武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
线性代数 D 参考答案（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（8 分）计算行列式$\begin{vmatrix}102 & 100 & 204\\198 & 200 & 395\\302 & 300 & 600\end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix}102 & 100 & 204\\198 & 200 & 395\\302 & 300 & 600\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 100 & 204\\-2 & 200 & 395\\2 & 300 & 600\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 100 & 4\\-2 & 200 & -5\\2 & 300 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 100 & 4\\0 & 300 & -1\\0 & 200 & -4\end{vmatrix}=-2000$

二、（10 分）**设** $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$**，计算** $\boldsymbol{A^{2022}}$

解：记$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha^T\alpha=3$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}=-\alpha\alpha^T$$

$$A^{2022}=\left(-\alpha\alpha^T\right)^{2022}=\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)^{2021}\alpha^T=-3^{2021}A$$

三、（12 分）**设有三阶方阵** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$**，求** A^{-1} **和** $\left|A^*-3A^{-1}\right|$**.**

解:$\boldsymbol{|A|=-1\neq 0}$**,因此矩阵**$\boldsymbol{A}$**可逆，且有**

$$\boldsymbol{A^{-1}}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2}\\\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

故$\boldsymbol{\left|A^*-3A^{-1}\right|=\left||A|A^{-1}-3A^{-1}\right|=(-4)^3\left|A^{-1}\right|=64}$

四、（12 分）

设**4**元非齐次线性方程组的系数矩阵A的秩为**3**，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是它的三个解向量，且

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$，求该方程组的通解。

解：设**4**元非齐次线性方程组$Ax=b$.

已知$A\boldsymbol{\alpha}_1=b, A\boldsymbol{\alpha}_2=b$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=b$

$A(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=b+b-2b=0$,得到$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$是$Ax=0$的解。

又$R(A)=3, n-R(A)=4-3=1$.

所以$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-5\\0\\4\\-4\end{pmatrix}$为$Ax=0$的一个基础解系。

则非齐次线性方程组$Ax=b$的通解为$x=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-5\\0\\4\\-4\end{pmatrix}$，$c$为任意实数。

五、（15 分）求向量组

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-8\\4\\8\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\xi_4=\begin{pmatrix}10\\5\\6\end{pmatrix}$$

的秩及一个最大无关组，并把其它的向量用最大无关组表示出来.

令

$$A=\begin{pmatrix}1&-8&2&10\\2&4&-1&5\\3&8&-2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-1/4&-3/4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故向量组的秩为 2，最大无关组为ξ_1,ξ_2**，这里**$\xi_3=-1/4\,\xi_2$，$\xi_4=4\xi_1-3/4\,\xi_2$

六、（10 分）**设有线性方程组**

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+(\lambda+1)x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda+2\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1\end{cases},$$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

解：经计算系数行列式得$|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,于是由克莱姆法则有如下结论：

(1)当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，$R(A)=R(B)=3$,方程组有唯一解；

(2)当$\lambda=1$时，$R(A)=1$，$R(B)=2$，该情形方程组无解；

(3)当$\lambda=-2$时，$R(A)=R(B)=2$,，此时方程组有无限多个解。而

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\2&-1&-1&0\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此得

$$\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\\x_3=x_3\end{cases}，即\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}，(c\in R).$$

七、（8 分）

已知$R(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4)=3, R(\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4;\alpha_5)=4$,证明

(1)α_1能由$\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性表示;

(2)α_5不能由$\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性表示.

证明：由$R(\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4;\alpha_5)=4$知$\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4;\alpha_5$线性无关.

从而向量组$\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$;线性无关(整体无关则部分无关）

又$R(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4)=3$知向量组$\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性相关。

由已知结论知α_1能由$\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性表示;

(2)假设α_5能由$\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性表示，由(1)可得$\alpha_5$能由$\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性表示。

与$R(\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4;\alpha_5)=4$矛盾。

所以α_5不能由$\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性表示

八、（10 分）

设3阶对称矩阵A的特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=0$. 对应$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量依次为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$,求$A$.

解：设λ_3对应的特征向量为$\alpha_3=\left(x,y,z\right)^T$.

注意到A为对称阵，且3个特征值互不相同，知α_1，α_2，α_3正交。

则$\begin{cases} x+2y+2z=0, \\ 2x+y-2z=0. \end{cases}$

上述方程组的通解为$k(-2,2,-1)^T$, k为任意实数。

取$\alpha_3=(-2,2,-1)^T$，将α_1，α_2，α_3单位化

记$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

则存在正交矩阵P, 使得$P^T AP=\Lambda=diag(1,-1,0)$

$$A=P\Lambda P^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

九、（15 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$,

(1)写出二次型对应的矩阵A;

(2)求A的特征值和特征向量;

(3)用正交变换把二次型化为标准型，并写出相应的正交矩阵.

解：（1）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

（2）由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$, 得$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$,

对$\lambda_1=1$,解线性方程组$(A-\lambda_1E)x=o$得对应特征向量$\alpha_1=(0,1,-1)^T$

对$\lambda_2=2$,解线性方程组$(A-\lambda_2E)x=o$得对应特征向量$\alpha_2=(1,0,0)^T$

对$\lambda_3=5$,解线性方程组$(A-\lambda_3E)x=o$得对应特征向量$\alpha_3=(0,1,1)^T$

(3) 所求正交变换阵 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，变换之下的标准形为：

$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$；