武汉大学 2017-2018 第一学期线性代数 B 期末试题 A

1．（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$

2．（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使其满足 $(X-A)B=C$.

3．（10 分）设 A、B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$，

已知 $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|A-B|\neq 0$，求 A..

4．（10 分）设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2，−1, 1。$B=A^3-A^2-4A^{-2}+5E$，求行列式 $|B|$ 的值。

5．（8 分）已知 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$ $\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$，

$\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$；$\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2)^T$ 是 R^4 中的两组基。求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标；

6．（8 分）设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$，（1）求矩阵 A 的秩.（2）求矩阵 A 列向量组的一个极大线性无关组，并将其余列向量用极大无关组线性表示。

7．（8 分）设 n 维向量 β 和 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 都正交，证明：$\beta=0$.

8．（16 分）就 λ 的取值讨论方程组 $\begin{cases} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z=\lambda \\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z=\lambda \\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z=1 \end{cases}$ 何时有唯一解，何时有无穷多解？在有无穷多解时，求出一般解.

9．（12 分）设二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4tx_2x_3$

（1）t 取什么值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的；

（2）当 $t=1$ 时，利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵。

10．（8 分）设 r 是 n 阶矩阵 A 的秩 $(n\geq 2)$，r' 是其伴随矩阵 A^* 的秩，问 r' 与 r 之间有什么关系？并说明理由。

武汉大学 2017-2018 第一学期线性代数 B 期末试题 A 解答

1.（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1}(x-k)$

2. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使其满足 $(X-A)B=C.$

解 $X-A=CB^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$X=CB^{-1}+A=\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

3. （10 分）设 A、B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$，

已知 $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|A-B|\neq 0$，求 A..

解 由所给关系得 $(A+2B)(A-B)-(A-B)=0$ 即 $(A+2B-E)(A-B)=0$

由 $|A-B|\neq 0$ 知：$A=E-2B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

4. （10 分）设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2，-1, 1。$B=A^3-A^2-4A^{-2}+5E$，求行列式 $|B|$ 的值。

解 记 $B=\varphi(A)$，且 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-4\lambda^{-2}+5$

由题设 A 的三个特征值分别为 2，-1, 1，所以 $\varphi(A)$ 的特征值为

$\varphi(2)=2^3-2^2-42^{-2}+5=8$，$\varphi(-1)=(-1)^3-(-1)^2-4(-1)^{-2}+5=-1$

$\varphi(-1)=(1)^3-(1)^2-4(1)^{-2}+5=1$ 故 $|B|=\varphi(2)\varphi(-1)\varphi(1)=-8$

5、（8 分）已知 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$ $\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$，$\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$；

$\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2)^T$ 是 R^4 中的两组基。

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标；

解　由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}=B^{-1}C.$$

即 $$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&-1&-1&2&0&-2&1\\2&-1&2&-1&1&1&1&3\\-1&1&1&0&0&2&1&1\\0&1&1&1&1&2&2&2\end{array}\right)\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right)$$

于是，由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵为：$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

而 $\boldsymbol{\xi}$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

构造矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{\xi}')$，$\boldsymbol{P}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&-1&1\\2&-1&2&-1&0\\-1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&3/13\\0&1&0&0&5/13\\0&0&1&0&-2/13\\0&0&0&1&-3/13\end{array}\right)=(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\xi}')$，

所以，$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\5\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

6.（8 分）设 $A=\begin{bmatrix}-1&2&0&4&5&-3\\3&-7&2&0&1&4\\2&-5&2&4&6&1\\4&-9&2&-4&-4&7\end{bmatrix}$，（1）求矩阵 A 的秩.（2）求矩阵 A 列向量组的一个极大线性无关组，并将其余列向量用极大无关组线性表示。

解：（1）对 A 作初等行变换：$A \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，故秩$\left(A\right)=2$.

（2）分别记矩阵 A 的列向量分别为 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5，α_6

由 $A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故 α_1，α_2 为矩阵 A 列向量组的一个极大无关组，且有

$\alpha_3=-4\alpha_1-2\alpha_2$，$\alpha_4=-28\alpha_1-12\alpha_2$，$\alpha_5=-37\alpha_1-16\alpha_2$，$\alpha_6=13\alpha_1+5\alpha_2$

7.（8 分）设 n 维向量 β 和 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 都正交，证明：$\beta=0$.

解： 由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出。设 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$

两边与 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$ 作内积，得 $0=(b,\alpha_i)=k_1(\alpha_1,\alpha_i),(\alpha_1,\alpha_i)\neq 0,$ 得 $k_i=0(i=1,\cdots,n)$

故 $\beta=0$.

8、（16 分）就 λ 的取值讨论方程组 $\begin{cases} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z=\lambda \\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z=\lambda \\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z=1 \end{cases}$ 何时有唯一解，何时有无穷多解？在有无穷多解时，求出一般解.

解：$\because |A|=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 \end{vmatrix}=2\lambda(-1)=-2\lambda \quad \therefore$ 当 $\lambda\neq 0$ 时，原方程组有唯一解

当 $\lambda=0$ 时，$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore X=k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

9、（12 分）设二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4tx_2x_3$

（1）t 取什么值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的；

（2）当 $t=1$ 时，利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵。

解：（1）$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2t \\ 0 & 2t & 3 \end{bmatrix}$ $\Delta_1=2>0$，$\Delta_2=6>0$

$\Delta_3=|A|=2(9-4t^2)>0 \Rightarrow |t|<\dfrac{3}{2}$ 故当 $|t|<\dfrac{3}{2}$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定。

（2）当$t=1$时，$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，$\left|\lambda I-A\right|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$ ， $\lambda_3=5$

$e_1=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$，$e_2=(1,0,0)^T$，$e_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

在正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$之下。

f 化成标准形：$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

10. （8 分）设r是n阶矩阵A的秩$(n\geq 2), r'$是其伴随矩阵A^*的秩，问r'与r之间有什么关系？并说明理由。

解 （1）当$r=n,$ 则$r'=n.$

（2）当$r=n-1,$则有$|A|=0,$ 故$A^*A=0,$得$n-$秩$(A^*)\geq n-1,$ 即秩$(A^*)\leq 1;$ 又由$r=n-1$

知$A^*\neq 0,$ 故秩$(A^*)\geq 1,$ 从而有$r'=1,$（A_{i1} 中至少有一不为零）

（3）当$r<n-1$时$A_{ij}=0(i,j=1,\cdots,n).$ 故$r'=0.$