为冲击力）又非常大，远大于两物体受到的其它作用力（如重力、摩擦力等），因此在处理碰撞问题时，通常将发生碰撞的两个物体作为一个系统来考虑，并认为在碰撞过程中，系统仅有内力相互作用，所以碰撞过程应遵守动量守恒定律。

如果碰撞前后两物体的运动方向均在两物体的连心线上，这样的碰撞称为**正碰**（或**对心碰撞**），否则称为**斜碰**，如图 3.15 所示。如果按照碰撞前后系统的机械能是否守恒来进行划分，又可将碰撞分为**完全弹性碰撞**、**非弹性碰撞**、**完全非弹性碰撞**三种情况。对于完全弹性碰撞，系统碰撞前后机械能守恒；而在非弹性碰撞过程中，总有一部分机械能损失掉，转变为其他形式的能量，如热能、声能等；如果碰撞后两者没有分开，并以共同的速度一起运动，就是完全非弹性碰撞。

3.5.2 恢复系数

为简单起见，我们以正碰为例来进行讨论，并将两个发生碰撞的小球视作一质点系。因碰撞过程经历的时间极为短暂，且系统内力远大于外力，所以碰撞过程中，可以认为

系统不受外力作用，故系统的动量守恒。用 m_1 、 m_2 分别表示两球的质量，且设碰撞前两球的速度分别为 v_{10} 和 v_{20} ，碰撞后的速度分别为 v_1 和 v_2 ，有

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (3.55)$$

实验表明，对于材料给定的小球，碰撞后的相对分离速度与碰撞前的相对接近速度之比为—常数，即

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \quad (3.56)$$

比例系数 e 称为**恢复系数** (recovery coefficient)，由两球材料的弹性决定，并可通过气垫导轨或气桌上的实验测量。

将式 (3.55) 与式 (3.56) 联立求解。若碰撞前的速度已知，则可得碰撞后的速度为

$$v_1 = v_{10} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + e) \cdot (v_{10} - v_{20}) \quad (3.57)$$

$$v_2 = v_{20} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + e) \cdot (v_{10} - v_{20}) \quad (3.58)$$

3.5.3 完全弹性碰撞

当 $e=1$ ，即碰撞前后两球相对速度大小不发生变化时，式 (3.60) 变为

$$v_{10} - v_{20} = v_2 - v_1$$

或

$$v_2 + v_{20} = v_1 + v_{10} \quad (3.59)$$

再将式 (3.55) 改写为

$$m_2 (v_2 - v_{20}) = m_1 (v_{10} - v_1) \quad (3.60)$$

将式 (3.59) 和 (3.60) 两式相乘，可得

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (3.61)$$

这表明，当弹性恢复系数 $e=1$ 时，碰撞前后质点系的总动能（即机械能）不变。所以恢复系数 $e=1$ 的碰撞就是**完全弹性碰撞** (completely elastic collision)。在这类碰撞过程中，先是一部分动能转变为球的形变势能，以后形变势能又全部变为动能，所以无机械能损

失。将 $e=1$ 代入式 (3.57) 和 (3.58), 可得

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{20} \quad (3.62)$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{20} \quad (3.63)$$

现在就式 (3.62) 和 (3.63) 讨论几种特殊情况

(1) 若 $m_1 = m_2$, 可得

$$v_1 = v_{20}, \quad v_2 = v_{10}$$

即质量相等的两球相碰, 碰撞后两球交换速度。

(2) 若 $m_1 \ll m_2$, 且 $v_{20} = 0$, 可得

$$v_1 \approx -v_{10}, \quad v_2 \approx 0$$

这意味着用轻球去碰静止的重球时, 重球仍然不动而轻球以原速率弹回。例如用乒乓球去碰铅球, 碰后铅球保持不动, 而乒乓球几乎以原速率弹回; 气体分子与器壁的相碰, 也是完全弹性碰撞, 因此气体分子也以原速率弹回。

(3) 若 $m_1 \gg m_2$, 且 $v_{20} = 0$, 可得

$$v_1 \approx v_{10}, \quad v_2 \approx 2v_{10}$$

这表明: 用重球去碰静止的轻球时, 重球几乎以原速前进, 而轻球则以二倍于重球的速度前进。

3.5.4 完全非弹性碰撞

若 $e=0$, 则由 (3.57) 和 (3.58) 可得: $v_2 = v_1$ 。即两球碰撞后并不分开, 以同一速度运动, 这类碰撞称为**完全非弹性碰撞** (completely inelastic collision)。设碰撞后共同速度为 v , 则由式 (3.55) 有

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

碰撞前后损失的机械能为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_{10} - v_{20})^2$$

例 3.10 如图 3.16 所示, 质量分别为 m 和 M 的两木块用劲度系数为 k 的轻质弹簧相连, 静止地放在光滑地面上。质量为 m_0 的子弹以水平初速 v_0 射入木块 m , 设子弹射入过程的时间极短。试求:

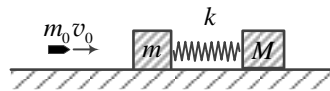


图3.16 例题3.10图

- (1) 弹簧的最大压缩长度;
- (2) 木块 M 相对地面的最大速度和最小速度。

解: (1) 取地面参考系, 子弹在与木块 m 的碰撞过程中, 动量守恒, 有

$$m_0 v_0 = (m + m_0) v_{10}$$

式中 v_{10} 是碰后 $m + m_0$ 的速度。故

$$v_{10} = \frac{m_0 v_0}{m + m_0} \quad (1)$$

取 $m + m_0$ 、 M 和弹簧为研究系统, 则碰撞后系统的机械能守恒、动量守恒。当弹簧达到最大压缩长度 x_M 时, $m + m_0$ 与 M 的速度相同, 设为 v 。由机械能守恒及动量守恒, 得

$$\frac{1}{2} (m + m_0) v_{10}^2 = \frac{1}{2} (m + m_0 + M) v^2 + \frac{1}{2} k x_M^2 \quad (2)$$

$$(m + m_0) v_{10} = (m + m_0 + M) v \quad (3)$$

联立式①、②、③, 解得最大压缩长度为

$$x_M = m_0 v_0 \sqrt{\frac{M}{k(m + m_0)(m + m_0 + M)}} \quad (4)$$

(2) 当弹性势能为零时, 设 $m + m_0$ 与 M 的速度分别为 v_1 和 v_2 , 则 v_2 将是 M 的最大或最小速度。由机械能守恒及动量守恒有

$$\frac{1}{2} (m + m_0) v_{10}^2 = \frac{1}{2} (m + m_0) v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 \quad (5)$$

$$m_0 v_0 = (m + m_0) v_1 + M v_2 \quad (6)$$

联立式①、⑤、⑥, 得

$$v_2 [(m + m_0 + M) v_2 - 2m_0 v_0] = 0$$

从而可以解得 $v_2 = 0$ 为最小, $v_2 = \frac{2m_0 v_0}{(m + m_0 + M)}$ 为最大。

3.5.5 斜碰

当两个物体碰撞前后的运动方向不在两物体的连心线上时，这类碰撞称为斜碰。此时，动量守恒的表达形式（3.59）应改写为矢量形式，即

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (3.64)$$

如图 3.17 所示，假设两小球在 O - xy 平面内发生斜

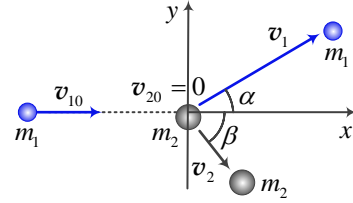


图3.17 在 O - xy 平面内两球间的碰撞

碰，且 $\mathbf{v}_{20} = 0$ ，则（3.64 式）在直角坐标系中的分量式可写为

$$m_1 v_{10} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta \quad (3.65a)$$

$$0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_1 \sin \alpha - m_2 v_2 \sin \beta \quad (3.65b)$$

在实际的各种碰撞问题中，绝大部分的碰撞均是斜碰，例如台球桌上台球之间的碰撞，微观领域中两粒子之间的碰撞等。由于动量具有矢量性，因此在处理斜碰问题时，都应该采用动量守恒定律的分量形式或矢量图解法来求解。

§ 3.6 质心 质心运动定理

3.6.1 质心

在研究多个物体组成的系统时，质心是个很重要的概念。首先考虑由两个质点组成的系统，如图 3.18 所示。设此两质点质量分别为 m_1 和 m_2 ，相对于点 O 的位矢分别为 \mathbf{r}_1 ， \mathbf{r}_2 ，则系统的动量为

$$\mathbf{P} = m_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (m_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \cdot \mathbf{r}_2) = m \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \cdot \mathbf{r}_2}{m} \right)$$

式中 $m = m_1 + m_2$ 为系统的总质量，令

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

则上式可写为

$$\mathbf{P} = m \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = m \mathbf{v}_C$$

将上述结果推广到由 n 个质点组成的系统，则有

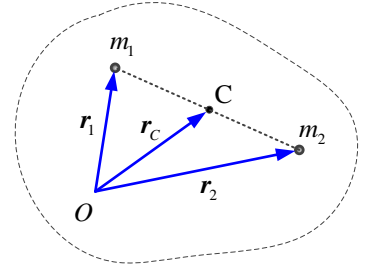


图 3.18 双质点系统的质心

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m} \quad (3.66)$$

式中 m_1 、 m_2 、 \cdots 、 m_n 分别表示各质点的质量， \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 \cdots 、 \mathbf{r}_n 分别为各质点的位置矢量， m 为质点系的总质量。由式 (3.66) 确定的点 C 称为为质点系的质心。

由式 (3.66) 可知，在直角坐标系中，质心的三个直角坐标分别为

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} \quad (3.67a)$$

$$y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} \quad (3.67b)$$

$$z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \quad (3.67c)$$

对于质量连续分布的物体，求质心的位置时需要将上述求和形式改为积分形式，即

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m} \quad (3.68)$$

$$x_C = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x dm}{m} \quad (3.69a)$$

$$y_C = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y dm}{m} \quad (3.69b)$$

$$z_C = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int z dm}{m} \quad (3.69c)$$

式中 \mathbf{r} 、 x 、 y 和 z 分别是质量元 dm 的位置矢量和对应的三个位置坐标。

必须注意，重心和质心是两个不同的概念。对于一个有一定形状和大小的自由物体来说，如原为静止，当外力的作用线通过其质心时，物体将只作平动，而没有转动。就这一情形而言，物体的质量好象集中在质心上。重心则是地球对物体各部分引力的合力（即重力）的作用点，两者的定义是不同的。当物体远离地球，不受重力的作用，重心

这个概念便失去意义，而质心却依然存在。如物体的体积不太大，可认为物体处于均匀重力场中，亦即在物体体积范围内各处的重力加速度 g 大小相等、方向平行时，物体的重心与质心的位置是重合的。

例 3.11 求腰长为 a 的等腰直角三角形均匀薄板的质心位置。

解：因为等腰直角三角形均匀薄板的质量分布对其直角的角平分线对称，所以质心位于此角平分线上，以此角平分线为 x 轴，顶角为坐标原点 O ，建立直角坐标系，如图 3.19 所示。在离原点 x 处，取一个宽度为 dx 、平行于 y 轴的窄条形面积元、由于面积元的长度 $l = 2y = 2x$ ，所以其面积为 $dS = ldx = 2x dx$ ，设薄板每单位面积的质量为 σ ，则此面积元的质量为

$$dm = \sigma dS = 2\sigma x dx$$

应用式 (3.69a)，可求出此三角形质心的 x 坐标为

$$x_c = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x^2 dx}{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x dx} = \frac{\sqrt{2}}{3} a$$

显然，这个结果和熟知的三角形重心的位置一致。

3.6.2 质心运动定理

当系统中每个质点都在运动时，系统质心的位置也要发生变化。现在，我们从牛顿第二定律和第三定律直接推导出**质心运动定理**。

将式 (3.66) 两边同时对时间求导数，可得出质心运动的速度为

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{m}$$

由此可得

$$m\mathbf{v}_c = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

式中 \mathbf{v}_c 为质心的速度，该式两边再对时间求导数，有

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = m\mathbf{a}_c = \sum_i m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}$$

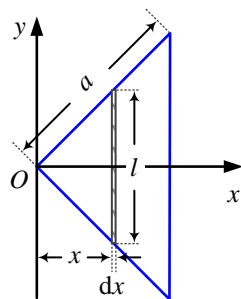


图 3.19 例 3.11 图

式中： $\mathbf{a}_C = \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}_C}{dt^2}$ 为质心的加速度。由牛顿第二运动定律，对 i 个质点有

$$\mathbf{F}_{i\text{外}} + \mathbf{F}_{i\text{内}} = m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}$$

式中， $\mathbf{F}_{i\text{外}}$ 和 $\mathbf{F}_{i\text{内}}$ 分别是第 i 个质点受到的系统的外力和内力，再对 i 求和，则有

$$\sum_i \mathbf{F}_{i\text{外}} + \sum_i \mathbf{F}_{i\text{内}} = \sum_i m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}$$

由牛顿第三运动定律可知，系统内所有质点所受的内力之和为零，即

$$\sum_i \mathbf{F}_{i\text{内}} = 0$$

所以有

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_{i\text{外}} = m\mathbf{a}_C \quad (3.70)$$

式 (3.70) 称为系统的质心运动定理。它表明：一个质点系的质心的运动，就如同这样一个质点的运动，该质点的质量等于整个质点系的质量，并且集中在质心；而此质点所受的力是系统内各质点所受的所有外力的矢量和（实际上在质心位置可能处既无质量、又未受力）。

质心运动定理表明，系统的内力不会影响质心的运动状态。若系统所受外力的矢量和为零，则质心将保持静止或作匀速直线运动。

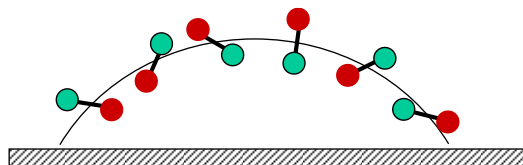


图 3.20 刚性轻杆相连的两个质点

质心运动定理还表明质点系内各个质点由于受内力和外力的作用，它们的运动情况可能是很复杂的，但是系统内有一个特殊的点，即质心，它的运动可能相当简单，只由系统所受的合外力所决定。例如由一根刚性杆相连的两个质点组成的简单系统。将它斜向抛出，当它在空中运行时，将看到它一面翻转，一面前进，如图 3.20 所示。其中，各个质点运动情况尽管相当复杂，但由于它只受重力作用，因而它的质心 C 只是简单地沿抛物线轨道运行。又如高台跳水运



图 3.21 运动员做高台跳水

动员从跳台起跳后，她的身体在空中可以做各种优美的翻滚伸展动作，但是她的质心仍沿着一条抛物线运动，如图 3.21 所示。

例 3.12 一根长为 l 、密度均匀的柔软链条，其质量线密度为 λ ，将其卷成一堆放在地面上，如图 3.22 所示。现以匀速 v 将其向上提起。试用质心运动定律，求向上提链条的拉力 F 与提起的链条长度 y 的函数关系。

解：如图所示，设链条被提起的长度为 y 时，整个链条质心的坐标为 y_c ，则

$$y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} = \frac{\lambda y \cdot \frac{y}{2} + \lambda(l-y) \times 0}{\lambda l} = \frac{y^2}{2l} \quad (1)$$

由于地面上的链条受合外力为零，因此整个链条受到的合外力就等于被提起的链条上受到的合外力，其值为 $F - \lambda y g$ ，应用质心运动定律有

$$F - \lambda y g = \lambda l \frac{d^2 y_c}{dt^2}$$

将式①对时间 t 求二阶导数有

$$\frac{d^2 y_c}{dt^2} = \frac{1}{l} \left[\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y \frac{d^2 y}{dt^2} \right]$$

又由题意可知： $\frac{dy}{dt} = v$ 、 $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ ，代人③式，有

$$\frac{d^2 y_c}{dt^2} = \frac{v^2}{l}$$

将此代入②式，可得

$$F = \lambda y g + \lambda v^2$$

这就是向上提链条的拉力大小。

最后请读者思考：本题能否用动量定理来求解呢？

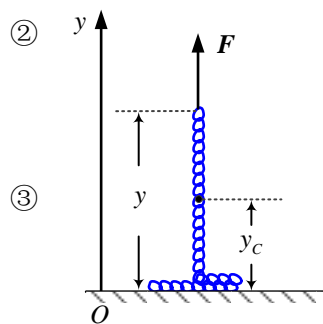


图 3.22 例 3.12 图

§ 3.7 角动量 角动量定理 角动量守恒定律

在前面几节中，我们讨论了用动量来描述物体的运动状态，并讨论了在机械运动中所遵循的动量守恒定律。同样，在讨论质点相对于空间某一给定点的转动问题时，也可

以用**角动量**来描述物体的运动状态。角动量是物理学中又一个非常重要的概念，在研究物体的转动问题时，例如天体运动中行星绕太阳的运动、原子内部电子绕核的运动、以及刚体绕轴的转动（见第四章）等等，它所起的作用和动量所起的作用相类似。本节只阐述质点和质点系的角动量、角动量定理以及角动量守恒定律。至于刚体转动时的角动量问题将在第四章中讨论。

3.7.1 质点的角动量

角动量又称**动量矩**，常用符号 \mathbf{L} 表示。它是描述质点绕某个给定点转动的一个重要的物理量。在自然界中经常会遇到质点绕着一个给定点转动的情况。例如，行星绕太阳的转动、人造卫星绕地球的转动、原子中核外电子绕原子核的转动等等。

如图 3.18 所示，一个质量为 m 的质点，在某一时刻以速度 \mathbf{v} 运动，其相对于固定点 O 的矢径为 \mathbf{r} ，则我们将质点相对于 O 点的矢径 \mathbf{r} 与质点的动量 $m\mathbf{v}$ 的矢量积定义为该时刻质点相对于 O 点的**角动量**（angular momentum），并用 \mathbf{L} 表示，即

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (3.66)$$

由矢量积的定义可知，角动量 \mathbf{L} 是矢量，其方向垂直于矢径 \mathbf{r} 和动量 $m\mathbf{v}$ 所组成的平面，可用右手螺旋法则确定，如图 3.19 所示。 \mathbf{L} 的大小为

$$L = rmv \sin \theta = rP \sin \theta \quad (3.67)$$

式中 θ 为 \mathbf{r} 和 $m\mathbf{v}$ 之间的夹角。当质点做圆周运动时， $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，

这时质点对圆心 O 点的角动量的大小为

$$L = rmv = mr^2\omega \quad (3.68)$$

其方向与角速度 ω 的方向相同。

由定义式 (3.66) 可知，质点的角动量不仅与质点的速度有关，还与质点对参考点 O 的径矢有关。同一质点对不同的参考点的径矢不同，因而角动量也不同。因此，在讨论质点的角动量时必须指明是相对于哪一个参考点而言的。

利用矢量积的运算规则，在直角坐标系中，角动量 \mathbf{L} 可表述为

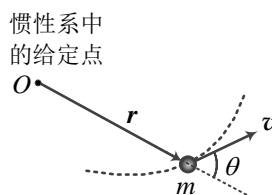


图3.18 质点的角动量

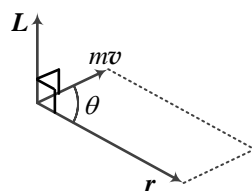


图3.19 角动量的方向

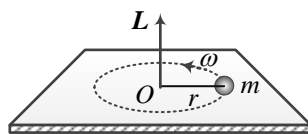


图3.20 质点作圆周运动时的角动量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (3.69)$$

由此可得角动量 \mathbf{L} 在各坐标轴上的分量为

$$L_x = ymv_z - zmv_y = yP_z - zP_y \quad (3.70a)$$

$$L_y = zmv_x - xmv_z = zP_x - xP_z \quad (3.70b)$$

$$L_z = xmv_y - ymv_x = xP_y - yP_x \quad (3.70c)$$

在国际单位制中，角动量的单位是： $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 。

3.7.2 质点的角动量定理及角动量守恒定律

1. 力矩

为了定量分析引起质点角动量变化的原因，我们先引入力对参考点 O 的力矩概念。如图 3.21 所示，人们将从参考点 O 到力的作用点 P 的矢径 \mathbf{r} 与力 \mathbf{F} 的矢量积，称为力 \mathbf{F} 对参考点 O 的力矩（moment of force），并用符号 \mathbf{M} 表示，即

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.71)$$

其大小为

$$M = F|\mathbf{r}|\sin\theta = Fr\sin\theta = Fd \quad (3.72)$$

式中 $d = r\sin\theta$ ，是参考点 O 到力的作用线的垂直距离，

称为力臂（arm of force）。所以力矩的大小就等于力与

力臂的乘积。在中学物理中我们曾经学习过的杠杆的平衡条件：“动力×动力臂=阻力×阻力臂”，这实际上就是力矩的平衡条件。

由力矩的定义式（3.71）可知，力矩是矢量，力矩 \mathbf{M} 的方向垂直于矢径 \mathbf{r} 和力 \mathbf{F} 所决定的平面，其方向可用右手螺旋法则确定。同角动量计算一样，利用矢量积的运算规则，可得力矩 \mathbf{M} 在直角坐标系中各坐标轴上的分量为

$$M_x = yF_z - zF_y \quad (3.73a)$$

$$M_y = zF_x - xF_z \quad (3.73b)$$

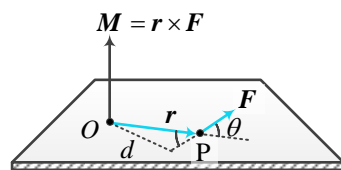


图3.21 力对参考点的力矩

$$M_z = xF_y - yF_x \quad (3.73c)$$

在国际单位制中，力矩的单位是：N·m。

2. 质点的角动量定理

如果我们将质点对 O 点的角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ 对时间 t 求导，可得

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (3.74)$$

由于 $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ ， $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ，故式 (3.74) 可写为

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{M}$$

再根据矢量积的性质 $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$ ，于是有

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (3.75a)$$

或

$$\mathbf{M}dt = d\mathbf{L} \quad (3.75b)$$

式 (3.75a) 表明，作用在质点上的合外力矩等于质点角动量对时间的变化率。与力的冲量类似，我们将 $\mathbf{M}dt$ 称作力矩在 dt 时间内对质点的**冲量矩** (moment of impulse)，式 (3.75b) 表明：作用于质点上合外力矩的冲量矩等于质点角动量的增量。这称为质点的**角动量定理** (theorem of angular momentum)。式 (3.75) 就是质点角动量定理的微分形式。将式 (3.75b) 两边同时积分，可得角动量定理的积分形式为

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M}dt = \int_{L_0}^L d\mathbf{L} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 \quad (3.76)$$

3. 质点的角动量守恒定律

由质点角动量定理的表达式 (3.75) 或 (3.76) 可知：如果一个质点在运动过程中，受到的合外力 \mathbf{F} 对某个给定参考点 O 的力矩为零，则角动量等于恒矢量，即

$$\text{若 } \mathbf{M} = 0, \text{ 则: } \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{恒矢量} \quad (3.77)$$

这称为质点的**角动量守恒定律** (law of conservation of angular momentum)。

质点的角动量守恒定律表明，质点对某个参考点的角动量恒定不变的条件是：它受

到的合外力对该参考点的力矩恒为零。而由力矩的定义 $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 可知，力矩恒为零的情况有两种：一种是合外力 $\mathbf{F} \equiv 0$ ；另一种是合外力 $\mathbf{F} \neq 0$ ，但合外力的作用线始终通过某个给定的参考点。对于第一种情况，由于质点所受合外力恒为零，质点将在空间做匀速直线运动。所以做匀速直线运动的质点，不仅其动量是恒定不变的，而且该质点对于惯性系中任意参考点的角动量也是恒定不变的。

对于第二种情况，也有许多实例。例如当质点做匀速圆周运动时，质点受到的合外力的方向总是指向圆心，对圆心的力矩为零，所以质点对圆心的角动量 $L = rmv = mr^2\omega$ ，恒定不变；又如行星绕太阳的运动、人造地球卫星绕地球的运动、原子中核外电子绕核的运动等等，这些行星、地球卫星、核外电子受到的合外力总是指向一个给定的参考点，即分别指向太阳中心、地心和原子核中心，所以它们对这些给定参考点（即给定中心）的角动量恒定不变。人们将方向总是指向某一给定点的力，称为有心力（central force）。可以证明，一切只受有心力作用而运动的物体，其对于该“心”的角动量一定守恒。

例 3.11 如图 3.22 所示，一质量为 m 的小球置于一无摩擦的水平桌面上，球上系一细绳，绳通过桌面上一个光滑孔向下，用手拉住，先使小球以速率 v_0 沿半径为 r_0 的圆形路径运动，然后人用力向下拉绳，使小球转动半径由 r_0 减少到 r_1 。试求：

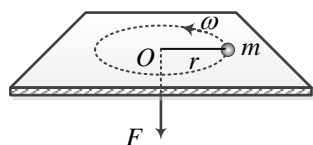


图3.22 例3.11图

- (1) 当小球做圆周运动的半径减小为 r_1 时，球的线速度 v_1 及角速度 ω_1 ；
- (2) 在整个过程拉力做的功。

解 (1) 维持小球做圆周运动的向心力大小等于向下拉绳的力 F ，由于小球受到绳子的拉力指向圆心，对圆心 O 不产生力矩。故在向下拉绳的过程中，小球对圆心 O 点的角动量守恒。于是得

$$mr_0v_0 = mr_1v_1$$

所以

$$v_1 = \frac{r_0v_0}{r_1}$$

再利用关系式 $v = r\omega$ ，有

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{r_0}{r_1^2} v_0$$

可见，当小球的转动半径减小时，其转动的线速度和角速度都将增大。

(2) 根据质点的动能定理，拉力 F 做的功等于小球动能的增量，即

$$A_F = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \left(\frac{r_0^2 - r_1^2}{r_1^2} \right)$$

例 3.12 发射地球同步卫星时，先要让卫星在一个大的椭圆轨道上运动若干圈，如图所示，当卫星在椭圆轨道上运动到远地点时再利用火箭推力使之进入同步轨道。设卫星质量 $m = 50\text{kg}$ ，椭圆轨道近地点的高度为 $h_1 = 1400\text{ km}$ ，远地点的高度（也就是同步轨道的高度） $h_2 = 36\,000\text{ km}$ 。已知：地球赤道半径 $R = 6378\text{ km}$ ，地球质量 $M = 5.98 \times 10^{24}\text{ kg}$ ，

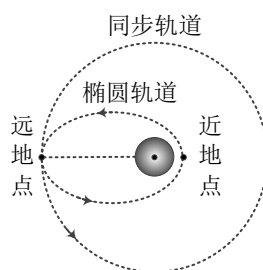


图3.22 例3.12图

万有引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 。试求：（结果保留 3 位有效数字）

(1) 以无限远处为引力势能的零势能点，求卫星在同步轨道上运动时的机械能。

(2) 卫星在椭圆轨道上运动时，它在近地点的速率 v_1 和远地点的速率 v_2 。

解：(1) 设卫星在同步轨道上运动时的速率为 v_T ，则

微视频3.10
例题3.12 解题过程

$$G \frac{mM}{(R+h_2)^2} = m \frac{v_T^2}{R+h_2} \quad v_T^2 = G \frac{M}{R+h_2}$$

所以机械能

$$\begin{aligned} E = E_K + E_P &= \frac{1}{2}mv_T^2 - G \frac{Mm}{R+h_2} \\ &= -\frac{G}{2} \frac{Mm}{R+h_2} = -2.35 \times 10^8 \text{ J} \end{aligned}$$

(2) 卫星在椭圆轨道上运动时受到的万有引力始终指向地心，所以卫星在椭圆轨道上运动时，既满足机械能守恒，又满足对地心的角动量守恒，故有

$$\begin{aligned} mv_1(R+h_1) &= mv_2(R+h_2) \\ \frac{1}{2}mv_1^2 - G \frac{Mm}{R+h_1} &= \frac{1}{2}mv_2^2 - G \frac{Mm}{R+h_2} \end{aligned}$$

解此方程得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(R+h_2)GM}{(2R+h_1+h_2)(R+h_1)}} = 9.31 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(R+h_1)GM}{(2R+h_1+h_2)(R+h_2)}} = 1.71 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3.7.3 质点系的角动量定理及角动量守恒定律

1、质点系的角动量定理

对于由多个质点组成的质点系来说，系统内每个质点所受的力均可看作内力和外力的矢量和。因此就系统内第 i 个质点而言，受到的力矩 \mathbf{M}_i 同样可看作外力矩

$\mathbf{M}_{i\text{外}} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i\text{外}}$ 和内力矩 $\mathbf{M}_{i\text{内}} = \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}$ 的矢量和，即

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i\text{外}} + \mathbf{M}_{i\text{内}} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i\text{外}} + \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}$$

根据质点的角动量定理有

$$\mathbf{M}_{i\text{外}} + \mathbf{M}_{i\text{内}} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i\text{外}} + \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} = \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

上式对系统内所有质点都成立。为此，将上式对指标 i 求和，并注意到系统内力矩的矢量和为零，即 $\sum_i \mathbf{M}_{i\text{内}} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}) = 0$ ，所以有

$$\sum_i \mathbf{M}_{i\text{外}} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (3.78)$$

令

$$\mathbf{M}_{\text{外}} = \sum_i \mathbf{M}_{i\text{外}} \quad \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

其中 $\mathbf{M}_{\text{外}}$ 是质点系所受的合外力矩， \mathbf{L} 是质点系总的角动量，它等于系统内各质点的角动量的矢量和。于是式(3.78)可改写为

$$\mathbf{M}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (3.79a)$$

或

$$\mathbf{M}_{\text{外}} dt = d\mathbf{L} \quad (3.79b)$$

式（3.79a）表明：作用在质点系上的合外力矩等于质点系总角动量对时间的变化率。式

（3.79b）表明：作用于质点系上的合外力矩的冲量矩等于质点系总角动量的增量。式

（3.83）就是质点系角动量定理的微分形式。其积分形式为

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M}_{\text{外}} dt = \int_{L_0}^L d\mathbf{L} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 \quad (3.80)$$

2、质点系的角动量守恒定律

若质点系所受合外力矩为零，即 $\mathbf{M}_{\text{外}} = \sum_i \mathbf{M}_{i\text{外}} = 0$ 时，由（式 3.80）可得

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \text{常矢量} \quad (3.81)$$

这就是质点系的角动量守恒定律。

由于质点系所受的合外力矩为零时，合外力不一定为零，所以系统的角动量守恒时，动量一般不守恒。

质点系的角动量守恒定律和能量守恒定律、动量守恒定律构成了自然界的三大基本守恒定律。无论从宏观到微观、还是从低速到高速，这三大守恒定律总是成立的。

* § 3.8 对称性与守恒定律

3.8.1 什么是对称性

人类对对称的认识最早来自于几何图形。在自然界中到处都充满着对称的几何图形，如树叶、雪花、蝴蝶等。人类从这种自然现象的几何对称中获得了美的感受，并将这种几何对称美有意识地应用于建筑（如）、绘画、艺术设计等领域来装扮城市、美化环境。



图3.23 自然界中的几何对称美

随着人类认识上的提高，对称性概念逐渐被应用于自然科学的各个领域。

什么是对称性？1951年，德国数学家外尔（H. Weyl）（1885-1955）给**对称性**下了一个普遍定义：“**如果一个系统的状态在某种操作下保持不变，则称该系统对这种操作具有对称性，该操作就叫做对称操作**”。应该注意，定义中的“系统”是一个广义的概念，可以是一种几何图形、也可以是某个现象或规律；所谓“操作”可以理解为是一种“变换”。物理学中最常见的“变换”是时空变换。其中空间变换有平移、转动、镜像反射、空间反演、标度变换（尺度缩放）等；时间变换有时间平移、时间反演等。此外，对称变换还可以是几种不同类型的变换的组合。

3.8.2. 守恒定律与对称性

1918年，德国女科学家诺特（1882-1935）将守恒定律与对称性联系在一起，建立了**诺特定理：每一种对称性对应于一个物理量的守恒定律，反之每一种守恒定律均对应于一种对称性**。

例如，空间平移对称性，说明空间是均匀的，从中可以导出动量守恒定律；空间旋转对称性，表明空间是各向同性的（或者说空间具有球对称性），从中可以得出角动量守恒定律；时间平移对称性，表明不存在绝对的计时起点，物理现象的进展过程与计时起点无关，从中可导出能量守恒定律；此外，与空间反演对称性相关的是宇称守恒定律；与量子力学中相移对称性有关的是电荷守恒定律等等。

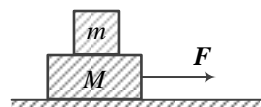
对称性原理和守恒定律是跨越物理学各个领域的普遍法则，因此在未涉及一些具体定律之前，往往有可能先根据对称性原理和守恒定律作出一些定性的判断，得到一些有用的信息。这些法则不仅不会与已知领域里的具体定律相悖，而且还能指导人们去探索未知的领域。当代的理论物理学家，特别是粒子物理学家，正在运用对称性法则以及与之相应的守恒定律，去寻求物质结构更深层次的奥秘。

然而，自然界中既有对称，又有不对称。对称与不对称有时随条件的变化而转变，在某些条件下具有对称性，而在另外一些条件下表现为对称性破缺。在物质的微观结构中，时常会出现对称性破缺的情况。如果运动规律的某一对称性并不严格成立而有所破缺，那么与它相应的守恒量将变为近似守恒量，其不守恒部分所占的比例将随破缺所占的比例而定。正是由于这个性质，物理学家可以根据实际观测到的近似守恒的程度，反

过来推测基本运动规律可能采取的形式。例如，物理学家从镜像对称性中导出了宇称守恒定律，然而来自中国的物理学家李政道、杨振宁对它的普遍性原理提出了怀疑，于 1956 年提出了在弱相互作用下宇称是不守恒的，并被吴健雄的实验所证实，李正道、杨振宁两人也因此分享了 1957 年的诺贝尔物理学奖。

思考题

3.1 如图所示木块 A 放到木块 B 上，B 又放到桌面上，今用力 F 拉木块 B 使二者一同做加速运动。在运动过程中，两个木块都受到哪些力？这些力各自做功否？做正功还是做负功？



思考题3.1图

3.2 对比万有引力定律 ($\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_0$) 和库仑定律

($\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_0$), (式中 \mathbf{r}_0 是从 m_1 或 q_1 指向 m_2 或 q_2 的单位矢量), 你能直接写出两个点电荷(q_1, q_2)

相距 r 为时的静电势能吗？这个势能可能有正值吗？

3.3 有人说“跳伞运动员张伞后匀速下降，重力与空气阻力相等，所受合力为零，所以合力做功为零，机械能守恒”。试根据机械能守恒的条件，分析上述说法是否正确？

3.4 行星在绕太阳运动时，从近日点向远日点的运动过程中，万有引力做正功、还是负功？万有引力势能是增加、还是减少？系统的机械能（动能+万有引力势能）守恒吗？系统的机械能是大于零、还是小于零？

3.5 若以地球表面为万有引力势能的零势能点，则当质量为 m 的物体离地心的距离等于 2 倍的地球半径时，其万有引力势能的大小为多少？

3.6 若取弹簧没有形变（伸长量为零）时为弹性势能零点，则弹性势能的表达式为 $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ ，式中 k 为弹簧的劲度系数。若以弹簧的伸长量为 x_0 时为弹性势能的零点，则弹性势能的表达式该取何种形式？

3.7 判断下述说法的正误

- (1) 不受外力作用的系统，它的动量和机械能必然同时都守恒；
- (2) 只有保守内力作用而不受外力作用（或合外力为零）的系统，它的动量和机械能必然都守恒。

3.8 应当怎样接住对方猛掷过来的重物（如篮球）？为什么？

3.9 人容易从大船上跳上岸，而从小舟上却不容易跳上岸，为什么？

3.10 在帆船上安装电动鼓风机对船帆鼓风，是否有助于帆船快速前进？为什么？

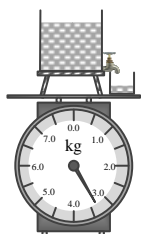
3.11 一人躺在地上，身上压一块重石板，另一人用重锤猛击石板，但见石板碎裂，而下面的人几

乎不受到伤害。何故？

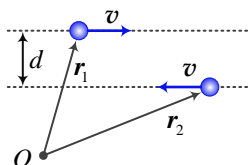
3.12 两个质量相同的物体从同一高度自由下落至地面，一个反弹回去，另一个却贴在地上，问哪一个物体给地面的冲量大？

3.13 河流在拐弯处的堤坝要比平直处的堤坝修的更加坚固，为什么？

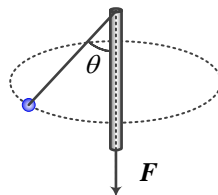
3.14 如图所示，在一只水桶的底部装有一个水龙头，其下面放一个杯子接水。整个装置放在一个台秤的托盘上。当水龙头打开或关闭时，台秤的读数有什么变化？



思考题3.14图



思考题3.15图



思考题3.16图

3.15 如图所示，两个质量均为 m 的质点，在两条相互平行的直线上相向而行，两直线相距为 d ，假设其速率均为 v 。则对于这两个质点组成的系统，系统的总动量为多少？这个系统对直线外任意参考点 O 的角动量为多少？

3.16 一质量为 m 的小球系在绳子的一端，绳子穿过一根竖直的空心管，另一端下垂，并用力拉住。现使小球绕管轴做圆周运动，如图所示。不计空气阻力，若用力向下拉绳，使小球到管口的绳子长度逐渐减小，问小球的动量、角动量、动能、机械能是否变化？为什么？

习 题

3.17 一人从 10 m 深的井中提水。开始时桶中装有 10 kg 的水，桶的质量为 1 kg，由于水桶漏水，每升高 1 m 要漏去 0.2 kg 的水。试求：将水桶匀速地从井中的水面提到井口时，人所做的功。

3.18 一物体按规律 $x = ct^2$ 在流体媒质中做直线运动，式中 c 为常量， t 为时间。设流体对物体的粘滞阻力正比于速度的平方，比例系数为 k ，试求物体由 $x=0$ 运动到 $x=l$ 时，阻力做的功。

3.19 一质量为 m 的质点在 $O-xy$ 平面内运动，其位置矢量随时间的函数关系为

$$\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j} \text{ (SI)}$$

式中 a 、 b 、 ω 均是正值常量，且 $a > b$ 。试求：

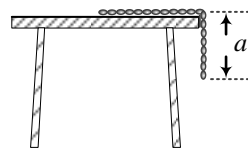
- (1) 质点在 A 点 $(a, 0)$ 和 B 点 $(0, b)$ 的动能；
- (2) 质点所受的合外力 \mathbf{F} 以及当质点从 A 点运动到 B 点的过程中 \mathbf{F} 的分力 F_x 和 F_y 分别做的功。

3.20 如图所示，一根长为 L 的链条，质量为 m ，摊直放在水平桌面上，并使其中一部分下垂，下垂部分的长度为 a ，链条与桌面的滑动摩擦系数为 μ 。假设下垂部分的重力大于桌面对链条的静摩擦力，

能使链条从静止开始向下滑动。试求：

(1) 从链条开始滑动到刚离开桌面的过程中，摩擦力做的功；

(2) 链条刚离开桌面时的速度。



习题 3.20 图

3.21 陨石在距离地面高度为 $2R$ 时的速度为 v_0 ，已知地球半径为 R ，地球质量为 M ，万有引力常量为 G ，并假设陨石在落地过程中不受空气阻力作用。试求陨石坠地时的速度。

3.22 设两个粒子之间的相互作用力是排斥力，其大小与粒子间距离 r 的函数关系为 $f = k/r^3$ ， k 为正值常量，试求这两个粒子相距为 r 时的势能。（设相互作用力为零的地方势能为零）

3.23 某弹簧不遵守胡克定律。设施力 F 时，相应的伸长量为 x ，力与伸长量的关系为

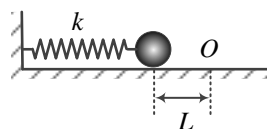
$$F = 52.8x + 38.4x^2 \quad (\text{SI})$$

(1) 将弹簧从伸长 $x_1 = 0.50\text{m}$ 拉伸到伸长 $x_2 = 1.00\text{m}$ 时，求外力所需做的功；

(2) 将弹簧横放在水平光滑桌面上，一端固定，另一端系一个质量为 2.17 kg 的物体，然后将弹簧拉伸到伸长量为 $x_2 = 1.00\text{m}$ 处，再将物体由静止释放，求当弹簧的伸长量回到 $x_1 = 0.50\text{m}$ 时，物体的速率；

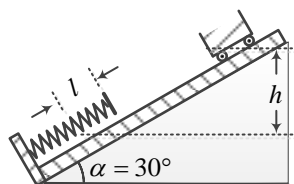
(3) 此弹簧的弹力是保守力吗？

3.24 劲度系数为 k 的轻弹簧，一端固定，另一端与桌面上的质量为 m 的小球 B 相连接。用外力推动小球，将弹簧压缩一段距离 L 后放开。假定小球所受的滑动摩擦力大小为 F 且恒定不变，滑动摩擦系数与静摩擦系数可视为相等。试求 L 必须满足什么条件时，才能使小球在放开后就开始运动，而且一旦停止下来就一直保持静止状态。



题 3.24 图

3.25 如图所示，自动卸料车连同料重为 G_1 ，它从静止开始沿着与水平面成 30° 的斜面滑下。滑到底端时与处于自然状态的轻弹簧相碰，当弹簧压缩到最大时，卸料车就自动翻斗卸料，此时料车下降高度为 h 。然后，依靠被压缩弹簧的弹性力作用又沿斜面回到原有高度。设空车重量为 G_2 ，另外假定摩擦阻力为车重的 0.2 倍，求 G_1 与 G_2 的比值。

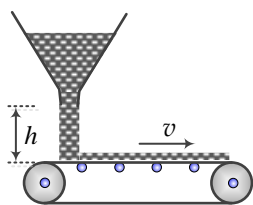


题 3.25 图

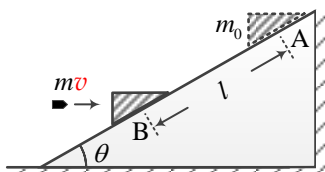
3.26 安全带对高空作业人员是非常重要的。假设一个质量为 50kg 的人，在工作时不慎从高空竖直跌落，由于安全带的保护，最终被悬挂起来。假设此人竖直跌落时做自由落体的距离为 2.0m ，安全带弹性缓冲的时间为 0.5s 。试求安全带对人的平均冲力。

3.27 一个质量为 0.15kg 的棒球以速度 $v_0 = 40\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的水平速度飞来，被棒球棒击打后速度仍然沿水平方向，但与原方向的夹角为 120° ，速度为 $v = 50\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。如果棒球与棒的接触时间为 0.02s ，求棒对棒球的平均打击力的大小和方向。

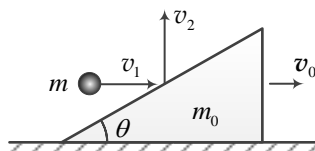
3.28 AK47 是由前苏联设计的一款知名度很高的自动步枪，每秒可连续击发 10 发子弹，每颗弹头的质量为 7.91g ，初速 $710\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。试求射击时枪托对士兵肩膀的平均冲击力。



题 3.29 图



题 3.30 图



题 3.31 图

3.29 如图所示，用传送带输送煤粉，料斗口在传送带上方高 $h = 0.50\text{m}$ 处，煤粉自料斗口自由降落在传送带上，随即与传送带一起运动。设料斗口连续卸煤的流量为 $q = 10\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ 传送带以 $v = 1.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的水平速度匀速向右移动。试求料斗口在卸煤过程中，煤粉对传送带的作用力的大小和方向（不计相对传送带静止的煤粉对传送带的压力）。

3.30 质量为 m_0 的木块在光滑的固定斜面上，由 A 点从静止开始下滑，当经过路程 l 运动到 B 点时，木块被一颗水平飞来的子弹射中，子弹立即陷入木块内。设子弹的质量为 m ，速度为 v ，求子弹射中木块后，子弹与木块的共同速度。

3.31 如图所示，质量为 m_0 的滑块正沿着光滑水平地面以速度 v_0 向右滑动。一质量为 m 的小球水平向右飞行，以速度 v_1 （对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速度为 v_2 （对地）。若碰撞时间为 Δt （ Δt 很小），试求：

- (1) 此过程中滑块对地的平均作用力；
- (2) 滑块速度增量的大小。

3.32 试求一个质量均匀分布、密度为 ρ 、底面半径和高均为 R 的圆锥体的质心位置。

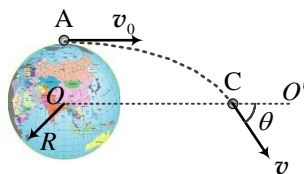
3.33 一质量 $m_1 = 50\text{kg}$ 的人站在一条质量为 $m_2 = 200\text{kg}$ 长度 $l = 4.0\text{m}$ 的船的船尾上，开始时船静止。试用质心的概念和质心运动定律，求当人从船尾走到船头时船移动的距离。假定水的阻力可忽略不计。

3.34 两颗相距很近、相互吸引并绕它们的质心转动的恒星称为双星系统。用望远镜观测时，亮的一颗叫主星，暗的一颗叫伴星。设主星 A 的质量为 m_1 ，伴星 B 的质量为 m_2 ，双星之间的距离为 a 。试求当它们因相互吸引而绕其质心做圆周运动时的周期 T 。

3.35 一个具有单位质量的质点在随时间 t 变化的合外力 $\mathbf{F} = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + (12t - 6)\mathbf{j}$ (SI) 的作用下运动。设该质点在 $t = 0$ 时位于坐标原点，速度为零。试求： $t = 2$ 秒时，该质点受到的外力对坐标原点的力矩和该质点对坐标原点的角动量。（提示：先由动量定理求出质点速度 \mathbf{v} 和位置矢量 \mathbf{r} ，则

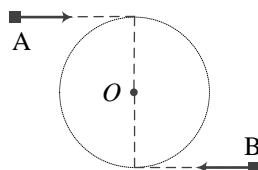
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

3.36 小球 A 自地球的北极点以速度 \mathbf{v}_0 在质量为 M 、半径为 R 的地球表面沿水平方向向右飞出, 如图所示, 地心参考系中轴 OO' 与 \mathbf{v}_0 平行, 小球 A 的运动轨道与轴 OO' 相交于距 O 为 $3R$ 的 C 点。不考虑空气阻力, 试求小球 A 在 C 点的速度 \mathbf{v} 、以及 \mathbf{v} 与 \mathbf{v}_0 之间的夹角 θ 。



习题 3.33图

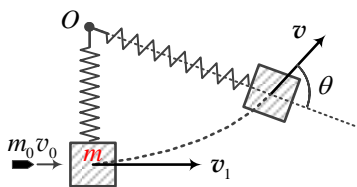
3.37 A、B 两个滑冰运动员, 他们的质量各为 60kg , 各以 $5.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率在相距 6.0 m 的两条平行线上相对滑行。当他们即将交错而过时, 同时抓住一根长为 6.0 m 的轻绳的一端, 因而绕他们的对称中心 O 点做圆周运动。若将二人视为一个质点系, 并忽略冰面上的摩擦阻力, 试求:



习题3.34图

- (1) 两人拉绳前, 系统对 O 点总角动量的大小和方向;
- (2) 开始转圈后, 若两人同时用力收绳, 使运动半径逐渐减小。当两人转圈的半径减小为 1.5 m 时, 他们的速率是多少?
- (3) 在上述过程中, 两人的拉力做的总功是多少?

3.38 如图所示, 在光滑的水平桌面上, 放着一个质量为 m 的木块, 木块与一个劲度系数为 k 、原长为 l_0 的轻弹簧相连, 弹簧的另一端固定于桌面上的 O 点, 开始时弹簧无伸长。有一质量为 m 的子弹以速度 \mathbf{v}_0 垂直于弹簧射向木块 m , 并嵌入木块中。试求: 当弹簧的长度变为 l ($l > l_0$) 时木块的速度 \mathbf{v} , 以及速度方向与拉伸方向之间的夹角 θ 。



习题 3.35图