武汉大学数学与统计学院 2019－2020 第一学期

《线性代数 B》 （A 卷）

一、（10 分）计算下列行列式；$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$；

二、 （10 分分）设非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ x_1-2x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+2x_3-3x_4=b_3 \end{cases}$有三个解向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_3=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}^T$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求其通解（其中 $a_{ij},b_i,i=1,2,3;j=1,2,3,4$ 为已知常数）。

三、（10 分）设 m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 有关系

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \qquad\cdots\cdots \\ \beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1} \end{cases}$$

问 m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是否同秩？证明你的结论。

四、（10 分）已知矩阵 X 满足 $X+A^{-1}X=A^*+A^{-1}$ 其中 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

五、（10 分）讨论 a,b 取何值时，方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$有解。.

六（10 分）设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，试求：

（1） A 的特征值和特征向量； （2） A^k （k 为正整数）及其特征值和特征向量。

七、（8 分）设 A 和 B 为 n 阶矩阵，且满足 $A^2=A$，$B^2=B$，$r(A+B-E)=n$，证明：$r(A)=r(B)$.

八、（10 分）已知 $\alpha_1=(-1,0,1)^T,\alpha_2=(2,2,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组；（2）求生成的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基。

九、（12 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经过正交变换 $X=PY$ 化为 $y_1^2+2y_2^2$.

（1）判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 是否正定？（2）计算行列式 $|A|$ 的值；

（3）若$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，求矩阵$A$.

十、（10 分）在四维实向量构成的线性空间R^4中, 已知：$\alpha_1=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,0)^T$，$\alpha_3=(1,1,1,0)^T$，$\alpha_4=(1,1,1,1)^T$；$\beta_1=(1,-1,a,1)^T$，$\beta_2=(-1,1,2-a,1)^T$，$\beta_3=(-1,1,0,0)^T$，$\beta_4=(1,0,0,0)^T$.（1）求a使$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$为$R^4$的基;（2）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵$P$.

武汉大学数学与统计学院 2019－2020 第一学期

《线性代数 B》 （A 卷答案）

一、（10 分）计算下列行列式；$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$；

解 各列加到第一列，提出公因子，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}=(\sum_{i=1}^{n}a_i-x)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}a_i-x)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}x^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i-x).$$

二、（10 分）设非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ x_1-2x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+2x_3-3x_4=b_3 \end{cases}$有三个解向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_3=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}^T$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求其通解（其中 $a_{ij},b_i,i=1,2,3;j=1,2,3,4$ 为已知常数）。

解 由题设条件知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，因此

$$\xi_3-\xi_1=(2,1,6,1)^T,\xi_3-\xi_2=(1,3,3,1)^T$$

是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的线性无关解向量，所以齐次线性方程组系数矩阵的秩 $r(A)\le 2$

又系数矩阵有二阶子式 $\begin{vmatrix}2 & 1 \\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5\ne 0$，所以 $r(A)\ge 2$ 因此有 $r(A)=2$

因此 $\xi_3-\xi_1=(2,1,6,1)^T,\xi_3-\xi_2=(1,3,3,1)^T$ 为齐次线性方程组的基础解系。因此非齐次线性方程组的通解为：$k_1(\xi_3-\xi_1)+k_2(\xi_3-\xi_2)+\xi_3=k_1(2,1,6,1)^T+k_2(1,3,3,1)^T+(3,2,4,2)^T$

其中 k_1,k_2 为任意常数。

三、（10 分）设 m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 有关系

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \qquad\cdots\cdots \\ \beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1} \end{cases}$$

问 m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是否同秩？证明你的结论。

解 m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 秩相等。下面证之：

由条件知 $(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)P$

其中 $P=\begin{pmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&1&\cdots&1\\1&1&0&1&\cdots&1\\1&1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\\1&1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$ $|P|=\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&1&\cdots&1\\1&1&0&1&\cdots&1\\1&1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\\1&1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)(-1)^{n-1}\neq 0$

所以 m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价，故秩相同。

四、（10 分）已知矩阵 X 满足 $X+A^{-1}X=A^*+A^{-1}$ 其中 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解 方程两边左乘 A 得 $AX+X=AA^*+I$，即 $(A+I)X=(|A|+1)\mathrm{I}$，又 $|A|=-2$

所以有 $(A+I)X=-\mathrm{I}$，即 $X=-(A+I)^{-1}=-\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&\frac{1}{3}&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

五、（10 分）讨论 a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$ 有解。.

解: 由于系数行列式 $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}=b(1-a)$，所以当 $b\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，由克莱姆法则可知方程组有解。

当 $b=0$ 时，增广矩阵为 $\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&3\\1&0&1&4\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，方程组无解。

当 $a=1$ 时，增广矩阵为 $\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&0&1-2b\end{bmatrix}$ 故当 $a=1,b=\frac{1}{2}$ 时方程组有解，当 $a=1,b\neq\frac{1}{2}$ 时方程组无解。

六（10 分）设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，试求：

（1）A 的特征值和特征向量；（2）A^k（k 为正整数）及其特征值和特征向量。

解（1）$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&-1\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)^2$，故 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$。

当$\lambda_1=1$时，解线性方程组$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$，由$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

可得基础解系$\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，故$A$对应于$\lambda_1=1$的全部特征向量为$\boldsymbol{k_1p}_1$（$\boldsymbol{k_1}\neq\boldsymbol{0}$）；

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解$(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$，可得基础解系$\boldsymbol{p}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

故A对应于$\lambda_{2,3}=2$的全部特征向量为$\boldsymbol{k_2p}_2+\boldsymbol{k_3p}_3$（$\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3}$不全为零）；

（2）令$P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则有$P^{-1}AP=diag(1,2,2)$，即有$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}$，从而

$$A^k=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}^kP^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^k&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0&0\\2^k-1&2^k&-2^k+1\\2^k-1&0&1\end{pmatrix}$$

A^k的特征值为$\mu_1=1,\mu_2=\mu_3=2^k$。且A^k的特征值对应的特征向量与A相应特征值对应的特征向量相同。

七、(8分) 设A和B为n阶矩阵，且满足$A^2=A$，$B^2=B$，$r(A+B-E)=n$，证明：$r(A)=r(B)$。

证明　因为$A(A+B-E)=A^2+AB-A=AB$，　$(A+B-E)B=AB+B^2-B=AB$，

由$(A+B-E)$为可逆矩阵，可得：

$r(A(A+B-E))=r(A)=r(AB)$，$r((A+B-E)B)=r(B)=r(AB)$，所以，$r(A)=r(B)$.

八、(10分) 已知 $\alpha_1=(-1,0,1)^T,\alpha_2=(2,2,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$

（1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大线性无关组；（2）求生成的子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个标准正交基。

解　（1）将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$作为列构造矩阵，再作初等行变换化矩阵为阶梯形：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中任意两个都可为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大无关组，不妨取$\alpha_1,\alpha_2$

（2）由（1）知，α_1,α_2为$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个基，于是只需正交单位化即可。

正交化：令$\beta_1=\alpha_1=(-1,0,1)^T$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2+\beta_1=(1,2,1)^T$

单位化：$e_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}),e_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{2\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6})^T$

e_1,e_2就是生成的子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个标准正交基。

九、(12分) 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$经过正交变换$X=PY$化为$y_1^2+2y_2^2$.

（1）判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$是否正定？（2）计算行列式$|A|$的值；

（3）若 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解 （1）由已知条件知矩阵 A 的特征值为：$1,2,0$，所以二次型为半正定。

（2）$|A|=1\times 2\times 0=0$

（3）由已知 $Q^T AQ=diag(1,2,0)$

$$于是\ A=Qdiag(1,2,0)Q^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

十、（10 分）在四维实向量构成的线性空间 R^4 中, 已知：$\alpha_1=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,0)^T$，$\alpha_3=(1,1,1,0)^T$，$\alpha_4=(1,1,1,1)^T$；$\beta_1=(1,-1,a,1)^T$，$\beta_2=(-1,1,2-a,1)^T$，$\beta_3=(-1,1,0,0)^T$，$\beta_4=(1,0,0,0)^T$.（1）求 a 使 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 R^4 的基；（2）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 P.

解 （1）$a\neq 1$；

（2）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$， 则

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ a & 2-a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}。$$

设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$，则

$$P=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2 & 1\\ -1-a & a-1 & 1 & 0\\ a-1 & 1-a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$