2002～2003学年第二学期《高等数学》期末考试试题A卷答案

一、填空题：1、$\frac{128}{3}\pi$；2、$f(0,0)$；3、1；

二、选择题：1、D；2、B；3、A；

三、解：（1）$I=\int_0^1 xdx\int_0^x dy=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$；

（2）$I=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy=\frac{1}{364}$

四、解：设$F(x,y,z)=4x^2+4z^2-17y^2+2y-1$故有$F_x=8x,F_y=-34y+2,F_z=8z$
M_0点处的切平面的法向量为$\vec{n}_2=\{16,-32,0\}=16\{1,-2,0\}$故旋转曲面$F(x,y,z)=0$在点$M_0(2,1,0)$处的切平面方程为$x-2y=0$

五、解：由$\begin{cases} x^2+y^2=ax \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$消去$z$，得投影柱面$x^2+y^2=a^2$，因此它在$xoy$面上的投影域为$D$：$x^2+y^2\le a^2$，于是区域$\Omega$的体积：

$$V=\iint_D[2a-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{a}]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a[2a-r-\frac{r^2}{a}]rdr=\frac{5}{6}\pi a^3$$

六、（1）令$P=x^2yz^2,Q=\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}-xy^2z^2,R=\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)$，

故有$\frac{\partial P}{\partial x}=2xyz^2$，$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{z})^2}-2xyz^2$，$\frac{\partial R}{\partial y}=-\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{z})^2}+(1+2xyz)$，

故有$(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})=1+2xyz$

所以$div\vec{F}\mid_{(1,1,1)}=(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})|_{(1,1,1)}=(1+2xyz)|_{(1,1,1)}=3$

（2）记Ω为Σ所围区域，则有高斯公式得：

$$I=\iiint_\Omega(1+2xyz)dxdydz=\iiint_\Omega dxdydz+2\iiint_\Omega xyzdxdydz=\iiint_\Omega r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_a^2 r^2\sin\varphi dr=\frac{7}{3}a^3(2-\sqrt{2})\pi$$

（由于Ω关于xoz面对称，xyz是域Ω上的奇函数，故有$\iiint_\Omega xyzdxdydz=0$）

七、解：由题设知，$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2})=\frac{\partial}{\partial y}[(x-\varphi(x))\frac{y}{x}]$，故曲线积分

$I=\int_A^B(x-\varphi(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关。

所以$I=\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)}[x-(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x})]\frac{y}{x}dx+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})dy=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-\frac{1}{\pi})dy=\frac{1}{2}(\pi^2-1)$

八、解：由题设有 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，即 $d^2=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

令 $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(xy-z^2+1)$

$$\begin{cases} F_x=2x+\lambda y=0 \\ F_y=2y+\lambda x=0 \\ F_z=2z-2\lambda z=0 \\ F_\lambda=xy-z^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ z=0,\lambda=\dfrac{1}{2} \\ xy=z^2-1 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ 驻点 $(1,-1,0),(-1,1,0),(0,0,\pm1)$，而

$f(1,-1,0)=f(-1,1,0)=2, f(0,0,\pm1)=1$ 比较知，此曲面上离原点最近的点为 $(0,0,\pm1)$。

九、证明：将 Ω 向 x 轴投影，得 $-1\le x\le1$，并用垂直于 x 轴的平面截 Ω 得

D_x：$x^2+z^2\le1-x^2$，所以有 $\iiint\limits_{\Omega} f(x)dxdydz=\int_{-1}^{1}f(x)dx\iint\limits_{D_x}dydz=\int_{-1}^{1}f(x)\pi(1-x^2)dx=$

$\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)f(x)dx$，故命题得证。

十、解：（1）设 π_1 为过 l 且垂直于 π 的平面，由直线 l 的一般方程为 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

所以过 l 的平面束方程为：$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$，即 $x+(\lambda-1)y+\lambda z-(\lambda+1)=0$ 其法向量为 $\vec{n}_1=\{1,\lambda-1,\lambda\}$，平面 π 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$，因此为 π_1 与 π 垂直知，

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}=0$ 所以有 $\lambda=-2$，于是 π_1 的方程为 $x-3y-2z+1=0$，因此直线 l_0 的方程为

$$\begin{cases} x-3y+2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

（2）将 l_0：$\begin{cases} x-3y+2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$ 化为参数方程 $\begin{cases} x=2y \\ y=y \\ z=-\frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$ 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 l_0 上一点，则有 $\begin{cases} x_0=2y_0 \\ z_0=-\frac{1}{2}(y_0-1) \end{cases}$ 若 $P(x,y,z)$ 是由 P_0 旋转到达的另一点，由于 y 坐标不变且

P_0,P 到 y 轴的距离相等，则有 $y=y_0, x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$ 所以 $x^2+z^2=(2y_0)^2+$

$[-\frac{1}{2}(y_0-1)]^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$ 即 $4x^2+4z^2-17y^2+2y-1=0$ 为所求旋转曲面方程。

一、解：（1）由复合函数求导法则可得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\sin^2 y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\cos^2 y$

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\cos^2 y$

$=f''(u)e^{2x}$，故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}$

（2）由题设知：$f''(u)e^{2x}=f(u)e^{2x}$，即 $f''(u)-f(u)=0$，因此特征方程为 $r^2-1=0$，有特征根为 $r_1=1,r_2=-1$，故 $f(u)=c_1e^u+c_2e^{-u}$ 再由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 得

$c_1=\dfrac{1}{2},c_2=-\dfrac{1}{2}$ 所以 $f(u)=\dfrac{1}{2}e^u-\dfrac{1}{2}e^{-u}=shu$。