

第 4 章 刚体力学

前三章我们讨论了质点和质点系的力学规律。然而，在实际问题中，如电机转子的转动、炮弹的自旋、车轮的滚动、船舶在水中的颠簸以及起重机或桥梁的平衡等问题时，往往需要考虑物体的形状、大小以及它们的变化。但是，把形状和大小以及它们的变化都考虑在内，会使问题变得相当复杂。值得庆幸的是，在很多情况中，固体在受力和运动过程中变形很小，基本上保持原来的大小和形状不变，此时将形变忽略不计对研究结果无明显影响。

所谓**刚体**（rigid body）是指**在任何情况下形状大小都不发生变化的物体**，它是力学中的又一个理想模型。其特点是：在运动过程中，刚体上所有质元之间的距离始终保持不变，而且，作用在刚体各个部分之间的内力，在刚体的整体运动中不起作用。

从本质上来说，刚体是一个特殊的质点系，所以本章以质点和质点系的力学规律为基础，研究刚体力学的基本规律，重点讨论刚体的定轴转动，同时还要讨论刚体的平面平行运动和进动，为进一步研究更复杂的机械运动奠定基础。

§ 4.1 刚体的基本运动

刚体可以有各种不同的机械运动形式，本节我们只介绍刚体的几种基本运动。

1 平动

在刚体的运动过程中，如果刚体上任意两点的连线始终保持平行。这样的运动就称为刚体的**平动**

（translation）。图 4.1 为刚体平动的一种情况。此外，电梯的升降、气缸中活塞的运动、刨床上刀具的运动等也都是平动的例子。刚体做平动时，其特点是：

刚体上各质元在任意相同的时间内具有相同的位移、速度和加速度。各质元运动轨迹的形状也相同。刚体上任一点的运动都以可代表整个刚体的运动。因此，刚体平动时可用质点力学的规律来处理。

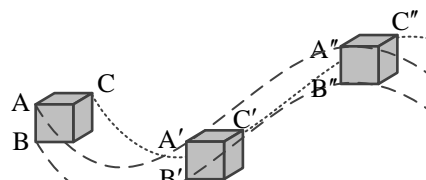


图4.1 刚体的平动

2 定轴转动

如果刚体在运动过程中，刚体上所有质点都在绕同一直线做圆周运动，这样的运动称为刚体的**转动**（rotation），这一直线称为**转轴**。如果在转动过程中，转轴的位置固定不动，则称为**定轴转动**（fixed-axis rotation）。例如机器上飞轮的转动、钟表指针的转动、电机转子的转动、以及门的开或关等都是定轴转动。

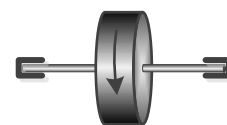


图4.2 飞轮的定轴转动

3 平面平行运动

如果刚体在运动过程中，刚体上所有质点都在与一个固定平面平行的平面内运动，这种运动称为**刚体的平面平行运动**（plane-parallel motion）。例如当圆柱体在水平地面上滚动时、或者从一个斜坡上滚下时、汽车向前方行驶时车轮的运动等都是平面平行运动。

4 定点转动

如果刚体在转动过程中，轴上的某一点是固定不动的，而转轴的方向随时间在不停地变化，这样的运动称为刚体的**定点转动**（rotation around a fixed point）。例如雷达天线的转动、陀螺的转动（如图 4.3 所示）等等。



图4.3 陀螺的定点转动

5 一般运动

刚体的一般运动尽管很复杂，但是都可以看成是平动和转动这两种基本运动的叠加。例如运动会上铁饼的运动、炮弹的飞行运动等，都可以看成是刚体质心的平动和绕质心的转动这两种运动的叠加。

由以上分析可知，平动和定轴转动是刚体最简单、最基本的运动形式，刚体的平动与质点的运动相当，不必另外讨论。下面我们首先讨论刚体的定轴转动。

§ 4.2 刚体定轴转动的描述

4.2.1 刚体定轴转动的角速度及角加速度

刚体做定轴转动时，刚体上的各质元都在各自的转动平面内做半径不同的圆周运动，因此各质元的线速度、加速度一般是不同的，但是它们在任意相同的时间内绕轴转过的角度是相同的。因此，在描述刚体的定轴转动时，采用角量描述最简单。

描述刚体的运动，首先要确定刚体的位置。在定轴转动的情况下，转轴已固定（如图 4.4 所示）。可在刚体上任取一质元 P 为代表点，作一条过 P 点到转轴的垂线，垂足 O 就是 P 点绕轴做圆周运动的圆心。在刚体上截取一个包含 OP 、垂直于转轴的平面，该平面称为**转动平面**。在此平面上取一个相对于参考系静止的坐标轴 Ox 为参考方向。显然，在某一时刻，质元 P 的位置可以用连线 OP 与 x 轴之间的夹角 θ 来表示，从而也就确定了刚体的位置。

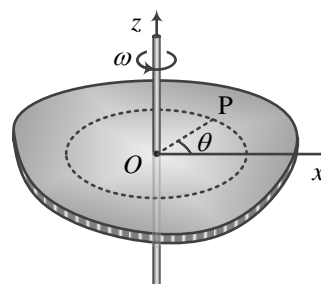


图4.4 刚体定轴转动的角量表示

若以 $d\theta$ 表示刚体在 dt 时间内绕轴转过的角位移，则刚体做定轴转动时角速度的大小为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (4.1)$$

我们知道，角速度和无限小的角位移都是矢量，其方向可以通过右手螺旋法则确定。如图 4.5 所示。

在定轴转动中，角加速度的大小定义为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4.2)$$

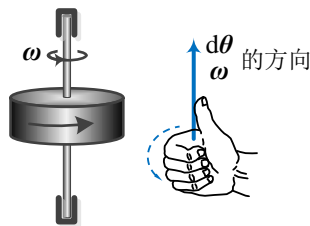


图4.5 角速度矢量
右手螺旋法则

由于角加速度是矢量，其方向是角速度增量的方向。不难看出，在刚体的定轴转动中，角速度的方向永远沿转轴方向，所以角加速度的方向同样沿转轴方向，当转动速度逐渐增大时，角加速度与角速度的方向相同，当转速逐渐减小时，角加速度与角速度方向相反。

在处理刚体的定轴转动问题时，人们通常先规定转轴的正方向，然后将角速度 ω 和角加速度 α 的方向用正负号来表示，当 ω 、 α 的实际方向与转轴正方向相同时，取正值，否则取负值，这与在质点的直线运动中对速度和加速度的处理方法类似。

4.2.2 匀变速转动的公式

刚体做匀变速转动的公式与质点做匀变速直线运动的公式完全相似，可以表示为

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (4.3a)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (4.3b)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (4.3c)$$

式(4.3a)、式(4.3b)和式(4.3c)中的 θ_0 、 ω_0 ，分别是 $t=0$ 时的角位置和角速度。

4.2.3 角量与线量的关系

刚体在定轴转动时，刚体上的任意一点都在绕轴做圆周运动。假设刚体上一点 P 到转轴的距离为 r ，则该点绕轴做圆周运动时的线量和角量的关系为

$$v = r\omega \quad (4.4a)$$

$$a_n = r\omega^2 \quad (4.4b)$$

$$a_\tau = r\alpha \quad (4.4c)$$

§ 4.3 力矩 转动定律 转动惯量

上一节讨论了刚体定轴转动的运动学规律，不涉及引起转动的原因。本节主要研究刚体绕定轴转动的动力学规律，确定刚体绕定轴转动时力矩与角加速度的关系，并讨论转动惯量的概念。

4.3.1 力矩

经验表明，一个静止的刚体，要使其转动，必须施以力矩的作用。力矩的概念在 § 3.6 中已经介绍过，在这里我们要在力对参考点的力矩基础上，讨论力对转轴的力矩，也就是能够让刚体的转动状态发生变化（即使刚体获得角加速度）的力矩。

实验指出，对于一个正在绕固定轴转动的刚体，在外力的作用下，其转动状态有时会发生变化（即 $\alpha \neq 0$ ），有时不会发生变化（即 $\alpha = 0$ ）。刚体的转动状态是否发生变化，不仅与力的大小和方向有关，而且还与力的作用点有关。

如图 4.6 所示，在一个绕固定轴（ Oz 轴）转动的刚体上，假设有一个外力 \mathbf{F} 作用于 P 点， P 点到转轴的距离为 r ，为简单起见，还假定 O 、 P 在同一个转动平面内，即 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ 。由日常生活经验可以知道，平行于转轴方向的分力 \mathbf{F}_{\parallel} 对刚体的定轴转动是没有影响的，只有垂直于转轴的分力 \mathbf{F}_{\perp} 才可使刚体的转动状态发生变化。因此外力 \mathbf{F} 对固定转轴（ Oz 轴）的力矩大小为

$$M_z = F_{\perp} r \sin \theta = F_{\perp} d \quad (4.5a)$$

M_z 就称为力 \mathbf{F} 对转轴（ Oz 轴）的力矩。式中 θ 是 \mathbf{r} 与 \mathbf{F}_{\perp} 之间的夹角， $d = r \sin \theta$ 是转轴 Oz 到 \mathbf{F}_{\perp} 的作用线的垂直距离，通常叫做力臂。力对轴的力矩也是一个矢量，其方向仍然可以用右手螺旋法则来确定。如果用矢量式表示，则有

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\perp} \quad (4.5b)$$

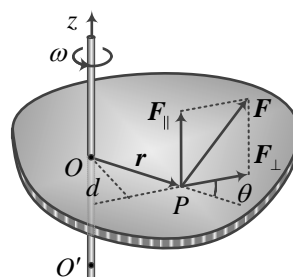


图4.6 力对轴的力矩

可以证明， \mathbf{M}_z 实际上是力 \mathbf{F} 对轴线上任一点 O' 的力矩 $\mathbf{M}_{O'}$ 在 Oz 轴上的一个分量。在刚体定轴转动中，用到的只是这个分量，而不是 $\mathbf{M}_{O'}$ ，而 \mathbf{F}_{\perp} 也只是外力 \mathbf{F} 在转动平面内的一个分力。

不难看出， \mathbf{F} 对轴的力矩 M_z 的方向一定沿 Oz 轴，当 M_z 的方向与 z 轴的正方向相同时， M_z 取正值，反之取负值。

在定轴转动中，如果有几个外力同时作用在刚体上，它们共同作用的效果相当于一个力矩的作用效果，这个力矩叫做这几个力的合力矩。实验指出，合力矩的大小等于这几个力的力矩的代数和（严格来讲是矢量和）。如图 4.7 所示，假设 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 和 \mathbf{F}_3 ，且三个力的方向都在刚体的转动平面内，则三个力的合力矩的大小为

$$M_z = F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3 \quad (4.6)$$

式 (4.6) 中正负号是根据力矩的方向与转轴正方向的关系

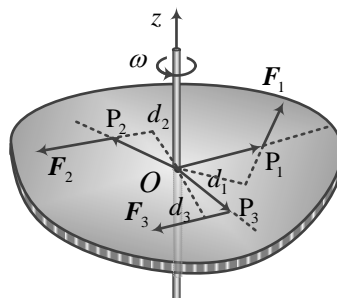


图4.7 刚体上的合外力矩

系确定的，当力矩的方向与转轴（ Oz ）的正方向相同时取正，否则取负； d_1 、 d_2 、 d_3 分别是三个力的力臂。

4.3.2 刚体的定轴转动定律

实验表明，刚体在定轴转动时，如果受到一个不为零的合外力矩的作用，则刚体的转动状态就会发生变化，或者说刚体就会获得一个不为零的角加速度。刚体角加速度 α 的大小与刚体受到的合外力矩 M_z 的大小成正比，与描述刚体转动时惯性大小的物理量——称为转动惯量（moment of inertia） I 的大小成反比，方向与合外力矩 M_z 的方向一致，即

$$\alpha = \frac{M_z}{I} \quad \text{或} \quad M_z = I\alpha \quad (4.7a)$$

这称为刚体的定轴转动定理。为了简化表示，通常可以省略式中的下标 z ，同时考虑到 M_z 和 α 的方向只能沿着转轴方向，所以式（4.7a）可简写为

$$\alpha = \frac{M}{I} \quad \text{或} \quad M = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} \quad (4.7b)$$

式（4.7）是刚体定轴转动定律的数学表达式。

刚体的定轴转动定律，可以用牛顿运动定律给予严格地证明，参见本章第 4.3.4 节。

4.3.3 转动惯量

1、转动惯量的物理意义

如果将转动定律的数学表达式 $M_z = I\alpha$ 和牛顿第二定律的数学表达式 $F = ma$ 作比较，可以看出，两者不仅在数学形式上完全一致，而且各量的物理意义也一一对应，其中 m 是物体的质量，它是描述物体平动时惯性大小的物理量；而 I 是转动惯量，由类比可知，它是描述刚体转动时转动惯性大小的物理量。刚体的转动惯性越大，其转动惯量 I 也越大。

2、转动惯量的计算

前面讲过，刚体就是一个质点系，其中各质点之间的相对位置是固定不变的。为此，可以将绕固定轴（ Oz 轴）转动的刚体看作是许多质量元 Δm_i （ $i=1, 2, 3, \dots$ ）的集合，转轴到质量元 Δm_i 的垂直距离为 r_i ，则该刚体对 Oz 轴的转动惯量定义为

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i \quad (4.8)$$

其中 $r_i^2 \Delta m_i$ 是第 i 个质量元对转动惯量的贡献。

对于质量连续分布的刚体，需要用积分来计算。首先在刚体上任取一个体积为 dV 的质量元，其质量 $dm = \rho dV$ ，式中 ρ 是该质量元的密度。假设转轴到该质量元的距离为 r ，则该质量元对转轴的转动惯量为

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho dV \quad (4.9a)$$

所以整个刚体的转动惯量为

$$I = \int dI = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV \quad (4.9b)$$

式(4.8)或(4.9)就是刚体转动惯量的一般计算式。

在国际单位制中,转动惯量的单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

例 4.1 如图 4.8 所示,在一根长为 L 的轻杆两端分别固定了两个质量分别为 m_1 和 m_2 的小球,该杆可绕通过杆上 O 点的竖直轴转动, m_1 到 O 的距离为 $L/3$, 杆与竖直轴的夹角为 θ 。试求该系统对竖直轴的转动惯量。

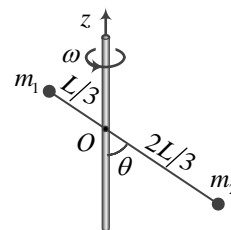


图4.8 例题4.1图

解: 由题意可知小球 m_1 和 m_2 到转轴的垂直距离分别为

$r_1 = \frac{L}{3} \sin \theta$ 和 $r_2 = \frac{2L}{3} \sin \theta$, 所以, 该系统对竖直轴的转动惯量为

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 = \frac{L^2 \sin^2 \theta}{9} m_1 + \frac{4L^2 \sin^2 \theta}{9} m_2$$

结果表明, 该系统的转动惯量与杆与轴的夹角有关

例 4.2 已知匀质细棒的质量为 m , 长为 L 。

(1) 计算该均质细棒绕过其中点并与棒垂直的固定轴的转动惯量;

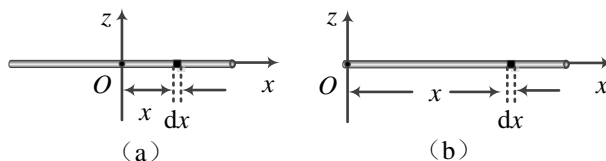


图4.9 例题4.2图

(2) 若将轴的位置平移到棒的一端, 其转动惯量又为多少?

解: (1) 如图 4.9 (a) 所示, 沿直棒建立 x 坐标轴, 取棒与轴的交点为坐标原点 O 。在棒上距离 O 点为 x 处, 取一长为 dx 的质量元 dm , 则该质量元对轴的转动惯量为

$$dI = x^2 dm = x^2 \frac{m}{L} dx$$

于是整个细棒的转动惯量为

$$I = \int dI = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{1}{12} mL^2 \quad (4.10)$$

(2) 若将轴的位置平移到棒的一端, 同时将坐标原点也移到这一端, 如图 4.9 (b) 所示, 则转动惯量的计算过程与 (1) 相同, 只是积分限不一样而已, 即

$$I = \int dI = \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{1}{3} mL^2 \quad (4.11)$$

计算结果表明同一个刚体的转动惯量与转轴的位置有关。显然如果细棒以其自身为轴进行转动, 则转动惯量为零。

例 4.3 计算一个半径为 R ，质量为 m 均质细圆环绕过圆心并与环面垂直的固定轴的转动惯量。

解 如图 4.10 所示，在细圆环上任取一个质量元 dm ，则该质量元对轴的转动惯量为

$$dI = R^2 dm$$

考虑到所有质元到轴的距离都是 R ，所以整个细圆环的转动惯量为

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

例 4.4 如图 4.11 所示，计算一个质量为 m ，半径为 R 的匀质圆盘绕通过盘心 O 并与盘面垂直的固定轴的转动惯量。

解：由题意可知，该圆盘单位面积上的质量（即质量的面密度）为

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

将圆盘看作一系列半径不同的同心细圆环的叠加，任取一个半径为 r 、宽度为 dr 的细圆环，其面积为 $ds = 2\pi r dr$ ，质量为 $dm = \sigma 2\pi r dr$ ，则由例 4.3 可知，该细圆环对转轴的转动惯量为

$$dI = r^2 dm = \sigma 2\pi r^3 dr = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

所以整个圆盘的转动惯量为

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2 \quad (4.12)$$

可以证明，此式也适用于匀质圆柱体绕其中心轴转动的情况。

表 4.1 给出了几种常见刚体的转动惯量。通过上述几个例子及表 4.1 可以看出，刚体的转动惯量不仅与刚体的质量分布和总质量有关，还与转轴的位置和取向有关，而且同一个刚体对不同转轴的转动惯量一般是不同的，在套用转动惯量公式时，不仅要看刚体的形状、质量分布，还要看转轴的位置及取向。

3 平行轴定理 正交轴定理

(1) 平行轴定理

前面已经指出，同一个刚体对于不同的转轴，刚体的转动惯量不同。可以证明，如果几个轴相互平行，其中的 z 轴通过刚体的质心 C ，如图 4.12 所示，刚体对此轴的转动惯量为最小。若用 I_C 表示刚体对通过质心的 z 轴的转动惯量，则刚体对另一个与 z' 轴平行并相距为 d 的 z' 轴的转动惯量则为

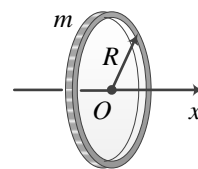


图4.10 例题4.3图

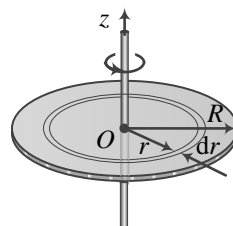


图4.11 例题4.4图

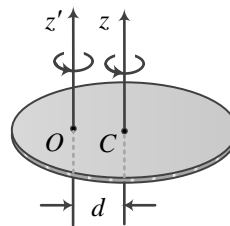


图4.12 平行轴定理

$$I = I_C + md^2 \quad (4.13)$$

此即为**平行轴定理**。

利用平行轴定理，可以求出一根长为 L ，质量为 m 的匀质细棒绕通过其端点并与棒垂直的轴的转动惯量为 $I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$ 。这与例 4.2 中用积分法得到的结论是相同的。

(2) 正交轴定理

对于薄板状刚体，如图 4.13 所示，可以证明：刚体对板面内相互垂直的两个定轴的转动惯量之和，等于该刚体对通过两轴交点且垂直于板面的轴的转动惯量，即

$$I_z = I_x + I_y \quad (4.14)$$

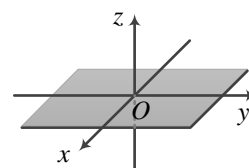
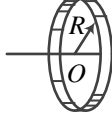

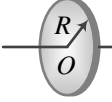
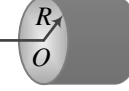
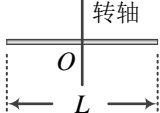
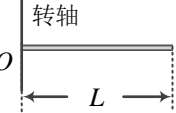
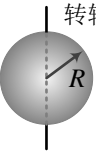
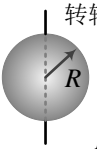


图4.13 垂直轴定理

上式称为**正交轴定理**。应用正交轴定理很容易得出一细圆环对其

直径的转动惯量为 $\frac{1}{2}mR^2$ ，一个匀质薄圆盘对其直径的转动惯量为 $\frac{1}{4}mR^2$ 等等。

表4.1 几种常见刚体的转动惯量

 <p>圆环 通过环心并 与盘面垂直</p> $I = mR^2$	 <p>圆环 沿圆环直径</p> $I = \frac{1}{2}mR^2$
 <p>圆盘 通过盘心垂 直于盘面</p> $I = \frac{1}{2}mR^2$	 <p>圆柱体 圆柱体的轴 线</p> $I = \frac{1}{2}mR^2$
 <p>细棒 通过棒的质 心与棒垂直</p> $I = \frac{1}{12}mL^2$	 <p>细棒 通过棒的端 点与棒垂直</p> $I = \frac{1}{3}mL^2$
 <p>薄球壳 沿直径</p> $I = \frac{2}{3}mR^2$	 <p>实心球体 沿直径</p> $I = \frac{2}{5}mR^2$

*4.3.4 刚体定轴转动定律的证明

刚体的定轴转动定律可以用牛顿第二定律给予证明。图 4.14 表示了一个绕固定轴 Oz 转动的刚体。如

前所述，刚体就是一个质点系。为此考虑在刚体上 P 点处的一个质元，其质量为 Δm_i ，转轴到该质元的距离为 $OP = r_i$ （相应的位矢为 \mathbf{r}_i ）。设刚体绕定轴转动的角速度和角加速度分别为 ω 和 α ，P 处的质元所受的外力为 \mathbf{F}_i ，内力为 \mathbf{f}_i ，这里 \mathbf{f}_i 表示刚体中的其它所有质元对质元 P 的作用力的合力。为了简化讨论起见，假设外力 \mathbf{F}_i 和内力 \mathbf{f}_i 的方向都位于该质点所在的转动平面内（它们与位矢 \mathbf{r}_i 的夹角分别为 θ_i 和 φ_i ）。根据牛顿第二定律，有

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = \Delta m_i \mathbf{a}_i \quad (4.15)$$

式 (4.15) 中的 \mathbf{a}_i 是质元 P 的加速度。由于刚体做定轴转动时，所有质元都在绕转轴做圆周运动，为此只需讨论上式在圆周上的切向分量式，即

$$F_i \sin \theta_i + f_i \sin \varphi_i = \Delta m_i a_{it} = \Delta m_i r_i \alpha \quad (4.16)$$

式 (4.16) 中 $a_{it} = r\alpha$ 是质元 P 的切向加速度。在式 (4.16) 的两边分别乘上 r_i ，可得

$$F_i r_i \sin \theta_i + f_i r_i \sin \varphi_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha \quad (4.17)$$

式 (4.17) 左边的第一项是外力 \mathbf{F}_i 对转轴的力矩，第二项是内力 \mathbf{f}_i 对转轴的力矩。对组成刚体的所有质元来说，都可以写出与式 (4.17) 相应的式子。把这些式子全部相加，则有

$$\sum_i F_i r_i \sin \theta_i + \sum_i f_i r_i \sin \varphi_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \alpha \quad (4.18)$$

式 (4.18) 左边第二项表示刚体内所有内力的力矩之和，由于系统中内力总是成对出现的，可以证明，所有内力矩的矢量和一定为零，即 $\sum_i f_i r_i \sin \varphi_i = 0$ 。式 (4.18) 左边第一项就是刚体所受的所有外力对转轴 Oz 的力矩的代数和（严格来讲是矢量和），叫做合外力矩。若用 M_z 表示合外力矩，则式 (4.18) 可表示为

$$M_z = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \alpha = I_z \alpha \quad (4.19)$$

式中 $I_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ 就是刚体对转轴 Oz 的转动惯量。这就证明了刚体的定轴转动定律。

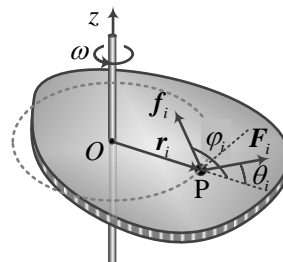


图4.14 转动定律推导用图

4.3.5 刚体定轴转动定律的应用

用刚体的定轴转动定律求解实际问题时，其解题步骤与用牛顿运动定律的解题步骤相似。即按照确定研究对象、弄清对象的运动规律、用隔离体法进行受力分析、列方程（组）、解方程（组）、最后分析讨论的步骤进行。不过要特别注意的是：在受力分析时，不可将力的作用点平移到刚体的质心上，同时还要注意力矩、角速度、角加速度的方向，即正负。

例 4.5 如图 4.15 所示，一根长为 L ，质量为 m 的均匀细直棒、可绕通过其端点 O 的水平轴在竖直平面内自由转动。最初棒静止在水平位置，不计空气阻力，也不考虑轴上的摩擦阻力矩。试求当棒从水平位置由静止开始下摆到 θ 角时，棒的角速度。（已知棒对转轴的转

动惯量 $I = \frac{1}{3}mL^2$)。

解 棒在转动过程中始终只受两个力的作用，一个是重力 mg ，其作用点在棒的重心（或质心）上，方向向下；另一个是转轴对棒的作用力 N ，该力的方向通过转轴，故对轴的力矩为零。因此棒在转动过程中，受到的合外力矩就是重力矩。

可以证明，棒上各部分所受的重力对转轴的合力矩与将重力集中作用于重心 C 所产生的力矩一样，因而当棒与水平面的夹角为 θ 时，所受的合外力矩（即重力矩）为

$$M = \frac{L}{2}mg \cos \theta$$

由定轴转动定律可得棒的角加速度为

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{3g}{2L} \cos \theta$$

又

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

所以有

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3g}{2L} \cos \theta$$

将上式分离变量，并利用初始条件，取定积分

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g}{2L} \cos \theta d\theta$$

由此可得棒的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L} \sin \theta}$$

例 4.6 如图 4.16 (a) 所示，一定滑轮的质量为 m ，半径为 r ，转动惯量为 I 。通过一根轻绳在定滑轮两边各系一个质量为 m_1 和 m_2 ($m_1 > m_2$) 的物体，假设轻绳不可伸长、绳与滑轮间也无相对滑动。试求滑轮转动时的角加速度和绳中的张力。

解 本题属于连接体问题。首先对三个物体分别用隔离体法进行受力分析，画出三物体的受力分析图，如图 4.16 (b) 所示。这里需特别注意的是，

由于滑轮具有转动惯量，因此滑轮在加速转动时，轮两边绳中的张力一定不相等，即 $T_1 \neq T_2$ 。

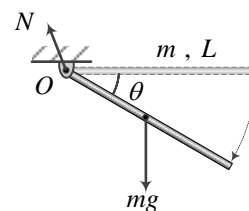


图4.15 例题4.5图

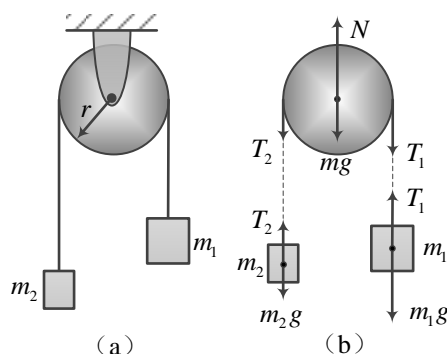


图4.16 例4.6图

又当 $m_1 > m_2$ 时, m_2 向上、 m_1 向下做加速运动, 滑轮沿顺时针方向加速转动。所以对于 m_1 、 m_2 用牛顿运动定律列方程, 有

$$\text{对 } m_1: \quad m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

$$\text{对 } m_2: \quad T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

对滑轮用转动定律列方程, 有

$$T_1 r - T_2 r = I \alpha$$

因轻绳不可伸长、且绳与轮无相对滑动, 所以

$$a_1 = a_2 = r \alpha$$

解此方程组可得

$$a = \frac{(m_1 - m_2) r^2 g}{(m_1 + m_2) r^2 + I}$$

$$\alpha = \frac{(m_1 - m_2) r g}{(m_1 + m_2) r^2 + I}$$

$$T_1 = \frac{(2m_2 r^2 + I) m_1 g}{(m_1 + m_2) r^2 + I} \quad T_2 = \frac{(2m_1 r^2 + I) m_2 g}{(m_1 + m_2) r^2 + I}$$

例 4.7 一半径为 R , 质量为 m 的匀质圆盘, 平放在粗糙的水平桌面上, 如图 4.17 所示。设圆盘与桌面间的滑动摩擦系数为 μ , 令圆盘最初以角速度 ω_0 绕通过中心且垂直于盘面的轴旋转。问它将经过多少时间才停止转动?

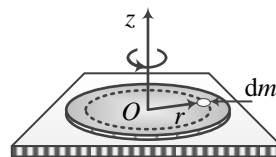


图4.17 例题4.7图

解 由于摩擦力不是集中作用于一点, 而是分布在整个圆盘与桌子的接触面上, 因此摩擦阻力矩的计算要用积分法。

由题意可知, 该匀质圆盘单位面积上的质量为 $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$ 。将圆盘看成是许多质元的集合, 任取一个距离转轴为 r 的质元, 其面积为 $dS = r dr d\theta$, 则该质元的质量为 $dm = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$, 其受到的摩擦力对转轴的阻力矩为

$$dM_f = r dF_f = r \mu g dm = \mu g \sigma r^2 dr d\theta$$

所以整个圆盘所受阻力矩就是

$$M_f = \int dM_f = \mu g \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} \mu g \sigma \pi R^3 = \frac{2}{3} \mu m g R$$

根据定轴转动定律, 同时注意到阻力矩使圆盘减速, 是负力矩, 所以圆盘的角加速度为

$$\alpha = -\frac{M_f}{I} = -\frac{2\mu m g R/3}{m R^2/2} = -\frac{4\mu g}{3R}$$

由匀变速转动的规律 $\omega = \omega_0 + \alpha t$, 可得当圆盘停止转动时所需的时间为

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \Big|_{\omega=0} = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

§ 4.4 刚体定轴转动的功能关系

在 § 3.3 中我们讨论了质点系的动能定理和功能原理，在研究刚体运动时，由于刚体自身也是一个质点系，所以关于质点系的动能定理、功能原理对刚体和“刚体+质点”组成的系统也同样适用。对于定轴转动的刚体，还可以导出一个更简便的关系式，并以此来描述刚体定轴转动的功能关系。

4.4.1 力矩的功

当质点在外力 \mathbf{F} 的作用下产生一段位移 $d\mathbf{r}$ 时，我们说力对质点做了功。同样当定轴转动的刚体在外力矩 \mathbf{M} 的作用下，转过一个角位移 $d\theta$ 时，我们同样可以说力矩对刚体做了功。

由于只有在刚体转动平面内的分力才能对轴产生力矩，为此我们假设作用于刚体上 P 点的外力 \mathbf{F} 的方向就在该转动平面内，转轴到质元 P 的矢径为 \mathbf{r} 。当刚体在该力 \mathbf{F} 的作用下，绕转轴 Oz 转过一个极小的角位移 $d\theta$ 时，质元 P 产生的元位移为 $d\mathbf{s}$ ，其大小为 $ds = R d\theta$ ，元位移 $d\mathbf{s}$ 与 \mathbf{r} 垂直，如图 4.18 所示。按照功的定义，力 \mathbf{F} 所做的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos(\pi/2 - \varphi) = Fr \sin \varphi d\theta$$

因为 $Fr \sin \varphi$ 恰好为力 \mathbf{F} 对转轴的力矩 M ，所以上式也可以写成

$$dA = M d\theta \quad (4.20)$$

由此看出，力对刚体所做的功，可以用这个力对转轴的力矩和刚体转过的角位移 $d\theta$ 的乘积表示出来。因此，常把上式称为**力矩的功**。如果刚体在力矩 M 的持续作用下由初始角位置 θ_0 转到任一角位置 θ ，在这个过程中，力矩 M 对刚体所做的总功为

$$A = \int dA = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta \quad (4.21)$$

式 (4.20) 和 (4.21) 就是力矩做功的计算式。

由式 (4.20)，还可得出力矩做功的瞬时功率为

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M \omega \quad (4.22)$$

力矩做功的正负和功率的正负可以通过力矩与角位移（或角速度）的方向来判断。当力矩的方向与刚体的角位移方向相同（ M 与 $d\theta$ 同号）时，力矩做正功；当力矩与角位移方向相反（ M 与 $d\theta$ 异号）时，力矩做负功。

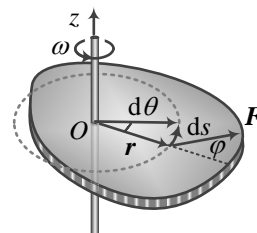


图4.18 力矩的功

4.4.2 转动动能

当刚体做定轴转动时，刚体上各质元的角速度 ω 相等而线速度各不相同。设其中第 i 个质元的质量为 Δm_i ，离转轴的垂直距离为 r_i ，如图4.19所示，则它的线速度为 $v_i = r_i \omega$ ，相应的动能为

$$\Delta E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 \quad (4.23)$$

整个刚体的动能就是所有质元的动能之和，即

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

因 $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ 为刚体的转动惯量，所以上式可以写为

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (4.24)$$

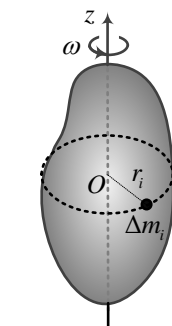


图4.19 刚体定轴转动的转动动能

式(4.24)就是刚体定轴转动的动能公式。

若将刚体定轴转动的转动动能公式 $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ 与质点的平动动能公式 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ 作比较，也可看出两者在数学形式上是相似的。

4.4.3 刚体定轴转动的动能定理

根据定轴转动定律

$$M = I \frac{d\omega}{dt} \quad (4.25)$$

在上式两边同时乘以 $d\theta$ ，有

$$M d\theta = I d\omega \frac{d\theta}{dt} = I \omega d\omega \quad (4.26)$$

若刚体在合外力矩的持续作用下，当角位置由 θ_1 变为 θ_2 时，相应的角速度由 ω_1 变为 ω_2 ，则在此过程中合外力矩对刚体所做的功为

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 \quad (4.27)$$

式(4.27)表明，合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量，这个关系式叫做刚体定轴转动的动能定理。

前面讲过，刚体自身就是一个质点系，所以对于一个既有质点、又有定轴转动的刚体所组成的“刚体+质点”系统，第3章中讲述的系统的功能原理和机械能守恒定律对于这样的系也是成立的。

例4.8 利用刚体定轴转动的动能定理和机械能守恒定律分别重新求解例4.5。

解：（用动能定理求解）由题意可知，当棒从水平位置转过角度 θ 时，重力矩所做的功为

$$A = \int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta mg \frac{L}{2} \cos \theta d\theta = mg \frac{L}{2} \sin \theta$$

再由动能定理，并注意到 $\omega_0 = 0$ ，可得

$$A = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

所以棒的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{2A}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin \theta}$$

（用机械能守恒定律求解）用机械能守恒定律求解时，**刚体的重力势能和它的全部质量集中在重心时所具有的势能一样**。所以，若取转轴所在位置为重力势能的零势能点，则有

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - mg \frac{L}{2} \sin \theta = 0$$

由此同样可以解的角速度 ω 。

例 4.9 如图 4.20 所示，一个半径为 R 、质量为 m 的匀质圆盘可绕过其中心 O 并与盘面垂直的水平轴自由转动，轮的边缘处镶有一与轮等质量的小球 A。初始时圆盘处于静止状态，小球 A 与盘心的连线与竖直线的夹角为 θ_0 。试求释放后，圆盘的角速度 ω 随 θ 角的函数关系。

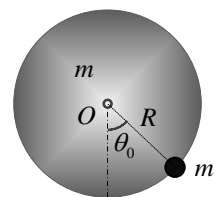


图4.20 例4.9图

解 由题意可知当小球 A 与盘心 O 的连线与竖直线的夹角为 θ 时，作用于小球 A 上的重力对转轴的力矩为

$$M = -mgR \sin \theta$$

式中“ $-$ ”号表示重力矩的方向（垂直盘面（纸面）向内），与角位移 $d\theta$ 的方向（垂直盘面向外）相反，当圆盘转过角位移 $d\theta$ 时，重力矩做的元功为

$$dA = M d\theta = -mgR \sin \theta d\theta$$

所以当圆盘从初始位置 θ_0 转到任意位置 θ 时，重力矩做的功为

$$A = \int dA = \int_{\theta_0}^{\theta} -mgR \sin \theta d\theta = mgR (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

可以证明，此重力矩做的功也可以用小球 A 的重力做功来表示。又整个系统对轴的转动惯量为

$$I = I_{\text{圆盘}} + I_{\text{小球}} = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

再由定轴转动的动能定理，可得

$$A = mgR(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

由此解得

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{4g}{3R}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

不难看出，圆盘被释放后， θ 的变化范围只能是： $[-\theta_0, \theta_0]$ ，即圆盘在 $\theta=0$ 附近往复运动。

§ 4.5 刚体的角动量 角动量定理 角动量守恒定律

在第三章中，我们已经学习过质点和质点系对参考点的角动量、角动量定理和角动量守恒定律。由于刚体本身就是一个质点系，所以质点系的角动量定理和角动量守恒定律对刚体来说同样是适用的。不过在刚体的定轴转动中，我们要讨论一种特殊情况，即刚体对转轴的角动量问题，就如同前面力对转轴的力矩问题一样。

4.5.1 刚体定轴转动的角动量及角动量定理

1、刚体对转轴的角动量

刚体做定轴转动时，刚体上的每个质元都在绕轴做圆周运动。假设刚体上 P 点处有一个质量为 Δm_i 的质元，该质元到转轴（即它的圆心 O）的垂直距离为 r_i ，如图 4.21 所示，则该质元对转轴（即它的圆心 O）的角动量 L_{zi} 大小为

$$L_{zi} = r_i \Delta m_i v_i = r_i^2 \Delta m_i \omega$$

式中 $\omega = v_i / r_i$ 是刚体定轴转动的角速度。 L_{zi} 的方向与角速度 ω 的方向相同，即沿转轴方向。可以证明：该质元对其圆心的角动量 L_{zi} 就是对轴线上任意参考点 O' 的角动量 L'_{zi} 沿转轴 Oz 方向的分量。我们将刚体上所有质元对转轴的角动量之和称为整个刚体对转轴的角动量，用 L_z 表示，即

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i r_i^2 \Delta m_i \omega = \left(\sum_i r_i^2 \Delta m_i \right) \omega = I_z \omega \quad (4.28a)$$

式中 $I_z = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$ 就是刚体对转轴的转动惯量。由于 L_z 的方向与 ω 的方向一致，所以若用矢量式表示，并略去下标“z”，则有

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (4.28b)$$

式（4.28）中 \mathbf{L} （或 L_z ）就是刚体对转轴的角动量。

2、刚体定轴转动的角动量定理

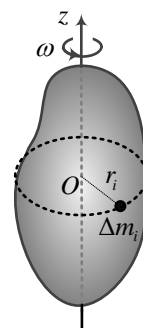


图4.21 刚体定轴转动的角动量

由于刚体是一个质点系，所以上一章中讲过的质点系对参考点的角动量定理

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \text{或} \quad \mathbf{M}dt = d\mathbf{L} \quad (4.29)$$

对于定轴转动的刚体来说仍然是成立的。假设刚体沿 Oz 轴转动，则式 (4.29) 在 z 轴上的分量式为

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) \quad \text{或} \quad M_z dt = dL_z = d(I_z\omega) \quad (4.30)$$

式中 M_z 就是刚体受到的对转轴的合外力矩。在实际应用时，可略去下标 z ，则上式简写为

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) \quad \text{或} \quad Mdt = dL = d(I\omega) \quad (4.31)$$

式 (4.31) 称为刚体定轴转动的**角动量定理的微分形式**。其中 Mdt 称作力矩在 dt 时间内的**冲量矩**。此式表明：作用于刚体上合外力矩的冲量矩等于刚体的角动量的增量；或者说作用于刚体上的合外力矩等于刚体的角动量对时间的变化率。

刚体的角动量定理也可以从刚体的转动定律导出。这是因为，当刚体的转动惯量不变时， $M = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt}$ 。但是角动量定理比转动定律的适用性更加普遍，它不仅适用于 I 不变的刚体，也适用于 I 可以变化的非刚体（如人体）以及“刚体+质点”组成的共轴系统；而转动定律只适用于刚体。

设有一转动惯量为 I 的刚体绕定轴转动，在合外力矩 M 的作用下，在时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内，其角速度由 ω_1 变为 ω_2 ，由式 (4.31) 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = \int_{L_1}^{L_2} dL = L_2 - L_1 = I\omega_2 - I\omega_1 \quad (4.32)$$

式 (4.32) 称为刚体定轴转动的**角动量定理的积分形式**。

例 4.10 如图 4.22 (a) 所示，两圆柱体 A、B 可绕各自的水平轴线自由转动，两轴互相平行，它们的转动惯量分别为 I_1 和 I_2 ，半径分别为 r_1 和 r_2 ，初始角速度分别为 $\omega_{10} = \omega_0$ 和 $\omega_{20} = 0$ ；现使两者侧面接触，因摩擦两圆柱体最终以相同的线速度转动，试求：

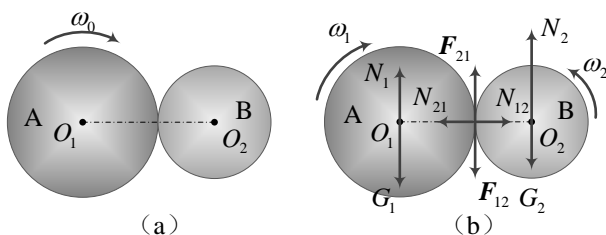


图4.22 例4.10图

- (1) 稳定后两者最终的角速度；
- (2) 在该过程中 A 圆柱对 B 圆柱的冲量矩。

解：(1) 在 A、B 接触并相对滑动的过程中，对 A、B 作受力分析图如图 4.22 (b) 所示。不难看出，两转轴 O_1 、 O_2 对圆柱体 A、B 的支持力 N_1 和 N_2 、两圆柱体受到的重力 G_1

和 \mathbf{G}_2 及两圆柱体之间的正压力 \mathbf{N}_{12} 和 \mathbf{N}_{21} 对各自转轴都没有力矩, 只有 A 对 B 及 B 对 A 的摩擦力 \mathbf{F}_{12} 和 \mathbf{F}_{21} 对转轴有力矩。假设经过时间 t , A、B 的角速度分别为 ω_1 和 ω_2 , 取 A、B 的角速度方向为各自转轴的正方向, 对 A、B 分别应用角动量定理, 有

$$\text{对 A:} \quad -\int_0^t r_1 F_{21} dt = I_1(\omega_1 - \omega_0) \quad (1)$$

$$\text{对 B:} \quad \int_0^t r_2 F_{12} dt = I_2\omega_2 - 0 \quad (2)$$

当 A、B 表面上的线速度相等, 即 $v_1 = v_2$ 时, 有

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad (3)$$

将式①两边乘上 r_2 , 式②两边乘上 r_1 , 然后相加, 同时注意到 $F_{12} = F_{21}$, 可得

$$r_2 I_1(\omega_1 - \omega_0) + r_1 I_2 \omega_2 = 0 \quad (4)$$

再将④与③联立, 可得

$$\omega_1 = \frac{I_1 r_2^2 \omega_0}{I_1 r_2^2 + I_2 r_1^2} \quad \omega_2 = \frac{I_1 r_1 r_2 \omega_0}{I_1 r_2^2 + I_2 r_1^2}$$

(2) 将式 ω_2 代入式②可得圆柱体 A 对圆柱体 B 的冲量矩为

$$\int_0^t r_2 F'_{12} dt = I_2 \omega_2 = \frac{I_1 I_2 r_1 r_2 \omega_0}{I_1 r_2^2 + I_2 r_1^2}$$

注意: 本题中圆柱体 A 与 B 各自绕其自身转轴转动, 且两转轴不在同一直线上, 所以 A、B 不是一个共轴系统, 只能对 A、B 分别用角动量定理求解。

4.5.2 刚体定轴转动的角动量守恒定律

由式 (4.31) 可以看出, 当刚体所受的合外力矩 $M=0$ 时, 可得

$$L = I\omega = \text{恒量} \quad (4.33)$$

式 (4.33) 表明, 如果刚体所受的外力对某个轴的合外力矩等于零, 或者不受外力矩的作用, 则刚体对该轴的角动量保持不变。这个结论称为刚体定轴转动的角动量守恒定律。

角动量守恒定律是自然界的三大基本守恒定律之一, 不论在宏观领域、还是在微观领域或宇观领域都适用。在日常生活中的许多现象和一些自然现象都可以用角动量守恒定律来解释。物体定轴转动的角动量守恒通常可分三种情况。

(1) 定轴转动的刚体

刚体在转动过程中, 如果受到的合外力矩为零, 则刚体的角动量守恒。由于角动量 $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ 是矢量, 又刚体的转动惯量也是恒定的, 所以当 \mathbf{L} 不变时, 不仅角速度的大小不变, 而且转轴的方向也恒定不变。这一现象有许多重要的应用, 例如用于惯性导航的回转定向仪 (如图 4.23) 就是其中的一例。它的核心装置就是置于万向支架上的一个质量很大、且具有

精确轴对称分布的转子（又称回转体），万向支架（又称常平架）由两个套在一起的、转轴互相垂直的圆环组成，回转轴与内环的转轴垂直。各轴承高度润滑，整个装置还可以置于真空室内，使转子在转动过程中不受任何外力矩的作用。根据角动量守恒定律，一旦转子高速转动以后，转子转轴的指向在空间永远保持不变，从而起到定向作用。在各类航海、航空、航天飞行器中，只需 3 个转轴互相垂直的回转仪，就能在浩瀚的海洋或太空中提供一套绝对的直角坐标系。

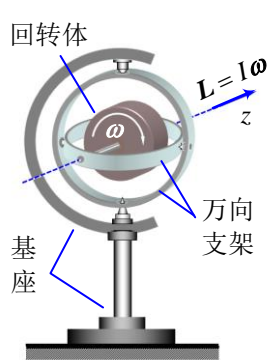


图 4.23 回转定向仪

（2）定轴转动的非刚体

如果物体上各部分到转轴的距离可变，这样的物体就是非刚体。人体就是典型的非刚体。当人体绕通过其质心的轴转动时，其转动惯量不是常数，是可变的。如果系统受合外力矩为零，则角动量守恒，即 $L = I\omega = \text{常数}$ 。当 I 减小时， ω 增大；反之 I 增大时， ω 减小。如图 4.24 所示，一人座在能绕竖直轴转动的转椅上、人的双手各握一个哑铃，她先平伸两臂，并在别人推动下使她和转椅一起以一定的角速度转动起来，当她收拢两臂后，会发现人和转台的转速加快，如果再伸出双臂，转速又变慢。这是因为以人和转椅为系统，在上述过程中没有外力矩作用，因而系统的角动量应保持不变。在人伸缩双臂时转动惯量发生了变化，所以系统的角速度就必然也会发生相应变化。类似的例子有很多，例如舞蹈演员、花样滑冰运动员、跳水运动员（如图 4.25 所示）等经常利用角动量守恒原理做出动作优美、精彩绝伦的高速旋转或翻滚表演。



图 4.24 茹科夫斯基登演示角动量守恒

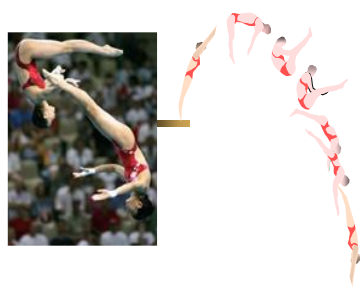


图4.25 跳水

角动量守恒定律在直升机飞行中也有重要应用。仔细观察任何一种直升机都有两个螺旋桨，一个给直升机提供升力和飞行动力，另一个（通常在飞机尾部）产生横向



图4.26新型国产直升机



图4.27 美军支努干直升机

推力，阻止机身绕自身轴旋转；而美军“支奴干”直升机采用了双升力螺旋桨方案，在飞行中两螺旋桨旋转方向相反，使机身的总角动量为零，从而能保持平稳飞行。

(3) 多物体组成的“共轴系统”

对于多个物体（这些物体可以是多个质点，也可是几个刚体或者是刚体与质点的组合）所组成的“共轴系统”，如果在某个过程中，系统所受的外力对该轴的合外力矩为零，则系统对该轴的总角动量守恒，即

$$L = \sum_i I_i \omega_i + \sum_j \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j = \text{恒量} \quad (4.34)$$

式中 $I_i \omega_i$ 是系统中第 i 个刚体对轴的角动量； $\mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j$ 是系统中第 j 个质点对该轴的角动量， \mathbf{r}_j 是转轴到该质点的矢径。这表明：在多个物体组成的共轴系统中，系统中各物体之间的内力矩可以使系统内各物体的角动量发生变化，但不会改变系统的总角动量。

例 4.11 一质量为 M 、长为 $2l$ 的均质细棒可在竖直平面内绕通过细棒中心、并与棒垂直的水平轴转动，棒开始时处于水平静止状态（如图 4.28 所示），当质量为 m 的小球从 h 高处自由下落正好与棒的端点做完全弹性碰撞，求碰撞后，小球的回跳速度和棒的角速度各等于多少？

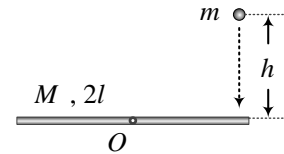


图4.28 例题4.11图

解 选棒 M 和小球 m 作为系统，令 v 为小球与棒碰撞后回跳的速度， ω 为棒被碰后的角速度。由于在碰撞过程中，球与棒的作用时间很短，且平均冲力 $f \gg mg$ （小球的重力），故小球的重力对转轴力矩可以忽略不计，棒受到的重力通过转轴不产生力矩，所以可认为在碰撞过程中，系统的角动量守恒。（这里需特别注意的是：在质点与绕固定轴转动的刚体之间的碰撞过程中，系统的动量一定不守恒，请读者自行分析为什么？）。故有

$$mv_0 l = I\omega - mv l \quad (1)$$

又因小球与细棒的碰撞是完全弹性的，遵从机械能守恒定律，故有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (2)$$

式中 $v_0 = \sqrt{2gh}$ 是小球与棒端碰前瞬间的速度； $I = \frac{1}{12}M(2l)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$ 是棒的转动惯量。将

①式和②式联立，并将 I 、 v_0 代入，即可解得

$$v = \frac{M-3m}{M+3m}v_0 = \frac{M-3m}{M+3m}\sqrt{2gh}$$

$$\omega = \frac{6m}{(M+3m)l}v = \frac{6m}{(M+3m)l}\sqrt{2gh}$$

4.12 一根质量为 m_1 、长为 l 的匀质细棒可绕其端点 O 在竖直平面内无摩擦地转动，棒原来静止于竖直位置，如图 4.29 所示。现有一颗质量为 m_2 的子弹以速度 v_0 沿水平方向射向

棒的下端，并嵌在棒内，然后随棒一起绕 O 点转动。棒被子弹击中后，若能摆过的最大角度为 $\theta = 30^\circ$ ，试求子弹的初速度 v_0 。（棒

对转轴 O 的转动惯量为 $I_{\text{棒}} = \frac{1}{3}m_1l^2$ ）

解：选子弹和棒为一个系统，整个过程可分为两个子过程：

一个是碰撞过程，另一个是上摆过程。在子弹与棒的碰撞过程中，

子弹和棒所受的重力、以及转轴对棒的支撑力都通过转轴，对转轴的外力矩为零，所以在碰撞瞬间，系统对转轴的角动量守恒。设碰撞后，棒获得的初始角速度为 ω_1 ，由角动量守恒定律，有

$$m_2v_0l = I\omega_1 = (I_{\text{棒}} + m_2l^2)\omega_1 \quad (1)$$

式中 $I = I_{\text{棒}} + m_2l^2$ 是碰后“子弹与棒”作为一个整体对转轴的转动惯量。

在上摆过程中，若不计空气阻力及轴上的摩擦阻力矩，则只有重力在做功。当棒从初始位置摆到最大角度 $\theta = 30^\circ$ 时，棒的角速度 $\omega_2 = 0$ ，在此过程中重力（或重力矩）做功为

$$A_G = -m_1g\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) - m_2gl(1 - \cos\theta) = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)gl(1 - \cos 30^\circ)$$

由系统的动能定理，有

$$A_G = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = -\frac{1}{2}I\omega_1^2$$

即

$$-\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)gl(1 - \cos 30^\circ) = -\frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad (2)$$

联立式①②，即可求得子弹的初速度大小为

$$v_0 = \frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{g}{6}l(2 - \sqrt{3})(m_1 + 2m_2)(m_1 + 3m_2)}$$

例 4.13 质量为 M 、半径为 R 的转台（可视为质量均匀分布的匀质圆盘），可绕通过其中心的竖直轴 z 在水平面内转动，转轴与轴套间的摩擦力矩可以忽略不计。有一质量为 m 的人站在转台的边缘，如图 4.30 所示。开始时人台都静止不动。若人沿转台边缘跑了 1 圈，问相对于地面来说，人和转台各转过了多少角度？

解 以人和转台作为一个系统。因人与转台之间的相互作用力是系统的内力，而重力的方向又平行于转轴，不产生力矩。所以系统在转动过程中所受外力矩为零，故角动量守恒，即

$$L = I_{\text{人}}\omega_{\text{人-地}} + I_{\text{台}}\omega_{\text{台-地}} = 0$$

式中 $\omega_{\text{人-地}}$ 、 $\omega_{\text{台-地}}$ 分别为人和转台相对于 z 轴的角速度； $I_{\text{人}}$ 、 $I_{\text{台}}$ 分别为人和转台相对于 z

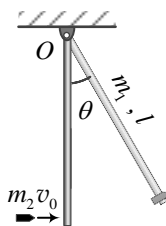


图4.29 例题4.12图

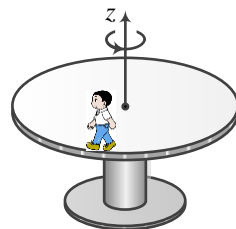


图4.30 例4.13图

轴的转动惯量，其值分别为 $I_{\text{人}} = mR^2$ 、 $I_{\text{台}} = \frac{1}{2}MR^2$ 。若选人跑动的方向为正向（如图 4.28 所示），则有

$$mR^2\omega_{\text{人-地}} + \frac{1}{2}MR^2\omega_{\text{台-地}} = 0$$

$$\omega_{\text{台-地}} = -\frac{2m}{M}\omega_{\text{人-地}} \quad (1)$$

而

$$\omega_{\text{人-地}} = \omega_{\text{人-台}} + \omega_{\text{台-地}} \quad (2)$$

联立①②两式，可得

$$\omega_{\text{人-台}} = \frac{M+2m}{M}\omega_{\text{人-地}} \quad (3)$$

由式③利用 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 可整理为

$$d\theta_{\text{人-台}} = \frac{M+2m}{M}d\theta_{\text{人-地}}$$

两边积分有

$$\int_0^{2\pi} d\theta_{\text{人-台}} = \int_0^{\theta_{\text{人-地}}} \frac{M+2m}{M} d\theta_{\text{人-地}}$$

$$\theta_{\text{人-地}} = \frac{2\pi M}{M+2m}$$

由式①同理可得

$$\theta_{\text{台-地}} = -\frac{4\pi m}{M+2m}$$

式中负号表示转角与正向反向。本题提示读者，角动量定理和角动量守恒定律仅适用于惯性系。

*4.6 刚体的平面平行运动

4.6.1 刚体平面平行运动的描述

如果刚体运动时，刚体上的任一质元总是在平行于一个固定参考平面的平面内运动，这称为刚体的平面平行运动。例如圆柱体在地面上的滚动、向前行驶的列车车轮的运动等等都是刚体做平面平行运动的典型实例。它是刚体运动中最简单的一种复合运动，即刚体在绕轴转动时，轴同时在空间平动。

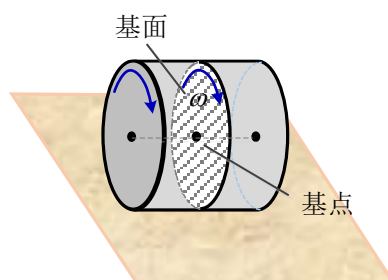


图 4.31 刚体的平面平行运动
基面与基点

刚体做平面平行运动时，若在刚体上任意截取一个与参考平面平行的平面（如图 4.31 中的阴影区域），这个平面称为**基面**。显然，该基面的运动规律和整个刚体的运动规律完全相同。在处理刚体平面平行运动时，我们可以先在刚体上选择一个基面，并在基面上选定一个参考点（称为**基点**），则刚体的平面平行运动就等效为基面的运动，而基面的运动又等效为基面上基点的平动和绕基点的转动这两种运动的合运动。

原则上，基点的选择具有任意性。对于刚体的同一个运动过程，基点选的不同，则基点的平动也不同，但刚体绕基点的转动总是相同的。这可以用图 4.32 中刚体的运动来解释。图中两个小球组成的哑铃状刚体，在从位置 AB 运动到位置 A'B' 的过程中，若以小球 1 作为基点，则基点平动的位移就是有向线段 AA'，绕基点转动的角位移为 $\Delta\varphi_1$ 。若以小球 2 作为基点，则基点平动的位移是有向线段 BB'，绕基点转动的角位移为 $\Delta\varphi_2$ 。不难看出， $AA' \neq BB'$ ，但 $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ 。

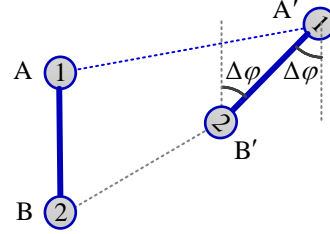


图 4.32 刚体做平面平行运动时，基点选的不同，基点的平动也不同，但绕基点的转动相同

由于刚体上只有质心具有确定的运动规律（质心运动定律），其他点没有确定的运动规律，因此在处理刚体平面平行运动问题时，常常以质心为基点。根据运动的相对性，若已知质心 C 的速度和加速度分别为 v_C 和 a_C ，则刚体上任意一点 A 的速度和加速度分别为

$$v_A = v_C + \omega \times r_{CA} \quad (4.35)$$

$$a_A = a_C + \alpha \times r_{CA} \quad (4.36)$$

式中 r_{CA} 是从质心 C 指向 A 点的矢径， ω 、 α 是刚体绕质心转动的角速度和角加速度。

如果 A 点的速度和加速度均为零，则 A 点称为**转动瞬心**。当圆柱体或车轮在地面上做纯滚动（即接触点与接触面之间没有相对滑动）时，圆柱体上与地面的接触点就是转动瞬心，此时圆柱体上质心的速度和加速度的大小分别为

$$v_C = \omega r \quad (4.37)$$

$$a_C = \alpha r \quad (4.38)$$

式中 r 就是转动瞬心到质心的距离。

4.6.2 刚体平面平行运动的动力学方程

上面已经讲过，在研究刚体的平面平行运动时，一般以质心为基点，则刚体的平面平行运动可以看成是质心的平动和绕通过质心并垂直于参考平面的轴的转动的叠加。假设质心在 O - xy 平面内运动，由质心运动定律，可得

$$F_x = ma_{Cx} \quad (4.39a)$$

$$F_y = ma_{Cy} \quad (4.39b)$$

式中 F_x 、 F_y 是刚体所受的合外力在 x 、 y 方向上的分量， a_{Cx} 、 a_{Cy} 是刚体质心的加速度在 x 、 y 方向上的分量。

可以证明，在刚体的平面平行运动中，刚体的转动定律对通过基点并与参考平面垂直的轴仍然成立。因此如果作用于刚体上的所有外力对通过质心的轴的合外力矩为 M_C ，则

$$M_C = I_C \alpha \quad (4.40)$$

式中 I_C 、 α 分别是刚体的转动惯量和角加速度。

此外，刚体做平面平行运动时的总动能等于质心的平动动能和刚体绕质心的转动动能之和，即

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (4.41)$$

式 (4.39)、式 (4.40) 和式 (4.41) 就是处理刚体做平面平行运动时的动力学方程。

例 4.14 如图 4.33 所示，圆柱体的质量为 m 、半径为 R ，从倾角为 θ 的斜面顶端从静止开始向下做纯滚动。已知斜面高为 h ，试求：圆柱体质心的加速度 a_C ，摩擦力 F_f ，滚到斜面下端时质心的速度 v_C 。

解：以圆柱体为研究对象，它在滚动时所受的力共有三个：重力 mg ，斜面的支持力 F_N 和摩擦力 F_f ，如

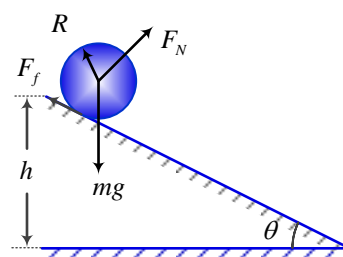


图 4.33 例题 4.14 图

图所示。由于圆柱体做纯滚动，接触点与接触面之间没有相对滑动，所以这个摩擦力属于静摩擦力。取平行于斜面向下的方向作为 x 轴的正方向，利用质心运动定律和对通过质心的轴的转动定律，有

$$mg \sin \theta - F_f = m a_C \quad (1)$$

$$F_f \cdot R = I_C \alpha \quad (2)$$

式中 $I_C = \frac{1}{2} m R^2$ 是圆柱体绕通过其质心的转轴的转动惯量， a_C 和 α 是圆柱质心的加速度和绕通过其质心的轴转动的角加速度。又因为圆柱体做纯滚动时，必有

$$a_C = R \alpha \quad (3)$$

将方程①②③联立求解，可得

$$a_C = \frac{2}{3} g \sin \theta, \quad \alpha = \frac{2g \sin \theta}{3R}, \quad F_f = \frac{1}{3} mg \sin \theta$$

当圆柱体从静止开始、从斜面顶端滚到底端时，质心运动的直线距离为 $x = \frac{h}{\sin \theta}$ ，所以质心的速度为

$$v_C = \sqrt{2a_C x} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

在求解质心的运动速度时，本题也可用机械能守恒定律来讨论。由于圆柱体在斜面上作纯滚动时，静摩擦力和正压力都不做功，只有重力做功，所以满足机械能守恒条件。以斜面底部作为重力势能的 0 势能面，则

$$mgh = E_{C\text{平动}} + E_{\text{转动}} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_C^2$$

将 $I_C = \frac{1}{2}mR^2$ 代入，同时注意到： $v_C = R\omega$ ，代入上式，可得

$$v_C = \sqrt{2a_C x} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

和前面得出的结果完全一致。

*4.7 陀螺的进动

4.7.1 进动现象

陀螺是一个具有旋转对称性、可绕支点转动的刚体，如图 4.34 所示。它是中国民间老人和孩子都喜欢的一种玩具。

陀螺的进动是刚体做定点转动的一个实例。当陀螺不转时，由于受到重力矩的作用，陀螺会立即倒地。但当它绕自身轴高速旋转时却不会倒下，而且其自身轴还会绕竖直轴旋转，这种现象称为**进动**（precession），或称为**回转效应**（gyroscopic effect）。



图 4.34 陀螺

下面我们根据力矩、角动量和角速度的矢量性，用角动量定理来分析奇妙的进动现象。如图 4.35（a）所示，设陀螺的质量为 m ，对其自身对称轴的转动惯量为 I ，支点 O 到陀螺重心的矢径为 \mathbf{r} 。当陀螺绕其对称轴以角速度 ω 高速旋转时，转轴与竖直轴的夹角为 θ ，则陀螺绕自身轴的角动量为

$$\mathbf{L} = I\omega$$

这也是陀螺对 O 点的角动量，其方向就是角速度 ω 的方向。同时陀螺受到的重力 $m\mathbf{g}$ 对 O 点的力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$$

其方向垂直于 \mathbf{r} （即陀螺的轴线）与 $m\mathbf{g}$ 组成的平面，即 \mathbf{M} 的方向垂直于 \mathbf{L} 沿水平方向。根据角动量定理，在 $d\mathbf{t}$ 时间内，刚体角动量的增量为

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}d\mathbf{t}$$

此式表明角动量增量 $d\mathbf{L}$ 的方向与合外力矩 \mathbf{M} 的方向相同，即同样垂直于 \mathbf{L} 沿水平方向。结果使 \mathbf{L} 的大小不变而方向发生变化。因此，陀螺的自转轴将从 \mathbf{L} 的位置转到 $\mathbf{L} + d\mathbf{L}$ 的

位置上。从陀螺的顶部向下看，其自转轴的回转方向是逆时针的。这样，陀螺就不会倒下，而是使其自转轴绕竖直轴 Oz 旋转，这称为进动（或称为回转效应）。

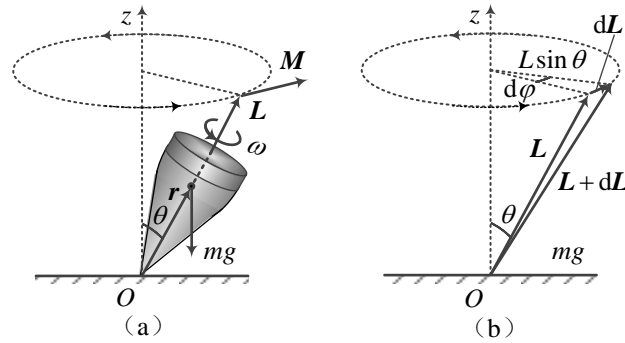


图4.35 陀螺的进动

4.7.2 进动角速度

进动角速度可以通过图 4.33 (b) 求出。由图可知

$$dL = L \sin \theta d\phi = I \omega \sin \theta d\phi \quad (4.42)$$

式中 ω 为陀螺自转的角速度， $d\phi$ 为自转轴在 dt 时间内绕 Oz 轴转过的角度， θ 为自转轴与 Oz 轴之间的夹角。由角动量定理

$$dL = M dt \quad (4.43)$$

联立式 (4.42)、式 (4.43) 整理可得，进动角速度为

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{M}{I \omega \sin \theta} \quad (4.44)$$

由此可知，进动角速度 ω_p 与外力矩成正比，与陀螺自转的角动量成反比。因此，当陀螺自转角速度很大时，进动角速度较小；而在陀螺自转角速度很小时，进动角速度却增大。

应该指出，以上的讨论中没有考虑 θ 角的变化，但是，理论和实验都表明，当陀螺自转角速度 ω 不够大时，则除了自转和进动外，陀螺的自转轴还会在铅直平面内上下摆动，即 θ 角的大小会有波动，这种运动称为章动，这里不作讨论。

4.7.3 进动现象的应用

回转效应在实践中有广泛的应用。例如，飞行中的子弹或炮弹，将受到空气阻力的作用，阻力的方向是逆着弹道的，而且一般不作用在子弹或炮弹的质心上，阻力对质心的力矩可能使弹头翻转。这样，当弹炮击中目标时，有

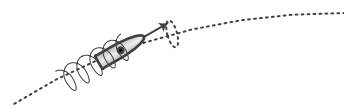


图4.36 炮弹飞行中的进动

可能是炮弹尾部先接触目标，从而导致炮弹不能被引爆。为了保证弹头始终向前而不翻转，可在枪膛或炮筒中刻出螺旋线（称为来复线），使子弹或炮弹被推出时还绕自己的对称轴高速旋转。由于回转效应，空气阻力的力矩使子弹或炮弹的自转轴绕弹道方向进动。这样，子

弹或炮弹的自转轴就将与弹道方向始终保持基本一致，不再翻转。如图 4.36 所示。

进动现象在微观世界中也同样存在。例如，原子中的核外电子既有自旋运动，又有轨道运动，这两种运动都会产生角动量。在外磁场中，由于受到磁力矩的作用，电子的角动量将以外磁场方向为轴线做进动。

思考题

4.1 平行于 z 轴的力对 z 轴的力矩一定是零，垂直于 z 轴的力对 z 轴的力矩一定不是零。这种说法都对吗？

4.2 一个有固定轴的刚体，受到两个力的作用。当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零吗？这两个力对轴的合力矩为零时，它们的合力也一定是零吗？举例说明之

4.3 刚体做定轴转动时，它的动能的增量只决定于外力对它做的功，而与内力的作用无关，对于非刚体也是这样吗？为什么？

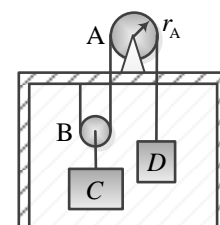
4.4 两个半径相同的轮子，质量也相同。但一个轮子的质量聚集在边缘附近，另一个轮子的质量均匀分布。试问：(1)如果它们的角动量相同，哪个轮子转得快？(2)如果它们的角速度相同，哪个轮子的角动量大？

4.5 有些矢量是相对于一定点(或轴)而确定的，有些矢量是与定点(或轴)的选择无关的。请指出下面这些矢量各属哪一类：(1)位置；(2)位移；(3)速度；(4)动量；(5)角动量；(6)力；(7)力矩

4.6 花样滑冰运动员想快速旋转时，她先把一条腿和两臂伸开，并用脚蹬冰使自己转动起来，然后她再收拢腿和双臂。这时她的转速就明显地加快了，她这是利用了什么原理？

习题

4.7 如图所示，A 为电动机带动的绞盘，其半径 $r_A = 0.25\text{m}$ ，B 为一动滑轮，重物 C 在电动机带动下以其初速度 $v_0 = 4.0\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 向上做匀速运动。当电动机停止工作时，C 开始做匀减速运动，其加速度量值为 $a_C = 0.5\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。假设绳不可伸长、绳与绞盘间无滑动。试求：在任意时刻 t



习题4.7图

- (1) 配重 D 的速度和加速度；
- (2) 绞盘 A 的角速度和角加速度。

4.8 一电唱机的转盘以 $n = 78 \text{ rev} \cdot \text{min}^{-1}$ 的转速匀速转动。

- (1) 求转盘上与转轴相距 $r = 15\text{cm}$ 处 P 点的线速度 v 和法向加速度 a_n ；
- (2) 在电动机断电后，转盘在恒定的阻力矩作用下减速，并在 $t = 15\text{s}$ 内停止转动，求转盘在停止转动前的角加速度 α 及断电后转过的圈数 N 。

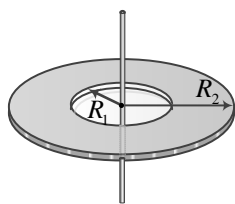
4.9 小轿车发动机的转速在 4.0s 内由 $800 \text{ rev} \cdot \text{min}^{-1}$ 均匀地提高到 $3000 \text{ rev} \cdot \text{min}^{-1}$ 。

- (1) 求在这段时间内发动机的平均角加速度和转过的转数；
- (2) 若在发动机的转轴上装有一半半径为 0.10m 的飞轮，试求在 $t = 3\text{s}$ 时飞轮边缘上任意一

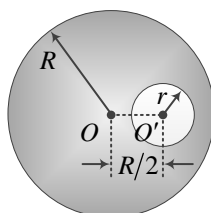
点的切向加速度和法向加速度的大小。

4.10 如图所示，计算一个质量为 m ，内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的空心圆盘绕通过盘心并与盘面垂直的固定轴的转动惯量。假设质量 m 在盘面上均匀分布。

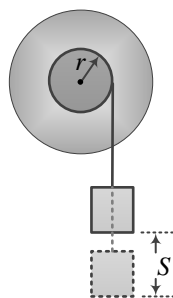
4.11 在质量为 M 、半径为 R 的匀质圆盘上，挖出一个半径为 r ($r < R/2$) 的圆孔，圆孔的中心在盘半径的中点 O' 处，如图所示。求剩余部分对通过原来的盘心 O 且与盘面垂直的轴的转动惯量。



习题4.10图



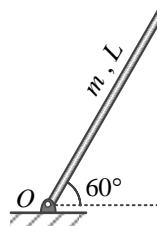
习题4.11图



习题4.12图

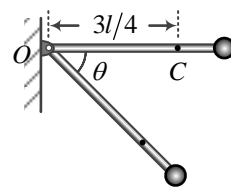
4.12 一质量为 m 的物体悬于一条轻绳的一端，绳的另一端绕在一轮轴的轴上，轮轴的半径为 r ，轴沿水平方向且垂直于轮轴面，如图所示。整个装置架在光滑的固定轴承之上，绳与轮轴之间没有相对滑动。当物体从静止释放后，在时间 t 内下降的距离为 S 。试求整个轮轴的转动惯量（用 m 、 r 、 t 和 S 表示）。

4.13 一长为 L 的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴 O 转动，如图所示。抬起另一端使棒向上与水平面成 60° ，然后无初转速地将棒释放。已知棒对轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$ ，其中 m 和 L 分别为棒的质量和长度。试求棒转到水平位置时的角速度。



习题4.13图

4.14 如图所示，长为 l 、质量为 m 的匀质细杆，可绕通过杆的端点并与杆垂直的固定轴 O 转动。杆的另一端连接一质量为 m 的小球，杆从水平位置由静止开始释放。忽略轴处的摩擦，当杆转至与水平方向成 θ 角时，试求：



习题4.14图

(1) 棒的角速度；

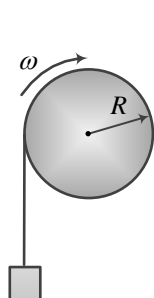
(2) 距转轴为 $3l/4$ 处 C 点的法向加速度是多少？

4.15 以 $M = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的恒力矩作用在有固定轴的转轮上，经 $\Delta t_1 = 10 \text{ s}$ 使该轮的转速由零增大到 $N = 100 \text{ rev} \cdot \text{min}^{-1}$ 。此时撤去该力矩，转轮因摩擦力矩的作用经 $\Delta t_2 = 100 \text{ s}$ 而停止。试推算此转轮对其固定轴的转动惯量。（假设摩擦力矩是一个常量）

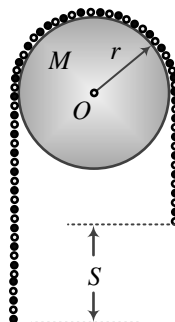
4.16 一轴承光滑的定滑轮，质量 $M = 2.00 \text{ kg}$ ，半径 $R = 0.100 \text{ m}$ ，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量 $m = 5.00 \text{ kg}$ 的物体，如图所示。已知定滑轮

的转动惯量 $I = \frac{1}{2}MR^2$ ，其初角速度 $\omega_0 = 10.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ，方向垂直纸面向里，绳与轮没有相对滑动。试求：

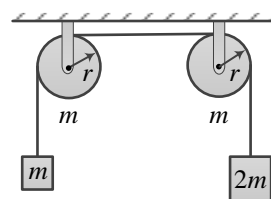
- (1) 定滑轮的角加速度的大小和方向；
- (2) 绳中的张力；
- (3) 定滑轮的角速度变化到 $\omega = 0$ 时，物体上升的高度；



习题4.16图



习题4.17图

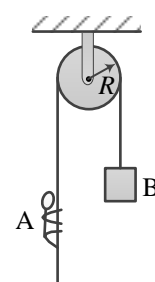


习题4.18图

4.17 质量为 M 的匀质圆盘，可绕通过盘中心并垂直于盘面的固定光滑轴转动，转动惯量为 $\frac{1}{2}Mr^2$ 。一条长为 l ，质量为 m 的匀质软绳挂在圆盘上，如图所示。设绳与圆盘间无相对滑动，试求当圆盘两侧绳长之差为 S 时，绳的加速度的大小。

4.18 一柔软的轻绳跨过两个质量均为 m 、半径均为 r 的匀质圆盘状定滑轮，绳的两端分别挂着质量为 m 和 $2m$ 的重物，如图所示。绳与滑轮间无相对滑动，轮轴光滑无摩擦。两个定滑轮的转动惯量均为 $\frac{1}{2}mr^2$ 。现将由两个定滑轮以及质量为 m 和 $2m$ 的重物组成的系统从静止开始释放，试求两滑轮之间绳中的张力。

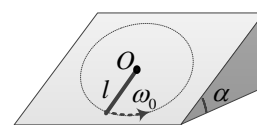
4.19 一轻绳绕过一定滑轮，轮轴光滑无摩擦，滑轮的半径为 R ，质量为 $m/4$ 且均匀分布在滑轮的边缘上。绳子的 A 端有一质量为 m 的人抓住了绳端，绳的另一端 B 系了一个质量为 $m/2$ 的重物，如图所示。设人相对于绳匀速向上爬时，绳与滑轮间无相对滑动，求 B 端重物上升的加速度？（已知滑轮对通过滑轮中心且垂直于轮面的轴的转动惯量 $I = \frac{1}{4}mR^2$ ）



习题4.19图

4.20 试用刚体定轴转动的动能定理重新求解习题 4.14。

4.21 质量为 m 长为 l 的均匀细杆，如图所示。放在倾角为 α 的光滑斜面上，可以绕通过杆上端且与斜面垂直的光滑固定轴 O 在斜面上转动。要使此杆能绕轴转动一周，至少应使杆以多大的初始角速度 ω_0 转动？（提示：棒在转动过程中机械能守恒）



习题4.21图

4.22 质量为 m_1 、半径为 r_1 的匀质圆轮 A，以角速度 ω 绕通过其中心的水平光滑轴转动，此时将它放在质量为 m_2 、半径为 r_2 的另一匀质圆轮 B 上，B 轮原为静止，但可绕通过其中心的水平光滑轴转动。放置后 A 轮的重力由 B 轮支持，如图所示（水平横杆的质量不计）。

设两轮间的摩擦系数为 μ 。A、B 轮对各自转轴的转动惯量分别为 $\frac{1}{2}m_1r_1^2$ 和 $\frac{1}{2}m_2r_2^2$ 。证明：

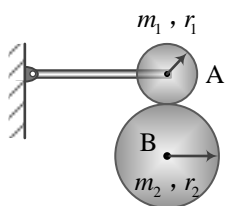
从 A 轮放在 B 轮上到两轮间没有相对滑动为止，经过的时间为

$$t = \frac{m_2 r_1 \omega}{2\mu g(m_1 + m_2)}$$

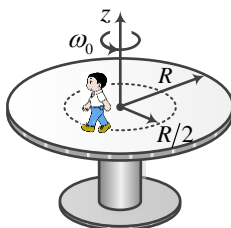
4.23 在半径为 R 、质量为 M 具有光滑竖直固定中心轴的水平圆盘上，有一人静止站立在距转轴为 $R/2$ 处，人的质量是圆盘质量的 $1/10$ ，开始时载人圆盘对地以角速度 ω_0 匀速转动。现在此人相对于圆盘以速率 v 沿与圆盘转动的相反方向绕轴做圆周运动，如图所示。

已知圆盘对中心轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$ 。试求：

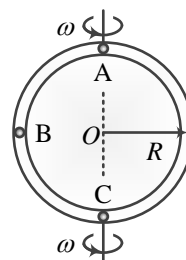
- (1) 圆盘对地的角速度；
- (2) 欲使圆盘对地静止，人在该圆周上相对于圆盘的速度 v 的大小及方向？



习题4.22图



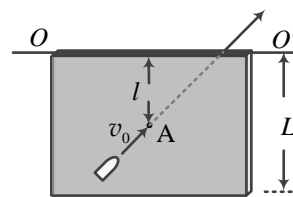
习题4.23图



习题4.24图

4.24 空心圆环可绕光滑的竖直固定轴 AC 自由转动，转动惯量为 I_0 ，环的半径为 R ，初始时环的角速度为 ω_0 。质量为 m 的小球静止在环内最高处 A 点，由于某种微小干扰，小球沿环向下滑动，问小球滑到与环心 O 在同一高度的 B 点和环的最低处 C 点时，环的角速度及小球相对于环的速度各为多大？（设环的内壁和小球都是光滑的，小球可视为质点，环截面半径 $r \ll R$ ）

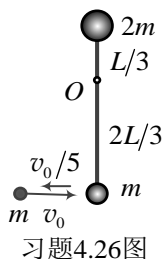
4.25 一块宽 $L=0.60\text{m}$ 、质量 $M=1.0\text{kg}$ 的均匀薄木板，可绕水平固定轴 OO' 无摩擦地自由转动。当木板静止在平衡位置时，有一质量为 $m=10 \times 10^{-3}\text{kg}$ 的子弹垂直击中木板上的 A 点，A 离转轴 OO' 的距离 $l=0.36\text{m}$ ，子弹击中木板前的速度为 $500\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，穿出木板后的速度为 $200\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。试求



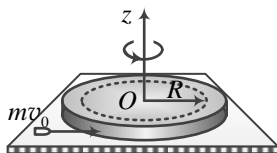
习题4.25图

- (1) 子弹给予木板的冲量；
- (2) 木板获得的角速度。

(已知: 木板绕 OO' 轴的转动惯量 $I = \frac{1}{3}ML^2$)



习题4.26图



习题4.27图

4.26 如图所示, 长为 l 的轻杆, 两端各固定质量分别为 m 和 $2m$ 的小球, 杆可绕水平光滑固定轴 O 在竖直面内转动, 转轴 O 距两端分别为 $l/3$ 和 $2l/3$ 。轻杆原来静止在竖直位置。今有一质量也为 m 的小球, 以水平速度 v_0 与杆下端小球 m 作对心碰撞, 碰后以 $v_0/5$ 的速度返回, 试求碰撞后轻杆所获得的角速度, 并判断该碰撞是否为完全弹性碰撞。

4.27 一质量均匀分布的圆盘, 质量为 M , 半径为 R , 放在一粗糙水平面上 (圆盘与水平面之间的摩擦系数为 μ), 圆盘可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴转动。开始时, 圆盘静止, 一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上, 求

(1) 子弹击中圆盘后, 盘所获得的角速度;

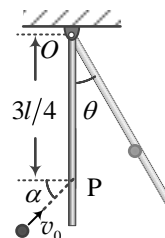
(2) 经过多少时间后, 圆盘停止转动。

(已知圆盘绕通过 O 的竖直轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$, 忽略子弹重力造成的摩擦阻力矩)

4.28 一质量为 M 、长为 l 的均匀细棒, 悬挂在通过其上端 O 且与棒垂直的水平光滑固定轴上。开始时细棒自由下垂, 如图所示。现有一质量为 m 的小泥团以与水平方向的夹角为 α 的速度 v_0 击中距离 O 为 $3l/4$ 的 P 点, 并粘在该处。求:

(1) 细棒被击中后获得的瞬时角速度;

(2) 细棒摆到最高点时, 细棒与竖直方向间的夹角 θ 。

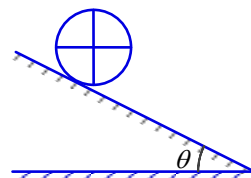


习题4.28图

4.29 一飞轮是由质量为 m 、半径为 R 的铁环与两根长度都为 $2R$ 、质量都为 m 的直铁棒焊接在一起而成的, 放置在倾角为 θ 的斜面上, 如图所示。由静止释放后, 飞轮沿斜面向下做纯滚动, 试求:

(1) 该飞轮对通过其质心并与圆面垂直的轴的转动惯量;

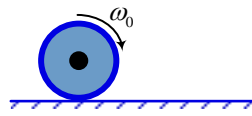
(2) 飞轮质心的加速度以及飞轮所受摩擦力的大小和方向;



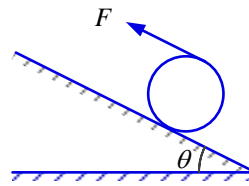
题 4.29 图

4.30 如图所示, 一质量为 m 、半径为 R 的飞轮, 其转动惯量 $I = \frac{3}{4}mR^2$ 。现让飞轮以高速 ω_0 绕其自身轴旋转, 然后置于水平地面上, 已知飞轮与地面之间的滑动摩擦系数为 μ 。

试求飞轮在地面上开始作纯滚动时质心的速度。



题 4.30 图



题 4.31 图

4.31 如图所示，一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆环放置在倾角为 θ 的斜面上，环上绕有细绳。现以平行于斜面方向的恒力 F 拉绳，使环由静止开始沿斜面向上做纯滚动，试求圆环质心的加速度以及圆环所受静摩擦力的大小和方向。