武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试线性代数 B

一、（10 分）已知$|A| = \begin{vmatrix} k_1 & 2 & 1 & 2 \\ k_2 & 2 & 2 & 2 \\ k_3 & 1 & 3 & 4 \\ k_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 18$，试计算$A_{12} + A_{22}$，$A_{32} + A_{42}$的值。

二、（12 分）求向量组 $\alpha_1 = (1,-2,3,-1,2)^T, \alpha_2 = (2,1,2,-2,-3)^T, \alpha_3 = (5,0,7,-5,-4)^T$, $\alpha_4 = (3,-1,5,-3,-1)^T$的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

三、（14 分）设矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求$(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$；

（2）求A的逆矩阵.

四、（15 分）设有线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \end{cases}$.

五、（16 分）设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\left(b>0\right)$,其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为 1，特征值之积为$-12$.

1、a,b的值；

2、用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

六、（15 分）设n阶矩阵A,B满足条件$A+B=AB$，其中$B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且

$a_1=(1,0,1)$，$a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$，

1、求矩阵A；

2、求秩$r(A^*B^*)$，其中A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵；

3、设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求$\beta_1,\beta_2,\beta_3$；

七、（10 分）设A、B均是同阶方阵，B是可逆矩阵，且满足$A^2+AB+B^2=0$，证明A、A^2+B^2以及$A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

八、（8 分）设B是$m\times n$阶矩阵，其m个行向量是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明：对任一m阶可逆矩阵C, CB的行向量组也是$Ax=0$的基础

武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

1、（10 分）若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $\left|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\right| = m$, $\left|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\right| = n$, 计算四阶行列式 $\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\left(\beta_1+\beta_2\right)\right|$.

2、(10 分)已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 试求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

3、（10 分）已知向量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 不共面，试判断向量 $\alpha = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \beta = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \gamma = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ 是否共面。

4、（10 分）设 $\boldsymbol{A} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶方阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维列向量，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. 已知向量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$，试求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \beta$ 的通解.

5、(12 分)设有向量组 $\alpha_1 = (1,3,3,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (1,4,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4 = (1,7,2,\boldsymbol{k})^{\mathrm{T}}$

（1）问 k 为何值时，该向量组线性相关？（2）在线性相关时求出该向量组的

6、（10 分）设A是 3 阶方阵，互换 A 的第一、第二列，得 B；再将 B 的第二列
列上得矩阵 C;然后再将矩阵 C的第一列乘以 2 得到矩阵 D; 求满足$AX=D$的可

7、（10 分）若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$可以对角化，设与$A$相似的对角矩阵为$\Lambda$；（1）

a的值及对角矩阵Λ，可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

8、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为所有 3 维实向量构成的线性空间$R^3$的

基, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$且$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=($

试求：（1） 基β_1,β_2,β_3；（2） 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下有相同坐标的全体向量

9、（8 分）设n阶方阵A的伴随矩阵为A^*,证明：若$|A|=O$,则$|A^*|=O$；

10、（10 分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$其中

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的标准形。

武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

一、（8 分）不求出行列式的值，判断行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$能被17整除.

二、（10 分）什么样的矩阵$\boldsymbol{X}$满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三、（10 分）设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{E})^{T}$.

四、（10 分）计算 n 阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$的值.

五、（12 分）求向量组$\alpha_1 = (1,3,3,1)$, $\alpha_2 = (1,4,1,2)$, $\alpha_3 = (1,0,2,1)$, $\alpha_4 = (1,7,2,2)$的秩无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

六、（6 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是齐次方程组$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系，向量$\beta$不是方程组$\boldsymbol{AX}=0$的解，求证：$\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$线性无关。

七、（10 分）已知三阶方阵$\boldsymbol{A}$ 满足$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$，

（1）求$\boldsymbol{A}$.（2）计算行列式$|\boldsymbol{A}|$和$|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}|$的值；

（3）判断$\boldsymbol{A}$是否为正定矩阵。

八、（10 分）已知向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是$\boldsymbol{R}^3$的基，说明$\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$也是$\boldsymbol{R}^3$的基。若向量$\alpha$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下坐标为$(1,1,1)^T$，求向量$\alpha$在基$\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$的坐标。

九、（10 分）设二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$通过正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$化成标准型$f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$，求出$a,b$的值及所用的正交变换。

十、（14 分）讨论a,b为何值时，方程$ax_1+x_2+x_3=4$与方程组$\begin{cases}x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

武汉大学 2015-2016 学年第二学期期末考试

1、（10 分）设$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&3&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}$，问$A$是否可逆？如可逆求$A^{-1}$，如不可逆，求$A$的伴随矩阵$A^*$.

2、（10 分）已知矩阵$\begin{pmatrix}1&2&3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$可交换. 试求$\begin{vmatrix}1&2&3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$的值.

3、（10 分）向量α在基$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(0,1,1)$，$\alpha_3=(1,-1,1)$下的坐标$\alpha=(4,5,4,3)$，求α在基$\beta_1=(1,2,2)$，$\beta_2=(1,0,2)$，$\beta_3=(2,0,2)$下的坐标。

4、（12 分）设 3 阶方阵A的特征值分别为$1,-1,0$，方阵$B=2A^2-3A-4E$,

1）试求矩阵B的特征值及与B相似的对角矩阵；

2）验证B可逆，并求B^{-1}的特征值及行列式$\left|B^{-1}\right|$之值。

5、（10 分）设$\alpha_1=(2,1,3,1)$，$\alpha_2=(1,2,0,1)$，$\alpha_3=(-1,1-3,0)$，$\alpha_4=(1,1,1,1)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示该组中其它向量。

6、（10 分）设二次型$f=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$其中$k$为参数，确定$k$的取值范围使$f$为正定的。

7、（10 分）设A是$m\times 4$矩阵且A的秩为2，B是$m\times 1$的非零矩阵，若a_1,a_2,a_3是方程组$AX=B$的解向量，且设$a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},a_1+a_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},a_2+a_3=\begin{bmatrix}1\\0\\4\\3\end{bmatrix}a_2+a_3=(1,0,4,3)^{\mathrm{T}}$，求方程组$AX=B$的通解.

8、（12 分）已知（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3+x_4=1\\2x_1+x_2+bx_3+x_4=4\\2x_1+2x_2+3x_3+cx_4=1\end{cases}$与（Ⅱ）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\-x_2+2x_3-x_4=2\\x_3+2x_4=-1\end{cases}$同解，试确定$a,b,c$之值.

9、（10 分）用正交变换化二次型$f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_1x_2$为标准形，并写出所用正交变换及$f$的标准形。

10、（6 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$是$R^n$中$n-1$线性无关的向量，$\beta_i$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$均正交$(i=1,2)$，证明：$\beta_1,\beta_2$线性相关。

武汉大学 2015-2016 学年第二学期期末考试

1、（10 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 问$\boldsymbol{A}$是否可逆？如可逆求$\boldsymbol{A}^{-1}$，如不可逆，求$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$.

2、（10 分）已知矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可交换. 试求$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{vmatrix}$的值.

3、（10 分）向量α在基$\alpha_1=(1,1,1)$， $\alpha_2=(0,1,1)$， $\alpha_3=(1,-1,1)$下的坐标$\alpha=(4,5,4,3)$，求α在基$\beta_1=(1,2,2)$， $\beta_2=(1,0,2)$， $\beta_3=(2,0,2)$下的坐标。

4、（12 分）设 3 阶方阵A的特征值分别为$1,-1,0$,方阵$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$,

1）试求矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值及与$\boldsymbol{B}$相似的对角矩阵；

2）验证$\boldsymbol{B}$可逆, 并求$\boldsymbol{B}^{-1}$的特征值及行列式$\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|$之值。

5、（10 分）设$\alpha_1=(2,1,3,1)$, $\alpha_2=(1,2,0,1)$, $\alpha_3=(-1,1-3,0)$, $\alpha_4=(1,1,1,1)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示该组中其它向量。

6、（10 分）设二次型$f=x_1^2+2x_2^2+\left(1-k\right)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$其中$k$为参数，确定$k$的取值范围使$f$为正定的。

7、（10 分）设A是$m\times 4$矩阵且A的秩为2，B是$m\times 1$的非零矩阵，若$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解向量，且设

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\4\\3\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=(1,0,4,3)^{\mathrm{T}}$$

，求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的通解.

8、（12 分）已知方程组（Ⅰ）$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1 \end{cases}$ 与方程组

（Ⅱ）$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ 同解, 试确定a,b,c之值.

9、（10 分）用正交变换化二次型$f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2$为标准形，并写出所用正交变换及$f$的标准形。

10、（6 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$是$\boldsymbol{R}^n$中$\boldsymbol{n}-1$线性无关的向量，$\beta_i$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$均正交$\left(\boldsymbol{i}=1,2\right)$，证明：$\beta_1,\beta_2$线性相关。

武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

一、（8 分）不求出行列式的值,用行列式的性质,判断行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$能被$17$整除.

二、（10 分）什么样的矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三、（10分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$，求

$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})^{T}-[(\boldsymbol{C}^{-1})^{T}\boldsymbol{A}]^{-1}$.

四、（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$ 的值.

五、（12 分）求向量组$\alpha_1=(1,3,3,1)$，$\alpha_2=(1,4,1,2)$，$\alpha_3=(1,0,2,1)$，$\alpha_4=(1,7,2,2)$的秩及一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

六、（6 分）设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是齐次方程组$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系，向量$\beta$不是方程组$\boldsymbol{AX}=0$的解，求证：$\beta, \beta+\alpha_1, \cdots, \beta+\alpha_r$线性无关。

七、（10 分）已知三阶方阵A 满足$A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$，

(1) 求A.

（2）计算行列式$|A|$和$|A^2-2A+3I|$的值；

（3）判断A是否为正定矩阵。

八、（10 分）已知向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是$\boldsymbol{R}^3$的基，说明$\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$也是$\boldsymbol{R}^3$的基。若向量$\alpha$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下坐标为$(1,1,1)^T$，求向量$\alpha$在基$\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$的坐标。

九、（10 分）设二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$通过正交变换$x=Py$化成标准型$f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$，求出$a,b$的值及所用的正交变换。

十、(14 分)讨论a,b为何值时，方程$ax_1+x_2+x_3=4$与方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+3bx_2+x_3=9 \end{cases}$无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

武汉大学2017-2018学年第二学期期末考试线性代数B试题（A）

1、（10 分）若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $\left|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\right| = m, \left|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\right| = n$，计算四阶行列式$\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\left(\beta_1+\beta_2\right)\right|$.

2、(10 分)已知 3 阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，3 阶矩阵$\boldsymbol{B}$满足方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，

试求矩阵$\boldsymbol{B}$.

3、（10 分）已知向量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 不共面，试判断向量 $\alpha=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3,\beta=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,\gamma=-\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3$是否共面。

4、（10 分）设$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为 4 阶方阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 4 维列向量，且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 已知向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，试求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\beta$的通解.

5、(12 分)设有向量组$\alpha_1=\left(1,3,3,1\right)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=\left(1,4,1,2\right)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=\left(1,0,2,1\right)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=\left(1,7,2,\boldsymbol{k}\right)^{\mathrm{T}}$

（1）问$\boldsymbol{k}$为何值时，该向量组线性相关？（2）在线性相关时求出该向量组的一个极大线性无关组并将其余向量用该极大线性无关组线性表示。

6、（10 分）设A是 3 阶方阵，互换 A 的第一、第二列，得矩阵 B；再将 B 的第二列加到第三列上得矩阵 C；然后再将矩阵 C 的第一列乘以 2 得到矩阵 D；求满足$AX = D$ 的可逆矩阵X.

7、（10 分）若矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & \boldsymbol{a}\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$可以对角化，设与$\boldsymbol{A}$相似的对角矩阵为$\Lambda$；（1）试求常数$\boldsymbol{a}$的值及对角矩阵$\Lambda$，可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$.

8、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为所有 3 维实向量构成的线性空间$\boldsymbol{R}^3$的两组基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$且

$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$,

试求：（1）基β_1,β_2,β_3；（2）在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下有相同坐标的全体向量.

9、（8 分）设$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵为$\boldsymbol{A}^*$,证明：若$\left|\boldsymbol{A}\right| = \boldsymbol{O}$,则$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = \boldsymbol{O}$；

10、（10 分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$其中

a为参数。

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的标准形。

武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试线性代数 B（A 卷）

一、（10 分）已知$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{k}_1 & 2 & 1 & 2 \\ \boldsymbol{k}_2 & 2 & 2 & 2 \\ \boldsymbol{k}_3 & 1 & 3 & 4 \\ \boldsymbol{k}_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 18$，试计算$\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}$，$\boldsymbol{A}_{32} + \boldsymbol{A}_{42}$的值。

二、（12 分）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

三、（14 分）设矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

（1）求$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2-(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2)$；

（2）求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

四、（15 分）设有线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1\end{cases}$.

讨论λ为何值时, 方程组有唯一解、无解、有无穷多解? 并在有无穷多解时, 求出其通解.

五、（16 分）设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\left(b>0\right)$,其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为 1，特征值之积为$-12$.

1、a,b的值；

2、用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

六、（15 分）设n阶矩阵A,B满足条件$A+B=AB$，其中$B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且

$a_1=(1,0,1)$， $a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$，

1、求矩阵A；

2、求秩$r(A^*B^*)$，其中A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵；

3、设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求$\beta_1,\beta_2,\beta_3$；

七、（10 分）设A、B均是同阶方阵，B是可逆矩阵，且满足$A^2+AB+B^2=0$，证明A、A^2+B^2以及$A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

八、（8 分）设B是$m\times n$阶矩阵，其m个行向量是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明：对任一m阶可逆矩阵C，CB的行向量组也是$Ax=0$的基础解系。