武汉大学 2023-2024 学年第二学期期末考试
线性代数 A（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & a+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+1\end{vmatrix}$

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$， n 为正整数，计算 A^n

三、（12 分）设 A 为 3 阶矩阵，已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 且 $AB=A+B$, 求矩阵 B

四、（10 分）设有线性方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

五、（10 分）已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\\-2\end{pmatrix},$$

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组和向量组的秩，并把其余向量用这个极大线性无关组线性表示。

六、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k$ 是 $Ax=0$ 基础解系，向量 γ 满足 $A\gamma\neq 0$，证明：
γ， $\alpha_1+\gamma,\alpha_2+\gamma,\cdots,\alpha_k+\gamma$ 线性无关。

七、（14 分）在四维实向量构成的向量空间 R^4 中, 已知：$\gamma=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}。$$

（1）求γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标；

（2）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵$P$；

（3）求γ在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标。

八、（12 分）已知 −2，2，2 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值，向量$\alpha=(1, 1, 1)^T$ 是 A 的对应于$\lambda_1=-2$的特征向量，求实对称矩阵 A。

九、（12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3 & 4-a & 2b-1\\ a-2b & c & 2-c\\ c-1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

其中 a，b，c 为常数。

（1）写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的具体形式；

（2）求一个正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵。