武汉大学数学与统计学院
2021--2022 学年第二学期线性代数 B 期末考试试卷(A 卷)

符号说明：$\det(\boldsymbol{A})$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；$R(\boldsymbol{A})$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵.

一、单项选择题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有________.

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=a$（$a\neq 0$）时，$|\boldsymbol{B}|=a$.　(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=a$（$a\neq 0$）时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则________.

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(3) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(4) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中未知量个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $R(\boldsymbol{A})=r$，则________.

(A) $r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

(B) $r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(C) $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(D) $r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

二、填空题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) 若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}=5$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=6$，则 $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2d & -2e & -2f \\ 4x+\alpha & 4y+\beta & 4z+\gamma \end{vmatrix}=$______.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $a=$_____.

(3) $\mathbb{R}^3$ 中向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标为________.

(4) 已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,4,5$. $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$________.

三、(10 分) 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & x_1+a_1b_2 & \cdots & x_1+a_1b_n \\ x_2+a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & \cdots & x_2+a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n+a_nb_1 & x_n+a_nb_2 & \cdots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix},\quad n\geq 3.$$

四、(10分)设$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$，其中$\boldsymbol{E}$是4阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$是4阶矩阵$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，且

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{A}$.

五、(10 分)设线性方程组(Ⅰ)：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$，与方程(Ⅱ)：$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求$a$的值及所有公共解.

六、(10 分)$\alpha_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}},\beta=(1,b,c)^{\mathrm{T}}$.试问：当$a,b,c$满足什么条件时，

（1）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性表出，且表示唯一；

（2）β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；

（3）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性表出，但表示不唯一，并求一般表达式。

七、(10 分)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$都是$n$维向量，其中$\alpha_4=2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$，记$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，已知$\boldsymbol{Ax}=\beta$的通解为$(1,1,-1)^{\mathrm{T}}+c(-3,4,2)^{\mathrm{T}}$，其中$c$为任意实数，求$\boldsymbol{By}=\beta$的通解。

八、(10 分)已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2.

(1) 求参数c及此二次型对应矩阵的特征值；

(2) 指出方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种二次曲面.

九、(10 分)设向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$线性无关，而$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$线性相关，证明：若$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都不能由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$线性表示，则向量组(1)：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{b}$与向量组(2)：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{c}$等价。

十、(6 分)设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$n$维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足$A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：

(1) 齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$仅有零解；

(2) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$是正定矩阵，其中$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{B}$的转置矩阵.