武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 B（A 卷答题卡）

姓名 ____________ 班级 ____________

1

考	生	学	号									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

填涂样例	正确填涂 ! 错误填涂 # $ %	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

请将选择题、填空题的答案填于此：

一、单项选择题：

(1) ______ (2) ______ (3) ______ (4) ______

二、填空题：

(1) ___________ (2) ___________ (3) ___________ (4) ___________

符号说明：$\det(\boldsymbol{A})$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；$R(\boldsymbol{A})$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。

一、单项选择题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 0 & -1 & a & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 的秩为 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 a 的值为______.

(A) 0　　(B) 0 或 -1　　(C) -1　　(D) -1 或 1

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则 $\boldsymbol{A}^*=$______.

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(B) $-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(C) $\boldsymbol{A}$　　(D) $-\boldsymbol{A}$

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq 0$，$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$n\geq 3$，则在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值中，必然______.

(A) 有 n 个特征值等于 1　　(B) 有 $n-1$ 个特征值等于 1

(C) 有 1 个特征值等于 1　　(D) 没有 1 个特征值等于 1

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且秩相等，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则______.

(A) $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$，　　(B) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2R(\boldsymbol{A})$，

(C) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2R(\boldsymbol{A})$，　　(D) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$

二、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，行列式 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|2\boldsymbol{A}^*|=$________.

(2) D 中第 2 行元素的代数余子式的和 $\sum\limits_{j=1}^{4}A_{2j}=$______，其中

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

(3) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^1+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定，则实常数 a 的取值范围为______.

(4) $2n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=$______，其中 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & b\\ 0 & \cdots & b & 0\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ b & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

三、计算题(每小题 10 分，共 60 分)

(1) (本题 10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}.$$

(2) (本题 10 分)解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) (本题 10 分)设非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = d_1 \\ x_1 - 2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = d_2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = d_3 \end{cases}$ 有 3 个解向量

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求该方程组的通解(其中 a_i, b_j, c_k, d_t 为已知常数).

武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 B（A 卷答题卡）

姓名 ____________ 班级 ____________

1

填涂样例	正确填涂 ! 错误填涂 # $ %	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

考生学号

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

(4)（本题 10 分）设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=-1 \\ x_1+x_2+2x_3=b \\ 4x_1+5x_2+10x_3=2 \end{cases}$，试问：当 a,b 满足什么条件时，方程组有唯一解、无解、或有无穷多解．在有无穷多解时，求该非齐次方程组的通解并写出对应的齐次线性方程组的基础解系.

(5)（本题 10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_2x_3$ $(\lambda>0)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求实参数 λ 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$．

(6) （本题 10 分）在 4 维实向量构成的向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中，求 a 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的基，并求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2-a\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

四、证明题（每题 8 分，共 16 分）

(1) （本题 8 分）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是欧氏空间 V 的标准正交基，证明：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3),$$

也是 V 的标准正交基.

(2) （本题 8 分）设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型，存在 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$，使 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1>0$，$\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2<0$，证明：存在 n 维列实向量 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$.