武汉大学2016-2017学年第二学期期末考试高等数学A2试题（A）

1、（8分）单位圆O的圆周上有相异两点P,Q，$\angle POQ=\theta,a,b$为正的常数，求$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1}{\theta^2}[a+b-\left(a\overline{OP}+b\overline{OQ}\right|]$。

2、（10分）讨论极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$的存在性，若存在求出极限，若不存在说明理由。

3、（8分）求过点$M(-4,-5,3)$，且与两条直线$l_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$和$l_2:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-5}$都相交的直线方程。

4、（10分）设$z=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，其中$u=e^x\cos y,v=e^x\sin y$，试证明：若$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

5、（8分）设$u=f(x,y,z)$，$y=\ln x$，$g(\sin x,e^y,z)=0$，且$\dfrac{\partial g}{\partial z}\neq 0$，求$\mathrm{d}u$。

6、（10分）在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿方向$\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}$的方向导数最大。

7、（10分）设$y=\varphi(x)\quad x\in[1,3]$是具有连续导数的函数，点$A(1,2)$及点$B(3,4)$在曲线$L:y=\varphi(x)$上，而$L$恒在弦$\overline{BA}$之上方，且弧$\overset{\frown}{AB}$与$\overline{BA}$所围成弓形$D$的面积为$S$，试计算曲线积分 $\int_{AB}\dfrac{y}{x^2}dx+(x-\dfrac{1}{x})dy$

8、（8分）设$f(x)$是以2π为周期的可微周期函数，又设$f'(x)$连续，a_0，a_n，$b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$是$f(x)$的Fourier系数。求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

9、（10分）试将函数$f(x)=\ln\left(1+x+x^2\right)$展开成$x$的幂级数。

10、（10分）设有向量场$\vec{F}=\{x^2yz^2,\dfrac{1}{z}\arctan\dfrac{y}{z}-xy^2z^2,\dfrac{1}{y}\arctan\dfrac{y}{z}+z(1+xyz)\}$，

（1）计算$div\vec{F}\mid_{(1,1,1)}$的值。

（2）设空间区域Ω由锥面$y^2+z^2=x^2$与球面$x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所围成$(x>0)$，其中a为正常数，记Ω表面的外侧为Σ，计算积分

$$I=\oiint_\Sigma \vec{F}d\vec{s}=\oiint_\Sigma x^2yz^2dydz+[\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}+xy^2]dzdx+[\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)]dxdy$$

11、（8分）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：$\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}y\geq 1$.