# 武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试

## 线性代数 B（A 卷）

一、（10 分）已知 $|A|=\begin{vmatrix} k_1 & 2 & 1 & 2 \\ k_2 & 2 & 2 & 2 \\ k_3 & 1 & 3 & 4 \\ k_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=18$，试计算 $A_{12}+A_{22}$，$A_{32}+A_{42}$ 的值。

二、（12 分）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)^T$ $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)^T$

，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

三、（14 分）设矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)$；　　（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

四、（15 分）设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1 \end{cases}$.

讨论 $\lambda$ 为何值时,方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出其通解.

五、（16 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$，其中二次型的矩阵 $A$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 $-12$.

1、试确定 $a,b$ 的值；2、用正交变换将二次型 $f$ 化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

六、（15 分）设 $n$ 阶矩阵 $A,B$ 满足条件 $A+B=AB$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $a_1=(1,0,1)$

$a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$，

1、求矩阵 $A$；

2、求秩 $r(A^*B^*)$，其中 $A^*,B^*$ 分别为 $A,B$ 的伴随矩阵；

3、设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$；

七、（10 分）设 $A$、$B$ 均是同阶方阵，$B$ 是可逆矩阵，且满足 $A^2+AB+B^2=0$，证明 $A$、$A^2+B^2$ 以及 $A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

八、（8 分）设 $B$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，其 $m$ 个行向量是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

证明：对任一$m$阶可逆矩阵$C$，$CB$的行向量组也是$Ax=0$的基础解系。

# 武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试

# 线性代数 B（A 卷）解答

一、（10 分）已知$|A|=\begin{vmatrix} k_1 & 2 & 1 & 2 \\ k_2 & 2 & 2 & 2 \\ k_3 & 1 & 3 & 4 \\ k_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=18$，试计算$A_{12}+A_{22}$，$A_{32}+A_{42}$的值。

解：由代数余子式的性质有 $\begin{cases} 2(A_{12}+A_{22})+(A_{32}+A_{42})=18 \\ 2(A_{12}+A_{22})+4(A_{32}+A_{42})=0 \end{cases}$　　6 分

由克莱姆法则知

$$A_{12}+A_{22}=\frac{\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=12 \qquad A_{32}+A_{42}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=-6$$　　10 分

二、(12 分)求向量组 $\alpha_1=(1,-2,3,-1,2)^T$，$\alpha_2=(2,1,2,-2,-3)^T$ $\alpha_3=(5,0,7,-5,-4)^T$，$\alpha_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

解：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$　　4 分

先对$A$施行行初等变换化为行最简形矩阵 $A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　8 分

知向量组的秩 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(A)=2$，易知 1、2 两列即$\alpha_1,\alpha_2$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组，且有 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$.　　10 分

三、（14 分）设矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求$(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)$；　　（2）求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

解（1） 因为

$$(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=(A+B)(A+B)-A^2-2AB-B^2=BA-AB \quad 4\text{分}$$

而，$BA=\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&6&6\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}0&7&3\\-2&5&2\\-2&4&3\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB=}\begin{pmatrix}1&-8&-3\\10&1&4\\2&-5&-2\end{pmatrix}$ 9 分

（2）$\boldsymbol{A^{-1}=}\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\3&-1&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ 14 分

四、（15 分）设有线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=3\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1\end{cases}$.

讨论 $\lambda$ 为何值时,方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出其通解.

解：经计算系数行列式得 $|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$, 4分

**于是由克莱姆法则有如下结论：**

(1)当 $\boldsymbol{\lambda\neq1}$ 且 $\boldsymbol{\lambda\neq-2}$ 时，$\boldsymbol{r(A)=r(B)=3,}$ 方程组有唯一解；

(2)当 $\boldsymbol{\lambda=1}$ 时，$\boldsymbol{r(A)=1}$，$\boldsymbol{r(B)=2}$，该情形方程组无解；

(3)当 $\boldsymbol{\lambda=-2}$ 时，$\boldsymbol{r(A)=r(B)=2,}$ 此时方程组有无限多个解。 10 分

而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

**由此得** $\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\\x_3=x_3\end{cases}$，**即** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$(c\in R)$. 15 分

五、（16 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$, 其中二次型的矩阵 $A$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 $-12$.

1、$a,b$ 的值； 2、用正交变换将二次型 $f$ 化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

解 1、次型 $f$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$. 设 $A$ 的特征值为 $\lambda_i\,(i=1,2,3)$. 由题设，有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,\qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12.$$

解得 $a=1,b=2.$ 8 分

2、矩阵 $A$ 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ - & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$, 得 $A$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3.$　　11 分

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2,$ 解方程组 $(2E-A)X=0,$ 得其基础解系 $\xi_1=(2,0,1)^T,\xi_2=(0,1,0)^T$.

对于 $\lambda_3=-3,$ 解齐次线性方程组 $(-3E-A)X=0,$ 得基础解系 $\xi_3=(1,0,-2)^T$.

由于 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 已是正交向量组，为得到规范正交向量组，只需将 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 单位化，由此得

$$\eta_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^T,\eta_2=(0,1,0)^T,\eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)^T.$$

令矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$. 则 $Q$ 为正交矩阵. 在正交变换 $X=QY$ 下，有

$Q^TAQ=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$, 且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$　　16 分

六、（15 分）设 $n$ 阶矩阵 $A,B$ 满足条件 $A+B=AB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且 $a_1=(1,0,1)$

$a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$，1、求矩阵 $A$；2、求秩 $r(A^*B^*)$，其中 $A^*,B^*$ 分别为 $A,B$ 的伴随矩阵；3、设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$；

1） 由题设有 $A(B-I)=B$，而 $|B-I|=\begin{vmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=6\neq 0$ 可逆，

易算得：$(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac12 & 0\\ -\frac13 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　5 分

因而有 $A=B(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac12 & 0\\ -\frac13 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac12 & 0\\ -\frac13 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　　7 分

2）由 $A,B$ 均可逆，故 $A^*,B^*$ 也均可逆，所以 $r(A^*B^*)=3$；　　11 分

3）$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=(5,2,1),\boldsymbol{\beta}_2=-3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-3),\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3=(2,2,2)$

15 分

七、（10 分）设 $A$、$B$ 均是同阶方阵，$B$ 是可逆矩阵，且满足 $A^2+AB+B^2=0$，证明 $A$、$A^2+B^2$ 以及 $A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

证　因为 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$，则 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|^2\neq 0$

所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因而 $A$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆。　5 分

注意 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{AB}$，$\left|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2\right|=|-\boldsymbol{AB}|=|-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0$，因而 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 可逆。

注意 $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}A(A^{-1}+B^{-1})BB^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，

$$\left|A^{-1}+B^{-1}\right|=\left|A^{-1}\right|\left|(A+B)\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 $A$、$B$、$A+B$ 均可逆，故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq 0, |\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0$

所以有 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0$，即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆。　10 分

八、（8 分）设 $B$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，其 $m$ 个行向量是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，证明：对任一 $m$ 阶可逆矩阵 $C$，$CB$ 的行向量组也是 $Ax=0$ 的基础解系。

解　有题意，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{T}{}_{i}=0$

设 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{CB}=\mathrm{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}$　6 分

由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆，$\boldsymbol{CB}$ 的行向量组线性无关。而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CB})^{T}=\boldsymbol{AP}^{T}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1^{T},\boldsymbol{\alpha}_2^{T},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{T})\boldsymbol{C}^{T}=0$

故 $\boldsymbol{CB}$ 的行向量组也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解向量，从而也是基础解系。　8 分