武汉大学2013-2014学年第二学期期末考试
高等数学（微积分）A2

一、（5分）利用二重积分的性质，比较积分 $I_1=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \left[\ln(x^2+y^2)\right]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 D：$e\le x^2+y^2\le 2e$.

二、（8分）设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三、（8分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z\sin(x+y)=y+z$ 所确定，求全微分 $\mathrm{d}z$.

四、（8分）计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(y+z-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x+y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是由 $|x|\le 1,|y|\le 1,|z|\le 1$ 所确定的立体的表面外侧.

五、（8分）求过点 $M(1,-2,3)$ 的平面，使它与平面 $\pi: x+y-z-3=0$ 垂直，且与直线 $L: x=y=z$ 平行.

六、（7分）计算曲线积分 $\int_L (2a-y)dx+xdy$ ，式中 L 是从 $O(0,0)$ 沿 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ （$a>0$）到 $A(2\pi a,0)$，的弧段.

七、（7分）试求锥面 $x^2+y^2=\dfrac{16}{9}z^2$ 被柱面 $(x-2)^2+y^2=4$ 截下部分的面积.

八、（7分）设 $f(x)=\begin{cases}x+2\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi, & x=0,\\ x, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ ，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$， $n=0,1,2,\cdots$，利用函数的Fourier级数展开式，求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 的和。

九、（8分）求曲线 $x=\sin^2 t$， $y=\sin t\cos t$， $z=\cos^2 t$ 在对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线和法平面方程.

十、（8分）设 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2, z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的有界闭区域。试计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)(\sin x+1)\mathrm{d}v.$$

十一、（8分）设 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>-1,x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ ，试将 $f(x)=\int_0^x h(x)\mathrm{d}x$ 展开成 x 的幂级数.

十二、（8分）求 $f(x,y)=ex-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的极值.

十三、（5分）试求当 $\iint\limits_{\Sigma}(x+kz)\mathrm{d}S=\dfrac{\sqrt{6}}{6}k^2$ 时数量 k 的值，其中 Σ 为平面 $x+2y+z=1$ 在第一卦限中的部分平面块.

十四、（5分）设 Ω 为区域 $x^2+y^2+z^2\le 1$，$P(x_0,y_0,z_0)$ 为 Ω 外的一点，试证：

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\mathrm{d}v\ge\frac{4\pi}{3}e^{-(1+x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$$