

## 武汉大学 2008—2009 学年第二学期《高等数学 B2》考试试题

## (B 卷)

一、(18 分) 1、将  $f(x) = \arctan \sqrt{x^2 + 1}$  展开为  $x$  的幂级数;

2、指出该幂级数的收敛域;

3、求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2^n - 1)}$  的和.

二、(18 分) 设微分方程  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

1、证明: 若  $1 + P(x) + Q(x) = 0$ , 则方程有一特解  $y = x$ ; 若  $P(x) + Q(x) = 0$ , 则方程有一特解  $y = \frac{1}{x}$ .

2、根据上面的结论, 求  $(x - y)' - x' = y$  的通解和满足初始条件  $y(0) = 2, y'(0) = 0$  的特解.

3、求  $(x - y)' - x' = y$  满足初始条件  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [y(x) - 1] = -\frac{1}{2}$  的特解.

三、(12 分) 计算  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dy dx$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

四、(10 分) 设  $z = f(x + y, x)$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续的偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}$ .

五、(10 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{x^n}{n^n}$  的收敛域 (端点情形要讨论).

六、(12 分) 利用 Gauss (高斯) 公式计算曲面积分

$$\oint_{\Sigma} (x^2 + z) dy dz + (y^2 + x) dz dx + (z^2 + y) dx dy,$$

由各班学委收集, 学习部整理

七、(12 分) 设  $\varphi(\pi) = 1$ ，试确定函数  $\varphi(u)$ ，使得曲线积分  $\int_L [s \cdot ix \cdot \varphi(x)] \frac{y}{x} \cdot x + \varphi(x) \cdot d$


在  $x > 0$  或在  $x < 0$  的域内与路径无关，并求由点  $A(1, \quad)$  到  $B(\pi, \pi)$  的上述积分。




八、(8 分) 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^2 + (2)^2 + \dots + (n)^2}{(2n)!}$  的敛散性。

# 武汉大学 2008—2009 学年第二学期《高等数学 B2》考试试题参考解答

(B 卷)

一、(18 分) (1). 将  展开为  $x$  的幂级数; (2). 指出该幂级数的收敛域;

(3). 求级数  的和.

解: 1、因为  ，且 ，所以，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-1}^x (t+1)^2 dt = \left[ \frac{1}{3}(t+1)^3 \right]_{-1}^x = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1) = \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x) \end{aligned}$$

由各班学委收集，学习部整理

而

所以

2、幂级数

的收敛域为

3、令

二、(18分) 设微分方程

(1) 证明: 若  $1 + P(x)Q \Rightarrow$ , 则方程有一特解

若  $P(x)xQ \Rightarrow$ , 则方程有一特解。 (2) 根据上面的结论, 求 的通解和满足初始条件 的特解。 (3) 求 满足初始条件 的特解。

解: 1、直接验算即可

2、将微分方程变形为

因为

, 由(1)知

都是方程的特解, 且 常数, 故通解为

, 故所求特解为

由各班学委收集, 学习部整理

3、 $y'' + y = 0$  的通解为  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  .

由  $y(0) = 1$  知,  $C_1 = 1$ , 于是  $y = \cos x$  . 从而

$y(0) = 1$  得  $C_1 = 1$ , 故所求特解为  $y = \cos x$

三、(12 分) 计算  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

解: 作极坐标变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  则有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

四、(10 分) 设  $u = u(x, y, z)$ , 其中函数  $u$  具有二阶连续的偏导数, 求  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ .

解:  $u = u(x, y, z)$  所以,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$

五、(10 分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  的收敛域 (端点情形要讨论).

解: 设  $a_n = \frac{1}{n!}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ,

所以, 收敛半径为  $\infty$ , 当  $x \in \mathbb{R}$  时, 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

而

所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  因此, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  发散. 同理, 当  $p \leq 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  也发散

所以幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  的收敛区间为  $(-1, 1)$

六、(12 分) 利用 Gauss (高斯) 公式计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧.

解:  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧,  $\Omega$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  所围成的球体.

所以,  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ , 其中  $\mathbf{F} = (x, y, z)$ .

所以,  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$ , 所以, 由 Gauss 公式, 得  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iiint_{\Omega} 3 dV = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = 4\pi$ .

其中  $\Omega$  为空间区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

而  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧, 所以  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ .

其中  $\Omega$  为空间区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧. ....4

而  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧, 所以  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ . 又设  $\Sigma$  的体积为  $V$ , 则  $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3} \pi$ .

因此,  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi = 4\pi$ .

七、(12 分) 设  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2, x^2 + z^2, y^2 + z^2)$ , 试确定函数  $u(x, y, z)$ , 使得曲线积分  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  在  $\Omega$  或在  $\Sigma$  的域内与路径无关, 并求由点  $(1, 1, 1)$  到  $(-1, -1, -1)$  的上述积分.

解: 因为  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2, x^2 + z^2, y^2 + z^2)$ , 所以  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2(x + y + z)$ .

在  $\Omega$  或在  $\Sigma$  的域内与路径无关, 并求由点  $(1, 1, 1)$  到  $(-1, -1, -1)$  的上述积分.

解: 因为  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2, x^2 + z^2, y^2 + z^2)$ , 所以  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2(x + y + z)$ .

由于曲线积分  $\int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$  在  $\frac{1}{2}$  或在  $\frac{1}{2}$  的域内与路径无关, 因此

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

所以得微分方程

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

解此方程, 得通解

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

代入  $\frac{1}{2}$ , 得

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

所以, 所求函数为

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

八、(8分) 判别级数

的敛散性.

解:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

而

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

所以, 由比值判别法, 知级数

收敛.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

再由比较判别法知级数

收敛.

由各班学委收集, 学习部整理