第 7 章 机械波 习题解答

7.1~7.12 思考题及答案略

7.13 一列沿 x 轴传播的平面简谐波，其波函数为 $y(x,t)=0.25\cos(8t+3x+\pi/4)$ (SI)。式中 t 以 s 计，x、y 以 m 计。

（1）试求该波的传播方向、频率、波长和波速；

（2）指出式中 $\pi/4$ 所代表的物理意义。

7.13 解 （1）因 x 和 t 前面的符号相同，所以此波沿 x 轴负方向传播。

将波函数与波动表达式的常用形式 $y=A\cos\left(2\pi\nu t+\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right)$ 比较，可得

$$2\pi\nu=8 \quad , \quad \frac{2\pi}{\lambda}=3$$

所以频率和波长分别为

$$\nu=\frac{4}{\pi}\text{Hz} \quad , \quad \lambda=\frac{2\pi}{3}\text{m}$$

再由 $u=\lambda\nu$，可得波速

$$u=\frac{2\pi}{3}\times\frac{4}{\pi}=2.67(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

（2）式中 $\pi/4$ 是 $x=0$（即坐标原点）处质点振动的初相位。

7. 14 一横波沿绳子传播时的波动表达式为 $y(x,t)=5.0\times10^{-2}\cos(10\pi t-4\pi x)$(SI)，式中 x 以 m 为单位，t 以 s 为单位。试求：

（1）此波的传播方向、波速、频率和波长；

（2）绳子上任一质点的振动速度和加速度的表达式以及速度和加速度的最大值；

（3）$x=0.2\text{m}$ 处的质点在 $t=1\text{s}$ 时的相位。它是坐标原点（$x=0$）处的质点在哪一时刻的相位?

7.14 解：（1）因 x 和 t 前面的符号不同，所以此波沿 x 轴正方向传播。

将已知的波动表达式与波动表达式的常用形式 $y(x,t)=A\cos\left(2\pi\nu t+\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right)$ 比较，可得

$$2\pi\nu=10\pi \quad , \quad \frac{2\pi}{\lambda}=4\pi$$

由此得频率、波长和波速分别为

$$\nu=5\text{Hz} \quad , \quad \lambda=0.5\text{m} \quad , \quad u=\lambda\nu=5\times0.5=2.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

（2）将波动表达式分别对时间求一阶和二阶偏导数，即可得速度和加速度的表达式为

$$v(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=-50\pi\times10^{-2}\sin(10\pi t-4\pi x)(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

$$a(x,t)=\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=-5\pi^2\cos(10\pi t-4\pi x)(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

由此得速度、加速度的最大值分别为

$$v_m = \omega A = 2\pi\nu A = 0.5\pi\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$a_m = \omega^2 A = (2\pi\nu)^2 A = 5\pi^2 (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

（3） $x = 0.2\mathrm{m}$ 处的质点在 $t = 1\mathrm{s}$ 时的相位为

$$10\pi\times1 - 4\pi\times0.2 = 9.2\pi$$

设这个相位也是坐标原点处的质点在 t_1 时刻的相位，则有

$$10\pi t_1 = 9.2\pi \quad 即 \quad t_1 = 0.92\mathrm{s}$$

7.15　一列沿 x 轴负方向传播的平面简谐波，振幅为 1.0cm，周期为 0.10s，波速为 $200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，开始计时时，测出坐标原点 O（即 $x = 0$）处的质元恰好通过平衡位置并向正方向运动，试求：

（1）坐标原点 O 处质元的振动表达式；

（2）波动表达式。

7.15 解：（1）设坐标原点处质元的振动表达式为

$$y_o(t) = A\cos(\omega t + \varphi_o)$$

由题意可知： $A = 1.0\mathrm{cm}$， $\omega = 2\pi/T = 20\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，且

$$y_o(0) = A\cos\varphi_o = 0 \quad , \quad v_o(0) = -A\omega\sin\varphi_o > 0$$

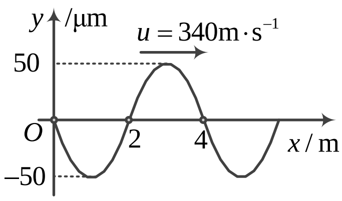
所以： $\varphi_0 = -\pi/2$ 由此得原点 O 处的振动表达式为

$$y_o(t) = 1.0\times10^{-2}\cos(20\pi t - \pi/2)\ \mathrm{m}$$

（2）波动表达式为

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_o\right] = 0.01\cos\left[20\pi\left(t + \frac{x}{200}\right) - \frac{\pi}{2}\right](\mathrm{m})$$

7.16 如图所示为 $t = 3T/4$ 时平面简谐波的波形曲线，试求其波动表达式。



习题7.16图

7.16 **解：** 由图得 $A = 50\mu\mathrm{m},\ \lambda = 4\mathrm{m},\ u = 340\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi u}{\lambda} = \frac{2\pi\times340}{4} = 170\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

设波动表达式为

$$y(x,t) = A\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_o\right]$$

又由波形图可知，在 $t = 3T/4$ 时刻， $x = 0$ 处的质元，其振动位移和速度分别为

$$y\left(0, \frac{3T}{4}\right) = A\cos\left[\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{4} + \varphi_o\right] = 0$$

$$v\left(0, \frac{3T}{4}\right) = -\frac{2\pi A}{T}\sin\left[\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{4} + \varphi_o\right] > 0$$

由此得

$$\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{4}+\varphi_o=\frac{3\pi}{2} \quad 即 \quad \varphi_o=0$$

所以波动表达式为

$$y\left(x,t\right)=5.0\times10^{-5}\cos\left[170\pi\left(t-\frac{x}{340}\right)\right]\mathrm{m}$$

7.17 一平面简谐波沿 x 轴正方向运动，已知：振幅为 $5.0\mathrm{cm}$，周期为 $20\mathrm{ms}$，波速为 $200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。现测得在 $t=30\mathrm{ms}$ 时，$x=3.0\mathrm{m}$ 处的质元恰好运动到负最大位移处。试求该波的波动表达式。

7.17 解：由题意可设波动表达式为

$$y\left(x,t\right)=A\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

其中：$A=5.0\mathrm{cm}$、$T=20\ \mathrm{ms}=0.02\mathrm{s}$，$u=200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，代入上式可得

$$y\left(x,t\right)=5.0\times10^{-2}\cos\left(100\pi t-\frac{\pi x}{2}+\varphi\right)(\mathrm{SI})$$

又因为 $x=3.0\mathrm{m}$ 处的质元，在 $t=30\mathrm{ms}$ 时，$y=-A=-5.0\ \mathrm{cm}$，所以有

$$100\pi\times0.03-\frac{\pi}{2}\times3+\varphi=\pi$$

由此解得

$$\varphi=-\pi/2$$

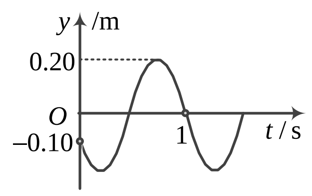
所以所求的波动表达式为

$$y\left(x,t\right)=5.0\times10^{-2}\cos\left(100\pi t-\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{SI})$$

7.18 一平面简谐波沿 x 轴正向传播，波长 $\lambda=4.0\mathrm{m}$。如图所示为波线上 $x=1.0\mathrm{m}$ 处质点的振动曲线。试求：

（1）波线上 $x=1.0\ \mathrm{m}$ 处质点的振动表达式（用余弦函数表示）；

（2）该波的波动表达式。



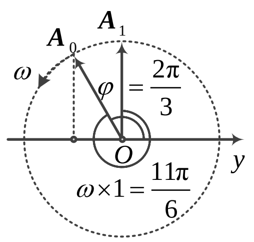
习题7.18图

7.18 解：（1）设 $x=1.0\mathrm{m}$ 处质点的振动表达式为

$$y_1\left(t\right)=A\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)$$

则由图可知，$A=0.20\mathrm{m}$，且

$$y_1\left(0\right)=A\cos\varphi_1=-A/2 \quad , \quad v_1\left(0\right)=-A\omega\sin\varphi_1<0$$



习题7.18解图

由旋转矢量图可知

$$\varphi_1=2\pi/3$$

又由图可知 $t=1\mathrm{s}$ 时，该质点第二次回到平衡位置，且

$$y_1\left(1\right)=A\cos\left(\omega+2\pi/3\right)=0 \quad , \quad v_1\left(1\right)=-A\omega\sin\left(\omega+2\pi/3\right)<0$$

由旋转矢量图，并考虑到 $\omega>0$，可知

$$\omega + 2\pi/3 = \pi/2 + 2\pi = 2.5\pi$$

由此解得

$$\omega = 11\pi/6$$

所以 $x_1 = 1\text{m}$ 处质点的振动表达式为

$$y_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1) = 0.20\cos\left(\frac{11\pi}{6}t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (SI)}$$

（2） 设此波的波动表达式为

$$y(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_o\right) = 0.20\cos\left(\frac{11\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}x + \varphi_o\right)$$

式中 φ_o 是坐标原点（ $x = 0$ ）处质元的振动初相位，由于波动从坐标原点向 $x_1 = 1\text{m}$ 处传播，所以这两点的振动相位关系，有

$$\varphi_o - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}|x_1 - x_o|$$

即

$$\varphi_o = \varphi_1 + \frac{2\pi}{\lambda}|x_1 - x_o| = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{4} \times 1 = \frac{7\pi}{6}$$

由此得波动表达式为

$$y(x,t) = 0.20\cos\left(\frac{11\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}x + \frac{7\pi}{6}\right) \text{ (SI)}$$

注：读者还可以尝试用其它方法求出波动表达式，如直接套用更普遍的波动表达形式

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda}(x - d) + \varphi_d\right]$$

参见《大学物理学》第一册 P.？？ 例题 7.2 沈黄晋主编 ？？出版社**（请出版社填写）**

7.19 一平面简谐波沿 x 轴正向传播，振幅 $A = 10.0$ cm，频率 $\nu = 10$ Hz，当 $t = 1.0$ s 时，$x = 10$ cm 处的质点 a 的振动状态为 $y_a = 0$， $v_a < 0$；此时 $x = 20$ cm 处的质点 b 的振动状态为 $y_b = 5.0$ cm， $v_b > 0$， a 点和 b 点之间没有其它质点的振动状态与 b 点的相同，试求波的表达式。

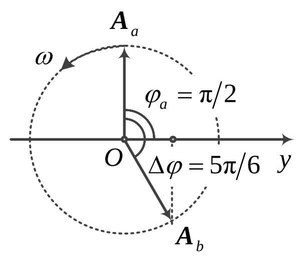
7.19 解：首先求 a 点的振动表达式。由题意可设 a 点的振动表达式为

$$y_a(t) = A\cos(\omega t + \varphi_a) = 0.10\cos(20\pi t + \varphi_a) \text{ m}$$

因 $t = 1.0$ s 时

$$y_a(1) = 0.10\cos[20\pi + \varphi_a] = 0$$

$$v_a(1) = -A\omega\sin[20\pi + \varphi_a] < 0$$



习题7.19解图

可得： $20\pi + \varphi_a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$，若取 $k = 10$，则： $\varphi_a = \frac{\pi}{2}$

所以 a 点的振动表达式为

$$y_a(t) = 0.10\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

再求此波的波长。根据 $t = 1.0$ s 时，a、b 两点的振动状态 $y_a = 0$，$v_a < 0$ 和 $y_b = 5.0$ cm，$v_b > 0$，可画出 a、b 两点相应的旋转矢量图，如图所示。又因为 a、b 两点之间没有其它质点的振动状态与 b 点的相同，这表明 a、b 两点之间的距离不足一个波长 λ，即在同一时刻，a、b 两点处质元的振动相位差小于 2π。再由同一波线上各质元之间的相位关系，可知

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{2\pi}{\lambda}|x_a - x_b| = \frac{5\pi}{6}$$

由此解得

$$\lambda = \frac{12}{5}|x_a - x_b| = \frac{12}{5} \times 0.1\ \text{m} = 0.24\ \text{m}$$

所以波动表达式为

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(x - a) + \varphi_a\right]$$

$$= 0.1\cos\left[20\pi t - \frac{2\pi}{0.24}(x - 0.1) + \frac{\pi}{2}\right]\ \text{m} = 0.1\cos\left[20\pi t - \frac{25\pi}{3}x + \frac{4\pi}{3}\right]\ \text{m}$$

7.20　设一平面简谐波在密度为 $\rho = 800\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 的介质中传播时，其波速为 $u = 1000\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，振幅为 $A = 1.0\times10^{-5}$ m，频率 $\nu = 1000$ Hz。试求：

（1）波的平均能流密度；

（2）1 分钟内垂直通过面积 $S = 4\times10^{-4}\ \text{m}^2$ 的总能量。

7.20 解：（1）波的平均能流密度

$$I = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\times800\times1000\times(2\pi\times10^3)^2\times(1.0\times10^{-5})^2 = 1.58\times10^3\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$$

（2）一分钟内通过面积 $S = 4\times10^{-4}\ \text{m}^2$ 的总能量为

$$E = ISt = 1.58\times10^3\times4\times10^{-4}\times60\ \text{(J)} = 37.9\ \text{(J)}$$

7.21 一束频率为 300 Hz 的声波，在直径为 0.14 m 的圆柱形管中传播，波速为 $340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。现测出波的强度为 $9.0\times10^{-3}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$。试求：

（1）　波中的平均能量密度；

（2）　两个相邻的、相位差为 2π 的等相位面之间波的总能量。

7.21 解：（1）由 $I = \bar{w}u$ 可得波的平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{I}{u} = \frac{9.0\times10^{-3}}{340}\ (\text{J}\cdot\text{m}^{-3}) = 2.65\times10^{-5}\ (\text{J}\cdot\text{m}^{-3})$$

（2）　因为相邻的两个相位差为 2π 的等相面之间的距离就是一个波长，又

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{340}{300} = 1.13\ \text{m}$$

所以总能量为

$$W=\bar{w}V=2.65\times10^{-5}\times\left(\frac{1}{4}\pi\times0.14^2\times1.13\right)\text{(J)}=4.61\times10^{-7}\text{(J)}$$

7.22　一声波的频率为 1000Hz，在空气中的声速为 $340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，到达人耳时声波的振幅为$1.0\times10^{-6}\ \text{m}$。已知空气的密度为$1.3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$。试求此声波在人耳处的平均能量密度和波的强度。

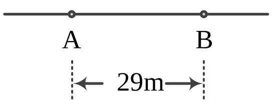
7.22 解：平均能量密度为

$$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2=\frac{1}{2}\times1.3\times\left(1.0\times10^{-6}\right)^2\times\left(2000\pi\right)^2\ \text{J}\cdot\text{m}^{-3}=2.56\times10^{-5}\ \text{J}\cdot\text{m}^{-3}$$

波的强度为

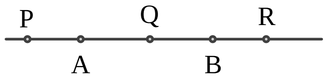
$$I=\bar{w}u=2.56\times10^{-5}\times340\ (\text{W}\cdot\text{m}^{-2})=8.70\times10^{-3}\ (\text{W}\cdot\text{m}^{-2})$$

7.23　同一介质中的两个波源位于 A、B 两点，其振幅相等，频率都是 100Hz，相位差为 $\varphi_B-\varphi_A=\pi/2$。若 A、B 两点相距为 29 m，波在介质中的传播速度为 $400\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，假设两列波在 A、B 连线上和延长线上传播时振幅相等，且不随传播距离改变。试求 AB 连线上因干涉而静止的各点位置。



习题7.23图

7.23 解：由题意可知波长为：$\lambda=\dfrac{u}{\nu}=4\ (\text{m})$



习题7.23解图

在波源 A 的外侧任一点 P，如图所示，两列波在 P 点的振动相位差为

$$\Delta\varphi_P=\varphi_B-\varphi_A-\frac{2\pi(r_{PB}-r_{PA})}{\lambda}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi\times29}{4}=-14\pi$$

满足相长干涉条件，故 A 的外侧没有因干涉而静止的点。

在波源 B 外侧的任意一点 R，两列波在 R 处的振动相位差为

$$\Delta\varphi_R=\varphi_B-\varphi_A-\frac{2\pi(r_{RB}-r_{RA})}{\lambda}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi\cdot(-29)}{4}=15\pi$$

满足相消干涉条件，故 B 外侧的所有质点都因干涉而静止。

最后考察 AB 之间的任意一点 Q，设 Q 距 A 的距离为 x，则两列波在 Q 点的振动相位差为

$$\Delta\varphi_Q=\varphi_B-\varphi_A-\frac{2\pi(r_{QB}-r_{QA})}{\lambda}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi\cdot\left[(29-x)-x\right]}{4}=\pi x-14\pi$$

要使 Q 点因干涉而静止，则必须满足

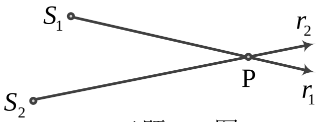
$$\Delta\varphi_Q=(2k+1)\pi\qquad\text{即}\qquad\pi x-14\pi=(2k+1)\pi$$

由此解得 AB 之间因干涉而静止的点为

$$x=2k+15\quad\text{其中 }k=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm7$$

7.24　如图所示，S_1、S_2 为两个相干波源，S_2 的相位比 S_1 落后 $\pi/2$、波长 $\lambda=10\ \text{m}$，$\overline{S_1P}=15\ \text{m}$，$\overline{S_2P}=20\ \text{m}$，$S_1$ 在 P 点产生的振幅为 $5.0\ \text{cm}$，S_2 在 P 点产生的振幅为 $4.0\ \text{cm}$。试求：P 点的合振幅。

7.24 解： 由题意可知，$\varphi_2-\varphi_1=-\pi/2$，两列波在 P 点的振动相位差为



习题7.24图

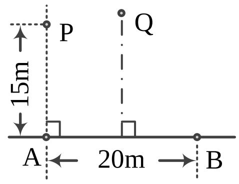
$$\Delta\varphi_P=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}=-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi(20-15)}{10}=-\frac{3\pi}{2}$$

所以 P 点的合振幅为

$$A_P=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi_P}$$

$$=\sqrt{5^2+4^2+2\times5\times4\times\cos\frac{3\pi}{2}}\ (\text{cm})=6.4\ (\text{cm})$$

7.25 如图所示，A、B 为同一介质中的两个相干波源，两列波的频率都是 10Hz，当 A 为波峰时，B 为波谷，它们单独在 P 点激起的振幅都是 0.05m。假设在介质中的波速为 $40\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，不计振幅随传播距离的变化，试求：从 A、B 发出的两列波分别在 P 点和 AB 中垂线上的任意一点 Q 干涉时的合振幅。



习题7.25图

7.25 解： 由题意可知，两列波的波长为：$\lambda=u/\nu=4\ \text{m}$；两波源的振动相位差为$\pi$，即：$\varphi_A-\varphi_B=\pi$。

对于 P 点，从 A、B 发出的波在 P 点产生的两振动的相位差为

$$\Delta\varphi_P=(\varphi_A-\varphi_B)-\frac{2\pi(r_{AP}-r_{BP})}{\lambda}=\pi-\frac{2\pi\left(15-\sqrt{15^2+20^2}\right)}{4}=6\pi$$

满足相长干涉条件，故 P 点的合振幅为

$$A_P=A_1+A_2=0.10\ \text{m}$$

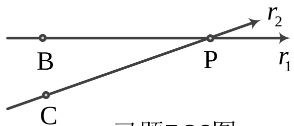
对于 AB 中垂线上的任意一点 Q，因 $r_{AQ}=r_{BQ}$，所以两列波在该点引起的振动相位差为

$$\Delta\varphi_Q=(\varphi_A-\varphi_B)-\frac{2\pi(r_{AQ}-r_{BQ})}{\lambda}=\pi$$

满足相消干涉条件，故 Q 点的合振幅为

$$A_Q=|A_1-A_2|=0$$

7.26 如图所示，两列振动频率相同、振动方向相同的平面简谐波，其中一列沿 BP 方向传播，它在 B 点的振动表达式为 $y_B(t)=A\cos(\omega t-\pi/2)$，另一列沿 CP 方向传播，它在 C 点的振动表达式为 $y_C(t)=A\cos\omega t$。已知 $\overline{BP}=5.25\lambda$，$\overline{CP}=6.75\lambda$。不考虑沿传播方向振幅的衰减，试求当两列波在 P 点相遇时 P 点合振动的表达式。

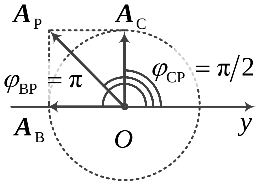


习题7.26图

7.26 解： 沿 BP 方向传播的波在 P 点的振动表达式为

$$y_{BP}(t)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\overline{BP}-\pi/2\right)$$

$$=A\cos(\omega t-11\pi)=A\cos(\omega t+\pi)$$



习题7.26解图

同理沿 CP 方向传播的波在 P 点的振动表达式为

$$y_{\mathrm{CP}}(t)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\overline{\mathrm{CP}}\right)=A\cos(\omega t-13.5\pi)=A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

由旋转矢量合成图（如图所示）可得 P 点合振动的振幅和初相为分别为

$$A_{\mathrm{P}}=\sqrt{2}A \qquad \varphi_{\mathrm{P}}=3\pi/4$$

所以表达式为

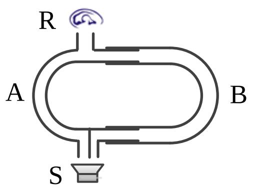
$$y_{\mathrm{P}}=y_{\mathrm{BP}}(t)+y_{\mathrm{CP}}(t)=\sqrt{2}A\cos(\omega t+3\pi/4)$$

注意：如果本题仅使用 $\Delta\varphi_{\mathrm{P}}=\varphi_{\mathrm{B}}-\varphi_{\mathrm{C}}-\dfrac{2\pi(r_{\mathrm{BP}}-r_{\mathrm{CP}})}{\lambda}$ 求两列波在 P 点激起的两个振动的相位差，则只能求出 P 点合振动的振幅，不能求出合振动的相位及振动表达式。

7.27　如图所示为声音干涉仪，干涉仪两端的开口与大气相连，S 为扬声器（声源），R 为声音接受器，如耳或话筒。路径 SAR 是固定的，连续调节 B 的位置，改变路径 SBR 的长度，发现声音强度随 B 的位置交替变化。现测得声音强度为极小时相邻两个 B 的位置之差为 0.034m。设空气中声速为 $340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，试求：

（1）声源发出的声波频率；

（2）设声波在干涉仪内传播时振幅不变，测得声强极大值与极小值之比为 $9:1$，求声波在 A 、B 两管中的振幅之比。



习题7.27图

7.27 解：（1）从声源 S 发出的声波分别经过 A 管和 B 管到达接收器 R，两波在 R 处相遇时的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{SBR}-\mathrm{SAR})$$

由题意可知：调节 B 点位置，使 B 点位置改变 0.034m 的过程中，波程 SBR 改变了 $2\times0.034\ \mathrm{m}=0.068\ \mathrm{m}$，这对应与两列波在 R 处的振动相位差改变了 2π，所以有

$$\frac{2\pi\times0.068}{\lambda}=2\pi \quad \text{即} \quad \lambda=0.068\ \mathrm{m}$$

由此得声波的频率为

$$\nu=\frac{u}{\lambda}=\frac{340}{0.068}\ (\mathrm{Hz})=5000\ (\mathrm{Hz})$$

（2）设经过 A 管的声波振幅为 A_1，经过 B 管的声波振幅为 A_2，且：$A_1>A_2$。由

$$I=(1/2)\rho u\omega^2A^2 \quad , \quad A_{\max}=A_1+A_2 \quad , \quad A_{\min}=|A_1-A_2| ,$$

有

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}}=\frac{(A_1+A_2)^2}{|A_1-A_2|^2}=\frac{9}{1}$$

由此解得声波在 A、B 两管中的振幅之比为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{2}{1}$$

7.28 在一根线密度为 $\rho=10^{-2}\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$、张力 $F=100\ \mathrm{N}$ 的弦线上，有一列沿 x 轴正方向传播的简谐波，其频率 $\nu=50\ \mathrm{Hz}$，振幅 $A=4.0\ \mathrm{cm}$。已知弦线上离坐标原点为 $x_1=5\ \mathrm{m}$ 处的质点在 $t=0$ 时刻的位移为 $A/2$，且沿 y 轴负方向运动。当传播到固定端 $x_2=10\ \mathrm{m}$ 米处时，被全部反射。试写出：

（1）入射波和反射波的表达式；

（2）入射波与反射波叠加形成的驻波方程；

（3）在 $0\le x\le 10\ \mathrm{m}$ 区间内所有波腹和波节的位置坐标。

7.28 解： （1）由题意可知此波的波速、波长分别为为

$$u=\sqrt{\frac{F}{\rho}}=\sqrt{\frac{100}{10^{-2}}}\ \left(\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)=100\ \left(\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)\quad ,\quad \lambda=\frac{u}{\nu}=2\ \mathrm{m}$$

不妨设入射波的表达式为

$$y_{入}(x,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi\right) \qquad ①$$

式中 $A=4.0\ \mathrm{cm}$，$\omega=2\pi\nu=100\pi$。由 $t=0$ 时，$x_1=5\mathrm{m}$ 处的位移为 $A/2$，速度为负，得

$$y_{入}\left(5,0\right)=A\cos\left(-\frac{2\pi\times 5}{2}+\varphi\right)=\frac{A}{2}\quad ,\quad v_{入}\left(5,0\right)=-A\omega\sin\left(-\frac{2\pi\times 5}{2}+\varphi\right)<0$$

由此解得

$$-5\pi+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}$$

取 $k=-3$，可得：$\varphi=-\frac{2\pi}{3}$（或取 $k=-2$，得：$\varphi=\frac{4\pi}{3}$）

所以入射波的波动表达式为

$$y_{入}(x,t)=0.04\cos\left(100\pi t-\pi x-\frac{2\pi}{3}\right)$$

由于反射点 $x_2=10$ 米处为固定端，即反射波有半波损失，所以在反射点，反射波的初相位为

$$\varphi_{反}=\varphi_{入}+\pi=\left(-\pi\times 10-\frac{2\pi}{3}\right)+\pi=-\frac{2\pi}{3}-9\pi$$

由此得反射波的表达式

$$y_{反}(x,t)=0.04\cos\left[100\pi t+\pi\left(x-10\right)+\left(-\frac{2\pi}{3}-9\pi\right)\right]=0.04\cos\left[100\pi t+\pi x+\frac{\pi}{3}\right]$$

（2） 利用三角函数的和差化积公式，可得合成的驻波方程为

$$y_{驻}=y_{入}+y_{反}=0.08\cos\left(\pi x+\pi/2\right)\cos\left(100\pi t-\pi/6\right)$$

（3） 在驻波方程中令：$\cos(\pi x+\pi/2)=0$，即 $\pi x+\pi/2=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，可得波节位置

$$x=k \quad , \quad k=0、1、2、\cdots、10$$

令：$\cos(\pi x+\pi/2)=\pm1$，即 $\pi x+\pi/2=k\pi$，可得波腹位置

$$x=k-1/2 \quad , \quad k=1、2、3、\cdots、10$$

注：本问也可以不从驻波方程出发，而是直接利用驻波特性来计算波腹、波节位置。

7.29 设入射波的表达式为 $y_{入}(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda}\right)\right]$。已知此波在 $x=0$ 处发生反射，且反射点为一固定端。设反射时无能量损失，试求：

（1）反射波的表达式；

（2）合成波的表达式；

（3）波腹和波节的位置。

7.29 解：（1） 由题意可知，入射波沿 x 轴负向运动，且在反射点（$x=0$）处的振动初相位为 $\varphi_{入}=0$，由于反射点为固定端，反射时有半波损失，由此得反射波在反射点的初相为

$$\varphi_{反}=\varphi_{入}+\pi=\pi$$

所以反射波表达式为

$$y_{反}(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\pi\right]$$

（2）合成波的表达式为

$$y_{合}(x,t)=y_{入}(x,t)+y_{反}(x,t)=2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)$$

显然，这是一个驻波方程。

（3）波腹的位置满足：$\left|\cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=1$，即 $\dfrac{2\pi x}{\lambda}-\dfrac{\pi}{2}=k\pi$，所以波腹位置为

$$x=(2k+1)\lambda/4 \qquad k=0、1、2、\cdots$$

波节的位置满足：$\cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，即 $\dfrac{2\pi x}{\lambda}-\dfrac{\pi}{2}=(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$ ，所以波节位置为

$$x=k\lambda/2 \qquad k=0、1、2、\cdots$$

7.30 一安装在铁路边的频率测量仪器，当一列动车驶近它时，测得动车汽笛声的频率为 700Hz；当动车远离时，测得动车汽笛声的频率降低为 500Hz，求该列动车行驶的速度 v_S。（已知空气中声速为 $v_0=340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$）

7.30 解：设该列动车汽笛声的频率为 ν_S，当动车驶近测量仪器时，仪器测得的频率为

$$\nu_1 = \frac{v_0}{v_0 - v_S}\nu_S$$

当动车远离测量仪器时，仪器测得的频率为

$$\nu_2 = \frac{v_0}{v_0 + v_S}\nu_S$$

由此解得

$$v_S = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}v_0 = \frac{700-500}{700+500}\times 340\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}}) = 56.7\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}}) = 204\ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

7.31　高铁列车以 $350\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 的速度行驶，其汽笛的频率为 500Hz。一个人乘汽车在铁轨旁的高速公路上以 $120\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 的速率与列车逆向行驶。求此人听到汽笛声的频率为多大?

7.31 解：此人听到列车汽笛声的频率

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S}\nu_S$$

式中 u 为空气中的声速，v_R 为汽车（接收器）的速度，v_S 为列车（声源）速度。当汽车迎着列车行驶时

$$v_R = 120\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 33.3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v_S = 350\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 97.2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

汽车上的人听到汽笛声的频率为

$$\nu_R = \frac{340+33.3}{340-97.2}\times 500(\mathrm{Hz}) = 769\ (\mathrm{Hz})$$

当汽车背离列车行驶时

$$v_R = -120\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = -33.3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v_S = -350\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = -97.2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

人听到汽笛声的频率为

$$\nu_R = \frac{340-33.3}{340+97.2}\times 500(\mathrm{Hz}) = 351\ (\mathrm{Hz})$$

7.32　一固定的超声波探测器，在海水中发出一束频率 30 000 Hz 的超声波，被一艘向着探测器驶来的潜艇反射回来，反射波与原来的波合成后，得到频率为 300 Hz 的拍。设超声波在海水中的波速为 $1500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，试求潜艇的速率。

7.32　设超声波源的频率为 ν_S，潜艇接受到超声波的频率为 ν_R，则

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u}\nu_S$$

式中 u 为海水中的声速，v_R 为潜艇（接收器）的速度。当潜艇反射超声波时，潜艇作为运动的波源，此时静止的探测器接收到潜艇反射的超声波频率为

$$\nu_R' = \frac{u}{u - v_R}\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_R}\nu_S$$

因：$\nu_R' = \dfrac{u+v_R}{u-v_R}\nu_S > \nu_S$，所以拍频

$$\nu_b = \nu_R' - \nu_S = \left(\frac{u+v_R}{u-v_R} - 1\right)\nu_S = \frac{2v_R}{u-v_R}\nu_S$$

由此解得潜艇的速度为

$$v_R = \frac{\nu_b}{2\nu_S + \nu_b}u = \frac{300}{2\times 30000 + 300}\times 1500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 7.46\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 27.5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

7.33　两人轻声说话时的声强级为 40 dB，闹市中的声强级为 80 dB，问闹市中的声强是轻声说话时声强的多少倍?

7.33 解：由声强级的定义：$I_L = 10\lg\dfrac{I}{I_0}$，可得

$$I_{L2} - I_{L1} = 10\lg\frac{I_2}{I_0} - 10\lg\frac{I_1}{I_0} = 10\lg\frac{I_2}{I_1}$$

所以

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{I_{L2}-I_{L1}}{10}} = 10^4$$

即闹市的声强是轻声说话时声强的 1 万倍。