

第十四章 电磁感应

自从 1820 年 7 月奥斯特发现了电流的磁现象以后，电磁热席卷欧洲。1821 年，时任英国皇家研究所实验室总监的法拉第接受了英国哲学杂志社的约稿，写一篇关于电磁问题的评述。为此法拉第广泛收集、认真研究了各类电磁学文献，并将其中的许多实验，特别是奥斯特的实验，一一亲自做过之后，以《电磁学的历史概要》为题，发表了评论。从此法拉第走进了电磁学研究领域。

通过仔细分析和类比，法拉第敏感地认识到电和磁是一对和谐的对称现象，既然奥斯特的实验实现了电流产生磁场，反过来也一定能让磁场产生电流。为此，法拉第从 1824 年开始进行这方面的研究，经过多年的不懈努力，终于在 1831 年 8 月 29 日取得了突破性进展，发现了电磁感应现象：**不论什么原因，当穿过闭合线圈中的磁通量发生变化时，线圈中会出现感应电流。**

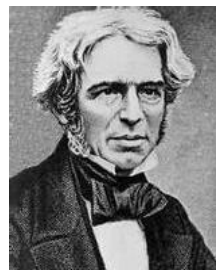
电磁感应现象的发现，不仅发展了电磁学理论，更标志着电气时代和第二次工业革命的到来。

本章将讨论电磁感应现象的基本规律、动生电动势和感生电动势、自感与互感现象，最后讨论磁场的能量问题。

§ 14.1 电磁感应的基本定律

14.1.1 电磁感应现象

自从 1820 年奥斯特发现电流的磁效应后，很多科学家都致力于其逆效应的探索：如何使磁场产生电流？经过近 10 年的探索，在 1831 年，英国物理学家法拉第终于发现了**电磁感应现象**（electromagnetic induction）：**不论用什么方法，只要使得穿过闭合线圈中的磁通量发生变化，线圈中就会出现感应电流。**下面，我们先几个典型的实验来说明电磁感应现象，然后再给出电磁感应的基本定律。



迈克尔·法拉第

实验一：如图 14.1 所示，在一个软铁环上绕两个线圈 A 和 B，其中线圈 A 与检流计

G 连成一个闭合回路，线圈 B 通过开关 K 与电源相连构成回路。在开关闭合或断开的瞬间，检流计 G 的指针发生偏转，表明线圈 A 所在的回路中产生了感应电流，但两种情况下感应电流的方向相反。这是法拉第在 1831 年 8 月 29 日第一次发现电磁感应现象的实验，所不同的只是用放在导线旁的小磁针代替了检流计。

实验二：如图 14.2 所示，将一个空心的螺线管线圈 A 和检流计 G 连成一个闭合回路。当条形磁铁插入或拔出线圈时，或者磁铁不动，线圈向着或背离磁铁运动时，即两者发生相对运动时电流计的指针会发生偏转，偏转方向与两者的相对运动情况有关，偏转的大小与相对运动的速度有关。这是法拉第在 1831 年 10 月 17 日发现的“磁生电”的电磁感应现象。

实验三：如图 14.3 所示，用一个细长的通电螺线管线圈 B 代替实验二中的条形磁铁，在线圈 B 插入或拔出线圈 A 时，线圈 A 中同样有感应电流产生。

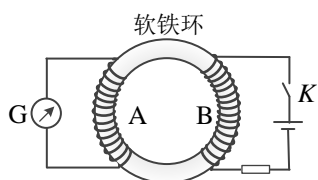


图14.1 电磁感应实验一

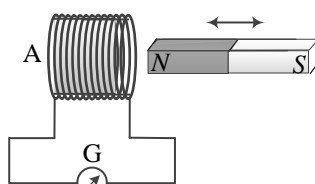


图14.2 电磁感应实验二

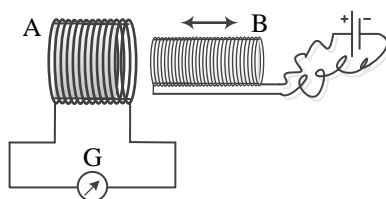


图14.3 电磁感应实验三

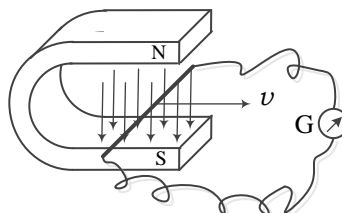


图14.4 电磁感应实验四

实验四：如图 14.4 所示，用导线把一根铜棒和检流计连成一个闭合回路，当铜棒在两个异名磁极间做切割磁力线运动时，在闭合回路内也会产生感应电流，电流方向与铜棒的运动方向和磁力线的方向有关。

综合这些实验可以发现，不论是什么原因，只要使得闭合回路内的磁通量发生变化，闭合回路内都会“感应”出电流。法拉第把这种现象与静电感应现象作类比，形象地把这种电流称为“**感应电流**”(induction current)，感应电流的出现，说明回路中有电动势存在，这种电动势称为**感应电动势** (induction electromotive force)。

14.1.2 楞次定律

楞次定律（lenz law）是用来判断感应电流方向的定律，它是俄国科学家楞次在 1834 年提出的。楞次定律的表述如下：**闭合回路中感应电流的方向，总是使得感应电流所激发的磁场阻碍引起感应电流的磁通量的变化。**

下面，我们通过一个实例来说明如何用楞次定律判断感应电流的方向。如图 14.5 (a) 所示，在竖直平面内有一个导体圆环，当条形磁铁的 N 极从圆环的右边插入圆环时，磁铁产生的磁场方向从右向左，且通过圆环的磁通量在增大。根据楞次定律，圆环中感应电流产生的磁场方向必须从左向右，才能阻碍引起感应电流的磁通量的变化，根据右手螺旋法则，圆环内感应电流的方向必如图 14.5 (a) 中圆环上的箭头所示。而当磁棒从圆环内拔出时，如图 14.5 (b) 中所示，圆环内的磁通量在减少，所以圆环上感应电流产生的磁场方向需与条形磁铁产生的磁场方向一致，以阻碍磁通量的减少，所以由右手螺旋法则，可判断此时圆环内的感应电流的方向如图 14.5 (b) 圆环上的箭头所示。

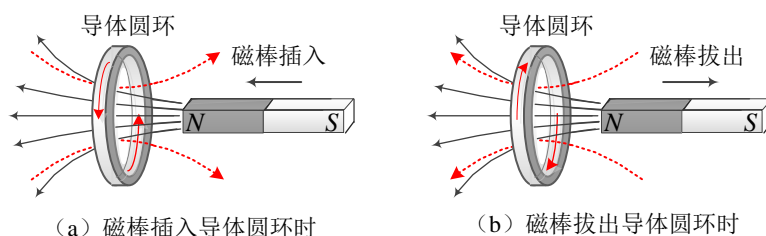


图14.5 楞次定律的应用

从本质上来讲，楞次定律是系统能量守恒在电磁感应中的具体体现。从图 14.5 (a) 中可以看到，当磁棒的 N 极向着圆环运动时，圆环中感应电流产生的磁场相当于在向着磁铁的一侧出现了 N 极，它将阻碍磁铁向它运动。反之，当磁铁的 N 极背离圆环而去时，如图 14.5 (b) 所示，感应电流产生的磁场相当于在向着磁铁的一侧出现了 S 极，它将吸引磁铁阻碍它离去。因此磁铁在运动时，外力要克服磁场阻力而做功，根据能量守恒定律，此功就转化为圆环中的感应电流产生的焦耳热。

14.1.3 法拉第电磁感应定律

法拉第在 1831 年 8 月 29 日第一次发现了电磁感应现象，随后又对电磁感应现象作了深入研究，总结了产生感应电流的几种情况，提出了磁力线、感应电动势等概念，为电磁感应定律的最终形成做出了卓越的开创性贡献。法拉第电磁感应定律可表示为：**不论**

是什么原因，只要使得穿过导体回路中的磁通量发生变化，回路中就会有感应电动势，其大小与通过该回路的磁通量的变化率成正比。在采用国际单位制时，其数学表达式为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (14.1)$$

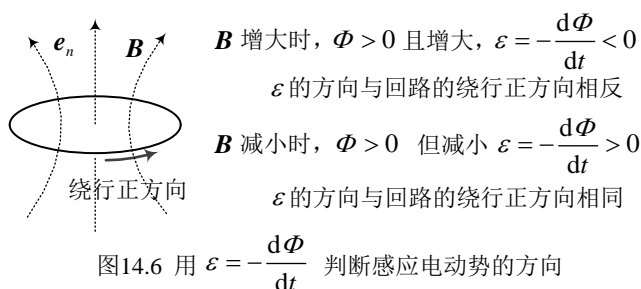
式中的负号是楞次定律的数学表现，或者说我们可以利用式中的负号，来确定回路中感应电动势的方向。具体方法如下：**首先**选定回路的绕行正方向，则该回路所围曲面的法线正方向就随之而定了，如图 14.6 所示（一般来说回路的绕行正方向的选择是任意的，但为了方便起见，建议取与通过该回路的磁场方向成右手螺旋关系的方向为绕行正方向）；

然后用 $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 计算通过该回路所围曲面的磁通量；**接着**用式 (14.1) 计算感应电动势；**最后**根据 ε 的正负号来判断感应电动势的方向。若 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ，表明感应电动势的

方向与选定的绕行正方向一致；若 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ，表明感应电动势的方向与选定的绕行正方向相反。

不难看出，用法拉第电磁感应定律和楞次定律两种方法判断感应电动势的方向，得到的结论一定是相同的。在实际应用中，我们可以根据具体情况，灵活使用。也可以用

$\varepsilon = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right|$ 先求回路中感应电动势的大小，再用楞次定律判断感应电动势(电流)的方向。



应该明确，如果构成回路的材质不是导体，则回路中不存在感应电动势，但 $\frac{d\Phi}{dt}$ 的值仍可能存在（不为零）。换句话说，**感应电动势只能存在于导体或导体回路中。**

如果导体回路由 N 匝线圈构成，并且通过每一匝线圈的磁通量均相等，则总感应电动势为

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (14.2)$$

式中， $\Psi = N\Phi$ 称为**磁链**（linked flux）。

如果闭合回路的电阻为 R ，则回路中的总感应电流为

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{N}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} \quad (14.3)$$

利用 $I = \frac{dq}{dt}$ ，在 t_1 至 t_2 时间内通过导线上任一横截面的感应电量为

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \frac{1}{R} (\Psi_1 - \Psi_2) = \frac{N}{R} (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (14.4)$$

式中， Φ_1 、 Φ_2 分别是 t_1 、 t_2 时刻通过导线回路所围面积的磁通量。

比较式（14.3）和式（14.4）可见：感应电流与回路中磁通量随时间的变化率有关，变化率越大，感应电流越强；而通过导线横截面的感应电荷只与磁通量的变化量有关，与磁通量随时间的变化率无关。

例 14.1 交流发电机的原理如图 14.7 所示，在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，有一个匝数为 N ，面积为 S 的矩形线圈，线圈绕固定轴 oo' 以角速度 ω 做匀速转动。设 $t=0$ 时，线圈平面与磁场垂直，试求线圈中的感应电动势。

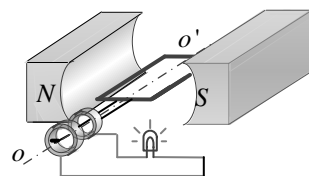


图14.7 交流发电机原理

解：由题意可知，在 t 时刻线圈平面的法线方向与磁感应强度之间的夹角为 $\theta = \omega t$ ，则穿过线圈平面的磁通量为

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \theta = BS \cos \omega t$$

由式（14.2）可得线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t = \varepsilon_m \sin \omega t$$

式中 $\varepsilon_m = NBS\omega$ 是感应电动势的最大值。若线圈的转速为 f 转/秒，则 $\omega = 2\pi f$ ，上式可表示为

$$\varepsilon_i = \varepsilon_m \sin 2\pi ft$$

上式表明，感应电动势随时间 t 按正弦规律变化。由交变电动势产生的电流称为交流电， f 称为交流电的频率。在我国，工业和民用交流电的频率是 50Hz。

例 14.2 一根长直导线中通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$ ，式中 I_0 、 ω 均是常量，一个矩形线圈 ABCD 与长直导线共面，线圈的总匝数为 N ，其中 AB 边与长直导线平行，线圈的各部分尺寸如图 14.8 所示。假定线圈闭合后回路的总电阻为 R 。试求：

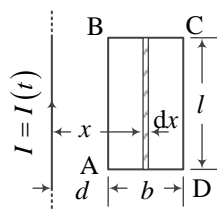


图14.8 例14.2的图

- (1) 任时刻线圈内的感应电动势及感应电流；
- (2) 在 t_1 至 t_2 时间内通过导线上任一横截面的感应电量。

解：(1) 电流 I 在距离直导线 x 处产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

当 $I > 0$ 时， B 的方向垂直纸面向里。选顺时针为回路的绕行正方向，在回路中取一个长条形面元 $ds = ldx$ （如图中阴影所示），则通过该面元的磁通量为

$$d\Phi = B \cdot ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

在 t 时刻，通过整个线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I_0 l \sin \omega t}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right)$$

由法拉第电磁感应定律，线圈内的感应电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \frac{d}{dt} (\sin \omega t) \\ &= -\frac{\mu_0 I_0 l N \omega}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \cos \omega t \end{aligned}$$

回路内的感应电流为

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\mu_0 I_0 l N \omega}{2\pi R} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \cos(\omega t)$$

其方向将随余弦值的正负做逆时针或顺时针转向的变化。

- (2) 在 t_1 至 t_2 时间内通过导线上任一横截面的感应电量为

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = \frac{N}{R} (\Phi_1 - \Phi_2) \\ &= \frac{\mu_0 I_0 l N}{2\pi R} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) [\sin(\omega t_1) - \sin(\omega t_2)] \end{aligned}$$

例 14.3 在例 14.2 中, 如果导线中电流 I 恒定不变, 总匝数为 N 的矩形线圈 ABCD 沿垂直于直导线方向以速度 v 向右匀速运动, 设初始时刻 AB 边与长直导线的距离为 d , 如图 14.9 所示。试求: 任意时刻 t 线圈内的感应电动势。

解: 电流 I 在线圈内产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

方向垂直纸面向内。取顺时针方向为线圈的绕行正方向, 则通过图中长条形面元 $\mathrm{d}\mathbf{s} = l\mathrm{d}x$ 的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

又在 t 时刻, AB 边距离直导线的距离为 $d+vt$, 所以 t 时刻通过线圈回路的磁通量为

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_{d+vt}^{d+b+vt} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} [\ln(d+b+vt) - \ln(d+vt)]$$

根据法拉第电磁感应定律, 可得感应电动势为

$$\varepsilon_i = -N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N \frac{\mu_0 Ilv}{2\pi} \left[\frac{1}{d+vt} - \frac{1}{d+b+vt} \right]$$

不难看出此 $\varepsilon_i > 0$, 所以感应电动势的方向与回路的绕行方向一致, 即沿顺时针方向。

比较例题 14.2 和 14.3, 不难发现, 尽管在线圈回路内都产生了电磁感应现象, 但两例中使磁通量发生变化的原因不相同。前者是由磁场的变化所引起的, 后者是由线圈相对于磁场做相对运动引起的。为了简单起见, 我们将在恒定磁场中, 由于导体回路或一段导线相对于磁场运动时产生的感应电动势称为**动生电动势**; 而将导体回路固定不动时, 仅由于磁场的变化产生的感应电动势称为**感生电动势**。

下面我们将讨论动生电动势、感生电动势产生的原因、及其感应电动势的另一种计算方法。

§ 14.2 动生电动势

14.2.1 动生电动势

动生电动势 (motional electromotive force) 是指: 在恒定磁场中, 导体回路或一段导线相对于磁场运动时产生的感应电动势。在导体内有电动势, 说明在导体内一定存在着

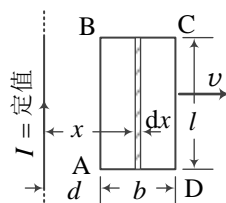


图14.9 例14.3的图

某种非静电力。那么产生动生电动势的非静电力是什么力呢？下面，我们通过一个简单的例子来探讨产生动生电动势的原因及其计算方法。

如图 14.10 所示，在均匀磁场 \mathbf{B} 中有一个矩形导体滑轨，长度为 l 的导线 AB 在滑轨上以速度 v 向右做匀速直线运动，并与导轨保持良好接触（构成一个闭合导体回路），速度方向与导线 AB 垂直。由法拉第电磁感应定律及楞次定律容易算出，整个回路内的感应电动势的大小为 $\varepsilon = Blv$ ，方向沿逆时针方向。我们的问题是：该感应电动势存在于回路的哪个部分？产生动生电动势的非静电力是什么力？

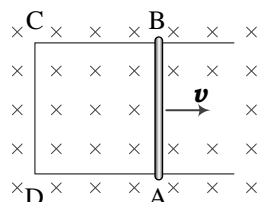


图14.10 动生电动势

显然，该动生电动势只存在于相对于磁场有相对运动的导线 AB 上，而在另外三段上没有感应电动势。这是因为，当导线 AB 段以速度 v 向右做匀速直线运动时，导线内的自由电子受到了洛伦兹力 $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的作用，则作用于单位正电荷上的洛伦兹力为

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{F}}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

其大小为 $E_k = vB \sin \theta$ ，方向：A→B。而其它三段是静止的，导线内的自由电子不受洛伦兹力作用。根据电动势的定义，把单位正电荷沿着导线 AB，从 A 端移动到 B 端时，非静电力做的功（即 AB 上动生电动势）为

$$\varepsilon = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l vB dl = Blv$$

电动势的方向：A→B。这也就是整个回路的动生电动势，方向沿逆时针方向。这个结果显然与根据法拉第电磁感应定律得到的结果是相同的。由此可知，**产生动生电动势的非静电力就是洛伦兹力。**

一般情况下，磁场可以不均匀，导线上各部分的运动速度可以不相同。于是在计算动生电动势时，首先需在导线上任取一个以速度 \mathbf{v} 运动的线元 $d\mathbf{l}$ ，则该线元上的动生电动势为

$$d\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (14.5)$$

则整个运动导线上动生电动势的大小为

$$\varepsilon = \int_A^B \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (14.$$

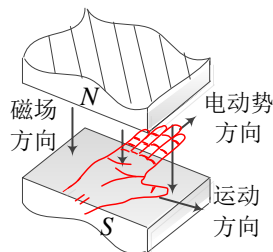


图14.11 用右手定则判断动生电动势的方向

式(14.5)和式(14.6)是计算动生电动势的基本公式。

动生电动势的方向可由 ε 的正负号来判断。当 $\varepsilon > 0$ 时, ε 的方向与 $d\mathbf{l}$ 的方向(积分方向)相同; $\varepsilon < 0$ 时,则相反。一般情况下, ε 的方向就是 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 在 $d\mathbf{l}$ 上的投影方向。此外 ε 的方向也可以用高中物理中学习过的右手定则来判断,如图14.11所示。

例题 14.4 如图14.12所示,在磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中,一根长为 L 的导体棒 oa 在与磁场垂直的平面内绕其端点 o 以角速度 ω 匀速旋转。试求棒两端的动生电动势的大小,并判断 o 、 a 两端点哪端电势高。

解: 在导体棒上距离 o 点为 l 处取一个“棒元” $d\mathbf{l}$,其速度大小为 $v = \omega l$,方向如图所示,则该“棒元”上的动生电动势为

$$d\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$= vB \sin 90^\circ \cdot d\mathbf{l} \cdot \cos 180^\circ = -\omega l B dl$$

所以总动生电动势大小为

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^L -\omega l B dl = -\frac{1}{2} \omega B L^2$$

式中的负号表示动生电动势的方向从 a 指向 o ,即 o 点电势高(相当于电源的正极)。

例题 14.5 在一根长直导线旁有一根与之共面的、长为 L 的导体棒 ab ,直导线中通有恒定电流 I 。开始时,导体棒与长直导线的位置关系如图14.13所示。当导体棒以速度 \mathbf{v} 向右做匀速直线运动时,试求:运动开始后的任一 t 时刻棒上的动生电动势。

解: 在 t 时刻,棒上 a 端距离长直导线的距离为 $d + vt$ 。在棒上距离 a 点为 l 处取一个“棒元” $d\mathbf{l}$,如图14.14所示,则该“棒元”离长直导线的距离为

$$x = d + vt + l \cos \theta$$

所以恒定电流 I 在该“棒元”处产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (d + vt + l \cos \theta)}$$

在棒所在一侧,磁场的方向垂直纸面向内。所以该“棒元”上的动生电动势为

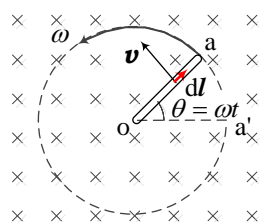


图14.12 例14.4的图

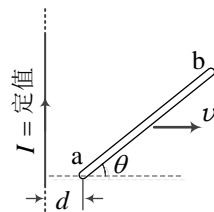


图14.13 例14.5的图

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB \sin 90^\circ \cdot dl \cdot \cos(90^\circ - \theta) \\ &= \frac{v\mu_0 I \sin \theta}{2\pi(d + vt + l \cos \theta)} dl \end{aligned}$$

总动生电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int d\varepsilon = \int_0^L \frac{\mu_0 v I \sin \theta}{2\pi(d + vt + l \cos \theta)} dl \\ &= \frac{\mu_0 v I \tan \theta}{2\pi} \ln \frac{d + vt + L \cos \theta}{d + vt} \end{aligned}$$

因 $\varepsilon > 0$ ，所以动生电动势的方向从 a 指向 b，b 端电势高。

1831 年 10 月 28 日，法拉第用强磁铁和铜圆盘，设计了一个新的实验，其示意图如图 14.15 所示。当铜圆盘绕轴线匀速旋转时，获得了持续稳定的感应电流。其原理就是铜圆盘在转动时切割了磁感线，沿径向方向产生了动生电动势。

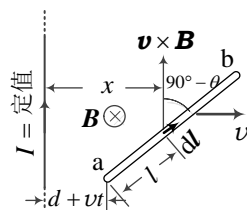


图14.14 例14.5解题用图

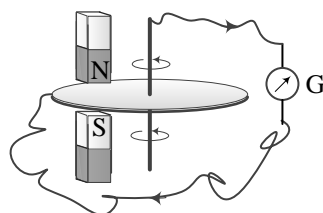


图14.15 法拉第的圆盘实验产生持续感应电流的示意图

§ 14.3 感生电动势 感生电场

14.3.1 感生电动势 感生电场

现在来讨论当导体回路静止不动时，仅仅因为磁场的变化所产生的感应电动势，我们将这样的感应电动势称为**感生电动势**（induced electromotive force）。假设在一个半径为 R 的圆柱形空间中有一个随时间变化的磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ ，导体回路 L 、在磁场内部的导体棒 ab ，以及在磁场外部的导体棒 cd 相对于磁场都静止不动，如图 14.16 所示。

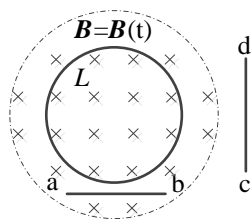


图14.16 随时间变化的磁场中的导体回路和导体棒

实验发现，只要磁感应强度 \mathbf{B} 随时间变化，一般情况下，导体回路 L 、导体棒 ab 和 cd 上都有感生电动势。由于导体回路或导体棒相对于磁场都没有运动，所以产生感生电动势的非静电力不是洛伦兹力。那么，它是什么力呢？

为此，麦克斯韦在分析研究后于 1861 年提出了感生电场假设：**随时间变化的磁场在其周围空间要激发一种电场**，这种电场称为**感生电场**（induced electric field），或称**涡旋电**

场 (eddy electric field)。

麦克斯韦利用感生电场假设，圆满地解释了产生感生电动势的原因。他认为：无论是否存在导体或导体回路，变化的磁场总要在其周围空间激发感生电场。如果在此空间内有导体存在，则导体中的自由电荷就会在感生电场力的作用下做定向运动，从而在导体内产生感生电动势，当导体形成闭合回路时就会产生感应电流。所以**产生感生电动势的非静电力就是感生电场力**。

若用符号 \mathbf{E}_B 表示变化的磁场所激发的感生电场的电场强度。根据电动势的定义，在一段长为 $d\mathbf{l}$ 的导体“棒元”上的感生电动势为

$$d\varepsilon_i = \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} \quad (14.7)$$

其方向就是感生电场 \mathbf{E}_B 在“棒元” $d\mathbf{l}$ 上的投影方向。于是一段导线 ab 上的感生电动势为

$$\varepsilon_i = \int d\varepsilon_i = \int_a^b \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} \quad (14.8)$$

对于一个闭合导体回路 L ，回路内的感生电动势为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} \quad (14.9)$$

式中 Φ 是通过闭合回路 L 所围曲面的磁通量。式 (14.7)、式 (14.8) 及式 (14.9) 是计算感生电动势的常用计算式。

由于磁通量 $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ，同时考虑到回路 L 及其所围的曲面静止不动，即不随时间变化，将之代入式 (14.9)，可得

$$\oint_L \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (14.10)$$

式中 S 是以闭合回路 L 为周界的任意曲面，曲面 S 的法线正方向与回路 L 的绕行方向成右手螺旋关系。式 (14.10) 给出了感生电场与磁感应强度对时间的变化率 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 之间的积分关系。此式也说明了感生电场的一个重要性质：**感生电场是非保守力场**。式 (14.10) 是电磁场理论的基本方程之一。

那么，感生电场是一种什么性质的场呢？它和静电场有何异同？我们知道，静电场是由静止的电荷产生的，静电场的性质由静电场的环路定理和高斯定理给出，即：

$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 和 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$, 所以静电场是有源的保守力场, 静电场的电场线一般起

始于正电荷、终止于负电荷, 不可能形成闭合曲线。

感生电场是由变化的磁场激发的, 与静止电荷无关, 它的性质由式 (14.10) 和下式给出

$$\oiint_S \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (14.11)$$

即感生电场是无源的非保守力场, 所以感生电场的电场线都是闭合曲线, 也正是因为这样, 感生电场又称为涡旋电场。

感生电场与静电场唯一的相同点就是对电荷的作用规律相同, 即电荷受到的两种电场力均可以用 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ 表示。

14.3.2 感生电场和感生电动势的计算

下面举例说明感生电场和感生电动势的计算。

例 14.6 一半径为 R 的无限长直螺线管, 其横截面如图 14.17 所示, 磁感应强度为 \mathbf{B} 的磁场均匀分布在螺线管内, 方向平行管轴向里, 其变化率为 $\frac{dB}{dt}$ 。试求: 感生电场 \mathbf{E}_B 的空间分布。

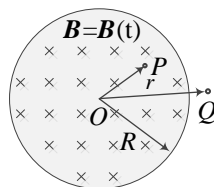


图14.17 例14.6的图

布。

解: 一般情况下, 计算感生电场的空间分布规律是很难的, 超出了大学物理课程的基本要求。本题是大学物理课程中仅有的一个可以计算感生电场分布规律的实例。

由于螺旋管内的磁场分布具有轴对称性, 感生电场具有涡旋性, 所以变化的磁场所激发的感生电场的电场线在管内、外均是螺线管共轴的同心圆。且 \mathbf{E}_B 的方向沿圆周切线方向, 在同一电场线上 \mathbf{E}_B 的大小处处相等。为此, 以螺线管中心轴上的 O 点为圆心, r 为半径作一圆形积分回路 L , 并取顺时针方向为回路的绕行正方向, 如图 14.18 所示, 则由式 (14.10), 有

$$\oint_L \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E_B = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

即

$$E_B = -\frac{1}{2\pi r} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

式中 S 是回路 L 所围的曲面。

当 $r \leq R$ 时, 场点 P 在管内, 回路所围面上各点的 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 相等且和面法线方向平行, 故

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

所以螺线管内感生电场的大小为

$$E_B = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

当 $r \geq R$ 时, 场点 Q 在管外, 考虑到螺线管外的磁场为零, 通过 L 所围面积的磁通量就等于通过螺线管横截面的磁通量, 即

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

所以螺线管外感生电场的大小为

$$E_B = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

E_B 的大小与 r 的关系曲线如图 14.18 所示。

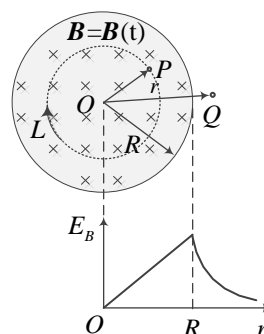


图14.18 例14.6解的图

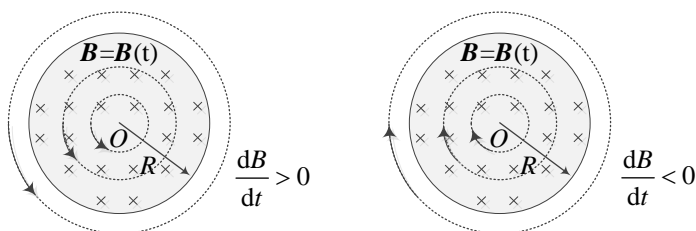


图14.19 长直螺线管横截面上的感生电场线

如果 $\frac{dB}{dt} > 0$, 则 $E_B < 0$, 表明 E_B 的方向就是与绕行正方向**相反**的切线方向; 如果

$\frac{dB}{dt} < 0$, 则 $E_B > 0$, E_B 的方向就是与绕行正方向**相同**的切线方向。不难发现: 若 L 为闭

合导体回路，则回路内感应电流的方向与感生电场线的方向一致。换句话说 \mathbf{E}_B 的方向也可以用楞次定律来判断，如图 14.19 所示。

例 14.7 如图 14.20 所示，半径为 R 的圆柱形空间内有一均匀磁场，磁感应强度 \mathbf{B} 的方向与圆柱的轴线平行。将一长为 L 的导体棒 ab 置于磁场中，圆心到棒的垂直距离为 h 。试求：当 $\frac{dB}{dt} > 0$

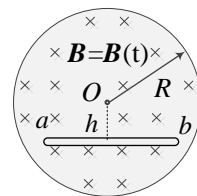


图14.20 例14.7的图

时，棒中的感生电动势。

解：（方法一） 以圆心 O 到棒的垂足 o 为坐标原点建立 x 轴，在棒上距 o 为 x 处取一“棒元” dx 。由例题 14.6 可知，该处感生电场的大小为

$$E_B = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

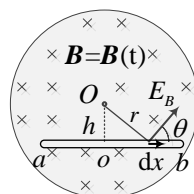
方向如图 14.21 (a) 所示。该“棒元”上的感生电动势为

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{x} = E_B \cos \theta dx \\ &= \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cdot \frac{h}{r} \cdot dx = \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} dx \end{aligned}$$

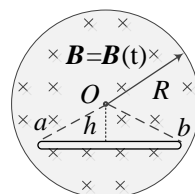
所以 ab 上的感生电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab} &= \int d\varepsilon = \int_{x_a}^{x_b} \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} dx \\ &= \frac{1}{2} h \frac{dB}{dt} (x_a - x_b) = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

方向由 $a \rightarrow b$ 。



(a) 方法一用的图



(b) 方法二用的图

图14.21 例14.7解的图

（方法二）： 用法拉第电磁感应定律求解

假想用导线连接 Oa 、 Ob ，构成一个三角形导体回路 Oab 。则通过此回路的磁通量为

$$\Phi = BS = \frac{1}{2} hLB$$

由法拉第电磁感应定律，回路中感应电动势的大小为

$$\varepsilon_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt}$$

又 $\varepsilon_i = \varepsilon_{Oa} + \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bO}$ ，同时注意到， Oa 、 Ob 沿径向放置，与感生电场方向垂直，所以

$\varepsilon_{Oa} = \varepsilon_{bO} = 0$ ，由此得棒 ab 上的感生电动势为

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_i = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt}$$

再由楞次定律可知，回路中感生电动势的方向为逆时针方向，即由 $a \rightarrow b$ 。

*14.3.3 涡电流

在一些电器设备中，常常会遇到大块导体处在变化的磁场中、或者在磁场中运动的情况，此时在导体内部产生感应电流，这种电流在整块导体内部自成闭合回路，称为**涡电流**。

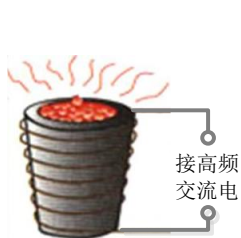


图14.22 感应炉示意图



图 14.23 用涡电流
对齿轮进行淬火



图14.24 电磁灶及其高频载流线圈

由于导体的电阻很小，所以涡电流会产生大量的热量。这一现象在冶金、热处理等工程技术以及日常生活中均有大量应用。例如，图 14.22 是冶金工业中常用的电磁感应炉示意图。感应炉的核心是一个高频载流线圈，高频电流在炉内产生高频变化的磁场。感应炉内的铁矿石或铁块本身就是导体，从而在铁矿石中产生强大的涡电流，利用涡电流的热效应可将铁矿石溶化。如图 14.23 是涡电流在热处理（淬火）工程技术中的应用。将齿轮放在一个特制的线圈中，当线圈中接通高频交流电后，电流产生的交变磁场将在齿轮的边缘产生强大的涡电流，从而可将齿轮的边缘加热到所需的温度。现代厨房中的电磁灶同样是利用涡电流来加热食物的，电磁灶的核心部件是一盘线圈，如图 14.24 所示，因此与电磁灶配套使用的锅必须是特制的铁锅或金属锅，电磁灶不能对玻璃或陶瓷容器加热。

利用涡电流还可以产生阻尼作用。如图 14.25 所示，一个金属片做成的阻尼摆，可在两个电磁铁之间摆动。如果电磁铁的线圈中不通电，则金属摆可以来回摆动很长时间才会停下来。当电磁铁的线圈中通电时，电磁铁的两极之间就会出现强磁场。金属摆在磁场中摆动时金属片内就会产生涡电流。根据楞次定律，涡电流的作用要阻碍金属片相对于磁场运动，从而使金属摆很快地停止摆动。由于这种阻尼起源于电磁感应，所以称为**电磁阻尼**。

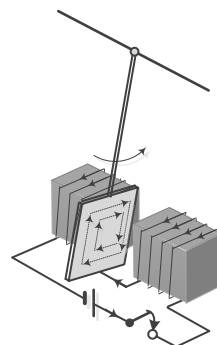


图14.25 电磁阻尼

涡电流的热效应虽然有广泛的应用，但在有些情况下，涡电流的热效应是有害的。例如变压器和电机中的铁芯，由于铁芯总是处在交变磁场中，铁芯内的涡电流会使铁芯发热，这不仅消耗了部分电能，

降低电机的效率，还会因铁芯严重发热而不能正常工作。为了减少涡电流的热损耗，一般的变压器、电机等的铁芯都是用彼此绝缘的硅钢片叠合而成，从而能大大减小涡电流，降低因涡电流产生的热损耗。

§ 14.4 自感与互感

由法拉第电磁感应定律可知：无论以怎样的方式，只要使穿过闭合导体回路的磁通量发生变化，此闭合回路内就一定会产生感应电动势和感应电流。而电流的变化又是引起磁通量变化的重要原因，因此电流的变化与感生电动势之间有着直接联系。自感现象和互感现象就是法拉第电磁感应定律的具体体现。

14.4.1 自感电动势 自感

自感现象是指通过线圈的电流发生变化时，引起穿过线圈自身回路的磁通量发生变化，由此产生的电磁感应现象称为自感现象，对应的感应电动势叫做自感电动势。

例如在一个由线圈、小电珠和电源组成的串联电路中，如图 14.26 所示，当开关突然合上时，实验发现小电珠没有马上点亮，而是慢慢地逐渐变亮。这是因为在开关合上的瞬间，线圈中的电流在从无到有，从小到大的建立过程中，变化的电流在线圈中产生了自感现象，其自感电动势阻碍了电流迅速达到稳定值，所以才有小电珠慢慢变亮的现象。

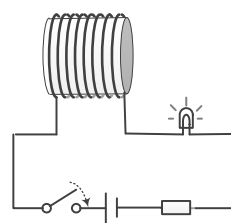


图14.26 线圈的自感现象

假设线圈的匝数为 N ，线圈中的电流为 I ，由毕奥—萨伐尔定律可知，该电流在空间任意一点产生的磁感应强度 B 的大小都与 I 成正比，因此穿过线圈回路自身所围面积的磁通量 Φ 和磁链 Ψ 也与 I 成正比，即

$$\Psi = LI \quad (14.12)$$

式中 L 为比例系数，称为自感系数，简称自感（self-inductance）（注意：在电工、电子技术中，常把线圈的自感称为电感）。上式还可写为

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (14.13)$$

它表明，线圈的自感（或电感）在数值上等于线圈中的电流为 1 个单位时，该电流产生的磁场穿过自身线圈的磁链。

根据法拉第电磁感应定律，线圈中的自感电动势为

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$

如果线圈回路的形状、大小、匝数和线圈内介质的磁导率均不随时间变化，则 L 为一常量，

$\frac{dL}{dt} = 0$ ，因而

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt} \quad (14.14)$$

或

$$L = \frac{-\varepsilon_L}{dI/dt} \quad (14.15)$$

式 (14.15) 表明，一个给定线圈的自感在数值上还等于当线圈中的电流随时间的变化率为 1 个单位时，在自身线圈中产生的自感电动势。式 (14.14) 中的负号也是楞次定律的数学表示，它表示自感电动势总要反抗线圈中电流的变化。当线圈中电流增大时，自感电动势的方向与原电流方向相反；当线圈中电流减小时，自感电动势的方向与原电流方向相同。

在国际单位制中，自感 L 的单位为亨利，符号为 H

$$1\text{H} = 1\text{wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$$

自感现象在电工、电子技术中有重要应用。例如在无线电设备中常用自感线圈和电容器构成谐振电路或滤波电路等；传统日光灯中的镇流器就是利用自感现象的典型例子。镇流器是一个带铁芯的线圈，其自感很大。在接通电源后，利用启辉器的断路作用而产生一个很大的自感电动势，并加到日光灯管上，使得管内的汞蒸汽电离，电离后的汞离子通过热运动打在灯管的荧光粉上，从而把日光灯管点亮。

在有些情况下，自感现象非常有害。一般的家用电器或工业电器内部都有线圈，当电路被断开或接通时，由于电流的突变，会产生较高的自感电动势，在开关处形成电弧。这就是在插、拔插头时，插头处会冒出电火花的原因。这在某些场合可能会引起爆炸等灾难性事故，例如加油站、煤气站、煤矿、粉尘车间等，在那些地方，所有的电器开关必须使用特制的灭弧装置，才能保证安全生产。

14.4.2 自感的计算

一般来说，线圈的自感与线圈的形状、大小、匝数以及线圈内介质的磁导率有关，当上述参数给定后，线圈的自感也就随之确定了，与线圈是否通电无关。通常，线圈自感的

大小由实验测出，只是在某些简单情况下，才可以通过其定义进行估算。

例 14.8 如图 14.27 所示，有一长为 l 的单层密绕直螺线管，横截面积为 S ，总匝数为 N ，管内充满相对磁导率为 μ_r 的均匀磁介质。试求该线圈的自感。

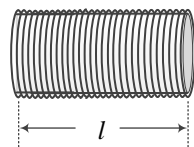


图14.27 例14.8的图

解：(1) 我们知道无限长直螺线管内部的磁场是均匀分布的，磁场的方向平行于螺线管的轴线，磁感强度的大小为

$$B = \mu_0 \mu_r n I$$

式中 n 是沿轴线方向单位长度内线圈的匝数。在本题中，虽然螺线管的长度 l 有限，但只要 $l \gg \sqrt{S}$ ，或者 $\mu_r \gg 1$ ，管内磁场仍然可以近似看成是均匀分布的。于是通过螺线管任一横截面的磁通量为： $\Phi \approx BS = \mu_0 \mu_r n IS$ ，通过整个线圈的磁链为

$$\Psi = N\Phi = N\mu_0 \mu_r n IS = N\mu_0 \mu_r \frac{N}{l} IS = \mu_0 \mu_r n^2 VI$$

式中， $V = lS$ 为螺线管的体积。由自感定义式 $L = \Psi/I$ ，可得螺线管的自感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V \quad (14.16)$$

由此可见，螺线管的自感系数 L 与它的体积 V ，单位长度上线圈匝数 n 的平方和管内介质的相对磁导率 μ_r 成正比。为了得到自感系数较大的螺线管，通常可以采用较细的导线制成绕组，以增加单位长度上线圈的匝数；当然最好的办法就是将线圈绕在相对磁导率很大的铁磁质上。

由于有漏磁现象（部分磁感线实际上没有穿过所有的线圈回路），螺线管的自感实际上小于由上式计算的结果。

例 14.9 截面为矩形的密绕螺绕环线圈共有 N 匝，其尺寸如图 14.28 所示，环内介质的相对磁导率为 μ_r 。试求：

- (1) 该螺绕环的自感；
- (2) 当线圈通有电流 $i = I_0 \cos \omega t$ 时，线圈上的自感电动势。

解：(1) 因为螺绕环内的磁场具有轴对称性，作一个半径为 r 的同轴圆环，由安培环路定律 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ ，可得

$$2\pi rH = NI$$

即

$$H = NI/2\pi r$$

所以环内磁感应强度的大小为

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r}$$

通过环内任一截面的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int B \cdot dS = \int_{D_1/2}^{D_2/2} \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 \mu_r NI h}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

由自感的定义，可得自感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

(2) 当 $i = I_0 \cos \omega t$ 时，自感电动势的大小为

$$\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h \omega}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} \sin \omega t$$

14.4.3 互感电动势 互感

若有两个邻近的线圈 1 和线圈 2，如图 14.29 所示，当线圈 1 中的电流 I_1 变化时，它在周围空间激发的磁场也要随时间变化，使得通过线圈 2 的磁链 Ψ_{21} 发生变化，从而在线圈 2 中产生电磁感应现象。反之亦然。这种现象称为**互感现象** (mutual induction)，相应的感应电动势称为**互感电动势**。

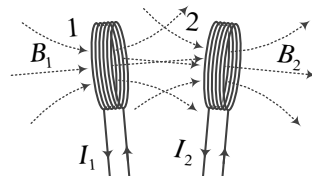


图14.29 两个线圈（回路）之间的互感

现假设线圈 1 中通有电流 I_1 ，该电流产生的磁场分布为 B_1 ，由毕奥-萨伐尔定律可知， $B_1 \propto I_1$ ，所以它通过线圈 2 的磁通量 Φ_{21} 及磁链 Ψ_{21} 均与电流 I_1 成正比，即

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1$$

反之线圈 2 中的电流 I_2 产生的磁场 B_2 通过线圈 1 的磁链 Ψ_{12} 与 I_2 成正比，即

$$\Psi_{12} = M_{12} I_2$$

上两式中 M_{21} 和 M_{12} 均为比例系数，分别称为线圈 1 对线圈 2 的互感系数和线圈 2 对线

圈 1 的互感系数。理论和实验都证明， M_{21} 和 M_{12} 的大小相等，可以统一用符号 M 表示，称为两个线圈之间的**互感系数**，简称**互感**（mutual inductance）。于是，两线圈之间**互感系数的定义**为

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad (14.17)$$

上式表明，两线圈之间的**互感在数值上等于当其中一个线圈上的电流为 1 个单位时，它在另一个线圈中产生的磁链**。

此外，由法拉第电磁感应定律可知，当线圈 1 中的电流 I_1 改变时，通过线圈 2 的磁链将发生变化，于是在线圈 2 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (14.18)$$

同理，线圈 2 中的电流 I_2 发生变化时，在线圈 1 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (14.19)$$

由此可得**互感系数的另一种定义**为

$$M = -\frac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt} = -\frac{\varepsilon_{12}}{dI_2/dt} \quad (14.20)$$

此定义表明，**两个线圈的互感在数值上还等于当其中一个线圈中的电流随时间的变化率为 1 个单位时在另一个线圈中产生的互感电动势的大小**。

互感的单位与自感的单位相同，也是亨利，符号： H 。

互感现象在现代工农业生产和电工电子技术中有广泛的应用。变压器是一个重要的例子。在传输电能时，通过升压变压器提升电压，来降低输电线路的损耗，提高输电效率。而在用户端或电子设备中，需要通过降压变压器来获得所需的工作电压。但互感现象也有不利甚至有害的一面，例如有线电话有时因两条线路之间的互感产生串音干扰，或使信号在传播过程中容易泄密等等。

14.4.4 互感的计算

与自感一样，两线圈之间的互感（系数），一般来说，与线圈上是否通电无关。互感的大小只与两个线圈的几何形状、大小、匝数以及线圈之间的相对位置有关，还与线圈周围磁介质的分布有关。通常，两线圈之间互感的大小由实验测出，只是在某些简单情况

下，才可以通过其定义进行估算。

例 14.10 两个长度均为 l 、同轴密绕的螺线管线圈 1 和线圈 2，如图 14.30 所示，两个线圈的匝数分别为 N_1 、 N_2 ，半径分别为 R_1 、 R_2 ，并假定 $l \gg R_2 > R_1$ 。试求两线圈之间的互感。

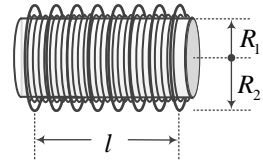


图14.30 例14.10的图

解：设螺线管 2 中通有电流 I_2 ，由磁场的安培环路定律可得，螺线管内的磁场强度为

$$H = n_2 I_2 = \frac{N_2 I_2}{l}$$

螺线管 2 内部的磁感应强度的大小为

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$$

方向与电流 I_2 成右手螺旋关系。于是穿过螺线管 1 的磁链为

$$\Psi_{12} = N_1 B S_1 = N_1 \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l} \pi R_1^2$$

所以互感为

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_1^2$$

利用例题 14.8 的结果，即式 (14.16) 可知两个螺线管的自感为

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 V_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi R_1^2$$

$$L_2 = \mu_0 n_2^2 V_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} \pi R_2^2$$

所以有

$$M = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{L_1 L_2}$$

必须指出，上述结果仅在 $l \gg R_2$ 的条件下近似成立。而在一般情况下， $M = k \sqrt{L_1 L_2}$ ，且 $k \leq 1$ ， k 称为耦合系数。只有当 $R_2 = R_1$ ，且 $l \gg R_2$ 时，才有 $k = 1$ 。因为在一般情况下总会有漏磁，即有些磁感线不能通过所有的线圈回路，即使 $R_2 = R_1$ ，仍然有 $M < \sqrt{L_1 L_2}$ 。

例 14.11 如图 14.31 所示, 半径分别为 R 和 r , 匝数分别为 N_1 和 N_2 的两个共轴圆线圈, 相距为 d , 两线圈平面相互平行, 且 $R \gg r$ 。试求

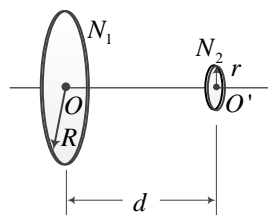


图14.31 例14.11的图

(1) 两线圈的互感系数;

(2) 当大线圈通以电流 $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ 时, 小线圈中的互感电动势, 式中 I_0 、 ω 、 φ 均是大于零的常数。

解: (1) 设大线圈中通电流 I_1 , 它在小线圈圆心 O' 点的磁感应强度的大小为

$$B_{21} = N_1 \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

由于 $d \gg r$, 可认为小线圈中的磁场基本上是均匀的。则通过小线圈的磁链为

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_{21} \pi r^2 = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 I_1 r^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

所以两线圈之间的互感为

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 r^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

(2) 由题意可知, 大线圈中的电流为 $I_1 = I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ 。根据法拉第电磁感应定律, 可得小线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon_2 = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 r^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} I_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

§ 14.5 磁场的能量

14.5.1 线圈的自感磁能

在电场中, 电容器是储存电能的器件, 电场的能量存在于充电电容器产生的电场中。在磁场中, 用于储存磁场能量的器件是线圈, 磁场的能量存在于载流线圈产生的磁场中。下面, 我们用类似于讨论电场能量的方法, 来讨论磁场的能量。

如图 14.32 所示, 是一个含有电阻 R 和线圈 L 的电路。当未闭合开关 k 时, 线圈中的电流为零; 当闭合开关 k 后, 线圈中的电流由零开始逐渐增大, 线圈中将产生自感电动势 ε_L 。由于自感电动势要反抗电流的变化, 因此回路中的电流不能立即达到稳定值, 而是有一个逐渐增大的过程。可以证明, 开关 k 合上后, 电流 i 随时间 t 的函数曲线如图 14.33 所示。

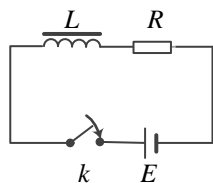


图14.32 RL电路

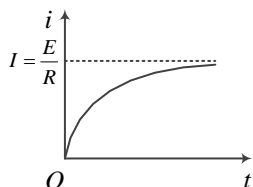


图14.33 RL电路中的 $i-t$ 曲线

假设电源的电动势为 E , 在 t 时刻, 回路中的电流为 $i = i(t)$, 线圈中的自感电动势为 $\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$, 由闭合回路的欧姆定律, 可得

$$E + \left(-L \frac{di}{dt} \right) = iR$$

在上式两端同时乘以 idt , 并移项, 有

$$Eidt = Lidi + i^2 Rdt$$

如果在 $t=0$ 时刻, 开关 k 刚合上, 在 $0 \rightarrow t$ 时间内, 电流从 0 增加到稳定值 I , 则有

$$\int_0^t Eidt = \int_0^t Lidi + \int_0^t i^2 Rdt = \frac{1}{2} LI^2 + \int_0^t i^2 Rdt$$

式中: $\int_0^t Eidt$ 是电源在 0 到 t 时间内提供的总能量; $\int_0^t i^2 Rdt$ 是这段时间内回路电阻所消耗的焦耳热; $\frac{1}{2} LI^2$ 是这段时间内电源反抗自感电动势所做的功。上式表明: 电源所提供的总能量一部分消耗在电阻上, 转换成焦耳热能; 另一部分将反抗自感电动势做功。实际上电源反抗自感电动势做的功, 并没有被消耗掉, 而是被储存在通电线圈所产生的磁场中, 转化为磁场的能量。

由此可知, 对于一个自感为 L 的线圈, 当通有电流 I 时, 线圈内储存的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (14.21)$$

式 (14.21) 称为线圈的**自感磁能公式**。从形式上看, 它与电容器的储能公式: $W_e = \frac{1}{2} CU^2$ 相似。

16.4.2 磁场的能量和能量密度

我们知道，磁场的性质是用磁感应强度 B 来描述的。既然如此，通电线圈中所储存的磁场能量必与其中的磁感应强度 B 的大小密切相关。为简单起见，我们以长直螺线管为例，来讨论的磁场能量。

当长直螺线管通以电流 I 时，螺线管中磁场的磁感应强度为 $B = \mu n I$ ，螺线管的自感系数 $L = \mu n^2 V$ ，把这些关系代入式 (16.27)，有

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} V$$

式中 V 为长直螺线管的体积。由于长直螺线管内部的磁场为均匀磁场，管外的磁场可以忽略不计，由此可得：单位体积内磁场的能量——称为**磁场的能量密度**为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (14.22)$$

对于各向同性的磁介质，由于 $B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$ ，故

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} H B \quad (14.23)$$

这一关系虽然是从特例导出的，但可以证明，它对任意磁场都适用。

在非均匀磁场中，可以将磁场存在的空间划分成无穷多个微小的体积元 dV ，于是体积元内的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV \quad (14.24)$$

在一个给定体积 V 内的磁场能量为

$$W_m = \int dW_m = \int_V w_m dV \quad (14.25)$$

例 14.12 一长直同轴电缆，其芯线是半径为 R_1 的实心导线，包线是半径为 R_2 的薄圆筒形导线，如图 14.34 所示，在芯线与包线之间充满了相对磁导率为 μ_r 的绝缘材料。稳恒电流 I 由芯线流入，包线流出，并且在导线截面上均匀分布。试求：

- (1) 同轴电缆内、外磁感应强度的分布；
- (2) 沿电缆轴线方向，每单位长度内磁场的能量。

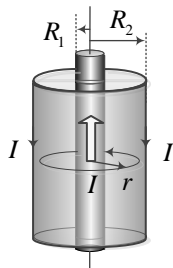


图14.34 例14.12的图

解: (1) 由于电流及其产生的磁场具有“无限长”的轴对称分布, 在与轴线垂直的平面内, 任取一个半径 r 的闭合回路, 由安培环路定律可得:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = \sum I$$

当 $r < R_1$ 时, $\sum I = \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} I$, 所以: $H_1 = \frac{I}{2\pi R_1^2} r$, $B_1 = \mu_1 H_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r$

当 $R_1 < r < R_2$ 时, $\sum I = I$, 所以: $H_2 = \frac{I}{2\pi r}$, $B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$

当 $r > R_2$ 时, $\sum I = 0$, 所以: $H_3 = 0$, $B_3 = \mu_3 H_3 = 0$

(2) 由 (1) 可得, 在芯线内部和芯线与包线之间的磁场能量密度分别为

$$w_{m1} = \frac{1}{2} B_1 H_1 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^4} r^2 \quad (r < R_1)$$

$$w_{m2} = \frac{1}{2} B_2 H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在电缆上任取一个半径分别为 r 、厚度为 dr , 长为 1 的薄圆筒形“体积元”, 其体积 $dV = 2\pi r dr$ 。则该“体积元”内贮存的磁能为

$$dW_m = w_m dV$$

所以该同轴电缆上, 沿轴线单位长度上磁场的能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \int dw_m = \int_0^{R_1} w_{m1} dV + \int_{R_1}^{R_2} w_{m2} dV \\ &= \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4} 2\pi r dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

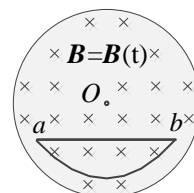
思考题

14.1 在法拉第电磁感应定律 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 中, 负号的意义是什么? 你如何直接利用法拉第电磁感应定律的办法来判断感应电动势的方向?

14.2 将一磁棒插入一闭合导体回路中: 一次迅速插入, 一次缓慢插入, 但两次插入的始末位置相同。问在两次插入中, 回路中的感应电动势是否相等? 通过导线横截面的感应电量是否相等? 为什么?

14.3 感生电场与静电场有哪些不同? 它们唯一的相同之处是什么?

14.4 如图所示,在圆柱形空间内有一磁感应强度为 B 的均匀磁场,其变化率为 $\frac{dB}{dt}$ 。若在图中 a, b 两点间放置一直导线 \overline{ab} 和一弯曲导线 ab ,试判断哪一根导线中感生电动势比较大?两根导线中感生电动势的方向如何?若将直导线放在圆柱形磁场空间的外部或沿径向放置,导线中还会有感生电动势吗?



题14.4的图

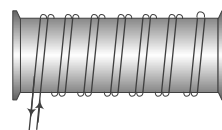
14.5 在某个空间里存在变化的磁场,如果没有导体,那么,在这个空间内是否存在感生电场?是否存在感生电动势?

14.6 在涡旋电场中,是否还可以引入电势和电势差的概念?为什么?

14.7 线圈自感的定义是 $L = \Psi/I$, 这是否表明自感的大小与线圈中电流的大小成反比?如果要设计一个自感较大的螺线管线圈,应该从哪些方面去考虑?

14.8 试说明自感电动势的方向和线圈中电流方向之间的关系。

14.9 有的电阻元件是用电阻丝绕成的,为了使它只有电阻而没有自感,常用双绕法(如图)。试说明为什么要这样绕。

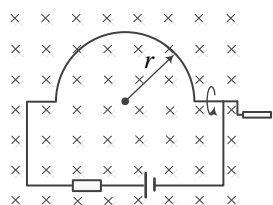


题14.9的图

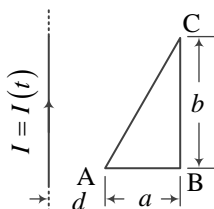
14.10 有两个相距很近的螺线管线圈,长度相同,半径稍有差别。要使两者的互感最大,应如何放置?要使互感最小,又该怎样放置?

习 题

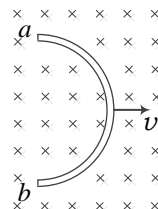
14.11 如图所示,用一根硬导线弯成半径为 r 的一个半圆,使这根半圆形导线在磁感强度为 B 的匀强磁场中以频率 f 旋转,整个电路的电阻为 R ,试求感应电流的表达式和最大值。



习题14.11的图



习题14.13的图



习题14.14的图

14.12 有一磁感应强度为 B 的均匀磁场,以恒定的变化率 $\frac{dB}{dt}$ 在变化。把一块质量为 m 的铜,拉成截面半径为 r 的细导线,并用这种导线做一个半径为 R 的圆形导体回路,圆形回路的平面与磁感应强度 B 垂直。试证明:导体回路中的感应电流为

$$I = \frac{m}{4\pi\rho d} \frac{dB}{dt}$$

式中 ρ 为铜的电阻率, d 为铜的密度。

14.13 一根长直导线中通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$, 式中 I_0 、 ω 均是常量,一个直角三角形线圈 ABC 与长

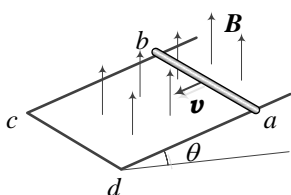
直导线共面，线圈的总匝数为 N ，其中 AB 边与长直导线垂直，线圈的各部分尺寸如图所示。假定线圈闭合后回路的总电阻为 R 。试求：任一时刻线圈内的感应电动势及感应电流。

14.14 如图所示，把一半径为 R 的半圆形导线 ab 置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中，当导线以速率 v 水平向右平动时，试求：导线中感应电动势 ε 的大小，并指出哪一端电势较高。

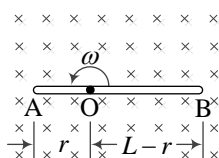
14.15 如图所示，一长为 l ，质量为 m 的导体棒 ab ，在磁感应强度为 B 的竖直匀强磁场中，沿倾角为 θ 的绝缘框架，从静止开始向下滑动。设摩擦阻力可以忽略不计，试求：

(1) 导体棒上任意时刻的动生电动势；

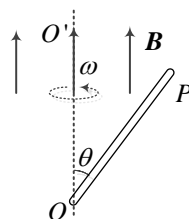
(2) 若框架材质为金属，且导体棒与金属框架始终保持良好接触，使两者形成一个闭合导体回路，回路总电阻 R 为常数，再求任意时刻的动生电动势。



习题14.15的图



习题14.16的图



习题14.17的图

14.16 如图所示，在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，有一根长为 L 的铜棒 AB ，正以角速率 ω 绕通过棒上 O 点、且与棒垂直的轴转动，轴的方向与 B 平行。假设转轴到 A 端的距离为 r ，试求：棒两端的电势差 $U_{AB}(=V_A - V_B)$ 。

14.17 如图所示，长为 L 的导体棒 OP ，处于均匀磁场中，并绕 OO' 轴以角速度 ω 旋转，棒与转轴间夹角恒为 θ ，磁感强度 B 与转轴平行。试求：棒 OP 在图示位置处的动生电动势。

14.18 如图所示，一根与长直导线垂直共面的金属杆 AB ，以匀速 $v = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 平行于一长直导线移动，长直导线通有电流 $I = 40 \text{ A}$ ，图中 $a = 0.10 \text{ m}$ ， $b = 1.0 \text{ m}$ 。试求：金属杆 AB 中的感应电动势，并判断杆的哪一端电势较高？

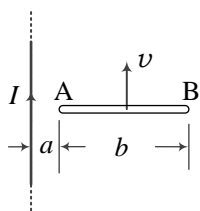
14.19 半径为 $R = 2.0 \text{ cm}$ 的“无限长”载流密绕螺线管，管内磁场可视为均匀磁场，管外磁场可近似看作零。若通电电流均匀变化，使得磁感强度 B 随时间的变化率 $\text{d}B/\text{d}t$ 为常量，且为正值，试求：

(1) 管内外由变化的磁场激发的感生电场的分布；

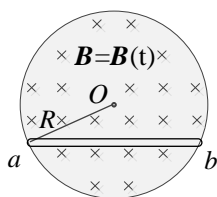
(2) 若 $\text{d}B/\text{d}t = 0.010 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$ ，求距离螺线管中心轴 $r = 5.0 \text{ cm}$ 处感生电场的大小和方向。

14.20 在半径为 R 的圆柱形空间中存在着均匀磁场，磁场方向与圆柱的轴线平行。如图所示，有一长为 L 的金属棒放在磁场中，棒的两端恰好在圆周的边缘上。设 B 随时间的变化率为 $\text{d}B/\text{d}t$ 。求证：棒上感应电动势的大小为

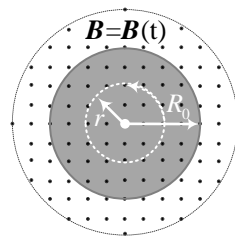
$$\varepsilon = \frac{L}{2} \sqrt{R^2 - (L/2)^2} \frac{\text{d}B}{\text{d}t}$$



习题14.18的图



习例14.20的图



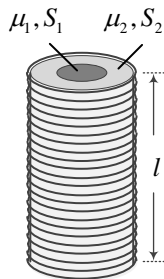
习例14.21的图

14.21 在一个圆柱形空间内有一个大小随时间变化的均匀磁场 \mathbf{B} ， \mathbf{B} 的方向与圆柱的轴线平行。磁场中有一个半径为 R_0 、厚度为 h 、电阻率为 ρ 的导体圆盘，盘面垂直于轴线，盘心在圆柱的中心轴线上，如图所示。当磁场大小以 $B = B_0 \cos \omega t$ 变化时，式中 B_0 和 ω 为常量，试求：

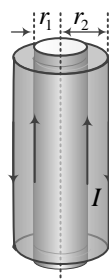
(1) 圆盘内涡电流的电流密度；

(2) 若 $R = 0.20 \text{ m}$ 、 $h = 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 、 $\rho = 6.0 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 、 $B_0 = 2.2 \times 10^{-2} \text{ T}$ 、 $\omega = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ，计算整个导体圆盘内涡电流的最大值。

14.22 如图所示，螺线管的管心是两个套在一起的同轴圆柱形均匀磁介质，其横截面积分别为 S_1 和 S_2 ，磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 ，管长为 l ，匝数为 N ，且管长远大于螺线管的直径。试求螺线管的自感。



习题14.22的图



习例14.23的图

14.23 设同轴电缆由半径为 r_1 、 r_2 的两个同轴薄壁长直导体圆筒组成，电流由内筒流入，外筒流出，如图所示。两圆筒之间充以相对磁导率 $\mu_r = 1$ 的绝缘体。试求：同轴电缆单位长度上的自感。

14.24 一个空心螺线管，长为 $l = 0.50 \text{ m}$ ，横截面积为 $S = 10 \text{ cm}^2$ ，若螺线管上密绕 $N = 3000$ 匝线圈，试求：

(1) 螺线管的自感 L ；

(2) 若线圈中通有电流 $i = 10 \sin 100\pi t \text{ A}$ ，螺线管上的自感电动势 \mathcal{E}_L 。

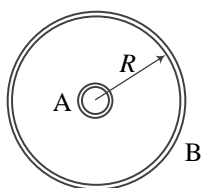
14.25 如图所示，一面积为 2.0 cm^2 、共 50 匝小圆线圈 A 放在半径为 20 cm 、共 100 匝的大圆线圈 B 的中央，两圆线圈同心共面。试求：

(1) 两线圈的互感；

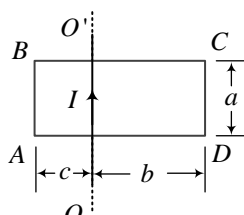
(2) 当小线圈 A 中通有电流 $i = 10 \sin 100\pi t \text{ A}$ ，大线圈 B 中的互感电动势。

14.26 如图所示，长直载流导线 OO' 与矩形导线框 $ABCD$ 共面，其中 AB 边与直导线 OO' 平行，在相交处两者互相绝缘。假设直导线中通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$ ，且 $b/c = 2$ ，试求：

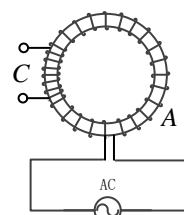
- (1) 长直导线与矩形导线框之间的互感系数；
 (2) 线框中的互感电动势。



习例14.25的图



习例14.26的图



习例14.27的图

14.27 如图所示，在截面为圆形的铁环上用漆包线均匀密绕了 $N_A = 200$ 匝的线圈 A，然后再在软铁环上绕一线圈 C，共 10 匝。假设铁环的平均半径为 $\bar{r}_A = 20 \text{ cm}$ ，软铁的相对磁导率为 $\mu_r = 1000$ ，铁环的横截面积为 $S = 0.50 \text{ cm}^2$ 。试估算：两线圈之间的互感系数（提示：细铁环内磁场可近似看成是均匀的）。

14.28 截面为矩形的密绕螺绕环线圈共有 N 匝，其尺寸如教材中图 14.29 所示，环内介质的相对磁导率为 μ_r 。试求：

- (1) 该螺绕环的自感；
 (2) 当螺绕环中通有电流 I 时，螺绕环中磁场的能量。

14.29 一个总匝数 $N = 250$ 、长 $l = 10 \text{ cm}$ 、直径 $d = 10 \text{ mm}$ 的载流密绕螺线管线圈（可视为长直螺线管），线圈中均匀充满了相对磁导率 $\mu_r = 500$ 的铁磁质。试求：当通有电流 $I = 2.0 \text{ A}$ 时，线圈中储存的磁场能量。

14.30 设同轴电缆由半径为 r_1 、 r_2 的两个同轴薄壁长直导体圆筒组成，电流由内筒流入，外筒流出，如习题 14.23 的图所示。两圆筒之间充以相对磁导率为 $\mu_r = 1$ 的绝缘体。试求：当电缆中通有电流 I 时，同轴电缆内单位长度上的磁场能量。

14.31 一根无限长载流直圆柱形导线，电流 I 沿导线的截面均匀分布。试证明：单位长度的导线内部所储存的磁场能量为： $\frac{\mu I^2}{16\pi}$ ，式中 μ 为导线的磁导率。