离散数学基础

高等教育出版社

目录

目录

1.1 集合的基本概念

在朴素集合论中,集合是一个不能精确定义的基本概念. 将一些确定的、彼此不同的事物,无序汇集到一起组成一个整体就称作 集合 ,而这些事物就是这个集合的 元素 .
通常用大写英文字母表示集合,用小写字母或数字表示元素. 例如,

自然数集 $\mathbb{N}$(在离散数学中认为 0 也是自然数);

整数集 $\mathbb{Z}$、正整数集 $\mathbb{Z}^+$、非零整数集 $\mathbb{Z}^*$;

有理数集 $\mathbb{Q}$、正有理数集 $\mathbb{Q}^+$、非零有理数集 $\mathbb{Q}^*$;

实数集 $\mathbb{R}$、正实数集 $\mathbb{R}^+$、非零实数集 $\mathbb{R}^*$;

复数集 $\mathbb{C}$、非零复数集 $\mathbb{C}^*$ 等.

1.1 集合的基本概念

在朴素集合论中,集合是一个不能精确定义的基本概念. 将一些确定的、彼此不同的事物,无序汇集到一起组成一个整体就称作 集合 ,而这些事物就是这个集合的 元素 .

通常用大写英文字母表示集合,用小写字母或数字表示元素. 例如,

自然数集 $\mathbb{N}$(在离散数学中认为 0 也是自然数);

整数集 $\mathbb{Z}$、正整数集 $\mathbb{Z}^+$、非零整数集 $\mathbb{Z}^*$;

有理数集 $\mathbb{Q}$、正有理数集 $\mathbb{Q}^+$、非零有理数集 $\mathbb{Q}^*$;

实数集 $\mathbb{R}$、正实数集 $\mathbb{R}^+$、非零实数集 $\mathbb{R}^*$;

复数集 $\mathbb{C}$、非零复数集 $\mathbb{C}^*$ 等.

有一个特殊的不含任何元素的集合,这个集合称作 空集 ,用 $\varnothing$ 表示.

如果 x 是集合 X 的一个元素,那么称 x 属于 X,记作 $x \in X$;否则称 x 不属于 X,记作 $x \notin X$.

例如,3 属于正整数集 $\mathbb{Z}^+$,而 -3 不属于正整数集 $\mathbb{Z}^+$,分别记作 $3 \in \mathbb{Z}^+$ 和 $-3 \notin \mathbb{Z}^+$.

常见的表示集合的方法

列举法 是列出集合的所有元素，元素之间用逗号隔开，并把它们用大括号括起来. 例如，

小于 10 的素数的集合 $\{2, 3, 5, 7\}$；

26 个小写英文字母的集合 $\Sigma = \{a, b, c, \cdots, z\}$；

所有自然数的集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

常见的表示集合的方法

列举法 是列出集合的所有元素,元素之间用逗号隔开,并把它们用大括号括起来. 例如,

小于 10 的素数的集合 $\{2,3,5,7\}$;

26 个小写英文字母的集合 $\Sigma=\{a,b,c,\cdots,z\}$;

所有自然数的集合 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$.

描述法 是将集合中元素的共同属性用文字、符号或式子等描述出来,以 $\{x|x\text{具有性质}P\}$ 的形式写在大括号内. 例如,

$\varnothing=\{x|x\neq x\}$;

小于 10 的素数的集合 $\{n|n\text{是小于}10\text{的素数}\}$;

所有有理数的集合 $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\}$;

所有复数的集合 $\mathbb{C}=\{a+b\mathrm{i}|a,b\in\mathbb{R}\}$;

所有正整数的集合 $\mathbb{Z}^+=\{n|n\in\mathbb{Z},n>0\}$.

方便起见,我们经常会将形如 $\{x|x\in X,x\text{具有性质}P\}$ 的集合直接写成 $\{x\in X|x\text{具有性质}P\}$ 的形式. 例如,$\mathbb{Z}^+=\{n\in\mathbb{Z}|n>0\}$.

常见的表示集合的方法

归纳定义法 的基本思想是，

首先从待定义集合 X 中的初始元素开始，以此作为归纳的基础；

然后提供若干规则，说明如何由已在集合 X 中的元素产生 X 中的新元素，这些规则组成了归纳过程；

最后表明 X 中的每个元素均是由有限次应用初始元素和这些规则产生的.

常见的表示集合的方法

归纳定义法的基本思想是,

首先从待定义集合 X 中的初始元素开始,以此作为归纳的基础;

然后提供若干规则,说明如何由已在集合 X 中的元素产生 X 中的新元素,这些规则组成了归纳过程;

最后表明 X 中的每个元素均是由有限次应用初始元素和这些规则产生的.

换言之,归纳过程给出了 X 中元素的一个隐式约束,即除了 X 中的初始元素和利用在归纳过程中指定的规则形成的元素外,X 中再无其他元素. 例如,自然数集 $\mathbb{N}$ 可以归纳定义为:

(1) $0 \in \mathbb{N}$;

(2) 若 $n \in \mathbb{N}$,则 $n+1 \in \mathbb{N}$;

(3) 除了有限次应用 (1) 和 (2) 产生的元素外,$\mathbb{N}$ 中再无其他元素.

方便起见,有时也会将上面最后一步省略. 我们将在第 13 章命题逻辑、第 14 章谓词逻辑、第 16 章形式语言与文法以及第 17 章有限状态自动机与正则语言等章节见到更多采用归纳法定义集合的例子.

集合间的关系

定义 1.1.1

设 A, B 为集合,如果对任意 x,当 $x \in A$ 时均有 $x \in B$,那么称 A 是 B 的 **子集**,记作 $A \subseteq B$,也称 A **包含于** B,或 B **包含** A.
若 A 不包含于 B 或 B 不包含 A,则记作 $A \nsubseteq B$.

例如,$\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$,但 $\mathbb{N} \nsubseteq \mathbb{Z}^+$.
由定义1.1.1知,$A \subseteq B$ 当且仅当 A 中的每个元素都是 B 中的元素.
因此,对任意集合 A,均有 $\varnothing \subseteq A$ 和 $A \subseteq A$,即,空集是任何集合的子集,且每个集合都是自身的子集.

集合间的关系

定义 1.1.2

设 A, B 为集合,如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,那么称 A 与 B **相等**,记作 $A = B$;否则,称 A 与 B **不相等**,记作 $A \neq B$.

例如,$\{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\} = \{1, -1\}$;$\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}^+$.
由空集是任何集合的子集的性质不难证明,空集是唯一的,所以前文用 $\varnothing$ 表示空集是合理的.

集合间的关系

定义 1.1.2

设 A, B 为集合,如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,那么称 A 与 B 相等,记作 $A = B$;否则,称 A 与 B 不相等,记作 $A \neq B$.

例如,$\{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\} = \{1, -1\}$;$\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}^+$.
由空集是任何集合的子集的性质不难证明,空集是唯一的,所以前文用 $\varnothing$ 表示空集是合理的.

定义 1.1.3

设 A, B 为集合,如果 $A \subseteq B$,但 $A \neq B$,那么称 A 是 B 的 真子集,记作 $A \subset B$ 或 $A \subsetneq B$;若 A 不是 B 的真子集,则记作 $A \not\subset B$.

例如,空集 $\varnothing$ 是任何非空集合的真子集;$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,但 $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}^+$,$\mathbb{Z}^- \not\subset \mathbb{N}$.

集合间的关系

定义 1.1.4

设 A 为集合,称 A 的所有子集构成的集合 $\{X|X \subseteq A\}$ 为 A 的 **幂集** ,记作 $\mathcal{P}(A)$.

例如,$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$,$\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

集合间的关系

定义 1.1.4

设 A 为集合,称 A 的所有子集构成的集合 $\{X|X \subseteq A\}$ 为 A 的 幂集 ,记作 $\mathcal{P}(A)$.

例如,$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$,$\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

定义 1.1.5

在一个具体问题中,如果一个集合含有该研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为 全集 ,通常记作 U.

全集是一个相对的概念. 例如,当我们考虑两个整数的四则运算时,可将有理数集 $\mathbb{Q}$ 视作全集,也可将实数集 $\mathbb{R}$ 视作全集.

多重集

如前所述，集合中的元素是互不相同的，但在实际应用中，我们也会碰到元素多次出现的情形，例如，3 个苹果，2 个桔子.

为了区别起见，我们称元素可以重复出现的集合为 多重集，多重集中一个元素重复出现的次数称作该元素的 重数 (或 重复度).

在多重集的表示中，我们可以列举出所有的(包括重复的)元素，也可以将重数写在对应元素的前面. 例如，在多重集 $\{a, a, b, b, b, c, d\}$ 中，a, b, c, d 的重数分别为 $2, 3, 1, 1$，所以也可将其写成 $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 1 \cdot d\}$.

多重集

如前所述,集合中的元素是互不相同的,但在实际应用中,我们也会碰到元素多次出现的情形,例如,3 个苹果,2 个桔子.

为了区别起见,我们称元素可以重复出现的集合为 多重集 ,多重集中一个元素重复出现的次数称作该元素的 重数 (或 重复度).

在多重集的表示中,我们可以列举出所有的(包括重复的)元素,也可以将重数写在对应元素的前面. 例如,在多重集 $\{a, a, b, b, b, c, d\}$ 中,a, b, c, d 的重数分别为 $2, 3, 1, 1$,所以也可将其写成 $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 1 \cdot d\}$.

因为可以将通常意义下无元素重复出现的集合,看成元素重数为 1 的多重集,所以多重集是普通集合的一种推广.

尽管如此,在没有特别说明是多重集的情况下,我们默认集合中的元素是互不相同的.

集合的运算

正如算术运算处理数字,集合运算也遵循一系列规则,它们以集合作为操作对象,通过既定的运算规则,生成一个新的集合作为结果.

定义 1.2.1

设 A,B 为集合. 定义:

(1) A 和 B 的 **并集** $A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$,即由 A 和 B 中所有元素组成的集合.

(2) A 和 B 的 **交集** $A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$,即由 A 和 B 中所有公共元素组成的集合.

(3) A 和 B 的 **差集** $A\backslash B=\{x|x\in A且x\notin B\}$,即由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合. 有时也将差集 $A\backslash B$ 记作 $A-B$. 特别地,对于给定的全集 U,我们称差集 $U\backslash A$ 为 A 的 **补集**,简记作 $\bar{A}$.

(4) A 和 B 的 **对称差集** $A\oplus B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$,即由属于 A 但不属于 B 以及属于 B 但不属于 A 的所有元素组成的集合.

集合的运算

例 1.2.1

设全集为不超过 10 的正整数集,即 $U=\{1,2,\cdots,10\}$, $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$,计算 $A\cup B, A\cap B, B\cap C, A\backslash B, B\backslash A, \bar{A}, A\oplus B$.

集合的运算

例 1.2.1

设全集为不超过 10 的正整数集，即 $U = \{1, 2, \cdots, 10\}$，$A = \{2, 3, 5, 7\}$，$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$，$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$，计算 $A \cup B, A \cap B, B \cap C, A \backslash B, B \backslash A, \bar{A}, A \oplus B$.

解

由定义1.2.1，易得：$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$，$A \cap B = \{3, 5, 7\}$，$B \cap C = \varnothing$，$A \backslash B = \{2\}$，$B \backslash A = \{1, 9\}$，$\bar{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$，$A \oplus B = \{1, 2, 9\}$.

在上例中，我们注意到，$B \cap C = \varnothing$，这意外着 B 和 C 没有公共元素. 一般地，若两个集合的交集为 $\varnothing$，则称这两个集合是 不交 的.

集合的运算

在例1.2.1中, $A \oplus B = \{1, 2, 9\} = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
事实上, 不难证明, 对任意集合 A, B, 都有

$$A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B). \tag{1.2.1}$$

换言之, 我们可以将式 (1.2.1) 作为对称差集的另一种定义.

集合的运算

在例1.2.1中,$A \oplus B = \{1,2,9\} = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
事实上,不难证明,对任意集合 A, B,都有

$$A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B). \tag{1.2.1}$$

换言之,我们可以将式 (1.2.1) 作为对称差集的另一种定义.
另外,也可以将 A 和 B 的差集 $A \backslash B$ 表示成 A 与 B 的补集的交集,即

$$A \backslash B = A \cap \bar{B}. \tag{1.2.2}$$

集合的运算

不难将上述集合的并、交、差等运算推广到多重集.

设 A, B 为多重集,定义 A 和 B 的 并集 为多重集 $A \cup B$,其元素重数是该元素在 A 和 B 中重数的最大值;

定义 A 和 B 的 交集 为多重集 $A \cap B$,其元素重数是该元素在 A 和 B 中重数的最小值;

定义 A 和 B 的 差集 为多重集 $A \backslash B$,其元素重数是该元素在 A 中的重数减去它在 B 中的重数,若差为负数,则重数就为 0.

集合的运算

不难将上述集合的并、交、差等运算推广到多重集.

设 A, B 为多重集,定义 A 和 B 的 并集 为多重集 $A \cup B$,其元素重数是该元素在 A 和 B 中重数的最大值;

定义 A 和 B 的 交集 为多重集 $A \cap B$,其元素重数是该元素在 A 和 B 中重数的最小值;

定义 A 和 B 的 差集 为多重集 $A \backslash B$,其元素重数是该元素在 A 中的重数减去它在 B 中的重数,若差为负数,则重数就为 0.

例如,设 $A = \{2 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 1 \cdot d\}$, $B = \{3 \cdot a, 2 \cdot b, 2 \cdot e\}$,则有

$A \cup B = \{3 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 1 \cdot d, 2 \cdot e\}$,

$A \cap B = \{2 \cdot a, 2 \cdot b\}$,

$A \backslash B = \{1 \cdot b, 1 \cdot c, 1 \cdot d\} = \{b, c, d\}$.

集合运算的性质

集合的并、交、差和补运算满足很多恒等式,概括如下.

定理 1.2.1

设 U 为全集,$A, B, C \in \mathcal{P}(U)$.

(1) (幂等律) $A \cup A = A, A \cap A = A$.

(2) (交换律) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(3) (恒等律) $A \cup \varnothing = A, A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap U = A$.

(4) (补律) $\bar{\varnothing} = U, \bar{U} = \varnothing, \bar{\bar{A}} = A, A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \varnothing$.

(5) (结合律) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(6) (分配律) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(7) (吸收律) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$.

(8) (德·摩根律) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

定理1.2.1的证明

根据定义1.1.2，要证明两个集合相等，只需要证明这两个集合互相包含．在此我们选证分配律中的第一个等式和德·摩根律中的第二个等式，其他留给读者完成．

先证明 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

对任意 $x \in A \cup (B \cap C)$，由并集定义知，$x \in A$ 或 $x \in B \cap C$. 当 $x \in A$ 时，显然有 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$，于是有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 当 $x \in B \cap C$ 时，有 $x \in B$ 且 $x \in C$，从而有 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$，故有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 这就证明了 $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

定理1.2.1的证明

根据定义1.1.2,要证明两个集合相等,只需要证明这两个集合互相包含. 在此我们选证分配律中的第一个等式和德·摩根律中的第二个等式,其他留给读者完成.

先证明 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

对任意 $x \in A \cup (B \cap C)$,由并集定义知,$x \in A$ 或 $x \in B \cap C$. 当 $x \in A$ 时,显然有 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$,于是有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 当 $x \in B \cap C$ 时,有 $x \in B$ 且 $x \in C$,从而有 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$,故有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 这就证明了 $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

反过来,对任意 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$,我们有 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$. 由此可知,如果 $x \notin A$,那么必然有 $x \in B$ 且 $x \in C$,即 $x \in B \cap C$,从而有 $x \in A \cup (B \cap C)$. 如果 $x \in A$,那么显然有 $x \in A \cup (B \cap C)$. 这证明了 $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

综上,我们证明了 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

定理1.2.1的证明

下面证明 $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

对任意 $x\in\overline{A\cap B}$,由补集定义知,$x\in U$,但 $x\notin A\cap B$. 由后者知,有 3 种可能的情形:

(i) $x\in A\backslash B$. 这意味着 $x\in\bar{B}$,从而有 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$;

(ii) $x\in B\backslash A$. 这意味着 $x\in\bar{A}$,从而也有 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$;

(iii) $x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\in\bar{A}$ 且 $x\in\bar{B}$,故有 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$.

因此,这 3 种情形下均有 $\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cup\bar{B}$ 成立.

定理1.2.1的证明

下面证明 $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

对任意 $x\in\overline{A\cap B}$,由补集定义知,$x\in U$,但 $x\notin A\cap B$. 由后者知,有 3 种可能的情形:

(i) $x\in A\backslash B$. 这意味着 $x\in\bar{B}$,从而有 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$;

(ii) $x\in B\backslash A$. 这意味着 $x\in\bar{A}$,从而也有 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$;

(iii) $x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\in\bar{A}$ 且 $x\in\bar{B}$,故有 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$.

因此,这 3 种情形下均有 $\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cup\bar{B}$ 成立.

反过来,给定 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$,则有 $x\in\bar{A}$ 或 $x\in\bar{B}$,即 $x\in U$ 但 $x\notin A$,或 $x\in U$ 但 $x\notin B$. 无论哪种情形,都蕴涵着 $x\in U$ 但 $x\notin A\cap B$,即 $x\in\overline{A\cap B}$. 这就证明了 $\bar{A}\cup\bar{B}\subseteq\overline{A\cap B}$,从而完成了 $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ 的证明. $\square$

集族

方便起见,如果一个集合中的每个元素都是集合,那么称这个集合为 集族 ,用花体大写字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 等表示.

特别地,设 I 是一个集合,如果对每个 $i \in I$,都有一个集合 A_i 与其对应,那么称 $\{A_i | i \in I\}$ 是 以 I 为指标集的集族 ,称 I 为 $\{A_i | i \in I\}$ 的 指标集 . 有时也将该集族记作 $\{A_i\}_{i \in I}$.

集族

方便起见,如果一个集合中的每个元素都是集合,那么称这个集合为 集族 ,用花体大写字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 等表示.

特别地,设 I 是一个集合,如果对每个 $i \in I$,都有一个集合 A_i 与其对应,那么称 $\{A_i | i \in I\}$ 是 以 I 为指标集的集族 ,称 I 为 $\{A_i | i \in I\}$ 的 指标集 . 有时也将该集族记作 $\{A_i\}_{i \in I}$.

例如,若对 $i = 1, 2, 3, 4$,令 $A_i = \{i, i+1, i+2, i+3\}$,则 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 是以 $\{1, 2, 3, 4\}$ 为指标集的集族. 又若对任意 $k \in \mathbb{N}$,定义

$$\mathbb{N}_k = \begin{cases} \varnothing, & \text{若 } k = 0, \\ \{0, 1, \cdots, k-1\}, & \text{若 } k > 0, \end{cases}$$

则 $\{\mathbb{N}_k | k \in \mathbb{N}\}$,即 $\{\mathbb{N}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$,是以 $\mathbb{N}$ 为指标集的集族,我们在 3.3 节还会遇到这个集族.

广义并与广义交

定义 1.2.2

设 $\mathcal{A}$ 为一个集族,定义 $\mathcal{A}$ 中集合的 **广义并** 为

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x | \exists A \in \mathcal{A} \text{使得} x \in A\},$$

即 $\mathcal{A}$ 中全体元素的元素组成的集合.

广义并与广义交

定义 1.2.2

设 $\mathcal{A}$ 为一个集族,定义 $\mathcal{A}$ 中集合的 广义并 为

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A}\text{使得}x \in A\},$$

即 $\mathcal{A}$ 中全体元素的元素组成的集合.

定义 1.2.3

设 $\mathcal{A}$ 为一个非空集族,定义 $\mathcal{A}$ 中集合的 广义交 为

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A}\text{均有}x \in A\},$$

即 $\mathcal{A}$ 中全体元素的公共元素组成的集合.

特别地,如果 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$,那么有 $\bigcup \mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,$\bigcap \mathcal{A} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

广义并与广义交

例 1.2.2

设 $I=\mathbb{N}$,对任意 $i\in I$,定义 $A_i=\{0,1,\cdots,i\}$,则 $\mathcal{A}=\{A_i|i\in\mathbb{N}\}=\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是以自然数集 $\mathbb{N}$ 为指标集的集族,且

$$\bigcup\mathcal{A}=\{x|\exists A_i\in\mathcal{A}\text{使得}x\in A_i\}=\mathbb{N},$$

$$\bigcap\mathcal{A}=\{x|\forall A_i\in\mathcal{A}\text{均有}x\in A_i\}=\{0\}.$$

广义并与广义交

例 1.2.2

设 $I=\mathbb{N}$,对任意 $i\in I$,定义 $A_i=\{0,1,\cdots,i\}$,则 $\mathcal{A}=\{A_i|i\in\mathbb{N}\}=\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是以自然数集 $\mathbb{N}$ 为指标集的集族,且

$$\bigcup\mathcal{A}=\{x|\exists A_i\in\mathcal{A}\text{使得}x\in A_i\}=\mathbb{N},$$

$$\bigcap\mathcal{A}=\{x|\forall A_i\in\mathcal{A}\text{均有}x\in A_i\}=\{0\}.$$

注 1.2.1

当集族 $\mathcal{A}$ 是空族,即 $\mathcal{A}=\varnothing$,或指标集 $I=\varnothing$ 时,根据定义,其广义并为

$$\bigcup\mathcal{A}=\{x|\exists A\in\mathcal{A}\text{使得}x\in A\}=\varnothing.$$

广义并与广义交

顺带指出,有些运算规律,如交换律、结合律、分配律、吸收律和德·摩根律等可以推广到集族的情形.
设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 为集族, A 为一集合,则广义分配律的形式为:

$$A\bigcup(\bigcap\{A_i\}_{i\in I})=\bigcap_{i\in I}(A\bigcup A_i),\quad A\bigcap(\bigcup\{A_i\}_{i\in I})=\bigcup_{i\in I}(A\bigcap A_i);$$

广义德·摩根律的形式为:

$$\overline{\bigcup\{A_i\}_{i\in I}}=\bigcap_{i\in I}\bar{A}_i,\quad \overline{\bigcap\{A_i\}_{i\in I}}=\bigcup_{i\in I}\bar{A}_i.$$

笛卡尔积

由两个元素 x 和 y 按照一定顺序排列成的 2 元组称作一个 有序对，记作 (x,y)，其中 x 是它的第一个元素，y 是它的第二个元素.

由定义知，两个有序对 (x,y) 和 (x',y') 相等的充要条件是 $x=x'$ 且 $y=y'$.

理论上，有序对也可用集合来表示. 例如，可以用集合 $\{\{x\},\{x,y\}\}$ 或 $\{\{x,1\},\{y,2\}\}$ 表示 (x,y)，这里 $1,2\notin\{x,y\}$.

笛卡尔积

由两个元素 x 和 y 按照一定顺序排列成的 2 元组称作一个 有序对，记作 (x, y)，其中 x 是它的第一个元素，y 是它的第二个元素.

由定义知，两个有序对 (x, y) 和 (x', y') 相等的充要条件是 $x = x'$ 且 $y = y'$.

理论上，有序对也可用集合来表示. 例如，可以用集合 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ 或 $\{\{x, 1\}, \{y, 2\}\}$ 表示 (x, y)，这里 $1, 2 \notin \{x, y\}$.

定义 1.2.4

设 A, B 为集合，定义 A 和 B 的 笛卡儿积

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\},$$

即由 A 中元素为第一个元素，B 中元素为第二个元素构成的所有有序对的集合.

由定义知，对任意集合 A，有 $A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$.

笛卡尔积

例 1.2.3

设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$,则由笛卡儿积的定义知

$$A \times B = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\},$$

$$B \times A = \{(0,a),(1,a),(0,b),(1,b),(0,c),(1,c)\},$$

$$A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}.$$

由此可见,一般地, $A \times B \neq B \times A$.

笛卡尔积

有序对描述的是两个元素之间的联系,然而,一些实际的应用可能涉及更多个元素.
一般地,称 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为一个(有序)n 元组,其中,a_1 是该 n 元组的第一个元素,a_2 是该 n 元组的第二个元素,$\cdots$,a_n 是该 n 元组的第 n 个元素.
相应地,我们可以如下定义 n 个集合的笛卡尔积.

定义 1.2.5

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合,定义它们的 笛卡儿积

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

即由 A_i 中元素为第 i 个元素构成的所有 n 元组的集合.

笛卡尔积

我们重回例1.2.3.

例 1.2.4

设 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{0,1\}$, $C=\{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$,则由定义1.2.5知

$$\begin{aligned} A\times B\times C=\{&(a,0,\mathrm{T}),(a,0,\mathrm{F}),(a,1,\mathrm{T}),(a,1,\mathrm{F}),(b,0,\mathrm{T}),(b,0,\mathrm{F}),\\ &(b,1,\mathrm{T}),(b,1,\mathrm{F}),(c,0,\mathrm{T}),(c,0,\mathrm{F}),(c,1,\mathrm{T}),(c,1,\mathrm{F})\},\\ B\times B\times B=\{&(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}. \end{aligned}$$

笛卡尔积

我们重回例1.2.3.

例 1.2.4

设 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{0,1\}$, $C=\{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$,则由定义1.2.5知

$$\begin{aligned}A\times B\times C=\{&(a,0,\mathrm{T}),(a,0,\mathrm{F}),(a,1,\mathrm{T}),(a,1,\mathrm{F}),(b,0,\mathrm{T}),(b,0,\mathrm{F}),\\&(b,1,\mathrm{T}),(b,1,\mathrm{F}),(c,0,\mathrm{T}),(c,0,\mathrm{F}),(c,1,\mathrm{T}),(c,1,\mathrm{F})\},\\B\times B\times B=\{&(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.\end{aligned}$$

对于同一个集合的笛卡尔积,我们也可以用指数的形式进行简记,例如,将 $A\times A$ 和 $A\times A\times A$ 分别简记为 A^2 和 A^3,将 $\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{个}}$ 记作 A^n.

有限集的计数

集合广泛应用于计数问题,本节我们分别介绍基于维恩图和包含-排斥原理的两种基本计数方法.

设 A 是一个集合,若 A 中仅有有限个元素,则称 A 为 有限集 ,否则称 A 为 无限集 .

称有限集 A 中元素的个数为 A 的 基数 或 势 ,记作 $|A|$.

若 $|A| = n$,则称 A 为 n 元集 ,其中 1 元集也称作 单元集 .

若集合 A 的子集含有 m 个元素,则称该子集为 A 的 m 元子集 .

例如,$|\varnothing| = 0$. 设 A 为 n 元集,B 为 m 元集,则 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, $|A \times B| = |A| \cdot |B| = mn$.

使用维恩图计数

例 1.3.1

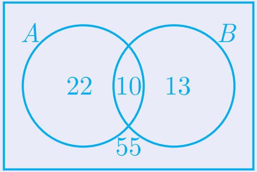


图 1.3.1宠物调查维恩图

在对某个社区居民家庭养宠物的调查后，调查员填写了图1.3.1中的维恩图，其中集合 A 和 B 分别表示养宠物猫和狗家庭的集合.

由图中信息，简单计算可得：

32 个家庭养猫，23 个家庭养狗，45 个家庭至少养了猫和狗中的一种，即 $|A| = 32, |B| = 23, |A \cup B| = 45$；

10 个家庭既养猫又养狗，即 $|A \cap B| = 10$；

22 个家庭只养猫不养狗，13 个家庭只养狗不养猫，即 $|A \backslash B| = 22, |B \backslash A| = 13$；

55 个家庭既不养猫也不养狗，即 $|\bar{A} \cap \bar{B}| = 55$；

100 个家庭参与了调查. □

使用维恩图计数

例 1.3.1

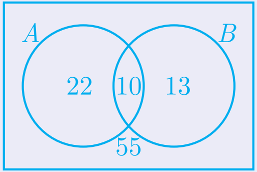


图 1.3.1宠物调查维恩图

在对某个社区居民家庭养宠物的调查后，调查员填写了图1.3.1中的维恩图，其中集合 A 和 B 分别表示养宠物猫和狗家庭的集合.

由图中信息，简单计算可得：

32 个家庭养猫，23 个家庭养狗，45 个家庭至少养了猫和狗中的一种，即 $|A| = 32, |B| = 23, |A \cup B| = 45$；

10 个家庭既养猫又养狗，即 $|A \cap B| = 10$；

22 个家庭只养猫不养狗，13 个家庭只养狗不养猫，即 $|A \backslash B| = 22, |B \backslash A| = 13$；

55 个家庭既不养猫也不养狗，即 $|\bar{A} \cap \bar{B}| = 55$；

100 个家庭参与了调查. □

在上面例子中，我们不难发现，

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1.3.1}$$

例 1.3.2

为了了解大学生对慢跑、游泳和骑自行车的热爱程度,我们对注重锻炼的 100 名学生进行了问卷调查,得知他们平时的运动偏好如下:

50 人慢跑,30 人游泳,35 人骑自行车;

14 人既慢跑又游泳;

7 人既游泳又骑自行车;

9 人既慢跑又骑自行车;

3 人参加了全部三项活动.

求这些参与问卷的人中,

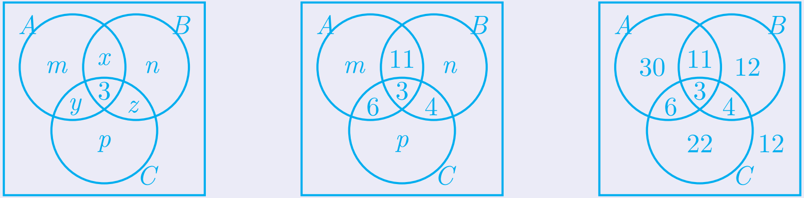
(1) 有多少人只慢跑而不游泳也不骑自行车?

(2) 有多少人只参加了其中一项活动?

(3) 有多少人至少参加了这三项活动中的一项? 有多少人一项也没有参加?

例1.3.2解

令 A,B,C 分别表示慢跑、游泳、骑自行车的人的集合. 根据题意画出维恩图,首先确定最内层区域的元素数,然后逐步向外展开,将待定的元素数分别用未知数 x,y,z,m,n,p 等表示(见图1.3.2(a)).



(a) (b) (b)

图 1.3.2运动调查维恩图

因为有 3 人参加了全部三项活动,所以在图 (a) 的最内层区域放置一个 3,接下来计算 x,y,z. 由于有 14 人既慢跑又游泳,故有 $x+3=14$,解得 $x=11$. 而由有 9 人既慢跑又骑自行车知,$y+3=9$,即得 $y=6$. 又由 7 人既游泳又骑自行车知,$z+3=7$,即 $z=4$. 将这些值填入维恩图,得到图 (b).

例1.3.2解(续)

下面继续求未知数 m, n, p. 由于有 50 人慢跑,所以有 $m+11+6+3=50$,解得 $m=30$. 由有 30 人游泳知,$n+11+4+3=30$,解得 $n=12$. 又由有 35 人骑自行车知,$p+6+4+3=35$,解得 $p=22$. 通过将 A, B, C 三个集合中的所有元素数相加,得到总和为 88. 由于调查了 100 人,所以在全集中但不属于这三个集合的人数是 $100-88=12$. 我们将这些值进一步填入维恩图,得到图 (c). 根据图 (c),易见

(1) 只慢跑而不游泳也不骑自行车的人数是 30,即 $|A\backslash(B\cup C)|=30$.

(2) 只参加其中一项活动的人数是 $30+12+22=64$,即
$|A\backslash(B\cup C)|+|B\backslash(A\cup C)|+|C\backslash(A\cup B)|=64$.

(3) 至少参加了这三项活动中一项的人数是 88,不参加任何一项的人数是 12,即
$|A\cup B\cup C|=88, |\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=12$.

例1.3.2解(续)

下面继续求未知数 m, n, p. 由于有 50 人慢跑,所以有 $m+11+6+3=50$,解得 $m=30$. 由有 30 人游泳知,$n+11+4+3=30$,解得 $n=12$. 又由有 35 人骑自行车知,$p+6+4+3=35$,解得 $p=22$. 通过将 A, B, C 三个集合中的所有元素数相加,得到总和为 88. 由于调查了 100 人,所以在全集中但不属于这三个集合的人数是 $100-88=12$. 我们将这些值进一步填入维恩图,得到图 (c). 根据图 (c),易见

(1) 只慢跑而不游泳也不骑自行车的人数是 30,即 $|A\backslash(B\cup C)|=30$.

(2) 只参加其中一项活动的人数是 $30+12+22=64$,即

$|A\backslash(B\cup C)|+|B\backslash(A\cup C)|+|C\backslash(A\cup B)|=64$.

(3) 至少参加了这三项活动中一项的人数是 88,不参加任何一项的人数是 12,即

$|A\cup B\cup C|=88, |\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=12$.

在例1.3.2中,不难验证,

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|. \tag{1.3.2}$$

事实上,等式(1.3.1)和(1.3.2)对任意有限集都是成立的,我们甚至可以将其推广到更一般的情形——包含排斥原理(也称作 容斥原理).

定理 1.3.1 (包含排斥原理)

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均为有限集,则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \tag{1.3.3}$$

事实上,等式(1.3.1)和(1.3.2)对任意有限集都是成立的,我们甚至可以将其推广到更一般的情形——包含排斥原理(也称作容斥原理).

定理 1.3.1 (包含排斥原理)

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均为有限集,则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \tag{1.3.3}$$

证明

采用数学归纳法直接证明,有兴趣的读者也可以使用 3.1 节中集合的特征函数进行证明.

当 $n=1$ 时,包含排斥原理意味着 $|A_1|=|A_1|$,这是种平凡情形. 而当 $n=2$ 时,可将 $A_1 \cup A_2$ 写成彼此不交的三个集合的并集,即 $A_1 \cup A_2 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$,故

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1 \backslash A_2| + |A_2 \backslash A_1| + |A_1 \cap A_2| \\ &= (|A_1 \backslash A_2| + |A_1 \cap A_2|) + (|A_2 \backslash A_1| + |A_1 \cap A_2|) - |A_1 \cap A_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|. \end{aligned}$$

定理1.3.1证明(续)

下面考虑 $n>2$ 的情形. 假设定理对 $n-1$ 个有限集成立,即

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}| \\ &=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-2}|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}|.\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| &= |(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cup A_n| \\ &= |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}|+|A_n|-|A_n\cap(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})| \\ &= |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}|+|A_n|-|(A_n\cap A_1)\cup(A_n\cap A_2)\cup\cdots\cup(A_n\cap A_{n-1})|.\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

上式最后一项里是 $n-1$ 个有限集的并,由归纳假设知,

$$\begin{aligned}&|(A_n\cap A_1)\cup(A_n\cap A_2)\cup\cdots\cup(A_n\cap A_{n-1})| \\ &=\sum_{i=1}^{n-1}|A_n\cap A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|(A_n\cap A_i)\cap(A_n\cap A_j)|+\cdots+(-1)^{n-2}|(A_n\cap A_1)\cap\cdots\cap(A_n\cap A_{n-1})| \\ &=\sum_{i=1}^{n-1}|A_n\cap A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_n\cap A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

定理1.3.1证明(续)

将式(1.3.4)和(1.3.6)代入(1.3.5),得

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \\
&\quad + |A_n| - \Big(\sum_{i=1}^{n-1} |A_n \cap A_i| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} |A_n \cap A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|,
\end{aligned}
$$

故式(1.3.3)成立,因此完成了定理的证明.

例 1.3.3

求 1 到 300 之间(包含 1 和 300 在内)能被 $3, 5$ 或 7 整除的数的个数.

例 1.3.3

求 1 到 300 之间(包含 1 和 300 在内)能被 $3,5$ 或 7 整除的数的个数.

解

设 $U=\{x\in\mathbb{Z}|1\leqslant x\leqslant 300\}$, $A_1=\{x\in U|x\text{可被 3 整除}\}$, $A_2=\{x\in U|x\text{可被 5 整除}\}$, $A_3=\{x\in U|x\text{可被 7 整除}\}$. 用 $\lfloor x\rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数, 则有

$$
\begin{aligned}
&|A_1|=\lfloor 300/3\rfloor=100, |A_2|=\lfloor 300/5\rfloor=60, |A_3|=\lfloor 300/7\rfloor=42,\\
&|A_1\cap A_2|=\lfloor 300/15\rfloor=20, |A_1\cap A_3|=\lfloor 300/21\rfloor=14, |A_2\cap A_3|=\lfloor 300/35\rfloor=8,\\
&|A_1\cap A_2\cap A_3|=\lfloor 300/105\rfloor=2.
\end{aligned}
$$

由包含排斥原理得

$$
\begin{aligned}
|A_1\cup A_2\cup A_3|&=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|\\
&=100+60+42-20-14-8+2=162,
\end{aligned}
$$

即, 1 到 300 之间有 162 个数能被 $3,5$ 或 7 整除.

包含排斥原理

推论 1.3.1

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均为有限集, S 是一个包含所有 A_i 的有限全集, 则

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

包含排斥原理

推论 1.3.1

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均为有限集，S 是一个包含所有 A_i 的有限全集，则

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

如果设 S 为有限集，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 n 个性质，集合 S 中的任意元素 x 或者具有性质 P_i 或者不具有性质 P_i，两种情况必居其一，且令 $A_i = \{x \in S | x具有性质P_i\}$，这里 $1 \leqslant i \leqslant n$，那么推论1.3.1提供了一种计算 S 中不具有任何这些性质的元素个数的方法.

例如，在例1.3.3中，若用 P_1, P_2, P_3 分别表示整数可被 $3, 5, 7$ 整除的性质，A_1, A_2, A_3 分别是 U 中具有这些性质的整数集，则 1 到 300 之间既不能被 3 和 5，也不能被 7 整除的数的个数是

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| &= |U| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 300 - 100 - 60 - 42 + 20 + 14 + 8 - 2 \\ &= 138. \end{aligned}$$

目录

二元关系

在 1.2 节,我们介绍了两个或多个集合的笛卡尔积,本章讨论这类集合(特别是两个集合)的子集——关系及其性质,包括一般二元关系、等价关系、偏序关系及其相应的性质.

在数学中,二元关系将一个集合中的元素与另一个集合中的元素相关联. 关系的概念不仅十分常见,而且容易理解.

设 A 是居住在某地所有男性的集合,而 B 是居住在该地所有女性的集合. 我们可以在 A 与 B 之间界定一种夫妻关系 R:对于 A 中的个体 x 和 B 中的个体 y,如果 x 是 y 的丈夫,那么我们就说 x 与 y 通过关系 R 相关联.

要描述这种关系 R,可以列出所有 x 与 y 通过 R 相关联的有序对 (x, y),这些有序对便构成了集合 A 与 B 的笛卡尔积 $A \times B$ 的一个子集.

二元关系

在 1.2 节,我们介绍了两个或多个集合的笛卡尔积,本章讨论这类集合(特别是两个集合)的子集——关系及其性质,包括一般二元关系、等价关系、偏序关系及其相应的性质.

在数学中,二元关系将一个集合中的元素与另一个集合中的元素相关联. 关系的概念不仅十分常见,而且容易理解.

设 A 是居住在某地所有男性的集合,而 B 是居住在该地所有女性的集合. 我们可以在 A 与 B 之间界定一种夫妻关系 R:对于 A 中的个体 x 和 B 中的个体 y,如果 x 是 y 的丈夫,那么我们就说 x 与 y 通过关系 R 相关联.

要描述这种关系 R,可以列出所有 x 与 y 通过 R 相关联的有序对 (x, y),这些有序对便构成了集合 A 与 B 的笛卡尔积 $A \times B$ 的一个子集.

定义 2.1.1

设 A, B 为集合,如果 $R \subseteq A \times B$,那么称 R 是一个 从 A 到 B 的二元关系 ,特别地,当 $A = B$ 时称 R 是 A 上的二元关系 . 二元关系也可简称作 关系 .

对于关系 R,若 $(x, y) \in R$,则记作 xRy;若 $(x, y) \notin R$,则记作 $x\bar{R}y$.

二元关系

由定义,$\varnothing$ 和 $A \times B$ 都是二元关系,分别称作 空关系 和 全域关系 .

从 A 到 B 的二元关系的个数依赖于 A 和 B 的元素个数,即,如果 $|A| = n, |B| = m$,那么有 2^{mn} 个从 A 到 B 的二元关系.

由一些 n 元组可构成 n 元关系. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合,称 $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 为这些集合上的 n 元关系 .

特别地,当 $A_i = A\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时,称 R 为 A 上的 n 元关系.

给定关系 $R \subseteq A \times B$,对任意 $x \in A$ 和 $X \subseteq A$,分别定义 元素 x 和子集 X 在 R 下的像为

$$R(x) = \{y \in B | xRy\} = \{y \in B | (x, y) \in R\},$$

$$R(X) = \{y \in B | \exists x \in X, xRy\} = \bigcup_{x \in X} R(x).$$

例 2.1.1

设 $A=\{$北京, 山西, 吉林, 江西$\}$ 是由我国部分省或直辖市构成的集合, $B=\{$故宫博物院, 天坛公园, 颐和园, 八达岭长城, 云冈石窟, 五台山, 伪满皇宫博物院, 长白山, 庐山, 井冈山$\}$ 是 2007 年荣膺为首批国家 5A 级旅游景区的部分景区构成的集合. 对于下面的省市与辖区内景区关系

$$
\begin{aligned}
R=\{&(\text{北京},\text{故宫博物院}),(\text{北京},\text{天坛公园}),(\text{北京},\text{颐和园}),(\text{北京},\text{八达岭长城}),\\
&(\text{山西},\text{云冈石窟}),(\text{山西},\text{五台山}),(\text{吉林},\text{伪满皇宫博物院}),\\
&(\text{吉林},\text{长白山}),(\text{江西},\text{庐山}),(\text{江西},\text{井冈山})\},
\end{aligned}
$$

有

$R($北京$)=\{$故宫博物院, 天坛公园, 颐和园, 八达岭长城$\}$, 该集合表示北京市的首批国家 5A 级景区;

$R($吉林$)=\{$伪满皇宫博物院, 长白山$\}$, 该集合表示吉林省的首批国家 5A 级景区;

$R(\{$山西, 江西$\})=\{$云冈石窟, 五台山, 庐山, 井冈山$\}$,

该集合表示山西和江西两省的首批国家 5A 级景区.

常见关系

例 2.1.2

(1) 设 A 为集合, A 上的 恒等关系 定义为 $I_A = \{(x, x) | x \in A\}$.

(2) 设 $A \subseteq \mathbb{R}$, A 上的 小于或等于关系 L_A 定义为 $L_A = \{(x, y) | x, y \in A, x \leqslant y\}$.

(3) 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$, A 上的 整除关系 D_A 定义为 $D_A = \{(x, y) | x, y \in A, y/x \in \mathbb{Z}\}$.

(4) 设 $\mathcal{A}$ 是一个集族, $\mathcal{A}$ 上的 包含关系 $R_{\subseteq}$ 定义为 $R_{\subseteq} = \{(X, Y) | X, Y \in \mathcal{A}, X \subseteq Y\}$.

常见关系

例 2.1.2

(1) 设 A 为集合, A 上的 恒等关系 定义为 $I_A = \{(x, x) | x \in A\}$.

(2) 设 $A \subseteq \mathbb{R}$, A 上的 小于或等于关系 L_A 定义为 $L_A = \{(x, y) | x, y \in A, x \leqslant y\}$.

(3) 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$, A 上的 整除关系 D_A 定义为 $D_A = \{(x, y) | x, y \in A, y/x \in \mathbb{Z}\}$.

(4) 设 $\mathcal{A}$ 是一个集族, $\mathcal{A}$ 上的 包含关系 $R_{\subseteq}$ 定义为 $R_{\subseteq} = \{(X, Y) | X, Y \in \mathcal{A}, X \subseteq Y\}$.

例如, 当 $A = \{1, 2, 3\}$ 时, 有

$$\begin{aligned} I_A &= \{(1,1), (2,2), (3,3)\}, \\ L_A &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}, \\ D_A &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}. \end{aligned}$$

考虑 $A = \{a, b\}$ 的幂集 $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 则 $\mathcal{A}$ 上的包含关系为

$$R_{\subseteq} = \{(\varnothing, \varnothing), (\varnothing, \{a\}), (\varnothing, \{b\}), (\varnothing, A), (\{a\}, \{a\}), (\{a\}, A), (\{b\}, \{b\}), (\{b\}, A), (A, A)\}.$$

关系的表示——关系矩阵

除了例2.1.1和例2.1.2中用集合表达式表示关系外，对于有限集间的二元关系，关系矩阵和关系图也是两种常见的表示形式.

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, B=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，$R$ 是从 A 到 B 的二元关系. 对所有 $i\in\{1,2,\cdots,n\}, j\in\{1,2,\cdots,m\}$，令

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } (x_i,y_j)\in R,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

则称

$$(r_{ij})=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm}\end{pmatrix}$$

为 R 的 关系矩阵，记作 $\boldsymbol{M}_R$.

关系的表示——关系矩阵

例 2.1.3

例*2.1.1*中 R 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于例*2.1.2*中的关系，当 $A = \{1, 2, 3\}$ 时，有

$$\boldsymbol{M}_{I_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{M}_{L_A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{M}_{D_A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

关系的表示——关系矩阵

反过来,给定关系矩阵,我们也能很容易地得到该关系的集合表示. 这意味着对于有限集间的关系而言,关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 与关系 R 是一一对应的.

例如,设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系 R 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则由关系矩阵的定义,易知 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$.

关系的表示——关系图

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, B=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$,二元关系 $R\subseteq A\times B$ 的 关系图 ,记作 G_R,如下构造:

$A\cup B$ 中的元素通过点来表示,对应于 x_i 和 y_j 的点分别被标记为 x_i 和 y_j,这些点也称作 顶点 .

如果 x_iRy_j,即 $(x_i,y_j)\in R$,那么我们通过一条弧将顶点 x_i 和 y_j 连接起来,并在这条弧上从 x_i 指向 y_j 的方向添加一个箭头.

当 R 中所有有序对对应的顶点都通过带有箭头的弧连接起来,就构建出了 G_R. 特别地,如果存在 x_iRx_i,即 $(x_i,x_i)\in R$,会得到一条从顶点 x_i 出发并最终回到 x_i 的弧,这样的弧被称作 环 .

关系的表示——关系图

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, B=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$,二元关系 $R\subseteq A\times B$ 的 关系图 ,记作 G_R,如下构造:

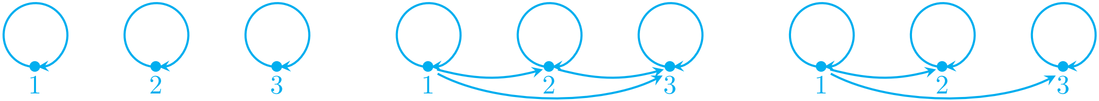
$A\cup B$ 中的元素通过点来表示,对应于 x_i 和 y_j 的点分别被标记为 x_i 和 y_j,这些点也称作 顶点 .

如果 x_iRy_j,即 $(x_i,y_j)\in R$,那么我们通过一条弧将顶点 x_i 和 y_j 连接起来,并在这条弧上从 x_i 指向 y_j 的方向添加一个箭头.

当 R 中所有有序对对应的顶点都通过带有箭头的弧连接起来,就构建出了 G_R. 特别地,如果存在 x_iRx_i,即 $(x_i,x_i)\in R$,会得到一条从顶点 x_i 出发并最终回到 x_i 的弧,这样的弧被称作 环 .

例 2.1.4

对于例2.1.2中的关系,当 $A=\{1,2,3\}$ 时,I_A, L_A, D_A 的关系图 $G_{I_A}, G_{L_A}, G_{D_A}$ 如下图所示.



G_{I_A} G_{L_A} G_{D_A}

关系的运算

类似于集合的运算,我们可以定义关系的运算,从而由已知关系产生新的关系. 因为从 A 到 B 的二元关系都是 $A \times B$ 的子集,我们可以直接根据定义1.2.1得到二元关系的并、交、差和补关系.

例 2.1.5

对于例*2.1.2*中的关系,当 $A = \{1, 2, 3\}$ 时,有

$$\begin{aligned}
& I_A \cup L_A = L_A, I_A \cup D_A = D_A, L_A \cup D_A = L_A; \\
& I_A \cap L_A = I_A, I_A \cap D_A = I_A, L_A \cap D_A = D_A; \\
& I_A \backslash L_A = \varnothing, L_A \backslash I_A = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}, L_A \backslash D_A = \{(2,3)\}; \\
& \bar{I}_A = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}, \bar{L}_A = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}, \\
& \bar{D}_A = \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.
\end{aligned}$$

关系的运算——求逆

定义 2.1.2

给定关系 $R \subseteq A \times B$, R 的 **逆关系** R^{-1} 是一个从 B 到 A 的关系,定义为 $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$.

显然, $yR^{-1}x$ 当且仅当 xRy. 对任意集合 A, 恒等关系 I_A 的逆关系是其自身, 即 $I_A^{-1} = I_A$.

关系的运算——求逆

定义 2.1.2

给定关系 $R \subseteq A \times B$, R 的 逆关系 R^{-1} 是一个从 B 到 A 的关系,定义为 $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$.

显然, $yR^{-1}x$ 当且仅当 xRy. 对任意集合 A, 恒等关系 I_A 的逆关系是其自身,即 $I_A^{-1} = I_A$.

例 2.1.6

对于例*2.1.1*中的关系 R,有

$$\begin{aligned} R^{-1} = \{&(\text{故宫博物院}, \text{北京}), (\text{天坛公园}, \text{北京}), (\text{颐和园}, \text{北京}), (\text{八达岭长城}, \text{北京}), \\ &(\text{云冈石窟}, \text{山西}), (\text{五台山}, \text{山西}), (\text{伪满皇宫博物院}, \text{吉林}), \\ &(\text{长白山}, \text{吉林}), (\text{庐山}, \text{江西}), (\text{井冈山}, \text{江西})\}. \end{aligned}$$

对于例*2.1.2*中的关系,当 $A = \{1, 2, 3\}$ 时,有

$$I_A^{-1} = I_A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}, L_A^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (3,3)\},$$
$$D_A^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,3)\}.$$

关系的运算——复合

定义 2.1.3

给定关系 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$, R 和 S 的 **复合** $R \circ S$ 是一个从 A 到 C 的关系,定义为

$$R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in B, (x, y) \in R, (y, z) \in S\}.$$

关系的运算——复合

定义 2.1.3

给定关系 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$, R 和 S 的 复合 $R \circ S$ 是一个从 A 到 C 的关系，定义为

$$R \circ S = \{(x,z) | \exists y \in B, (x,y) \in R, (y,z) \in S\}.$$

例 2.1.7

(1) 对于例*2.1.2*中的关系，当 $A = \{1,2,3\}$ 时，有

$$I_A \circ L_A = L_A \circ I_A = L_A,$$
$$I_A \circ D_A = D_A \circ I_A = D_A,$$
$$L_A \circ \bar{L}_A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\},$$
$$D_A \circ D_A^{-1} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}.$$

例2.1.7(续)

(2) 设 R 是所有人集合上的亲子关系,即若 x 是 y 的父母,则 $(x, y) \in R$. 考虑 R 与自身的复合 $R \circ R$,则有 $(x, z) \in R \circ R$,当且仅当存在某个人 y,使得 x 是 y 的父母且 y 是 z 的父母,这等价于 x 是 z 的祖父母或外祖父母.

例2.1.7(续)

(2) 设 R 是所有人集合上的亲子关系,即若 x 是 y 的父母,则 $(x,y)\in R$. 考虑 R 与自身的复合 $R\circ R$,则有 $(x,z)\in R\circ R$,当且仅当存在某个人 y,使得 x 是 y 的父母且 y 是 z 的父母,这等价于 x 是 z 的祖父母或外祖父母.

(3) 设 $A=\{App_1,App_2,App_3,App_4\}$ 是 4 款手机应用软件的集合,$B=\{OS_1,OS_2,OS_3,OS_4\}$ 是 4 个移动操作系统的集合,$C=\{M_1,M_2,M_3\}$ 是 3 款手机的集合. 从 A 到 B 的关系

$$R=\{(App_1,OS_1),(App_1,OS_2),(App_2,OS_1),(App_2,OS_3),\\ (App_3,OS_2),(App_3,OS_3),(App_3,OS_4),(App_4,OS_4)\},$$

其中 (App_i,OS_j) 表示应用软件 App_i 可运行于操作系统 OS_j 中;从 B 到 C 的关系

$$S=\{(OS_1,M_1),(OS_1,M_2),(OS_2,M_2),(OS_3,M_3),(OS_4,M_2),(OS_4,M_3)\},$$

其中 (OS_i,M_j) 表示 M_j 款手机安装了操作系统 OS_i. 考虑 R 和 S 的复合,有

$$R\circ S=\{(App_1,M_1),(App_1,M_2),(App_2,M_1),(App_2,M_2),(App_2,M_3),\\ (App_3,M_2),(App_3,M_3),(App_4,M_2),(App_4,M_3)\},$$

该复合关系正好表明每款应用软件可以安装到哪几款手机上.

逆关系和复合运算的性质

定理 2.1.1

(1) 对任意 $R \subseteq A \times B$,有 $(R^{-1})^{-1} = R$.

(2) 对任意 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$,有 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

(3) 设 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq C \times D$,则 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

(4) 设 R 为 A 上的任意关系,则 $I_A \circ R = R \circ I_A = R$.

逆关系和复合运算的性质

定理 2.1.1

(1) 对任意 $R \subseteq A \times B$,有 $(R^{-1})^{-1} = R$.

(2) 对任意 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$,有 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

(3) 设 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq C \times D$,则 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

(4) 设 R 为 A 上的任意关系,则 $I_A \circ R = R \circ I_A = R$.

在关系复合运算的基础上,可以如下归纳定义关系的幂运算.

定义 2.1.4

设 R 为 A 上的关系,$n \in \mathbb{N}$,则 R 的 n 次幂 R^n 定义为

(1) $R^0 = \{(x, x) | x \in A\} = I_A$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$.

关系的幂运算

下面考虑如何计算 n 次幂 R^n. 给定 A 上的关系 R 和 $n \in \mathbb{N}$,如果 $n = 0$ 或 $n = 1$,那么结果是显然的. 当 $n \geqslant 2$ 时,根据 R 的表达形式,分 3 种情形处理:

(i) 如果 R 是用集合表示的,那么可以根据定义2.1.4,通过 $n - 1$ 次复合运算得到 R^n.

关系的幂运算

下面考虑如何计算 n 次幂 R^n. 给定 A 上的关系 R 和 $n \in \mathbb{N}$,如果 $n = 0$ 或 $n = 1$,那么结果是显然的. 当 $n \geqslant 2$ 时,根据 R 的表达形式,分 3 种情形处理:

(i) 如果 R 是用集合表示的,那么可以根据定义2.1.4,通过 $n-1$ 次复合运算得到 R^n.

(ii) 如果 R 是用关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 给出的,那么 R^n 的关系矩阵是 $\boldsymbol{M}_R^n$,即 n 个矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 之积. 与通常矩阵乘法不同的是,两个关系矩阵相乘时,如下定义乘法:设 $\boldsymbol{M}_R = (r_{ij})$ 是 $r \times s$ 阶矩阵, $\boldsymbol{M}_S = (s_{ij})$ 是 $s \times t$ 阶矩阵,则 $\boldsymbol{M}_R\boldsymbol{M}_S = (t_{ij})$ 是 $r \times t$ 阶矩阵,其中

$$t_{ij} = \max_{k=1}^{s} \min\{r_{ik}, s_{kj}\}, \ \ i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, t.$$

关系的幂运算

下面考虑如何计算 n 次幂 R^n. 给定 A 上的关系 R 和 $n \in \mathbb{N}$,如果 $n = 0$ 或 $n = 1$,那么结果是显然的. 当 $n \geqslant 2$ 时,根据 R 的表达形式,分 3 种情形处理:

(i) 如果 R 是用集合表示的,那么可以根据定义2.1.4,通过 $n-1$ 次复合运算得到 R^n.

(ii) 如果 R 是用关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 给出的,那么 R^n 的关系矩阵是 $\boldsymbol{M}_R^n$,即 n 个矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 之积. 与通常矩阵乘法不同的是,两个关系矩阵相乘时,如下定义乘法:设 $\boldsymbol{M}_R = (r_{ij})$ 是 $r \times s$ 阶矩阵,$\boldsymbol{M}_S = (s_{ij})$ 是 $s \times t$ 阶矩阵,则 $\boldsymbol{M}_R\boldsymbol{M}_S = (t_{ij})$ 是 $r \times t$ 阶矩阵,其中

$$t_{ij} = \max_{k=1}^{s} \min\{r_{ik}, s_{kj}\}, \ \ i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, t.$$

(iii) 如果 R 是用关系图 G_R 给出的,那么可以直接由图 G_R 得到 R^n 的关系图 G_R^n:图 G_R^n 的顶点集与 G_R 相同;在 G_R^n 中存在一条从顶点 v_i 到 v_j 的边,当且仅当在 G_R 中从 v_i 出发经过 n 步长的路径可到达顶点 v_j.

例 2.1.8

设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,d)\}$,分别用关系矩阵和关系图的方法求 R 的各次幂.

例 2.1.8

设 $A=\{a,b,c,d\}, R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,d)\}$,分别用关系矩阵和关系图的方法求 R 的各次幂.

例2.1.8解

根据定义,$R^0=I_A=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}, R^1=R$. 通过关系复合运算,易得
$R^2=\{(a,c),(b,d),(c,d),\ (d,d)\},\ R^3=\{(a,d),(b,d),(c,d),(d,d)\},\ R^n=R^3, n=4,5,\cdots$.
下面考虑关系矩阵的方法. 由定义,R^0,即 I_A 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}_R^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

因为 R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

例2.1.8解(续)

故 R^2, R^3, R^4 的关系矩阵分别是

$$\boldsymbol{M}_R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_R^3 = \boldsymbol{M}_R^2 \boldsymbol{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_R^4 = \boldsymbol{M}_R^3 \boldsymbol{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\boldsymbol{M}_R^4 = \boldsymbol{M}_R^3$,即 $R^4 = R^3$,由此可得 $R^n = R^3, n = 4, 5, \cdots$. 至此,$R$ 各次幂的关系矩阵就都得到了.

例2.1.8解(续)

用关系图的方法得到 R^0, R^1, R^2, R^3 等的关系图如图 2.1.1 所示.

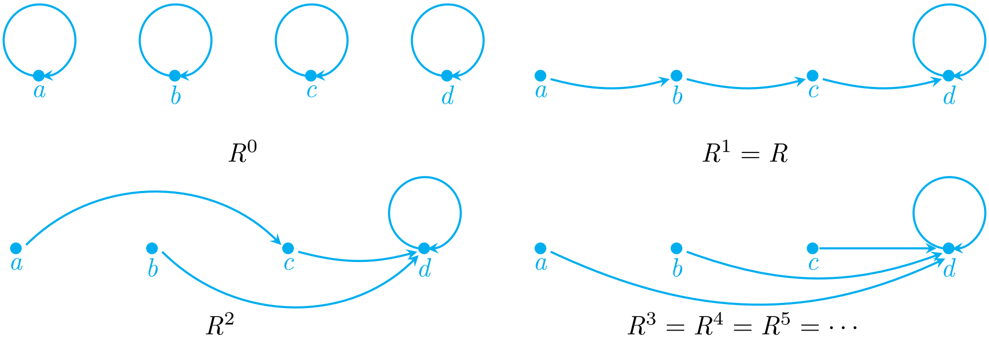


图 2.1.1R 各次幂的关系图

关系的性质——自反性和反自反性

本节介绍关系常见的 5 种性质:自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性.

定义 2.2.1

设 R 为 A 上的关系.

(1) 若对任意 $x \in A$,均有 $(x, x) \in R$,则称 R 是 自反 的.

(2) 若对任意 $x \in A$,均有 $(x, x) \notin R$,则称 R 是 反自反 的.

关系的性质——自反性和反自反性

本节介绍关系常见的 5 种性质：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性.

定义 2.2.1

设 R 为 A 上的关系.

(1) 若对任意 $x \in A$,均有 $(x,x) \in R$,则称 R 是 **自反** 的.

(2) 若对任意 $x \in A$,均有 $(x,x) \notin R$,则称 R 是 **反自反** 的.

例如,

A 上的恒等关系 I_A 和全域关系 $A \times A$ 都是 A 上的自反关系;

小于或等于关系 $L_{\mathbb{R}}$,整除关系 $D_{\mathbb{Z}^+}$ 分别为 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}^+$ 上的自反关系;

包含关系 $R_{\subseteq}$ 是给定集族 $\mathcal{A}$ 上的自反关系;

空关系、小于关系、大于关系和真包含关系都是给定集合或集族上的反自反关系.

例 2.2.1

设 $A=\{1,2,3,4\}, R_1, R_2$ 和 R_3 都是 A 上的关系,其中

$$R_1=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\},$$
$$R_2=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,3)\},$$
$$R_3=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\}.$$

判断 R_1, R_2 和 R_3 是否为 A 上的自反关系和反自反关系.

例 2.2.1

设 $A=\{1,2,3,4\}$, R_1,R_2 和 R_3 都是 A 上的关系,其中

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\},\\
R_2 &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,3)\},\\
R_3 &= \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\}.
\end{aligned}
$$

判断 R_1,R_2 和 R_3 是否为 A 上的自反关系和反自反关系.

解

根据定义2.2.1,易知

R_1 是自反的,

R_2 是反自反的,

R_3 既不是自反的也不是反自反的.

关系的性质——对称性和反对称性

定义 2.2.2

设 R 为 A 上的关系.

(1) 若对任意 $(x, y) \in R$,均有 $(y, x) \in R$,则称 R 是 对称 的.

(2) 若当 $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in R$ 时,必有 $x = y$,则称 R 是 反对称 的.

关系的性质——对称性和反对称性

定义 2.2.2

设 R 为 A 上的关系.

(1) 若对任意 $(x, y) \in R$,均有 $(y, x) \in R$,则称 R 是 **对称** 的.

(2) 若当 $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in R$ 时,必有 $x = y$,则称 R 是 **反对称** 的.

例如,

A 上的空关系 $\varnothing$、恒等关系 I_A 和全域关系 $A \times A$ 都是 A 上的对称关系;

空关系 $\varnothing$ 和恒等关系 I_A 也是 A 的上反对称关系,但全域关系 $A \times A$ 一般不是 A 上的反对称关系,除非 A 为单元集或空集.

例 2.2.2

设 $A=\{1,2,3,4\}$, R_1,R_2,R_3 和 R_4 都是 A 上的关系, 其中

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,1),(2,2),(4,4)\},\\
R_2 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3)\},\\
R_3 &= \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\},\\
R_4 &= \{(1,2),(2,1),(1,3),(2,4)\}.
\end{aligned}
$$

判断 R_1,R_2,R_3 和 R_4 是否为 A 上对称关系和反对称关系.

例 2.2.2

设 $A=\{1,2,3,4\}, R_1, R_2, R_3$ 和 R_4 都是 A 上的关系, 其中

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1),(2,2),(4,4)\}, \\ R_2 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3)\}, \\ R_3 &= \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}, \\ R_4 &= \{(1,2),(2,1),(1,3),(2,4)\}. \end{aligned}$$

判断 R_1, R_2, R_3 和 R_4 是否为 A 上对称关系和反对称关系.

解

根据定义2.2.2,易知

R_1 既是对称的也是反对称的,

R_2 是对称的但不是反对称的,

R_3 是反对称的但不是对称的,

R_4 既不是对称的也不是反对称的.

关系的性质——传递性

定义 2.2.3

设 R 为 A 上的关系,若当 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$ 时,必有 $(x, z) \in R$,则称 R 是 传递 的.

例如,A 上的空关系 $\varnothing$、恒等关系 I_A 和全域关系 $A \times A$ 都是 A 上的传递关系;小于关系、小于或等于关系、整除关系、包含关系和真包含关系都是相应集合或集族上的传递关系.

关系的性质——传递性

定义 2.2.3

设 R 为 A 上的关系,若当 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$ 时,必有 $(x, z) \in R$,则称 R 是 传递 的.

例如,A 上的空关系 $\varnothing$、恒等关系 I_A 和全域关系 $A \times A$ 都是 A 上的传递关系;小于关系、小于或等于关系、整除关系、包含关系和真包含关系都是相应集合或集族上的传递关系.

例 2.2.3

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2 和 R_3 都是 A 上的关系,其中 $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (4, 4)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\}$, $R_3 = \{(1, 2)\}$. 判断 R_1, R_2 和 R_3 是否为 A 上的传递关系.

解

根据定义2.2.3,易知 R_1 和 R_3 都是 A 上的传递关系,而 R_2 不是 A 上的传递关系.

关系的性质

定理 2.2.1

设 R 为 A 上的关系,则

(1) R 为 A 上的自反关系当且仅当 $I_A \subseteq R$.

(2) R 为 A 上的反自反关系当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$.

(3) R 为 A 上的对称关系当且仅当 $R = R^{-1}$.

(4) R 为 A 上的反对称关系当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

(5) R 为 A 上的传递关系当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

定理2.2.1证明

(1) R 为 A 上的自反关系当且仅当 $I_A \subseteq R$

设 R 是 A 上的自反关系,则由定义,对任意 $x \in A$,均有 $(x,x) \in R$,故 $I_A \subseteq R$,这就证明了必要性.
反过来,对任意 $x \in A$,由 $(x,x) \in I_A \subseteq R$ 知,$(x,x) \in R$,因此 R 在 A 上是自反的,从而充分性成立.

定理2.2.1证明

(1) R 为 A 上的自反关系当且仅当 $I_A \subseteq R$

设 R 是 A 上的自反关系,则由定义,对任意 $x \in A$,均有 $(x,x) \in R$,故 $I_A \subseteq R$,这就证明了必要性.
反过来,对任意 $x \in A$,由 $(x,x) \in I_A \subseteq R$ 知,$(x,x) \in R$,因此 R 在 A 上是自反的,从而充分性成立.

(2) R 为 A 上的反自反关系当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

必要性(反证法). 假设 $R \cap I_A \neq \varnothing$,则存在 $(x,y) \in R \cap I_A$. 由于 I_A 是 A 上的恒等关系,从而有 $y = x \in A$ 且 $(x,x) \in R$. 这与 R 是 A 上的反自反关系相矛盾.
充分性(反证法). 假设 R 在 A 上不是反自反的,则必存在 $x \in A$,使得 $(x,x) \in R$,因此有 $(x,x) \in R \cap I_A$,这与 $R \cap I_A = \varnothing$ 矛盾.

定理2.2.1证明

(1) R 为 A 上的自反关系当且仅当 $I_A \subseteq R$

设 R 是 A 上的自反关系,则由定义,对任意 $x \in A$,均有 $(x,x) \in R$,故 $I_A \subseteq R$,这就证明了必要性.
反过来,对任意 $x \in A$,由 $(x,x) \in I_A \subseteq R$ 知,$(x,x) \in R$,因此 R 在 A 上是自反的,从而充分性成立.

(2) R 为 A 上的反自反关系当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

必要性(反证法). 假设 $R \cap I_A \neq \varnothing$,则存在 $(x,y) \in R \cap I_A$. 由于 I_A 是 A 上的恒等关系,从而有 $y = x \in A$ 且 $(x,x) \in R$. 这与 R 是 A 上的反自反关系相矛盾.
充分性(反证法). 假设 R 在 A 上不是反自反的,则必存在 $x \in A$,使得 $(x,x) \in R$,因此有 $(x,x) \in R \cap I_A$,这与 $R \cap I_A = \varnothing$ 矛盾.

(3) R 为 A 上的对称关系当且仅当 $R = R^{-1}$

先证必要性. 对任意 (x,y),因为 R 是 A 上的对称关系,所以 $(x,y) \in R$ 当且仅当 $(y,x) \in R$,后者等价于 $(x,y) \in R^{-1}$,故有 $R = R^{-1}$. 下证充分性. 任取 (x,y),由逆关系运算定义和 $R = R^{-1}$ 知,当 $(x,y) \in R$ 时,有 $(y,x) \in R^{-1} = R$,即 $(y,x) \in R$,所以 R 是 A 上的对称关系.

定理2.2.1证明(续)

(4) R 为 A 上的反对称关系当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

先证必要性. 对任意 $(x, y) \in R \cap R^{-1}$,有 $(x, y) \in R$ 且 $(x, y) \in R^{-1}$,即有 $(x, y) \in R, (y, x) \in R$. 因为 R 是 A 上的反对称关系,所以必有 $x = y$,故 $(x, y) \in I_A$,这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

下证充分性. 任取 (x, y),当 $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in R$ 时,有 $(x, y) \in R \cap R^{-1} \subseteq I_A$,因此必然有 $y = x$,从而证明了 R 是 A 上的反对称关系.

定理2.2.1证明(续)

(4) R 为 A 上的反对称关系当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

先证必要性. 对任意 $(x,y) \in R \cap R^{-1}$,有 $(x,y) \in R$ 且 $(x,y) \in R^{-1}$,即有 $(x,y) \in R, (y,x) \in R$. 因为 R 是 A 上的反对称关系,所以必有 $x=y$,故 $(x,y) \in I_A$,这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
下证充分性. 任取 (x,y),当 $(x,y) \in R$ 且 $(y,x) \in R$ 时,有 $(x,y) \in R \cap R^{-1} \subseteq I_A$,因此必然有 $y=x$,从而证明了 R 是 A 上的反对称关系.

(5) R 为 A 上的传递关系当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

对任意 $(x,y) \in R \circ R$,由定义,存在 z,使得 $(x,z) \in R$ 且 $(z,y) \in R$. 因为 R 是 A 上的传递关系,所以有 $(x,y) \in R$,这证明了 $R \circ R \subseteq R$,故必要性成立.
反过来,如果 $(x,y) \in R$ 且 $(y,z) \in R$ 时,有 $(x,z) \in R \circ R \subseteq R$,即 $(x,z) \in R$,所以 R 是 A 上的传递关系,这就证明了充分性.

表 2.2.1关系性质的特征

表示形式	性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全为 1	主对角线元素全为 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij} = 1$ 且 $i \neq j$,则 $r_{ji} = 0$	$\boldsymbol{M}_R^2$ 中 1 所在的位置,$\boldsymbol{M}_R$ 中相应的位置也是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边,那么一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两个顶点之间有边,那么一定只有一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边,x_j 到 x_k 有边,那么从 x_i 到 x_k 也有边

等价关系与划分

定义 2.3.1

设 A 为非空集合,R 为 A 上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的,那么称 R 为 A 上的 等价关系 .

显然,当 $A \neq \varnothing$ 时,恒等关系 I_A 和全域关系 $A \times A$ 都是 A 上的等价关系.
设 R 是一个等价关系,若 $(x, y) \in R$,则称 x 等价于 y .

等价关系与划分

定义 2.3.1

设 A 为非空集合,R 为 A 上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的,那么称 R 为 A 上的 等价关系 .

显然,当 $A \neq \varnothing$ 时,恒等关系 I_A 和全域关系 $A \times A$ 都是 A 上的等价关系.
设 R 是一个等价关系,若 $(x, y) \in R$,则称 x 等价于 y .

定义 2.3.2

设 A 为非空集合,R 为 A 上的等价关系,令

$$[x]_R = \{y \in A | (x, y) \in R\},$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的 等价类 ,在没有歧义时也简称作 x 的 等价类 ,并简记作 $[x]$.

例 2.3.1

(1) 对任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$，如下定义关系 $\sim$：$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ 当且仅当 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$. 根据等价关系定义，直接验证知 $\sim$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系. 对于给定的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，等价类 $[(x,y)]$ 是实平面上以坐标原点为圆心，半径为 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的圆.

例 2.3.1

(1) 对任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,如下定义关系 $\sim$:$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ 当且仅当 $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. 根据等价关系定义,直接验证知 $\sim$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系. 对于给定的 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,等价类 $[(x, y)]$ 是实平面上以坐标原点为圆心,半径为 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的圆.

(2) 设 A 为某高校所有学生的集合,定义 A 上的关系

$$R = \{(x, y) \in A \times A | x, y\text{生日相同}\}.$$

易验证 R 为 A 上的等价关系. 对于给定的 $x \in A$,等价类 $[x]$ 是生日与 x 在同一天的该校所有学生的集合.

例 2.3.1

(1) 对任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,如下定义关系 $\sim$:$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ 当且仅当 $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. 根据等价关系定义,直接验证知 $\sim$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系. 对于给定的 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,等价类 $[(x, y)]$ 是实平面上以坐标原点为圆心,半径为 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的圆.

(2) 设 A 为某高校所有学生的集合,定义 A 上的关系

$$R = \{(x, y) \in A \times A | x, y\text{生日相同}\}.$$

易验证 R 为 A 上的等价关系. 对于给定的 $x \in A$,等价类 $[x]$ 是生日与 x 在同一天的该校所有学生的集合.

(3) 考虑整数集 $\mathbb{Z}$ 上的关系

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | n, m\text{奇偶性相同}\}.$$

不难验证 R 为 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系. 对于给定的整数 n,若 n 为奇数,则等价类 $[n]$ 是所有奇数的集合;而如果 n 为偶数,那么等价类 $[n]$ 是所有偶数的集合.

等价类的性质

定理 2.3.1

设 A 为非空集合,R 为 A 上的等价关系,则对任意 $x, y \in A$,有

(1) $x \in [x]$.

(2) 若 $(x, y) \in R$,则 $[x] = [y]$.

(3) 若 $(x, y) \notin R$,则 $[x] \cap [y] = \varnothing$.

(4) $\bigcup_{x \in A} [x] = A$.

等价类的性质

定理 2.3.1

设 A 为非空集合,R 为 A 上的等价关系,则对任意 $x, y \in A$,有

(1) $x \in [x]$.

(2) 若 $(x, y) \in R$,则 $[x] = [y]$.

(3) 若 $(x, y) \notin R$,则 $[x] \cap [y] = \varnothing$.

(4) $\bigcup_{x \in A} [x] = A$.

定理2.3.1证明

(1) 因为 R 是等价关系,所以有 $(x, x) \in R$,从而由等价类的定义知 $x \in [x]$.

等价类的性质

定理 2.3.1

设 A 为非空集合，R 为 A 上的等价关系，则对任意 $x, y \in A$，有

(1) $x \in [x]$.

(2) 若 $(x, y) \in R$，则 $[x] = [y]$.

(3) 若 $(x, y) \notin R$，则 $[x] \cap [y] = \varnothing$.

(4) $\bigcup_{x \in A} [x] = A$.

定理2.3.1证明

(1) 因为 R 是等价关系，所以有 $(x, x) \in R$，从而由等价类的定义知 $x \in [x]$.

(2) 假设存在 $(x, y) \in R$，使得 $[x] \neq [y]$. 不妨设存在 $z \in [x] \backslash [y]$，则有 $(x, z) \in R$，但 $(y, z) \notin R$. 因为 R 是对称的，所以由 $(x, y) \in R$ 可得 $(y, x) \in R$. 又因为 R 是传递的，由 $(y, x) \in R$ 和 $(x, z) \in R$ 知，$(y, z) \in R$，矛盾. 故 $[x] = [y]$.

定理2.3.1证明(续)

(3) 若 $(x, y) \notin R$,则 $[x] \cap [y] = \varnothing$

假设 $[x] \cap [y] \neq \varnothing$,则存在 $z \in [x] \cap [y]$,从而有 $z \in [x]$ 且 $z \in [y]$,即有 $(x, z) \in R$ 且 $(y, z) \in R$. 根据 R 的对称性和传递性得 $(x, y) \in R$,与条件 $(x, y) \notin R$ 矛盾,故结论成立.

定理2.3.1证明(续)

(3) 若 $(x,y)\notin R$,则 $[x]\cap[y]=\varnothing$

假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$,则存在 $z\in[x]\cap[y]$,从而有 $z\in[x]$ 且 $z\in[y]$,即有 $(x,z)\in R$ 且 $(y,z)\in R$. 根据 R 的对称性和传递性得 $(x,y)\in R$,与条件 $(x,y)\notin R$ 矛盾,故结论成立.

(4) $\bigcup_{x\in A}[x]=A$

先证 $\bigcup_{x\in A}[x]\subseteq A$. 任取 $y\in\bigcup_{x\in A}[x]$,那么存在 $x\in A$,使得 $y\in[x]\subseteq A$,即 $y\in A$,从而有 $\bigcup_{x\in A}[x]\subseteq A$.

反过来,任取 $y\in A$,则由 (1) 有 $y\in[y]$,因此 $y\in\bigcup_{x\in A}[x]$,从而有 $A\subseteq\bigcup_{x\in A}[x]$ 成立. 这就证明了 $\bigcup_{x\in A}[x]=A$.

商集

定义 2.3.3

设 A 为非空集合,R 为 A 上的等价关系,以 R 的所有等价类作为元素的集合称作 A 关于 R 的 **商集**,记作 A/R,即

$$A/R = \{[x] | x \in A\}.$$

商集

定义 2.3.3

设 A 为非空集合,R 为 A 上的等价关系,以 R 的所有等价类作为元素的集合称作 A 关于 R 的 商集,记作 A/R,即

$$A/R = \{[x]|x \in A\}.$$

在例2.3.1(1) 中,商集 $\mathbb{R}^2/\sim$ 是个无限集,由实平面中所有以原点为圆心,半径为 r 的圆组成,这里 $r \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$.

在例2.3.1(2) 中,如果该高校人数足够多,使得从 1 月 1 日到 12 月 31 日每天都是该校至少一个学生的生日,那么由定理2.3.1知,对应的商集有 366 个元素.

在例2.3.1(3) 中,$\mathbb{Z}/R$ 只有两个元素,$[0]$ 和 $[1]$.

划分

定义 2.3.4

设 A 为非空集合,如果 A 的子集族 $\pi = \{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ 满足下述条件:

(1) $\varnothing \notin \pi$,

(2) 若 $i \neq j$,则 $A_i \cap A_j = \varnothing$,

(3) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$,

那么称 π 是 A 的一个 划分 ,称每个 A_i 为 A 的一个 划分块 .

当 $|I| = n$ 时,也称 π 是 A 的一个 n-划分 .

划分

定义 2.3.4

设 A 为非空集合,如果 A 的子集族 $\pi = \{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ 满足下述条件:

(1) $\varnothing \notin \pi$,

(2) 若 $i \neq j$,则 $A_i \cap A_j = \varnothing$,

(3) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$,

那么称 π 是 A 的一个 划分 ,称每个 A_i 为 A 的一个 划分块 .
当 $|I| = n$ 时,也称 π 是 A 的一个 n-划分 .

例如,奇数集和偶数集是 $\mathbb{Z}$ 的一个划分,正整数集、$\{0\}$ 和负整数集也是 $\mathbb{Z}$ 的一个划分.
由定理2.3.1知,商集 A/R 是 A 的一个划分,每个等价类都是一个划分块,因此,不同的商集对应不同的划分.

例 2.3.2

设 $A=\{a,b,c,d\}$,判断下面给定的 $\pi_i(i=1,2,\cdots,6)$,哪些是 A 的划分,哪些不是.

$$\pi_1=\{\{a,b\},\{c,d\}\},\pi_2=\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\},\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\},$$
$$\pi_4=\{\{a,b\},\{d\}\},\pi_5=\{\varnothing,\{a,b,c\},\{d\}\},\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}.$$

例 2.3.2

设 $A=\{a,b,c,d\}$,判断下面给定的 $\pi_i(i=1,2,\cdots,6)$,哪些是 A 的划分,哪些不是.

$$\pi_1=\{\{a,b\},\{c,d\}\},\pi_2=\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\},\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\},$$
$$\pi_4=\{\{a,b\},\{d\}\},\pi_5=\{\varnothing,\{a,b,c\},\{d\}\},\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}.$$

解

由定义2.3.4知,π_1 和 π_2 是 A 的划分,其他都不是 A 的划分. 因为 π_3 中的子集 $\{a\}$ 和 $\{a,b,c,d\}$ 相交不空,$\bigcup\pi_4\neq A$,π_5 中含有空集,而 π_6 不是 A 的子集族.

例 2.3.2

设 $A=\{a,b,c,d\}$,判断下面给定的 $\pi_i(i=1,2,\cdots,6)$,哪些是 A 的划分,哪些不是.

$$\pi_1=\{\{a,b\},\{c,d\}\},\pi_2=\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\},\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\},$$
$$\pi_4=\{\{a,b\},\{d\}\},\pi_5=\{\varnothing,\{a,b,c\},\{d\}\},\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}.$$

解

由定义2.3.4知,π_1 和 π_2 是 A 的划分,其他都不是 A 的划分. 因为 π_3 中的子集 $\{a\}$ 和 $\{a,b,c,d\}$ 相交不空,$\bigcup\pi_4\neq A$,π_5 中含有空集,而 π_6 不是 A 的子集族.

注 2.3.1 (A 上的等价关系与 A 的划分一一对应!)

如前所述,对于非空集合 A 和 A 上的等价关系 R,商集 A/R 给出 A 的一个划分.
反过来,任给 A 的一个划分 π,如下定义 A 上的关系 R:

$$R=\{(x,y)\in A\times A|x,y\text{ 属于 }\pi\text{ 的同一个划分块}\},$$

则根据划分的定义,不难证明 R 为 A 上的等价关系,且该等价关系对应的商集 $A/R=\pi$.

例 2.3.3

分别给出一元集 $A=\{1\}$、二元集 $B=\{1,2\}$ 和三元集 $C=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系.

解

根据等价关系与划分的一一对应关系,我们只需要求出相应的划分即可.

一元集 $A=\{1\}$ 只有 1 个划分 $\pi=\{A\}$,对应的等价关系是全域关系 $A\times A$.

二元集 $B=\{1,2\}$ 有 2 个划分 $\pi_1=\{B\},\pi_2=\{\{1\},\{2\}\}$,对应的等价关系分别是全域关系 $B\times B$ 和恒等关系 I_B.

例2.3.3(续)

对于三元集 $C=\{1,2,3\}$,图 2.3.1给出了 C 的所有 5 个划分.

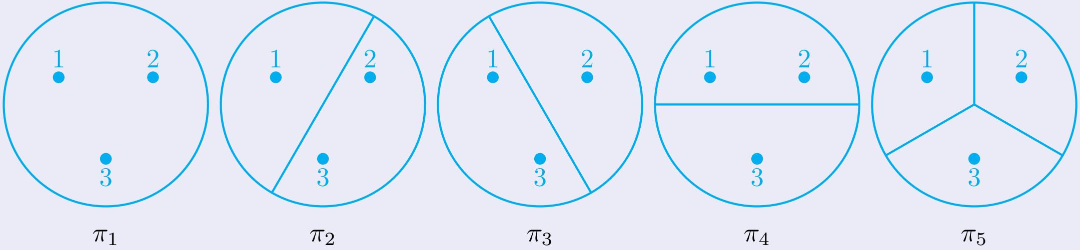


图 2.3.1三元集的所有划分

这里 π_1 对应的等价关系是全域关系 $C\times C$,π_5 对应的等价关系是恒等关系 I_C,π_2,π_3 和 π_4 分别对应如下的等价关系 R_2,R_3 和 R_4:

$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\},R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\},$$
$$R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}.$$

关系闭包

设 R 是非空集合 A 上的关系,如果 R 不具有某些特定的性质,如自反性,那么可以通过在 R 中添加一些有序对来改造 R,得到新的关系 R',使得 R' 具有自反性,但又不希望 R' 与 R 相差太大. 换句话说,添加的有序对要尽可能少,满足这些要求的 R' 就称作 R 的自反闭包. 类似地,可以通过添加有序对来构造对称闭包和传递闭包.

关系闭包

设 R 是非空集合 A 上的关系,如果 R 不具有某些特定的性质,如自反性,那么可以通过在 R 中添加一些有序对来改造 R,得到新的关系 R',使得 R' 具有自反性,但又不希望 R' 与 R 相差太大. 换句话说,添加的有序对要尽可能少,满足这些要求的 R' 就称作 R 的自反闭包. 类似地,可以通过添加有序对来构造对称闭包和传递闭包.

定义 2.3.5

设 A 为非空集合,R 为 A 上的关系,R 的 **自反(对称或传递)闭包** 是 A 上满足以下条件的关系 R':

(1) R' 是自反的(对称或传递的),

(2) $R \subseteq R'$,

(3) 若 R'' 是 A 上包含 R 的自反(对称或传递)关系,则有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包分别记作 $r(R)$, $s(R)$ 和 $t(R)$.

关系闭包

在例2.2.3中，对于 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的关系 $R_2=\{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(4,4)\}$，有

$$
\begin{aligned}
r(R_2) &= \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(4,4),(2,2),(3,3)\},\\
s(R_2) &= \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(4,4),(1,2)\},\\
t(R_2) &= \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(4,4),(2,3),(3,3)\}.
\end{aligned}
$$

闭包的构造

命题 2.3.1

设 A 为非空集合, R 为 A 上的关系, 则

(1) $r(R) = R \cup I_A$.

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$.

(3) $t(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} R^n$.

闭包的构造

命题 2.3.1

设 A 为非空集合,R 为 A 上的关系,则

(1) $r(R) = R \cup I_A$.

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$.

(3) $t(R) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} R^n$.

证明

我们仅证 (3). 首先,易验证 $(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} R^n) \circ (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} R^n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} R^n$,故由定理2.2.1(5)知,
$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} R^n$ 是传递的.
另外,显然有 $R \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} R^n$.
假设 R' 是 A 上包含 R 的传递关系,需证 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} R^n \subseteq R'$. 这只需证明对任意的正整数 n,均有 $R^n \subseteq R'$ 即可. 下面用归纳法证明.

命题2.3.1证明(续)

当 $n=1$ 时,有 $R^1=R\subseteq R'$.
归纳假设 $R^n\subseteq R'$,那么对任意的 $(x,y)\in R^{n+1}$,由幂运算定义 $R^{n+1}=R^n\circ R$ 知,存在 $z\in A$,使得 $(x,z)\in R^n\subseteq R'$ 且 $(z,y)\in R\subseteq R'$. 因为 R' 是传递的,所以 $(x,y)\in R'$. 这就证明了 $R^{n+1}\subseteq R'$,从而证明了 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}R^n$ 是 R 的传递闭包,故 $t(R)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}R^n$.

命题2.3.1证明(续)

当 $n=1$ 时,有 $R^1=R\subseteq R'$.
归纳假设 $R^n\subseteq R'$,那么对任意的 $(x,y)\in R^{n+1}$,由幂运算定义 $R^{n+1}=R^n\circ R$ 知,存在 $z\in A$,使得 $(x,z)\in R^n\subseteq R'$ 且 $(z,y)\in R\subseteq R'$. 因为 R' 是传递的,所以 $(x,y)\in R'$. 这就证明了 $R^{n+1}\subseteq R'$,从而证明了 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}R^n$ 是 R 的传递闭包,故 $t(R)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}R^n$.

下面考虑满足两个或三个性质的闭包. 易验证,包含 R 的最小的自反且对称的关系是 $R\cup R^{-1}\cup I_A$,即 $r(R)\cup s(R)$.
下面将证明,包含 R 的最小的自反且传递的关系是 $I_A\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}R^n\right)$,即 $I_A\cup t(R)$.
方便起见,引入一个记号,令

$$R^*=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}R^n. \tag{2.3.1}$$

命题 2.3.2

设 R 为非空集合 A 上的关系，则包含 R 的最小的自反且传递的关系是 R^*.

命题 2.3.2

设 R 为非空集合 A 上的关系,则包含 R 的最小的自反且传递的关系是 R^*.

证明.

由式(2.3.1)知,$R \subseteq R^*$. 因为 $I_A \subseteq R^*$,且易验证 $R^* \circ R^* \subseteq R^*$,所以由定理2.2.1(1)和(5)知,$R^*$ 是自反且传递的.

命题 2.3.2

设 R 为非空集合 A 上的关系,则包含 R 的最小的自反且传递的关系是 R^*.

证明.

由式(2.3.1)知,$R \subseteq R^*$. 因为 $I_A \subseteq R^*$,且易验证 $R^* \circ R^* \subseteq R^*$,所以由定理2.2.1(1)和(5)知,$R^*$ 是自反且传递的.

假设 R' 是 A 上包含 R 的自反且传递的关系,下证 $R^* \subseteq R'$. 这只需证明对任意自然数 n,均有 $R^n \subseteq R'$ 即可. 当 $n = 0$ 时,由 R' 的自反性有 $R^0 = I_A \subseteq R'$;而当 $n > 0$ 时,由命题2.3.1(3)知, $R^n \subseteq t(R) \subseteq R'$. 这就证明了 R^* 是包含 R 的最小的自反且传递的关系. □

命题 2.3.2

设 R 为非空集合 A 上的关系,则包含 R 的最小的自反且传递的关系是 R^*.

证明.

由式(2.3.1)知,$R \subseteq R^*$. 因为 $I_A \subseteq R^*$,且易验证 $R^* \circ R^* \subseteq R^*$,所以由定理2.2.1(1)和(5)知,$R^*$ 是自反且传递的.

假设 R' 是 A 上包含 R 的自反且传递的关系,下证 $R^* \subseteq R'$. 这只需证明对任意自然数 n,均有 $R^n \subseteq R'$ 即可. 当 $n = 0$ 时,由 R' 的自反性有 $R^0 = I_A \subseteq R'$;而当 $n > 0$ 时,由命题2.3.1(3)知,$R^n \subseteq t(R) \subseteq R'$. 这就证明了 R^* 是包含 R 的最小的自反且传递的关系. □

进一步,我们可以得到包含 R 的最小的等价关系.

定理 2.3.2

设 R 为非空集合 A 上的关系,则包含 R 的最小的等价关系是

$$(R \cup R^{-1})^*. \tag{2.3.2}$$

证明.

显然，$R \subseteq (R \cup R^{-1})^*$. 下证 $(R \cup R^{-1})^*$ 是一个等价关系. 由命题2.3.2知，$(R \cup R^{-1})^*$ 是自反且传递的. 关于 $(R \cup R^{-1})^*$ 的对称性，我们只需归纳证明对任意自然数 n，$(R \cup R^{-1})^n$ 是对称的. 当 $n = 0$ 或 1 时，$(R \cup R^{-1})^0 = I_A$，$(R \cup R^{-1})^1 = R \cup R^{-1} = s(R)$，都是对称关系. 归纳假设 $(R \cup R^{-1})^n$ 是对称的，则由定理2.2.1(3)有 $(R \cup R^{-1})^n = \left((R \cup R^{-1})^n\right)^{-1}$. 对于 $n+1$ 的情形，由定理2.1.1(2)可得

$$\begin{aligned}\left((R \cup R^{-1})^{n+1}\right)^{-1} &= \left((R \cup R^{-1})^n \circ (R \cup R^{-1})\right)^{-1} \\ &= (R \cup R^{-1})^{-1} \circ \left((R \cup R^{-1})^n\right)^{-1} \\ &= (R \cup R^{-1}) \circ (R \cup R^{-1})^n \\ &= (R \cup R^{-1})^{n+1},\end{aligned}$$

故 $(R \cup R^{-1})^{n+1}$ 也是对称的. 这就证明了 $(R \cup R^{-1})^*$ 是一个等价关系.

证明.

显然,$R \subseteq (R \cup R^{-1})^*$. 下证 $(R \cup R^{-1})^*$ 是一个等价关系. 由命题2.3.2知,$(R \cup R^{-1})^*$ 是自反且传递的. 关于 $(R \cup R^{-1})^*$ 的对称性,我们只需归纳证明对任意自然数 n,$(R \cup R^{-1})^n$ 是对称的. 当 $n = 0$ 或 1 时,$(R \cup R^{-1})^0 = I_A$,$(R \cup R^{-1})^1 = R \cup R^{-1} = s(R)$,都是对称关系. 归纳假设 $(R \cup R^{-1})^n$ 是对称的,则由定理2.2.1(3)有 $(R \cup R^{-1})^n = \left((R \cup R^{-1})^n\right)^{-1}$. 对于 $n+1$ 的情形,由定理2.1.1(2)可得

$$\begin{aligned}
\left((R \cup R^{-1})^{n+1}\right)^{-1} &= \left((R \cup R^{-1})^n \circ (R \cup R^{-1})\right)^{-1} \\
&= (R \cup R^{-1})^{-1} \circ \left((R \cup R^{-1})^n\right)^{-1} \\
&= (R \cup R^{-1}) \circ (R \cup R^{-1})^n \\
&= (R \cup R^{-1})^{n+1},
\end{aligned}$$

故 $(R \cup R^{-1})^{n+1}$ 也是对称的. 这就证明了 $(R \cup R^{-1})^*$ 是一个等价关系.

假设 R' 是 A 上包含 R 的等价关系,下证 $(R \cup R^{-1})^* \subseteq R'$. 因为 A 上包含 R 的每个等价关系均包含 $R \cup R^{-1}$,所以有 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$. 由此可见,$R'$ 是包含 $R \cup R^{-1}$ 的自反且传递的关系. 而由命题2.3.2知,$(R \cup R^{-1})^*$ 是包含 $R \cup R^{-1}$ 的最小的自反且传递的关系,故有 $(R \cup R^{-1})^* \subseteq R'$.

这就证明了 $(R \cup R^{-1})^*$ 是包含 R 的最小的等价关系. □

注 2.3.2

定理2.3.2给出了求包含 R 的最小的等价关系的方式：先求对称闭包，再求传递闭包，自反闭包与这两个闭包运算没有冲突，可以放在任意位置，即

$$(R \cup R^{-1})^* = t(s(r(R))) = t(r(s(R))) = r(t(s(R))).$$

注 2.3.2

定理2.3.2给出了求包含 R 的最小的等价关系的方式:先求对称闭包,再求传递闭包,自反闭包与这两个闭包运算没有冲突,可以放在任意位置,即

$$(R \cup R^{-1})^* = t(s(r(R))) = t(r(s(R))) = r(t(s(R))).$$

例如,在例2.2.3中,对于 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系 $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\}$,有

$$\begin{aligned}(R_2 \cup R_2^{-1})^* &= t(s(r(R_2))) \\ &= t(s(\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 2), (3, 3)\}) \\ &= t(\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}) \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\},\end{aligned}$$

该等价关系对应的划分是 $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$.

偏序关系

定义 2.4.1

设 A 为非空集合，R 为 A 上的关系. 如果 R 是自反的、反对称的和传递的，那么称 R 为 A 上的 偏序关系，简称为 偏序.

集合 A 和偏序 R 一起称作 偏序集，记作 (A, R).

偏序关系

定义 2.4.1

设 A 为非空集合,R 为 A 上的关系. 如果 R 是自反的、反对称的和传递的,那么称 R 为 A 上的 偏序关系 ,简称为 偏序 .
集合 A 和偏序 R 一起称作 偏序集 ,记作 (A, R).

例如,集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系. 小于或等于关系、整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系. 一般说来,全域关系 $A \times A$ 不是 A 上的偏序关系.

直观起见,通常将偏序关系 R 记作 $\preccurlyeq$. 若 $(x, y) \in \preccurlyeq$,则记作 $x \preccurlyeq y$,读作 x"小于或等于"y. 有时也使用符号 $x \prec y$,读作 x"小于"y,表示 $x \preccurlyeq y$,但 $x \neq y$.

偏序关系的实质是在 A 的元素之间建立了一种层次结构,这种层次结构是基于偏序关系"小于或等于"的可比性建立起来的. 我们说 x 与 y 是 可比 的,如果 $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$. 显然,这样的可比性并不能保证 A 中任意两个元素都能比较,偏序关系中的"偏"字就意味着部分可比较但未必都能比较.

给定偏序集 $(A, \preccurlyeq)$，若任意 $x, y \in A$，x 与 y 都是可比的，则称 $\preccurlyeq$ 为 A 上的 全序关系 (或简称 全序、线性序).

例如，实数集 $\mathbb{R}$ 上的小于或等于关系是全序，因为任何两个数都是可比大小的，但一般而言，整除关系和包含关系都不是相应集合上的全序.

给定偏序集 $(A,\preccurlyeq)$，若任意 $x,y\in A$，x 与 y 都是可比的，则称 $\preccurlyeq$ 为 A 上的 全序关系 (或简称 全序、线性序).

例如，实数集 $\mathbb{R}$ 上的小于或等于关系是全序，因为任何两个数都是可比大小的，但一般而言，整除关系和包含关系都不是相应集合上的全序.

例 2.4.1

(1) 设 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ 是 12 的所有正因子集合，D_A 是 A 上的整除关系. 易验证，D_A 是自反的、反对称的和传递的，因此是 A 上的偏序关系.

给定偏序集 $(A, \preccurlyeq)$,若任意 $x, y \in A$,x 与 y 都是可比的,则称 $\preccurlyeq$ 为 A 上的 全序关系 (或简称 全序、线性序).

例如,实数集 $\mathbb{R}$ 上的小于或等于关系是全序,因为任何两个数都是可比大小的,但一般而言,整除关系和包含关系都不是相应集合上的全序.

例 2.4.1

(1) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 是 12 的所有正因子集合,D_A 是 A 上的整除关系. 易验证,D_A 是自反的、反对称的和传递的,因此是 A 上的偏序关系.

(2) 设 $A = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ 是三元集 $\{a, b, c\}$ 的幂集,$R_{\subseteq}$ 是 A 上的包含关系. 易验证,$R_{\subseteq}$ 满足自反性、反对称性和传递性,故是 A 上的偏序关系.

给定偏序集 $(A, \preccurlyeq)$，若任意 $x, y \in A$，x 与 y 都是可比的，则称 $\preccurlyeq$ 为 A 上的 全序关系（或简称 全序、线性序）.

例如，实数集 $\mathbb{R}$ 上的小于或等于关系是全序，因为任何两个数都是可比大小的，但一般而言，整除关系和包含关系都不是相应集合上的全序.

例 2.4.1

(1) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 是 12 的所有正因子集合，D_A 是 A 上的整除关系. 易验证，D_A 是自反的、反对称的和传递的，因此是 A 上的偏序关系.

(2) 设 $A = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ 是三元集 $\{a, b, c\}$ 的幂集，$R_{\subseteq}$ 是 A 上的包含关系. 易验证，$R_{\subseteq}$ 满足自反性、反对称性和传递性，故是 A 上的偏序关系.

(3) 设 $(A, \preccurlyeq)$ 是偏序集，B 是 A 的非空子集，定义 B 上的关系 $\preccurlyeq_B$：任意 $x, y \in B$，$x \preccurlyeq_B y$ 当且仅当 $x \preccurlyeq y$. 不难验证，$\preccurlyeq_B$ 是 B 上的偏序关系. 该关系是 A 上关系 $\preccurlyeq$ 在 $B \times B$ 上的限制，因此，简单起见，我们一般仍用偏序 $\preccurlyeq$ 表示 $\preccurlyeq_B$，将 $(B, \preccurlyeq_B)$ 记作 $(B, \preccurlyeq)$.

哈斯图

利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性,可以简化一个偏序关系的关系图,得到偏序集的哈斯图.
为了说明哈斯图的画法,需要定义偏序集中元素的覆盖关系.

定义 2.4.2

设 $(A,\preccurlyeq)$ 为偏序集,任意 $x,y\in A$,若 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$,则称 y **覆盖** x.

哈斯图

利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性,可以简化一个偏序关系的关系图,得到偏序集的哈斯图. 为了说明哈斯图的画法,需要定义偏序集中元素的覆盖关系.

定义 2.4.2

设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集,任意 $x, y \in A$,若 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$,则称 y **覆盖** x.

例如,对于集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 及其上的整除关系 D_A,有

- 2 和 3 都覆盖 1;
- 6 覆盖 2 和 3;
- 但是 4 不覆盖 1,因为有 $1 \prec 2 \prec 4$;
- 6 也不覆盖 4,因为 $4 \prec 6$ 不成立.

哈斯图

利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性，可以简化一个偏序关系的关系图，得到偏序集的哈斯图. 为了说明哈斯图的画法，需要定义偏序集中元素的覆盖关系.

定义 2.4.2

设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集，任意 $x, y \in A$，若 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 y **覆盖** x.

例如，对于集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 及其上的整除关系 D_A，有

- 2 和 3 都覆盖 1；
- 6 覆盖 2 和 3；
- 但是 4 不覆盖 1，因为有 $1 \prec 2 \prec 4$；
- 6 也不覆盖 4，因为 $4 \prec 6$ 不成立.

对于给定的偏序集 $(A, \preccurlyeq)$，如下画它的 **哈斯图**：

- 以 A 中的所有元素为顶点，适当排列顺序，使得对 $\forall x, y \in A$，若 $x \prec y$，则将 x 画在 y 的下方；
- 进一步，如果 y 覆盖 x，就用一条线段连接 x 和 y.

例 2.4.2

分别画出例*2.4.1*中偏序集 $(A=\{1,2,3,4,6,12\}, D_A)$ 和 $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), R_{\subseteq})$ 的哈斯图.

解

两个哈斯图如图 2.4.1所示.

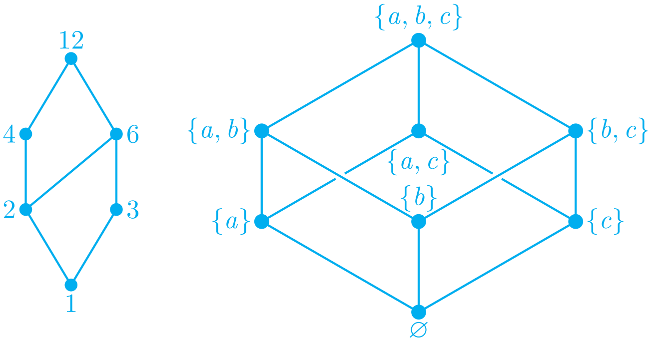


图 2.4.112 的正因子和三元集幂集的哈斯图

反过来,给定一个哈斯图,我们也能立即得到对应的偏序集.

例 2.4.3

已知偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 的哈斯图如图 2.4.2所示,试求出集合 A 和关系 $\preccurlyeq$ 的表达式.

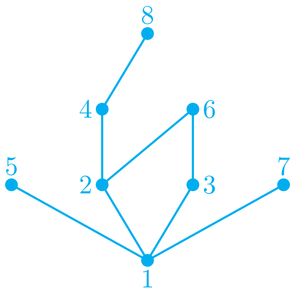


图 2.4.2$\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的哈斯图

解

$$A = \{1, 2, \cdots, 8\},$$
$$\preccurlyeq = \{(1,2), (1,3), (1,5), (1,7), (2,4), (2,6), (3,6), (4,8)\} \cup I_A.$$

偏序集的特殊元素

定义 2.4.3

设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集, $b \in B \subseteq A$.

(1) 若对任意 $x \in B$,均有 $x \preccurlyeq b$,则称 b 为 B 的 最大元.

(2) 若对任意 $x \in B$,均有 $b \preccurlyeq x$,则称 b 为 B 的 最小元.

偏序集的特殊元素

定义 2.4.3

设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集，$b \in B \subseteq A$.

(1) 若对任意 $x \in B$,均有 $x \preccurlyeq b$,则称 b 为 B 的 最大元.

(2) 若对任意 $x \in B$,均有 $b \preccurlyeq x$,则称 b 为 B 的 最小元.

(3) 若对任意 $x \in B$,当 $b \preccurlyeq x$ 时,必有 $x = b$,则称 b 为 B 的 极大元.

(4) 若对任意 $x \in B$,当 $x \preccurlyeq b$ 时,必有 $x = b$,则称 b 为 B 的 极小元.

从定义2.4.3可以看出,最大元和极大元可能是不同的:最大元与 B 中元素都是可比的,它是 B 中最大的元素;而极大元不一定与 B 中元素都是可比的,只要没有比它大的元素,它就是极大元.

对于有限集 B,极大元一定存在,但最大元不一定存在. 极大元可能有多个,但最大元如果存在,一定是唯一的. 若 B 中只有一个极大元,则它一定是 B 的最大元. 类似地,最小元和极小元也有这种区别.

例 2.4.4

设偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 如图2.4.2所示，分别求 A 和 $B = \{2, 3, 4, 6\}$ 的最大元、最小元、极大元和极小元.

例 2.4.4

设偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 如图*2.4.2*所示,分别求 A 和 $B = \{2, 3, 4, 6\}$ 的最大元、最小元、极大元和极小元.

解

A 没有最大元;最小元是 1;$5, 6, 7, 8$ 都是极大元;极小元是 1.

B 没有最大元,也没有最小元;$4, 6$ 都是极大元;$2, 3$ 都是极小元.

偏序集的界

定义 2.4.4

设 $(A,\preccurlyeq)$ 为偏序集, $B\subseteq A, a\in A$.

(1) 若对任意 $x\in B$, 均有 $x\preccurlyeq a$, 则称 a 为 B 的 上界.

(2) 若对任意 $x\in B$, 均有 $a\preccurlyeq x$, 则称 a 为 B 的 下界.

偏序集的界

定义 2.4.4

设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $a \in A$.

(1) 若对任意 $x \in B$,均有 $x \preccurlyeq a$,则称 a 为 B 的 上界.

(2) 若对任意 $x \in B$,均有 $a \preccurlyeq x$,则称 a 为 B 的 下界.

(3) 设 a 为 B 的上界,若对 B 的任意上界 a' 均有 $a \preccurlyeq a'$,则称 a 为 B 的 最小上界 或 上确界.

(4) 设 a 为 B 的下界,若对 B 的任意下界 a' 均有 $a' \preccurlyeq a$,则称 a 为 B 的 最大下界 或 下确界.

偏序集的界

定义 2.4.4

设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集, $B \subseteq A, a \in A$.

(1) 若对任意 $x \in B$,均有 $x \preccurlyeq a$,则称 a 为 B 的 上界.

(2) 若对任意 $x \in B$,均有 $a \preccurlyeq x$,则称 a 为 B 的 下界.

(3) 设 a 为 B 的上界,若对 B 的任意上界 a' 均有 $a \preccurlyeq a'$,则称 a 为 B 的 最小上界 或 上确界.

(4) 设 a 为 B 的下界,若对 B 的任意下界 a' 均有 $a' \preccurlyeq a$,则称 a 为 B 的 最大下界 或 下确界.

由定义2.4.4可知, B 的最大元一定是 B 的上界,同时也是 B 的最小上界,但 B 的上界不一定是 B 的最大元,因为它可能不是 B 中的元素; B 的最小元一定是 B 的下界,同时也是 B 的最大下界,同样地, B 的下界也不一定是 B 的最小元.

B 的上界、下界、最小上界和最大下界都不一定存在，但如果存在，最小上界和最大下界必是唯一的. 考虑例2.4.1(1)中偏序集 $(A=\{1,2,3,4,6,12\},D_A)$，该偏序集的哈斯图如图 2.4.1中左边图所示. 令 $B=\{2,3,6\}$，则 6 和 12 都是 B 的上界，最小上界是 6，1 是下界，也是最大下界.

B 的上界、下界、最小上界和最大下界都不一定存在，但如果存在，最小上界和最大下界必是唯一的. 考虑例2.4.1(1)中偏序集 $(A=\{1,2,3,4,6,12\},D_A)$，该偏序集的哈斯图如图 2.4.1中左边图所示. 令 $B=\{2,3,6\}$，则 6 和 12 都是 B 的上界，最小上界是 6，1 是下界，也是最大下界.

基于最小上界和最大下界，我们可以定义一类特殊的偏序集——格. 格在程序验证、数据库和编译器设计等领域都有着广泛的应用.

定义 2.4.5

设 $(L,\preccurlyeq)$ 是偏序集，如果对任意 $x,y\in L$，$\{x,y\}$ 都有最小上界和最大下界，那么称 L 关于偏序 $\preccurlyeq$ 构成一个 **格**.

例 2.4.5

(1) 例2.4.1(1)中,偏序集 $(A=\{1,2,3,4,6,12\}, D_A)$ 构成格. 一般地,设 n 是正整数,F_n 是 n 的正因子的集合,D 为整除关系,则偏序集 (F_n, D) 构成格. 事实上,对任意 $x, y \in F_n$,$\{x, y\}$ 的最小上界是 $\mathrm{lcm}(x, y)$,即 x 和 y 的最小公倍数;$\{x, y\}$ 的最大下界是 $\gcd(x, y)$,即 x 和 y 的最大公因数.

例 2.4.5

(1) 例2.4.1(1)中,偏序集 $(A=\{1,2,3,4,6,12\}, D_A)$ 构成格. 一般地,设 n 是正整数,F_n 是 n 的正因子的集合,D 为整除关系,则偏序集 (F_n, D) 构成格. 事实上,对任意 $x, y \in F_n$,$\{x, y\}$ 的最小上界是 $\operatorname{lcm}(x, y)$,即 x 和 y 的最小公倍数;$\{x, y\}$ 的最大下界是 $\gcd(x, y)$,即 x 和 y 的最大公因数.

(2) 例2.4.1(2)中,偏序集 $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), R_{\subseteq})$ 也构成格,这里两个子集 X, Y 的最小上界是并集 $X \cup Y$,最大下界是交集 $X \cap Y$.

例 2.4.5

(1) 例2.4.1(1)中,偏序集 $(A=\{1,2,3,4,6,12\}, D_A)$ 构成格. 一般地,设 n 是正整数,F_n 是 n 的正因子的集合,D 为整除关系,则偏序集 (F_n, D) 构成格. 事实上,对任意 $x, y \in F_n$,$\{x, y\}$ 的最小上界是 $\mathrm{lcm}(x, y)$,即 x 和 y 的最小公倍数;$\{x, y\}$ 的最大下界是 $\gcd(x, y)$,即 x 和 y 的最大公因数.

(2) 例2.4.1(2)中,偏序集 $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), R_{\subseteq})$ 也构成格,这里两个子集 X, Y 的最小上界是并集 $X \cup Y$,最大下界是交集 $X \cap Y$.

(3) 图2.4.2中的偏序集不构成格,因为 $\{3, 5\}$ 没有最小上界.

拓扑排序

在日常生活中，任务之间往往存在依赖关系，某些任务可能依赖于其他任务的完成，因此我们经常用偏序关系来约束这些任务的完成顺序. 然而，尽管这些约束条件对任务施加了偏序关系，任务实际上必须按照某种顺序完成. 我们面临的挑战是将偏序关系扩展为全序关系——也就是说，构建一个保持偏序关系所有约束条件，同时使以前无法比较的元素变成可比较的全序关系.

为此，先引入相容性的概念.

拓扑排序

在日常生活中,任务之间往往存在依赖关系,某些任务可能依赖于其他任务的完成,因此我们经常用偏序关系来约束这些任务的完成顺序. 然而,尽管这些约束条件对任务施加了偏序关系,任务实际上必须按照某种顺序完成. 我们面临的挑战是将偏序关系扩展为全序关系——也就是说,构建一个保持偏序关系所有约束条件,同时使以前无法比较的元素变成可比较的全序关系.

为此,先引入相容性的概念.

设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 A 上的偏序关系,$\preccurlyeq'$ 是 A 上的全序关系,若对任意 $x, y \in A$,均有 $x \preccurlyeq y$ 蕴涵 $x \preccurlyeq' y$,则称全序 $\preccurlyeq'$ 与偏序 $\preccurlyeq$ 是 **相容** 的. 偏序的全序化,即由一个偏序构造相容的全序的过程称作 **拓扑排序** .

一般地,对于给定的偏序,可能存在多个与之相容的全序,这意味着拓扑排序并不是唯一的. 为了介绍拓扑排序算法,我们需要下面的引理和定理.

引理 2.4.1

每个非空有限偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 至少有一个极小元.

引理 2.4.1

每个非空有限偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 至少有一个极小元.

证明.

反证法. 假设 A 没有极小元,则对任意 $x_0 \in A$,因为 x_0 不是极小元,所以必存在 $x_1 \in A$,使得 $x_1 \prec x_0$. 因为 x_1 也不是极小元,所以必存在 $x_2 \in A$,使得 $x_2 \prec x_1$. 继续这一过程,可得无限序列

$$\cdots \prec x_2 \prec x_1 \prec x_0.$$

该序列中的元素互不相同,因此得到 A 中无限多个元素,这与 A 是有限集矛盾. 故 A 中存在极小元. $\square$

定理 2.4.1

设 $(A, \preccurlyeq)$ 是非空有限偏序集，则 A 上存在与 $\preccurlyeq$ 相容的全序 $\preccurlyeq'$.

定理 2.4.1

设 $(A, \preccurlyeq)$ 是非空有限偏序集,则 A 上存在与 $\preccurlyeq$ 相容的全序 $\preccurlyeq'$.

证明.

由引理2.4.1知,A 中有极小元,任取一个极小元 x_1. 考虑集合 $A \backslash \{x_1\}$,若该集合非空,则由例2.4.1(3)知,$(A \backslash \{x_1\}, \preccurlyeq)$ 是一个偏序集,因此存在极小元 x_2. 考虑集合 $A \backslash \{x_1, x_2\}$,若该集合仍然非空,则可从中选择极小元 x_3. 继续这个过程,只要还有元素留下,就在 $A \backslash \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 中选择极小元 x_{k+1}. 因为 A 是有限集,所以这个过程一定会终止,最终产生一个元素序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 所需要的全序 $\preccurlyeq'$ 可由下面的序给出

$$x_1 \prec' x_2 \prec' \cdots \prec' x_n.$$

观察知,对任意 $x \prec y$,当 y 作为极小元被选中时,x 已经被选过了,否则 y 不可能是极小元. 因此有 $x \prec' y$,即当 $x \preccurlyeq y$ 时一定有 $x \preccurlyeq' y$,这就证明了全序 $\preccurlyeq'$ 与 $\preccurlyeq$ 是相容的. $\square$

算法1给出了基于定理2.4.1及其证明的拓扑排序算法的伪码.

Algorithm 1: 拓扑排序算法

输入: n 元偏序集 $(A, \preccurlyeq)$

输出: 与 $\preccurlyeq$ 相容的全序 $L: x_1 \preccurlyeq' x_2 \preccurlyeq' \cdots \preccurlyeq' x_n$

$k \leftarrow 1$;

$L \leftarrow \varnothing$;

while $A \neq \varnothing$ **do**

    $x_k \leftarrow A$ 的极小元;

    $A \leftarrow A \backslash \{x_k\}$;

    $L.append(x_k)$;

    $k \leftarrow k + 1$;

end

return L

例 2.4.6

用拓扑排序算法找出与例2.4.1(图 2.4.1)中偏序集 $(A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, D_A)$ 相容的一个全序.

例 2.4.6

用拓扑排序算法找出与例2.4.1(图 2.4.1)中偏序集 $(A=\{1,2,3,4,6,12\},D_A)$ 相容的一个全序.

解

根据拓扑排序算法,先从 A 中选择一个极小元 x_1. 这个元素只能是 1,因为它是 A 中唯一的极小元. 再从 $\{2,3,4,6,12\}$ 中选择一个极小元. 该集合中有 2 和 3 两个极小元,我们选择 $x_2=3$. 剩下的集合 $\{2,4,6,12\}$ 中有唯一的极小元 2,选择 $x_3=2$ 后,得到集合 $\{4,6,12\}$. 该集合有 4 和 6 两个极小元,我们选择 $x_4=4$. 剩下的 $\{6,12\}$ 中有唯一的极小元 6,选择 $x_5=6$,最后剩下的一个元素 12 作为 x_6. 由此得到一个与整除关系 D_A 相容的全序

$$1\preccurlyeq' 3\preccurlyeq' 2\preccurlyeq' 4\preccurlyeq' 6\preccurlyeq' 12.$$

例 2.4.7

某项目由 12 个任务构成，任务之间的顺序关系如图 2.4.3 所示. 任务 x 到 y 的有向边表示任务 x 必须安排在 y 之前完成. 试给出这些任务的一个拓扑排序.

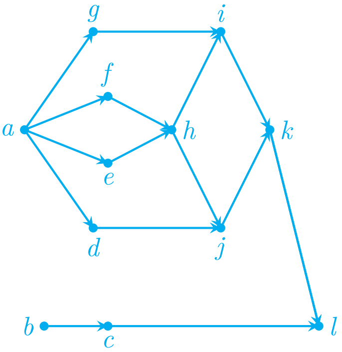


图 2.4.3任务顺序关系图

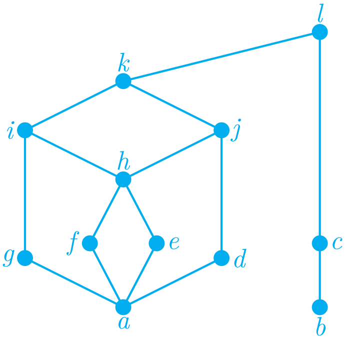


图 2.4.4任务偏序的哈斯图

例2.4.7(续)

解

考虑如下建立这些任务上的偏序 $\preccurlyeq$: $x \prec y$ 当且仅当存在任务 x 到 y 的有向边;将关系 $\prec$ 作自反、传递闭包,即得偏序 $\preccurlyeq$. 该偏序的哈斯图如图2.4.4所示. 通过执行拓扑排序,可以得到一个(不唯一)与 $\preccurlyeq$ 相容的全序

$$a \preccurlyeq' b \preccurlyeq' c \preccurlyeq' d \preccurlyeq' e \preccurlyeq' f \preccurlyeq' g \preccurlyeq' h \preccurlyeq' i \preccurlyeq' j \preccurlyeq' k \preccurlyeq' l.$$

目录

函数的基本概念

函数是二元关系的一种特殊形式,通常被理解为一种输入与输出的对应关系:每一个输入都唯一对应一个输出.

定义 3.1.1

设 A, B 为集合,$f \subseteq A \times B$ 是从 A 到 B 的关系,若对每个 $x \in A$,存在唯一的 $y \in B$,使得 $(x, y) \in f$,则称 f 是从 A 到 B 的 **函数** (也称作 **映射**),记作 $f : A \longrightarrow B$,同时称 A 为 f 的 **定义域** ,B 为 f 的 **值域** .

函数的基本概念

函数是二元关系的一种特殊形式,通常被理解为一种输入与输出的对应关系:每一个输入都唯一对应一个输出.

定义 3.1.1

设 A, B 为集合,$f \subseteq A \times B$ 是从 A 到 B 的关系,若对每个 $x \in A$,存在唯一的 $y \in B$,使得 $(x, y) \in f$,则称 f 是从 A 到 B 的 函数 (也称作 映射),记作 $f : A \longrightarrow B$,同时称 A 为 f 的 定义域 ,B 为 f 的 值域 .

将所有从 A 到 B 的函数构成的集合记作 B^A. 对每个 $x \in A$,满足 $(x, y) \in f$ 的唯一元素 $y \in B$ 称作 f 在 x 处的 值 ,记作 $y = f(x)$. 直观起见,我们有时也用下面的符号分别表示函数 $f : A \longrightarrow B$ 及其在元素 x 处的取值:$A \xrightarrow{f} B, x \longmapsto f(x)$.

函数 $f : A \longrightarrow B$ 有个常见的定义:对 A 中的每个元素 x,指定 B 中唯一的元素 y 与之对应. 严格来说,这种定义是非形式化的,因为我们并不知道"指定"的数学表示. 尽管如此,通常我们仍将函数 f 看作将 $x \in A$ 映射到 y 的指定法则,仅在必要时使用形式化的定义.

例 3.1.1

考虑 $\mathbb{Q}$ 上的下列关系(简单起见,不管 f 是否是函数,我们都用 $f(x)=y$ 代替了写 $(x,y)\in f$),判断哪些是 $\mathbb{Q}$ 上的函数.

(1) $f(p/q)=pq$.

(2) $f(p/q)=\frac{p+1}{q-1}$.

(3) $f(p/q)=8p/q$.

(4) $f(p/q)=p^2/q^2$的平方根.

例 3.1.1

考虑 $\mathbb{Q}$ 上的下列关系(简单起见,不管 f 是否是函数,我们都用 $f(x)=y$ 代替了写 $(x,y)\in f$),判断哪些是 $\mathbb{Q}$ 上的函数.

(1) $f(p/q)=pq$.

(2) $f(p/q)=\frac{p+1}{q-1}$.

(3) $f(p/q)=8p/q$.

(4) $f(p/q)=p^2/q^2$的平方根.

解

(1) 中的 f 不是 $\mathbb{Q}$ 上的函数,例如,$1/2=2/4$,但是 $f(1/2)=1\cdot 2\neq 2\cdot 4=f(2/4)$. 如果关系 $f(p/q)=pq$ 中要求 p/q 为既约分数,即 $\gcd(p,q)=1$ 的分数,那么 f 的确是一个函数.

(2) 中的 f 也不是 $\mathbb{Q}$ 上的函数,因为对任意 $p/1\in\mathbb{Q}$,$\mathbb{Q}$ 中不存在元素与 $p/1$ 对应.

(3) 中的 f 定义了一个函数,因为 f 在每个有理数上都有定义,且在 p/q 上的取值不依赖于 p/q 的表示形式.

例3.1.1解(续)

(4) 中的 f 不是 $\mathbb{Q}$ 上的函数,因为一个 p/q 可能对应两个平方根,例如,对于 $2/1$,有 $(2/1, 2), (2/1, -2) \in f$,不满足定义3.1.1.

例3.1.1解(续)

(4) 中的 f 不是 $\mathbb{Q}$ 上的函数,因为一个 p/q 可能对应两个平方根,例如,对于 $2/1$,有 $(2/1,2),(2/1,-2)\in f$,不满足定义3.1.1.

对比例3.1.1中的(1)和(3),前者函数值依赖于 p/q 的表示形式,而后者不依赖. 一般地,如果一个函数输入值的不同表示方式不改变其实际值时,它能够产生一致的结果,那么称这个函数是 良定义 的. 例如,(3)中的 f 是良定义的,而(1)中不是.

常见的函数

定义 3.1.2

(1) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的 **恒等函数**,即对任意 $x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.

常见的函数

定义 3.1.2

(1) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的 **恒等函数**，即对任意 $x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.

(2) 设 $f : A \longrightarrow B$，若存在 $c \in B$，使得对任意 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$，则称 f 是 **常函数**.

常见的函数

定义 3.1.2

(1) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的 恒等函数 ,即对任意 $x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.

(2) 设 $f: A \longrightarrow B$,若存在 $c \in B$,使得对任意 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$,则称 f 是 常函数 .

(3) 集合 A 中元素的一个 有限序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 能被看作由 $s(k) = a_k, k = 0, 1, \cdots, n$, 定义的函数 $s: \{0, 1, \cdots, n\} \longrightarrow A$;集合 A 中元素的一个 无限序列 $a_0, a_1, \cdots$ 能被看作由 $s(k) = a_k, k \in \mathbb{N}$, 定义的函数 $s: \mathbb{N} \longrightarrow A$.

常见的函数

定义 3.1.2

(1) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的 恒等函数,即对任意 $x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.

(2) 设 $f : A \longrightarrow B$,若存在 $c \in B$,使得对任意 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$,则称 f 是 常函数.

(3) 集合 A 中元素的一个 有限序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 能被看作由 $s(k) = a_k, k = 0, 1, \cdots, n$, 定义的函数 $s : \{0, 1, \cdots, n\} \longrightarrow A$;集合 A 中元素的一个 无限序列 $a_0, a_1, \cdots$ 能被看作由 $s(k) = a_k, k \in \mathbb{N}$, 定义的函数 $s : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

(4) 向上取整函数,也称作 天花板函数,$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$:对任意 $x \in \mathbb{R}$,$\lceil x \rceil$ 取值不小于 x 的最小整数. 例如,$\lceil 3.8 \rceil = 4, \lceil -2.5 \rceil = -2, \lceil \pi \rceil = 4, \lceil 3 \rceil = 3$.

常见的函数

定义 3.1.2

(1) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的 恒等函数,即对任意 $x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.

(2) 设 $f : A \longrightarrow B$,若存在 $c \in B$,使得对任意 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$,则称 f 是 常函数.

(3) 集合 A 中元素的一个 有限序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 能被看作由 $s(k) = a_k, k = 0, 1, \cdots, n,$ 定义的函数 $s : \{0, 1, \cdots, n\} \longrightarrow A$;集合 A 中元素的一个 无限序列 $a_0, a_1, \cdots$ 能被看作由 $s(k) = a_k, k \in \mathbb{N},$ 定义的函数 $s : \mathbb{N} \longrightarrow A.$

(4) 向上取整函数,也称作 天花板函数,$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$:对任意 $x \in \mathbb{R}$,$\lceil x \rceil$ 取值不小于 x 的最小整数. 例如,$\lceil 3.8 \rceil = 4, \lceil -2.5 \rceil = -2, \lceil \pi \rceil = 4, \lceil 3 \rceil = 3.$

(5) 向下取整函数,也称作 地板函数,$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$:对任意 $x \in \mathbb{R}$,$\lfloor x \rfloor$ 取值不大于 x 的最大整数. 例如,$\lfloor 3.8 \rfloor = 3, \lfloor -2.5 \rfloor = -3, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor 3 \rfloor = 3.$

定义3.1.2(续)

(6) **模函数** $\mathrm{mod} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ 定义为

$$m \bmod n = n除m的余数,这里要求余数非负且小于n.$$

例如, $23 \bmod 7 = 2$, $-23 \bmod 7 = 5$.

定义3.1.2(续)

(6) 模函数 $\bmod : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ 定义为

$$m \bmod n = n\text{除}m\text{的余数,这里要求余数非负且小于}n.$$

例如,$23 \bmod 7 = 2, -23 \bmod 7 = 5.$

(7) 设 U 为论域,子集 $A \subseteq U$ 的 特征函数 $\chi_A : U \longrightarrow \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

不难验证,U 的每个子集 A 都对应一个特征函数,不同的子集对应不同的特征函数,因此可以用特征函数来标记 U 的不同子集. 例如,设 $U = \{a, b, c\}$,则有

$$\chi_\varnothing(a) = \chi_\varnothing(b) = \chi_\varnothing(c) = 0;$$
$$\chi_{\{a,b\}}(a) = \chi_{\{a,b\}}(b) = 1, \chi_{\{a,b\}}(c) = 0;$$
$$\chi_U(a) = \chi_U(b) = \chi_U(c) = 1.$$

定义3.1.2(续)

(8) 设 R 是 A 上的等价关系,令

$$\pi : A \longrightarrow A/R$$
$$\pi(x) = [x], \forall x \in A,$$

称 π 是从 A 到商集 A/R 的 自然映射. 例如,设 $A = \{a, b, c\}, R = \{(a, b), (b, a)\} \cup I_A$ 是 A 上的等价关系,则有 $A/R = \{[a], [c]\}$,

$$\pi(a) = \pi(b) = [a],\ \pi(c) = [c].$$

定义3.1.2(续)

(8) 设 R 是 A 上的等价关系,令

$$\pi : A \longrightarrow A/R$$
$$\pi(x) = [x], \forall x \in A,$$

称 π 是从 A 到商集 A/R 的 自然映射. 例如,设 $A = \{a, b, c\}, R = \{(a, b), (b, a)\} \cup I_A$ 是 A 上的等价关系,则有 $A/R = \{[a], [c]\}$,

$$\pi(a) = \pi(b) = [a],\ \pi(c) = [c].$$

定义 3.1.3

设 $f : A \longrightarrow B$ 和 $g : A' \longrightarrow B'$ 是两个函数,如果 $A = A', B = B'$,且子集 $f \subseteq A \times B$ 与 $g \subseteq A' \times B'$ 也相等,那么称这两个函数 相等.

例如,考虑函数 $f(x) = x + 1, g(x) = \frac{x^2+x}{x}$,如果将它们都定义为 $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函数,那么 f 和 g 相等,而如果将 f 定义为 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函数,则与 $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ 不相等,因为两个函数的定义域不一样.

命题 3.1.1

设 $f, g : A \longrightarrow B$ 是两个函数,则 $f = g$ 当且仅当对任意 $x \in A$,$f(x) = g(x)$.

命题 3.1.1

设 $f, g : A \longrightarrow B$ 是两个函数,则 $f = g$ 当且仅当对任意 $x \in A$,$f(x) = g(x)$.

注 3.1.1 (下面讨论 A, B 均是有限集时,从 A 到 B 的函数个数.)

(1) 在定义3.1.1中,我们包含了 A 或 B 为空集时的退化情形. 如果 $B = \varnothing$,那么什么是函数 $f : A \longrightarrow \varnothing$? 首先注意 $A \times \varnothing$ 的元素是有序对 (x, y),其中 $x \in A, y \in \varnothing$. 因为不存在 $y \in \varnothing$,所以没有这样的有序对,从而 $A \times \varnothing = \varnothing$. 函数 $f : A \longrightarrow \varnothing$ 是 $A \times \varnothing$ 的某个子集,但 $A \times \varnothing = \varnothing$,这样只有一个子集就是 $\varnothing$,由此 $\varnothing^A$ 中最多只有一个函数,即 $f = \varnothing$. 而根据定义3.1.1,对每个 $x \in A$,存在唯一的 $y \in \varnothing$ 满足 $(x, y) \in f$. 若 $A \neq \varnothing$,则存在 $x \in A$,然而对于该 x 不存在这样的 y($\varnothing$ 中根本没有任何元素),所以 f 不是函数. 于是,当 $A \neq \varnothing$ 时,从 A 到 $\varnothing$ 没有函数. 另一方面,若 $A = \varnothing$,则无论 B 是否为空集,$f = \varnothing$ 都是从 $\varnothing$ 到 B 的函数. 总之,当 $A \neq \varnothing, B = \varnothing$ 时,不存在从 A 到 B 的函数,而当 $A = \varnothing$ 时,无论 B 是否为空集,均有唯一的函数 $\varnothing : A \longrightarrow B$.

命题 3.1.1

设 $f, g: A \longrightarrow B$ 是两个函数,则 $f = g$ 当且仅当对任意 $x \in A$,$f(x) = g(x)$.

注 3.1.1 (下面讨论 A, B 均是有限集时,从 A 到 B 的函数个数.)

(1) 在定义3.1.1中,我们包含了 A 或 B 为空集时的退化情形. 如果 $B = \varnothing$,那么什么是函数 $f: A \longrightarrow \varnothing$? 首先注意 $A \times \varnothing$ 的元素是有序对 (x, y),其中 $x \in A, y \in \varnothing$. 因为不存在 $y \in \varnothing$,所以没有这样的有序对,从而 $A \times \varnothing = \varnothing$. 函数 $f: A \longrightarrow \varnothing$ 是 $A \times \varnothing$ 的某个子集,但 $A \times \varnothing = \varnothing$,这样只有一个子集就是 $\varnothing$,由此 $\varnothing^A$ 中最多只有一个函数,即 $f = \varnothing$. 而根据定义3.1.1,对每个 $x \in A$,存在唯一的 $y \in \varnothing$ 满足 $(x, y) \in f$. 若 $A \neq \varnothing$,则存在 $x \in A$,然而对于该 x 不存在这样的 y($\varnothing$ 中根本没有任何元素),所以 f 不是函数. 于是,当 $A \neq \varnothing$ 时,从 A 到 $\varnothing$ 没有函数. 另一方面,若 $A = \varnothing$,则无论 B 是否为空集,$f = \varnothing$ 都是从 $\varnothing$ 到 B 的函数. 总之,当 $A \neq \varnothing, B = \varnothing$ 时,不存在从 A 到 B 的函数,而当 $A = \varnothing$ 时,无论 B 是否为空集,均有唯一的函数 $\varnothing: A \longrightarrow B$.

(2) 由排列组合知识不难证明:若 $|A| = n \geqslant 0, |B| = m > 0$,则 $|B^A| = m^n$.

递归定义函数

除了常见的解析表达式、图像法、列表法等表示函数的方式外，在计算机科学中经常会遇到递归定义函数的情形. 事实上，当函数的定义域是通过 1.1 节的归纳定义法给出时，递归往往提供了一种便捷的确定函数取值的方法，此时，函数的定义自然地与定义域的归纳性质相吻合.

例 3.1.2

(1) 设 Σ 是有限字母表，Σ^* 是 Σ 上所有长度有限的串(包括空串 ϵ)构成的集合，Σ^* 可如下归纳定义：

- (i) $\epsilon \in \Sigma^*$;
- (ii) 若 $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$，则 $wa \in \Sigma^*$.

进一步，我们可如下定义 Σ^* 中串的 **长度函数** $l : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$:

- (i) $l(\epsilon) = 0$;
- (ii) 若 $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$ 且 $l(w) = n$，则 $l(wa) = n + 1$.

例3.1.2(续)

(2) 二进制解释函数 $b : \{0,1\}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 将一个 $0-1$ 串映射为其表示的自然数，可递归定义为

(i) $b(\epsilon) = 0$;

(ii) 对任意 $w \in \{0,1\}^*$, $b(w0) = 2b(w)$, $b(w1) = 2b(w) + 1$.

例3.1.2(续)

(2) 二进制解释函数 $b:\{0,1\}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 将一个 $0-1$ 串映射为其表示的自然数,可递归定义为

(i) $b(\epsilon)=0$;

(ii) 对任意 $w\in\{0,1\}^*$, $b(w0)=2b(w),\ b(w1)=2b(w)+1$.

(3) 常见的阶乘函数 $f(n):\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}^+$ 也可以用递归方式定义:

(i) $f(0)=1$;

(ii) $f(n)=nf(n-1)$,这里 $n\in\mathbb{Z}^+$.

函数的像和原像

定义 3.1.4

设 $f: A \longrightarrow B$ 为函数, $X \subseteq A, Y \subseteq B$.

(1) 令 $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$,称 $f(X)$ 为 X 在 f 下的像. 特别地,当 $X = A$ 时,称 $f(A)$ 为 函数 f 的像,记作 $\mathrm{im} f$.

(2) 令 $f^{-1}(Y) = \{x \in A | f(x) \in Y\}$,称 $f^{-1}(Y)$ 为 Y 在 f 下的 原像.

函数的像和原像

定义 3.1.4

设 $f: A \longrightarrow B$ 为函数, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$.

(1) 令 $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$,称 $f(X)$ 为 X 在 f 下的像. 特别地,当 $X = A$ 时,称 $f(A)$ 为 函数 f 的像,记作 $\mathrm{im} f$.

(2) 令 $f^{-1}(Y) = \{x \in A | f(x) \in Y\}$,称 $f^{-1}(Y)$ 为 Y 在 f 下的 原像.

设 $Y \subseteq B$,显然 Y 在 f 下的原像 $f^{-1}(Y)$ 是 A 的子集. 考虑 $X \subseteq A$,那么 $f(X) \subseteq B$ 的原像就是 $f^{-1}(f(X))$. 一般地,$f^{-1}(f(X)) \neq X$,但是有 $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. 例如,考虑函数 $f: \{a, b, c\} \longrightarrow \{0, 1\}$,其中

$$f(a) = f(b) = 0, f(c) = 1.$$

令 $A_1 = \{a\}$,那么有

$$f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(\{a\})) = f^{-1}(\{0\}) = \{a, b\}.$$

这时 $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

设 $f:A\longrightarrow B$ 为函数,$X\subseteq A$,对任意 $x\in X$,定义

$$f|_X(x)=f(x),$$

则 $f|_X$ 是从 X 到 B 的函数,称作 f 在子集 X 上的 限制 .
例如,考虑由 $f(x)=x+1$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f$ 在自然数集 $\mathbb{N}$ 上的限制为 $f|_{\mathbb{N}}(n)=n+1$.

设 $f : A \longrightarrow B$ 为函数,$X \subseteq A$,对任意 $x \in X$,定义

$$f|_X(x) = f(x),$$

则 $f|_X$ 是从 X 到 B 的函数,称作 f 在子集 X 上的 限制.
例如,考虑由 $f(x) = x + 1$ 定义的函数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,$f$ 在自然数集 $\mathbb{N}$ 上的限制为 $f|_{\mathbb{N}}(n) = n + 1$.
下面讨论三种特殊类型的函数.

定义 3.1.5

设 $f : A \longrightarrow B$ 为函数.

(1) 若对任意 $y \in \mathrm{im}f$,都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$,则称 f 是 单射.

(2) 若 $\mathrm{im}f = B$,则称 f 是 满射.

(3) 若 f 既是单射又是满射,则称 f 是 双射 (或 一一映射).

注 3.1.2

(1) 由定义不难看出,若 $f: A \longrightarrow B$ 是单射,则对任意 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \neq x_2$ 时,一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,这等价于,对任意 $x_1, x_2 \in A$,若 $f(x_1) = f(x_2)$,则一定有 $x_1 = x_2$.

(2) 如果 $f: A \longrightarrow B$ 是满射,那么对任意 $y \in B$,均存在 $x \in A$,使得 $f(x) = y$.

(3) 当 $A = \varnothing$ 时,对任何值域 B,函数 $f: \varnothing \longrightarrow B$ 都是(平凡的)单射.

(4) 当 $B = \varnothing$ 时,函数 $f: \varnothing \longrightarrow \varnothing$ 也是(平凡的)满射.

注 3.1.2

(1) 由定义不难看出,若 $f: A \longrightarrow B$ 是单射,则对任意 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \neq x_2$ 时,一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,这等价于,对任意 $x_1, x_2 \in A$,若 $f(x_1) = f(x_2)$,则一定有 $x_1 = x_2$.

(2) 如果 $f: A \longrightarrow B$ 是满射,那么对任意 $y \in B$,均存在 $x \in A$,使得 $f(x) = y$.

(3) 当 $A = \varnothing$ 时,对任何值域 B,函数 $f: \varnothing \longrightarrow B$ 都是(平凡的)单射.

(4) 当 $B = \varnothing$ 时,函数 $f: \varnothing \longrightarrow \varnothing$ 也是(平凡的)满射.

对于定义3.1.2中的几个函数,一般而言,

恒等函数 I_A 是 A 上的双射;

当定义域和值域都至少有两个元素时,常函数既不是单射也不是满射;

向下取整函数和向上取整函数都是满射,但不是单射;

模函数既不是单射也不是满射;

当 $\varnothing \subset A \subset U$ 时,特征函数 χ_A 是满射;

当 $R \neq I_A$ 时,自然映射一般都是满射,不是单射.

例 3.1.3

(1) 由 $f(x)=e^x$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是单射,但不是满射;由 $f(x)=x^2$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 是满射,但不是单射;由 $f(x)=x^3$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 和由 $f(x)=\ln x$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ 都是双射.

例 3.1.3

(1) 由 $f(x)=e^x$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是单射,但不是满射;由 $f(x)=x^2$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 是满射,但不是单射;由 $f(x)=x^3$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 和由 $f(x)=\ln x$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ 都是双射.

(2) 考虑由 $f(x)=\sin x$ 定义的函数 $f:A\longrightarrow B$. 当 $A=B=\mathbb{R}$ 时,f 既不是单射,也不是满射;当 $A=[-\pi/2,\pi/2], B=\mathbb{R}$ 时,f 是单射,但不是满射;当 $A=\mathbb{R}, B=[-1,1]$ 时,f 是满射,但不是单射;当 $A=[-\pi/2,\pi/2], B=[-1,1]$ 时,f 是双射.

例 3.1.3

(1) 由 $f(x)=e^x$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是单射,但不是满射;由 $f(x)=x^2$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 是满射,但不是单射;由 $f(x)=x^3$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 和由 $f(x)=\ln x$ 定义的函数 $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ 都是双射.

(2) 考虑由 $f(x)=\sin x$ 定义的函数 $f:A\longrightarrow B$. 当 $A=B=\mathbb{R}$ 时,f 既不是单射,也不是满射;当 $A=[-\pi/2,\pi/2], B=\mathbb{R}$ 时,f 是单射,但不是满射;当 $A=\mathbb{R}, B=[-1,1]$ 时,f 是满射,但不是单射;当 $A=[-\pi/2,\pi/2], B=[-1,1]$ 时,f 是双射.

下面讨论当 A 和 B 都是有限集时,从 A 到 B 的单射、满射和双射个数. 设 $|A|=n, |B|=m$.

若 $n>m$,则没有从 A 到 B 的单射;

若 $n\leqslant m$,则有 P_m^n 个从 A 到 B 的单射,这里 P_m^n 表示 m 元集的 n 排列数.

当 $n\neq m$ 时,没有从 A 到 B 的双射;而当 $n=m$ 时,有 $n!$ 个从 A 到 B 的双射.

如果 $n<m$,那么没有从 A 到 B 的满射;如果 $n\geqslant m$,那么由下面例3.1.4知,从 A 到 B 的满射个数为 $\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\mathrm{C}_m^r(m-r)^n$,这里 C_m^r 表示 m 元集的 r 组合数.

例 3.1.4

设 $A=\{1,2,\cdots,n\}, B=\{1,2,\cdots,m\}, n \geqslant m$,求从 A 到 B 的满射个数.

解

对任意满射 $f: A \longrightarrow B$, B 中的每个元素都是 f 的函数值. 令 $S=B^A$,规定 S 中元素的性质:函数 $f \in S$ 满足性质 P_i 当且仅当 $i \notin \mathrm{im} f,\ i=1,2,\cdots,m$.

所有满足性质 P_i 的函数构成 S 的子集 A_i,即 $A_i=\{f \in S | f满足P_i\},\ i=1,2,\cdots,m$. 因此有

$$|S|=m^n; |A_i|=(m-1)^n; |A_i \cap A_j|=(m-2)^n,\ 1 \leqslant i<j \leqslant m; \cdots, |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|=0.$$

使用包含排斥原理(定理 1.3.1)得

$$\begin{aligned}
|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \bar{A}_m| &= |S|-\sum_{i=1}^m|A_i|+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant m}|A_i \cap A_j|-\cdots+(-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \\
&= m^n-\mathrm{C}_m^1(m-1)^n+\cdots+(-1)^{m-1}\mathrm{C}_m^{m-1} \cdot 1^n=\sum_{r=0}^m(-1)^r \mathrm{C}_m^r(m-r)^n,
\end{aligned}$$

故有 $\sum_{r=0}^m(-1)^r \mathrm{C}_m^r(m-r)^n$ 个从 A 到 B 的满射函数.

函数的复合

函数是一种特殊的二元关系,函数的复合和逆函数分别对应关系的复合和逆关系.

定义 3.2.1

设 $f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C$ 为函数,f 和 g 的 **复合** $g \circ f$ 是一个从 A 到 C 的函数,定义为对任意 $x \in A$,$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

函数的复合

函数是一种特殊的二元关系，函数的复合和逆函数分别对应关系的复合和逆关系.

定义 3.2.1

设 $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ 为函数，f 和 g 的 **复合** $g \circ f$ 是一个从 A 到 C 的函数，定义为对任意 $x \in A$，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

有时也将定义中的 $(g \circ f)(x)$ 直接写作 $g \circ f(x)$. 这里定义的函数复合与定义2.1.3中关系的复合是一致的. 需要指出的是，关系复合 $R \circ S$ 的顺序是从左到右，即先通过关系 R，再通过关系 S 作用，而函数的复合 $g \circ f$ 是从右往左的，图3.2.1图示了这种合成顺序.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \quad \text{或} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

图 3.2.1函数合成交换图

例 3.2.1

(1) 设 $A=\{a,b,c\}, B=\{0,1\}, C=\{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$, 函数 $f:A\longrightarrow B, g:B\longrightarrow C$ 分别由 $f(a)=f(b)=0, f(c)=1$ 和 $g(0)=g(1)=\mathrm{T}$ 给出,则 $g\circ f$ 是由 $(g\circ f)(a)=(g\circ f)(b)=(g\circ f)(c)=\mathrm{T}$ 给出的从 A 到 C 的函数.

例 3.2.1

(1) 设 $A=\{a,b,c\}, B=\{0,1\}, C=\{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$, 函数 $f:A\longrightarrow B, g:B\longrightarrow C$ 分别由 $f(a)=f(b)=0, f(c)=1$ 和 $g(0)=g(1)=\mathrm{T}$ 给出,则 $g\circ f$ 是由 $(g\circ f)(a)=(g\circ f)(b)=(g\circ f)(c)=\mathrm{T}$ 给出的从 A 到 C 的函数.

(2) 设 $A=\{1,2,3\}, f$ 和 g 都是 A 上的函数,其中 $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=1, g(1)=g(2)=2, g(3)=3$,则复合 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 也都是 A 上的函数:

$$g\circ f:1\longmapsto 2, 2\longmapsto 3, 3\longmapsto 2;$$
$$f\circ g:1\longmapsto 3, 2\longmapsto 3, 3\longmapsto 1.$$

显然,这里 $g\circ f\neq f\circ g$.

下面是函数复合的两个基本性质,其中第一个性质表明函数复合满足结合律,第二个性质说明了恒等函数在复合中的特殊作用. 图3.2.2和图3.2.3分别图示了这两个性质.

命题 3.2.1

(1) 设 $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$ 都是函数,则 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(2) 设 $f : A \longrightarrow B$ 是函数,则 $I_B \circ f = f \circ I_A = f$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}
$$

图 3.2.2函数复合满足结合律

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & B \arrow[r, "I_B"] & B,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "I_A"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

图 3.2.3恒等函数与一般函数的复合

命题 3.2.2

设 $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ 为函数.

(1) 若 f 和 g 都是单射,则 $g \circ f$ 也是单射.

(2) 若 f 和 g 都是满射,则 $g \circ f$ 也是满射.

(3) 若 f 和 g 都是双射,则 $g \circ f$ 也是双射.

命题 3.2.2

设 $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ 为函数.

(1) 若 f 和 g 都是单射,则 $g \circ f$ 也是单射.

(2) 若 f 和 g 都是满射,则 $g \circ f$ 也是满射.

(3) 若 f 和 g 都是双射,则 $g \circ f$ 也是双射.

证明

(1) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2),$$

则由定义 3.2.1知

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

因为 $g : B \longrightarrow C$ 是单射,所以有 $f(x_1) = f(x_2)$. 又由于 $f : A \longrightarrow B$ 也是单射,故 $x_1 = x_2$. 从而证明了 $g \circ f : A \longrightarrow C$ 是单射.

(2) 若 f 和 g 都是满射,则 $g \circ f$ 也是满射.

对任意 $c \in C$,因为 $g : B \longrightarrow C$ 是满射,所以存在 $b \in B$ 使得 $g(b) = c$. 又由于 $f : A \longrightarrow B$ 也是满射,所以存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$. 由定义 3.2.1有

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

这就证明了 $g \circ f : A \longrightarrow C$ 也是满射.

(2) 若 f 和 g 都是满射,则 $g\circ f$ 也是满射.

对任意 $c\in C$,因为 $g:B\longrightarrow C$ 是满射,所以存在 $b\in B$ 使得 $g(b)=c$. 又由于 $f:A\longrightarrow B$ 也是满射,所以存在 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 由定义 3.2.1有

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c.$$

这就证明了 $g\circ f:A\longrightarrow C$ 也是满射.

(3) 若 f 和 g 都是双射,则 $g\circ f$ 也是双射.

由 (1)和(2)得证.

(2) 若 f 和 g 都是满射,则 $g \circ f$ 也是满射.

对任意 $c \in C$,因为 $g : B \longrightarrow C$ 是满射,所以存在 $b \in B$ 使得 $g(b) = c$. 又由于 $f : A \longrightarrow B$ 也是满射,所以存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$. 由定义 3.2.1有

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

这就证明了 $g \circ f : A \longrightarrow C$ 也是满射.

(3) 若 f 和 g 都是双射,则 $g \circ f$ 也是双射.

由 (1)和(2)得证.

一般而言,命题3.2.2的逆命题未必成立,即如果 $g \circ f : A \longrightarrow C$ 是单射(或满射、双射),不一定有 $f : A \longrightarrow B$ 和 $g : B \longrightarrow C$ 都是单射(或满射、双射). 读者可自己给出反例.

尽管如此,若 $g \circ f : A \longrightarrow C$ 是单射,则一定有 $f : A \longrightarrow B$ 是单射;若 $g \circ f : A \longrightarrow C$ 是满射,则一定有 $g : B \longrightarrow C$ 是满射.

函数作为特殊的关系,通过关系的求逆运算,可以得到一个逆关系,但一般情况下这个逆关系不一定是函数.

定义 3.2.2

设 $f: A \longrightarrow B$ 为函数,如果存在函数 $g: B \longrightarrow A$ 使得 $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B$,那么称 f 是 可逆的,称 g 是 f 的 逆 或 逆函数 .

图3.2.4图示了上面定义中的两个合成. 不难证明,如果 f 是可逆的,那么它的逆函数必是唯一的. 将这个唯一的逆函数记作 f^{-1}. 需要注意的是,该符号与定义3.1.4中原像的符号冲突了,但通过上下文应该容易区分.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "I_A"'] & B \arrow[r, "g"] & A,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "I_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

图 3.2.4可逆函数

注 3.2.1

定义3.2.2中的 $g \circ f = I_A$ 与 $f \circ g = I_B$ 是独立的,即可能存在函数 g 仅满足一个等式,而不满足另外一个.

例如,考虑如下定义的 $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:对任意 $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = n + 1;$$

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{若 } n = 0, \\ n - 1, & \text{否则}. \end{cases}$$

易验证 $g \circ f = I_{\mathbb{N}}$,但 $f \circ g \neq I_{\mathbb{N}}$,因为 $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 1, I_{\mathbb{N}}(0) = 0.$

函数可逆的充要条件

命题 3.2.3

设 $f : A \longrightarrow B$ 为函数,则 f 是可逆的当且仅当 f 是双射.

函数可逆的充要条件

命题 3.2.3

设 $f: A \longrightarrow B$ 为函数,则 f 是可逆的当且仅当 f 是双射.

证明.

(必要性)设 f 是可逆的,则由定义3.2.2,存在 $g: B \longrightarrow A$ 使得 $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B$. 因为恒等函数是双射,所以可由习题 3.21 得到 f 既是单射又是满射,从而有 f 是双射.

函数可逆的充要条件

命题 3.2.3

设 $f : A \longrightarrow B$ 为函数,则 f 是可逆的当且仅当 f 是双射.

证明.

(必要性)设 f 是可逆的,则由定义3.2.2,存在 $g : B \longrightarrow A$ 使得 $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B$. 因为恒等函数是双射,所以可由习题 3.21 得到 f 既是单射又是满射,从而有 f 是双射.

方便起见,下面直接证明 f 既是单射又是满射. 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$,则有 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 即 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. 因为 $g \circ f = I_A$,所以有 $x_1 = x_2$,这表明 f 是单射.

关于 f 的满射性,对任意 $b \in B$,因为 $f \circ g = I_B$,故有 $f(g(b)) = (f \circ g)(b) = I_B(b) = b$. 这意味着存在元素 $g(b) \in A$,它在 f 下的像是 b,故 f 是满射.

函数可逆的充要条件

命题 3.2.3

设 $f : A \longrightarrow B$ 为函数,则 f 是可逆的当且仅当 f 是双射.

证明.

(必要性)设 f 是可逆的,则由定义3.2.2,存在 $g : B \longrightarrow A$ 使得 $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B$. 因为恒等函数是双射,所以可由习题 3.21 得到 f 既是单射又是满射,从而有 f 是双射.

方便起见,下面直接证明 f 既是单射又是满射. 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$,则有 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 即 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. 因为 $g \circ f = I_A$,所以有 $x_1 = x_2$,这表明 f 是单射.

关于 f 的满射性,对任意 $b \in B$,因为 $f \circ g = I_B$,故有 $f(g(b)) = (f \circ g)(b) = I_B(b) = b$. 这意味着存在元素 $g(b) \in A$,它在 f 下的像是 b,故 f 是满射.

(充分性)假设 f 是双射,则对每个 $b \in B$,由 f 是满射知,存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$. 因为 f 是单射,所以这个 a 是唯一的. 定义 $g(b) = a$,由此得到一个函数 $g : B \longrightarrow A$,进而不难验证 g 是 f 的逆. $\square$

例 3.2.2

设 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 为函数,其中

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3,\\ -2, & x<3,\end{cases}$$

$$g(x)=x+2.$$

分别判断 f 和 g 是否可逆;若可逆,则求出逆函数.

例 3.2.2

设 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 为函数,其中

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3,\\ -2, & x<3,\end{cases}$$

$$g(x)=x+2.$$

分别判断 f 和 g 是否可逆;若可逆,则求出逆函数.

解

显然,$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 不是满射,故不是双射,从而由命题3.2.3知,f 不可逆.

而 $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是双射,故可逆. 它的逆函数是

$$g^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ g^{-1}(x)=x-2.$$

综合本节前面的命题,我们可以得到给定集合 X 上所有双射的集合 S_X 的一个整体刻画:用第 11 章代数结构的术语,S_X 关于函数的合成构成一个群.

定理 3.2.1

设 X 是非空集合,S_X 是 X 上全体双射的集合,即 $S_X = \{f : X \longrightarrow X | f是双射\}$,则 S_X 中函数的复合满足下列性质:

(1) 对任意 $f, g \in S_X$,有 $f \circ g \in S_X$;

(2) 对任意 $f, g, h \in S_X$,有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

(3) 恒等函数 $I_X \in S_X$,且对任意 $f \in S_X$,有 $I_X \circ f = f = f \circ I_X$;

(4) 对任意 $f \in S_X$,存在 $g \in S_X$ 使得 $g \circ f = I_X = f \circ g$.

无限集的计数

在 1.3 节，我们描述性地介绍了有限集和无限集，并引入了表示有限集中元素数量的概念——基数(势)，本节我们将基于双射，进一步形式化这些概念，比较两个无限集所含元素个数的“多少”.

定义 3.3.1

设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的双射，那么称 A 和 B 是 **等势** 的，记作 $A \approx B$；否则称 A 与 B 不等势，记作 $A \not\approx B$.

无限集的计数

在 1.3 节,我们描述性地介绍了有限集和无限集,并引入了表示有限集中元素数量的概念——基数(势),本节我们将基于双射,进一步形式化这些概念,比较两个无限集所含元素个数的“多少”.

定义 3.3.1

设 A, B 是集合,如果存在从 A 到 B 的双射,那么称 A 和 B 是 等势 的,记作 $A \approx B$;否则称 A 与 B 不等势,记作 $A \not\approx B$.

例 3.3.1

(1) 设 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 和 $B = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 都是有限集,则 $A \approx B$ 当且仅当 $n = m$.

(2) 设 $2\mathbb{Z}$ 是所有偶数的集合,易验证由 $f(n) = 2n$ 定义的函数 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$ 是双射,故有 $\mathbb{Z} \approx 2\mathbb{Z}$.

(3) 对任意 $x \in \mathbb{R}$,定义 $f(x) = e^x$. 易知 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的双射,其逆函数 $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ 由 $f^{-1}(x) = \ln x$ 给出. 因此,$\mathbb{R}^+ \approx \mathbb{R}$.

例3.3.1(续)

(4) 考虑 $(0,1)=\{x\in\mathbb{R}|0<x<1\}$. 对任意 $x\in(0,1)$,如下定义函数 $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=\tan\frac{2x-1}{2}\pi.$$

由正切函数的性质知,f 是双射,因此有 $(0,1)\approx\mathbb{R}$.
进一步,考虑开区间 (a,b),这里 $a,b\in\mathbb{R},a<b$,函数

$$g(x)=(b-a)x+a$$

是从 $(0,1)$ 到 (a,b) 的双射,故有 $(0,1)\approx(a,b)$,从而有 $(a,b)\approx\mathbb{R}$.

等势的性质

命题 3.3.1

设 A, B, C 均为集合,则有

(1) $A \approx A.$

(2) 若 $A \approx B$,则 $B \approx A.$

(3) 若 $A \approx B, B \approx C$,则 $A \approx C.$

等势的性质

命题 3.3.1

设 A, B, C 均为集合,则有

(1) $A \approx A$.

(2) 若 $A \approx B$,则 $B \approx A$.

(3) 若 $A \approx B, B \approx C$,则 $A \approx C$.

注 3.3.1

上述命题中的三个性质,与关系的自反性、对称性和传递性非常相似. 然而,由于等价关系是同一个集合元素间的关系,命题3.3.1中我们并不要求集合 A, B 和 C 是同一个论域的元素,因此,我们不使用等价关系描述集合的等势性质.

前面章节已经多次提及"有限集",但我们只是直观地将其理解成含有有限个元素的集合,并未精确地给出有限集的定义. 现在我们可以通过等势和自然数集的子集解决这个问题.

对任意 $k \in \mathbb{N}$,定义

$$\mathbb{N}_k = \begin{cases} \varnothing, & \text{若 } k = 0, \\ \{0, 1, \cdots, k-1\}, & \text{若 } k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

前面章节已经多次提及“有限集”，但我们只是直观地将其理解成含有有限个元素的集合，并未精确地给出有限集的定义. 现在我们可以通过等势和自然数集的子集解决这个问题.

对任意 $k \in \mathbb{N}$，定义

$$\mathbb{N}_k = \begin{cases} \varnothing, & \text{若 } k = 0, \\ \{0, 1, \cdots, k-1\}, & \text{若 } k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

定义 3.3.2

设 A 是集合，如果 $A = \varnothing$ 或存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A \approx \mathbb{N}_k$，那么称 A 是 有限集；否则称 A 为 无限集.

例如，$\{a, b, c\}$ 是有限集，因为

$$\{a, b, c\} \approx \{0, 1, 2\} = \mathbb{N}_3,$$

而 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是无限集，因为没有 $\mathbb{N}_k$ 与 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 等势.

前面章节已经多次提及“有限集”,但我们只是直观地将其理解成含有有限个元素的集合,并未精确地给出有限集的定义. 现在我们可以通过等势和自然数集的子集解决这个问题.

对任意 $k \in \mathbb{N}$,定义

$$\mathbb{N}_k = \begin{cases} \varnothing, & \text{若 } k = 0, \\ \{0, 1, \cdots, k-1\}, & \text{若 } k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

定义 3.3.2

设 A 是集合,如果 $A = \varnothing$ 或存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A \approx \mathbb{N}_k$,那么称 A 是 有限集;否则称 A 为 无限集.

例如,$\{a, b, c\}$ 是有限集,因为

$$\{a, b, c\} \approx \{0, 1, 2\} = \mathbb{N}_3,$$

而 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是无限集,因为没有 $\mathbb{N}_k$ 与 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 等势.

当 $A \approx B$ 时,我们也说集合 A 与集合 B 一一对应,称 A 与 B 基数(势)相等.

若 $A \approx \mathbb{N}_k$,我们说 A 的 基数 为 k,记作 $|A| = k$.

空集 $\varnothing$ 的基数定义为 0,即 $|\varnothing| = 0$.

可数集

在可计算性理论和程序语言理论中经常要考虑函数是否可计算、程序是否终止的问题，就会用到“可数”的概念. 下面给出可数集的定义.

定义 3.3.3

设 A 为集合，若 A 是有限集或者与自然数集 $\mathbb{N}$ 基数相等，则称 A 为 可数集；
否则，称 A 为 不可数集.
自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$（读作阿列夫零），即 $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

可数集

在可计算性理论和程序语言理论中经常要考虑函数是否可计算、程序是否终止的问题，就会用到“可数”的概念. 下面给出可数集的定义.

定义 3.3.3

设 A 为集合，若 A 是有限集或者与自然数集 $\mathbb{N}$ 基数相等，则称 A 为 可数集；
否则，称 A 为 不可数集.
自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$(读作阿列夫零)，即 $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

由上面定义知，可数集可分为 可数有限集 和 可数无限集，前者与某个 $\mathbb{N}_k$ 等势，而后者与 $\mathbb{N}$ 等势.

例 3.3.2

证明整数集 $\mathbb{Z}$ 是可数无限集，即 $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

例 3.3.2

证明整数集 $\mathbb{Z}$ 是可数无限集,即 $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

证明.

要证明整数集 $\mathbb{Z}$ 是可数无限的,就要给出这个集合与自然数集 $\mathbb{N}$ 之间的一个双射. 将 $\mathbb{Z}$ 中元素依下列顺序排列并与 $\mathbb{N}$ 中元素对应.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\downarrow & \mapsto & \mapsto & \mapsto & \mapsto & \mapsto & \mapsto & \mapsto & \\
\mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots
\end{array}
$$

上述这种对应所表示的函数是

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n\text{为偶数}, \\ -(n+1)/2, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

易验证,f 是双射,故 $\mathbb{Z}$ 与自然数集 $\mathbb{N}$ 基数相等,从而是可数集. □

一个无限集 A 是可数的当且仅当可以将 A 中的元素排列成一个序列(下标是自然数).

例 3.3.3

证明正有理数集 $\mathbb{Q}^+$ 是可数无限集,即 $|\mathbb{Q}^+| = \aleph_0$.

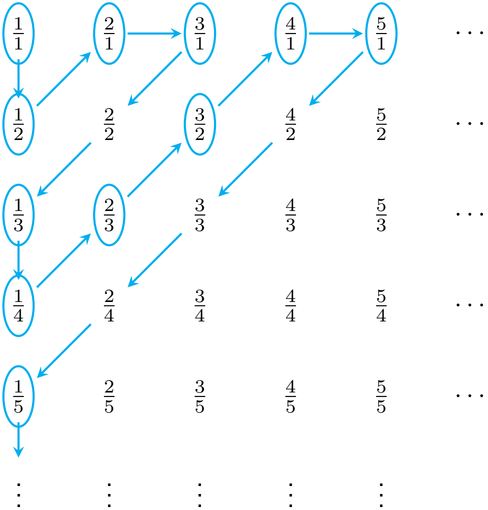


图 3.3.1正有理数排序

证明.

我们只需将 $\mathbb{Q}^+$ 中元素排列成一个无限序列即可. 众所周知,每个正有理数都是两个正整数之比,即可以写成 $p/q, p, q \in \mathbb{Z}^+$ 的形式,因此我们可以这样来排列正有理数:

先在第 1 行列出分母 $q = 1$ 的有理数,在第 2 行列出分母 $q = 2$ 的有理数, $\cdots\cdots$,如图3.3.1所示;

随后,沿着图3.3.1所示的路线,先列出满足 $p + q = 2$ 的正有理数 p/q,再列出满足 $p + q = 3$ 的正有理数 p/q,然后列出满足 $p + q = 4$ 的正有理数 p/q, $\cdots\cdots$,需要注意的是,每当遇到已经列出过的数 p/q 时,就不再列出了.

例如,当遇到 $2/2 = 1$ 时就不列出了,因为已经列出过 $1/1 = 1$ 了. 这样构造的正有理数序列的最初几项是:$1, 1/2, 2, 3, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 5, \cdots$. 这些数在图3.3.1中都加了圆圈,序列中没有圆圈的数是那些被剔除的,因为在之前它们已经列在序列中了. 由此得到正有理数的一个无限序列,从而证明了正有理数集是可数无限的,即 $|\mathbb{Q}^+| = \aleph_0$. □

例 3.3.4

证明自然数集的笛卡尔积 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可数无限集,即 $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$.

证明

为建立 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数,只需把 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中的所有元素排成一个序列,如图 3.3.2 所示. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中的元素恰好是坐标平面上第一象限(含坐标轴在内)中所有整数坐标的点. 如果能够找到"数遍"这些点的方法,那么这个计数过程就是建立 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数的过程. 按照图 3.3.2 中箭头所标明的顺序,从 $(0,0)$ 开始数起,依次得到下面的序列:

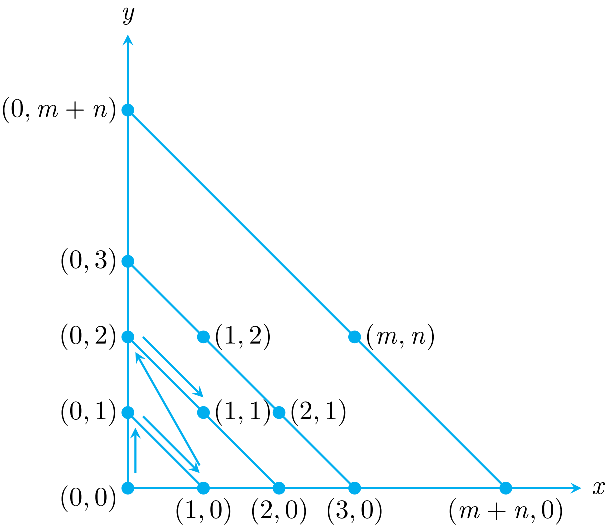


图 3.3.2 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中元素排序

证明(续)

$$\begin{array}{ccccccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (0,2) & (1,1) & (2,0) & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

设 (m,n) 是图上的一个点,并且它所对应的自然数是 k. 考察 m,n 和 k 之间的关系. 首先计数 (m,n) 点所在斜线下方的平面上所有的点数,该数是

$$1+2+\cdots+(m+n)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2};$$

然后计数 (m,n) 所在的斜线上按照箭头标明的顺序位于 (m,n) 点之前的点数,这样的点数有 m 个. 因此 (m,n) 点是第 $\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m+1$ 个点,这就得到 $k=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$.
根据上面的分析,不难给出 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数 f,即

$$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$$

$$f(m,n)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m.$$

命题 3.3.2

如果 A 和 B 都是可数集，那么 $A \cup B$ 也是可数集. 具体地，如果 A 和 B 都是可数有限集，那么 $A \cup B$ 也是可数有限集；如果 A 和 B 中至少有一个是可数无限集，那么 $A \cup B$ 是可数无限集.

命题 3.3.2

如果 A 和 B 都是可数集，那么 $A \cup B$ 也是可数集. 具体地，如果 A 和 B 都是可数有限集，那么 $A \cup B$ 也是可数有限集；如果 A 和 B 中至少有一个是可数无限集，那么 $A \cup B$ 是可数无限集.

证明

假设 A 和 B 都是可数集. 不失一般性，我们可以假设 A 和 B 是不相交的；否则，我们可用 $B \backslash A$ 来代替 B. 再者，不失一般性，如果两个集合之一是可数无限的而另一个是可数有限的，那么我们不妨假设 B 是那个有限集.

命题 3.3.2

如果 A 和 B 都是可数集,那么 $A \cup B$ 也是可数集. 具体地,如果 A 和 B 都是可数有限集,那么 $A \cup B$ 也是可数有限集;如果 A 和 B 中至少有一个是可数无限集,那么 $A \cup B$ 是可数无限集.

证明

假设 A 和 B 都是可数集. 不失一般性,我们可以假设 A 和 B 是不相交的;否则,我们可用 $B \setminus A$ 来代替 B. 再者,不失一般性,如果两个集合之一是可数无限的而另一个是可数有限的,那么我们不妨假设 B 是那个有限集.

考虑下面 3 种情形:

(i) A 和 B 均为有限集. 此时,$A \cup B$ 也是有限的,因此是可数的.

(ii) A 是无限的而 B 是有限的. 因为 A 是可数无限的,所以它的元素可以排列成一个无限序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. 同时因为 B 是有限的,设 $|B| = m$,那么这 m 个元素可以排列成 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$. 进而我们可以将 $A \cup B$ 的元素排列成 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 这意味着 $A \cup B$ 是可数无限的.

命题3.3.2证明(续)

(iii) A 和 B 均为可数无限的. 此时可以分别将 A 和 B 的元素排列成 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 和 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$. 通过依次交错这两个序列的每个项,我们可以将 $A \cup B$ 的元素排列成无限序列 $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$,这意味着 $A \cup B$ 是可数无限的.

这就证明了在所有 3 种情形下 $A \cup B$ 都是可数的,并且由 3 种情形的讨论可知,命题中的具体陈述部分也是正确的,至此完成了证明. □

综合上面几个结论,我们可以证明有理数集 $\mathbb{Q}$ 与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势.

命题 3.3.3

有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数无限集,即 $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

综合上面几个结论,我们可以证明有理数集 $\mathbb{Q}$ 与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势.

命题 3.3.3

有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数无限集,即 $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

证明.

首先,注意到 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$. 由例3.3.3知,正有理数集 $\mathbb{Q}^+$ 是可数无限集. 显然,$\mathbb{Q}^+$ 与负有理数集 $\mathbb{Q}^-$ 之间存在一一对应,所以 $\mathbb{Q}^-$ 也是可数无限集. 进一步,由命题3.3.2得,$\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ 是可数无限集,这就证明了 $\mathbb{Q}$ 是可数无限的. □

综合上面几个结论,我们可以证明有理数集 $\mathbb{Q}$ 与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势.

命题 3.3.3

有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数无限集,即 $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

证明.

首先,注意到 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$. 由例3.3.3知,正有理数集 $\mathbb{Q}^+$ 是可数无限集. 显然,$\mathbb{Q}^+$ 与负有理数集 $\mathbb{Q}^-$ 之间存在一一对应,所以 $\mathbb{Q}^-$ 也是可数无限集. 进一步,由命题3.3.2得,$\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ 是可数无限集,这就证明了 $\mathbb{Q}$ 是可数无限的. □

注 3.3.2

总结本节的例子和命题,我们发现,$\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}, \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 都与 $\mathbb{N}$ 等势,因此都是无限可数集,即

$$\mathbb{Z} \approx 2\mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}^+ \approx \mathbb{Q}^- \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}\times\mathbb{N} \approx \mathbb{N}. \tag{3.3.1}$$

基数

对于一般的无限集，只能通过基数衡量两个集合的相对大小.

定义 3.3.4

设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的单射，那么称 A 的基数小于或等于 B 的基数，记作 $|A| \leqslant |B|$.
如果 $|A| \leqslant |B|$ 且 A 和 B 的基数不相等，那么称 A 的基数小于 B 的基数，记作 $|A| < |B|$.

基数

对于一般的无限集，只能通过基数衡量两个集合的相对大小.

定义 3.3.4

设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的单射，那么称 A 的基数小于或等于 B 的基数，记作 $|A| \leqslant |B|$. 如果 $|A| \leqslant |B|$ 且 A 和 B 的基数不相等，那么称 A 的基数小于 B 的基数，记作 $|A| < |B|$.

下面给出基数研究中的一个关键定理，该定理归功于施罗德和伯恩斯坦(F. Bernstein，1878–1956).

定理 3.3.1 (施罗德-伯恩斯坦定理)

设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的单射和从 B 到 A 的单射，那么存在从 A 到 B 的双射. 换言之，若 $|A| \leqslant |B|$ 且 $|B| \leqslant |A|$，则 $|A| = |B|$.

基数

对于一般的无限集，只能通过基数衡量两个集合的相对大小.

定义 3.3.4

设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的单射，那么称 A 的基数小于或等于 B 的基数，记作 $|A| \leqslant |B|$. 如果 $|A| \leqslant |B|$ 且 A 和 B 的基数不相等，那么称 A 的基数小于 B 的基数，记作 $|A| < |B|$.

下面给出基数研究中的一个关键定理，该定理归功于施罗德和伯恩斯坦(F. Bernstein，1878–1956).

定理 3.3.1 (施罗德-伯恩斯坦定理)

设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的单射和从 B 到 A 的单射，那么存在从 A 到 B 的双射. 换言之，若 $|A| \leqslant |B|$ 且 $|B| \leqslant |A|$，则 $|A| = |B|$.

上述定理看起来简单明了，但却没有一个简单的证明. 因为当有一个从 A 到 B 的单射函数 f 时，它不一定是满射，而另一个从 B 到 A 的单射 g 也不一定是满射，没有显而易见的方法来构造一个从 A 到 B 的双射函数.

例 3.3.5

证明 $|(0,1)| = |(0,1]|$.

例 3.3.5

证明 $|(0,1)| = |(0,1]|$.

证明.

要在 $(0,1)$ 和 $(0,1]$ 之间建立双射来证明 $|(0,1)| = |(0,1]|$ 不是件容易的事. 然而,应用施罗德-伯恩斯坦定理可以轻松证得. 因为 $(0,1) \subseteq (0,1]$,所以由 $i(x) = x$ 给出的包含映射 i 就是一个从 $(0,1)$ 到 $(0,1]$ 的单射. 反过来,对任意 $x \in (0,1]$,令 $g(x) = x/2$,则 g 是一个单射,它将 $(0,1]$ 映射到 $(0,1/2] \subseteq (0,1)$. 因此,由施罗德-伯恩斯坦定理知,$|(0,1)| = |(0,1]|$. $\square$

例 3.3.5

证明 $|(0,1)| = |(0,1]|$.

证明.

要在 $(0,1)$ 和 $(0,1]$ 之间建立双射来证明 $|(0,1)| = |(0,1]|$ 不是件容易的事. 然而,应用施罗德-伯恩斯坦定理可以轻松证得. 因为 $(0,1) \subseteq (0,1]$,所以由 $i(x) = x$ 给出的包含映射 i 就是一个从 $(0,1)$ 到 $(0,1]$ 的单射. 反过来,对任意 $x \in (0,1]$,令 $g(x) = x/2$,则 g 是一个单射,它将 $(0,1]$ 映射到 $(0,1/2] \subseteq (0,1)$. 因此,由施罗德-伯恩斯坦定理知,$|(0,1)| = |(0,1]|$. □

注 3.3.3

由例3.3.1(3)(4)、例3.3.5和习题 *3.35* 不难发现:任何实数区间(包括开区间、闭区间以及半开半闭的区间)都与实数集 $\mathbb{R}$ 等势,即

$$(0,1) \approx (a,b) \approx (a,b] \approx [a,b) \approx \mathbb{R}^+ \approx \mathbb{R}, \tag{3.3.2}$$

其中,$a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

康托尔定理

式 (3.3.1) 和 (3.3.2) 分别给出了与 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 等势的两组集合. 一个自然的问题是, $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{R}$ 是否等势?

定理 3.3.2 (康托尔定理)

(1) $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.

(2) 对任意集合 A, 都有 $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

康托尔定理

式 (3.3.1) 和 (3.3.2) 分别给出了与 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 等势的两组集合. 一个自然的问题是,$\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{R}$ 是否等势?

定理 3.3.2 (康托尔定理)

(1) $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.

(2) 对任意集合 A,都有 $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

证明

(1) 采用康托尔著名的 对角线法则 来证明. 反证法,假设 $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}$,则存在一个双射函数 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. 进而,$\mathbb{R}$ 中的元素与 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 中的元素一一对应,因此 $\mathbb{R}$ 中的元素可排列成下表:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= k_0.a_{00}\,a_{01}\,a_{02}\cdots\,, \\
f(1) &= k_1.a_{10}\,a_{11}\,a_{12}\cdots\,, \\
f(2) &= k_2.a_{20}\,a_{21}\,a_{22}\cdots\,, \\
&\;\;\vdots \\
f(n) &= k_n.a_{n0}\,a_{n1}\cdots a_{nn}\cdots\,,
\end{aligned}
$$

康托尔定理证明(续)

其中,等式右边是左边数的十进制表示,k_n 是 $f(n)$ 的整数部分,$a_{ni}, i \in \mathbb{N}$, 是 $f(n)$ 的小数部分. 这里为了实数十进制表示的唯一性,我们排除结尾全部由数字 9 组成的展开式,而采用结尾全为 0 的展开式代替. 例如,我们选择 $0.600\ 000\ \cdots$ 而不是 $0.599\ 999\ \cdots$. 下面按照对角线法则构造一个新的实数 $r = 0.a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$,其中对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} 1, & 若\ a_{nn} \neq 1, \\ 2, & 否则. \end{cases}$$

由于每一行的对角线上的元素均用不相等的数替换,所以 r 与上表中每一行小数点后都至少有一位不同,故 r 不在上表中,即 $r \notin \mathrm{im} f$. 因此 f 不可能是满射,更不可能是双射,与假设 $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}$ 矛盾.

康托尔定理证明(续)

其中,等式右边是左边数的十进制表示,k_n 是 $f(n)$ 的整数部分,$a_{ni}, i \in \mathbb{N}$, 是 $f(n)$ 的小数部分. 这里为了实数十进制表示的唯一性,我们排除结尾全部由数字 9 组成的展开式,而采用结尾全为 0 的展开式代替. 例如,我们选择 $0.600\ 000\ \cdots$ 而不是 $0.599\ 999\ \cdots$. 下面按照对角线法则构造一个新的实数 $r = 0.a_0a_1a_2 \cdots a_n \cdots$,其中对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{若 } a_{nn} \neq 1, \\ 2, & \text{否则}. \end{cases}$$

由于每一行的对角线上的元素均用不相等的数替换,所以 r 与上表中每一行小数点后都至少有一位不同,故 r 不在上表中,即 $r \notin \mathrm{im}f$. 因此 f 不可能是满射,更不可能是双射,与假设 $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}$ 矛盾.

(2) 下面的证明利用了罗素悖论的一个变种形式. 与 (1) 的证明类似,我们将证明任何函数 $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ 都不是满射. 设 $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$,如下构造集合 B:

$$B = \{x \in A | x \notin g(x)\},$$

则 $B \in \mathcal{P}(A)$,但对任意 $x \in A$ 都有 $x \in B$当且仅当$x \notin g(x)$. 从而证明了对任意的 $x \in A$ 都有 $B \neq g(x)$,即 $B \notin \mathrm{im}g$. 这表明 g 不是满射,从而不存在从 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的双射,故 $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

推论 3.3.1

(1) $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

(2) 对任意集合 A,都有 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

推论 3.3.1

(1) $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

(2) 对任意集合 A,都有 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

证明.

(1) 包含映射 $i(x) = x$ 给出一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的单射,又由康托尔定理知,$\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$,故由定义3.3.4有,$\mathbb{N}$ 的基数小于 $\mathbb{R}$ 的基数,即 $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

(2) $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ 的证明与 (1) 类似,只需考虑由 $f(x) = \{x\}$ 给出的 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的单射函数即可. $\square$

推论 3.3.1

(1) $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

(2) 对任意集合 A,都有 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

证明.

(1) 包含映射 $i(x) = x$ 给出一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的单射,又由康托尔定理知,$\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$,故由定义3.3.4有,$\mathbb{N}$ 的基数小于 $\mathbb{R}$ 的基数,即 $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
(2) $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ 的证明与 (1) 类似,只需考虑由 $f(x) = \{x\}$ 给出的 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的单射函数即可. $\square$

推论3.3.1(1)表明,$\mathbb{N}$ 的基数 $\aleph_0$ 小于 $\mathbb{R}$ 的基数,为此,一般将 $\mathbb{R}$ 的基数记作 $\aleph$(读作阿列夫),即 $|\mathbb{R}| = \aleph$. 推论3.3.1(2)表明,不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \cdots, n, \cdots, \aleph_0, \aleph, \cdots$$

其中 $0, 1, 2, \cdots, n \cdots$ 恰好是全体自然数,是有限集的基数,也称作 有限基数 ,而 $\aleph_0, \aleph, \cdots$ 是无限集的基数,也称作 无限基数 ,$\aleph_0$ 是最小的无限基数,而 $\aleph$ 后面还有更大的基数,如 $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ 等.