武汉大学数学与统计学院 2011－2012 第一学期

《线性代数 B》 （A 卷，54 学时）

学院__________ 专业 ____________ 学号______________ 姓名________

注：所有答题均须有详细过程，内容必须写在答题纸上，凡写在其它地方一律无效。

一、（**10** 分）计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

二、（12 分） 设 n 维向量 $\alpha=(x,0,\cdots,0,x)^T$，矩阵 $A=I-\alpha\alpha^T$，$A^{-1}=I+x\alpha\alpha^T$，求实数 x.

三、（16 分）设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}，且 r(A)=2，X 满足 AX+I=A^2+X，$$

求 a 和 X.

四、（16 分）已知方程组 $AX=b$ 中

$$A=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix},$$

就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对 λ 值进行讨论，并在有无穷多解时求其通解.

五、（16 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 1，2，3；矩阵 A 的属于特征值 1，2 的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-1)^T$.

1、 A 的属于特征值 3 的特征向量；

2、矩阵 A。

六、（20 分）对线性空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的向量组 A： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 B： β_1,β_2,β_3，讨论下面的问题：

1、向量组 B 是否能成为 $\boldsymbol{R}^3$ 中的基？能否用 A 线性表示 B？如果可以，试求出由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P，其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2-a\end{pmatrix}\quad \beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

且 a 为实数.

2、若 $\beta_1=k(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$, $\beta_2=k(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)$, $\beta_3=k(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$, k 是非零实数，

（1）给出向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关的一个充要条件，并证明之；

（2）给出矩阵 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 为正交阵的一个充要条件，并证明之.

七、（**10**分）设 n 阶实对称矩阵 $A\neq O$, 且其特征值全为非负数，I 为 n 阶单位阵，则行列式 $|A+I|>1$.