2015-2016 学年第二学期《高等数学 B2》期中考试试题

1.（10 分）求圆周 $x^2+y^2+z^2-3x=0, 2x-3y+5z-4=0$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线和法平面方程。

2.（10 分）设直线 $L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 及平面 π ：$x+y+z=0$ 。

（1）求直线 L 在平面 π 上的投影直线 L_0 的方程；

（2）求直线 L_0 绕 z 轴转一周所成的曲面的方程。

3.（10 分）讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在（0,0）点的连续性，可导性和可微性。

4．（10 分）设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

5.（10 分）已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$，并且 $f(1,1)=2$，求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+\dfrac{y^2}{9}\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值。

6.（10 分）计算二重积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy$ 。

7.（10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-4\right|dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 9\right\}$。

8．（10 分）计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x+y)dv$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成。

9.（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：$\iint\limits_D f(x+y)dxdy=\int_0^a xf(x)dx$，其中 D: $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le a$。

10（10 分）设有一小山，取它的底面所在平面为 xOy 坐标面，其底部所占区域为 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2-xy\le 75\right\}$，小山的高度函数为

$h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$。

（1）设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$，试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式。

（2）现若利用此小山开展攀岩活动，为此需要在 D 的边界 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上寻找使得（1）中 $g(x, y)$ 最大的点作为攀登的起点，试确定该点的位置。