武汉大学 2005 – 2006 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (30 分)计算题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 当 n 是不小于 1 的整数时, 计算 A^n.

2. 设二阶方阵 A 满足方程 $A^2 - 3A + 2I = O$, 求 A 所有可能的特征值.

3. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩.

4. 已知 A 为 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵, 且 A 非奇异, 求 $(A^\star)^\star$.

5. 设 A 是三阶实对称矩阵, 其对应的二次型的正负惯性指数均为 1, 且满足 $|E + A| = |E - A| = 0$, 计算 $|2E + 3A|$.

6. 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (x, 0, \cdots, 0, x)^T$, 矩阵 $A = I_n - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 且 $A^{-1} = I_n + x\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求实数 x.

二. (45 分) 解答题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$, 且 $R(A) = 2$, X 满足$AX + E = A^2 + X$, 求 a 及 X.

2. 已知线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$, 问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其解.

3. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$,

   (1). 求出二次型 f 的矩阵 A 的全部特征值;

   (2). 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵;

   (3). 计算 $|A^m|$ (m 为正整数).

三. (25 分) 证明题和讨论题

1. (10 分) 设 A 是 n 阶实方阵,

   (1). 当 n 为奇数且 $AA^T = I$ 及 $|A| = 1$ 时, 证明: $|I - A| = 0$.

   (2). 当 m 为任意给定正整数且 $(A + I)^m = O$ 时, 证明: A 可逆.

2. (15 分) 对线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, 讨论下面的问题:

   (1). 向量组 B 是否能成为 $\mathbb{R}^3$ 中的基? 能否用 A 线性表示 B? 如果可以, 试求出由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 的过度矩阵 P, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-a \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbb{R}).$$

(2). 若 $\boldsymbol{\beta}_1 = k(2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = k(2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_3 = k(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, k 是非零实数,

(a). 给出向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关的一个充要条件, 并证明之;

(b). 给出矩阵 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$ 为正交阵的一个充要条件, 并证明之.

武汉大学 2005–2006 学年第二学期

《线性代数D》(工科 36 学时)试题

一. (30 分) 计算题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3, 21, 0, 9, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 7, -1, -2, -1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 14, 0, 6, 1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|AA^T|$ 的值.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1^T = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2^T = (1, -2, 1)$, 试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}$ 两两正交.

4. 判定二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 的正定性.

5. 已知 $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 A^{2006}.

二. (30 分) 解答题

1. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $A^2 - AB = E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵,

(1). 求矩阵 B.

(2). 令 $C = 4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$, 计算 C 的伴随矩阵 $C^\star$.

2. 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

(1). 求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, 把二次型 f 化为标准形.

(2). 在 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值和最小值.

三. (40 分) 证明与讨论

1. 设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda - 1 \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 此方程组有唯一解, 无解或有无穷多个解? 并在有无穷多解时求出其通解.

2. 设三阶方阵 A 有三个实特征值 λ_1, λ_2, λ_3, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x 为实数, 试讨论 x 为何值时, 矩阵 A 可与对角阵相似?

武汉大学 2006 – 2007 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算下列行列式

1. $D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$;

2. $D = |A|$,其中 $A = (a_{ij})$ 是 2007 阶方阵, $a_{ij} = i - j$.

二.（10 分） 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1 - 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (4, 1, 3, 1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个极大无线性关组.

三. (10 分) 设二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, 试求该二次型的矩阵, 并指出 λ 取何值时 f 正定?

四. （15 分） a, b 为何值时, 方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & a+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+7 \end{pmatrix}$ 有唯一解、无解、有无穷多解? 在有解时, 求出方程组的解.

五. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k = 1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 Q^TAQ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k = 0$ 时, A 能否与对角阵相似 (说明理由)?

六. (20 分) 设三阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A + B = AB$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 0),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 1).$$

1. 求矩阵 A;
2. 求秩 $r(A^\star B^\star)$, 其中 $A^\star$, $B^\star$ 分别为 A, B 的伴随矩阵;
3. 设 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)B$, 求 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$.
4. 设线性变换 T 为: $T(\boldsymbol{\alpha}_i) = \beta_i, (i = 1, 2, 3)$, 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的变换矩阵 C.

七. (20 分) 设三阶方阵 $A = (a_{ij})$,

1. 若 $A^T = A$ 且 $A^2 = O$, 证明 $A = O$; 并由反例说明一般情况下: $A^2 = O$ 得不出 $A = O$.
2. 如果 A 可逆, 将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 B, 问 $BA^{-1} - AB^{-1}$ 是否可逆?

武汉大学 2006–2007 学年第二学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$ $(n \geq 1)$.

二. (10 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为 n 维向量组, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$, 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

三. (15 分) 设矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

1. 求 $(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$;
2. 求 A 的逆矩阵.

四. (15 分) 设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 此方程组有唯一解, 无解或有无穷多个解? 并在有无穷多解时求出其通解.

五. (20 分) 已知实二次型 $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2zx$

1. 用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵;
2. 求 $f(x,y,z)$ 在单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的最大值和最小值.

六. (20 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 的三组基分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 且线性变换 T 把基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 映到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$.

1. 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵;
2. 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵;
3. 求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵;
4. 求 $T(T(\boldsymbol{\alpha}_1))$.

七. (10 分) 设 A, B 是同阶方阵, B 是可逆矩阵, 且满足 $A^2 + AB + B^2 = O$, 证明 A, $A^2 + B^2$ 以及 $A^{-1} + B^{-1}$

都是可逆矩阵.

武汉大学 2006–2007 学年第二学期

《线性代数D》(工科 36 学时)试题

一. (10 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$, 求 $D_1+D_2+D_n\ \ (n\geq 3)$.

二. (12 分) 计算向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$ 的秩, 并求出该向量组的一个极大无关组, 同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合.

三. (16 分) 设矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

1. 求 $4A^2-B^2-2BA+2AB$;
2. 求 $|A^\star|$, 这里 $A^\star$ 是 A 的伴随矩阵.

四. (16 分) 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

1. 问 a,b,c 为何值时, $R(A,B)=R(A)$?
2. 求矩阵方程 $AX=B$ 的全部解.

五. (18 分) 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3 &= 0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3 &= 0 \\ 3x_1+x_2-x_3 &= 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 A, 若 3 阶非零矩阵 B 满足 $AB=O$,

1. 求 $|A|$ 的值; 2. 求 λ; 3. 求 $|B|$ 的值.

六. (20 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,

1. 写出二次型 f 的矩阵 A;
2. 求出 A 的全部特征值与特征向量;
3. 把二次型 f 化为标准形;
4. 判定二次型 f 是否正定.

七. (8 分) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 为 n 维实向量, 证明: 方程组 $A^TA\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解.

武汉大学 2007–2008 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算下列行列式

1. $D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = m$, $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = n$, 求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2)|$.

二. (10 分) 若有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m + \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\beta}_m = \mathbf{0}$ 成立, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关. 试讨论该结论是否正确?

三. (12 分) 设 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求

1. A 的特征值和特征向量; 2. A^k (k 为正整数)及其特征值和特征向量.

四. (15 分) 当 λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有唯一解, 无解, 有无穷多解? 在有解时, 求出方程组的解.

五. (15 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ $(b > 0)$, 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

1. 求 a, b 的值; 2. 用正交变换将二次型 f 化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

六. (18 分) 在四维实向量构成的线性空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2-a \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. 求 a 使 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的基;

2. 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 P;

3. 设线性变换 T 为: $T(\boldsymbol{\alpha}_i) = \beta_i, (i = 1, 2, 3, 4)$, 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 下的变换矩阵 C.

七.(20 分) 证明题

1. 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 $A^\star$, 证明: 若 $|A| = 0$, 则 $|A^\star| = 0$;

2. 设 A 和 B 为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B, r(A + B - E) = n$, 证明: $r(A) = r(B)$.

武汉大学 2007–2008 学年第二学期

《线性代数D》(工科 36 学时)试题

一. (10 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维向量, 记三阶矩阵

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3), B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

已知 $|A|=1$, 求 $|B|$.

二. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $AC-E=B+C$, 求矩阵 C.

三. 已知向量组 $A:\ \boldsymbol{\xi}_1=(1,2,3)^T,\ \boldsymbol{\xi}_2=(-8,4,8)^T,\ \boldsymbol{\xi}_3=(2,-1,-2)^T,\ \boldsymbol{\xi}_4=(10,5,6)^T$, 求向量组 A 的秩及一个最大无关组, 并把其余向量用最大无关组表示出来.

四. (15 分) 设线性方程组为 $\begin{cases} (2+\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5+\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5+\lambda)x_3=3\lambda+1 \end{cases}$ 问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解, 无解或有有无穷多解? 并在有无穷多解时求其解.

五. (15 分) 已知 $1,1,-1$ 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,1)^T$ 是 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量.

1. 能否求出 A 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量? 若能, 试求出该特征向量, 若不能, 则说明理由.
2. 能否由此求得实对称矩阵 A? 若能, 试求之, 若不能则说明理由.

六. (15 分) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, E 是 n 阶单位矩阵. 已知 $BA=E$, 试判断 A 的列向量组是否线性相关? 为什么?

七. (20 分) 设二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a,b,c 为常数, 则

1. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的具体形式;
2. 求出 A 的全部特征值与特征向量;
3. 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$, 把二次型 f 化为标准形;
4. 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值和最小值.

武汉大学 2008–2009 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算下列行列式

1. $D=\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$, $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$, 求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$.

二. (10 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4,1,3,1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个极大线性无关组.

三. (15 分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩.

四. (15 分) 当 λ 为何值时, 方程组 $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ 有唯一解, 无解, 有无穷多解? 并在有无穷多解时求出方程组的解.

五. (15 分) 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$, P 为正交矩阵, 试求常数 a,b.

六. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

1. 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 Q^TAQ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?
2. 当 $k=0$ 时, A 能否与对角阵相似(说明理由)?

七. (20 分) 设三阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$, 其中 $B=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$, 且

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1).$$

1. 求矩阵 A;
2. 求秩 $r(A^\star B^\star)$, 其中 $A^\star$, $B^\star$ 分别为 A,B 的伴随矩阵;
3. 设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)B$, 求 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.
4. 设线性变换 T 为: $T(\boldsymbol{\alpha}_i)=\beta_i,(i=1,2,3)$, 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的变换矩阵 C.

武汉大学 2008–2009 学年第一学期

《线性代数D》(工科 36 学时)试题

一. (10 分) 计算 n 阶行列式

1. $D_n = \begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$.

二. (15 分) 设三阶方阵 A, B 满足 $AB+E=A^2+B$, 且 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B 及 $B^{\star}$.

三. (15 分) 已知向量组 A : $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,1)^T$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^T$, $\boldsymbol{\xi}_4=(1,2,1)^T$, 求向量组 A 的秩及一个最大无关组, 并给出向量组中不能由其余向量线性表示的向量.

四. (15 分) 已知线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix},$$

问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其解.

五. (15 分) 设 A 为三阶方阵, 且 $A^2\neq O$, $A^3=O$,

1. 能否求得 A 的特征值? 若能, 试求出该特征值, 若不能, 则说明理由;
2. A 能否相似于一个对角阵? 若能, 试求出该对角阵, 若不能, 则说明理由;
3. 已知 $B=A^3-5A^2+3E$, 能否求得 $|B|$, 若能， 试求出 $|B|$, 若不能, 则说明理由.

六. (15 分） 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$,

1. 求出二次型 f 的矩阵 A 的全部特征值与特征向量;
2. 求正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵;
3. 计算 $|A^m|$(m 是正整数).

七. (15 分) 证明: 与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系.

武汉大学 2009–2010 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算下列各题:

1. 已知 $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 A^{2010}.

2. 已知 n 阶矩阵 $A\ (n\geq 2)$,且 A 非奇异, 求 $(A^{\star})^{\star}$.

二. (10分) 设 A 为 n 阶矩阵, 证明: 存在 $n\times s$ 矩阵 $B\neq O$, 使得 $AB=O$ 的充要条件是 $|A|=0$.

三. (16 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$, 且 $R(A)=2,\ X$ 满足$AX+E=A^2+X$, 求 a 及 X.

四. (16 分) 已知线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix},$$

问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其解.

五. (16 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$, 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为1, 特征值之积为 -12.

1. 求 a,b 的值;

2. 求矩阵 A 的特征值与特征向量.

六. (16 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一, 试求

1. a 的值;

2. 正交矩阵 Q ,使得 Q^TAQ 为对角阵.

七. (16 分) 给定 $\mathbb{R}^3$ 的两组基: $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,0)^T,\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,0)^T,\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\eta}_3=(1,1,1)^T$, 定义线性变换: $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\eta}_i,\ i=1,2,3$, 试求:

1. 求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵;

2. 求线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

武汉大学 2009 – 2010 学年第二学期

《线性代数D》(工科 36 学时)试题

一. (10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$, 求行列式 $|AA^T|$ 及秩 $R(B)$.

二. (15 分) 设三阶方阵 A 满足 $AX=A+2X$, 且 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$, 求矩阵 X.

三. (15 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性无关, 并说明理由.
2. 常数 l, m 满足何种条件时, 向量组 $l\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $m\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关, 并说明理由.

四. (16 分) 设线性方程组为 $\begin{cases}x_1+ax_2+x_3&=3\\x_1+2ax_2+x_3&=4\\x_1+x_2+bx_3&=4\end{cases}$ 问 a, b 为何值时, 该方程组有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其解.

五. (15 分) 设 α 是实数 n 维非零列向量, E 为 n 阶单位矩阵, $A=E-\dfrac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T$, 试解答下列问题:

1. 计算 A^T, 并回答 $(kE-A)$ 能否相似于一个对角阵? 并说明理由, 其中 k 为常数;
2. 计算 A^2, 并回答 $(kE-A)$ 是否可逆? 并说明理由, 其中 $k\neq\pm1$ 为常数;
3. 给出 $(E-2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件.

六. (18 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$, 试解答下列问题:

1. 给出二次型 f 的矩阵 A ;
2. 求矩阵 A 的全部特征值与特征向量.
3. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$, 使 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

七. (12 分) 设 n 阶实对称矩阵 A 正定, 试证明:

1. 矩阵 A^{-1}, $A^\star$, 和 $A^{-1}+A^\star$ 均为 n 阶正定矩阵;
2. $C=\begin{pmatrix}A^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A^\star\end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶正定矩阵.

武汉大学 2009 – 2010 学年第二学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$, 求行列式 $|AA^T|$ 及秩 $R(B)$.

二. (15 分) 已知矩阵方程 $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$, 求矩阵 A, 其中

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

三. (15 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}$, 求向量组 A 的秩及一个最大无关组, 并将其余向量用最大无关组线性表示.

四. (15 分) 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解,

1. 求 λ, a.
2. 求方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

五. (15 分) 设 α 是实数 n 维非零列向量, E 为 n 阶单位矩阵, $A=E-\dfrac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T$, 试解答下列问题:

1. 计算 A^T, 并回答 $(kE-A)$ 能否相似于一个对角阵? 并说明理由, 其中 k 为常数;
2. 计算 A^2, 并回答 $(kE-A)$ 是否可逆? 并说明理由, 其中 $k\neq\pm1$ 为常数;
3. 给出 $(E-2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件.

六. (15 分) 在四维实向量构成的线性空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求 k 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的基, 并求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 P; 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\k\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2-k\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

七. (15 分) 设 A 为 n 阶对称矩阵, C 为 n 阶可逆矩阵, 令 $B = C^T AC$, 证明以下命题:

1. B 为 n 阶对称矩阵, 且 $r(B) = r(A)$;
2. 如果 B 是一对角阵, C 是正交阵, 且 $f(\lambda)$ 是 A 的多项式, 证明 $f(A) = O$.

武汉大学 2010–2011 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (12 分) 计算下列行列式

1. $D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$.

2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$, $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$, 求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$.

二. (10 分) 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$ 成立, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关. 试讨论该结论是否正确?

三. (12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$, 且 $r(A)=2$, X 满足 $AX+I=A^2+X$, 求 a 和 X .

四. (15 分) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^T$, 试讨论当 a,b 为何值时,

1. $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;
2. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 惟一地线性表示, 并求出表示式;
3. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示式不惟一, 并求出表示式.

五. (15 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$,

1. 写出二次型 f 的矩阵表达式;
2. 用正交变换把二次型 f 化成标准形, 并写出相应的正交矩阵.

六. (16 分) 在四维实向量构成的线性空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2-a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

1. 求 a 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的基;
2. 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 P;
3. 设线性变换 T 为: $T(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i,(i=1,2,3,4)$, 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的变换矩阵 C.

七.(20 分) 证明题

1. 设 A 为 n 阶正交矩阵, 且 $|A| < 0$, 证明: $|A + I| = 0$.

2. 设 A 和 B 为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B, r(A + B - E) = n$, 证明: $r(A) = r(B)$.

武汉大学 2010–2011 学年第二学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算下列行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

二. (12 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩及 A 的列向量组的一个极大无关组.

三. (15 分) 当 λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$ 有唯一解, 无解, 有无穷多解? 在有解时, 求出方程组的解.

四. (12 分) 设 A 和 B 均为四阶方阵, A 和 B 的伴随矩阵分别为 $A^\star$ 和 $B^\star$, 且 A 的秩 $r(A)=4$, B 的秩 $r(B)=2$, 求 $A^\star B^\star$ 的秩 $r(A^\star B^\star)$.

五. (15 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 的矩阵是奇异矩阵,

1. 写出二次型 f 的矩阵 A 并求 t 的值;
2. 根据所求 t 的值, 求一个可逆矩阵 P 和一个对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$;
3. 求 A^n $(n\geq 2)$.

六. (16 分) 在四 $\mathbb{R}^3$ 中的基分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,1),\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,0),\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,1),\ \boldsymbol{\eta}_1=(1,0,0),\ \boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0),\ \boldsymbol{\eta}_3=(1,1,1),$$

且线性变换 T 把基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 映到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$.

1. 求基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵;
2. 求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵;
3. 求 T 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵;
4. 求 $T(T(\varepsilon_1))$.

七.(16 分) 证明题

1. 设 A 和 B 为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2=A, B^2=B, r(A+B-E)=n$, 证明: $r(A)=r(B)$.
2. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵, 且矩阵 $B=\lambda E+A^TA$, 试证: 当 $\lambda>0$ 时, 矩阵 B 为正定矩阵.

武汉大学 2011–2012 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算下列行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

二. (12 分) 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (x, 0, \cdots, 0, x)^T$, 矩阵 $A = E - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, $A^{-1} = E + x\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求实数 x.

三. (16 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$, 且 $r(A) = 2$, X 满足$AX + E = A^2 + E$, 求 a 及 X.

四. (16 分) 已知线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix},$$

就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形, 对 λ 值进行讨论,并在有无穷多解时求其通解.

五. (16 分) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 $1, 2, 3$; 矩阵 A 的属于特征值 1, 2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, -1, 1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, -2, -1)^T$.

1. 求 A 的属于特征值 3 的特征向量;
2. 求矩阵 A.

六. (20 分) 对线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, 讨论下面的问题:

1. 向量组 B 是否能成为 $\mathbb{R}^3$ 中的基? 能否用 A 线性表示 B? 如果可以, 试求出由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 的过度矩阵 P, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-a \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbb{R}).$$

2. 若 $\boldsymbol{\beta}_1 = k(2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = k(2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_3 = k(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, k 是非零实数,

   (1). 给出向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关的一个充要条件, 并证明之;

(2). 给出矩阵 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$ 为正交阵的一个充要条件, 并证明之.

七. (10 分) 设 n 阶实对称矩阵 $A \neq O$, 且其特征值全为非负数, I 为 n 阶单位矩阵, 则行列式 $|A+I|>1$.

武汉大学 2011–2012 学年第二学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}.$$

二. (15 分) 求矩阵 X 满足 $AX=A+2X$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

三. (15 分) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-1,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,1,7)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-3,-1,-7)^T$ 的一个极大无关组与秩, 并将组中其余向量用所求的极大无关组线性表示.

四. (15 分) 设线性方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=b \end{cases}$ 分别讨论 a,b 取何值时, 该线性方程组有唯一解、无解、有无穷多解, 并在有无穷多解时求出其通解.

五. (15 分) 在正交变换 $X=QY$ 下将以下实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

六. (15 分) 在三维实向量构成的线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 已知:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a)^T,\ \boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^T,\ \boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0),\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1),$$

1. 求 a 使 $\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的基;
2. 当 $a=2$ 时, 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 P;
3. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$, 求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

七. (15 分) 证明题

1. 设向量组 B 能由向量组 A 线性表示, 且两向量组的秩相等, 证明A 与 B 等价.
2. 如果 $A=\dfrac{1}{2}(B+I)$, 证明 $A^2=A$ 的充要条件是 $B^2=I$.

武汉大学 2012－2013 学年第二学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^T$ 为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 求向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)^T$ 在这组基下的坐标向量.

二. (10 分) 已知 A 为 3 阶矩阵, $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 且满足方程 $2A^{-1}B=B-4I$, I 为 3 阶单位阵, 求矩阵 A.

三. (12 分)已知四阶行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\-1&-1&3&0\\0&-1&-2&4\\0&0&-1&-3\end{vmatrix}$.

1. 计算四阶行列式 D 的值; 2. 计算四阶行列式 D 的第一行元素的代数余子式之和.

四. (10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, 矩阵 $B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}(2,1,0)$, 且 $r(A-AB)=2$, 求参数 t 的值.

五. (16 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix}$, 问 a,b 为何值时

1. $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;
2. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 并写出表示式;
3. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 用无穷多方式线性表示? 并写出一般表示式;
4. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 并在此时求它的秩和一个最大无关组, 且用该最大无关组表示其余向量.

六. (14 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2,

1. 求 a 的值; 2. 求正交变换 $x=Qy$, 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

七. (12 分) 设 A 为三阶实对陈阵, 且满足条件 $A^2+2A=O$, 已知 A 的秩 $r(A)=2$,

1. 求 A 的全部特征值; 2. 计算 $|A+4I|$; 3. 当 k 为何值时, $A+kI$ 为正定阵, 其中 I 为 3 阶单位阵.

八. (8 分) 已知 A 为 3 阶方阵, λ_1, λ_2, λ_3 为 A 的3个不同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别为相应的特征向量, 又 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 试证: $\boldsymbol{\beta}$, $A\boldsymbol{\beta}$, $A^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

九. (8 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维非零实向量, $\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, k_1, k_2 为使得 $\boldsymbol{\alpha}_4\neq\mathbf{0}$ 的任意常数, 以下结论若正确, 请证明; 若不正确, 请举出反例.

1. 若 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也正交, 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 正交.
2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

武汉大学 2012–2013 学年第二学期

《线性代数D》(工科 36 学时)试题

一. (10 分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

二. (15 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $A^*BA = 2BA - 9E$, 求 B.

三. (15 分) 设向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,3,2,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (7,0,14,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,-1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (5,1,6,2)^T$

1. 求向量组的秩; 2. 求向量组的一个最大线性无关组, 并把其余向量分别用求得的最大无关组线性表示.

四. (15 分) 问 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + (\lambda-5)x_3 = \lambda+1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ 有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

五. (15 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$

1. 把二次型 f 写成 $f = X^TAX$ 的形式;
2. 求矩阵 A 的特征值与特征向量.
3. 求正交矩阵 P, 使 f 通过正交变换 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ 化为标准形.

六. (15 分) 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$, 求 $|A^3 - 5A^2 + 7A|$.

七. (7 分) 证明: 设矩阵 A 为 n 阶非零实对称矩阵, 则存在 n 维列向量 X, 使得 $X^TAX \neq 0$.

八. (8 分) 证明: 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵, $n < m$, 且 $AB = E$, 证明 B 的列向量组线性无关.

武汉大学 2013 – 2014 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (8 分) 在 n 阶行列式 D 中, 如果把第一列移到最后一列, 而其余各列保持原来次序各向左移动了一列, 得到行列式 Δ, 问行列式 Δ 与 D 有何关系?

二. (12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (1) 求 A^n. (n 为正整数). (2) 设 $A^2+AB-A=E$, 求 $|B|$.

三. (15 分) 求下列向量组的一个最大线性无关组, 并用它线性表出向量组中的其余向量.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,2,5),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,0,1),\ \boldsymbol{\alpha}_5=(4,2,3,7).$$

四. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c & x_1 \\ b & -a & d & x_2 \\ c & -d & -a & x_3 \\ d & c & -b & x_4 \end{pmatrix}$, a,b,c,d 是不全为 0 的实数, 求 $x_i\ (i=1,2,3,4)$ 及数 k, 使 $B=kA$ 为正交矩阵.

五. (12 分) 用正交变换化二次型 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准型, 并写出所用正交变换及 f 的标准型.

六. (16 分) 讨论 a,b 为何值时, 方程组 $\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases}$ 有唯一解? 有无穷多解? 无解? 并在有解时求出其解.

七. (10 分) 证明: 与齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系等价的线性无关向量组也是该方程组的基础解系.

八. (10 分) 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 向量 α 在基 $\alpha_1=(1,1,0,0),\ \alpha_2=(0,1,1,0),\ \alpha_3=(0,0,1,1),\ \alpha_4=(0,0,0,1)$ 下的坐标为 $(2,3,1,2)$, :求 α 在基 $\beta_1=(1,2,0,0),\ \beta_2=(0,2,3,0),\ \beta_3=(0,0,2,4),\ \beta_4=(3,0,0,2)$ 下的坐标.

九. (10 分) 设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T,\ \beta=(b_1,b_2,b_3)^T$, 且 $\alpha^T\beta=2,\ A=\alpha\beta^T$, (1) 求 A 的特征值, (2) 求可逆矩阵 P 及对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.