第 01 次作业

1. 用对角线法则计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}，其中 \omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. 求出 m,n 使 9 级排列 $39m7215n4$ 为偶排列.

3. 设排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数为 k，试求排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数.

4. 由 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$，求 λ .

5. 证明下列各式：

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0 .$$

6. 设 α,β,γ 是 $x^3+px+q=0$ 的 3 个根，求 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$ 的值.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

8. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -12 & 134 \end{vmatrix}$，求

（1）第 4 行元素的余子式之和；

（2）第 4 行元素的代数余子式之和.

9. 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & y & x \end{vmatrix}$, 且 $M_{11}+M_{12}-M_{13}=3, A_{11}+A_{12}+A_{13}=1$, 求 D 之值.

10. 设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$，求该方程的根.

11. 计算下列各行列式：

(1) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，$\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$；(2) $D_n=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_2+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}$，$\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$；

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$；　　(4) $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$.

12. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

13. 证明：n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha\,.$$

14. 求 3 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，使得

$$f(-1)=0, f(1)=4, f(2)=3, f(3)=16.$$

15. λ 为何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

16. 就 a 值讨论方程组 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 之解的情况.

17. 证明：n 次多项式至多有 n 个互异的实数根.

第 02 次作业

3. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$；　(2) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；　(4) $D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$；

(5) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$；

(7) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$；

5. 已知 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

试求 $A_{41}+A_{42}$ 与 $A_{43}+A_{44}$，其中 A_{4j} 为行列式 D_4 的第 4 行第 j 个元素的代数余子式.

6. 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$

证明：$D=A+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$，其中 $A=\det(a_{ij})_{n\times n}$.

7. 用克拉默法则解方程组：

(2) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

8. 解方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}，且 a_1, a_2, \cdots a_n 互不相同.$$

9. 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$L_1 : ax + 2by + 3c = 0，\ L_2 : bx + 2cy + 3a = 0，\ L_3 : cx + 2ay + 3b = 0 .$$

试证这 3 条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

第 03 次作业

练习 2. 2

2. 举例说明下列命题是错误的.

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

3. 计算下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称方阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

10. 求与 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的全体 2 阶矩阵.

11. 任一方阵 $\boldsymbol{A}$ 均可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

12. 证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶实矩阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

第 04 次作业

练习 2．3

1． 求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2． 利用逆矩阵求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \quad 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 \qquad = 2. \end{cases}$$

3． 已知线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

4． 证明下列命题：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

(3) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

5． 解矩阵方程：$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6． 判断下列命题是否正确：

(1) 可逆对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵；

(2) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均不可逆；

(3) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆方阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 一定可逆.

练习 2．4

2． 用矩阵分块的方法，证明下列矩阵可逆，并求其逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3． 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是可逆方阵，求分块矩阵 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

第 05 次作业

练习 2．5

1. 用初等行变换法求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

2. 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\4&-5&2\\1&-4&-1\end{pmatrix}.$$

3. 解矩阵方程 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$.

4. 若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{A}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

5. 求下列矩阵的行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}3&-1&-4&2&-2\\1&0&-1&1&0\\1&2&1&3&4\\-1&4&3&-3&0\end{pmatrix}$；

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶可逆方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第一、三行互换后得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，证明：$\boldsymbol{B}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

练习 2．6

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 阶矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&4&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{AB})$.

5. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的前 s 行构成的 $s\times n$ 矩阵，若 $R(\boldsymbol{A})=r$，证明: $R(\boldsymbol{B})\geq r+s-m$.

7. 判断下列命题是否正确：

(1) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{BA})$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有 r 阶子式均为零，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式也都为零；

(3) 秩相等的同阶矩阵一定等价；

(4) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，若 $R(\boldsymbol{A})>0$，$R(\boldsymbol{B})>0$，则 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})>0$；

(5) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个非零 r 阶子式，则 $R(\boldsymbol{A})\geq r$；

(6) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个为零 $r+1$ 阶子式，则 $R(\boldsymbol{A})<r+1$.

第 06 次作业

练习 2．7

2. 求解线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4=8 \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=3 \end{cases}$.

3. 问λ取何值时，方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+\lambda x_3=2 \\ 2x_1+\dfrac{4}{3}\lambda x_2+6x_3=4 \\ \lambda x_1+6x_2+9x_3=6 \end{cases}$

（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷多解？

4. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 8 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 16 \end{pmatrix}$，求矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解$\boldsymbol{X}$.

4. 求与$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可交换的全体 3 阶矩阵.

5. 若矩阵$\boldsymbol{A}$与所有的n阶矩阵可交换，则$\boldsymbol{A}$一定是数量矩阵，即$\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}$.

6. 证明：不存在n阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

7. 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$分别是n阶实对称和实反对称矩阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

8. 设$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求行列式$\left|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|$.

9. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为三维列向量，且$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=5$，求

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\right|.$$

11. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$均可逆，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$也可逆，并求其逆矩阵.

12. 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为$n\times n$矩阵，且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$可逆，证明：

(1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$可逆；

(2) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$可逆，并求其逆矩阵.

14. 解下列矩阵方程：

（2）$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

16. 对于n阶方阵$\boldsymbol{A}$，存在自然数k，使得若$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，证明$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，且有

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

18. 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，证明：$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n; \\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1; \\ 0, & R(\boldsymbol{A})\le n-2. \end{cases}$

19. 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，证明：$(\boldsymbol{A}^*)^*=\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

20. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

21. 已知 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ \hdashline & & & 3 & -1 \\ & & & -9 & 3 \end{array}\right)$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

25. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置，证明：

（1）$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$；

（2）当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

26. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})=n$.

27. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

28. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，证明：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 均可逆，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

32. 计算下列矩阵的秩：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & a & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$；

33. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 a，证明：

（1）$a\neq 0$；

（2）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和等于 $\dfrac{1}{a}$；

（3）$\boldsymbol{A}^m$（m 为正整数）的每一行的元素之和为 a^m .

34. 求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

第 07 次作业

练习 3．1

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$，且向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，求 $\boldsymbol{\alpha}$.

练习 3．2

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$；$\boldsymbol{\beta}_1=(2,3,4)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(a,b,c)$. 问 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？若能线性表示，求出具体的表达式.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 也线性相关，问 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$ 是否一定线性相关？试举例说明之.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维列向量，若 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

7. 举例说明下列各命题是错误的：

（1）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性相关的，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

（2）若有不全为 0 的数 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_m，使 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$ 成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 亦线性相关.

（3）若只有当 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_m 全为 0 时，等式 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=0$ 才能成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_m$ 亦线性无关.

（4）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 亦线性相关，则有不全为 0 的数，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，$\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$ 同时成立.

8. 下列命题是否正确，说明理由：

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性相关的 n 维向量，则对于任意不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，均有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$.

（2）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的 n 维向量，则对于任意不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，均有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r\neq\boldsymbol{0}$.

（3）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$（$r\geq 2$）中任取 m（$m<r$）个向量，所组成的部分向量组都线性无关，则这个向量组本身也是线性无关的.

（4）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，且只有 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 全为零时，等式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{0}$ 才成立，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

（5）在线性相关的向量组中，去掉若干个向量后所得向量组仍然线性相关.

（6）在线性无关的向量组中，去掉每个向量的最后一个分量后仍然线性无关.

9. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，试证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 必线性无关.

10. 设有两向量组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)\end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,3,1)\\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,3)\\ \boldsymbol{\beta}_3=(0,-1,1,4)\end{cases},$$

证明上述两向量组等价.

第 08 次作业

练习 3．3

1. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,4,-1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,6,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,-6,3,4)$．求该向量组的一个极大线性无关组，并用它来表示其余向量.

2. 已知向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$和向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$具有相同秩，并且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a， b 之值.

3. 设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

4. 设向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$ 的秩相等，且 $\boldsymbol{A}$ 能由 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 两向量组等价.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=r<n$，则对于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量，下列说法正确的有：

(1) 必有 r 行线性无关；

(2) 任意 r 行线性无关；

(3) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关组；

(4) 任意一个行向量均可由其它 r 个行向量线性表示.

第 09 次作业

1． 求 $x_1+x_3-x_4=0$ 的通解.

2． 求下列齐次线性方程组的一个基础解系：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}.$$

3． 求解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4． 已知 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+ax_3=-2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 a .

5． λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

6. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的 3 个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，求该方程组的通解.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

9． 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 试证明：向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

10． 判断下列诊断是否正确，并说明理由：

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

(2) 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 也必有无穷多解；

(3) 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 也有无穷多解；

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，对齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，

(A) 若 $m>n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

(B) 若 $m<n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵， $R(\boldsymbol{A})=r$，对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，

(A) 若 $r=m$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

(B) 若 $r=n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(C) 若 $m=n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(D) 若 $r<n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

4． 设 3 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda+1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda+1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

问λ取何值时：

(1) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表达式唯一；

(2) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表达式不唯一；

(3) $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

5. 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

求$|\boldsymbol{A}|$.

7. 证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$等价.

10. 求向量组$\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(3,-2,-1,b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=(-2,6,10,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_5=(4,-1,6,10)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组.

11. 确定常数a，使向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$线性表示，但向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

12. 设有向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$，及$\boldsymbol{\beta}=(1,b,-1)^{\mathrm{T}}$，问$a,b$为何值时：

(1) 向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组(A)线性表示，且表示式唯一；

(2) 向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组(A)线性表示；

(3) 向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组(A)线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式.

18. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$，求一个秩为 2 的方阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

19. 已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的第一行是$(a,b,c),a,b,c$不全为零，矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$为常数），且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解.

20. 设四元齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}.$$

还知道另一齐次线性方程组(II)的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

求方程组(I)与(II)的公共解.

21. 已知齐次线性方程组

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0, \end{cases} \quad 和 \quad \text{(II)}\ \begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0, \end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

22. 设 4 元齐次线性方程组(I)和(II)，已知 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是(I)的一个基础解系，$\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 是(II)的一个基础解系，求(I)和(II)公共解.

23. 设(I)和(II)都是 3 元非齐次线性方程组，

(I)的通解为：$\boldsymbol{\xi}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 可取任意常数；

(II)的通解为：$\boldsymbol{\xi}_2+k\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意实数.

求(I)和(II)的公共解.

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，存在正整数 k，$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，但 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，试证：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

25. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

26. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

28. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 r，$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}，其中\ k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1.$$

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 中任何一个非零列向量都构成齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

34. 已知 n 维向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 中，前 $n-1$ 个向量线性相关，后 $n-1$ 个向量无关，又 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 是 n 阶方阵，求证：方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解，且其任一解 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 中必有 $c_n=1$.

37. 证明：$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

第 10 次作业

练习 4.1

1． 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，并把 $\boldsymbol{b}_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_2=(-9,-8,-3)^{\mathrm{T}}$ 用这组基线性表示.

2. 求 $\mathbb{R}^4$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标.

3. 设 $\mathbb{R}^3$ 中两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$. 已知从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 3\\ 4 & -1 & -6\end{pmatrix},$$

求基向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.

4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，取两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^{\mathrm{T}}$，试求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与坐标变换公式.

5. 设 3 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标.

6. 向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的两组基分别为

（I）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；

（II）$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4$.

(1) 由基（II）到基（I）的过渡矩阵 $\boldsymbol{K}$；

(2) 在基（I）与基（II）下有相同坐标的全体向量.

练习 4.2

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一组基，试用施密特正交化方法，构造 $\mathbb{R}^3$ 的一个规范正交基.

5. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，求证 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，求证：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

7. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，若 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 是正交矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 均与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关。

第 11 次作业

练习 5．1

1． 求下列矩阵的特征值和特征向量：

$$(2)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2． 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$，证明：

（1） $\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

（2） $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关．

3． 设 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2．

4． 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值之和是 3，特征值之积为 -24，求 a, b．

5． 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, 4, \cdots, 2n$，求行列式 $\left|\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}\right|$ 的值．

6． 已知 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{4\times 4}$，且 $\lambda = 1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，$\lambda = -2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式．

7． 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$，试求：

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值；(2) $\left|\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{E}\right|$，$\left|\boldsymbol{A}^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*\right|$ 的值．

8． 证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为零．

9． 判断下列命题是否正确：

(1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值一定存在无穷多个特征向量；

(2) 由于方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值，故它们也有相同的特征向量；

(3) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全为 0，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$；

(4) 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0, \pm 1$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系仅一个向量．

第 12 次作业

练习 5．2

3. 判断下列矩阵可否对角化：

$$(1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解 先求特征值，再求特征向量，若有 3 个线性无关的特征向量，则可对角化.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{pmatrix}$相似，求 a,b 及可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k$.

7. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值仅为 0 和 1，证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实反对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值为零或纯虚数.

9. 设 m 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 均可对角化，证明：$m+n$ 阶矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$也可对角化.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，且存在正整数 m，使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

11. 判断下列命题是否正确：

(1) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则对任意的实数 t，有 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$；

(2) 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则它们一定相似于同一对角矩阵；

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})=3$，$\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 一定不能相似于对角矩阵.

第 13 次作业

练习 5．3

1． 求使矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

可对角化的正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ .

2． 设 $A=\begin{pmatrix}7&-3&-1&1\\-3&7&1&-1\\-1&1&7&-3\\1&-1&-3&7\end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

3． 设 $\xi=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $A=\begin{pmatrix}a&-1&1\\-1&0&1\\1&1&b\end{pmatrix}$ 的特征向量，求 a,b .

4． 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量；

(2) 求正交矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$；

(3) 求 A 及 $(A-\dfrac{3}{2}E)^6$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

5． 设 A 和 B 是 n 阶实对称矩阵，证明： $A\sim B$ 的充分必要条件是它们的特征值相同.

练习 5．4

1． 写出下列二次型所对应的矩阵：

(1) $f=x^2+2xy+4y^2-2xz-6yz+5z^2$；

(2) $f=x^2-3z^2-4xy+yz$；

(3) $f=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$.

2． 用正交变换化下列二次型为标准形：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

3． 用配方法化下列二次型为标准形：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$.

5． 设二次曲面 $x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz=1$，试利用正交变换将曲面方程化为标准方程，并指出方程的图形是怎样的曲面.

6. 试求出 $f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值.

7. 判断下列命题是否正确：

(1) 两个 n 阶矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩；

(2) 若 $\boldsymbol{B}$ 与对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同，则 $\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵；

(3) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则存在唯一的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$;

(4) 正交矩阵的特征值一定是实数；

(5) 正交矩阵的特征值只能为 1 或 -1 .

第 14 次作业

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 正定.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 均为正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 都是正定矩阵.

4. 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 的正定性.

5. 判别二次型 $f(x,y,z)=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性.

6. 判断下列命题是否正确：

(1)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵；

(2)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也是正定矩阵；

(3)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正定矩阵；

(4)若实矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同，则 $\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵；

(5)若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上的元素全部大于 0.

4. 下列矩阵是否可以对角化，若能，求对应的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{pmatrix}.$$

5. 已知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{pmatrix}$ 的特征值，判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化，并说明理由.

6. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，2，求 $\left|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right|$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足条件 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $R(\boldsymbol{A})=2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

(2) 当 k 为何值时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位阵.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，证明 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

9. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 可对角化，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&3&-3\\-1&1&a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&b&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，求:

(1) a,b 之值；

(2) 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

12. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不相同，证明：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 均为对角矩阵.

14. 设 $\lambda\neq0$ 是 m 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 的特征值，证明 λ 也是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

17. 已知$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量，

（1）确定常数a,b及$\boldsymbol{\xi}$所对应的特征值；

（2）判断$\boldsymbol{A}$能否相似于对角阵，并说明理由.

18. 设 1，1，-1 是 3 阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的 3 个特征值，对应于 1 的特征向量为$\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{A}$.

19. 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶实对称矩阵，特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$，对应于特征值 2 的一个特征向量为$(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，对应于特征值 1 的一个特征向量为$(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，求对应于特征值 2 的与$(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$线性无关的一个特征向量，并求$\boldsymbol{A}$.

20. 设实对称矩阵$\boldsymbol{A}_{3\times 3}$的特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=-3$，属于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量依次为$\boldsymbol{p}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{A}$.

23. 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{A}$的分别属于特征值$-1,1$的特征向量，向量$\boldsymbol{\alpha}_3$满足$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

（2）令$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)$，求$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

25. 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$a_ib_i\neq 0,\forall i=1,2,\cdots,n$，令$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量.

27. 存在可逆线性变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将如下二次型$f$化成二次型$g$，求此变换$\boldsymbol{P}$.

$$f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3,$$

$$g=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

29. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$，通过正交变换可化为标准形$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数$a$及所用的正交变换.

30. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为 2.

（1）求a的值；

（2）求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准形；

（3）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

31. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$，其中$k$为实数，$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，求对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似，并求$k$为何值时，$\boldsymbol{B}$为正定矩阵.

33. 设$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，$\boldsymbol{M}$为满秩矩阵，证明：$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AM}$为正定矩阵.

34. 设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵，求证：对充分大的t，$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

35. 若$\boldsymbol{A}$为m阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$为$m\times n$阶矩阵，证明：$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$正定$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B})=n$.

37. $\boldsymbol{A}$为正定阵的充要条件是存在可逆矩阵$\boldsymbol{U}$，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.

38. 判断下列二次型的正定性：

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3\quad(a,b\in\mathbb{R})$.