第 6 章 机械振动 习题解答

6.1—6.11 思考题答案略

6.12　一轻弹簧上端固定，下端铅直地悬挂一个质量为m的物体，设该物体以周期$T=2.0\text{s}$振动；今在该物体上再附加2.0kg 的一个小铁块，这时周期变化为3.0s 。试求物体的质量m 。

6.12 解：设小铁块质量为Δm，则挂铁块前后的周期分别为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\quad,\quad T'=2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}}$$

所以

$$\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{m+\Delta m}{m}}$$

由此可得物体的质量为

$$m=\frac{\Delta m}{\left(T'/T\right)^2-1}=\frac{2.0}{\left(3.0/2.0\right)^2-1}=1.6\ (\text{kg})$$

6.13　一弹簧振子的质量为0.500kg，测得其振动周期为1.250s，当它的振幅为20.0cm时，试求弹簧振子的角频率、弹簧的劲度系数、振子的最大速度和最大加速度。

6.13 解：弹簧振子的角频率为

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{8\pi}{5}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

由$\omega=\sqrt{k/m}$，可得弹簧的劲度系数为

$$k=\omega^2 m=12.6\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

振子的最大速度和最大加速度分别为

$$v_m=\omega A=1.00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a_m=\omega^2 A=5.05\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

6.14　一物体放在水平木板上，物体与板面间的静摩擦系数为 0.50。

（1）若此板沿水平方向做简谐振动，频率为 2.0Hz，要使物体在板上不致滑动，振幅的最大值为多少？

（2）若令此板改做竖直方向的简谐振动，振幅为 0.50m，要使物体—直保持与板接触的最大频率是多少?

6.14 解：（1）当木板水平振动时，由牛顿运动定律可知，静摩擦力能使物体获得的最大加速度为

$$a_{物m}=\frac{F_f}{m}=\mu g$$

而木板作简谐振动的最大加速度为

$$a_m = \omega^2 A = 4\pi^2 \nu^2 A$$

式中 A 为木板的振幅。要使物体在木板上不滑动，则必须满足： $a_m \le a_{物m}$ ，即

$$4\pi^2 \nu^2 A \le \mu g$$

由此可得木板振幅的最大值为

$$A_m = \frac{\mu g}{4\pi^2 \nu^2} = \frac{0.50 \times 9.8}{4\pi^2 \times 2^2} = 0.031\ (\mathrm{m})$$

（2） 当木板在竖直方向振动时，设最大振动频率为 ν_m ，则木板振动时的最大加速度为

$$a'_m = \omega_m^2 A' = \left(2\pi \nu_m\right)^2 A'$$

而物体在下降时的最大加速度为

$$a'_{物} = g$$

要使木板在上下振动时，物体不脱离木板，则必须满足： $a'_m \le a'_{物} = g$ ，即

$$\left(2\pi \nu_m\right)^2 A' \le g$$

由此得木板的最大振动频率为

$$\nu_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.50}} = 0.705\ (\mathrm{Hz})$$

6.15 一物体沿 x 轴作振幅为 20cm，周期为 1.6 s 的简谐振动，物体质量为 0.20kg。当 $t=0$ 时，物体位于 x 轴上 $-10\mathrm{cm}$，且向 x 轴负方向运动。试求：

（1）物体的振动表达式；

（2） $t = 1.0\mathrm{s}$ 时物体所受的合外力的大小和方向；

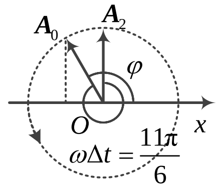
（3）由起始位置开始第二次运动到平衡位置时所需的时间。

6.15 解：（1）由题意可知， $A = 20\mathrm{cm}$ ， $T = 1.6\mathrm{s}$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{5\pi}{4}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

又由 $t = 0$ 时

$$x_0 = A\cos\varphi = -A/2\left(=-10\mathrm{cm}\right) \quad , \quad v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

结合旋转矢量图可得： $\varphi = \frac{2\pi}{3}$



习题6.15解图

所以物体的振动表达式为

$$x = 0.20\cos\left(\frac{5\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right)\ (\mathrm{SI})$$

（2）因为： $a = -\omega^2 x$ ，再由牛顿定律得

$$F = ma = -m\omega^2 x$$

所以当 $t = 1.0\mathrm{s}$ 时，物体所受的合外力为

$$F=-0.20\times\left(\frac{5\pi}{4}\right)^2\times0.20\cos\left(\frac{5\pi}{4}\times1.0+\frac{2\pi}{3}\right)\ (\mathrm{N})=-0.60\ (\mathrm{N})$$

式中的符号表示受力方向沿 x 轴负方向。

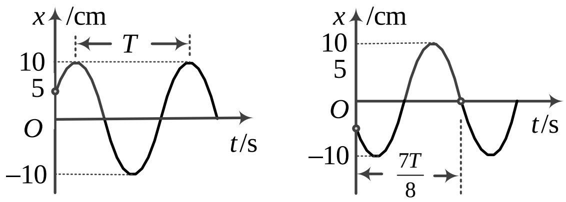
（3）由旋转矢量图可知，当振子从初始位置第二次到达平衡位置时，对应的旋转矢量从 $\boldsymbol{A}_0$ 位置沿逆时针方向转到 $\boldsymbol{A}_2$ 位置，如图所示。假设所需时间为 Δt，由图可直观地看出

$$\omega\Delta t=\frac{11\pi}{6}$$

所以

$$\Delta t=\frac{11\pi}{6\omega}=\frac{22}{15}\mathrm{s}=1.47\mathrm{s}$$

6.16　物体作简谐振动的振动曲线分别如图（a）和（b）所示，图中 T 作为已知值。试分别写出它们的简谐振动表达式。



（a）　　（b）

习题6.16图

6.16 解： 对图 a 所示的简谐振动，由曲线得，$A=10\mathrm{cm}$，且 $t=0$ 时

$$x_{a0}=A\cos\varphi_a=A/2$$

$$v_{a0}=-A\omega\sin\varphi_a>0$$

再由旋转矢量图（a）可知：$\varphi_a=-\pi/3$

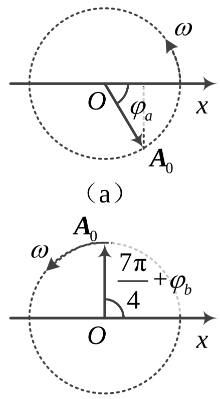
所以简谐振动表达式为：$x_a=10\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{3}\right)$ cm

对图 b 所示的简谐振动，设振动表达式为：$x_b=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_b\right)$

由图可知：$A=10\mathrm{cm}$，在 $t=\frac{7}{8}T$ 时刻

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{7T}{8}+\varphi_b\right)=A\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\varphi_b\right)=0$$

$$v=-\frac{2\pi A}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{7T}{8}+\varphi_b\right)=-\frac{2\pi A}{T}\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\varphi_b\right)<0$$



（a）　（b）

习题6.16解图

结合旋转矢量图，可得

$$\frac{7\pi}{4}+\varphi_b=\frac{\pi}{2}+2\pi\qquad 即\qquad \varphi_b=\frac{3\pi}{4}$$

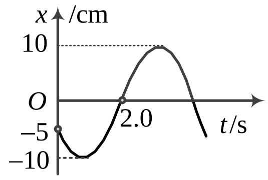
所以简谐振动的表达式为

$$x_b=10\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{3\pi}{4}\right)\ \mathrm{cm}$$

6.17　某质点作间谐振动的振动曲线如图所示，试求：

（1）质点的振动表达式；

（2）质点从初始位置出发，第一次运动到正最大位移时所需的时间。



习题6.17图

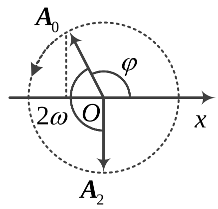
6.17 解（1）设质点的振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由振动曲线得：$A = 10\text{cm}$，当 $t = 0$ 时

$$x_0 = 10\cos\varphi = -5\text{cm} \qquad v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

由此可解得：$\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$



习题6.17（1）解图

当 $t = 2\text{s}$ 时

$$x_2 = 10\cos\left(2\omega + \frac{2\pi}{3}\right) = 10 \qquad v_2 = -A\omega\sin\left(2\omega + \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

由此可得

$$2\omega + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{，式中 } k = 0\text{，}1\text{，}2\text{，}\ldots$$

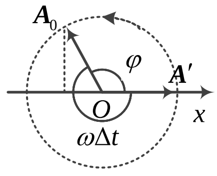
又从图中可以看出，$t = 2\text{s}$ 时，质点尚未完成一次全振动，所以上式中应取 $k = 0$，所以

$$2\omega + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \qquad \text{即} \qquad \omega = \frac{5\pi}{12}$$

所以振动表达式为

$$x = 10\cos\left(\frac{5\pi}{12}t + \frac{2\pi}{3}\right)(\text{cm})$$

（2）在旋转矢量图中首先确定 $t = 0$ 时旋转矢量的位置 $\boldsymbol{A}_0$，再确定质点第一次回到正最大位移时旋转矢量的位置 $\boldsymbol{A}'$。假设所需时间为 Δt，则由旋转矢量图可以直观地看出



习题6.17（2）解图

$$\omega\Delta t = \frac{4\pi}{3} \qquad \text{所以} \qquad \Delta t = \frac{4\pi}{3\omega} = \frac{16}{5}\text{s} = 3.2\text{s}$$

6.18　一弹簧振子沿 x 轴作简谐振动，以平衡位置作为坐标原点。已知振动物体的最大位移为 $x_m = 0.40\text{m}$，最大速度为 $v_m = 0.80\pi\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，受到的最大恢复力为 $F_m = 0.80\text{N}$。假定在 $t = 0$ 时刻，振子的位移为 0.2m，速度沿 x 轴的负方向。试求：

（1）此弹簧振子的振动表达式；

（2）振动系统的总能量；

（3）动能和势能相等时物体的位置。

6.18 解：（1）设质点的振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由题意可知

$$x_m = A = 0.4\text{m} \quad 且 \quad v_m = \omega A = 0.80\pi\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

由此可得

$$\omega = \frac{v_m}{A} = \frac{v_m}{x_m} = 2\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

由 $t = 0$ 时

$$x_0 = A\cos\varphi = 0.2\text{m} \quad v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

可得

$$\varphi = \pi/3$$

所以振动表达式为

$$x = 0.4\cos\left(2\pi t + \pi/3\right)\ \text{m}$$

（2）由 $F_m = kA$，所以弹簧的劲度系数为

$$k = \frac{F_m}{x_m} = 2\ \ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

所以振动系统的总能量为

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0.16\ \text{J}$$

（3）因振动系统机械能守恒，$E = E_k + E_p$，所以当 $E_k = E_p$ 时

$$E_p = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}kA^2$$

又 $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$，由此得

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2 \qquad 即 \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A = \pm 0.2\sqrt{2}\text{m}$$

6.19　质量为 0.20kg 的物体在竖直方向作简谐振动，振幅为 5.0cm，周期为 0.25s，以竖直向上为 x 轴的正方向，开始振动时物体在负方向的最大位移处。试求在 0.10s 时物体的动能和系统的势能。

6.19 解：由题意可得 $A = 5.0\times10^{-2}\,\text{m}$，$T = 0.25\text{s}$，所以 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 8\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$，再由 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，得

$$k = \omega^2 m = 126\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

又 $t = 0$ 时，$x_0 = A\cos\varphi = -A$，所以 $\varphi = \pi$。于是振动表达式为

$$x = A\cos\left(\omega t + \pi\right) = 5.0\times10^{-2}\cos\left(8\pi t + \pi\right)\ \text{m}$$

当$t=0.10\text{s}$时，物体的位移为：$x_1=0.04\text{ m}$

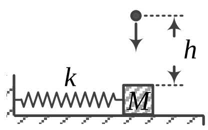
所以系统的势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\times126\times0.04^2\ (\text{J})=0.10(\text{J})$$

物体的动能为

$$E_k=E-E_p=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2\approx0.057\ (\text{J})$$

6.20　一个水平面上的弹簧振子，轻质弹簧的劲度系数为k，所系物体的质量为M，振幅为A。现有一质量为m的小物体从高度h处自由下落。当振子在最大位移处，小物体正好落在M上，并粘在—起，这时系统的振动周期、振幅和振动能量有何变化？如果小物体是在振子到达平衡位置时落在M上，这些量又怎样变化？



题6.20图

6.20 解：（1）当M恰好在最大位移处，m落下与M粘合时。对于以m和M组成的系统，在碰撞过程中，水平方向动量守恒，所以水平方向的动量仍为零，即碰撞后的速度为零，故这时的位移就是碰撞后的振幅A_1，即$A_1=A$，所以振幅不变；

由$E=\dfrac{1}{2}kA^2$可知，即$E_1=E$，碰撞后振动系统的总能量不变；

再由$T=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$，得碰撞后的振动周期为

$$T_1=2\pi\sqrt{(m+M)/k}$$

所以周期变大了。

（2）当M过平衡位置时m落下，振动周期变为

$$T_2=T_1=2\pi\sqrt{(m+M)/k}$$

即振动周期变大了。

由于碰撞时水平方向动量守恒，设碰撞前M的速度为v_m，碰撞后两者的共同速度为v_{2m}，则有

$$Mv_m=(m+M)v_{2m}$$

且

$$v_m=\omega A=\sqrt{\frac{k}{M}}A\ ,\ v_{2m}=\omega_2A_2=\sqrt{\frac{k}{M+m}}A_2$$

将v_m、v_{2m}代入上式，得

$$M\sqrt{\frac{k}{M}}A=(m+M)\sqrt{\frac{k}{M+m}}A_2$$

由此得

$$A_2=\sqrt{\frac{M}{m+M}}A$$

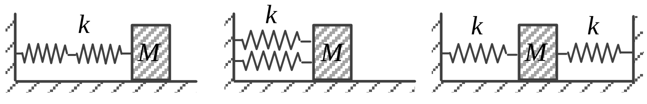
即振幅变小了。

碰撞后振动系统的总能量为

$$E_2=\frac{1}{2}kA_2^2=\frac{1}{2}kA^2\frac{M}{M+m}=E\frac{M}{M+m}$$

即振动能量也变小了。

6.21 两个倔强系数均为 k 的相同的轻质弹簧，按图示的不同方式连接一个质量为 m 的物体，组成一振动系统。试求它们的振动周期。



题6.21图

6.21 解：对图 a 所示情况，设物体相对平衡位置的位移为 x，则两弹簧分别伸长 $x/2$，物体受力 $f=-k\cdot\frac{x}{2}$。由牛顿定律可得振子的加速度为

$$a=\frac{f}{m}=-\frac{k}{2m}x$$

由此得角频率和周期分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{2m}}\quad,\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

对图 b 所示情况，当物体相对平衡位置位移 x 时，物体受力 $f=2kx$。由牛顿定律得加速度为

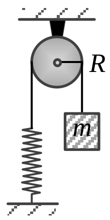
$$a=-\frac{2k}{m}x$$

所以角频率和、周期分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{m}}\quad,\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\text{。}$$

对图 c 所示情况，采用同 b 相同的方法可求得：$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$。

6.22 定滑轮的半径为 R，转动惯量为 I，一根不可伸长的轻绳绕过滑轮，一端与固定的轻质弹簧相连接，弹簧的倔强系数为 k；另一端挂一质量为 m 的物体，如图所示。现将 m 从平衡位置向下拉一微小距离后放手，证明物体作简谐振动，并求振动周期。设绳与滑轮间无滑动，轴的摩擦及空气阻力不计。



题6.22图

6.22 证明：设物体在平衡位置时，弹簧的伸长量为 x_0，则有

$$kx_0=mg \qquad ①$$

以竖直向下为作为物体 m 的运动正方向。当物体在平衡位置下方 x 时，则弹簧的总伸长量为：$x+x_0$，滑轮两端绳中拉力分别为：T_1、T_2。由牛顿定律和转动定律可得

对重物 $$mg-T_2=ma \quad ②$$

对滑轮 $$(T_2R-T_1R)=I\alpha \quad ③$$

对弹簧 $$T_1=k(x+x_0) \quad ④$$

$$a=\alpha R \quad ⑤$$

联立式①～⑤，可求得

$$a=-\frac{R^2k}{I+mR^2}x$$

上式表明：物体的加速度与物体离开平衡位置的位移的大小成正比，方向相反，所以物体作简谐振动。令 $\omega^2=\dfrac{R^2k}{I+mR^2}$，可得振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I+mR^2}{R^2k}}$$

6.23　一匀质杆长为 1.00 m，可绕其一端的水平轴在竖直平面内作微振动，把一个与杆质量相等的质点固定在杆上离轴为 h 的地方，用 T_0 表示未加质点时杆的振动周期，用 T 表示加上质点后的周期。试求：

（1）当 $h=0.50\mathrm{m}$ 和 $h=1.00\mathrm{m}$ 时的比值 T/T_0；

（2）是否存在某个 h 值，使 $T/T_0=1$？

6.23 解：（1）未加质点时，设杆的质量为 m，长度为 l，则杆对其端点的转动惯量为 $I_0=\dfrac{1}{3}ml^2$，当杆偏离平衡位置的角位移为 θ（θ 很小）时，所受重力矩

$$M_0=-mg\frac{l}{2}\sin\theta\approx-\frac{mgl}{2}\theta$$

式中负号表示力矩的方向与角位移的方向相反。由转动定律可得棒的角加速度为

$$\alpha_0=\frac{M_0}{I_0}=-\frac{3g}{2l}\theta=-\omega_0^2\theta$$

由此可知，棒的振动角频率和周期分别为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{3g}{2l}} \qquad T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

同理，加上质点后

$$M=-\left(mg\frac{l}{2}+mgh\right)\sin\theta\approx-\left(\frac{mgl}{2}+mgh\right)\theta$$

$$I=\frac{1}{3}ml^2+mh^2$$

$$\alpha=\frac{M}{I}=-\frac{3\left(l+2h\right)g}{2\left(l^2+3h^3\right)}\theta=-\omega^2\theta$$

所以加上质点后的振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2(l^2+3h^2)}{3g(l+2h)}}$$

所以周期之比为

$$\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{l^2+3h^2}{\left(l+2h\right)l}}$$

由此可得，当$l=1.00\text{m}$、$h=0.50$时

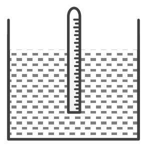
$$\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{1^2+3\times0.5^2}{(1+2\times0.5)\times1}}=0.935$$

当$h=1.00$时

$$\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{1^2+3\times1^2}{(1+2\times1)\times1}}=1.15$$

（2）若要求：$T/T_0=1$，则有：$\dfrac{l^2+3h^2}{(l+2h)l}=1$，将$l=1.0$代入并整理得：$3h^2-2h=0$，由此解得：$h=0$　或　$h=2/3$

6.24　如图所示，质量为m的比重计悬浮在密度为ρ的液体中，比重计圆管横截面积为S。试证明：在不计液体的黏滞阻力和液面的起伏时，比重计在竖直方向的自由振动是简谐振动，并求振动周期。



题6.24图

6.24 解：设比重计处于平衡状态时，插入水中的深度为x_0，由浮力定律有

$$mg=\rho gSx_0$$

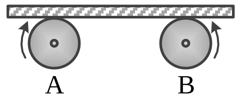
以向下为运动正方向，当比重计在平衡位置再向下移动x时，由牛顿定律可得，它的加速度为

$$a=\frac{F}{m}=\frac{mg-\rho gS\left(x_0+x\right)}{m}=-\frac{\rho gS}{m}x$$

上式表明加速度的大小与它离开平衡位置的位移的大小成正比，方向相反，所以比重计作简谐振动。其振动角频率和周期分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{\rho s}{m}}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho s}}$$

6.25　如图所示，一质量为m的匀质直杆放在两个迅速旋转的轮上，两轮旋转方向相反，轮间距$l=20\text{cm}$，杆与轮之间的摩

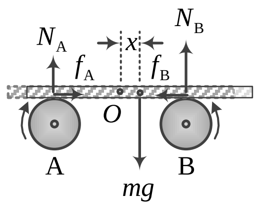


题6.25图

擦系数 $\mu = 0.18$，证明：在此情况下直杆作简谐振动，并求其振动周期。

6.25 证明：设两轮转轴之间的距离为 l，在某一时刻杆的中心相对两轮连线的中点向 B 轮方向的位移为 x，A、B 两轮对杆的支撑力分别为 N_A、N_B，杆的受力如图所示。以 A 轮为支点，对杆用杠杆的平衡条件有

$$N_B l = mg\left(\frac{l}{2} + x\right) \qquad ①$$



题6.25解图

由质心运动定理有

$$N_B + N_A - mg = 0 \qquad ②$$

$$f_A - f_B = \mu N_A - \mu N_B = ma_x \qquad ③$$

由①②得

$$N_A = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)mg \quad , \quad N_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right)mg$$

将 N_A、N_B 代入③式，并整理可得

$$a_x = -\frac{2\mu g}{l}x$$

这表明杆在水平方向（x 方向）获得的加速度的大小与杆离开平衡位置的位移的大小成正比，方向相反，所以此杆沿 x 方向作简谐振动。其振动的角圆频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{2\times 0.18\times 9.8}}(\mathrm{s}) = 1.5\mathrm{s}$$

6.26　有两个同方向、同频率的简谐振动，它们的振动表达式如下

$$x_1 = 0.12\cos\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{（SI）} \qquad , \qquad x_2 = 0.10\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) \text{（SI）}$$

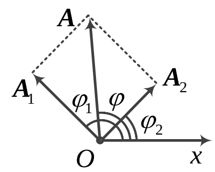
（1）求它们合成振动的表达式；

（2）若另有一振动：$x_3 = 0.14\cos(10\pi t + \varphi_3)$（SI），问 φ_3 为何值时，$x_1 + x_3$ 的合振幅为最大；φ_3 为何值时，$x_2 + x_3$ 的合振幅为最小。

6.26 解：（1）由 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$，得合振幅

$$A = \sqrt{0.10^2 + 0.12^2 + 2\times 0.10\times 0.12\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)}(\mathrm{m}) = 0.156(\mathrm{m})$$

由 $\tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$，得合振动初相为



习题6.26解图

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{0.12\sin\frac{3\pi}{4}+0.10\sin\frac{\pi}{4}}{0.12\cos\frac{3\pi}{4}+0.10\cos\frac{\pi}{4}}=\tan^{-1}(-11)=-84.8^\circ \text{ 或 } 95.2^\circ$$

再由振动合成的矢量图可知，合振动的初相在第 2 象限，故应取

$$\varphi=95.2^\circ=0.529\pi \text{ rad}$$

所以合振动的表达式为

$$x=x_1+x_2=0.156\cos(10\pi t+0.529\pi)(\text{m})$$

（2）要使 x_1+x_3 的合振幅最大，则

$$\varphi_3-\varphi_1=\varphi_3-\frac{3\pi}{4}=2k\pi \quad , \quad k=0，\ \pm1，\ \pm2，\ \dots$$

所以

$$\varphi_3=\frac{3\pi}{4}+2k\pi， \quad k=0，\ \pm1，\ \pm2，\ \dots$$

要使 x_2+x_3 的合振幅最小，则

$$\varphi_3-\varphi_2=\varphi_3-\frac{\pi}{4}=(2k+1)\pi \quad , \quad k=0，\ \pm1，\ \pm2，\ \dots$$

所以

$$\varphi_3=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \quad , \quad k=0，\ \pm1，\ \pm2，\ \dots$$

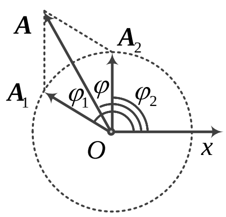
6.27　已知一质点同时参与两个同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1=0.20\cos(10\pi t+5\pi/6)(\text{SI})， \quad x_2=0.20\cos(10\pi t+\pi/2)(\text{SI})$$

试求：该质点合振动的表达式。

6.27 解： 由 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$，得合振幅

$$A=\sqrt{0.2^2+0.2^2+2\times0.2\times0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)}(\text{cm})=\frac{\sqrt{3}}{5}(\text{cm})$$



习题6.27解图

由 $\tan\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$，得初相为

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{0.2\sin\frac{\pi}{2}+0.2\sin\frac{5\pi}{6}}{0.2\cos\frac{\pi}{2}+0.2\cos\frac{5\pi}{6}}=\tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

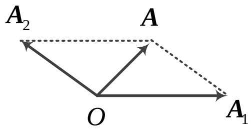
再由振动合成的旋转矢量图可知，合振动的初相在第 2 象限，应取 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$

所以合振动的表达式为

$$x=x_1+x_2=\frac{\sqrt{3}}{5}\cos\left(10\pi t+2\pi/3\right)(\mathrm{SI})$$

6.28　两个同方向、同频率的简谐振动，其合振动的振幅 $A=0.170\mathrm{m}$，合振动的位相与第一个振动的位相之差为 $45°$，若第一个振动的振幅 $A_1=0.240\mathrm{m}$，试求第二个振动的振幅及第一、第二两个振动的相位差。

6.28 解：由题意可画出旋转矢量的合成图如图所示。则由余弦定理可得



习题6.28解图

$$A_2=\sqrt{A_1^2+A^2-2A_1A\cos 45°}=0.170\mathrm{m}=A$$

所以由图中可以直观地看出，ΔA_2OA 是等腰直角三角形，所以第一、第二振动的夹角（即 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 的夹角）为

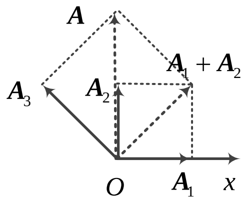
$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=45°+90°=135°$$

6.29　三个同方向、同频率的简谐振动分别为

$x_1=0.2\cos\left(10\pi t\right)(\mathrm{SI})$，　$x_2=0.2\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{SI})$，$x_3=0.2\sqrt{2}\cos\left(10\pi t+\frac{3\pi}{4}\right)(\mathrm{SI})$

试求出合振动的表达式。

6.29 解：由题意画出三个简谐振动在初始时刻对应的旋转矢量，如图所示。由图可以直观地看出



习题6.29解图

$$x_1+x_2=0.2\sqrt{2}\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{4}\right)(\mathrm{SI})$$

这表明，x_1+x_2 的合成振动对应的旋转矢量与 x_3 的旋转矢量互相垂直，且大小（振幅）相同，所以

$$x=\left(x_1+x_2\right)+x_3=0.2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{SI})$$
$$=0.4\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{SI})$$

6.30　一物体同时参与如下两个互相垂直的、同频率的简谐振动

$$x=0.05\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)(\mathrm{SI})\quad,\quad y=0.05\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{SI})$$

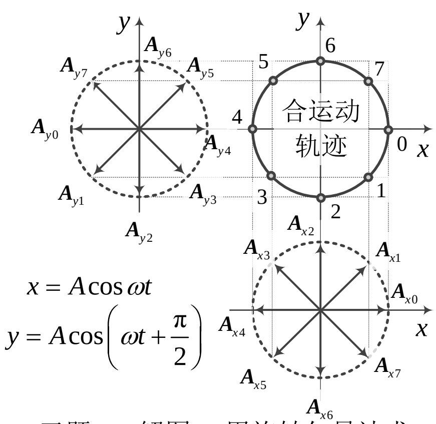
式中 T 为周期。求合成运动的轨迹方程，并用旋转矢量法画出合成运动轨迹图。

6.30 解：由 $x=0.05\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

$$y=0.05\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)=-0.05\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

消去参数 t，得合成运动的轨迹方程为

$$x^2+y^2=0.05^2$$



习题6.28解图　用旋转矢量法求互相垂直的两个同频谐振动的合成

这表明，合成运动的轨迹是一个圆。

作图法求合运动轨迹如图所示。

6.31 将频率为 358Hz 的标准音叉和一待测频率的音叉产生的振动合成，测得拍频为 4.0Hz。若在待测频率音叉上粘一小块橡皮泥，则拍频将减小，求待测音叉的固有频率。

6.31 解：设待测音叉的频率为ν_2，由$\nu_b = |\nu_2 - \nu_1|$

粘上橡皮泥，ν_2减小，ν_b减小，表示$\nu_2 > \nu_1$。所以

$$\nu_2 = \nu_b + \nu_1 = 358 + 4 = 362(\text{Hz})$$

6.32　一物体作阻尼振动，开始时其振幅为 0.16m。经 60 秒后振幅减为 0.08m，问

（1）阻尼系数β是多少？

（2）再经历多长时间振幅减至 0.04m？

6.32 解：（1）阻尼振动的振幅随时间减小的规律为：$A = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}$，式中$\beta$是阻尼系数。设经历$t_1 = 60\text{s}$后振幅减小为$A_1$，则

$$A_1 = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t_1}$$

$$\beta = \frac{1}{t_1}\ln\frac{A_0}{A_1} = \frac{1}{60}\ln\frac{0.16}{0.08} = 0.0116\ (\text{s}^{-1})$$

（2）设再经历Δt时间振幅减为：$A_2 = 0.04\ \text{m}$，则有

$$A_2 = A_0 \mathrm{e}^{-\beta(t_1 + \Delta t)} = A_1 \mathrm{e}^{-\beta \Delta t}$$

由此得

$$\Delta t = -\frac{1}{\beta}\ln\frac{A_2}{A_1} = t_1 \frac{\ln(A_1/A_2)}{\ln(A_0/A_1)} = 60 \times \frac{\ln(0.08/0.04)}{\ln(0.16/0.08)}\text{s} = 60\text{s}$$

6.33　质量为 3.0kg 的物体连接在一倔强系数为$1200\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$的弹簧上作阻尼振动，阻力系数$\gamma = 72.0\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$，求阻尼振动的角频率$\omega$。

6.33 解：由题意得，阻尼振动的阻尼系数和固有角频率分别为

$$\beta = \frac{\gamma}{2m} = \frac{72.0}{2 \times 3.0} = 12(\text{s}^{-1})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1200}{3}} = 20\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$$

所以，阻尼振动的角频率

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$$

6.34　质量为 2.0kg 的物体连接在一倔强系数为$1650\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$的弹簧上作受迫振动，周期性外力$F = 100\cos 30t\ (\text{N})$，阻力系数为$\gamma = 40.0\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$。试求：

（1）稳定振动时的角频率ω；

（2）外力的角频率为多少时系统出现位移共振现象？共振时振幅是多少？

6.34 解：（1）由受迫振动的特点可知，受迫振动稳定时其振动角频率就是周期性外力的频率，即 $\omega = 30\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

（2）由题意得，该振动系统的阻尼系数和固有角频率分别为

$$\beta = \frac{\gamma}{2m} = \frac{40.0}{2\times 2.0} = 10\ (\text{s}^{-1})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1650}{2}} = 28.7\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$$

当出现位移共振时，策动力的频率应为

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{28.7^2 - 2\times 10^2} = 25.0\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$$

此时的最大振幅为

$$A = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_m}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$= \frac{100}{2\times 10\times 2\times\sqrt{28.7^2 - 10^2}}\ (\text{m}) = 9.3\times 10^{-2}\ (\text{m})$$