

武汉大学 2017-2018 第一学期线性代数 B 期末试题 A

1. (10 分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

2. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X , 使其满足 $(X-A)B=C$.

3. (10 分) 设 A 、 B 是两个三阶矩阵, 满足关系: $A^2 - AB - 2B^2 = A - 2BA - B$,

已知 $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $|A-B| \neq 0$, 求 A .

4. (10 分) 设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2, -1, 1. $B = A^3 - A^2 - 4A^{-2} + 5E$, 求行列式 $|B|$ 的值.

5. (8 分) 已知 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, -1, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, 1, 1)^T$,

$\alpha_4 = (-1, -1, 0, 1)^T$; $\eta_1 = (2, 1, 0, 1)^T$, $\eta_2 = (0, 1, 2, 2)^T$, $\eta_3 = (-2, 1, 1, 2)^T$, $\eta_4 = (1, 3, 1, 2)^T$ 是 R^4 中的两组基. 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 $\xi = (1, 0, 0, 0)$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标;

6. (8 分) 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$, (1) 求矩阵 A 的秩. (2) 求矩阵 A 列向量组的一个极大

线性无关组, 并将其余列向量用极大无关组线性表示.

7. (8 分) 设 n 维向量 β 和 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 都正交, 证明: $\beta = 0$.

8. (16 分) 就 λ 的取值讨论方程组 $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + (\lambda + 1)z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ (\lambda + 1)x + \lambda y + (2\lambda + 3)z = 1 \end{cases}$ 何时有一解, 何时有无解? 在有

无穷多解时, 求出一组解.

9. (12 分) 设二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4tx_2x_3$

(1) t 取什么值时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定的;

(2) 当 $t=1$ 时, 利用正交变换将二次型 f 化为标准型, 并写出正交矩阵.

10. (8 分) 设 r 是 n 阶矩阵 A 的秩 ($n \geq 2$), r' 是其伴随矩阵 A^* 的秩, 问 r' 与 r 之间有什么关系? 并说明理由.

武汉大学 2017-2018 第一学期线性代数 B 期末试题 A 解答

1. (10 分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} (x-k)$$

2. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X , 使其满足 $(X-A)B=C$.

解 $X-A=CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$X = CB^{-1} + A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (10 分) 设 A, B 是两个三阶矩阵, 满足关系: $A^2 - AB - 2B^2 = A - 2BA - B$,

已知 $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $|A-B| \neq 0$, 求 A .

解 由所给关系得 $(A+2B)(A-B) - (A-B) = 0$ 即 $(A+2B-E)(A-B) = 0$

由 $|A-B| \neq 0$ 知: $A = E - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

4. (10 分) 设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2, -1, 1. $B = A^3 - A^2 - 4A^{-2} + 5E$, 求行列式 $|B|$ 的值.

解 记 $B = \varphi(A)$, 且 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda^{-2} + 5$

由题设 A 的三个特征值分别为 2, -1, 1, 所以 $\varphi(A)$ 的特征值为

$$\varphi(2) = 2^3 - 2^2 - 4 \cdot 2^{-2} + 5 = 8, \quad \varphi(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1)^{-2} + 5 = -1$$

$$\varphi(1) = (1)^3 - (1)^2 - 4(1)^{-2} + 5 = 1 \quad \text{故} \quad |B| = \varphi(2)\varphi(-1)\varphi(1) = -8$$

5. (8 分) 已知 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, -1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (-1, 2, 1, 1)^T, \alpha_4 = (-1, -1, 0, 1)^T$;

$\eta_1 = (2, 1, 0, 1)^T, \eta_2 = (0, 1, 2, 2)^T, \eta_3 = (-2, 1, 1, 2)^T, \eta_4 = (1, 3, 1, 2)^T$ 是 R^4 中的两组基.

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 $\xi = (1, 0, 0, 0)$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标;

解 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵为

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}C.$$

$$\text{即 } \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{于是, 由基 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ 到基 } \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \text{ 的过渡矩阵为: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{而 } \xi \text{ 在 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ 下的坐标为 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{构造矩阵 } P = (B \mid \xi'), \quad P = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/13 \end{array} \right) = (E \mid B^{-1}\xi'),$$

$$\text{所以, } \xi = (1, 0, 0, 0) \text{ 在 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ 下的坐标为 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$6. (8 \text{ 分}) \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad (1) \text{ 求矩阵 } A \text{ 的秩. } (2) \text{ 求矩阵 } A \text{ 列向量组的一个极大线性无关}$$

组, 并将其余列向量用极大无关组线性表示。

$$\text{解: (1) 对 } A \text{ 作初等行变换: } A \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 故秩}(A) = 2.$$

(2) 分别记矩阵 A 的列向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$

$$\text{由 } A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故 α_1, α_2 为矩阵 A 列向量组的一个极大无关组, 且有

$$\alpha_3 = -4\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_4 = -28\alpha_1 - 12\alpha_2, \alpha_5 = -37\alpha_1 - 16\alpha_2, \alpha_6 = 13\alpha_1 + 5\alpha_2$$

7. (8分) 设 n 维向量 β 和 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 都正交, 证明: $\beta = 0$.

解: 由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 故 β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表出。设 $\beta = k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n$

两边与 $\alpha_i (i=1, \dots, n)$ 作内积, 得 $0 = (\beta, \alpha_i) = k_1(\alpha_1, \alpha_i), (\alpha_1, \alpha_i) \neq 0$, 得 $k_i = 0 (i=1, \dots, n)$

故 $\beta = 0$.

8. (16分) 就 λ 的取值讨论方程组 $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + (\lambda+1)z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda-1)z = \lambda \\ (\lambda+1)x + \lambda y + (2\lambda+3)z = 1 \end{cases}$ 何时有唯一解, 何时有无穷多解? 在有无穷多解

时, 求出一般解.

解: $\because |A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 \end{vmatrix} = 2\lambda(-1) = -2\lambda \quad \therefore \text{当 } \lambda \neq 0 \text{ 时, 原方程组有唯一解}$

$$\text{当 } \lambda = 0 \text{ 时, } \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore X = k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. (12分) 设二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4tx_2x_3$

(1) t 取什么值时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定的;

(2) 当 $t=1$ 时, 利用正交变换将二次型 f 化为标准型, 并写出正交矩阵.

$$\text{解: (1) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2t \\ 0 & 2t & 3 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 6 > 0$$

$$\Delta_3 = |A| = 2(9 - 4t^2) > 0 \Rightarrow |t| < \frac{3}{2} \quad \text{故当 } |t| < \frac{3}{2} \text{ 时, 二次型 } f(x_1, x_2, x_3) \text{ 正定.}$$

$$(2) \text{ 当 } t=1 \text{ 时, } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad |\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$$

$$e_1 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, e_2 = (1, 0, 0)^T, e_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

在正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 之下。

f 化成标准形: $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$

10. (8分) 设 r 是 n 阶矩阵 A 的秩 ($n \geq 2$), r' 是其伴随矩阵 A^* 的秩, 问 r' 与 r 之间有什么关系? 并说明理由。

解 (1) 当 $r = n$, 则 $r' = n$.

(2) 当 $r = n-1$, 则有 $|A| = 0$, 故 $A^*A = 0$, 得 $n - \text{秩}(A^*) \geq n-1$, 即 $\text{秩}(A^*) \leq 1$; 又由 $r = n-1$

知 $A^* \neq 0$, 故 $\text{秩}(A^*) \geq 1$, 从而有 $r' = 1$, (A_{ii} 中至少有一不为零)

(3) 当 $r < n-1$ 时 $A_{ij} = 0 (i, j = 1, \dots, n)$. 故 $r' = 0$.