武汉大学2018-2019学年第二学期期末考试

高等数学（微积分）A2（A卷解答）

1、（10分）已知$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，试求以向量$\vec{A}=5\vec{a}+2\vec{b},\vec{B}=\vec{a}-3\vec{b}$为边的平行四边形的面积。

解 $S=|\vec{A}\times\vec{B}|=|(5\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-3\vec{b})|=|5\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{a}-15\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{b}|=|17\vec{b}\times\vec{a}|$

$=17|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=17\times2\times3\times\dfrac{1}{2}=51$ 10分

2、（10分）计算极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\tan(xy^2)}{x^2+y^2}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\tan(xy^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\dfrac{\tan(xy^2)}{xy^2}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2})$ 而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\tan(xy^2)}{xy^2}=1$ 5分

又 $0\le|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}|\le|x|$ 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0$ 故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\tan(xy^2)}{x^2+y^2}=0$ 10分

3、（10分）设函数$z=f(xy,g(x))$，函数f具有二阶连续偏导数，函数$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$，求$\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}|_{\substack{x=1\\y=1}}$

解 由复合函数偏导公式有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1y+f_2g'(x)$，$\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=f_1+xyf_{11}+xf_{21}g'(x)$ 5分

因为$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$，所以$g'(1)=0$

故有 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1(1,1)+f_{11}(1,1)$ 10分

4、（10分）计算二重积分$\iint\limits_D|xy|dxdy$，其中$D:x^2+y^2\le a^2\quad(0<a)$.

解 由对称性知，此积分等于在第一象限部分$D_1:0\le y\le\sqrt{a^2-x^2},0\le x\le a$的四倍，而在$D_1$上$|xy|=xy$. 故

$$\iint\limits_D|xy|dxdy=4\iint\limits_{D_1}xydxdy \quad 4分$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^a r^3dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta d(2\theta)\int_0^a r^3dr=2\cdot\frac{1}{4}a^4=\frac{1}{2}a^4. \quad 10分$$

5、（9分）确定λ，使直线$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$平行于空间曲线$x=t,y=t^2,z=\dfrac{1}{3}t^3$在$t=1$处的切线，并求直线$L$在平面$\pi_2$：$x-y+z-2=0$上的投影直线方程。

解 由已知条件直线的方向向量平行于空间曲线在已知点处的切线的方向向量，切线的方向向量为：$\vec{s}=\{1,2t,t^2\}|_{t=1}=\{1,2,1\}$，故有 $\lambda=1$ 3分

过直线的平面方程法向量为：$\vec{n}=\begin{bmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\{3,0,-3\}$，过直线的平面方程为：$\pi_2$: $x-z=0$

故所求投影直线方程为 $\begin{cases}x-z=0\\x-y+z-2=0\end{cases}$ 9分

6、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶连续的导数，满足 $f(0)=1$， $f(\frac{1}{2})=e^{-1}$ 且使曲线积分 $\int_L(f'(x)+6f(x))ydx+f'(x)dy$ 在全平面与积分路径无关，试确定函数 $f(x)$ 的解析式并计算曲线积分 $\int_{(1,0)}^{(2,3)}(f'(x)+6f(x))ydx+f'(x)dy$.

解 由曲线积分与积分路径无关知 $f''(x)=6f(x)+f'(x)$， $r^2-r-6=0\Rightarrow r_1=3,r_2=-2$

有 $f(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$ 由 $f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=e^{-1}$ 知 $c_1=0,c_2=1$ 故 $f(x)=e^{-2x}$ 5 分

故有 $\int_{(1,0)}^{(2,3)}(f'(x)+6f(x))ydx+f'(x)dy=\int_{(1,0)}^{(2,3)}4ye^{-2x}dx-2e^{-2x}dy$

$=\int_{(1,0)}^{(2,3)}d(-2ye^{-2x})=(-2ye^{-2x})\big|_{(1,0)}^{(2,3)}=6e^{-4}$ 10 分

7、（9 分）设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}(x-1)^n$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(1)$ 的和。

解 由 $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$

又 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}(x-1)^n$，可知 $f^{(n)}(1)=\frac{(-1)^n}{n!}\quad(n=1,2,\cdots)$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(1)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}-1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}-1=e^{-1}-1$ 9 分

8、设有椭球面Σ：$z=2\sqrt{1-\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}}$.

（1）（8 分）设点 $M(x,y)$ 为 Σ 在 xoy 面投影域内一点，求函数 z 在点 $M(x,y)$ 处的梯度。

（2）（10 分）在第一卦限内作椭球面 Σ 的一张切平面，使得该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求切点坐标。

（3）（8 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}yz^2dzdx+xy^2dydz+zx^2dxdy$ 其中 Σ 是上半椭球面的上侧。

解 （1）函数 z 在点 $M(x,y)$ 处的梯度为：

$$\mathrm{grad}z=\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\}=\{\frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}}},\frac{-2y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}}}\}$$ 8 分

（2）设所求切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ $(0<x_0<2,0<y_0<3,0<z_0<2)$ 椭球面在该点的切平面为 $\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{9}+\frac{zz_0}{4}=1$ 化为截距式为 $\frac{x}{\frac{4}{x_0}}+\frac{y}{\frac{9}{y_0}}+\frac{z}{\frac{4}{z_0}}=1$

四面体的体积为 $V=\frac{144}{6x_0y_0z_0}=\frac{24}{x_0y_0z_0}$ 4 分

求 V 的最小值，即求函数 xyz 的最大值，作拉格朗日乘数函数

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1)$$

解方程组 $F_x=yz+\lambda\frac{x}{2}=0$，$F_y=xz+\lambda\frac{2y}{9}=0$，$F_z=xy+\lambda\frac{z}{2}=0$ ，

$F_\lambda=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ 得唯一解组 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$y=\sqrt{3}$，$z=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

故所求切点为（$\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}$） 10 分

（3）解 补面 Σ_1：$z=0$ 下侧，由 Gauss 公式

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} yz^2dzdx+xy^2dydz+zx^2dxdy+\iint\limits_{\Sigma_1} yz^2dzdx+xy^2dydz+zx^2dxdy$$

$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+0$ 其中 $\Omega:\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}\le 1 且 z\ge 0$ 4 分

由广义求坐标 $\begin{cases} x=2r\cos\theta\sin\varphi \\ y=3r\sin\theta\sin\varphi \\ z=2r\cos\varphi \end{cases}$ Ω：$0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$$dxdydz=12r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=12\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{96}{15}\pi$$

由轮换对称性，有 $\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{96}{15}\pi$ $\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{216}{15}\pi$

故 $I=\iint\limits_{\Sigma} yz^2dzdx+xy^2dydz+zx^2dxdy=\frac{408}{15}\pi$ 8 分

9、（6 分）求证：当 $0<x<1$ 时，对任何自然数 n，有 $\sum_{k=1}^{n}x^k(1-x)^{2k}\le\frac{4}{23}$.

证明 问题归结为求函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)^{2n}$ 的最大值。

由 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)^{2n}=\frac{1}{1-x(1-x)^2}-1\quad(0<x<1)$

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)^{2n}=\frac{(1-x)(1-3x)}{(1-x(1-x)^2)^2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

当 $x<\frac{1}{3}$ 时，$S'(x)>0$，当 $x>\frac{1}{3}$ 时，$S'(x)<0$，故当 $x=\frac{1}{3}$ 为最大值点，

且 $S(\frac{1}{3})=\frac{4}{23}$，所以有 $\sum_{k=1}^{n}x^k(1-x)^{2k}\le\frac{4}{23}$ 6 分