2004～2005 学年第二学期《 高等数学 》期末考试试题（180 学时）

专业班级__________________学号_______________ 姓名__________

一、 填空题（本大题满分 24 分，每小题 4 分）

1、设 $f(x)$ 于 R 上连续，$F(u,v)=(v+u)\int_v^u f(t)dt$，则 $\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\partial v}\Big|_{(0,0)}=$ ___0___。

2、已知 L：$x^2+y^2=r^2$，逆时针方向，$I=\oint_L \frac{bydx+axdy}{x^2+y^2}$（$a$、$b$ 为常数），则积分 I 非零的充要条件是：$a\neq b$ ______。

3、设 Ω_1：$x^2+y^2+z^2\le 4$，Ω_2：$(x-1)^2+y^2\le 1$，$\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2$，$\Sigma$ 是 Ω 的边界，则第一型曲面积分

$I=\iint_\Sigma (z^2\sqrt{x^2+y^2}+x+y)zds=$ __0______。（$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dv=$ _0_）

4、设 $I=\int_{-1}^0 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{-x} dy$，则交换积分顺序后 $I=$ $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{-y} dx$，其积分值为 $\frac{\pi-2}{4}$ ______。

5、设 $f(x)=\cos x(1+\sin x)$ $(-\pi\le x\le\pi)$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=-\pi$ 处收敛到 _-1___；

其傅里叶系数 $a_0=$ _0__；$a_1=$ _1__；$b_2=$ _0.5__。

6、设 $y_1=x+e^{2x}$，$y_2=x+e^{-x}$，$y_3=x+e^{2x}+e^{-x}$ 是某个二阶线性非齐次微分方程的三个解，则此微分方程为 $y''-y'-2y=-2e^x$ ______，且其通解是 $y=$ $c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+x$ ______。

二、计算下列各题（本大题满分 40 分，每题 10 分）

1、设 $u = f(x,z)$，而 $z(x,y)$ 是由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 所确的函数，f 、 z 及 φ 均可微，$y\varphi'(z) - 1 \neq 0$，求 du 。

2、计算 $\iint_D \dfrac{\sin x + \sin y + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} dxdy$ 。其中 D：$x^2 + y^2 \leq 1$ 。

3、计算 $\iiint_\Omega (x + y + z) dv$ 。其中 Ω 表示球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 及 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$ 的公共部分。

4、设空间流动的流体，其密度 $\mu(x,y,z) = 1$ 。已知流速函数 $\vec{V} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k}$，求流体在单位时间内经曲面 $\sum$：$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 由内侧流向外侧的流量。

三、解答下列各题（本大题满分 36 分，每题 12 分）

1、求曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{k}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ k > 0)$ 上点 (a,b,c) 处的切平面方程及其与三个坐标平面所围成四面体体积之最小值。

2、对函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$，讨论下列问题：

1）、 $f(x,y)$ 在原点是否可微？给出理由。

2）、 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿 $\vec{l} = (1,1)$ 之方向导数是否存在？其理由是何？

3、已知 φ 具二阶连续导数，且 $\varphi(1) = 1$，$\varphi'(1) = 2$, 试确定 $\varphi(x)$, 使

$$2\left(\varphi(x) + \varphi'(x)y - y^2\right)dx + \left(x\varphi'(x) - 4xy - 2y^2\right)dy = 0$$

为全微分方程，并求出此方程的通解。