武汉大学 2020−2021 学年第一学期期末考试

微积分 1 · A 卷 参考答案

1.（6 分）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sqrt[n]{3}\right)^n$.

解: 令 $\frac{1}{n}=x$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sqrt[n]{3}\right)^n &= \lim_{x\to 0^+}(x+3^x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \exp\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(3^x+x-1)\\ &= \exp\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3^x-1}{x}+1\right)\\ &= \exp(\ln 3+1)\\ &= \mathrm{e}^{\ln 3\,\mathrm{e}}\\ &= 3\,\mathrm{e}.\end{aligned}$$

2. (6 分) 求常数 a, b, 使得 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}+b, & (x\leqslant 0),\\ \sin ax, & (x>0)\end{cases}$ 在点 $x=0$ 可导.

解: 由

$$\begin{aligned}f'_-(0) &= \lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{e^{2x}+b-(1+b)}{x}\\ &= \lim_{x\to -0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}=2,\\ f'_+(0) &= \lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin ax-(1+b)}{x},\end{aligned}$$

要上述极限存在, 必须分子的极限为零, 即得 $1+b=0$, 于是 $b=-1$. 此时

$$f'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{\sin ax}{x}=a,$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 得 $a=2$. 所以当 $a=2$, $b=-1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

3. （6 分）找出函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的所有间断点, 并判断其类型.

解: 其间断点为使 $\dfrac{x}{1-x}$ 无定义的点, 以及使 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}=0$ 的点. 即 $x=0$ 和 $x=1$ 为函数的间断点.

(1) 因 $x\to 0$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to 0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$, 则 $x=0$ 为函数的第二类间断点 (无穷间断点).

(2) 因 $x\to 1^+$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to -\infty$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$; 而 $x\to 1^-$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to +\infty$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to +\infty$, 从而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$, 故 $x=1$ 为函数的第一类间断点 (跳跃间断点).

4.（6 分）已知当 $x\to 0$ 时, $3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小, 求正整数 n.

解: $3x-4\sin x+\sin x\cos x=3x-4\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{3-4\cos x+\cos 2x}{nx^{n-1}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin x-2\sin 2x}{n\cdot(n-1)x^{n-2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin x(1-\cos x)}{n\cdot(n-1)x^{n-2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4x\cdot\frac{1}{2}x^2}{n\cdot(n-1)x^{n-2}}.\end{aligned}$$

$n=5$ 时, 上述极限为 $\dfrac{1}{10}$. 故 $n=5$.

5.（6 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解: 应用定积分求极限.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

6.（6 分）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

解: (1) $x<0$ 时,

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

此时 $x<t<0$, $f(t)=0$. 故

$$\Phi(x)=-\int_x^0 0\,\mathrm{d}t=0.$$

(2) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时,

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\big[\cos t\big]_0^x$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos x-1)=\frac{1-\cos x}{2}.$$

(3) $x>\pi$ 时,

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t+\int_\pi^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_\pi^x 0\,\mathrm{d}t\\&=1+0=1.\end{aligned}$$

综上,

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

7. （6 分）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\displaystyle\int_a^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$, 求常数 a.

解: 分别求出等式两端的值:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\mathrm{e}^{-2a},$$
$$\int_a^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{2a+1}{4}\,\mathrm{e}^{-2a},$$

再由 $\dfrac{2a+1}{4}=1$, 解得 $a=\dfrac{3}{2}$.

8.（6 分）求微分方程 $y''-7y'+6y=6x^2-2x-1$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2-7r+6=0$, 解得 $r_1=1, r_2=6$. 于是原方程对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\,\mathrm{e}^x+C_2\,\mathrm{e}^{6x}$$

由于这里 $\lambda=0$ 不是特征根, 所以设原方程的特解为 $y^*=ax^2+bx+c$, 代入原方程得

$$a=1,\quad b=2,\quad c=\frac{11}{6}.$$

故所求通解为

$$y=C_1\,\mathrm{e}^x+C_2\,\mathrm{e}^{6x}+x^2+2x+\frac{11}{6}.$$

9.（10 分）设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=4$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解: 先证明 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$, 为使用洛必达法则做准备.

由 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 连续, 知

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0),\quad \lim_{x\to0}f'(x)=f'(0).$$

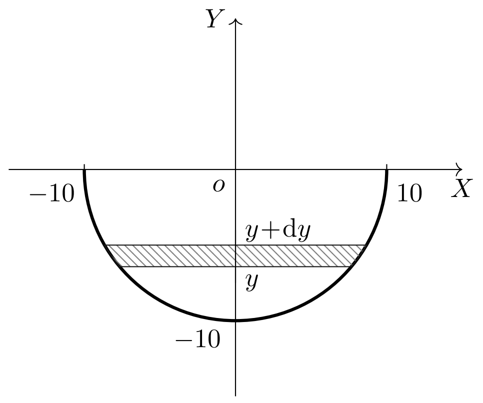
下面说明 $f(0)=0$, $f'(0)=0$. 事实上,

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,$$
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

故

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\right\} && (\text{因 }\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0)\\&=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}\right\} && (\text{因 }\lim_{x\to0}f(x)=0)\\&=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}\right\} && (\text{因 }\lim_{x\to0}f'(x)=0)\\&=\mathrm{e}^2. && (\text{因 }\lim_{x\to0}f''(x)=f''(0)=4)\end{aligned}$$

10. （8 分）如图, 设有半径为 10 米的半球形水池, 池内装满水, 试求将池内水从池顶全部抽出池外所耗费的功. (水的密度 $\rho=1000\,\mathrm{kg/m^3}$)



解: 以球心为原点建立坐标系.

在区间 $[-10, 0]$ 上任取一微元区间 $[y, y+\mathrm{d}y]$, 对应薄片的体积为

$$\mathrm{d}V = \pi x^2\,\mathrm{d}y = \pi(100-y^2)\,\mathrm{d}y.$$

对该薄片所做的功为

$$\mathrm{d}W = |y|g\,\mathrm{d}V = |y|g\cdot\pi(100-y^2)\,\mathrm{d}y,$$

所以

$$W = \pi g\int_{-10}^{0}|y|(100-y^2)\,\mathrm{d}y = \pi g\int_{-10}^{0}y(y^2-100)\,\mathrm{d}y = 2500\pi g.$$

11.（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 且 $f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解: 记 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = A$, 则 $f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + A$. 故

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{1+\cos^2 x}+A\right)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi(-\arctan\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

即 $f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + \dfrac{\pi^2}{2}$.

12. （8 分）已知参数方程 $\begin{cases} x = 2(1-\cos\theta), \\ y = 4\sin\theta. \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{4\cos\theta}{2\sin\theta} = 2\cot\theta, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\psi'(\theta)}{\varphi'(\theta)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -2\csc^2\theta\cdot\frac{1}{2\sin\theta} = -\csc^3\theta. \end{aligned}$$

☞ 常见错误:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = (2\cot\theta)' = -2\csc^2\theta.$$

13.（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上三阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 设 $F(x) = x^2 f(x)$, 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'''(\xi) = 0$.

证: 由于 $F(0) = F(1) = 0$, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 可导, 则 $\exists\xi_1\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi_1) = 0$. 又

$$F'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x),$$

及由 $F'(0) = 0$, $F'(\xi_1) = 0$, $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 可导, 则 $\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$, 使得 $F''(\xi_2) = 0$. 又

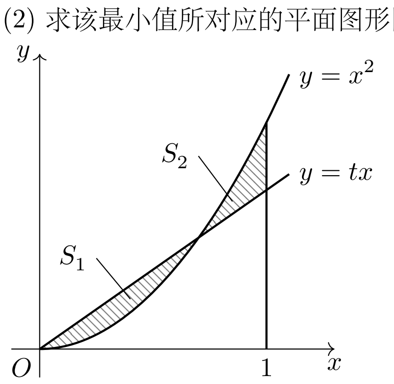
$$F''(x) = x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x),$$

及由 $F''(0) = F''(\xi_2) = 0$, $F''(x)$ 在 $[0,1]$ 可导, 则 $\exists\xi\in(0,\xi_2)\subseteq(0,1)$, 使得 $F'''(\xi) = 0$.

14. （10 分）设直线 $y = tx$ $(0<t<1)$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形面积为 S_1, 它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2.

(1) 试确定 t 的值, 使 S_1+S_2 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形阴影部分围绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.



解: 1) 直线 $y = tx$ 与抛物线 $y = x^2$ 相交于点 (t, t).

$$\begin{aligned} S = S_1+S_2 &= \int_0^t(tx-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_t^1(x^2-tx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

将 S 对 t 求导得 $S' = t^2-\dfrac{1}{2}$. 令 $S' = 0$, 得 $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 又 $S''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0$, 所以 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为极小值, 也为最小值, 其值为

$$S_{\min} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

2) $V_x = \pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}x^2-x^4\right)\mathrm{d}x + \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left(x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi.$