武汉大学 2023-2024 学年第二学期期末考试
线性代数 B（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+1 \end{vmatrix}$

二、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$， n 为正整数，计算 A^n

三、（12 分）设 A 为 3 阶矩阵，已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 且 $AB = A + B$, 求矩阵 B

四、（10 分）设有线性方程组 $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

五、（10 分）已知向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组和向量组的秩，并把其余向量用这个极大线性无关组线性表示。

六、（10 分）已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$， $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$， $\beta_3 = \alpha_3$，证明 β_1， β_2， β_3 线性无关。

七、（14 分）已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解，求参数a, b的值及方程组的通解。

八、（12 分）设 3 阶矩阵A与B相似，其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，已知 矩阵$B$有特征值 1，2，3。求参数 x 以及A的行列式。

九、（12 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

（1）写出二次型对应的矩阵；

（2）求一个正交变换把二次型f化为标准形，并写出相应的正交矩阵。