不计答案共 16 页

# 第 10 章 真空中的静电场

## 一、知识点网络框图

真空中的静电场

静电场的两个基本性质

对处于静电场中的电荷有作用力

静电力做功与路径无关（是保守力）

电场强度：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}/q_0$

作用于单位正试探电荷上的电场力

场强与电势的关系

积分关系：$V_a=\int_a^{P(0)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

微分关系：$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}V$

电势：$V_a=W_a/q_0$

单位正电荷在电场中具有的电势能

描述静电场性质的两个基本定理

静电场的高斯定理：$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$

理论意义：指出静电场是有源场
实用价值：可用于计算具有高度对称性的电场分布

静电场的环路定理：

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

指出静电场是无旋场

静止电荷在真空中激发的场强分布的计算

方法一：场强叠加原理：$\boldsymbol{E}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\int_Q\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0$

方法二：高斯定理（当电荷分布具有高度对称性时）
方法三：电场强度与电势的微分关系

电势 $V_a$ 与电势能 $W_a$、电势差 $U_{ab}$ 和电场力做功 $A_{ab}$ 之间的关系

$$V_a=W_a/q_0\ ,\quad W_a=q\int_a^{P(0)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=qV_a\,,\quad U_{ab}=V_a-V_b=\int_a^b\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$A_{ab}=\int_a^b q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=W_a-W_b=qU_{ab}$$

电势的计算

方法一：$V=\int\mathrm{d}V=\int_Q\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$　　方法二：$V_a=\int_a^{P(0)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

# 二、基本要求

1. 掌握静电场的两个基本定律（库仑定律、电荷守恒定律）及其应用；
2. 掌握电场强度和电势的概念及两者之间的内在关系；
3. 理解描述静电场性质的两个重要定理——高斯定理及环路定理，明确静电场是有源场和保守力场；
4. 熟练掌握用场强叠加原理、高斯定理求场强分布的基本方法，并能用电场强度与电势的微分关系求场强分布；
5. 熟练掌握用电势叠加原理和电势与场强的积分关系求电势分布的基本方法；
6. 掌握静电力做功与电势能、电势差之间的关系及其应用；

# 三、主要学习内容

## （一）库仑定律

在真空中两个相距为 $r$ 的点电荷之间的相互作用力为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{r}_{12}^0$$

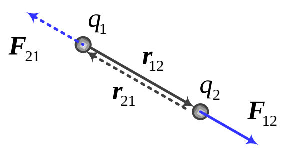



图 10.1 库仑定律

式中 $\boldsymbol{r}_{12}^0$ 是从 $q_1$ 指向 $q_2$ 的单位矢量，$\boldsymbol{F}_{12}$ 是 $q_1$ 给予 $q_2$ 的作用力，如图 10.1 所示。当 $q_1$、$q_2$ 为同号电荷时 $\boldsymbol{F}_{12}$ 为斥力，当 $q_1$、$q_2$ 为异号电荷时 $\boldsymbol{F}_{12}$ 为引力。

## （二）电场强度的概念、场强叠加原理

### 1. 电场强度的定义

单位（正）试探电荷在电场中受到的电场力，即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$$

### 2. 点电荷电场中的场强分布

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\boldsymbol{r}^0$$

式中 $\boldsymbol{r}^0=\boldsymbol{r}/r$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量（下同）。

### 3. 场强叠加原理

电场中任意一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 等于各个电荷单独存在时在该点产生的电场强度 $\boldsymbol{E}_i$ 的矢量和，即：$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i$ 。

对于点电荷系的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i^2}\boldsymbol{r}_i^0$$

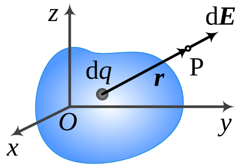


图 10.2 场强叠加原理

对于电荷连续分布的带电体的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{E}=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0$$

式中 d$q$ 为带电体上的任一电荷元，如图 10.2 所示，且

$$\mathrm{d}q=\begin{cases}\lambda\mathrm{d}l & \text{当电荷沿曲线分布时}\\ \sigma\mathrm{d}S & \text{当电荷在曲面上分布时}\\ \rho\mathrm{d}V & \text{当电荷作体分布时}\end{cases}$$

## （三）电通量　真空中静电场的高斯定理

### 1. 电通量

通过某个曲面的电场线的根数称为通过该曲面的电通量，如图 10.3 所示。其计算式为

$$\Phi_e=\int_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S E\cos\theta\mathrm{d}S$$

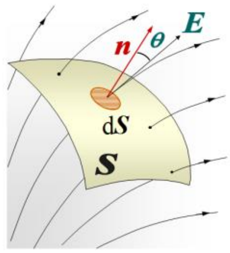


图 10.3 电通量

### 2. 真空中的高斯定理

在真空中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 通过任一闭合曲面的通量，等于该闭合曲面所包围的所有正负电荷的代数和除以真空中的电容率，即

$$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}q_i$$

静电场的高斯定理是电磁场的基本方程之一。高斯定理的意义在于指出了静电场是有源场；其主要应用是求解具有高度对称性的场强分布。

## （四）静电力做功的特点 静电场的环路定理

### 1. 静电力做功与路径无关 静电力是保守力

$$A=\oint_L q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

### 2. 静电场的环路定理

$$积分形式：\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \qquad 微分形式：\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

意义：说明了静电场是保守力场，是无旋场，描述静电场的电场线不可能形成闭合曲线。

## （五）电势能、电势和电势叠加原理

**1. 电势能与电场力做功**

电荷在电场中具有的能量称为电势能，用$W$表示。当电荷$q_0$从电场中$a$点移动到$b$点时，电场力对电荷所做的功等于电势能的减少量，即

$$W_a - W_b = \int_a^b q_0 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

电势能的大小具有相对意义，其零点可以任意选取。若选$P$点为零电势能点，则电荷$q_0$在$a$点的电势能为

$$W_a = \int_a^{P(0)} q_0 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

**2. 电势 电势差**

单位（正）试探电荷在电场中某点具有的电势能称为该点的电势，用$V$表示，即

$$V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{P(0)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

电场中$a$、$b$两点的电势差为

$$U_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

零电势能点或零电势点的选择方法：若源电荷（产生电场的电荷）为有限分布，可取无限远处的电势或电势能为零，即：$V_a = \dfrac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$；若源电荷为无限分布，电势零点的选择需要根据具体情况确定。

**3. 电势的计算**

**方法一：用电势叠加原理**

空间任意一点的电势等于各带电体单独存在时在该点产生的电势的代数和。对于点电荷系：$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_i \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$；对于电荷连续分布的带电体：$V = \int \mathrm{d}V = \int \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$。

**方法二：用电势的定义**

$$V_a = \int_a^{P(0)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

一般来说当场强分布可以用高斯定理求出时，用方法二求解电势分布，其他情况用叠加原理求解。

## （六）电场强度和电势的微分关系

电场中某点的电场强度等于该处电势梯度的负值，即

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}V=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

## 附：几种典型的带电体在真空中产生的场强分布

（1）点电荷 $q$ 的场强

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0$$

（2）均匀带电圆环轴线上任一点的场强（半径为 $R$、电量为 $q$，如图 10.4 所示）

$$\boldsymbol{E}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}$$

（3）“无限长”均匀带电直线的场强（电荷线密度为 $\lambda$，如图 10.5 所示）

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{r}^0$$

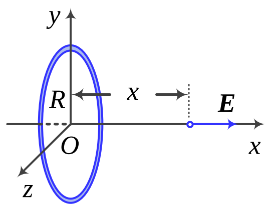


图 10.4 均匀带电圆环轴线上的场强分布

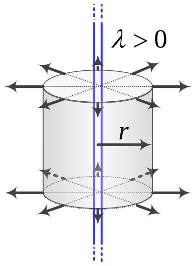


图 10.5 无限长均匀带电直线的场强分布

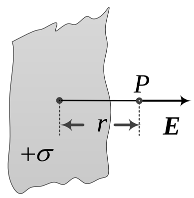


图 10.6 无限大均匀带电平面外的场强分布

（4）均匀带电球面的场强（半径为 $R$、电量为 $q$）

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0 & r>R\text{ 时（球面外）}\\ 0 & r<R\text{ 时（球面内）}\end{cases}$$

（5）“无限大”均匀带电平面外的场强（电荷面密度为 $\sigma$，如图 10.6 所示）

$$\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{r}^0$$

# 四、典型例题解法指导

本章习题的规律性较强，主要有以下几类

**1．求电场强度 *E* 的分布**

题型一、根据点电荷的电场强度公式，利用场强叠加原理求场强分布

题型二、利用高斯定理计算具有高度对称性（球对称、“无限长”的轴对称、“无限大”的面对称）的电场强度分布。

题型三、利用电场强度与电势的微分关系，求场强分布。

**2．求电势分布**

题型一、根据点电荷的电势公式，利用电势叠加原理求电势分布。

题型二、利用电势的定义（即电势与场强的积分关系）求电势。这种方法主要应用于场强分布可以用高斯定理求出的场合。

**3. 求电势能 电势差 电场力做功**

**例题 10.1** 如图所示，一根电荷线密度为$\lambda$的均匀带电长直线，和另一根线电荷密度也为$\lambda$、长为$L$的带电直线 AB，两者垂直、共面放置，且$\overline{OA}=a$，求带电线段 AB 受到的电场力。

**分析：**此题可以直接使用“无限长”均匀带电直线外的电场强度公式，然后在带电直线 AB 上取一电荷元，把它作为点电荷，用点电荷在电场中的受力公式计算它的受力，最后积分得出整个带电直线 AB 受到的电场力。

**解：**以$O$点为原点，沿直线 AB 向右为$x$轴的正方向建立坐标，则“无限长”均匀带电直线在$x$轴上任一点处电场强度的大小为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

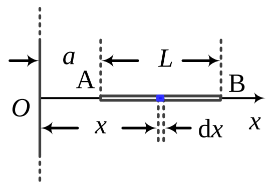


图 10.7 例题 10.1 图

方向沿$x$轴正方向。在 AB 上距离$O$为$x$处取长度为$\mathrm{d}x$的电荷元$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，电荷元受力为

$$\mathrm{d}F=E\mathrm{d}q=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\cdot\lambda\mathrm{d}x=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}x$$

方向沿$x$ 轴正方向，于是整个 AB 段受到的电场力为

$$F=\int_a^{a+L}\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+L}{a}$$

**例 10.2** 一根被弯成半径为 $R$ 的半圆形细玻璃棒，其上均匀分布有电量为 $+q$ 的电荷，试求圆心处的电场强度及电势。

**分析：**本题中电荷沿半圆弧连续分布，可将整个带电体看成由无限多个电荷元的组合，先计算任一电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$ 在给定点产生的场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 和电势 $\mathrm{d}V$，再用叠加原理，通过积分求出给定点的总场强 $\boldsymbol{E}$ 和总电势 $V$。用场强叠加原理求解电场强度时要注意，对场强的叠加是矢量叠加，所以应先把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在坐标轴上进行投影，求出 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的各分量 $\mathrm{d}E_x$、$\mathrm{d}E_y$ 和 $\mathrm{d}E_z$，然后对各分量进行积分，最后求总场强。

**解：**选择如图 10.2 所示的坐标系，在细玻璃棒上取一弧长为 $\mathrm{d}l$ 的线元，此线元与圆心的连线与 $y$ 轴的夹角为 $\theta$，所张圆心角为 $\mathrm{d}\theta$，则该线元所带的电量为

$$\mathrm{d}q=\frac{q}{\pi R}\mathrm{d}l=\frac{q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

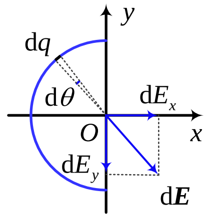



图 10.8 例题 10.2 图

电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 $O$ 点产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta$$

方向如图所示，其在 $x$ 轴、 $y$ 轴上的分量为

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\sin\theta \quad , \quad \mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\cos\theta$$

积分可得

$$E_x=\int\mathrm{d}E\sin\theta=\int_0^{\pi}\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=-\int\mathrm{d}E\cos\theta=-\int_0^{\pi}\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$$

所以在 $O$ 点处产生的场强为

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{i}$$

又电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 $O$ 点处的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R}\mathrm{d}\theta$$

积分可得整个带电半圆环在 $O$ 点处产生的总电势为

$$V=\int \mathrm{d}V=\int_0^{\pi}\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R}\mathrm{d}\theta=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

**例题 10.3** 一个半径为$R$的半球壳均匀带电，电荷面密度为$\sigma$。试求球心处的电场强度。

**分析**：这又是一个电荷连续分布的带电体问题，求解的关键在于如何选择电荷元，使问题简化。由于电荷在球面上分布，若在球面上任取一个电荷元，则需使用球坐标系下的面积元公式：$\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，并作球面积分（重积分）；但若将球面看成是由许多圆环组成的集合，则可利用圆环轴线上任意一点的场强公式进行计算，可使问题简化。

**解**：为使问题简化，可将半球壳看成是由圆环组成的集合，如图所示。任取一个半径$r=R\sin\varphi$、宽度$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\varphi$的圆环，则该圆环的表面积为

$$\mathrm{d}S=2\pi r\cdot\mathrm{d}l=2\pi R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

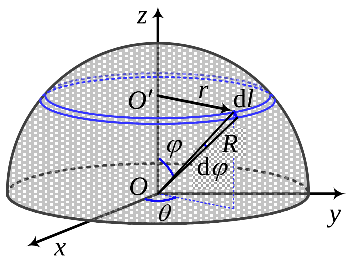



图 10.9 例题 3

圆环所带的电量为

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma\cdot 2\pi R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

该圆环中心到球心$O$的距离为$z=R\cos\varphi$，由均匀带电圆环轴线上任意一点的场强公式，得该圆环在球心处的电场强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\mathrm{d}q}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\boldsymbol{k}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\cos\varphi}{R^3}\sigma 2\pi R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{k}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{k}$$

积分得$O$点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\int_0^{\pi/2}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{k}=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{k}$$

式中负号表示场强的方向沿$z$轴负方向。

读者也可以在球面上任取一个电荷元$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，将它视为点电荷，然后用点电荷的场强公式进行计算。

**例 10.4** 一半径为$R$的无限长圆柱形带电体，其体电荷密度$\rho=Ar$（$r\le R$），$A$为正的常数，试求：

（1）圆柱体内外电场强度的分布。

（2）选圆柱体表面为零势点，求圆柱体内外的电势分布。

**分析：**本题的关键在于正确掌握高斯定理的应用及电势零点的选择。

**解**：（1）由题意可知，电荷分布及其电荷产生的电场分布都具有“无限长”的轴对称性，即在任意半径为$r$的同轴圆柱面上，各点电场强度的大小相等，方向均沿径向。为此取半径为$r$、高为$h$的封闭同轴圆柱面为高斯面，由高斯定律，通过该高斯面的电通量为

$$\Phi_e=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{侧}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{上}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{下}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=2\pi rhE=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

由此得

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 rh}\sum q$$

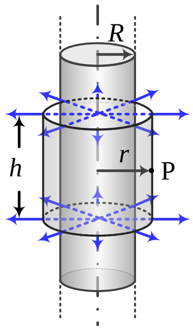


图 10.10 例题 4

当$r\le R$时

$$\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V=\int_0^r Ar\cdot 2\pi rhdr=\frac{2}{3}\pi Ahr^3$$

所以圆柱体内部的场强为

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 rh}\cdot\frac{2}{3}\pi Ahr^3=\frac{Ar^2}{3\varepsilon_0}$$

当$r>R$时

$$\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V=\int_0^R 2\pi Ahr^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi AhR^3,$$

所以圆柱体外部的场强为

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 rh}\cdot\frac{2}{3}\pi AhR^3=\frac{AR^3}{3\varepsilon_0 r}$$

（2）当$r\le R$时，圆柱体内任一点的电势为

$$V=\int_r^R \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^R\frac{Ar^2}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r=\frac{A}{9\varepsilon_0}\left(R^3-r^3\right)<0$$

当$r>R$时，圆柱体外任一点的电势为

$$V=\int_r^R \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^R\frac{AR^3}{3\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}>0$$

**例 10.5** 如图所示，一个由电介质材料制成的、半径为$R_1$、带有球形空腔的固体球均

匀带电，电荷体密度为$\rho$，其球形空腔的半径为$R_2$（$R_2 < R_1$），空腔中心$O'$与球心$O$的距离为$a$，试求：

（1）空腔内电场强度的分布；

（2）空腔中心$O'$处的电势。

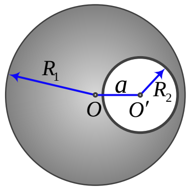



图 10.11 例 10.5 图

**分析：**此题的关键在于熟练应用补偿法和叠加原理求电场和电势，即将不带电的空腔等效为电荷体密度等量异号的两种电荷的叠加。这样本题可归结为求一个电荷体密度为$\rho$、半径为$R_1$的均匀带电球体与一个电荷体密度为$-\rho$、半径为$R_2$（$R_2 < R_1$）的均匀带电球体在空腔内产生的电场和电势的叠加。

**解：**（1）利用补偿法，将空腔带电球体产生的电场分布等效成一个电荷体密度为$\rho$、半径为$R_1$的均匀带电大球体与一个电荷体密度为$-\rho$、半径为$R_2$（$R_2 < R_1$）的均匀带电小球体产生的电场的叠加。设 P 为空腔内任意一点，其到$O$、$O'$的距离分别为$r_1$、$r_2$。以$O$为球心，作半径为$r_1$的球面为高斯面$S_1$，则根据高斯定理，均匀带电大球体产生的电场对$S_1$面的电通量为

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_1 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q = \frac{\rho 4\pi r_1^3}{3\varepsilon_0}$$

所以均匀带电大球体在球内 P 点产生的场强为

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_1$$

同理可求得带负电的小球体在球内 P 点产生的场强为

$$\boldsymbol{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_2$$

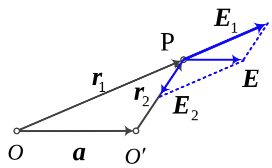



图 10.12 例 10.5 解图

由电场的叠加原理可得 P 点的总场强为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$$

即空腔内的场强为均匀的，其方向平行于两球心的连线，由$O$指向$O'$。

（2）由高斯定理可知大球产生的场强分布为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r} & r<R_1\\ \dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} & r>R_1\end{cases}$$

以无穷远处为电势零点，由电势的定义，则大球在 P 点产生的电势为

$$V_{1P}=\int_{r_1}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{r_1}^{R_1}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r dr+\int_{R_1}^{\infty}\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_1^2-r_1^2\right)$$

对于空腔中心$O'$点，$r_1=a$，故大球在$O'$点产生的电势为

$$V_1=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_1^2-a^2\right)$$

同理可求带负电的小球产生的场强分布为

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{cases}-\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r} & r<R_2\\ -\dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} & r>R_2\end{cases}$$

在 P 点处产生的电势为

$$V_{2P}=\int_{r_2}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{r_2}^{R_2}\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}r dr+\int_{R_2}^{\infty}\frac{-\rho R_2^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr=-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-r_2^2\right)$$

在空腔中心$O'$点，$r_2=0$，故小球在$O'$点产生的电势为

$$V_2=-\frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}$$

最后，由电势的叠加原理，空腔中心$O'$处的总电势为

$$V_{O'}=V_1+V_2=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left[3\left(R_1^2-R_2^2\right)-a^2\right]$$

**例 10.6** 如图所示，一个均匀带电的平面圆环，内外半径分别为$R_1$和$R_2$，电荷面密度为$\sigma$（$\sigma>0$）。一质子被加速后，从$P$点处沿圆环轴线射向圆心$O$，若质子达到$O$点时的速度恰好为零，试求质子位于$P$点时的动能$E_k$。（忽略重力影响，设$\overline{OP}=L$）

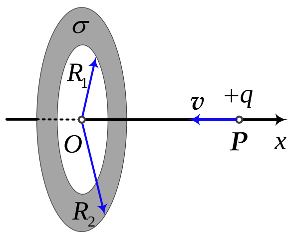


图 10.13 例 10.6 图

**分析：**这是一道力学与电学的综合题。根据动能定理，质

子在$\overline{OP}$上运动时电场力对质子做的功等于质子动能的增量。求电场力做功有两种方法：一是利用电场力做功等于电势能的减少量来求解，即$A_{PO}=W_P-W_O=e\left(V_P-V_O\right)$；另外一种方法是利用功的力学定义来求解，即$A=\int_P^O \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_P^O e\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$。第一种方法需要求$O$、$P$两点的电势，第二种方法需要求轴线$OP$上的场强分布。

**解法一：**用电场力做功等于电势能的减少量求解

以$O$为坐标原点，$OP$为$x$轴正方向。将整个圆环视为由许多小圆环组成的集合，任取一个半径为$r$，宽为$\mathrm{d}r$的带电小圆环，其电量为$\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$，以无穷远处为零电势点，则$\mathrm{d}q$在$P$点产生的电势为

$$\mathrm{d}V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{r^2+L^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+L^2}}$$

于是，整个带电圆环在$P$点产生的总电势为

$$V_P=\int \mathrm{d}V_P=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+L^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{L^2+R_2^2}-\sqrt{L^2+R_1^2}\right)$$

令：$L=0$，可得$O$点处的电势为

$$V_O=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2-R_1\right)$$

根据质点的动能定理：$A=e\left(V_P-V_O\right)=0-E_k$

所以质子在$P$点的动能为

$$E_k=e\left(V_O-V_P\right)=\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2-R_1-\sqrt{R_2^2+L^2}+\sqrt{L^2+R_2^2}\right)$$

**解法二：**利用功的力学定义求电场力做功

由均匀带电圆环轴线上的电场强度公式，电量为$\mathrm{d}q$的小圆环在轴线$OP$上任一点$x$处产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{x\cdot \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}=\frac{\sigma r x\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

由于每个小圆环在$x$处产生的场强方向都沿$x$轴正方向，故整个圆环在$x$处产生的场强为

$$E=\int \mathrm{d}E=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma r x\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_2^2+x^2}}\right]$$

所以电场力做的功为

$$A=\int_P^O e\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_L^0\frac{e\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_2^2+x^2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}\left(R_2-R_1-\sqrt{L^2+R_2^2}+\sqrt{L^2+R_1^2}\right)$$

最后，根据动能定理可得质子在 $P$ 点的动能为

$$E_k=-A=\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2-R_1-\sqrt{R_2^2+L^2}+\sqrt{L^2+R_2^2}\right)$$

**例 10.7** 有一半径为 $R$、电量为 $Q$ 的均匀带电球面，沿矢径方向上放置一根均匀带电的细棒，棒的电荷线密度为 $\lambda$，长为 $L$（$L>R$），球心到棒的近端的距离也为 $L$，如图所示。设球面和细棒上的电荷分布不相互影响，且棒和球面的形状不因受力发生形变，试求：

（1）带电球面和细棒之间的静电力；

（2）带电细棒在电场中的电势能。

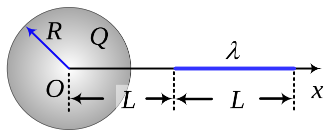



图 10.14　例 10.7 图

**分析：** 本题是求电荷连续分布的带电体在电场中的受力和电势能问题。对于这类问题，首先要求出另一个带电体产生的场强分布和电势分布，然后在电荷连续分布的带电体上，任取一个电荷元 $\mathrm{d}q$，并确定 $\mathrm{d}q$ 的在电场中的受力和电势能，最后通过积分来确定整个带电体的受力和电势能。

**解：**（1）由高斯定理可得，半径为 $R$、电量 $Q$ 的均匀带电球面产生的电场分布为

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0 & r>R\ \text{时（球面外）}\\ 0 & r<R\ \text{时（球面内）}\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{r}^0$ 是径向单位矢量。在细棒上距离球心 $O$ 为 $x$ 处取一段长为 $\mathrm{d}x$ 的电荷元，如图所示，其所带电量为：$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，它受到的电场力的大小为

$$\mathrm{d}F=\mathrm{d}q\cdot E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\lambda\mathrm{d}x$$

方向沿径向，所以整个细棒受到的电场力为

$$F=\int\mathrm{d}F=\int_L^{2L}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\lambda\mathrm{d}x=\frac{q\lambda}{8\pi\varepsilon_0 L}$$

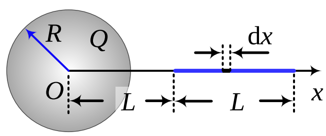



图 10.15　例 10.7 解图

（2）若以无穷远处为零电势点，则半径为 $R$、电量 $Q$ 的均匀带电球面产生的电场分布为

$$V=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r>R\text{ 时（球面外）}\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r<R\text{ 时 （球面内）}\end{cases}$$

于是，电荷元 $\mathrm{d}q$ 在带电球面的电场中具有的电势能为

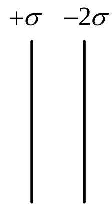
$$\mathrm{d}W=V\mathrm{d}q=\frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}x$$

整个带电细棒在电场中的电势能为

$$W=\int\mathrm{d}W=\int_L^{2L}\frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

# 五、自我测试题

10.1 真空中两块相互平行的无限大均匀带电平板，其电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-2\sigma$，两板间的距离为 $d$，如图所示，则两板间的电场强度和电势差分别为（　　　　）。



测试题 10.1 图

A.　0，0　　　　B. $\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$，$\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}d$

C. $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，$\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}d$　　　　D. $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，$\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}d$

**10.1 答案：**B

**解：**正负两块带电平板在两板间产生的场强分别为，

带正电的平板：$E_+=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 方向向右；　带负电的平板：$E_-=\dfrac{2\sigma}{2\varepsilon_0}$ 方向向右

由于两者方向相同，所以板内总场强为

$$E=E_++E_-=\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$$

方向向右。两板之间的电势差为

$$U=Ed=\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}d$$

10.2 半径为$R$的均匀带电球面，若其电荷面密度为$\sigma$，则在球面外靠近球面处的电场强度大小为（　　　　）。

A. $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$　　　B. $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$　　　C. $\dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$　　　D. $\dfrac{\sigma}{8\varepsilon_0}$

**10.2 答案：**A

**解：**由题意可知，带电球面所带电量为：$Q = 4\pi R^2\sigma$，由高斯定理，均匀带电球面外任意一点的电场强度的大小为

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

所以在球面外靠近球面处（$r \to R$），场强大小为$E = \sigma/\varepsilon_0$

10.3 点电荷$q$位于一边长为$a$的立方体中心，则该点电荷产生的电场通过立方体的一个面的电通量为（　　　　）。

A. $\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$　　　B. $\Phi = \dfrac{q}{2\varepsilon_0}$　　　C. $\Phi = \dfrac{q}{3\varepsilon_0}$　　　D. $\Phi = \dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

**10.3 答案：**D

**解：**由高斯定理：$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} = 6\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 6\Phi$，所以：$\Phi = \dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

10.4 一点电荷放在球形高斯面的中心。下列哪一种情况通过高斯面的电通量将发生变化（　　　　）。

A. 将另一点电荷放在高斯面外；

B. 将另一点电荷放在高斯面内；

C. 将球心处的点电荷从球心处移开，但在高斯面内；

D. 将高斯面的半径缩小。

**10.4 答案：**B

**解：**在高斯定理$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$中，$\sum q_i$是高斯面所包围的电荷的代数和，与高斯面外的电荷无关。故要使通过高斯面的电通量发生变化，则必须使$\sum q_i$发生变化。

10.5 长为$l$的均匀带电塑料细棒，弯曲成一个圆环，在接口处有一间距为$d$（$d << l$）的缺口。设细棒上的总电量为$q$（$q > 0$），且在弯曲时棒上的电荷分布不发生变化。则环

心 $O$ 处电场强度的大小为__________，方向____________________，环心 $O$ 处的电势为__________。

**10.5 答案：** $\dfrac{\pi qd}{\varepsilon_0 l^3}$ ，方向由环心指向缺口处，$\dfrac{q}{2\varepsilon_0 l}$

**解：** 本题可利用补偿法和叠加原理来求解环心处的场强。由于 $d<<l$，所以圆环的半径可近似看成 $r=l/2\pi$，其电荷线密度为 $\lambda=q/l$，接口处的缺口可等效为在接口处叠加了一个电量 $q'=-\lambda d$ 的点电荷。由场强叠加原理，环心处的电场强度将由闭合的均匀带电圆环和缺口处的点电荷 $q'$ 共同产生。又闭合圆环在环心处的场强为零，所以

$$E=\frac{|q'|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{(q/l)d}{4\pi\varepsilon_0(l/2\pi)^2}=\frac{\pi qd}{\varepsilon_0 l^3}$$

方向由环心指向缺口处。环心处的电势为：$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\dfrac{q}{2\varepsilon_0 l}$

10.6 静电场高斯定理的数学表达式为 $\oint_s \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=$______ ,它表明静电场是________；静电场的环路定理表达式为 $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=$ _______，它表明静电场是__________。

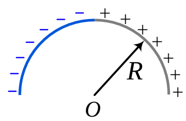
**10.6 答案：** $\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q$ ，有源场；0，无旋场或保守力场

10.7 在负电荷形成的电场中有 A 和 B 两点，A 比 B 更靠近负电荷，则________的电场强度大，_________的电势高。

**10.7 答案：** A，B

**解题提要：** 从负点电荷的场强公式 $E=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 和电势公式 $V=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 可直接的到结论。

10.8 如图所示，一根细塑料棒被弯曲成半径为 $R$ 的半圆形。假设其左半部分均匀分布 $-Q$ 的电荷，右半部分均匀分布 $+Q$ 的电荷，试求其圆心 $O$ 的处电场强度。




测试题 10.8 图

**10.8 答案：** $-\dfrac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{i}$

**解：** 本题可视为由两个均匀带电的四分之一圆环组成的带电体，可分别计算它们各自在 $O$ 点产生的电场强度，然后利用矢量叠加求合电场。

建立坐标如图所示，首先计算右边带正电的$1/4$圆弧在$O$点处产生的场强。在与$x$轴的夹角为$\theta$处的圆弧上取一个长$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$的电荷元，其所带电量为

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l=\frac{Q}{\pi R/2}R\mathrm{d}\theta=\frac{2Q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

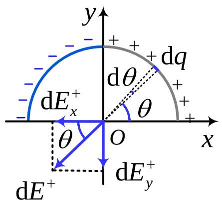
它在$O$点处产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E^{+}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta$$

方向从$\mathrm{d}q$指向圆心。显然当$\theta$变化时，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{+}$的方向也随之改变，所以不能直接对$\mathrm{d}E^{+}$积分。由图可知，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{+}$在$x$、$y$轴上的分量为

$$\mathrm{d}E_x^{+}=-\mathrm{d}E^{+}\cos\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_y^{+}=-\mathrm{d}E^{+}\sin\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$



测试题 10.8 解图

积分可得

$$E_x^{+}=\int\mathrm{d}E_x^{+}=\int_0^{\pi/2}-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_y^{+}=\int\mathrm{d}E_y^{+}=\int_0^{\pi/2}-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

所以右边带正电的$1/4$圆弧在$O$点处产生的场强为

$$\boldsymbol{E}^{+}=E_x^{+}\boldsymbol{i}+E_y^{+}\boldsymbol{j}=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

同理，由对称性可得左边带负电的$1/4$圆弧在$O$点处产生的场强为

$$\boldsymbol{E}^{-}=E_x^{-}\boldsymbol{i}+E_y^{-}\boldsymbol{j}=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

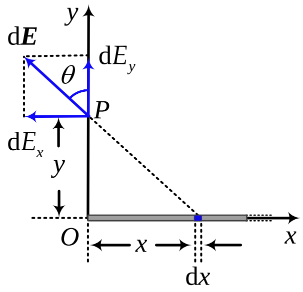
所以$O$点处的总场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{-}+\boldsymbol{E}^{-}=-\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{i}$$

10.9 半无限长的直线均匀带电体，单位长度上所带电量为$\lambda$。试证明：端垂面（即过端点并与直线垂直的平面）上除端点外，其他任何一点的电场强度$\boldsymbol{E}$的方向与这直线成$45°$角。

**证明：**以带电直线的端点$O$为坐标原点，带电直线为$x$轴，取直角坐标系如图所示。在带电直线上任取一段长为的$\mathrm{d}x$的电荷元，其电量为$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，它在端垂面上离端点$O$为$y$的P点处产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$




测试题 10.9 解图

当$\lambda>0$时，d$\boldsymbol{E}$的方向如图所示，它在$x$和$y$方向上的分量分别为

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\cos\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E_x=-\mathrm{d}E\sin\theta=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

积分得整个带电直线在P点产生的电场强度$\boldsymbol{E}$的两个分量为

$$E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{y\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{x=0}^{\infty}=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}$$

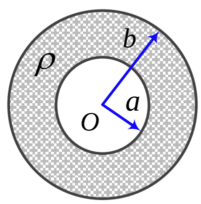
$$E_x=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{x=0}^{\infty}=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}$$

$\boldsymbol{E}$与$x$轴的夹角为

$$\alpha=\arctan\frac{E_y}{E_x}=\arctan\left(-1\right)=135^\circ$$

即P点的场强方向与带电直线延长线的夹角为$45^\circ$。同理可以证明，当$\lambda<0$时，场强方向与带电直线正方向的夹角为$45^\circ$。由此可知，不论哪种情况，端垂面上任意一点的场强方向与带电线的夹角都是$45^\circ$。证毕。

10.10 一带电球壳的内外半径分别为$a$和$b$，壳体中的电荷均匀分布，其电荷密度为$\rho$。试求带电壳体内外的场强分布，并画出$E-r$曲线。




测试题 10.10 图

**10.10 答案：**当$r<a$时，$E=0$；$a<r<b$，$E=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{r^3-a^3}{r^2}$；$r>b$

时， $E=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{b^3-a^3}{r^2}$

**解**：由对称性分析和场强叠加原理可知，本题中的场强分布具有球对称性，且当 $\rho>0$ 时，场强方向沿径向向外。为此，作一个半径 $r$ 的同心球面为高斯面 $S$，由高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi r^2 E=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q$$

式中的 $\sum Q$ 是高斯面 $S$ 所包围的电量的代数和。

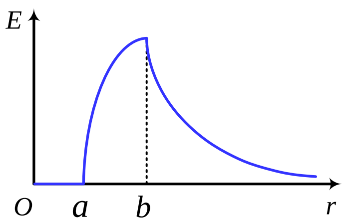
当 $r<a$ 时，即在壳体空腔内， $\sum Q=0$ ，所以： $E=0$

当 $a<r<b$，即在壳体内部， $\sum Q=\rho\cdot\dfrac{4\pi}{3}\left(r^3-a^3\right)$，所以

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^3-a^3}{r^2}$$

当 $r>b$ 时，即在球壳外部，$\sum Q=\rho\cdot\dfrac{4\pi}{3}\left(b^3-a^3\right)$ 所以

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{b^3-a^3}{r^2}$$




测试题 10.10 解图

各点场强的方向均沿径向向外。场强分布的 $E-r$ 曲线，如图所示。

10.11 电荷分布在半径为 $R$ 的球体内，其电荷体密度为 $\rho=\rho_0\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$，式中的 $\rho_0$ 为常数， $r$ 为球心到球内任一点的距离。试求：

（1）该带电球体所带的总电量；

（2）球内外电场强度的分布；

（2）电场强度的最大值。

**10.11 答案**： $\dfrac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$；在球内： $E=\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{3r^2}{4R}\right)$，在求外： $E=\dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$； $\dfrac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$

**解**：（1）由于电荷分布具有球对称性，为此取一个半径为 $r$，厚度为 $\mathrm{d}r$ 的薄球壳，则该球壳内的电荷为

$$\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V=\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

所以球体内的总电量为

$$q=\int \mathrm{d}q=\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$$

（2）作一个半径为 $r$ 的同心球面为高斯面，根据高斯定理，得高斯面上各点的场强大小为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum q$$

式中的 $\sum q$ 是高斯面 $S$ 所包围的电量的代数和。

当 $r<R$ 时，$\sum q=\int_0^r \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi\rho_0 r^3}{3R}(4R-3r)$，所以

$$E=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r-\frac{3r^2}{4R}\right) \qquad ①$$

当 $r>R$ 时，$\sum q=\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$，所以

$$E=\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2} \qquad ②$$

各处场强的方向：当 $\rho_0>0$ 时，均沿径向向外，当 $\rho_0<0$ 时，均沿径向指向圆心。

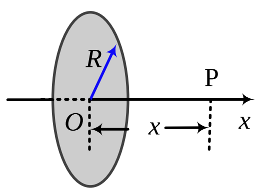
（3）比较①②两式可以看到，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的最大值出现在球内。由①式得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r-\frac{3r^2}{4R}\right)=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3r}{2R}\right)$$

令：$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=0$，得 $r=\frac{2}{3}R$，即电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小在 $r=\frac{2}{3}R$ 处出现最大值，其大小为

$$E_{\max}=\frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$$

10.12 如图所示，一个半径为 $R$ 的均匀带电圆盘，其电荷面密度为 $\sigma$，求轴线上离圆心为 $x$ 处的电势 $V$，并由 $V$ 求轴线上任意一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$。



测试题 10.12 图

**10.12 答案：** $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$，$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\boldsymbol{i}$

**解：** 在圆盘上任取一个半径为 $r$，宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，则该圆环所带的电荷量为 $\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$。以无穷远处为零电势点，则 $\mathrm{d}q$ 在轴线上离圆心为 $x$ 处的 P 点电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

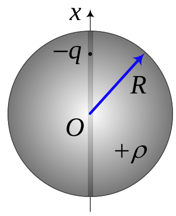
积分得 P 点总电势为

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

利用场强与电势的微分关系，得轴线上任一点的场强为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

10.13 有一半径为 $R$ 的均匀带电球体，电荷体密度为 $+\rho$，现在球体内沿直径挖一极细的隧道，假设挖隧道前后球体内的电荷分布和电场分布均保持不变，如图所示。现在洞口处由静止释放一个点电荷 $-q$，其质量为 $m$，重力可忽略不计。试分析点电荷在隧道内的运动规律。



测试题 10.13

**10.13 答案：** 作周期为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}$ 的简谐振动，振动表达式为：

$$x=R\cos\sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}t$$

**解：** 以球心为坐标原点 $O$，沿隧道取坐标轴 $Ox$，如图所示。由高斯定理可以求出球内离球心为 $x$ 处的场强大小为

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}x$$

其方向沿径向（$x$ 轴方向）。则点电荷 $-q$ 在隧道内受到的电场力为

$$F=-qE=-\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}x$$

这表明，力 $\boldsymbol{F}$ 的方向始终指向球心，大小与电荷离开球心的距离 $x$ 成正比，所以电荷在隧道内作简谐振动。

若令 $k=\dfrac{q\rho}{3\varepsilon_0}$，由简谐振动的规律可知，点电荷 $-q$ 在隧道中作简谐振动的角频率和周期分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}\quad,\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}$$

假设电荷作简谐振动的表达式为：$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$。由题意知：$t = 0$时，$x_0 = R$，$v_0 = 0$，所以$A = R$，$\varphi_0 = 0$，由此得电荷的振动表达式为

$$x = R\cos\sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}t$$

**10.1 答案：**B

**解题提要：**正负两块带电平板在两板间产生的场强分别为，

带正电的平板：$E_+=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 方向向右； 带负电的平板：$E_-=\dfrac{2\sigma}{2\varepsilon_0}$ 方向向右

由于两者方向相同，所以板内总场强为

$$E=E_++E_-=\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$$

方向向右。两板之间的电势差为

$$U=Ed=\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}d$$

**10.2 答案：**A

**解法提要：**由题意可知，带电球面所带电量为：$Q=4\pi R^2\sigma$，由高斯定理，均匀带电球面外任意一点的电场强度的大小为

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

所以在球面外靠近球面处（$r\to R$），场强大小为$E=\sigma/\varepsilon_0$

**10.3 答案：**D

**解题提要：**由高斯定理：$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}=6\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=6\Phi$，所以：$\Phi=\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

**10.4 答案：**B

**解题提要：**在高斯定理$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$ 中，$\sum q_i$ 是高斯面所包围的电荷的代数和，与高斯面外的电荷无关。故要使通过高斯面的电通量发生变化，则必须使$\sum q_i$ 发生变化。

**10.5 答案：**$\dfrac{\pi qd}{\varepsilon_0 l^3}$，方向由环心指向缺口处，$\dfrac{q}{2\varepsilon_0 l}$

**解题提要：**本题可利用补偿法和叠加原理来求解环心处的场强。由于$d<<l$，所以圆环的半径可近似看成$r=l/2\pi$，其电荷线密度为$\lambda=q/l$，接口处的缺口可等效为在接口处叠加了一个电量$q'=-\lambda d$ 的点电荷。由场强叠加原理，环心处的电场强度将由闭合的均匀带电圆环和缺口处的点电荷$q'$共同产生。又闭合圆环在环心处的场强为零，所以

$$E=\frac{|q'|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{(q/l)d}{4\pi\varepsilon_0 (l/2\pi)^2}=\frac{\pi q d}{\varepsilon_0 l^3}$$

方向由环心指向缺口处。环心处的电势为：$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\dfrac{q}{2\varepsilon_0 l}$

**10.6 答案：** $\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q$ ，有源场；0，无旋场或保守力场

**10.7 答案：** A，B

**解题提要：** 从负点电荷的场强公式 $E=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 和电势公式 $V=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 可直接的到结论。

**10.8 答案：** $-\dfrac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{i}$

**解：** 本题可视为由两个均匀带电的四分之一圆环组成的带电体，可分别计算它们各自在 $O$ 点产生的电场强度，然后利用矢量叠加求合电场。

建立坐标如图所示，首先计算右边带正电的 $1/4$ 圆弧在 $O$ 点处产生的场强。在与 $x$ 轴的夹角为 $\theta$ 处的圆弧上取一个长 $\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$ 的电荷元，其所带电量为

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l=\frac{Q}{\pi R/2}R\mathrm{d}\theta=\frac{2Q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

它在 $O$ 点处产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E^+=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta$$

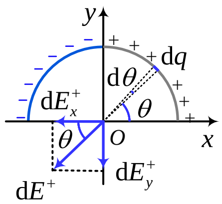
方向从 $\mathrm{d}q$ 指向圆心。显然当 $\theta$ 变化时，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}^+$ 的方向也随之改变，所以不能直接对 $\mathrm{d}E^+$ 积分。由图可知，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}^+$ 在 $x$、$y$ 轴上的分量为

$$\mathrm{d}E_x^+=-\mathrm{d}E^+\cos\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_y^+=-\mathrm{d}E^+\sin\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

积分可得

$$E_x^+=\int\mathrm{d}E_x^+=\int_0^{\pi/2}-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$




测试题 10.8 解图

$$E_y^+ = \int \mathrm{d}E_y^+ = \int_0^{\pi/2} -\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta \mathrm{d}\theta = -\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

所以右边带正电的1/4圆弧在$O$点处产生的场强为

$$\boldsymbol{E}^+ = E_x^+\boldsymbol{i} + E_y^+\boldsymbol{j} = -\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

同理，由对称性可得左边带负电的1/4圆弧在$O$点处产生的场强为

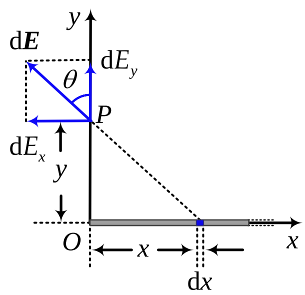
$$\boldsymbol{E}^- = E_x^-\boldsymbol{i} + E_y^-\boldsymbol{j} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

所以$O$点处的总场强为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^- + \boldsymbol{E}^- = -\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{i}$$

**10.9 证明：**以带电直线的端点$O$为坐标原点，带电直线为$x$轴，取直角坐标系如图所示。在带电直线上任取一段长为的$\mathrm{d}x$的电荷元，其电量为$\mathrm{d}q = \lambda\mathrm{d}x$，它在端垂面上离端点$O$为$y$的P点处产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$




测试题 10.9 解图

当$\lambda > 0$时，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$的方向如图所示，它在$x$和$y$方向上的分量分别为

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E_x = -\mathrm{d}E\sin\theta = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

积分得整个带电直线在P点产生的电场强度$\boldsymbol{E}$的两个分量为

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{y\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{x=0}^{\infty} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}$$

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{x=0}^{\infty} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}$$

$\boldsymbol{E}$与$x$轴的夹角为

$$\alpha = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \arctan(-1) = 135°$$

即 P 点的场强方向与带电直线延长线的夹角为$45°$。同理可以证明，当$\lambda < 0$时，场强方向与带电直线正方向的夹角为$45°$。由此可知，不论哪种情况，端垂面上任意一点的场强方向与带电线的夹角都是$45°$。证毕。

**10.10 答案：** 当$r < a$时，$E = 0$；$a < r < b$，$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^3 - a^3}{r^2}$；$r > b$时，$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{b^3 - a^3}{r^2}$

**解：** 由对称性分析和场强叠加原理可知，本题中的场强分布具有球对称性，且当$\rho > 0$时，场强方向沿径向向外。为此，作一个半径$r$的同心球面为高斯面$S$，由高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q$$

式中的$\sum Q$是高斯面$S$所包围的电量的代数和。

当$r < a$时，即在壳体空腔内，$\sum Q = 0$ ，所以：$E = 0$

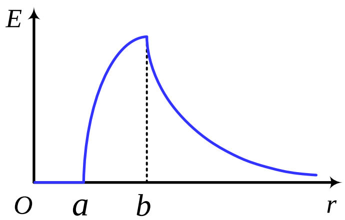
当$a < r < b$，即在壳体内部，$\sum Q = \rho\cdot\frac{4\pi}{3}\left(r^3 - a^3\right)$，所以

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^3 - a^3}{r^2}$$

当$r > b$时，即在球壳外部，$\sum Q = \rho\cdot\frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)$ 所以

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{b^3 - a^3}{r^2}$$

各点场强的方向均沿径向向外。场强分布的$E - r$曲线，如图所示。



测试题 10.10 解图

**10.11 答案：** $\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$；在球内：$E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{3r^2}{4R}\right)$，在求外：$E = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$；$\frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$

**解：**（1）由于电荷分布具有球对称性，为此取一个半径为$r$，厚度为$\mathrm{d}r$的薄球壳，则该球壳内的电荷为

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

所以球体内的总电量为

$$q=\int \mathrm{d}q=\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$$

（2）作一个半径为 $r$ 的同心球面为高斯面，根据高斯定理，得高斯面上各点的场强大小为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum q$$

式中的 $\sum q$ 是高斯面 $S$ 所包围的电量的代数和。

当 $r<R$ 时，$\sum q=\int_0^r \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi\rho_0 r^3}{3R}(4R-3r)$，所以

$$E=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r-\frac{3r^2}{4R}\right) \qquad ①$$

当 $r>R$ 时，$\sum q=\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$，所以

$$E=\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2} \qquad ②$$

各处场强的方向：当 $\rho_0>0$ 时，均沿径向向外，当 $\rho_0<0$ 时，均沿径向指向圆心。

（3）比较①②两式可以看到，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的最大值出现在球内。由①式得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r-\frac{3r^2}{4R}\right)=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3r}{2R}\right)$$

令：$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=0$，得 $r=\frac{2}{3}R$，即电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小在 $r=\frac{2}{3}R$ 处出现最大值，其大小为

$$E_{\max}=\frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$$

**10.12 答案：** $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$，$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\boldsymbol{i}$

**解：** 在圆盘上任取一个半径为 $r$，宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，则该圆环所带的电荷量为 $\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$。以无穷远处为零电势点，则 $\mathrm{d}q$ 在轴线上离圆心为 $x$ 处的 P 点电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

积分得 P 点总电势为

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

利用场强与电势的微分关系，得轴线上任一点的场强为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

**10.13 答案：**作周期为$T=2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}$的简谐振动，振动表达式为： $x=R\cos\sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}t$

**解：**以球心为坐标原点$O$，沿隧道取坐标轴$Ox$，如图所示。由高斯定理可以求出球内离球心为$x$处的场强大小为

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}x$$

其方向沿径向（$x$轴方向）。则点电荷$-q$在隧道内受到的电场力为

$$F=-qE=-\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}x$$

这表明，力$\boldsymbol{F}$的方向始终指向球心，大小与电荷离开球心的距离$x$成正比，所以电荷在隧道内作简谐振动。

若令$k=\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}$，由简谐振动的规律可知，点电荷$-q$在隧道中作简谐振动的角频率和周期分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}\quad ,\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}$$

假设电荷作简谐振动的表达式为：$x=A\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$。由题意知：$t=0$时，$x_0=R$，$v_0=0$，所以$A=R$，$\varphi_0=0$，由此得电荷的振动表达式为

$$x=R\cos\sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}t$$