高等数学 B22017-2018 期中考试题解

一、（7 分）已知三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，其中$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$，又$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=3$，求$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$。

解：因为$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$，所以$\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角$\theta=0$或$\pi$。

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=\pm3\sqrt{3}$$

二、（7 分）判断点$A(2,-1,1)$与原点是在平面$\pi:5x+3y+z-18=0$的同侧还是异侧，并求A关于此平面π的对称点。

解：记$f(x,y,z)=5x+3y+z-18$。$f(0,0,0)=-18,f(2,-1,1)=-10$，所以$A(2,-1,1)$与原点是在平面$\pi:5x+3y+z-18=0$的同侧。

过$A(2,-1,1)$点平面π的垂线是

$$\begin{cases}x=2+5t\\y=-1+3t\\z=1+t\end{cases}$$

$A(2,-1,1)$点到平面π的距离是$d=\dfrac{10}{\sqrt{35}}$。

设A点关于π对称的点是$(2+5t,-1+3t,1+t)$，则

$$\frac{|5(2+5t)+3(-1+3t)+1+t-18|}{\sqrt{35}}=\frac{10}{\sqrt{35}}$$

$35t-10=\pm10$，$t=0$或$\dfrac{4}{7}$。

$t=0$对应A点。$t=\dfrac{4}{7}$对应A关于π的对称点$\left(\dfrac{34}{7},\dfrac{5}{7},\dfrac{11}{7}\right)$。

三、（6 分）求过点$M(1,-2,3)$的平面，使它与平面$\pi:x+y-z-3=0$垂直，且与直线$L:x=y=z$平行。

解：$\pi:x+y-z-3=0$的法向量$\vec{n}=(1,1,-1)$；$L:x=y=z$的$\vec{s}=(1,1,1)$。

设所求平面的法向量为$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$。根据已知条件，$\begin{cases}A+B+C=0\\A+B-C=0\end{cases}$。解得

$\begin{cases}B=-A\\C=0\end{cases}$。$\vec{n}_1=\{1,-1,0\}$。所求平面是$x-y-3=0$。

四、（9分）设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问$f(x,y)$在$(0,0)$点，（1）是否连续？（2）偏导数是否存在？（3）是否可微？（需证明）

解：$0\le\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\le\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$。$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=0$。所以，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0=f(0,0)$$。故$f(x,y)$在$(0,0)$点连续。

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$存在。

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to0}0=0$$存在。

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

当 $y=kx$时 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$与 k 有关，所以

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$不存在。故，$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微。

五、（8分）设$u=f(x+y,xyz)$具有一阶连续偏导数，其中$z=z(x,y)$由方程$x^2+2ze^{y^2}=\sin z$所确定，求$\overrightarrow{gradu}$以及$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$。

解：$x^2+2ze^{y^2}=\sin z$两边微分

$$2xdx + 2e^{y^2}dz + 4yze^{y^2}dy = \cos zdz$$

$$dz = \frac{2x}{\cos z - 2e^{y^2}}dx + \frac{4yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\cos z - 2e^{y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}$$

$$du = f_1(dx + dy) + f_2(yzdx + xzdy + xydz)$$

$$= (f_1 + yzf_2)dx + (f_1 + xzf_2)dy + xyf_2dz$$

$$= \left(f_1 + yzf_2 + \frac{2x^2yf_2}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)dx + \left(f_1 + xzf_2 + \frac{4xy^2ze^{y^2}f_2}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + yzf_2 + \frac{2x^2yf_2}{\cos z - 2e^{y^2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 + xzf_2 + \frac{4xy^2ze^{y^2}f_2}{\cos z - 2e^{y^2}}$$

$$\overrightarrow{gradu} = \left\{f_1 + yzf_2 + \frac{2x^2yf_2}{\cos z - 2e^{y^2}}, f_1 + xzf_2 + \frac{4xy^2ze^{y^2}f_2}{\cos z - 2e^{y^2}}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = f_{12} + \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)f_{13} + zf_2 + yf_2\frac{\partial z}{\partial y} + yz\left(f_{12} + \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)f_{22}\right)$$

$$+ \frac{\left(2x^2f_2 + 2x^2y\left(f_{21} + \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)f_{22}\right)\right)\left(\cos z - 2e^{y^2}\right) + 2x^2yf_2\left(\sin z\frac{\partial z}{\partial y} + 4ye^{y^2}\right)}{\left(\cos z - 2e^{y^2}\right)^2}$$

$$= f_{12} + \left(xz + \frac{4xy^2ze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)f_{13} + zf_2 + \frac{4y^2ze^{y^2}f_2}{\cos z - 2e^{y^2}} + yz\left(f_{12} + \left(xz + \frac{4xy^2ze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)f_{22}\right)$$

$$+ \frac{\left(2x^2f_2 + 2x^2y\left(f_{21} + \left(xz + \frac{4xy^2ze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)f_{22}\right)\right)\left(\cos z - 2e^{y^2}\right) + 2x^2yf_2\left(\frac{4yze^{y^2}\sin z}{\cos z - 2e^{y^2}} + 4ye^{y^2}\right)}{\left(\cos z - 2e^{y^2}\right)^2}$$

六、（8 分）试在曲面 $S: 2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求一点，使得函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 沿着点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,0,1)$ 的方向导数具有最大值。

解：$\overrightarrow{AB} = \{1,-1,0\}$。

$$\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{AB}}f(x, y, z) = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = \sqrt{2}(x - y)$$

$$\begin{cases} u = x - y \\ 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$L = x - y + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = 1 + 4\lambda x = 0 \\ L_y = -1 + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda = 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

由前二方程知道 $\lambda \neq 0$。$z = 0$。前两方程相加得 $y = -2x$。再由最后方程有 $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$y = \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}}$。所要求的点是 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},0\right)$。

七、（8 分）设区域 D 为 $x^2 + y^2 \le R^2$，计算三重积分 $\iint\limits_D \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy$。

解：$\iint\limits_D \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \dfrac{1}{a^2}\iint\limits_D x^2 dxdy + \dfrac{1}{b^2}\iint\limits_D y^2 dxdy$。

由对称性，

$$\iint\limits_D x^2 dxdy = \iint\limits_D y^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\pi R^4$$

$$\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

八、（8 分）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dxdy$，其中 $D = \{(x, y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$。

解：$D_1 = \{(x, y) | 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$，$D_2 = \{(x, y) | 1 \ge y \ge x, 0 \le x \le 1\}$。

$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dxdy = \iint\limits_{D_1} e^{x^2} dxdy + \iint\limits_{D_2} e^{y^2} dxdy$$

$$\iint\limits_{D_1} e^{x^2} dxdy = \int_0^1 e^{x^2} dx \int_0^x dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}(e - 1)$$

$$\iint_{D_2} e^{y^2}dxdy = \int_0^1 e^{y^2}dy\int_0^y dx = \int_0^1 ye^{y^2}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = e-1$$

九、（7 分）设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，

求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

解：$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 分别对 x,y 求导

$$\begin{cases} 2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$

在上面方程组中让 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 得

$$\begin{cases} 2x-6y=0 \\ -6x+20y-2z=0 \end{cases}$$

解得 $x=3y, z=y$，代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 得

$9y^2-18y^2+10y^2-2y^2-y^2+18=0$。解得 $y=\pm3, x=\pm9, z=\pm3$。

$$\begin{cases} 2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$ 再分别对 x,y 求导并让 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$$1-y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, 10-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, -6-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y+z}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{10}{y+z}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3}{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{1}{(y+z)^2}>0$$

$(3,9)$ 是极小值点，3 是极小值；$(-3,-9)$ 是极大值点，-3 是极大值。

十、（8 分）求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x=0 \\ x^2+y^2-z^2=2 \end{cases}$在点$(2,1,\sqrt{3})$处的切线方程和法平面方程。

解：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x=0 \\ x^2+y^2-z^2=2 \end{cases}$的两方程相加得$x^2+y^2-2x=1$。

$$\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

$$x=1+\sqrt{2}\cos\theta, y=\sqrt{2}\sin\theta, z=\sqrt{1+2\sqrt{2}\cos\theta}$$

点 $(2,1,\sqrt{3})$对 应 $\theta=\frac{\pi}{4}$。

$$x'=-\sqrt{2}\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}=-1, y'=\sqrt{2}\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}=1, z'=\frac{-\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{1+2\sqrt{2}\cos\theta}}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{T}=\left\{-1,1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

切线方程：$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\sqrt{3}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$，

法平面方程：$-x+y-\sqrt{3}z+4=0$。

十一、（8 分）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$，其中$\Omega$为平面曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴转一周所成的曲面与平面$z=8$所围成的区域。

解：由对称性$\iiint\limits_{\Omega}xdv=0$。旋转面的方程$x^2+y^2=2z$。

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^8 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=2\pi\int_0^8 z^2dz$$

$$=\frac{8^3 2\pi}{3}$$

十二、（8 分）求函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在条件$a_1x+a_2y+a_3z=1(a_i>0, i=1,2,3)$下的最小值。

解：$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(a_1x+a_2y+a_3z-1)$，解方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x + \lambda a_1 = 0 \\ L_y = 2y + \lambda a_2 = 0 \\ L_z = 2z + \lambda a_3 = 0 \\ L_\lambda = a_1 x + a_2 y + a_3 z - 1 = 0 \end{cases}$$

如果$\lambda = 0$则$x = y = z = 0$，不满足最后一个方程。所以$\lambda \neq 0$。

由前三方程$x = -\dfrac{\lambda a_1}{2}$，$y = -\dfrac{\lambda a_2}{2}$，$z = -\dfrac{\lambda a_3}{2}$。代入最后一个方程得

$$\lambda = -\frac{2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$x = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},\ y = \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},\ z = \frac{a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

上面方程组只有这个解，根据问题的实际，这就是所给函数的最小值点。代入$f(x, y, z)$

得到最小值$\dfrac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$。

十四、（附加题 3 分）设函数$f(x, y)$关于自变量x连续，又存在常数$L > 0$，使得对于任意两点$(x, y_1), (x, y_2)$，有$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$，证明$f(x, y)$连续。

证：任意给定点(x_0, y_0)。$\forall \varepsilon > 0$。

因为函数$f(x, y)$关于自变量x连续，所以存在$\sigma_1 > 0$使得当$|\Delta x| < \sigma_1$时有

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}。$$

取$\sigma = \min\left\{\sigma_1, \dfrac{\varepsilon}{2L}\right\}$。当$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \sigma$时，

$$\begin{aligned} &|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| + |f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &< L|\Delta y| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

所以$f(x, y)$在点(x_0, y_0)连续。故，$f(x, y)$连续。