武汉大学 2010-2011 学年第二学期

《高等数学 B2》期中考试试卷解

一、(6') 设 $(a\times b)\cdot c=2$，求 $[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)$。

解、$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=(a\times b+a\times c+b\times c)\cdot(c+a)=[a,b,c]+[b,c,a]=4$。

二、(10') 求过点 $(-1,2,-3)$，且平行于平面 $6x-2y-3z+1=0$，又与直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$ 相交的直线方程。

解、设与直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$ 的交点为 $(1+3t,-1+2t,3-5t)$。则

$$\vec{s}=\{2+3t,-3+2t,6-5t\},6(2+3t)-2(-3+2t)-3(6-5t)=0$$

解得 $t=0,\vec{s}=\{2,-3,6\}$。所求直线方程：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$。

三、(12') 讨论 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性,可导性和可微性.

解、当 $(x,y)\neq(0,0)$，$0\le|f(x,y)|=\left|xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}\left|x^2-y^2\right|$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{2}\left|x^2-y^2\right|=0$，

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$。故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

$\varphi(x)=f(x,0)\equiv0,\psi(y)=f(0,y)\equiv0$，$f_x(0,0)=\varphi'(0)=0,f_y(0,0)=\psi'(0)=0$ 都存在。

令 $y=x+kx^2$，则

$$0\le\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|xy\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|\le\frac{1}{2}\left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，所以在 $(0,0)$ 点，$\Delta f=0\Delta x+0\Delta y+\circ\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$。故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

四、(10') 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2$，

$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$。

解、$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=3\varphi^2(1)\varphi'(1)$，$\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$，

$\varphi'(1)=f_1(1,f(1,1))+f_2(1,f(1,1))\left(f_1(1,1)+f_2(1,1)\right)=2+3(2+3)=17$，

$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=51$。

五、(8’) 设函数$u=f(x,y,z)$有连续偏导数，且$z=z(x,y)$由方程$xe^x+ye^y-ze^z=0$所确定，求du.

解、由方程$xe^x+ye^y-ze^z=0$，$e^xdx+xe^xdx+e^ydy+ye^ydy-e^zdz-ze^zdz=0$，

$dz=\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}dx+\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}dy$。所以，

$du=f_1dx+f_2dy+f_3dz=\left(f_1+\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}f_3\right)dx+\left(f_2+\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}f_3\right)dy$。

六、(10’) 设函数$z=f(x,y)=x^3+mx^2+2pxy+ny^2+\frac{2}{n}(px+ny)(n\neq 0)$. 试证当$m\cdot n\neq p^2$时，函数$z=f(x,y)$有且只有一个极值；又若$n<0$时，这个极值必为最大值。

证、$f(x,y)$在R^2上到处可导。解下列方程组得$J_1\left(0,-\frac{1}{n}\right),J_2\left(\frac{2(p^2-mn)}{3n},\frac{2pmn-2p^3-3n}{3n^2}\right)$。

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+2mx+2py+\frac{2p}{n}=0 \\ f_y(x,y)=2px+2ny+2=0 \end{cases}$$

$f_{xx}(x,y)=6x+2m, f_{xy}(x,y)=2p, f_{yy}(x,y)=2n$。$A(J_1)=2m$，$B(J_1)=B(J_2)=2p$，

$C(J_1)=C(J_2)=2n$，$A(J_2)=\frac{4p^2-2mn}{n}$，$\Delta(J_1)=4(mn-p^2),\Delta(J_2)=4(p^2-mn)$。

当$m\cdot n\neq p^2$时，$\Delta(J_1)$和$\Delta(J_2)$有且只有一个为正数，故此时函数$z=f(x,y)$有且只有一个极值。

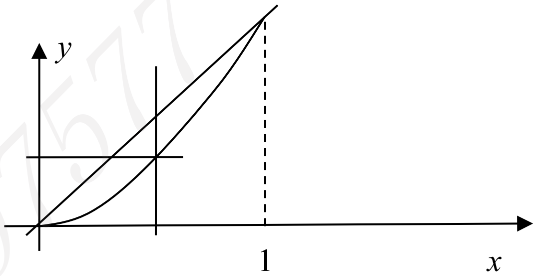
设加之$n<0$。则$C(J_1)=C(J_2)=2n<0$，从而在极值点J_i $A(J_i)<0$，此极值点

$f(x,y)$ 在 R^2 上唯一的极大值点。故这个极值必为 $f(x,y)$ 的最大值。

七、(14') 交换下列积分次序：

1) $\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx$；　2) $\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$ (先对 x).

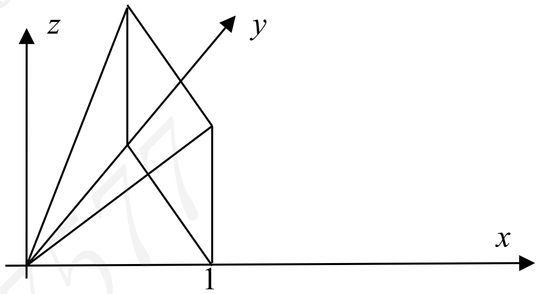
解、1）作草图如右。根据右图，



$$\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$$

2）作草图如右。根据右图，

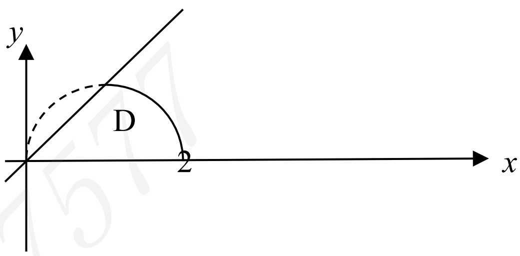


$$\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1dy\int_0^{y}dz\int_0^{1-y}f(x,y,z)dx$$

八、(10') 计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le x,x^2+y^2\le 2x\}$.

解、作草图如右。根据右图，



$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2d\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{20}{9\sqrt{2}}$$

九、(10') 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega(x+z)dV$, 其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成。

解、$\iiint\limits_\Omega(x+z)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1(r\sin\varphi\cos\theta+r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi)\sin\varphi\frac{1}{4}r^4\Big|_{r=0}^{r=1}d\varphi$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi \quad 。$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\cos\theta\left(\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)+\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\cos\theta\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\right]d\theta=\frac{\pi}{8}$$

十、(10') 已知点 $O(0,0)$ 及点 $A(1,1)$，且曲线积分

$$I=\int_{\overset{\frown}{OA}}(ax\cos y-y^2\sin x)dx+(by\cos x-x^2\sin y)dy$$

与路径无关，试确定常数 a,b，并求 I.

解、$P=ax\cos y-y^2\sin x, Q=by\cos x-x^2\sin y, \frac{\partial Q}{\partial x}=-by\sin x-2x\sin y,$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-ax\sin y-2y\sin x$。由于曲线积分与路径无关，$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，得 $a=b=2$。

$$I=\int_{\overset{\frown}{OA}}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy=\int_0^1(4x\cos x-2x^2\sin x)dx=2\cos 1$$