第 4 章 刚体力学

一、知识点网络框图棍子

刚体力学

- 刚体定轴转动运动学
  - 描述刚体定轴转动的运动学物理量
    角位移：$\mathrm{d}\theta$，角速度：$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，角加速度 $\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
  - 匀变速定轴转动的规律
    $\omega=\omega_0+\alpha t$ ，$\Delta\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$
    $\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\Delta\theta$
  - 角量与线量的关系
    $v=\omega R$ ，$a_n=\omega^2 R$ ，$a_\tau=\alpha R$
- 刚体定轴转动动力学
  - 描述刚体定轴转动的动力学物理量：
    转动惯量：$I=\sum_i \Delta m_i r_i^2$，$I=\int r^2\mathrm{d}m$
    角动量：$\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}$ ；转动动能：$E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$
  - 刚体定轴转定律：$M=I\alpha=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
  - 力矩做功：$A=\int \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$，动能定理：$A_{合外力矩}=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2$
  - 功能原理：$A_{外力（矩）}+A_{非保守内力（矩）}=\left(E_k+E_p\right)-\left(E_{k0}+E_{p0}\right)$
  - 角动量定理：$\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ 或 $\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\int_{\boldsymbol{L}_1}^{\boldsymbol{L}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1$
  - 角动量守恒定律：若 $\boldsymbol{M}_{合外力}=0$ ，则 $\boldsymbol{L}$=常矢量
- 刚体的平面平行运动
  - 处理方法：视作“基点的平动 + 绕基点的转动”。
    若以质心为基点，则质心的平动服从质心运动定律，绕质心的转动服从定轴转动定律；刚体的动能 = 质心的平动动能 + 绕质心的转动动能
  - 纯滚动的规律：$a_c=R\alpha$、$v_c=R\omega$、$\sum F_{外力}=ma_c$、$M_c=I_c\alpha$
- *刚体的进动

二、基本要求

1．理解描述刚体定轴转动的物理量（角位移、角速度、角加速度）及其矢量性，掌握刚体做匀变速定轴转动的规律，掌握角量与线量的关系。

2．理解转动惯量的概念，会根据转动惯量的定义及平行轴定理、垂直轴定理计算简单对称刚体对固定轴的转动惯量。

3．掌握刚体定轴转动的转动定律，能熟练利用转动定律处理刚体定轴转动问题。

4．掌握刚体定轴转动的角动量和冲量矩的概念，熟练掌握角动量定理和角动量守恒定律对单个定轴转动刚体或非刚体的应用，以及在“刚体+质点”组成的**共轴系统**中的应用。

5．掌握刚体定轴转动的转动动能和力矩做功的概念，熟练掌握动能定理、功能原理和机械能守恒定律对单个定轴转动的刚体的应用，以及在“刚体+质点”系中的应用。

6．理解刚体的平面平行运动，会综合利用质心运动定律、转动定律、功能原理等相关规律处理刚体的平面平形运动问题。

7. 了解刚体的进动。

三、主要内容

（一）刚体定轴转动运动学

1．刚体及其运动分类

在外力作用下，形状和大小均不变的物体称为刚体，它是力学中的一个理想模型。刚体的运动可分为平动、定轴转动、平面平行运动、定点转动和一般运动。

2．描述刚体定轴转动运动学的物理量

描述刚体定轴转动运动学的物理量有 4 个，分别是：角位置θ、角位移$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$、角速度$\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$和角加速度$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$。

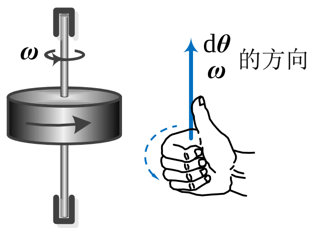


图 4.1 $\mathrm{d}\theta$、ω的方向

$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$、$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\alpha}$均为矢量，其中$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$、$\boldsymbol{\omega}$的方向均由右手螺旋法则确定，如图 4.1 所示。在定轴转动中，由于$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$、$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\alpha}$的方向永远沿转轴方向，所以在实际应用中，先规定转轴的正方向，然后用相应的代数量$\mathrm{d}\theta$、ω、α来表示这些矢量，矢量的方向用正负号表示。当$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$、$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\alpha}$的实际方向与转轴正方向相同时，取正值，否

则取负值。

3、匀变速定轴转动的规律

$$\omega=\omega_0+\alpha t\ ,\ \theta-\theta_0=+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2\ ,\ \omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0)$$

4、角量与线量的关系

当刚体做定轴转动时，刚体上的任意一点都绕轴做圆周运动，若该点到转轴的距离为 r，则

$$v=r\omega\ ,\ a_n=r\omega^2\ ,\ a_\tau=r\alpha$$

（二）刚体的定轴转动定律

1、力对转轴的力矩——刚体在定轴转动中，可以使刚体的转动状态发生变化（或有变化趋势）的力矩，其定义为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\perp$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是转轴到力的作用点的矢径，$\boldsymbol{F}_\perp$ 是作用力 $\boldsymbol{F}$ 在垂直与刚体转轴方向上的分力，力矩的大小为

$$M=rF_\perp\sin\theta=F_\perp d$$

力矩的方向一定沿转轴方向。

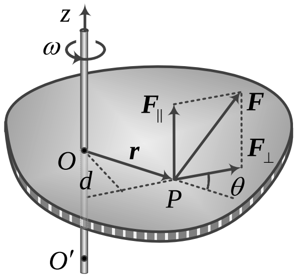


图 4.2 对转轴的力矩

2、转动惯量——描述刚体绕固定轴转动时转动惯性大小的物理量。对于分离质点组成的刚体，其计算式为

$$I=\sum_i r_i^2\Delta m_i$$

对于质量连续分布的刚体，计算式为

$$I=\int_m r^2\mathrm{d}m=\int_V r^2\rho\mathrm{d}V$$

影响转动惯量大小的 3 个因素：刚体的总质量、质量分布、转轴的位置及取向。

两个常用定理：平行轴定理（$I=I_c+md^2$）和垂直轴定理（$I_z=I_x+I_y$）。注意：垂直轴定理只适用于平行于 xy 平面的薄板状刚体）

3、转动定律——刚体做定轴转动时获得的角加速度大小与刚体所受的合外力矩的大小成正比，与刚体转动惯量的大小成反比，方向与合外力矩的方向相同，即

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{M}{I} \quad 或 \quad M=I\alpha$$

（三）角动量定理、角动量守恒定律

1、刚体定轴转动的角动量 $\boldsymbol{L}$——刚体上所有质元绕转轴做圆周运动时对转轴的角动量的矢量和，即

$$\boldsymbol{L}=\sum_i r_i^2 \Delta m_i \cdot \boldsymbol{\omega}=I\boldsymbol{\omega}$$

其大小为 $L=I\omega$，方向与角速度的方向相同。

2、角动量定理——作用于刚体上的合外力矩的冲量矩等于刚体的角动量的增量，即

微分形式：$\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{L}$（或 $\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$） 积分形式：$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\int_{L_1}^{L_2}\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1$

3、角动量守恒定律

若：$\boldsymbol{M}=0$，则：$\boldsymbol{L}=$ 恒矢量

角动量定理和角动量守恒定律不仅适用于单个质点、单个刚体，对于非刚体、质点系、以及“刚体+质点”组成的**共轴系统**都是适用的。

角动量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律是自然界的三大基本守恒定律，不仅适用于宏观领域，在牛顿运动定律不成立的微观领域也适用。

（四）力矩做功、刚体定轴转动的动能定理、功能原理

1、力矩的功

元功：$\mathrm{d}A=\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 总功：$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$

注意：力矩对定轴转动刚体做的功在数值上恰好等于该力矩对应的力对刚体做的功，在实际问题中注意不要重复计算。

2、刚体做定轴转动的动能定理——作用于定轴转动刚体上的合外力矩对刚体做的功，等于刚体转动动能的增量，即

$$A_{合外力矩}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\boldsymbol{M}_{合外力}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2$$

3、功能原理——对于由多个质点和刚体组成的系统，作用于系统上所有外力（矩）和非保守内力（矩）做的总功等于系统机械能的增量，即

$$A_{外力（矩）}+A_{非保守内力（矩）}=\left(E_k+E_p\right)-\left(E_{k0}+E_{p0}\right)$$

式中的动能 E_k 是系统内各质点的平动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 和定轴转动刚体的转动动能 $\frac{1}{2}I\omega^2$ 的总和，刚体的重力势能可由其质心的位置来确定。

在一个过程中，如果所有外力（矩）和非保守内力（矩）均不做功，或做的总功为零，则系统的机械能守恒，即

$$若：\ A_{外力（矩）} + A_{非保守内力（矩）} = 0，\ 则：\ E_k + E_p = 恒量$$

（五）刚体的平面平行运动

处理方法：将刚体的平面平行运动看成是刚体上任一参考点（称为基点）的平动 ＋ 刚体绕基点的转动。

特点：基点可任意选取，基点的平动与基点的选择有关，但是刚体绕基点的转动与基点的选择无关。

如果以刚体的质心为基点，则质心的平动满足质心运动定律，即

$$F_{合外力} = ma_{\mathrm{C}}$$

刚体绕质心的转动满足转动定律，即

$$M_{合外力矩} = I_{\mathrm{C}}\alpha$$

刚体的总动能为

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{C}}\omega^2$$

当刚体做纯滚动时，还有： $a_{\mathrm{C}} = R\alpha$ ， $\omega = Rv_{\mathrm{C}}$

（六）刚体的进动

具有轴对称分布的回转体（陀螺）在绕自身轴转动时，在重力矩的作用下，转轴 绕竖直轴旋转的现象称为进动。进动角速度为

$$\omega_p = \frac{M}{I\omega\sin\theta}$$

四、典型例题解法指导

本章习题的主要类型有：刚体定轴转动的运动学问题、角量与线量的关系问题，转动惯量的计算、转动定律的应用、角动量定理和角动量守恒定律的应用、动能定理、功能原理、机械能守恒定律的应用、角动量守恒和机械能守恒的综合应用，还有刚体的平面平行

运动、进动等。相对来说，本章习题灵活多变、综合性强，有一定难度。

表 4.1　质点运动与刚体定轴转动的对比

质点的（直线）运动		刚体的定轴转动	
位置矢量	$\boldsymbol{r}$	角位置	θ
位移	$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ ，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	角位移	$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ ，$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$
速度	$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ （$v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$）	角速度	$\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ （$a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$）	角加速度	$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t^2}$
质量	m	转动惯量	$I=\sum r_i^2\Delta m_i$ ，$I=\int r^2\mathrm{d}m$
力	$\boldsymbol{F}$	力矩	$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，$M=rF\sin\theta$
牛顿运动定律	$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$	定轴转动定理	$\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\alpha}$
（平动）动能	$E_k=\dfrac{1}{2}mv^2$	转动动能	$E_k=\dfrac{1}{2}I\omega^2$
力的功	$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ，$A=\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	力矩的功	$\mathrm{d}A=\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$，$A=\int\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$
动能定理	$A=E_k-E_{k0}=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$	动能定理	$A=E_k-E_{k0}=\dfrac{1}{2}I\omega^2-\dfrac{1}{2}I\omega_0^2$
系统的功能原理	$A_{\left\{\substack{\text{外力}\\\text{外力矩}}\right.}+A_{\left\{\substack{\text{非保守内力}\\\text{非保守内力矩}}\right.}=\left(E_k+E_p\right)-\left(E_{k0}+E_{p0}\right)$		
动量	$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$	角动量	$\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}$
质点的角动量	$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}$		
冲量	$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}t$	冲量矩	$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}t$
动量定理	$\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{P}$	角动量定理	$\boldsymbol{M}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{L}$
角动量守恒定律	若 $\boldsymbol{M}_{合外力}=0$ ，则 $\boldsymbol{L}$=常矢量 注：角动量定理、角动量守恒定律对单个质点、单个刚体或非刚体、或“刚体+质点”组成的共轴系统均成立		

例 4.1　如图 4.3 所示，半径 $r_1=0.30\mathrm{m}$ 的 A 轮通过皮带被半径 $r_2=0.75\mathrm{m}$ 的 B 轮带动，B 轮以匀角加速度 $\pi\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ 从静止开始做加速转动，轮与皮带之间无相对滑动。试求：当 A 轮转速达到 $3000\ \mathrm{rev}\cdot\mathrm{min}^{-1}$ 时所需的时间。

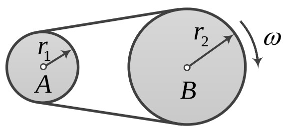


图 4.3　例 4.1 图

分析：轮与皮带之间没有相对滑动，表明两轮边缘上的线速度和切向加速度均相同，

由此可求得两轮角加速度大小之间的关系。

解： 设 A、B 两轮的角加速度分别为 α_A 和 α_B，由于轮与皮带之间没有相对滑动，两轮边缘上任意一点的线速度和切向加速度均相同，即

$$a_\tau = \alpha_A r_1 = \alpha_B r_2$$

由此得

$$\alpha_A = \alpha_B r_2 / r_1$$

再由匀变速定轴转动的规律：$\omega = \omega_0 + \alpha t$，可得 A 轮的角速度由 0 达到 $\omega_A = 3000$ $\mathrm{rev \cdot min^{-1}}$ 所需时间为

$$t = \frac{\omega_A - \omega_{A0}}{\alpha_A} = \frac{\omega_A}{\alpha_B r_2 / r_1} = \frac{(3000 \times 2\pi/60) \times 0.30}{\pi \times 0.75} = 40(\mathrm{s})$$

例 4.2 如图 4.4 所示，一根长为 L，质量为 m 的细棒，可绕通过其上端、且与纸面垂直的水平转轴 O 在竖直平面内转动。棒的下端与一个半径为 R、质量也为 m 的匀质圆盘固定连接，连接点在圆盘的圆心 O' 处，圆盘平面与转轴垂直，试求整个系统对转轴 O 的转动惯量。

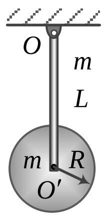


图 4.4 例 4.2 图

分析： 整个系统对 O 轴的转动惯量等于细棒的转动惯量和圆盘的转动惯量之和，圆盘对 O 轴的转动惯量可以用平行轴定理求出。

解： 细棒对 O 轴的转动惯量为：$I_{棒} = \frac{1}{3}mL^2$。圆盘对通过其圆心 O' 并与盘面垂直的轴的转动惯量为：$I'_{圆盘} = \frac{1}{2}mR^2$。根据平行轴定理，圆盘对 O 轴的转动惯量为

$$I_{圆盘} = I'_{圆盘} + mL^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mL^2$$

所以整个系统对 O 轴的转动惯量为

$$I = I_{棒} + I_{圆盘} = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}mR^2 + mL^2 = \frac{4}{3}mL^2 + \frac{1}{2}mR^2$$

例 4.3 一个质量 $m_2 = 1.0\mathrm{kg}$ 的物体放在倾角 $\theta = 30°$ 的斜面上，斜面顶端装一定滑轮。跨过滑轮的轻绳一端系于该物体上，绳子与斜面平行，另一端悬挂一个质量 $m_1 = 2.0\mathrm{kg}$ 的重物。已知滑轮是一个匀质圆盘，其质量

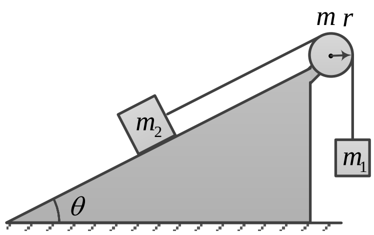


图 4.5 例 4.3 图

$m = 0.50\text{kg}$，半径 $r = 0.10\text{m}$，物体与斜面的滑动摩擦系数 $\mu = 0.10$。试求：

（1）物体的加速度；

（2）滑轮两边绳中的张力。

分析：本题属于连接体的动力学问题，系统内既有做平动的物体，又有做定轴转动的刚体。为此需要用隔离体法对各个物体做受力分析，然后分别用牛顿运动定律和转动定律列方程求解即可。需注意的是：由于滑轮有转动惯量，所以跨过滑轮的绳子其两侧的张力是不同的。

解：（1）对斜面上的物体、滑轮、重物分别用隔离体法进行受力分析，如图 4.6 所示，其中滑轮两边绳中的张力分别为 F_{T1} 和 F_{T2}。设两物体的加速度为 a、滑轮的角加速度为 α，由牛顿运动定律和转动定律，有

$$m_1 g - F_{T1} = m_1 a \quad ①$$

$$F_{T2} - F_f - m_2 g \sin\theta = m_2 a \quad ②$$

$$F_{T1} r - F_{T2} r = I\alpha \quad ③$$

又

$$F_f = \mu F_{N2} = \mu m_2 g \cos\theta \quad ④$$

$$a = r\alpha \quad ⑤$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \quad ⑥$$

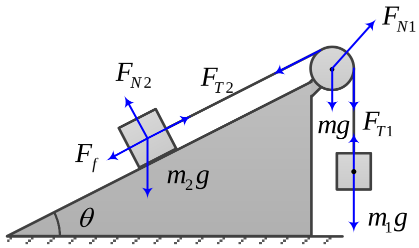


图 4.6 例 4.3 解图

解上述方程组可得物体的加速度为

$$a = \frac{2m_1 - 2m_2\left(\mu\cos\theta + \sin\theta\right)}{2\left(m_1 + m_2\right) + m} g$$

$$= \frac{2\times 2.0 - 2\times 1.0\left(0.10\cos 30° + \sin 30°\right)}{2\times\left(2.0 + 1.0\right) + 0.50} \times 9.8 \approx 4.3\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

再由①和③式，可得两侧绳中的拉力为

$$F_{T1} = m_1 g - m_1 a \approx 2.0\times\left(9.8 - 4.3\right) = 11\ (\text{N})$$

$$F_{T2} = F_{T1} - I\alpha/r = F_{T1} - \frac{1}{2} m r^2 \cdot a/r^2 \approx 11 - \frac{1}{2}\times 0.50\times 4.3 = 9.9\ (\text{N})$$

例 4.4 质量为 m、长为 L 的匀质细棒，可绕通过棒的一端、并与棒垂直的水平固定轴

O 无摩擦地自由转动，在棒的另一端固定一个质量为 $m/2$ 的小球（可视为质点）。开始时，棒直立于转轴上方。由于受到某种扰动，棒从静止开始倒下，如图 4.7 所示。试分别用转动定律、动能定律和机械能守恒定律，求棒在倒下的过程中角速度 ω 和 θ 的函数关系。

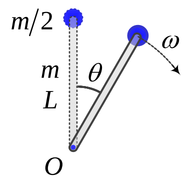


图 4.7 例 4.4 图

解：棒和小球作为一个整体，对转轴的转动惯量为

$$I = I_{棒} + I_{球} = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{m}{2}L^2 = \frac{5}{6}mL^2$$

方法一：用转动定律求解

当棒与竖直线的夹角为 θ 时，棒与小球受到的重力对转轴的力矩为

$$M = mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{m}{2}gL\sin\theta = mgL\sin\theta$$

由转动定律 $M = I\alpha = I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{I} = \frac{6g}{5L}\sin\theta$$

做变量代换：$\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$，由此得

$$\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \frac{6g}{5L}\sin\theta$$

将上式分离变量并取定积分，有

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta}\frac{6g}{5L}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

积分得棒的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5L}(1-\cos\theta)}$$

方法二：用动能定理求解

棒从竖直位置倒下，转过角度 θ 的过程中，重力矩做的功为

$$A = \int_0^{\theta}\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \int_0^{\theta}M\mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta}mgL\sin\theta\mathrm{d}\theta = mgL(1-\cos\theta)$$

由定轴转动刚体的动能定理

$$A = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

可得棒的角速度为

$$\omega=\sqrt{\frac{2A}{I}}=\sqrt{\frac{12g}{5L}(1-\cos\theta)}$$

方法三：用机械能守恒定律求解

棒在转动过程中只有重力（或重力矩）做功，所以若以棒、球和地球作为一个系统，则系统的机械能守恒。取转轴所在位置为重力势能的零势能点，则

$$\left(\frac{1}{2}mgL+\frac{m}{2}gL\right)=\frac{1}{2}I\omega^2+\left(\frac{1}{2}mgL\cos\theta+\frac{m}{2}gL\cos\theta\right)$$

由此可得

$$\omega=\sqrt{\frac{12g}{5L}(1-\cos\theta)}$$

比较本题的 3 种求解方法可以看出，用功能关系求解比用转动定律更加简单方便。

例 4.5 质量为m_0、长为L的匀质细棒，可绕棒的上端并与棒垂直的水平固定轴O无摩擦地自由转动。开始时，棒静止于平衡位置。现有一个质量为m的小球沿水平方向从左边飞来，正好与棒的下端相碰。碰撞后，棒能向上摆过的最大角度为$\theta=60°$，如图 4.8 所示。设碰撞为完全弹性的，试求：碰撞前、后小球速度的大小v_0和v。

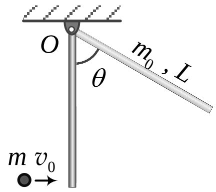


图 4.8 例 4.5 图

分析：本题的物理过程可分为两个：第一个是小球与棒的碰撞过程，第二个是碰撞后棒的上摆过程。

这里需要区分两类碰撞问题：一类是两个或多个质点在空间的自由碰撞，另一类是质点和定轴转动的刚体之间的碰撞。尽管都是碰撞，都有弹性碰撞和非弹性碰撞、正碰和斜碰之分，但两类碰撞过程中的守恒量不同。前者满足系统的动量守恒定律【这是因为在碰撞过程中系统内力远大于外力，外力的冲量可以忽略不计】；后者满足系统对转轴的角动量守恒，而系统的总动量不守恒【这是因为在碰撞过程中，转轴会对刚体产生一个很大的冲力（外力），但该冲力通过转轴，对转轴的力矩为零】。至于碰撞前后系统的总动能是否守恒，要看是否是完全弹性碰撞。

解：（1）设小球与棒碰撞后其速度大小为v，方向与v_0相同，棒获得的角速度为ω。在碰撞过程中，小球和棒组成的系统所受的外力对转轴O的力矩为零，故角动量守恒，即：

$$mv_0L=mvL+I\omega \qquad ①$$

又因碰撞是完全弹性的，碰撞前后总动能相等，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \quad ②$$

式中 $I=\frac{1}{3}m_0L^2$。碰撞后，棒在上摆过程中，只有重力做功，由动能定理，有

$$A=-m_0g\frac{L}{2}(1-\cos\theta)=0-\frac{1}{2}I\omega^2 \quad ③$$

联立求解①、②和③式，可得

$$v_0=\frac{3m+m_0}{6m}\omega L=\frac{3m+m_0}{6m}\sqrt{3gL(1-\cos\theta)}$$

$$v=\frac{3m-m_0}{6m}\omega L=\frac{3m-m_0}{6m}\sqrt{3gL(1-\cos\theta)}$$

当 $\theta=60°$ 时

$$v_0=\frac{3m+m_0}{6m}\sqrt{\frac{3}{2}gL}$$

$$v=\frac{3m-m_0}{6m}\sqrt{\frac{3}{2}gL}$$

例 4.6 质量为 m、长度为 l 的均匀细杆，可绕过其中心 O 并与杆垂直的光滑水平轴在竖直平面内自由转动。当细杆静止于水平位置时，有一只小猴子以速率 v_0 垂直落在距 O 点为 $l/4$ 处的细杆上，并背离 O 点向细杆的端点 A 爬行。设小猴子与细杆的质量均为 m。若使细杆以恒定的角速度转动，求小猴子在细杆上向 A 端爬行的速率。

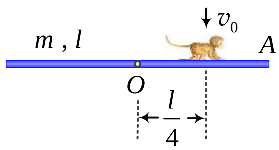


图 4.9 例 4.6 图

分析：本题涉及转动惯量的计算及刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律的应用。整个过程分为两个分过程：第一个是小猴子与杆的碰撞过程，在此过程中系统的角动量守恒；第二个是小猴子向 A 端的爬行过程，在此过程中小猴子重力对 O 点的力矩发生变化，同时系统的质量分布也在改变，导致转动惯量发生变化，因此不能简单第用转动定律来讨论，应该用系统的角动量定理来分析。

解：小猴子与细杆的碰撞可视为完全非弹性碰撞，碰撞前后系统的角动量守恒，即

$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega$$

整理可得

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

设在某一时刻t小猴子距O点的距离为r，细杆转过的角度为$\theta=\omega t$，猴子所受的重力对O点的力矩为

$$M=mgr\cos\theta=mgr\cos\omega t$$

系统对O轴的转动惯量为

$$I=\frac{1}{12}ml^2+mr^2$$

由角动量定理，并注意到角速度$\omega=\dfrac{12}{7}\dfrac{v_0}{l}$为常量，得

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

即

$$mgr\cos\omega t=\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{12}ml^2+mr^2\right)=2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

所以小猴子爬行的速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7gl}{24v_0}\cos\left(\frac{12v_0}{7l}t\right)$$

例 4.7 悠悠球是许多青少年和儿童喜爱的一种玩具，其中蕴含了许多物理原理。假设悠悠球的质量为 600g，绕其自身转轴的转动惯量为 $4.00\times10^{-5}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，细绳的质量可忽略不计、长度为 1.0m，绕绳的轴线半径为 2.5mm。忽略各类摩擦阻尼以及缠绕半径的变化，将悠悠球从静止开始释放，试求：（1）悠悠球在下降时质心的加速度以及绳中的拉力。（2）任一时刻悠悠球绕质心的转动能与质心的平动动能的比值。

分析：将绕好的悠悠球从静止开始释放时，悠悠球的运动就相当于绕线轴在绳索上的纯滚动。

解：（1）如图所示，悠悠球在下降时只受重力和绕线拉力的作用。由质心运动定律以及对质心的转动定律可得

$$mg - F_{\mathrm{T}} = ma_{\mathrm{C}}$$

$$F_{\mathrm{T}} r = I_{\mathrm{C}} \alpha$$

再由纯滚动条件，可得

$$a_{\mathrm{C}} = \alpha r$$

解此方程组，可得悠悠球下降的加速度为

$$a_{\mathrm{C}} = \frac{mg}{m + \left(I_{\mathrm{C}}/r^2\right)} = 0.091\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

绳中的拉力为

$$F_{\mathrm{T}} = mg - ma_{\mathrm{C}} = 5.8\ \mathrm{N}$$

（2）在任意时刻，悠悠球质心的平动速度以及绕质心转动的角速度分别为

$$v_{\mathrm{C}} = a_{\mathrm{C}} t \quad , \quad \omega = v_{\mathrm{C}}/R = a_{\mathrm{C}} t/R$$

所以悠悠球质心的平动能动与绕质心的转动动能之比为

$$E_{\mathrm{k转}}/E_{\mathrm{k平}} = \frac{1}{2} I\omega^2 \Big/ \frac{1}{2} m v_{\mathrm{C}}^2 = I\left(\frac{a_{\mathrm{C}} t}{R}\right)^2 \Big/ m\left(a_{\mathrm{C}} t\right)^2 = \frac{I}{mR^2} = \frac{4.00 \times 10^{-5}}{0.060 \times \left(2.5 \times 10^{-3}\right)^2} = 107$$

这个结果表明，悠悠球的动能主要是其绕质心的转动动能。

四、自我测试题

4.1　刚体绕固定轴做匀变速转动时，对刚体上离转轴为 r 的某个质元 Δm 来说，若其法向加速度和切向加速度分别用 a_n 和 a_τ 来表示，则下列说法正确的是（　　　）。

A．a_n 和 a_τ 的大小均随时间改变；　　B．a_n 和 a_τ 的大小均不随时间改变；

C．a_n 随时间改变，a_τ 不随时间改变；　　D．a_n 不随时间改变、a_τ 随时间改变。

4.1 答案： C

解： 根据角量与线量的关系 $a_n = r\omega^2$，$a_\tau = r\alpha$，对于匀变速转动，$\alpha =$ 恒量，且 $\omega = \omega_0 + \alpha t$。故选 C

4.2　一轻绳绕在有水平轴的定滑轮上，滑轮的转动惯量为 I，当绳的下端挂一个质量为 m 的重物时，滑轮的角加速度为 α。若将物体去掉，改为用大小等于物体重力的拉力

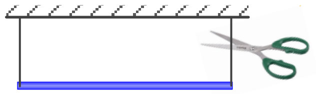
$F(=mg)$ 直接向下拉绳子，滑轮的角加速度α'将（　　　）。

A．不变；　　　　B. 变大；　　　　C. 变小；　　　　D. 变大变小无法判断

4.2 答案： B

解题提要： 因为重物加速下降时，重物对绳子的拉力小于重物的重力。

4.3　质量m、长为l的均匀系杆，两端用绳子水平悬挂起来，如图所示。现突然剪断其中一根绳。则在绳子断开的一瞬间，另一根绳中的张力为（　　　）。



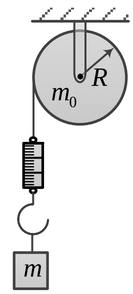
测试题 4.3 图

A．mg；　　B．$\frac{1}{2}mg$；　　C．$\frac{1}{4}mg$；　　D．$\frac{1}{8}mg$

4.3 答案： C

解： 在绳子断开的一瞬间，杆受到的重力对另一端的力矩为$M=\frac{1}{2}mgl$，由转动定律，杆获得的角加速度为$\alpha=\frac{M}{I}=\frac{3g}{2l}$。所以杆质心的切向加速度为$a_c=\alpha l/2$，方向向下。再由质心运动定律，可得：$mg-F_T=ma_c$，所以$F_T=mg-ma_c=\frac{1}{4}mg$

4.4　在质量为m_0、半径为R的定滑轮（可视为匀质薄圆盘）上绕有细绳，细绳的一端拴有一弹簧称，弹簧秤自身的质量可忽略不计，弹簧秤下端挂一个质量为m的物体，如图所示。若滑轮与绳没有相对滑动，轴上的摩擦可忽略不计，那么在物体下降过程中弹簧秤的示数为（　　　）。



测试题 4.4 图

A．$(m+m_0)g$；　　　　B．mg

C．$\frac{mm_0g}{(m_0+m)}$；　　　　D．$\frac{mm_0g}{2m+m_0}$

4.4 答案： D

解题提要： 设绳中的张力为F_T，由牛顿运动定律和转动定律，可得

$$mg-F_T=ma\quad ,\quad F_TR=I\alpha=\frac{1}{2}m_0R^2\alpha\quad ,\ 且\quad a=\alpha R$$

联立上述 3 个方程可得：　$F_T=\frac{mm_0g}{2m+m_0}$

4.5　一个水平圆盘可绕通过其中心、并与盘面垂直的固定竖直轴转动，盘上站着一个人。把人和圆盘看作一个系统，当人在盘上随意走动时，若忽略轴上的摩擦，则此系统（　　　）。

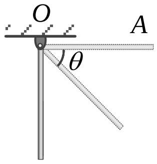
A．动量守恒；　　　　　　　　B．机械能守恒；

C．对轴的角动量守恒；　　　　D．动量、机械能和角动量都守恒。

4.5 答案： C

解： 人在圆盘上随意走动时，人与圆盘之间的摩擦力做功，所以机械能不守恒，但系统受到的所有外力对转轴的力矩为零，故角动量守恒

4.6　如图所示，均匀细棒 *OA* 可绕通过 *O* 点的光滑、固定、水平轴在竖直平面内转动。现将棒从水平位置，由静止开始释放，在棒摆动到竖直位置的过程中，下列说法正确的是（　　　）。



测试题 4.6 图

A．角速度从小到大，角加速度从大到小；

B．角速度从小到大，角加速度从小到大；

C．角速度从大到小，角加速度从大到小；

D．角速度从大到小，角加速度从小到大。

4.6 答案： A

解： 当棒与转过角度 θ（即与水平面的夹角为 θ）时，由转动定律

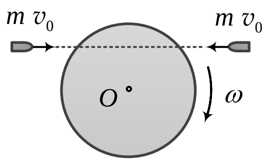
$$mg\frac{l}{2}\cos\theta = I\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

由此得角加速度为：　$$\alpha = \frac{3g}{2l}\cos\theta$$

由定轴转动的动能定理：　$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

所以角速度为：　$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\sin\theta}$$

4.7　一个正在绕通过其盘心、并与盘面垂直的固定水平轴 *O* 做匀速转动的转盘，有两颗质量相同、速率相同的子弹沿同一水平直线从相反方向射入并留在盘中，如图所示。则子弹射入后的瞬间，转盘的角速度将（　　　）。



测试题 4.7 图

A．增大　　B．减小　　C．不变　　D．无法确定

4.7 答案： B

解题提要： 将两颗子弹和圆盘作为一个系统，在子弹击中圆盘的前后瞬间，系统受到的外力对 O 轴的力矩为零，故系统的角动量守恒。又两颗子弹对 O 轴的角动量之和为零，故系统的总角动量等于子弹射入前圆盘自身的角动量。由于子弹射入后的瞬间，系统的角动量（$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{I\omega}$）不变，但转动惯量增大，故角速度 ω 减小。

4.8　一根质量 m，常为 l 的棒，可绕通过其质心的光滑竖直轴在水平面内转动，其转动惯量为 $\frac{1}{12}ml^2$。现有一个质量 $m'=\frac{1}{10}m$ 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向以速度 v_0 射入棒的一端，并以 $\frac{1}{6}v_0$ 的速度射出。则棒获得的角速度为（　　　）。

A. v_0/l　　　B. $v_0/2l$　　　C. $2v_0/l$　　　D. $v_0/4l$

4.8 答案： B

解题提要： 在子弹与杆的碰撞过程种，由角动量守恒，得

$$\frac{1}{10}mv_0\frac{l}{2}=\frac{1}{10}m\frac{v_0}{6}\frac{l}{2}+\frac{1}{12}ml^2\omega$$

所以：$\omega=v_0/2l$。

4.9　一人双手各持一个哑铃，并向两侧平举，坐在转椅上。先让人和转椅以一定的角速度转动。然后将双臂收拢于胸前。如果在此过程中，转轴上的摩擦阻力矩可以忽略不计，则下列叙述正确的是（　　　）

（1）系统的转动惯量减小；　　　（2）系统的角动量守恒，角速度增大；

（3）系统的角动量守恒，动能减小；　　（4）系统的机械能增大。

A.（1）（2）（3）　　B.（2）（3）（4）　　C.（3）（4）（1）　　D.（1）（2）（4）

4.9 答案： D

解题提要： 在双手收拢过程中，人的内力做正功，系统的动能增大，故（3）错。

4.10　半径 $R=0.2\ \mathrm{m}$ 的飞轮，其初始角速度 $\omega_0=2400\ \mathrm{rev\cdot min^{-1}}$，经过 20s 后其转速均匀地减为 $\omega=600\ \mathrm{rev\cdot min^{-1}}$，则飞轮的角加速度为 $\alpha=$_______ $\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$；轮边缘上任意一点的切向加速 $a_\tau=$_________ $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

4.10 答案： $-3\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$，$-0.6\pi\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

解： 由匀变速转动的规律 $\omega=\omega_0+\alpha t$，得角加速度为

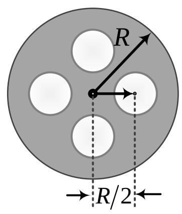
$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{(600-2400)\times 2\pi/60}{20}=-3\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

再由角量与线量的关系得：$a_\tau=\alpha R=-0.6\pi\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

4.11　转动惯量是描述刚体________________的物理量，影响刚体转动惯量大小的三个因素有_______、________、_______。

4.11 答案：转动时惯性大小；总质量、质量分布、转轴的位置和方位。

4.12　如图所示，中空圆柱体的质量为m_0，半径为R，4 个圆柱形孔洞的半径为$R/4$，中心轴与每一个孔洞轴相距均为$R/2$。则中空圆柱体绕中心轴的转动惯量为____________。



测试题 4.12 图

4.12 答案：$\frac{55}{96}m_0R^2$

解：中空圆柱体单位横截面上具有的质量（即圆柱体横截面上的质量面密度）为

$$\sigma=\frac{m_0}{\pi R^2-4\cdot\pi(R/4)^2}=\frac{4m_0}{3\pi R^2}$$

显然，对于一个质量面密度为σ、半径为R的实心圆柱体，它对中心轴的转动惯量为

$$I_{实}=\frac{1}{2}m_{实}R^2=\frac{1}{2}(\sigma\cdot\pi R^2)R^2=\frac{2}{3}m_0R^2$$

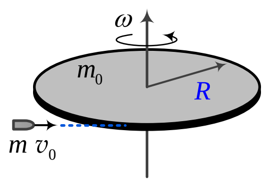
利用平行轴定理，挖出的每个孔洞对应的实心圆柱体对中心轴的转动惯量为

$$I_{孔}=\frac{1}{2}m_{孔}\left(\frac{R}{4}\right)^2+m_{孔}\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left[\sigma\cdot\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\left(\frac{R}{4}\right)^2+\left[\sigma\cdot\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{3}{128}m_0R^2$$

由$I_{实}=I_{中空}+4\cdot I_{孔}$，得中空圆柱体的转动惯量为

$$I_{中空}=I_{实}-4\cdot I_{孔}=\frac{2}{3}m_0R^2-4\times\frac{3}{128}m_0R^2=\frac{55}{96}m_0R^2$$

4.13　如图所示，一个质量为m_0，半径为R的匀质圆盘可绕通过其盘心并与盘面垂直的竖直轴转动。一颗质量为m，速度为v的子弹，沿圆盘的切线方向射入并嵌在圆盘的边缘。则子弹射入圆盘后，圆盘获得的角速度为_________；在射入过程中，圆盘和子弹系统的动能增量_______零（此空填“小于”、“大于”



测试题 4.13 图

或“等于”)。

4.13 答案： $\dfrac{2mv}{m_0R+2mR}$；小于

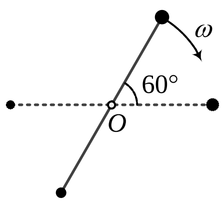
解： 将圆盘和子弹作为一个系统，在子弹射入过程中系统角动量守恒，即

$$mvR=\left(I+mR^2\right)\omega=\left(\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2\right)\omega$$

所以：
$$\omega=\frac{2mv}{m_0R+2mR}$$

由于子弹射入圆盘的过程属于完全非弹性碰撞，机械能减小，故系统的动能增量小于零。

4.14 一根长为 L 的轻质细杆，两端分别固定质量为 m 和 $2m$ 的小球，此系统在竖直平面内可绕通过中心点 O 且与杆垂直的水平光滑轴转动。开始时杆与水平面的夹角为 $60°$，质量大的在上，小的在下，整体处于静止状态。无初速地释放后，系统开始绕 O 轴转动。则系统绕 O 轴的转动惯量 $I=$_________；刚释放时，杆受到的合外力矩 $M=$_________；角加速度 $\alpha=$_________；转到水平位置时，杆的角速度 $\omega=$__________。



测试题 4.14 图

4.14 答案： $\dfrac{3}{4}mL^2$；$\dfrac{1}{4}mgL$，$\dfrac{g}{3L}$；$\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3L}g}$

解题提要： $I=m\left(\dfrac{L}{2}\right)^2+2m\left(\dfrac{L}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}mL^2$；

$$M=2mg\frac{L}{2}\cos 60°-mg\frac{L}{2}\cos 60°=\frac{1}{4}mgL，\quad \alpha=\frac{M}{I}=\frac{g}{3L}$$

转动过程中，只有重力（矩）做功，由定轴转动的动能定理，即

$$2mg\frac{L}{2}\sin 60°-mg\frac{L}{2}\sin 60°=\frac{1}{2}I\omega^2$$

整理可得

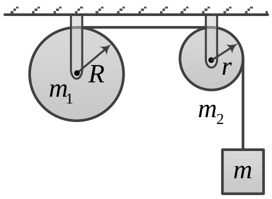
$$\omega=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3L}g}$$

4.15 质量 $m_1=24\text{kg}$、半径 $R=20\text{cm}$ 的匀质圆盘，可绕通过其盘心并与盘面垂直的固定水平轴转动。一根轻绳缠绕于圆盘上，另一端跨过质量 $m_2=5.0\text{kg}$，半径 $r=10\text{cm}$ 的定

滑轮后悬挂一个质量 $m=10\text{kg}$ 的物体，如图所示。假设定滑轮也可视为匀质圆盘，绳与圆盘和滑轮之间均无相对滑动，圆盘和定滑轮轴上的摩擦阻力矩均可忽略不计。试求：

（1）物体的加速度和各段绳中的张力；

（2）当重物由静止开始下降 $h=2.0\text{m}$ 时，圆盘和滑轮的角速度。

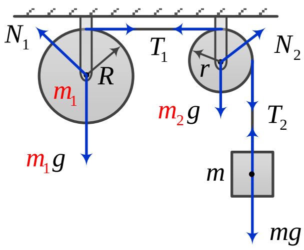


测试题 4.15 图

4.15 答案： $a=4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ，$T_1=48\text{N}$ ，$T_2=58\text{N}$

解：（1）对于重物、圆盘、定滑轮分别用隔离体法进行受力分析，定滑轮两边绳中的张力分别为 T_1 和 T_2，如图所示。设重物的加速度为 a、圆盘和定滑轮的角加速度分别为 α_1、α_2，因绳与圆盘和定滑轮之间无相对滑动，有

$$a=\alpha_1 R=\alpha_2 r$$



测试题 4.15 解图

由牛顿运动定律和转动定律，可得

$$mg-T_2=ma$$

$$T_2 r-T_1 r=I_2\alpha_2$$

$$T_1 R=I_1\alpha_1$$

式中 $I_1=\dfrac{1}{2}m_1R^2$，$I_2=\dfrac{1}{2}m_2r^2$，由此可解得

$$a=\frac{2mg}{2m+m_1+m_2}\text{，}\quad T_1=\frac{mm_1g}{2m+m_1+m_2}\text{，}\quad T_2=\frac{m(m_1+m_2)g}{2m+m_1+m_2}$$

将 $m_1=24\text{kg}$、$R=30\text{cm}$、$m_2=5.0\text{kg}$、$r=10\text{cm}$、$m=10\text{kg}$ 代入可得

$$a=4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\text{，}\quad T_1=48\text{N}\text{，}\quad T_2=58\text{N}$$

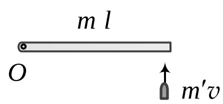
（2）由（1）可知，重物匀加速下降，所以当物体从静止开始下降 2m 时的速度为

$$v=\sqrt{2ah}=4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

由 $v=\omega_1R=\omega_2r$，可得圆盘和滑轮的角速度分别为

$$\omega_1=v/R=20\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{，}\quad \omega_2=v/r=40\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

4.16 一根放在水平桌面上的匀质棒，可绕通过其一端的竖直固定轴 O 转动。棒的质量 $m=1.5\text{kg}$，长 $l=1.0\text{m}$，对轴的转动惯量为 $I=\dfrac{1}{3}ml^2$。开始时，棒是静止的。今有一水平运动的子弹垂直地射



测试题 4.16 图

入棒的另一端，并留在棒中，如图所示。若子弹的质量$m'=0.020\text{kg}$，速率为$v=400\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，棒转动时受到恒定阻力矩的作用，其大小为$M_r=4.0\text{N}\cdot\text{m}$，试求：

（1）棒开始和子弹一起转动时的角速度ω；

（2）棒能转过的最大的角度。

4.16 答案： $15.4\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$；$15.4\text{rad}$

4.16 解：（1）子弹射入棒的前后瞬间，子弹和棒组成的系统角动量守恒，即

$$m'vl=\left(I+m'l^2\right)\omega=\left(\frac{1}{3}ml^2+m'l^2\right)\omega$$

所以一起转动的角速度为

$$\omega=\frac{3m'vl}{ml^2+3m'l^2}=15.4\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

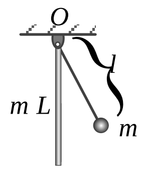
（2）由刚体定轴转动的动能定理，有

$$-M_r\cdot\Delta\theta=\Delta E_k=0-\frac{1}{2}\left(I+m'l^2\right)\omega^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2+m'l^2\right)\omega^2$$

所以转过的最大角度为

$$\Delta\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2+m'l^2\right)\omega^2\Big/M_r=15.4（\text{rad}）$$

4.17 一根长为L、质量为m的均匀细棒，可绕通过其端点的固定、光滑、水平轴O在竖直平面内转动。在O点上还系有一根长为l（$l<L$）的轻绳，绳的另一端悬一质量也为m的小球。当小球悬线偏离铅直方向某一角度时，由静止释放，小球与静止的细棒发生完全弹性碰撞，如图所示。试求：当绳的长度l为多少时，小球与棒碰撞后小球刚好静止不动。不计空气阻力。



测试题 4.17 图

4.17 答案： $\dfrac{\sqrt{3}}{3}L$

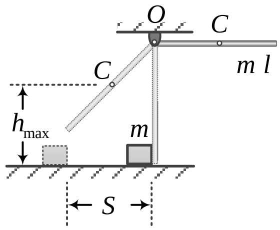
4.17 解：假设小球与细棒碰撞前的速度为v。由于是完全弹性碰撞，所以碰撞前后小球与棒组成的系统同时满足角动量守恒和动能守恒，即

$$mvl=I\omega$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

式中 $I=\dfrac{1}{3}mL^2$，由此解得：　　　　$l=\dfrac{\sqrt{3}}{3}L$

4.18 如图所示，一根均匀细棒，长为l，质量为m，可绕通过棒端、且与棒垂直的光滑水平固定轴O在竖直平面内转动。现将棒拉到水平位置后从静止开始释放，当它转到竖直位置时，与放在地面上的一个静止的、质量也为m的小滑块碰撞，碰撞时间极短。小滑块与地面间的摩擦系数为μ，碰撞后滑块移动距离S后停止。试求：碰撞后棒的质心C离地面的最大高度$h_{\max}$。



测试题 4.18 图

4.18 答案： $l+3\mu s-\sqrt{6\mu sl}$

解： 设棒摆到竖直位置时的角速度为ω_0。棒在下摆过程中，只有棒的重力（矩）做功，所以由刚体定轴转动的动能定理，即

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}I\omega_0^2$$

式中 $I=\dfrac{1}{3}ml^2$，可得

$$\omega_0=\sqrt{\frac{3g}{l}} \qquad ①$$

在碰撞过程中，棒和滑块组成的系统对O点的角动量守恒，即

$$I\omega_0=I\omega+mvl \qquad ②$$

又滑块在运动过程中，由质点的动能定理，即：$\mu mgs=\dfrac{1}{2}mv^2$，可得

$$v=\sqrt{2\mu gs} \qquad ③$$

在将①③代入②，可得碰撞后的瞬间，棒的角速度为

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}-\frac{3\sqrt{2\mu gs}}{l}$$

碰撞后，棒在上摆过程中，和下摆过程一样，只有棒的重力（矩）做功。设棒的质心上升的最大高度为Δh，由动能定理可知

$$-mg\Delta h=0-\frac{1}{2}I\omega^2$$

由此可得

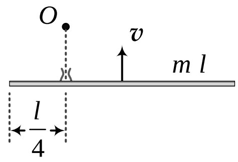
$$\Delta h = l/2 + 3\mu s - \sqrt{6\mu s l}$$

所以棒的质心离地面的最大高度为

$$h_{\max} = \frac{l}{2} + \Delta h = l + 3\mu s - \sqrt{6\mu s l}$$

本章结束！

4.17 （本题不要）如图所示，在光滑的水平桌面上有一长为l，质量为m的均匀细棒，以与棒长方向相垂直的速度v向前平动时，与一个固定在桌面上的钉子O相碰，随后棒绕O点转动。试求：



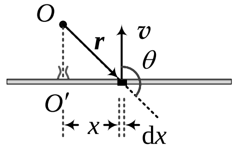
测试题 4.17 图

（1）碰撞后，细棒绕点O转动的角速度ω；

（2）在碰撞过程中，杆损失的动能。

4.17 答案： $\dfrac{12v}{7l}$；$\dfrac{2}{7}mv^2$

4.17 解：（1） 先求细棒平动时对O点的角动量。在棒上距离O'点为x处取一个长度为$\mathrm{d}x$的棒元，其质量为$\mathrm{d}m=\dfrac{m}{l}\mathrm{d}x$，它对$O$点的角动量的大小为



测试题 4.17 解图

$$\mathrm{d}L=\left|\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}m\boldsymbol{v}\right|=r\mathrm{d}mv\sin\theta=xv\mathrm{d}m=xv\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

方向垂直桌面竖直向上。所以整个棒对O点的角动量的大小为

$$L=\int\mathrm{d}L=\int_{l/4}^{3l/4}xv\frac{m}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}mvl$$

由平行轴定理，棒绕钉子转动时的转动惯量为

$$I=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2=\frac{7}{48}ml^2$$

与钉子相碰时，由角动量守恒$L=I\omega$，得

$$\omega=\frac{L}{I}=\frac{1}{4}mvl\Big/\frac{7}{48}ml^2=\frac{12v}{7l}$$

（2）碰撞前，杆的动能就是杆的平动动能，碰撞后杆绕O点做定轴转动，所以碰撞过程中，杆损失的动能为

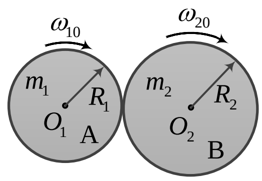
$$-\Delta E_k=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{2}{7}mv^2$$

4.20 （本题不要）如图所示，半径分别为R_1和R_2，质量分别为m_1和m_2的两个实心圆柱形轮盘 A 和 B，可绕各自的中心轴转动，转动惯量分别为$I_1=\dfrac{1}{2}m_1R_1^2$和$I_2=\dfrac{1}{2}m_2R_2^2$，两轮的转轴均光滑且互相平行，两轮的转动方向相同，角速度分别为ω_{10}和ω_{20}。现移近两

轴使两轮保持接触，由于轮面间的摩擦，两轮的转速发生变化。试求：

（1）转速稳定后，两轮的角速度；

（2）在整个过程中两轮各自受到的冲量矩。



测试题 4.20 图

4.20 答案： $\dfrac{m_2R_2\omega_{20}-m_1R_1\omega_{10}}{(m_2+m_1)R_1}$，$\dfrac{m_2R_2\omega_{20}-m_1R_1\omega_{10}}{(m_2+m_1)R_2}$；

$\dfrac{m_1m_2R_1(R_1\omega_{10}+R_2\omega_{20})}{2(m_2+m_1)}$，$-\dfrac{m_1m_2R_2(R_1\omega_{10}+R_2\omega_{20})}{2(m_2+m_1)}$

4.20 解： 在本题中，由于两轮绕各自的转轴转动，所以不能将两轮作为一个系统，用系统的角动量定理来分析。只能通过受力分析，对两轮分别用转动定律或角动量定理来讨论。

设两轮接触后、稳定前两轮之间摩擦力的大小为 F_f，稳定后两轮的边缘（接触点）具有相同的线速度相同，不妨假定其方向向上，故角速度应满足

$$\omega_1R_1=\omega_2R_2 \qquad ①$$

以两轮稳定时的角速度方向作为两轮各自转轴的正方向，由角动量定理

对于 A 轮，有： $$\int_0^t F_fR_1\mathrm{d}t=I_1\omega_1-(-I_1\omega_{10}) \qquad ②$$

对于 B 轮，有： $$\int_0^t -F_fR_2\mathrm{d}t=I_2\omega_2-I_2\omega_{20} \qquad ③$$

（1）联立方程①②③，并利用 $I_1=\dfrac{1}{2}m_1R_1^2$、$I_2=\dfrac{1}{2}m_2R_2^2$，可得稳定后两轮的角速度为

$$\omega_1=\frac{m_2R_2\omega_{20}-m_1R_1\omega_{10}}{(m_2+m_1)R_1}$$

$$\omega_2=\frac{R_1}{R_2}\omega_1=\frac{m_2R_2\omega_{20}-m_1R_1\omega_{10}}{(m_2+m_1)R_2}$$

（2）将 ω_1 和 ω_2 分别代入②③，得两轮各自受到的冲量矩为

A 轮： $$\int_0^t F_fR_1\mathrm{d}t=I_1\omega_1-(-I_1\omega_{10})=\frac{m_1m_2R_1(R_1\omega_{10}+R_2\omega_{20})}{2(m_2+m_1)}$$

B 轮： $$\int_0^t -F_fR_2\mathrm{d}t=I_2\omega_2-I_2\omega_{20}=-\frac{m_1m_2R_2(R_1\omega_{10}+R_2\omega_{20})}{2(m_2+m_1)}$$