武汉大学 2023-2024 第一学期高等数学 B1 期末试卷 A 卷　参考解答

1、（9 分）　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n(\sqrt{n^2+1}-n)+\dfrac{1}{n}\sin n\right)$.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(n(\sqrt{n^2+1}-n)+\frac{1}{n}\sin n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n(\sqrt{n^2+1}-n)\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n(\sqrt{n^2+1}-n)\right)+0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=\frac{1}{2}$$

2、（9 分）已知 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2xy}+x\sin y=2x+y$ 确定，求 $y'(0),\ y''(0)$.

解：由方程 $\mathrm{e}^{2xy}+x\sin y=2x+y$ 可知，$y(0)=1$．对方程 $\mathrm{e}^{2xy}+x\sin y=2x+y$ 两边关于 x 求导得：

$$\mathrm{e}^{2xy}(2y+2xy')+\sin y+xy'\cos y=2+y',$$

代入 $x=0, y=1$ 解得 $y'(0)=\sin 1$.

再次对等式两边求导得：

$$\mathrm{e}^{2xy}(2y+2xy')^2+\mathrm{e}^{2xy}(4y'+2xy'')+2y'\cos y+x\left(y'\cos y\right)'=y''.$$

代入 $x=0, y=1$ 及 $y'(0)=\sin 1$ 解得：

$$y''(0)=4+4\sin 1+2\sin 1\cos 1=4+4\sin 1+\sin 2.$$

3、（8 分）计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}\,x$.

解：

$$\int\frac{x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{(x-2)+2}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}(x-2)$$

$$=\int\frac{(x-2)}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}(x-2)+2\int\frac{1}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}(x-2)$$

$$=\frac{1}{2}\ln((x-2)^2+1)+2\arctan(x-2)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+2\arctan(x-2)+C$$

4、（10 分）1）求齐次线性微分方程 $y'''-2y''+2y'=0$ 的通解；

2）对于非齐次线性微分方程 $y'''-y''-2y'=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}\sin x$，用待定系数法给出特解的形式（无需求出其中的待定系数的数值）.

解：1）该微分方程的特征方程为：$\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda=0$，

它有特征根：$\lambda_0=0, \lambda_2=1+i, \lambda_3=1-i,$ 故而该齐次线性微分线性微分方程的通解为：

$y=C_1+\mathrm{e}^{x}(C_2\sin x+C_3\cos x)$

2）特征方程 $\lambda^3-\lambda^2-2\lambda=0$，特征根 $\lambda_0=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=2,$ 特解的形式为：

$y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}(B\sin x+C\cos x)$.

5、（9 分）已知函数 $f(x)=x^3-5x^2+3x+1$.

1) 求函数 $f(x)$ 的极值点与极值；

2) 求曲线 $y=f(x)$ 的上下凸区间及拐点.

解：1) 导函数 $f'(x)=3x^2-10x+3$，解 $f'(x)=3x^2-10x+3=0$ 得 $x_1=3, x_2=\dfrac{1}{3}$.

由 $f''(x)=6x-10$ 可得 $f''(3)=8$，$f''(\dfrac{1}{3})=-8$. 因此，$x_1=3$ 为极小值点，$x_2=\dfrac{1}{3}$ 为极大值点.

函数有极小值 $f(3)=-8$，极大值 $f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{40}{27}$.

2) 有 $f''(x)=6x-10=0$ 解得 $x_3=\dfrac{5}{3}$. 且 $x<x_3$ 时 $f''(x)<0$，$x>x_3$ 时 $f''(x)>0$. 因此，曲线的上凸区间为 $(-\infty,\dfrac{5}{3}]$，下凸区间为 $[\dfrac{5}{3},+\infty)$，且有拐点 $(\dfrac{5}{3},-\dfrac{88}{27})$.

6、（9 分）已知曲线 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t, \end{cases}$.

1）求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}, \left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$；

2）求曲线 Γ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的曲率.

解：1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$. 因此，

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{t\sin t}{t\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\tan t|_{t=\frac{\pi}{4}}=1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(\tan t)'}{t\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\sec^2 t}{t\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{1}{t\cos^3 t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

2）由曲率公式可得，曲率

$$k=\left.\frac{\left|\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left(1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\dfrac{8\sqrt{2}}{\pi}}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{\pi}$$

7、（7 分）计算反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：
$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,\mathrm{d}\frac{1}{x}$$
$$=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^{-2})\Big|_1^{+\infty}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

8、（7 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\tan x^2}$.

解： $$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\tan x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{\frac{x^2}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^4}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^4}{x^2}=0$$

9、（7 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x\le0,\\ (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\end{cases}$ 考虑如下问题：

1） a,b 为何值时函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

2) 求函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$.

解：1） 函数可导必定连续，因而 $f(0^-)=f(0)=f(0^+)$, 即

$$b=\lim_{x\to0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2$$

函数在 $x=0$ 处可导，必有 $f'_-(0)=f'_+(0)$，此外，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax+\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2}{x}=a$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^2}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}-\mathrm{e}^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)-2}-1\right)}{x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+2x)-2}{x}$$

$$=\mathrm{e}^2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}=-2\,\mathrm{e}^2$$

因此， $a=-2\,\mathrm{e}^2$.

2） $$f'(x)=\begin{cases}-2\,\mathrm{e}^2, & x\le0,\\ \left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{2}{x\left(1+2x\right)}-\dfrac{\ln\left(1+2x\right)}{x^2}\right), & x>0,\end{cases}$$

10、（6 分）求如下常微分方程初值问题的解：$(x+1)y''+y'=2x, y(0)=0, y'(0)=-1$.

解：令 $y'=p(x)$ 得一阶线性微分方程：$(x+1)p'+p=2x, p(0)=-1$，解得：

$$p(x)=\frac{1}{1+x}\left(\int 2x\,\mathrm{d}x+C_1\right)=\frac{x^2+C_1}{1+x},\text{ 由 } p(0)=-1 \text{ 得 } p(x)=x-1.$$

因此，$y=\int(x-1)\,\mathrm{d}x+C_2=\frac{x^2}{2}-x+C_2$，由 $y(0)=0$ 得 $y=\frac{x^2}{2}-x$.

11、（8 分）已知曲线 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases} t\in[0,2\pi]$.

1）求曲线 Γ 与 x 轴所围成的平面图形 D 的面积 S；

2）求曲线 Γ 的弧长 L.

解：1）面积 $S=\int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(1-\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^2\,\mathrm{d}t=8\int_0^{\pi}\sin^4 u\,\mathrm{d}u$$

$$=16\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi$$

2）由弧微分公式可得 $\mathrm{d}s=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$. 因此，曲线弧长

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=8.$$

12、（6 分）利用定积分求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

13、（5 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2024$．证明:

1）存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = 2024$；

2）存在 $\eta \in (0,\xi)$，使得 $\eta f'(\eta) + f(\eta) = 2024$．

证明： 1）由于 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2024$，由积分中值定理可知，存在 $\xi \in (0,1)$ [教材定理是闭区间，开区间结论也成立，不扣分]，使得 $f(\xi) = f(\xi)(1-0) = 2024$；

（方法二：令 $F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，用拉格朗日中值定理证明）

2）令 $\varphi(x) = xf(x)$，由 1）可知，$\varphi(\xi) = \xi f(\xi) = 2024\xi$．此外，显然有 $\varphi(0) = 0$．由于 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,\xi)$ 内可导，在闭区间 $[0,\xi]$ 上连续，由拉格朗日中值定理可知，存在 $\eta \in (0,\xi)$ 使得 $\varphi'(\eta) = \dfrac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{\xi - 0} = \dfrac{2024\xi - 0}{\xi} = 2024$，由计算可得 $\varphi'(x) = xf'(x) + f(x)$．因此，$\eta f'(\eta) + f(\eta) = 2024$．