武汉大学 2021－2022 学年第二学期

《微积分 (下)》 期末试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 14 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在**考试答题纸**上的对应题号区域, 写在其他位置无效.

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \sqrt{10}$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sin\frac{1}{n}$ 的敛散性, 其中常数 $\alpha > 0$.

3. 已知函数 $f(u,v)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$. 设函数 $z = f\big(x^2-y^2, 2xy\big)$, 试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. 设在 xOy 平面上任一点 (x,y) 处的温度函数为 $T(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$. 试求: 在点 $P(2,1)$ 处温度增加最大的方向.

5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \left|x^2+y^2-1\right| \mathrm{d}\sigma$, 其中 $D = \big\{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\big\}$.

6. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega (x+y)^2\,\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0, \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=1$, $z=4$ 所围成的立体.

7. 设 Σ 为曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$, $1 \leqslant z \leqslant 2$, 取上侧, 求
$$I = \iint_\Sigma \left(x^3 z + x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

8. 计算 $I = \displaystyle\iint_\Sigma \big[(x+y)^2+z\big]\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于 $0 \leqslant z \leqslant h$ 的部分.

9. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域、和函数.

10. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的函数, 它在 $(-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=x$. 试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

二、解答下列各题 (本题满分 30 分)

11. (10 分) 使用拉格朗日乘数法, 求曲线 $17x^2+12xy+8y^2=100$ 上到点 $(0,0)$ 的距离分别最近、最远的点.

12. (5 分) 设 L 是逆时针方向的圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=R^2$, 试证

$$\oint_L x\,\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y - y\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi R^2.$$

13. (10 分) 用平面束方法求解: 求过点 $P(1,1,1)$ 且与直线 L_1: $x+1=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线 L 的一般方程.

14. (5 分) 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1-2x-3y}{\sin(x^2+y^2)}=1,$$

问: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微? 若可微, 求出 $\mathrm{d}f(x,y)\Big|_{(0,0)}$.

2021−2022 学年第二学期《微积分 (下)》参考答案 · 卷 (A)

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \sqrt{10}$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解: 因

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2,$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2,$$

两式相加, 得

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2\left(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2\right) - |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = 2.$$

所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$.

2. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性, 其中常数 $\alpha > 0$.

解: 此为正项级数. 注意到 $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n} \quad (n\to\infty)$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{\alpha+1}}} = 1.$$

级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ 收敛, 从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\sin\frac{1}{n}$ 收敛.

3. 已知函数 $f(u,v)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$. 设函数 $z = f\left(x^2-y^2, 2xy\right)$, 试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解: 设 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. 则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} =& 2xf_1(u,v) + 2yf_2(u,v),\\
\frac{\partial z}{\partial y} =& -2yf_1(u,v) + 2xf_2(u,v),\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =& 2f_1(u,v) + 2x\left(2xf_{11}(u,v) + 2yf_{12}(u,v)\right)\\
&+ 2y\left(2xf_{21}(u,v) + 2yf_{22}(u,v)\right)\\
=& 2f_1(u,v) + 4x^2f_{11}(u,v) + 8xyf_{12}(u,v) + 4y^2f_{22}(u,v),\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =& -2f_1(u,v) - 2y\left(-2yf_{11}(u,v) + 2xf_{12}(u,v)\right)\\
&+ 2x\left(-2yf_{21}(u,v) + 2xf_{22}(u,v)\right)\\
=& -2f_1(u,v) + 4y^2f_{11}(u,v) - 8xyf_{12}(u,v) + 4x^2f_{22}(u,v),
\end{aligned}$$

因此,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\left(x^2+y^2\right)\left(f_{11}(u,v) + f_{22}(u,v)\right) = 0.$$

4. 设在 xOy 平面上任一点 (x,y) 处的温度函数为 $T(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$. 试求: 在点 $P(2,1)$ 处温度增加最大的方向.

解: 由

$$\nabla T(x,y)=2x\mathrm{e}^{-y}\boldsymbol{i}-x^2\mathrm{e}^{-y}\boldsymbol{j},$$
$$\nabla T(2,1)=\frac{4}{\mathrm{e}}\boldsymbol{i}-\frac{4}{\mathrm{e}}\boldsymbol{j}=\frac{4}{\mathrm{e}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}),$$

故点 $P(2,1)$ 处温度增加最大的方向是: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$.

5. 计算二重积分 $\iint_D \left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

解: 记区域 $D_1: x^2+y^2\leqslant 1$. 则

$$\begin{aligned}\iint_D \left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D-D_1}\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_1}\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma\\ &=\iint_{D-D_1}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma\\ &=\iint_D\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma-2\iint_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma\\ &=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}y-2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\rho^2-1\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\\ &=\pi-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

6. 计算三重积分 $\iiint_\Omega (x+y)^2\,\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} x^2=2z,\\ y=0,\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=1$, $z=4$ 所围成的立体.

解: 积分区域关于 zOx 面对称, $2xy$ 是关于 y 的奇函数, 故

$$\iiint_\Omega (x+y)^2\,\mathrm{d}V=\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V.$$

旋转面方程为 $x^2+y^2=2z$, 区域 Ω 为

$$\begin{cases}(x,y)\in D(z): x^2+y^2\leqslant 2z,\\ 1\leqslant z\leqslant 4,\end{cases}$$

用先二后一法得到

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V&=\int_1^4\mathrm{d}z\iint_{D_z}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ &=\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho\ \mathrm{d}\rho=42\pi.\end{aligned}$$

7. 设 Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2$, $1\leqslant z\leqslant 2$, 取上侧, 求

$$I=\iint_\Sigma\left(x^3z+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: 作辅助面 $\Sigma_1: z=1$, $(x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$, 取下侧.

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}\right)\left(x^3z+x\right)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_1} x^2z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \pi\int_1^2 (2-z)\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

8. 计算 $I=\iint_{\Sigma}\left[(x+y)^2+z\right]\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于 $0\leqslant z\leqslant h$ 的部分.

解: $I=\iint_{\Sigma}\left(x^2+2xy+y^2\right)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S \triangleq I_1+I_2$.

(1) 因 Σ 关于 yOz 面对称, $2xy$ 关于 x 为奇函数, 故 $\iint_{\Sigma} 2xy\,\mathrm{d}S=0$.

将 Σ 的表达式代入被积函数, 得

$$
I_1=\iint_{\Sigma}\left(x^2+2xy+y^2\right)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}R^2\,\mathrm{d}S=2\pi R^3h.
$$

(2) 下求 I_2. **方法一**. 利用质心公式,

$$
I_2=\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=\overline{z}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{h}{2}\cdot 2\pi Rh=\pi Rh^2.
$$

方法二. 设 Σ_1 表示 Σ 在 zOx 面右侧的部分, 即

$$
\Sigma_1: y=\sqrt{R^2-x^2},
$$

投影区域 D_{zx}: $-R\leqslant x\leqslant R$, $0\leqslant z\leqslant h$. 由

$$
y'_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad y'_z=0,
$$

得

$$
\mathrm{d}S=\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.
$$

又 Σ 关于坐标平面 zOx 对称, 被积函数 z 关于 y 为偶函数, 故

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2\iint_{\Sigma_1} z\,\mathrm{d}S = 2\iint_{D_{zx}} z\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&= 2R\int_0^h z\,\mathrm{d}z\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2R\cdot\frac{1}{2}h^2\cdot\left[\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R}=\pi Rh^2.
\end{aligned}
$$

综上,

$$
I=I_1+I_2=2\pi R^3h+\frac{2}{3}\pi Rh^3=\pi Rh\left(2R^2+h\right).
$$

9. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$ 的收敛域、和函数.

解: 收敛半径

$$
R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(1+n)^2}=1.
$$

当 $x=\pm 1$ 时, 原级数分别为 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$, 通项不趋近于 0, 故均发散. 得原级数收敛域为 $(-1,1)$.

由

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2},$$

从而, 和函数

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)'\\&=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1).\end{aligned}$$

10. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的函数, 它在 $(-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=x$. 试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

解: 由收敛定理, 其傅立叶级数在间断点 $x=2k+1$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处收敛于 0; 在连续点 $x\neq 2k+1$ 处收敛于 $f(x)$.

由 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数, 知 $a_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 又

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\ \mathrm{d}x=2\int_0^1 x\sin n\pi x\ \mathrm{d}x\\&=\frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

故 $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin n\pi$, $x\in\mathbb{R}$, 且 $x\neq 2k+1$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

取 $x=\frac{1}{2}$, 因为 $\sin\frac{n\pi}{2}$ 取值为 1, 0, -1, 0, $\cdots$, 故

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

11. 使用拉格朗日乘数法, 求曲线 $17x^2+12xy+8y^2=100$ 上到点 $(0,0)$ 的距离分别最近、最远的点.

解: 目标函数: $z=x^2+y^2$, 约束条件 $\varphi(x,y)=17x^2+12xy+8y^2-100=0$. 构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(17x^2+12xy+8y^2-100).$$

函数 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点满足条件

$$0=\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda(34x+12y),\tag{1}$$
$$0=\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda(12x+16y),\tag{2}$$
$$0=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=17x^2+12xy+8y^2-100.\tag{3}$$

由 (1) 式、(2) 式得

$$\frac{2x}{34x+12y}=\frac{2y}{12x+16y}=-\lambda.$$

得 $2x(12x+16y)=2y(34x+12y)$, 即

$$2x^2-3xy-2y^2=0, \tag{4}$$

$4\times(4)+(3)$, 得

$$25x^2=100,$$

故 $x=\pm 2$.

1° 将 $x=2$ 代入 (4) 式, 得

$$8-6y-y^2=0,$$

即 $(y-1)(y+4)=0$, 得两个可能极值点 $(2,1)$, $(2,-4)$.

2° 将 $x=-2$ 代入 (4) 式, 得

$$8+6y-y^2=0,$$

即 $(y+1)(y-4)=0$, 得两个可能极值点 $(-2,-1)$, $(-2,4)$.

综上, 曲线上两点 $(2,1)$, $(-2,-1)$ 到原点最近, 其距离为 $\sqrt{5}$; 曲线上两点 $(2,-4)$, $(-2,4)$ 到原点最远, 其距离为 $2\sqrt{5}$.

12. 设 L 是逆时针方向的圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=R^2$, 试证

$$\oint_L x\,\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y-y\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi R^2.$$

解: 设 D 是 L 所围的区域. $P=-y\,\mathrm{e}^{-x^2}$, $Q=x\,\mathrm{e}^{y^2}$. 根据格林公式, 有

$$\text{左边}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left[\mathrm{e}^{y^2}+\mathrm{e}^{-x^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

区域 D 关于直线 $y=x$ 对称, x 与 y 具有轮换对称性, 于是

$$\iint_D\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故

$$\text{左边}=\iint_D\left[\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{-x^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint_D 2\sqrt{\mathrm{e}^{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^2.$$

13. 用平面束方法求解: 求过点 $P(1,1,1)$ 且与直线 L_1: $x+1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线 L 的一般方程.

解: 过点 P 作平面 Π_1 垂直于 L_1. 则 Π_1 方程为:

$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即

$$x+2y-z-2=0.$$

直线 $L_1: x+1=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 的一般方程为:

$$\begin{cases} x+1=\frac{y-1}{2}, \\ x+1=\frac{z}{-1}. \end{cases} \quad 即 \begin{cases} 2x-y+3=0, \\ x+z+1=0. \end{cases}$$

则过直线 L_1 的平面束为

$$(2+\lambda)x-y+\lambda z+(3+\lambda)=0$$

在过直线 L_1 的平面束中, 过点 P 的平面, 记为 Π_2. 代入点 $P(1,1,1)$, 有

$$(2+\lambda)-1+\lambda+(3+\lambda)=0$$

即 $\lambda=-\frac{4}{3}$. 则平面 Π_2 :

$$\frac{2}{3}x-y-\frac{4}{3}z+\frac{5}{3}=0, \qquad 即 2x-3y-4z+5=0.$$

综上, 得所求直线 L 的一般式方程:

$$\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 2x-3y-4z+5=0 \end{cases}$$

14. 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1-2x-3y}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=1,$$

问: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微? 若可微, 求出 $\mathrm{d}f(x,y)\Big|_{(0,0)}$.

解: 由题设知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \big(f(x,y)-1-2x-3y\big)=0,$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$. 又 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 知

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1.$$

由题设知, $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$f(x,y)-1-2x-3y \sim \sin\left(x^2+y^2\right) \sim x^2+y^2,$$

即

$$f(x,y)-f(0,0)-2x-3y \sim x^2+y^2,$$

从而 $f(x,y)-f(0,0)-2x-3y=o(\sqrt{x^2+y^2})$, 即

$$f(x,y)-f(0,0)=2x+3y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

由定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 且

$$\mathrm{d}f(x,y)\Big|_{(0,0)}=2x+3y.$$