

## 2003~2004 学年第二学期《高等数学》期末考试试题 A 卷答案

一、填空题 (每小题 2 分, 共 8 分):

(1) 解: 由高斯公式知, 所求积分:

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (1 - \sin y) dv = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} dv - \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \sin y dv = \frac{4}{3}\pi$$

(由  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \sin y dv = 0$ ); (2)  $\frac{2}{9}\{1, 2, -2\}$  或  $\frac{2}{9}i + \frac{4}{9}j - \frac{4}{9}k$ ;  $\frac{2}{9}$ ; (3) 1; (4)  $z^2 - 2y^2 = \frac{x^2}{h^2}$ ;

二、选择题 (每小题 2 分, 共 8 分): (1) A; (2) B; (3) A; (4) C;

三、(每小题 7 分, 共 28 分)

解: (1) 设  $\begin{cases} x+y=v \\ y=u \end{cases}$  即  $D$  变成  $D' = \left\{ (u, v) \mid \begin{cases} 0 \leq v \leq 1 \\ 0 \leq u \leq v \end{cases} \right\}$ ,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -1$ ,

$$I = \iint_{D'} e^u du dv = \int_0^1 dv \int_0^v e^u du = \int_0^1 v(e-1) dv = \frac{1}{2}(e-1);$$

$$(2) I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^t f(r) r^2 \sin \varphi dr = 4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr, \text{ 故}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I}{\pi t^4} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr}{\pi t^4} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 f(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = f'(0) = 1$$

(3) 在  $z + xy = f(xz, yz)$  两边同时对  $x$  求导, 得  $\frac{\partial z}{\partial x} + y = f'_1(z + x \frac{\partial z}{\partial x}) + f'_2 y \frac{\partial z}{\partial x}$

$$\text{解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'_1 z - y}{1 - f'_1 x - f'_2 y}$$

(4) 由题设方程的特征方程为  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ , 解出  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$ , 故齐次微分方程的通解为  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ . 其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

设题给方程的一个特解为  $y^* = A x e^{-2x}$ , 得

$$(y^*)' = A e^{-2x} - 2A x e^{-2x}, (y^*)'' = -2A e^{-2x} - (2A e^{-2x} - 4A x e^{-2x})$$

代入题给方程得  $-4A e^{-2x} + 4A x e^{-2x} + 3A e^{-2x} - 6A x e^{-2x} + 2A x e^{-2x} = 4e^{-2x}$ ,

即:  $-A e^{-2x} = 4e^{-2x}$ , 得  $A = -4$ , 即特解为  $y^* = -4x e^{-2x}$ .

由此得题给方程的通解为  $y = -4x e^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ .

四、(10 分)

解: 当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时, 显然  $f(x, y)$  连续.

$$\text{在点 } (0,0) \text{ 附近, 因为 } |f(x, y) - f(0,0)| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2},$$

故  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0)$ , 从而  $f(x, y)$  在点  $(0,0)$  连续.

在点  $(0,0)$  处, 按定义,

$$\text{有 } f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0,$$

故  $f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处有一阶偏导数.

$$\text{但因 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{1}{2},$$

故函数  $f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处不可微分。

五、(10 分)

$$\text{解: 由题设知需有: } \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [(\sin x - \varphi(x)) \frac{y}{x}],$$

$$\text{故得方程: } \varphi'(x) + \frac{1}{x} \varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{其通解为: } \varphi(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} (\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C) = \frac{1}{x} (-\cos x + C)$$

$$\text{由 } \varphi(\pi) = 1, \text{ 知 } C = \pi - 1, \text{ 故 } \varphi(x) = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{所以有: } I &= \int_A^B (\sin x - \varphi(x)) \frac{y}{x} dx + \varphi(x) dy \\ &= \int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} (\sin x - \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}) \frac{y}{x} dx + \frac{\pi - 1 - \cos x}{x} dy = \int_0^\pi dy = \pi \end{aligned}$$

六、(10 分)

解: 若设  $D$  为  $xoy$  平面上的圆域:  $x^2 + y^2 \leq 25$ , 那么曲面  $\Sigma$  的方程为  $z = 5 - y, (x, y) \in D$

$$\Sigma \text{ 表面上的面积微元 } ds = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy, \text{ 由: } \iint_D x dx dy = 0,$$

$$\text{我们有: } I = \iint_\Sigma (x + y + z) ds = \iint_D (x + y + 5 - y) \sqrt{2} dx dy = 5\sqrt{2} \iint_D dx dy = 125\sqrt{2}\pi$$

七、(10 分)

解: 法 (1) 化为无条件极值问题, 设  $P(x, y, z)$  为交线上的一点, 则  $P$  到原点的距离的平方为:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - y^2 = f(y), (\because x^2 + z^2 = 1 - 2y^2)$

$$\text{将 } x = 1 - 2y \text{ 代入 } x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \text{ 得: } (y - \frac{1}{3})^2 + \frac{z^2}{6} = \frac{1}{9}$$

$$\text{显然 } (x - \frac{1}{3})^2 \leq \frac{1}{9} \text{ 即 } 0 \leq y \leq \frac{2}{3} \text{ 因此 } y_{\max} = \frac{4}{9} \text{ 此时}$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad y = \frac{2}{3} \quad z = 0 \quad d^2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq d^2_{\min} = \frac{5}{9}$$

$$\text{故交线上距离原点最近的点为: } P(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$$

$$\text{法 (2) 由题设有 } d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ 即 } d^2 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{令 } F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + 2y - 1) + \lambda_2(x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} F_x = 2x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \\ F_y = 2y + 2\lambda_1 + 4y\lambda_2 = 0 \\ F_z = 2z + 2\lambda_2 z = 0 \\ F_{\lambda_1} = x + 2y - 1 = 0 \\ F_{\lambda_2} = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

故交线上距离原点最近的点为:  $P(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

八、(6分)

$$\begin{aligned} \text{解: 记 } D &= [a, b] \times [a, b], \quad 0 \leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = \iint_D [f(x) - f(y)]^2 dx dy \\ &= \iint_D f^2(x) dx dy - 2 \iint_D f(x)f(y) dx dy + \iint_D [f(y)]^2 dx dy \\ &= (b-a) \int_a^b f^2(x) dx + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy - 2 \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(y) dy \\ &= 2(b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2, \quad \text{故不等式成立,} \end{aligned}$$

显然由上述过程知等号成立的充要条件是  $\iint_D [f(x) - f(y)]^2 dx dy = 0$  由  $[f(x) - f(y)]^2$  连续, 所以  $\iint_D [f(x) - f(y)]^2 dx dy = 0$  的充要条件是  $f(x) - f(y) = 0, \forall x, y \in [a, b]$  即  $f(x)$  为常数。

九、(10分) **方法 1** 过点  $M$  且垂直于已知直线的平面方程为

$$3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0, \quad \text{即 } 3x + 2y - z - 5 = 0,$$

设它与已知直线的交点为  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , 则:

$$x_1 = -1 + 3t_1, \quad y_1 = 1 + 2t_1, \quad z_1 = -t_1,$$

将之代入上述平面方程, 得  $t_1 = \frac{3}{7}$ , 从而  $M_1\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ ,

因点  $M$  与  $M_1$  都在所求直线上, 所以不妨取所求直线的方向向量为

$$S = \overrightarrow{M_1M} = \frac{6}{7}\{2, -1, 4\}, \quad \text{故所求直线方程为: } \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

**方法 2** 设所求直线的方向向量为  $S = \{m, n, p\}$ , 已知直线过点  $N(-1, 1, 0)$ , 其方向为  $S = \{3, 2, -1\}$ , 则由所求直线与已知直线垂直知:  $S_1 \cdot S = 3m + 2n - p = 0$ , 又由这两条直线相交知, 三向量  $\overrightarrow{NM}, S, S_1$  共面。从而有

$$(\overrightarrow{NM} \times S) \cdot S = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0, \quad \text{即 } m - 2n - p = 0,$$

解上述两式, 得  $m : n : p = 2 : (-1) : 4$ , 故所求直线方程为:  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ 。

**方法 3** 已知直线过点  $N(-1, 1, 0)$   $\overrightarrow{NM} = \{3, 0, 3\}$ , 过点  $M$  与已知直线  $l$  的平面  $\pi$  方程法向

$$\text{量为 } \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \text{ 或 } \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{2, -4, 2\}, \quad \text{不妨取 } \vec{n} = \{1, -2, 1\}$$

所以平面  $\pi$  方程为:  $x - 2y - z + 3 = 0$  (1)

过点  $M$  与已知直线  $l$  垂直的平面方程为:  $3x + 2y - z - 5 = 0$  (2)

由 (1)、(2) 得所求的直线方程为:  $\begin{cases} x - 2y - z + 3 = 0 \\ 3x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$