

## 第 2 章 牛顿运动定律

上一章讨论了如何描述质点的运动，以及描述质点运动的各个物理量之间的关系。在本章中，我们将进一步讨论质点运动状态的变化与外界作用之间的内在联系，即质点的动力学问题。

三百余年前，牛顿（Isaac Newton）于 1687 年在他的划时代名著《自然哲学的数学原理》中发表的三条运动定律，奠定了整个经典力学的基础。这三条从大量实验事实中总结出来的定律，看起来简单明确，却包含了丰富的物理概念、确切的数学表述、科学的研究方法和一些根本性的哲学问题，成为自然科学史上的第一次伟大综合。因此，进一步加深对牛顿运动定律的内容和有关基本概念的理解，熟练掌握牛顿三定律的运用并明确其适用范围，就是学习本章的主要目的。



Isaac Newton (1642–1727)

### § 2.1 牛顿运动定律

牛顿运动定律共有三条定律，它们是经典力学的基础。虽然牛顿运动定律是对质点而言的，但这并不限制牛顿运动定律的广泛适用性，因为任何复杂的物体在原则上都可看作是质点的组合，从牛顿运动定律出发可以导出刚体、流体、弹性体等物体的运动规律，从而建立起整个经典力学的体系。

#### 2.1.1 牛顿第一定律

日常生活经验和科学实验都表明，任何物体都受到其周围物体的作用。正是这种作用支配着物体运动状态的变化。行星受到太阳的作用才能绕太阳运行，苹果受到地球的作用才能下落，电子受到原子核的作用才能和原子核结合成原子。物体间各种不同的相互作用，构成了千变万化的物质世界，这些作用通常被叫做力（force）。

**牛顿第一定律**，又称**惯性定律**（law of inertia）可表述如下：**任何物体都将保持静止或匀速直线运动的状态，直至其它物体的作用强迫它改变这种状态时为止。**

在理解牛顿第一定律时，需要注意以下几点

## 1、牛顿第一定律指出了两个重要概念：惯性和力

(1) 任何物体都有保持其原有的静止或匀速直线运动状态的性质，物体的这种性质称为**惯性**（inertia）。因此牛顿第一定律，又称为**惯性定律**。物体的惯性是其抵抗运动状态发生改变的能力，是物体本身的固有属性。它的大小用其质量的大小来量度，与物体的运动状态即速度无关。

(2) 要改变物体的运动状态，必须要有其它物体对它作用，这种作用称为**力**。因此第一定律给出了**力的概念**，**力就是物体与物体之间的相互作用**。此外牛顿认为“力只存在于作用过程中”，作用一结束力就消失，此后物体就靠惯性继续保持其运动状态。这就使物体运动状态的保持和惯性相联系；而运动状态的改变与力相联系。因此牛顿第一定律不仅给出了力的概念，还指出了力是改变物体运动状态，也就是物体获得加速度的原因。

## 2、牛顿第一定律是从大量观察和实验事实中抽象、概括出来的，不能直接用实验证明

因为我们不可能使一个物体完全不受其他物体的作用而“孤立”起来。但是，从物理上讲，我们总可以使其他物体的作用减小到可以忽略不计的程度，从而逼近这一理想状态。例如在天文观察中，天文学家发现，当彗星它远离其他星体时，其运行速度几乎保持不变。这一事实使人们相信牛顿第一定律是正确的。

牛顿第一定律的正确性，不仅表现在它来源于实验推断，而且还在于它的推论经受了实践的考验。如果有几个力共同作用在一个质点上，而且合力为零，那么这时质点的运动状态与质点不受外力作用时的运动状态是一样的。在日常生活中我们就已经知道，以一定速度运动的物体，在比较光滑的水平面上滑动的时间比在粗糙水平面上滑动的时间长，而且接触面越光滑，滑动时间越长。设想一下，在摩擦阻力为零的极限情况下，则物体将永远运动下去，就好像完全不受力时的情况一样。

### 2.1.2 牛顿第二定律

牛顿第一定律给我们指出了惯性和力两个概念，并指出力是物体运动状态发生变化的原因，但这只是定性说明。牛顿第二定律则给出了力、惯性（质量）和加速度三者之

间的定量关系。由定性描述上升到定量表述，是一个重要的飞跃，牛顿第二定律是牛顿三条运动定律的核心。

**牛顿第二定律**的文字叙述如下：**物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与外力的方向相同。**

在国际单位制中，力的单位是牛顿（N），质量的单位是千克（kg），则牛顿第二定律的数学表达式为

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad \text{或} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.1)$$

由式（2.1）可以看出，为了得到一定的加速度，必须要对物体施加一个力的作用。物体的质量越大，为了得到相同的加速度，施加的作用力必须越大。所以，质量越大（即惯性越大）的物体，改变其运动状态就越难。

利用瞬时加速度的定义  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ，牛顿第二定律还可以表述为

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.2)$$

在理解和应用牛顿第二定律时，还需注意以下3点：

（1）牛顿第二定律表示的物体加速度与所受外力之间的关系是**瞬时关系**。 $\mathbf{a}$ 表示瞬时加速度， $\mathbf{F}$ 表示瞬时力。它们同时存在，同时改变，同时消失。一旦作用在物体上的外力被撤去，物体的加速度立即消失。

（2）式（2.2）中的 $\mathbf{F}$ 是作用于物体上的合力。当一个物体同时受到几个力的作用时，则这些力的合力产生的加速度等于每个力单独作用时产生的加速度的矢量和，这一结论叫做**力的独立性原理**或**力的叠加原理**。如果以 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ 表示同时作用在物体上的几个外力，以 $\mathbf{F}$ 表示它们的合力， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 分别表示各个力自单独作用与物体上时所产生的加速度，以 $\mathbf{a}$ 表示合加速度，则力的叠加原理可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}_i \\ &= m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \dots + m\mathbf{a}_n = m \sum \mathbf{a}_i = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned} \quad (2.3)$$

上式还表明物体获得的总加速度等于各分力单独作用于物体上时产生的加速度的矢量和。

(3) 式 (2.2) 或 (2.3) 都是矢量式, 实际应用时我们可以利用力的叠加原理, 首先将合外力在  $O\text{-}xyz$  直角坐标系中沿各坐标轴做正交分解, 从而得到在直角坐标系中的分量式, 即

$$F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.4a)$$

$$F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (2.4b)$$

$$F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \quad (2.4c)$$

当质点做平面曲线运动, 也可将合外力沿曲线的切线方向和法线方向做正交分解, 从而得到牛顿第二定律沿曲线切线和法线方向的分量式, 即

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt} \quad (2.5)$$

$$F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (2.6)$$

式中  $F_\tau$  和  $F_n$  分别表示合外力的切向分量和法向分量,  $a_\tau$  和  $a_n$  分别表示切向加速度和法向加速度,  $\rho$  是质点所在处曲线的曲率半径。

### 2.1.3 牛顿第三定律

实验发现, 不论何时, 如果一个物体 A 对另一个物体 B 施力, 则受力物体 B 也必然同时有一个力作用于施力物体 A 上。如果将 A 对 B 的力称为作用力  $\mathbf{F}$ , 则 B 对 A 的力称为反作用力  $\mathbf{F}'$ , 这两个力的关系可由牛顿第三定律给出, 即: **两个物体之间的作用力  $\mathbf{F}$  和反作用力  $\mathbf{F}'$ , 大小相等、方向相反, 并且在同一直线上。**如图 2.1 所示, 其数学表达式为

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}' \quad (2.7)$$

这就是**牛顿第三定律**, 也称为**作用力与反作用力定律**。

牛顿第三定律进一步阐明了力的相互作用的性质: 力是物体间的一种相互作用, 每一个力都有它的施力者和受力者; 而且, 有作用力就必然同时存在反作用力。

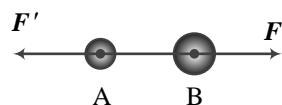


图2.1 作用力与反作用力

对于牛顿第三定律，必须注意以下几点：

**1. 作用力与反作用力总是同时存在、相互依存的。**它们是矛盾的两个方面，它们互以对方为自己存在的条件。对于作用力与反作用力，不能说：“先有作用力后有反作用力”或“作用力引起反作用力”这样的话。

**2. 作用力与反作用力分别作用在两个不同的物体上，虽然它们大小相等、方向相反，但不能互相抵消。**例如，手提重物时，作用力和反作用力一个作用在手上，另一个作用在重物上，对于手和重物而言，二者的效果不可抵消。

**3. 作用力与反作用力一定属于同一性质的力。**例如，手提重物，作用力和反作用力都是弹性力。又如，地球与月球之间的作用力和反作用力都是万有引力。两静止正、负电荷之间的相互吸引力也是一对作用力和反作用力，且都是静电力。

## § 2.2 物理量的单位和量纲

在历史上，由于物理量的单位制有很多种，世界各国往往按照各自的习惯，沿用不同的单位制，这不利于科学技术的交流和发展，而且也不规范。鉴于这种情况，国际计量大会决议推行统一的国际单位制（Le Système International d'unités）简称为 SI（注意是法文）。我国也决定从 1987 年 1 月 1 日起，在各级学校的教科书中使用国际单位制。

国际单位制规定了 7 个具有严格定义的基本单位，见表 2.1 所示。其中前三个单位：长度单位“米”、质量单位“千克”、时间单位“秒”是力学里的基本单位。国际单位制除了规定 7 个基本单位之外，还有两个辅助单位，分别是平面角的单位弧度（rad）和立体角的单位球面度（sr）。

表 2.1 国际单位制中的基本单位

| 物理量  | 长度 | 质量 | 时间 | 电流   | 热力学温度 | 物质的量 | 发光强度 |
|------|----|----|----|------|-------|------|------|
| 基本单位 | 米  | 千克 | 秒  | 安（培） | 开（尔文） | 摩（尔） | 坎德拉  |
| 符号   | m  | kg | s  | A    | K     | mol  | cd   |

国际单位制规定的其它物理量所对应的单位，如力的单位牛顿、能量单位焦耳、电压单位伏特等等，都可以由这 7 个基本单位导出。按照上述基本量和基本单位的规定，速度的单位是米每秒（ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ）；角速度的单位是弧度每秒（ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ）；加速度的单位

是米每二次方秒 ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )；力的单位是千克米每二次方秒 ( $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )，称为“牛顿”，简称“牛”(N)。 $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。其它常见物理常数的名称、符号、数值和单位见附录 B。

2018 年 11 月 16 日，第 26 届国际计量大会通过了关于修订国际单位制的决议。国际单位制 7 个基本单位中的 4 个，即千克、安培、开尔文和摩尔将分别改由普朗克常数、基本电荷、玻尔兹曼常数和阿伏伽德罗常数来定义。加之此前对“秒”、“米”和“坎德拉”的重新定义，至此组成国际计量单位制的 7 个基本单位均实现了由常数定义，全部告别了采用实物计量的历史。

新的国际单位制规定：1 米是光在真空中在 ( $1/299792458$ ) 秒时间间隔内所经过的距离；1 秒是铯 133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁时辐射振荡 9,192,631,770 个周期的持续时间；1 千克是普朗克常数为  $6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  时对应的质量。

新的国际单位制完全建立在恒定不变的基本常数之上，使全球测量体系发生了“不变”的“巨变”。

所谓不变，是指除电学单位外，新定义下各个单位大小和旧定义几乎完全一致。事实上，电学单位的改变也微乎其微，电压单位的变化约为千万分之一，电阻单位的变化则更小。

从新定义的深层意义来看，国际单位制的变化无疑又是“巨大”的。

首先，新定义用自然界恒定不变的“常数”替代了实物原器，保障了国际单位制的长期稳定性。以千克的原来的定义为例，1 千克精确等于国际计量局保存的国际千克原器的质量。国际计量局的数据显示，国际千克原器自从 1889 年开始服役以来的 130 年中，它的质量与各国保存的质量基准的一致性出现了约 50 微克的偏差。但这个偏差产生的原因是什么，国际千克原器的本身的质量是否发生了变化，具体变化了多少至今仍是一个谜。用基本物理常数  $h$  重新定义千克后，质量单位将更加稳定，我们不必担心国际千克原器自身的质量漂移、甚至丢失可能给全球质量量值统一带来的问题。

第二，“定义常数”不受时空和人为因素的限制，保障了国际单位制的客观通用性。

第三，新定义可在任意范围复现，保障了国际单位制的全范围准确性。

第四，新定义不受复现方法的限制，保障了国际单位制的未来适用性。在新的国际单位制中，测量的两个重要概念，即单位定义和测量（或复现）方法是分离的，例如，

千克可以通过任何适当的方法（即通过建立质量与普朗克常数之间的关系）来复现，比如基布尔天平法和 X 射线晶体密度法——这两种方法是目前世界上测量准确度最高的复现方法。即使未来有更好的实验方案出现，单位的定义也不会因此受到影响。

总之，国际单位制的变革是科技进步的缩影，科技创新和质量发展的基础将由此变得更加牢固。新的国际单位制将在未来对科学、技术、贸易、健康、环境以及更多的领域产生深远的影响。

## 2.2.2 量纲

由上述讨论可知，物理学的导出量、导出单位与基本量、基本单位之间存在着确定的关系。这种关系可以用**量纲**（dimension）或**量纲式**表示。在力学中，用字母 L、M、T 分别表示长度、质量和时间的量纲，力学中的其它力学量  $Q$  的量纲可按照它与基本量的关系表示如下

$$[Q] = L^p M^q T^r \quad (2.8)$$

式（2.8）称为力学量  $Q$  的量纲或量纲式。例如，速度的量纲为： $[v] = [r]/[t] = LT^{-1}$ ；加速度的量纲为： $[a] = [v]/[t] = LT^{-2}$ ；力的量纲为： $[F] = [m][a] = LMT^{-2}$ 。

在实际问题中，引入量纲还有以下用途：（1）初步检验物理公式是否正确。因为一个等式的两端以及等式中各项的量纲必须一致，否则就不成立。（2）便于不同单位制之间进行单位换算。（3）给某些复杂的物理现象和规律提供解决问题的线索。

## § 2.3 基本力与常见力

我们在日常生活中遇到各种各样的力，如重力、绳子的张力、摩擦力、地面的支撑力、空气阻力等。从最基本的层次看，上述各种力分别属于两大范畴：（1）引力，如重力就属于引力范畴；（2）电磁力。其实绳中的张力、摩擦力、地面的支撑力、空气阻力等，从微观上看，无一不是原子、分子间电磁相互作用的宏观表现。除引力、电磁力外，目前我们只知道自然界还有另外两种基本力：（3）弱力（与某些放射性衰变有关）；（4）强力（将原子核内质子和中子“胶合”在一起的力，以及强子内部更深层次的力）。由于后两种力的力程太短了，我们的感官不可能直接感受到它们。这四种基本相互作用也

叫基本力, 下面我们先介绍基本力。

## 2.3.1 基本力

### 1. 万有引力

**万有引力** (universal gravitation) 是存在于任何两个物体之间的吸引力, 它的规律是由胡克、牛顿等人发现的。按牛顿**万有引力定律** (law of universal gravitation), 质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的两个质点, 相距为  $r$  时, 它们之间的万有引力为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.9)$$

式中  $G$  叫做万有引力常数, 在国际单位制中, 它的大小经测定 (目前公认的数值) 为

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

式 (2.9) 中的质量反映了物体的引力性质, 叫做**引力质量**, 它和反映物体惯性的质量在意义上是不同的。但实验证明, 同一物体的这两个质量是相等的, 因此可说它们是同一质量的两种表现, 不必加以区分。

### 2. 电磁力

**电磁力** (electromagnetism) 包括存在于静止电荷之间的电场力以及存在于运动电荷之间的电场力和磁场力。由于它们在本质上相互联系, 所以总称为**电磁力**。在微观领域中, 还发现有些不带电的中性粒子、由于具有固有磁矩也参与电磁相互作用。电磁力和万有引力一样都是长程力。但与万有引力不同, 它既有表现为引力的, 也有表现为斥力的, 而且比万有引力大得多。两个质子之间的电场力要比相同距离下的万有引力大  $10^{36}$  倍。

由于分子和原子都是由带电粒子组成的, 它们之间的作用力基本上就是电磁力。物体之间的弹力和摩擦力以及气体的压力、浮力、粘滞阻力等等都是相邻原子或分子之间相互作用的宏观表现, 因此基本上也是电磁力。

### 3. 强力

当人们对物质结构的探索进入到比原子还小的微观领域中时, 发现在核子、介子和



超子之间存在一种**强相互作用力**（strong interaction），简称**强力**。正是这种力把原子内的所有质子以及中子紧紧地束缚在一起，形成原子核。强力是比电磁力更强的基本力，两个相邻质子之间的强力可达 $10^4\text{ N}$ ，比电磁力大 $10^2$ 倍。强力是一种短程力，其作用范围很短。粒子之间距离超过 $10^{-15}\text{ m}$ 时，强力小得可以忽略；小于 $10^{-15}\text{ m}$ 时，强力占主要支配地位；而且直到距离减小到大约 $0.4\times 10^{-15}\text{ m}$ 时，它都表现为引力；距离再减小，强力就表现为斥力。

#### 4. 弱力

在微观领域中，人们还发现一种短程力，叫**弱相互作用力**（weak interaction），简称**弱力**。它也存在于许多粒子之间。弱力仅在粒子间的某些反应（如 $\beta$ 衰变）中才显示出它的重要性。弱力的力程比强力还要短，而且力很弱，两个相邻质子之间的弱力只有 $10^{-2}\text{ N}$ 左右。

上述这四种基本力的作用范围（力程）是不一样的。万有引力与电磁力的作用范围是不受限制的，可达无限远，故称为长程力；强相互作用力的范围是 $10^{-15}\text{ m}$ ，而弱相互作用力的范围是 $10^{-18}\text{ m}$ ，故称为短程力。这四种力的强度相差很大，如以距离 $10^{-15}\text{ m}$ 处强相互作用力的强度为1，则其它力的相对强度分别为：电磁力是 $10^{-2}$ ，弱相互作用力是 $10^{-13}$ ，而万有引力仅是 $10^{-38}$ 。由此可见，万有引力是这四种相互作用力中强度最弱的一种，而且相差悬殊。因此，在讨论电磁力时，如不特别说明，万有引力所引起的影响可以略去不计。

在头绪纷繁、形式多样的力中，人们认识到基本力只有四种，这是本世纪三十年代物理学的一大成就。从此以后，人们就企图发现这四种力之间的联系。爱因斯坦一生最大的愿望就是追求世界的和谐、简洁和统一，他企图把万有引力和电磁力统一起来，但没有成功。六十年代，格拉肖(S.L. Glashow)、温伯格(S. Weinberg)和萨拉姆(A. Salam)在杨振宁等提出的理论基础上，发展了弱力与电磁力相统一的理论，并在七十年代和八十年代初得到了实验的证明，这是物理学发展史上又一个里程碑。人们期待有朝一日，能建立起弱、电、强的“大统一”理论，以致最后创立统一四种基本力的超统一理论。

### 2.3.2 常见力

## 1. 重力

地球表面附近的物体都受到地球的吸引作用，这种因地球吸引而使物体受到的力叫做**重力**（gravity）。在重力作用下，任何物体产生的加速度都是重力加速度  $g$ 。重力的方向和重力加速度的方向相同，都是竖直向下的。

重力是由地球对它表面附近的物体产生的万有引力引起的，如果忽略地球自转的影响，物体所受的重力就等于它所受的万有引力（其误差不超过 0.4%，严格来讲，重力是物体所受地球万有引力的一个分量，另一个分量提供物体随地球做圆周运动时所需的向心力）。设地球的质量为  $M$ ，半径为  $R$ ，物体的质量为  $m$ ，在忽略地球自转的影响时有

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

由此得重力加速度的大小为

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (2.10)$$

重力的存在主要是由于地球对物体的万有引力，在地面附近和一些要求精度不高的计算中，可以认为重力近似等于地球对物体的万有引力。对于地面附近的物体，当物体高度的变化与地球半径（约为 6370 km）相比极为微小时，可以认为它到地心的距离就等于地球半径，物体在地面附近不同高度时的重力加速度也就可以看作是常量。当地面下方某处存在大型矿藏时，地球质量的对称分布会受到破坏，从而会使该处的重力加速度的数值表现出异常。利用这一点，可通过测定重力加速度来探矿，这种方法叫做重力探矿法。

## 2. 弹性力

发生形变的物体，由于要恢复原状，对与它接触的物体会产生力的作用。这种力叫做**弹性力**（elastic force）。弹性力是产生在直接接触的物体之间并以物体的形变为先决条件的，弹性力的表现形式是多种多样的，下面只讨论三种表现形式。

一种是两个物体通过一定面积相互挤压的情形。这时相互挤压的两个物体都会发生形变，即使小到难于观察，但形变总是存在的，因而产生对对方的弹性力作用。例如，重物放在桌面上，桌面受重物挤压而发生形变，产生一个向上的弹性力；又如屋架压在柱子上，柱子因压缩形变也产生向上的弹性力托住屋架。这种弹性力通常叫做**正压力**或

**支承力**。它们的大小取决于相互挤压的程度，它们的方向总是垂直于接触面而指向对方。

另一种弹性力是绳索对物体的拉力，这种拉力是因绳索发生了伸长形变而产生的，其大小取决于张紧的程度，它们的方向总是沿着绳索而指向绳索收紧的方向。绳索中产生拉力时，其内部各段之间也有弹性力作用，这种内部的弹性力叫做**张力**。在很多实际问题中，绳索的质量往往可以忽略，这时，可以认为绳索上各点的张力都是相等的，而且就等于外部拉力。

还有一种常见的弹性力就是弹簧的弹性力。当弹簧被拉伸或压缩时，它就会对与之相连的物体有弹性力作用（见图 2.2），这种弹性力总是力图使弹簧恢复原状，所以又叫做**弹性恢复力**。这种恢复力在弹性限度内，其大小和形变成正比。若以  $F$  表示弹簧的弹性力，以  $x$  表示形变量，即弹簧的长度变化，弹簧伸长时  $x > 0$ ，弹簧压缩时  $x < 0$ ，如图 2.2 所示，则有

$$F = -kx \quad (2.11)$$

式中  $k$  叫弹簧的**劲度系数**或**倔强系数**，负号表示弹力的方向总是和弹簧形变的方向相反，这就是说，弹性力总是指向要恢复它原长的方向。式（2.11）常被称为**胡克定律**。

### 3. 摩擦力

两个相互接触的物体在沿接触面有相对运动时，或者有相对运动的趋势时，在接触面之间产生一对阻止相对运动或者相对运动趋势的力，叫做**摩擦力**（friction force）。相互接触的两个物体在外力作用下，虽有相对运动的趋势，但还没有相对运动，这时的摩擦力叫**静摩擦力**（static friction force）。所谓相对运动的趋势指的是，假如没有静摩擦，物体将发生相对滑动，正是静摩擦力的存在，阻止了物体相对滑动的出现。值得注意的是，每个物体所受静摩擦力的方向与该物体相对于另一物体的运动趋势的方向相反。静摩擦力的大小视外力的大小而定，介乎 0 和某个最大静摩擦力  $f_0$  之间。实验证明，最大静摩擦力正比于正压力  $N$ ，即

$$f_0 = \mu_0 N \quad (2.12)$$

$\mu_0$  叫做最大静摩擦系数，它与接触面的材料和表面情况有关，它的大小通常在工程手册

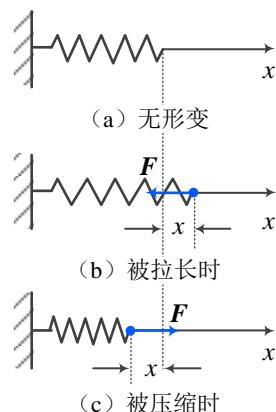


图2.2 弹簧的弹性力

中给出。

当两个相互接触的物体之间有相对运动时，这两个物体之间的摩擦力，叫做**滑动摩擦力**（sliding friction force）。实验表明，滑动摩擦力  $f$  也与正压力  $N$  成正比，即

$$f = \mu N \quad 2.13)$$

$\mu$  叫做滑动摩擦系数。它也和相互接触的两物体的材料和表面情况有关，而且还和物体的相对速度有关。在大多数情况下，它随速度的增大而减小。

对于给定的一对接触面来说， $\mu_0 > \mu$ ，一般两者都小于 1。在正常的速率范围内，可认为  $\mu$  和速率无关，而且在一般问题的简要分析中还可认为  $\mu_0$  和  $\mu$  大致相等。

## § 2.4 牛顿运动定律的应用

牛顿的三条运动定律是一个整体，不能只注意牛顿第二定律，而把其他两条定律置之脑后。牛顿第一定律是牛顿力学的思想基础，它说明任何物体都有惯性，牛顿定律只能在惯性参考系中应用，力是使物体产生加速度的原因，不能把  $ma$  误认为力。牛顿第三定律指出了力有相互作用的性质，为我们正确分析物体受力情况提供了依据。通常在力学问题中，对每个物体来说，除重力外，其他外力都可以在该物体和其他物体相接触处去寻找，以免把作用在物体上的一些力遗漏掉。所有这些都是应用牛顿第二定律做定量计算时所必需考虑的。

利用牛顿定律求解动力学问题时，一般可按以下思路和步骤进行：

- (1) 认物体。明确研究对象。
- (2) 看运动。分析物体的运动状态。
- (3) 查受力。用隔离体法画出物体的受力分析图。
- (4) 选坐标。在选定的参照系中选取适当的坐标系。牛顿运动定律只适用于惯性系。
- (5) 列方程（组）。利用牛顿运动定律的分量形式列方程，当问题涉及几个物体时，还要找出各物体的速度或加速度之间的关系。
- (6) 解方程（组）。通过求解方程（组），解出所需结果，并对结果进行讨论，判断其是否合理和正确。

显然，上述求解思路既适用于高中物理，也适用于大学物理。两者的主要区别就在于在高中物理中力一般是恒定的；而在大学物理中，一般会涉及变力情况，此时就要用

牛顿第二定律的微分形式列方程，求解的是微分方程（组），通过分离变量用积分求解。

质点的动力学问题，一般可以分为两类基本类型。

### 第一类基本问题（求导类型）

已知质点的运动规律  $\mathbf{r}(t)$  以及质量  $m$ ，求质点所受到作用力  $\mathbf{F}(t)$ 。

这类问题解法通常是：先由  $\mathbf{r}(t)$  求出质点的速度  $\mathbf{v}(t)$  及加速度  $\mathbf{a}(t)$ ，然后由牛顿第二定律  $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$ ，求出质点所受的合外力  $\mathbf{F}(t)$ 。

### 第二类基本问题（积分类型）

已知质点所受的作用力  $\mathbf{F}(t)$  以及质量  $m$ ，求质点的速度  $\mathbf{v}(t)$  和运动规律  $\mathbf{r}(t)$ 。

这类问题的一般解法与第一类问题相反。首先应用牛顿第二定律  $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$ ，求出  $\mathbf{a}(t)$ ，后根据运动初始条件（ $t=0$  时， $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ， $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ ），即可求出任意时刻的速度  $\mathbf{v}(t)$  和运动规律  $\mathbf{r}(t)$ 。

简单比较一下，可以看出质点运动学中的两类问题和质点动力学中的两类问题是相通的。连接运动学和动力学问题的桥梁就是牛顿第二运动定律， $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 。下面，我们将举例说明这两类问题的求解方法。

**例 2.1** 已知质量为  $m$  的质点在  $O$ - $xy$  平面内做曲线运动，其运动方程式为

$$x = a \cos \omega t \quad y = b \sin \omega t$$

微视频2.3  
例题2.1

式中  $a$ 、 $b$ 、 $\omega$  均为恒量。试求此质点所受的作用力，并指出该力的方向。

**解** 由题设条件可知，质点在  $O$ - $xy$  平面内做曲线运动，任意时刻的位置矢量为

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$$

由速度及加速度的定义，可得质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + b\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - b\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}$$

再应用牛顿第二定律  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ，即可求出质点所受的作用力为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -ma\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - mb\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

上式表明，作用力  $\mathbf{F}$  的大小与质点位置矢量的大小成正比，方向相反，所以作用力

的方向总是指向坐标原点。

**例 2.2** 如图 2.3 所示, 一个质量为  $m_2 = 5.0 \times 10^2 \text{ g}$  的夹子, 以压力  $P = 120 \text{ N}$  夹着质量为  $m_1 = 1.0 \text{ kg}$  的木板, 已知夹子与木板间的摩擦系数  $\mu = 0.2$ 。问以多大的力  $F$  竖直往上拉时, 才会使木板脱离夹子?



图2.3 例2.2图

**解:** 对夹子和木板分别进行受力分析, 如图 2.4 所示。以向上为运动正方向, 设木板的加速度为  $a_1$ , 夹子的加速度为  $a_2$ 。根据牛顿第二定律列方程, 有

对木板:  $2f - m_1g = m_1a_1$

对夹子:  $F - 2f - m_2g = m_2a_2$

式中:  $f = \mu P$

木板脱离夹子的条件是:  $a_2 > a_1$ , 即

$$\frac{F - 2\mu P - m_2g}{m_2} > \frac{2\mu P - m_1g}{m_1}$$

所以有

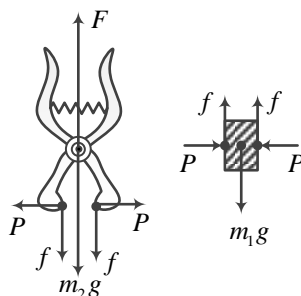


图2.4 例2.2的受力分析图

$$F > \frac{2\mu P(m_1 + m_2)}{m_1} = 72 \text{ (N)}$$

在生产实际中起重机的爪钩利用摩擦力吊起物体时要考虑这问题, 上升过程中加速过快时物体有脱落的危险。

**例 2.3** 质量  $M = 0.5 \text{ kg}$  的质点沿  $x$  轴做直线运动。已知  $t = 0$  时,  $v_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 且  $x_0 = 0$ 。若质点所受的合外力  $F = 2 + 3t + 5t^2 \text{ (N)}$ , 试求: 质点在任意时刻的速度和位置坐标。

**解** 由牛顿第二定律在  $x$  轴上的分量式:  $F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt}$  (在直线运动中, 式中下标可以忽略), 可得质点运动的加速度为

$$a = \frac{F}{m} = (4 + 6t + 10t^2) \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

即

$$\frac{dv}{dt} = 4 + 6t + 10t^2$$

对上式分离变量，并做定积分，有

$$\int_2^v dv = \int_0^t (4 + 6t + 10t^2) dt$$

积分可得质点的速度为

$$v = 2 + 4t + 3t^2 + \frac{10}{3}t^3 \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

又  $v = \frac{dx}{dt}$ ，即

$$dx = v dt = \left( 2 + 4t + 3t^2 + \frac{10}{3}t^3 \right) dt$$

再对上式两边做定积分，即

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left( 2 + 4t + 3t^2 + \frac{10}{3}t^3 \right) dt$$

积分得质点的位置坐标为

$$x = 2t + 2t^2 + t^3 + \frac{5}{6}t^4 \quad (\text{m})$$

**例 2.4** 质量为  $m$  的小球在水中受到的浮力为常数  $F$ ，当它从水面由静止开始下沉时，受到水的阻力大小为  $f = kv$ ，式中  $k$  为常数。试求：

- (1) 小球在水中下沉速度  $v$  与时间  $t$  的关系；
- (2) 小球在水中下沉深度  $y$  与时间  $t$  的关系。

**解：** (1) 小球在水中下沉时受力如图 2.5 所示，以水面为坐标原点，数值向下为  $y$  轴正方向。由牛顿运动定律可得

$$mg - F - kv = m \frac{dv}{dt}$$

将上式分离变量，并做定积分，

$$\int_0^t dt = \int_0^v \frac{m}{mg - F - kv} dv$$

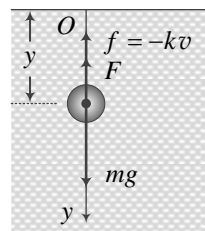


图2.5 例2.4图

由此可得

$$t = -\frac{m}{k} \ln \frac{mg - F - kv}{mg - F}$$

所以小球下沉速度与时间的关系为

$$v = \frac{mg - F}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

(2) 由速度的定义  $v = \frac{dy}{dt}$ ，并利用上述结论，可得

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mg - F}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

再对上式分离变量，并取定积分

$$\int_0^y dy = \int_0^t \frac{mg - F}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) dt$$

求解积分式，可得小球下沉深度与时间的关系为

$$y = \frac{mg - F}{k} \left[ t - \frac{m}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right]$$

**例 2.5** 如图 2.6 所示，一个质量为  $M$  的小滑块，在固定于光滑水平桌面上、半径为  $R$  的圆形轨道的内侧，以速率  $v_0$  从某点开始做圆周运动，滑块与轨道内侧的滑动摩擦系数为  $\mu$ 。试求：

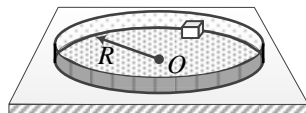


图2.6 例2.5图

- (1)  $t$  时刻滑块的速率及轨道内侧对滑块的正压力；
- (2) 当滑块的速率由  $v_0$  减小到  $v_0/2$  时，滑块滑过的距离。

**解** (1) 滑块的受力如图 2.7 所示，其中： $mg$  为重力， $N_2$  为桌面支持力， $N_1$  为轨道内侧对它的正压力，指向圆心， $f$  为轨道内侧对滑块的摩擦力，沿切线方向且与速度方向相反。 $N_2$  与  $mg$  互相平衡。利用牛顿第二定律沿切向和法向的分量式，可得

$$N_1 = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$



且

$$-f = m \frac{dv}{dt}$$

$$f = \mu N_1$$

所以

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R}$$

分离变量并积分

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v -\frac{R}{\mu v^2} dv$$

由此解得

$$t = \frac{R}{\mu} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right)$$

即任意时刻滑块的速度大小为

$$v = \frac{Rv_0}{\mu v_0 t + R} \quad (5)$$

将⑤式代入①式，可得轨道内侧对滑块的正压力为

$$N_1 = m \frac{v^2}{R} = \frac{mRv_0^2}{(\mu v_0 t + R)^2}$$

(2) 因为滑块的切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} \quad (6)$$

由④、⑥两式，可得

$$v \frac{dv}{ds} = -\mu \frac{v^2}{R}$$

对上式分离变量并取定积分，即

$$\int_0^s ds = \int_{v_0}^{v_0/2} -\frac{R}{\mu v} dv$$

由此可得当速度减小到  $v_0/2$  时，滑块滑动的距离为

$$s = \frac{R}{\mu} \ln 2$$

这个结果也可以由⑤式直接求出。由⑤式可知，当  $v_1 = \frac{v_0}{2}$  时， $t_1 = \frac{R}{\mu v_0}$ ；又因为

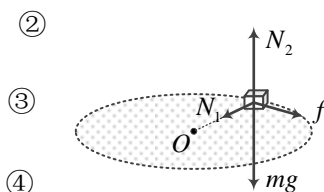


图2.7 例2.5解图

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{Rv_0}{\mu v_0 t + R}$$

将上式分离变量并积分，即

$$\int_0^s ds = \int_0^t \frac{Rv_0}{\mu v_0 t + R} dt$$

求解可得

$$s = \frac{R}{\mu} \ln 2$$

**例 2.6** 由地面竖直向上发射一个质量为  $m$  的宇宙飞船，如图 2.8 所示。试求宇宙飞船能脱离地球引力所需的最小初速度。不计空气阻力及其他作用力。

**解** 以宇宙飞船为研究对象，竖直向上为  $r$ （即飞船运动）的正方向，由于飞船只受地球引力作用，故根据万有引力定律和牛顿第二定律，可得

$$m \frac{dv}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

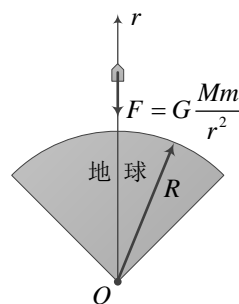


图2.8 例2.7图

利用

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr} \quad \text{及} \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

式中  $g$  为地球表面处的重力加速度， $R$  和  $M$  分别是地球的半径和质量，可将①式改写为

$$v \frac{dv}{dr} = -G \frac{M}{r^2} = -gR^2 \frac{1}{r^2}$$

对上式分离变量，有

$$v dv = -gR^2 \frac{1}{r^2} dr \quad (2)$$

设飞船在地面附近（ $r=R$ ）发射时的初速度为  $v_0$ ，在  $r$  处的速度为  $v$ ，对②式两边同时取定积分，得

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_R^r \left( -gR^2 \frac{1}{r^2} \right) dr$$

故

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gR^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)} \quad (3)$$

要使飞船脱离地球引力的作用，则意味着当飞船离地心的距离  $r \rightarrow \infty$  时，仍然有  $v \geq 0$ 。将  $r \rightarrow \infty$  时  $v = 0$ ，代入③式，即可求得飞船脱离地球引力所需的最小初速度（取地球的平均半径为 6370km）为

$$v_0 = \sqrt{2gR} = 11.2 \times 10^3 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

这个速度称为第二宇宙速度。第一宇宙速度是使物体可以环绕地球表面运行所需的最小速度，其值为  $7.90 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。第三宇宙速度则是要使物体脱离太阳系，物体在地面上相对于地面的最小发射速度，其值为  $1.67 \times 10^4 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

## \* § 2.5 非惯性系 惯性力

### \*2.5.1 惯性系 非惯性系

在质点运动学中，人们认为参照系的选择可以是任意的。然而牛顿运动定律并不是对所有参照系都成立。在日常生活中我们发现，原来静止在匀速行驶的汽车中的人，当汽车突然加速时会向后倾倒，当汽车转弯时会向外侧倾倒，虽然并没有其他物体对他作用，但从汽车上看，人的运动状态却改变了。这表明，若以变速运动的汽车为参考系，牛顿运动定律并不成立。若我们以地面为参考系分析这一现象，将发现牛顿运动定律仍然成立。我们把牛顿运动定律在其中成立的参考系称为惯性参考系，简称惯性系（inertial system），牛顿运动定律不成立的参照系称为非惯性系（non-inertial system）。上例中地面以及相对于地面做匀速直线运动的汽车就是一个惯性系，而相对于地面做变速运动的汽车是非惯性系。

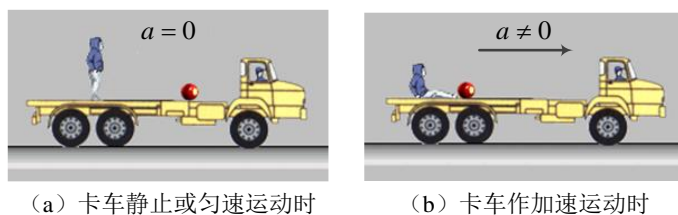


图2.9 惯性系与非惯性系（图片来源Internet）

如何判断一个参考系是否是惯性系？最根本的办法是依靠观察和实验。许多实验观

测表明，以地球为参考系时，在观察精度不太高时，地球上物体的运动都相当准确地服从牛顿运动定律。所以，地球是一个较好的惯性系。但在精密观测时可以发现理论预期与实验结果之间有微小的偏差，这表明地球参考系并不是一个理想的惯性系。特别是在研究河床冲刷、大气环流与信风等大尺度、长时间的运动问题时，地球的非惯性系因素不能忽略。与地球参考系相比，太阳——恒星系是更为精确的惯性系。

一切相对于某个惯性系做匀速运动的参照系都是惯性系；相对于惯性系做加速运动的参照系都是非惯性系。

## \*2.5.2 惯性力

一个参考系  $S$  相对于某个惯性系  $S_0$  的运动，可以看成是由两部分组成的：（1）跟随原点  $O$  的平动，即固定在参考系  $S$  上的任一直线，其方向始终保持不变的运动；（2）坐标轴围绕原点  $O$  的转动。例如，固定在地面上的参考系，其原点  $O$  随着地球的自转而绕地轴  $C$  做圆周运动，其坐标系的运动可以分解为随原点的平动和围绕原点的转动两部分，如图 2.10 所示。

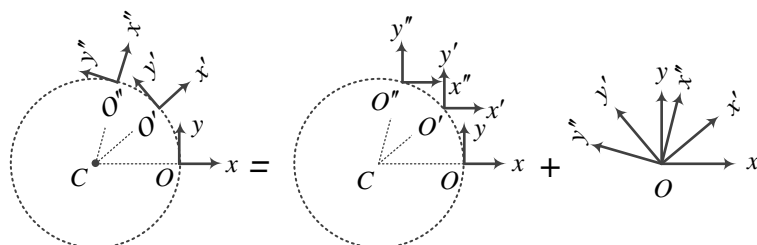


图2.10 固定在地面（非惯性）上的坐标系的运动

下面我们将会看到，加速平动的结果将产生一个平动惯性力，转动的结果将产生离心力和科里奥利力两种惯性力。

### 1. 平动加速参照系 平动惯性力

假设非惯性系  $K'$  相对于惯性系  $K$  以加速度  $\mathbf{a}_0$  做平动，则由相对运动（参见 § 1.5）规律可知，质点相对于  $K'$  系和  $K$  系的加速度  $\mathbf{a}'$  和  $\mathbf{a}$  满足

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' \quad (2.14)$$

在惯性系  $K$  中，牛顿运动定律成立，即

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}') \quad (2.15)$$

式中  $\mathbf{F}$  是质点受到的合外力。但在非惯性系  $K'$  中，牛顿运动定律显然不成立，即

$$\mathbf{F} \neq m\mathbf{a}'$$

但是，若将式 (2.15) 移项，则有

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 = m\mathbf{a}' \quad (2.16)$$

式 (2.16) 表明，如果将 “ $-m\mathbf{a}_0$ ” 看作是质点在非惯性系中受到的一个附加的力——称为**平动惯性力**，用  $\mathbf{F}_0$  表示，即

$$\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}_0 \quad (2.17)$$

并将  $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0$  看作是质点在非惯性参照系中受到的“合外力”，则在非惯性系  $K'$  中，牛顿第二定律在形式上又成立了，即

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}' \quad (2.18)$$

上述讨论表明，尽管牛顿运动定律在非惯性系中不成立，但是当我们引入“惯性力”概念后，我们仍然可以在**形式上**用牛顿运动定律来讨论（或求解）实际问题。这是引入惯性力的主要目的。由惯性力的定义式 (2.17) 可知，惯性力的大小等于物体的质量与该非惯性系的加速度的乘积，方向与该非惯性系的加速度的方向相反。由于惯性力的大小与物体的质量成正比。这一特征使惯性力与引力类似。

必须指出：惯性力是人们在非惯性参照系中，为了**在形式上**仍然能够用牛顿运动定律求解问题，而引入的一种虚拟的、假象的力。惯性力并非物体间的相互作用力，它既没有施力者，也没有反作用力；但是在非惯性系中，惯性力是可以用弹簧秤等测力器测量出来的，例如在加速上升的电梯中、人们确实能感受到惯性力的“压迫”，从这个意义上可以说惯性力是“实在”的力。实质上，在非惯性系中惯性力的这种效应，从惯性系来看完全是运动物体惯性的一种表现形式。

## 2. 匀速转动参照系 惯性离心力

匀速转动参照系也是一种常见的非惯性系。如图 2.11 所示，水平转盘以匀角速度  $\omega$  绕通过圆心的垂直轴转动，质量为  $m$  的小球用长度为  $R$  的绳子与转轴相连静止在圆盘上，并随圆盘一起转动。站在地面上的观察者看来，小球  $m$  以匀角速度  $\omega$  随圆盘一起转动，

绳子施于小球的拉力  $\mathbf{F}_T$  提供了小球做匀速圆周运动时所需的向心力，即

$$\mathbf{F}_T = -m \frac{v^2}{R} \mathbf{r}^0 = -m\omega^2 R \mathbf{r}^0 \quad (2.19)$$

式中  $\mathbf{r}^0$  表示径向单位矢量。这表明在地面参照系中，小球的运动符合牛顿运动定律。

但是，从圆盘这个转动参照系中来看，小球受到合外力  $\mathbf{F}_T$  的作用，但是静止不动。为了在转动参照系中，仍然能够用牛顿运动定律解释该现象，需要引入一个虚拟的惯性力  $\mathbf{F}_0$ ，该力与绳子的拉力  $\mathbf{F}_T$  大小相等、方向相反，即

$$\mathbf{F}_0 = -\mathbf{F}_T = m\omega^2 R \mathbf{r}^0 = -m\mathbf{a}_n \quad (2.20)$$

由于该力的方向总是背离圆心，所以称为**惯性离心力**（inertial centrifugal force）。式（2.20）表明惯性离心力的大小等于物体质量与向心加速度大小的乘积，方向与向心加速度的方向相反，背离圆心。

于是在引入惯性离心力后，在转动参照系中，物体受到的“合外力”为

$$\mathbf{F}_T + \mathbf{F}_0 = 0$$

所以小球保持静止，牛顿运动定律再次成立。

### \*\*3 科里奥利力

如果物体在匀速转动参考系中不是静止的，而是以速度  $\mathbf{v}$  做相对运动，那么在该转动参考系中的观测者看来，物体除了受到离心惯性力的作用外，还将受到另外一种惯性力——**科里奥利力**（Coriolis force）的作用。

为了较直观地理解科里奥利力的起因，我们以图 2.12 为例来讨论。在绕垂直轴  $O$  以匀角速度  $\omega$  转动的圆盘上，一个质量为  $m$  的质点以速度  $\mathbf{v}'$  沿半径  $OC$  相对于圆盘沿径向做匀速运动。在  $\Delta t$  时间内，质点  $m$  由  $A$  点运动到了  $B$  点，所经过的距离为  $AB = v' \cdot \Delta t$ 。与此同时，因圆盘相对于惯性系转了一个角度  $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$ ，半径  $OC$  转到了  $OC'$ ，因而质点  $m$  实际到达了  $B'$  点。

由圆盘外惯性系中的观测者来看，质点  $m$  同时参与了两

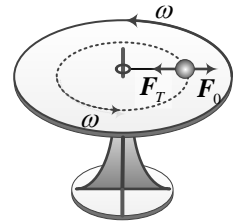


图2.11 转动参照系中的惯性离心力

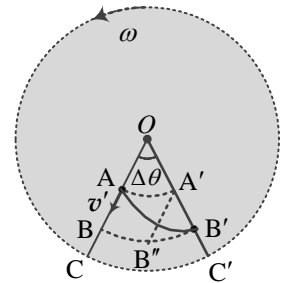


图2.12 质点在转动参照系中的运动

个运动：以速度  $\mathbf{v}'$  相对于圆盘的径向运动，以及随圆盘的匀速转动。如果圆盘不转，质点只是相对于圆盘运动，在  $\Delta t$  末质点到达 B 点；如果质点相对于圆盘不动，只要圆盘转动，则在  $\Delta t$  末质点到达 A' 点。现在，质点  $m$  同时参与了两个运动，似乎在  $\Delta t$  末质点应该到达 B'' 点（A'B''//AB），但实际上质点到达了 B' 点，这是由于质点  $m$  在沿径向移动的过程中距转轴 O 的距离  $r$  在不断地增大，它因圆盘转动而获得的横向速度  $v_\theta = r\omega$  也在不断地增大的缘故。

为了得出表征质点横向速度  $v_\theta$  变化快慢的横向加速度  $a_\theta$ ，可作如下简化考虑：当  $\Delta t$  很小时，质点  $m$  在  $\Delta t$  内所走过的附加路程为

$$\Delta s = B''B' = A'B''\Delta\theta = v'\Delta t \cdot \omega\Delta t = v'\omega(\Delta t)^2$$

在极限情况下， $\Delta t \rightarrow 0$ ，可以应用匀变速直线运动公式

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_\theta (\Delta t)^2$$

对比可得

$$a_\theta = 2v'\omega \quad (2.21)$$

其方向与质点相对于圆盘的速度  $\mathbf{v}'$  垂直并指向运动方向的左侧。

为使质点获得这个横向加速度，必须施加给它一个与  $\mathbf{v}'$  垂直并指向运动方向左侧的横向力

$$F_\theta = ma_\theta = 2mv'\omega \quad (2.22)$$

实际上常把质点  $m$ （例如小球）放入圆盘上的径向方槽里，该横向力是由槽壁提供的。否则质点  $m$  不可能沿径向相对于圆盘做匀速直线运动。

但是，在匀角速转动的圆盘这个非惯性系中的观测者来看，质点  $m$  所做的是沿半径方向的匀速直线运动，没有横向运动。因此，为了能够用牛顿运动定律对此做出解释，必须设想有一个附加的惯性力（称为**科里奥利力**） $F_c$  与槽壁施加的横向力  $F_\theta$  平衡，它的大小为

$$F_c = 2mv'\omega$$

其方向与质点  $m$  相对于圆盘的速度  $\mathbf{v}'$  垂直，但指向质点运动方向的右侧（与  $F_\theta$  反向），使得

$$\mathbf{F}_\theta + \mathbf{F}_c = 0$$

可以证明，在一般情况下，当质点  $m$  以任意取向的速度  $\mathbf{v}$  相对于转动参考系运动时，科里奥利力可用下列矢量式表示

$$\mathbf{F}_c = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.23)$$

式中矢量  $\boldsymbol{\omega}$  为转动参考系的角速度， $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  表示矢量  $\mathbf{v}$  与  $\boldsymbol{\omega}$  的矢积。由式 (2.23) 可得，科里奥利力的大小为

$$F_c = 2m v \omega \sin \theta \quad (2.24)$$

其中  $\theta$  是矢量  $\mathbf{v}$  与矢量  $\boldsymbol{\omega}$  之间的夹角。方向根据右手螺旋法则，由矢量积 “ $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ ” 的方向确定。只要  $\mathbf{v}$  与  $\boldsymbol{\omega}$  不平行，即  $\theta \neq 0$ ，就有科里奥利力作用在质点上。

文档2.1  
傅科摆



(a) 法国先贤祠内的傅科摆



(b) 傅科摆演示仪

图2.13 傅科摆

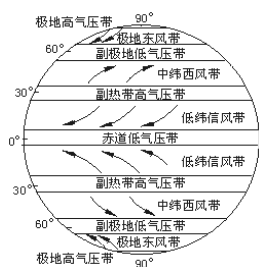
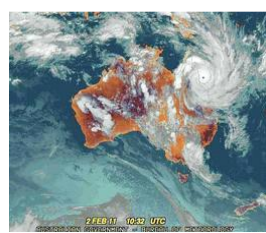


图2.14 赤道附近信风的形成



(a) 北半球：逆时针气旋



(b) 南半球：顺时针气旋

图2.15 南北半球上热带风暴（旋风）卫星云图

由于自转的存在，地球并非是一个严格的惯性系，而是一个转动参照系，因而地面上物体的运动会受到科里奥利力的影响。这有助于解释**傅科摆**（Foucault pendulum）（图 2.13）中振动面的旋转现象，以及北半球的河流右岸为什么总是比左岸冲刷的更加严重；也可以解释赤道附近信风风向形成的原因（图 2.14），还可以解释地球上旋风（热带风



暴)在南北半球旋转方向不同的原因(图 2.15)。

## 思考题

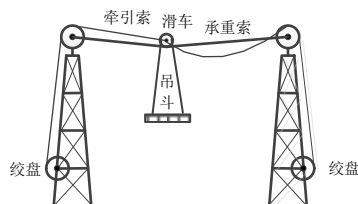
2.1 有人认为牛顿第一定律不对,理由是:根据日常经验事实,要维持物体的运动,必需有动力,否则它就会趋于停止。所以第一定律与事实不符。而且宇宙间根本就不存在不受力的物体,所以第一定律的条件不存在,因而不存在由它决定的运动状态。你如何评价这种看法?

2.2 有人认为牛顿第一定律可有可无。因为“若加速度为零,第二定律就变成惯性定律,所以第一定律只是牛顿第二定律的特例”。对此,你如何认识?

2.3 为使静止在湖中的船靠岸,可将绳的一端拴在岸边的树上,船上的人用力拉绳;或绳的一端接在船上,岸上的人用同样的力拉绳;或岸上船上各一人同时用上述同样的力拉绳。问哪种情况船靠岸所需时间最短?

2.4 汽车靠地面的摩擦力才能前进(如果地面无摩擦,汽车是不能前进的),但地面的摩擦力又阻碍它的运动,这个矛盾应如何解释?

2.5 用绳子系一小物体,使其在铅直平面内做圆周运动,当这物体达到最高点时。有人说:“此时物体受到重力、绳子的张力以及向心力的作用”,又有人认为:“因为这三个力都是向下的,但物体不因此下落。可见物体还受到一个向上的离心力和这些力平衡。”这两种说法对吗?你做判断的根本依据是什么?



题 2.6 图

2.6 在工程建设中,常用架空索道通过吊斗运料过河(如图)或通过峡谷。理论和实践都表明,架空索道的承重索不能绷得太直。根据经验,中央垂度 $\delta$ 与跨距 $l$ 之比 $\delta/l = 0.03 \sim 0.05$ 为宜,试说明其中的道理。

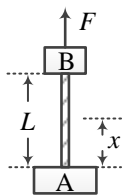
2.7 在升降机中用(1)弹簧秤、(2)等臂分析天平分别称量同样物体,当升降机突然加速上升时,各有什么结果?

## 习题

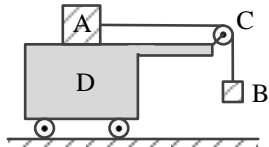
2.8 如图所示,质量 $m = 2.0\text{kg}$ 的均匀绳,长 $L = 1.0\text{m}$ ,两端分别连接重物 A 和 B,  $m_A = 8.0\text{kg}$ 、 $m_B = 5.0\text{kg}$ ,今在 B 端施以大小为 $F = 180\text{N}$ 的竖直拉力,使绳和物体向上运动,求距离绳的下端为 $x$ 处绳中的张力 $T(x)$ 。

2.9 水平面上有一质量 $M = 51\text{kg}$ 的小车 D,其上有一定滑轮 C。通过绳在滑轮两侧分别连有质量为 $m_1 = 5\text{kg}$ 和 $m_2 = 4\text{kg}$ 的物体 A 和 B,其中物体 A 在小车的水平台面上,物体 B 被绳悬挂。各接触面和滑轮轴均光滑。系统处于静止时,各物体关系如图所示。现在让系统运动,试求:以多大的水平力 $F$ 作用于小车上,才能使物体 A 与小车 D 之间无相对滑动。(滑轮和绳的质量均不计,绳与滑轮间无

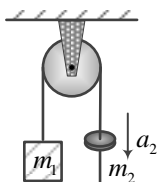
相对滑动)



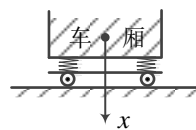
题 2.8 图



题 2.9 图



题 2.10 图



题 2.11 图

2.10 如图所示, 一条轻绳跨过一个轻质滑轮(滑轮与轴间摩擦可忽略), 在绳的一端挂一个质量为  $m_1$  的物体, 在另一端穿过一个质量为  $m_2$  的圆环。试求: 当圆环相对于绳以恒定的加速度  $a_2$  沿绳向下滑动时, 物体和圆环相对地面的加速度各是多少? 圆环与绳间的摩擦力多大?

2.11 一质量为  $m$  的汽车车厢在车架弹簧上做上下振动, 以竖直向下为  $x$  轴的正方向, 车厢的平衡位置作为坐标原点  $O$ , 其运动规律为  $x = A \sin \omega t$ , 式中  $A$ 、 $\omega$  为恒量。试求: 弹簧对车厢的支承力。

2.12 质量为  $m$  的质点在空气中无初速地自由下落时, 在速度不大的情况下, 阻力  $F$  的大小和速度成正比, 即  $F = -kv$ , 式中  $k$  为常数。试求: 质点下落速度随时间的变化关系。

2.13 质量为  $m$  的物体, 由地面以初速  $v_0$  竖直向上发射, 物体受到空气阻力的大小为  $F_r = kv$ 。试求:

- (1) 物体发射到最大高度所需要的时间;
- (2) 物体能到达的最大高度。

2.14 质量为  $m$  的子弹以速度  $v_0$  水平射入沙土中, 设子弹所受阻力与速度反向, 大小与速度成正比, 比例系数为  $k$ , 忽略子弹重力的影响。试求:

- (1) 子弹射入沙土后, 速度随时间变化的函数式;
- (2) 子弹进入沙土的最大深度。

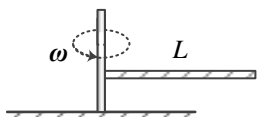
2.15 已知一质量为  $m$  的质点在  $x$  轴上运动, 质点只受到指向原点的引力的作用, 引力大小与质点离原点的距离  $x$  的平方成反比, 即  $f = -k/x^2$ ,  $k$  是比例常数。设质点在  $x = A$  时的速度为零, 求质点在  $x = A/4$  处的速度的大小。

2.16 飞机降落时的着地速度大小  $v = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , 方向与地面平行, 飞机与地面间的摩擦系数  $\mu = 0.10$ , 迎面空气阻力为  $C_x v^2$ , 升力为  $C_y v^2$  ( $v$  是飞机在跑道上的滑行速度,  $C_x$  和  $C_y$  为某两常量)。已知飞机的升阻比  $k = C_y / C_x = 5$ , 试求: 飞机从着地到停止这段时间所滑行的距离。(设飞机刚着地时对地面无压力)

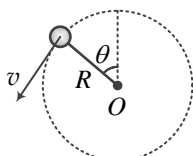
2.17 一条质量均匀分布的绳子, 总质量为  $M$ 、长度为  $L$ , 一端拴在竖直转轴  $OO'$  上, 并以恒定的角速度  $\omega$  在水平面上旋转。设转动过程中绳子始终伸直不打弯, 且忽略重力的影响, 求距离转轴为  $r$

处绳中的张力  $T(r)$ 。

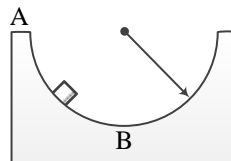
2.18 质量为  $m$  的小球，在水中受的浮力为常力  $F$ ，当它从静止开始沉降时，受到水的粘滞阻力大小为  $f = kv$  ( $k$  为常数)。试求：小球在水中沉降的深度与沉降速度  $v$  的函数关系。



题 2.17 图



题 2.19 图



题 2.20 图

2.19 质量为  $m$  的物体系于长度为  $R$  的绳子的一端，在竖直平面内绕固定点  $O$  做圆周运动。设  $t$  时刻物体瞬时速度的大小为  $v$ ，绳子与竖直向上的方向成  $\theta$  角，如图所示。

- (1) 求  $t$  时刻绳中的张力  $T$  和物体的切向加速度  $a_\tau$ ；
- (2) 说明在物体运动过程中  $a_\tau$  的大小和方向如何变化？

2.20 在地面上有一个半径为  $R$  的半圆槽，一个质量为  $m$  的滑块从静止开始从槽的边缘  $A$  点滑入槽内，如图所示。假设半圆槽内侧是光滑的，试求：

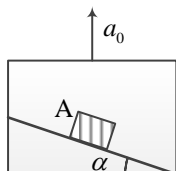
- (1) 滑块滑到槽底部  $B$  点时速率。
- (2) 滑块滑到与水平方向成  $30^\circ$  的半径方向时对槽内侧的正压力大小。

2.21 小车在水平地面上以  $a = 2\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  的匀加速度向右运动时，从高为  $2\text{m}$  的车顶上突然掉下一小球。略去空气阻力，并取重力加速度  $g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。试求

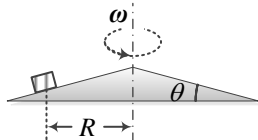
- (1) 小球相对于车厢的加速度的大小和方向；
- (2) 小球在车厢地板上的落地点距离掉落点的水平距离。

2.22 一升降机内有一倾角为  $\alpha$  的固定光滑斜面，如图所示。当升降机以匀加速度  $a_0$  加速上升时，质量为  $m$  的物体  $A$  沿斜面滑下，以升降机为参考系，试求

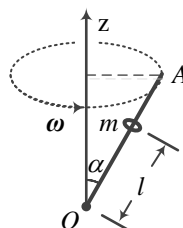
- (1)  $A$  对相对于升降机的加速度  $a'$
- (2)  $A$  相对于地面的加速度  $a$ 。



题 2.22 图



题 2.23 图



题 2.24 图

2.23 在倾角为  $\theta$  的圆锥体的侧面放一质量为  $m$  的小物体，圆锥体以角速度  $\omega$  绕竖直轴匀速转动，轴与物体间的距离为  $R$ 。为了使物体能在锥体该处保持静止不动，试以转动的椎体为参照系，求出物体

与锥面间的静摩擦系数至少为多少？简单讨论所得到的结果。

2.24 一光滑直杆  $OA$  与竖直轴  $Oz$  成  $\alpha$  角 ( $\alpha$  为常数)。直杆以匀角速度  $\omega$  绕  $Oz$  轴转动，杆上有一质量为  $m$  的小滑环，在距  $O$  点为  $l$  处与直杆相对静止如图示。试以  $OA$  杆为参考系求出此时杆的角速度  $\omega$ ，并讨论小滑环是否处于稳定平衡。