高等数学 B2 期中考试试题

一、（5 分）设 均足够小，用全微分推出$\sqrt{(2+x)^2+(5-y)}$的近似公式。

解：记$f(x,y)=\sqrt{(2+x)^2+(5-y)}$。

$$f_x(x,y)=\frac{2+x}{\sqrt{(2+x)^2+(5-y)}},\ f_y(x,y)=\frac{-1}{2\sqrt{(2+x)^2+(5-y)}}$$

$$f_x(0,0)=\frac{2}{3},\ f_y(0,0)=-\frac{1}{6},\ df(0,0)=\frac{2}{3}\Delta x-\frac{1}{6}\Delta y,\ f(0,0)=3$$

$$f(x,y)-f(0,0)\approx df(0,0)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y(\Delta x=x,\Delta y=y)$$

当 均足够小时，$\sqrt{(2+x)^2+(5-y)}\approx 3+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y$。

二、计算 （13 小题，共 74 分）

1. 是直角三角形, ，点 在线段 上，使 ，试用 表示 。

解：$\vec{OA}=\vec{OB}+\vec{BA}$，$CA=BA\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}BA$，$\vec{BA}=\frac{4}{3}\vec{CA}$，$\vec{CA}=\vec{OA}-\vec{OC}$，所以

$$\vec{OA}=\vec{OB}+\frac{4}{3}\vec{OA}-\frac{4}{3}\vec{OC}\text{。}$$

$$\vec{OA}=-3\vec{OB}+4\vec{OC}$$

2. 设函数 由 所确定，试求 。

解：把z看作(x,y)的隐函数。恒等式 两边微分得

$$dz+dx=e^{-(xy)^2}(xdy+ydx)$$
$$dz=(ye^{-(xy)^2}-1)dx+xe^{-(xy)^2}dy$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{-(xy)^2}-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{-(xy)^2}$$

3. 设 与 互相垂直， ，试求 。

解：$|\bar{a}+\bar{b}|+|\bar{a}-\bar{b}|=2|\bar{a}+\bar{b}|=2\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}=26$。

4. 函数 由方程 所确定，其中 有二阶连续偏导数，且 ，求 。

解：把z看作(x,y)的隐函数。恒等式 两边分别对y求导得

$$F_1(x+y,x+z)+F_2(x+y,x+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1(x+y,x+z)}{F_2(x+y,x+z)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(F_{21}+F_{22}\frac{\partial z}{\partial y})F_1-(F_{11}+F_{12}\frac{\partial z}{\partial y})F_2}{F_2^{\ 2}}$$

$$=\frac{(F_{21}-F_{22}\frac{F_1}{F_2})F_1-(F_{11}-F_{12}\frac{F_1}{F_2})F_2}{F_2^{\ 2}}$$

$$=\frac{(F_{21}F_2-F_{22}F_1)F_1-(F_{11}F_2-F_{12}F_1)F_2}{F_2^{\ 3}}$$

$$=\frac{2F_{12}F_1F_2-F_{22}F_1^{\ 2}-F_{11}F_2^{\ 2}}{F_2^{\ 3}}$$

5．设　　　　　　，其中　　　　　　　　　，求　　。

解：$du=\dfrac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}d\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)==\dfrac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x}{\sqrt{y}}\,d\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x}{\sqrt{y}}\,\frac{\sqrt{y}dx-x\frac{1}{2\sqrt{y}}dy}{y}$$

$$=\frac{ydx-\frac{1}{2}xdy}{y^{\frac{3}{2}}}\cot\frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+t^2}\,6tdt-\frac{3}{2}t^2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{4}}}\cot\frac{3t^2}{\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{6t\sqrt{1+t^2}-\frac{3t^3}{2\sqrt{1+t^2}}}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{4}}}\cot\frac{3t^2}{\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{4}}}$$

6．设向量 的三个方向角满足 ，且 ，求 。

解：由 $\alpha+\beta=\pi$ 有 $\cos\beta=-\cos\alpha$；由 $\cos\alpha+\cos\gamma=1$ 有 $\cos\gamma=1-\cos\alpha$；又由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 有 $3\cos^2\alpha-2\cos\alpha=0$。解得

如果 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，则 $\cos\beta=-\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{1}{3}$。从而 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ 或0。

$\bar{a}=6\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}=\{4,-4,2\}$。

如果 $\cos\alpha=0$，则 $\cos\beta=0,\cos\gamma=1$。从而

$\bar{a}=6\{0,0,1\}=\{0,0,6\}$。

7．求直线 与平面 的交点和夹角。

解：$l:\begin{cases}x=-2+3t\\ y=2-t\\ z=-1+2t\end{cases}$。代入 $2x+3y+3z-8=0$ 得

$$-4+6t+6-3t-3+6t-8=0$$

解得 $t=1$，交点是$(1,1,1)$。

平面 的法向量 $\vec{n}=\{2,3,3\}$， 的方向向量 $\vec{s}=\{3,-1,2\}$。设所求夹角为 φ。则

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{s}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{s}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{s}\right|}=\frac{6-3+6}{\sqrt{22\times 14}}=\frac{9}{\sqrt{308}}$$

$$\varphi=\arcsin\frac{9}{\sqrt{308}}$$

8．求函数 的极值。

解： 到处有连续的偏导数。令

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=4x-3y-4=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=6y-3x+6=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\ y=-\frac{4}{5}\end{cases}$。

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4>0,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6,AC-B^2=15>0$$

极小值 $z\left(\frac{2}{5},-\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{25}+\frac{48}{25}+\frac{24}{25}-\frac{8}{5}-\frac{24}{5}+2=-\frac{6}{5}$。无极大值。

9. 求函数 在闭域 上的最小值和最大值。

解：（1）在边界上

$z=-4x(-4\le x\le 0)$ 的最大值 $z=16$ 最小值 $z=0$；

$z=4x+8(-4\le x\le 0)$ 的最大值 $z=8$ 最小值 $z=-8$；

$z=y^2-2y(0\le y\le 4)$ 的最大值 $z=8$ 最小值 $z=-1$；

$z=y^2-10y+16(0\le y\le 4)$ 的最大值 $z=16$ 最小值 $z=-8$；

。

(2)在 $D:-4<x<0,0<y<4$ 内 到处有连续偏导数。令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2y-4=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+2x-2=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$。$z(-1,2)=4-4+4-4=0$。所求最大值是 $z=16$；最小值 $z=-8$。

10. 设 ，求 及 在 点沿 方向的方向导数。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2x\big|_{(1,1)}=2,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=2y\big|_{(1,1)}=2,\ \cos\alpha=-1,\cos\beta=0.$

$$\frac{\partial u}{\partial\{-1,0\}}\Big|_{(1,1)}=2(-1)+2\cdot 0=-2$$

11.设 ， 为曲线 在 处的切向量(指向 增大方向)，求 。

解：$\begin{cases}x=x\\ y=1+\sin 2x\end{cases}$。$\vec{l}=\{1,2\cos 2x\}\big|_{x=0}=\{1,2\}$。

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y(\cos x)^{y-1}\sin x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=(\cos x)^y\ln\cos x$ 在 $(0,1)$ 点连续。

$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-y(\cos x)^{y-1}\sin x\Big|_{(0,1)}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=(\cos x)^y\ln\cos x\Big|_{(0,1)}=0$。所以 $\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(0,1)}=0$。

12.设 由方程 所确定，其中 有二阶连续偏导数，求 。

解：把 z 看作 (x,y) 的隐函数。恒等式 两边分别对 y 求导得

$$\frac{1}{x}\left(F_1+F_2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)}{F_2\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\frac{1}{x}(F_{21}+F_{22}\frac{\partial z}{\partial y})F_1-\frac{1}{x}(F_{11}+F_{12}\frac{\partial z}{\partial y})F_2}{F_2^{\ 2}}$$

$$=\frac{(F_{21}-F_{22}\frac{F_1}{F_2})F_1-(F_{11}-F_{12}\frac{F_1}{F_2})F_2}{xF_2^{\ 2}}$$

$$=\frac{(F_{21}F_2-F_{22}F_1)F_1-(F_{11}F_2-F_{12}F_1)F_2}{xF_2^{\ 3}}$$

$$=\frac{2F_{12}F_1F_2-F_{22}F_1^{\ 2}-F_{11}F_2^{\ 2}}{xF_2^{\ 3}}$$

13．利用拉格朗日乘数法，求函数　　　　　　　在条件　　　　　　　　　　　　　　　下的极大值或极小值。

解：令 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y+2z-18)$

$$\begin{cases} L_x=2x+\lambda=0 \\ L_y=2y+2\lambda=0 \\ L_z=2z+2\lambda=0 \\ L_\lambda=x+2y+2z-18=0 \end{cases}$$

由前三方程得 $z=y=2x$，代入最后方程得 $9x-18=0$，解得唯一驻点　　　　　且

由于本问题实际上是考虑平面　　　　　　　在第一卦限部分内的点到原点的距离平方，故应有最小值，从而有极小值，因此函数　在点　　取极小值　　　　　　　。无极大值。

三、（7 分）证明：试证曲面　　　　　的切平面与三个坐标面所围四面体的体积为常数。

证：曲面 $F=xyz-a^3=0$ 上点 (x,y,z) 处的切平面法向量 $\vec{n}=\{yz,zx,xy\}$，

切平面方程为 $yz(X-x)+zx(Y-y)+xy(Z-z)=0$ 即 $\frac{X}{3x}+\frac{Y}{3y}+\frac{Z}{3z}=1$

切平面与三个坐标轴的截距分别是 $3x,3y,3z$，切平面与三个坐标平面所围四面体的体积 $V=\frac{1}{6}|3x\cdot 3y\cdot 3z|=\frac{9}{2}a^3$（注意到　　　　　）为常数

四、应用 （3 小题，共 14 分）

1．求曲线　　　　　　　　　　在点　　　　　处的切线及法平面方程。

解：$\begin{cases} F=xy+yz+zx+1=0 \\ G=xy^2+zx^2+1=0 \end{cases}$。

$$\vec{n}_1=\{F_x,F_y,F_z\}\big|_{(1,-1,-2)}=\{-3,-1,0\},\ \vec{n}_2=\{G_x,G_y,G_z\}\big|_{(1,-1,-2)}=\{-3,-2,1\}$$

切线方程：$\begin{cases} 3(x-1)+y+1=0 \\ 3(x-1)+2(y+1)-(z+2)=0 \end{cases}$。

$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-1,3,3\}$。

法平面方程：　　　　　　　　　　或

2．求曲线　　　　　　上的点，使曲线在该点处的切线平行于平面　　　　。

解：对应于t对应的切线方向向量 $\vec{T} = \{3t^2, 4t, 3\}$

平面　　　　　法向量$\vec{n} = \{1,2,-1\}$。$\vec{T} \perp \vec{n}$有$\vec{T} \cdot \vec{n} = 3t^2 + 8t - 3 = 0$。解得：$t = \frac{1}{3}$和

$t = -3$。所求点为：　　　　和　　　　。

3．求曲线　　　　　　　　　　在对应于　　点处的切线及法平面方程。(

是正的常数)

解：　　对应点　　　　　　　。

对应的切向量 $\vec{T} = \left\{-\frac{3a}{2\sqrt{2}}, \frac{3b}{2\sqrt{2}}, \frac{c}{2\sqrt{2}}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{-3a, 3b, c\}$

切线方程：

法平面方程：

或