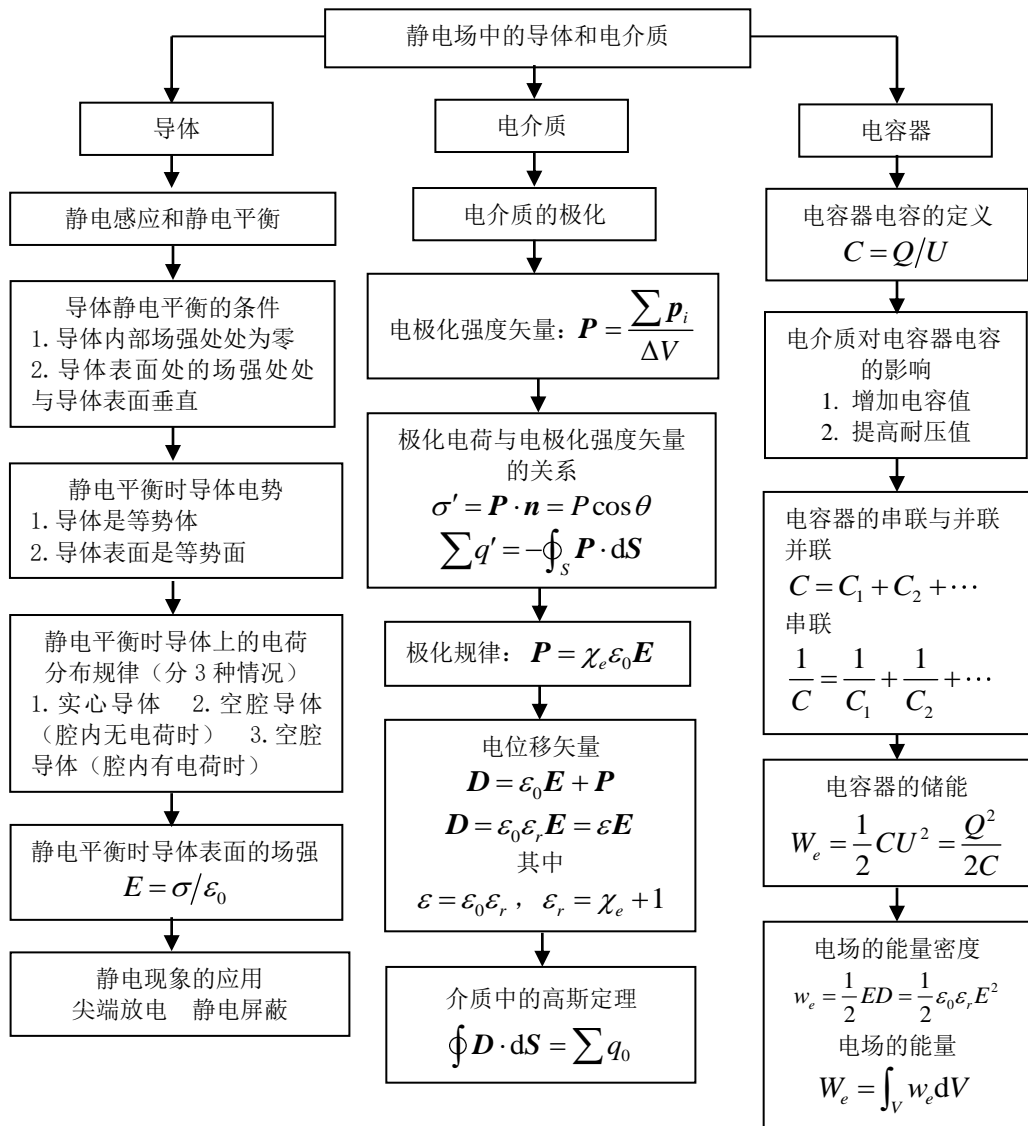


# 第 11 章 电场中的导体和电介质

## 一、知识点网络框图



## 二、基本要求

1. 理解导体的静电平衡条件及性质，熟练掌握在静电平衡状态下导体上电荷的分布规律，会计算某些带电导体产生的场强和电势分布；
2. 了解电介质的极化现象及其微观机理，了解电极化强度矢量  $\mathbf{P}$ ，理解电位移矢量  $\mathbf{D}$  的定义及其物理意义，熟练掌握有电介质时静电场的高斯定理及其应用。
3. 理解电容器电容的定义，掌握几种形状规则的（如：平行板、圆柱形、球形）电容器电容的计算方法，理解电介质对电容器电容的影响。
4. 理解电场的能量概念，掌握电容器中储存的能量和电场能量的计算方法。

## 三、基本内容

### （一）、静电场中导体

#### 1. 导体的静电平衡

处于电场中的导体，导体内部的自由电子除了有热运动之外，还要在电场力的作用下作定向运动。自由电荷的定向运动，一方面会形成电流，另一方面可在导体上产生电荷分布。当导体上所有的自由电荷只有热运动、没有定向运动（即没有电流）时导体所处的状态称为导体的静电平衡状态。

#### 2. 导体静电平衡的条件

①导体内部场强处处为零；②导体表面的常常处处与导体表面垂直。

#### 3. 导体静电平衡时的性质

导体内部是等势体、导体表面是等势面。

#### 4. 静电平衡时导体上的电荷分布

（1）实心导体——导体内部处处没有净电荷，电荷（包括感应电荷）只能分布在导体的表面上；

（2）空腔导体，腔内无电荷时——导体内部、及空腔内表面处处没有净电荷，电荷只能分布在空腔的外表面上；

（3）空腔导体，腔内有电荷时——若空腔导体自身带电荷  $Q$ ，腔内有电量  $q$  为的带电体，则静电平衡时，空腔内表面上出现感应电荷  $-q$ ，外表面上的净电荷为  $Q+q$ 。如图 11.1

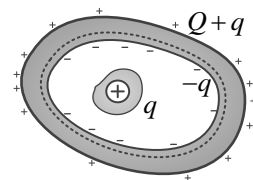


图 11.1 空腔导体上的电荷分布

所示。

### 5. 静电平衡时导体表面的电场强度

静电平衡时导体表面附近的电场强度，其方向处处与导体表面垂直，大小与该处表面的电荷密度  $\sigma$  成正比，即

$$\mathbf{E}_{\text{表面}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$$

### 6. 尖端放电

由于导体表面附近的场强大小正比于导体表面的电荷密度，在尖端处，电荷面密度很大，所以尖端附近的电场很大。当尖端附近强电场大到一定程度时，可使空气中的分子电离，产生大量的正负电荷。与尖端上电荷异号的带电粒子受到吸引而趋向尖端，使导体上的电荷减少。这种现象称为尖端放电现象。

### 7. 静电屏蔽

利用空腔导体可以实现静电屏蔽。静电屏蔽可分两种情况：

(1) 腔外电荷及空腔导体自身携带的电荷在腔内产生的合场强为零，即空腔导体可以屏蔽外电场，如图 11.2 (a) 所示。

(2) 接地的空腔导体，其腔内电荷和空腔的内表面出现的感应电荷在腔外产生的合场强也为零，即接地的空腔导体可以屏蔽腔内电场，如图 11.2 (b) 所示。

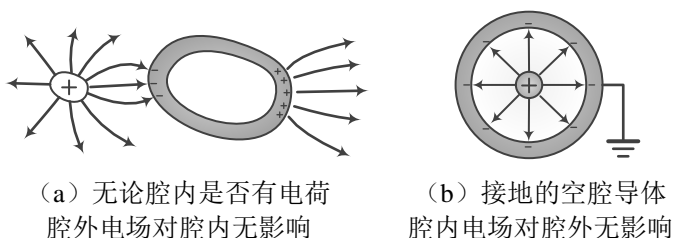


图 11.2 静电屏蔽

## (二)、电容和电容器

### 1. 孤立导体的电容

导体能够携带（或容纳）电荷的本领，称为电容，用符号  $C$  表示，其定义为

$$C = \frac{q}{V}$$

$C$  的单位为法拉，符号 F。

假设某导体附近没有其它带电体或导体，则该导体称为孤立导体。孤立导体的电容只决定于导体的几何形状和大小，与导体所带的电量和电势无关。

## 2. 电容器的电容

两块能够带等量异号电荷的导体所组成的系统称为电容器。若电容器的两个极板上所带电量为  $\pm Q$ ，两板之间的电势差为  $U$ ，则该电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U}$$

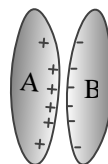


图 11.3 电容器

电容器的电容只与电容器的几何结构和两极板之间填充的电介质有关，与电容器是否带电无关。通常可根据电容器的两个极板的形状将电容器分为平行板电容器、圆柱形电容器和球形电容器三种，也可以根据两极板之间填充的介质和用途来分类。

## 3. 电容器的连接：串联与并联

(1) 串联：当电容器串联时，串联后等效总电容的倒数等于各电容器电容的倒数之和，即

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

(2) 并联：当电容器并联时，并联后的等效总电容等于各电容器的电容之和，即

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

## (三)、静电场中的电介质

### 1. 电介质的极化

从导电性能上来说，电介质就是理想的绝缘体，所以电介质内没有可以自由运动的自由电子，所有电子都被束缚在原子内，绕原子核运动。当外电场不存在时，有一类电介质中每个分子的正负电荷中

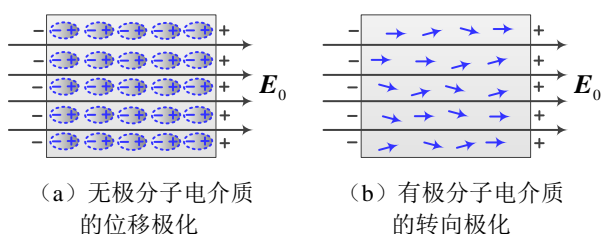


图 11.4 电介质的极化

心重合，这类电介质称为无极分子电介质；还有一类电介质，其分子的正负电荷中心不

重合，每个分子都等效于一个电偶极子，具有一定的电偶极矩，这类电介质称为有极分子电介质。

当有外电场存在时，电介质会被外电场极化。但无论是无极分子电介质的位移极化，还是有极分子电介质的转向极化，极化的宏观效果都是使电介质表面出现一层极化电荷，使电介质内部分子电偶极矩的矢量和不再等于零，如图 11.4 所示。这些极化电荷在电介质内产生附加电场  $\mathbf{E}'$ ，从而影响原有的电场分布，使介质内的总场强减小，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' < \mathbf{E}_0$$

## 2. 电极化强度矢量 极化电荷面密度

当电介质被外电场极化时，电介质单位体积内分子电偶极矩的矢量和称为电介质的电极化强度矢量，并用符号  $\mathbf{P}$  表示，即

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}$$

式中： $\sum \mathbf{p}_i$  是电介质  $\Delta V$  体积内分子电偶极矩的矢量和。显然， $\mathbf{P}$  的大小反应了电介质被极化的程度。同时电介质被极化的程度，也反应在电介质表面极化电荷面密度  $\sigma'$  的大小上。 $\mathbf{P}$  与  $\sigma'$  的关系为

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n = P \cos \theta$$

## 3. 电介质的极化规律

在各向同性的均匀电介质中，某点的电极化强度矢量  $\mathbf{P}$  与该处的总电场强度  $\mathbf{E}$  成正比，即

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

式中： $\chi_e$  为电介质的电极化率， $\varepsilon_r$  为电介质的相对电容率。

## 4. 有电介质存在时静电场的高斯定理 电位移矢量

在静电场中，电位移矢量  $\mathbf{D}$  对于任意一个闭合曲面的通量等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和，与极化电荷无关，即

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$$

这称为有电介质存在时的高斯定理。电位移矢量的定义为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

利用电介质的极化规律，可得

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

式中： $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  称为电介质的绝对电容率。注意：电位移矢量  $\mathbf{D}$  是研究电场的一个辅助物理量。

高斯定理的主要应用就是求解当电荷分布和介质分布具有高度对称性时， $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的空间分布。此外还需注意，上述形式的高斯定理是电磁场理论的基本方程之一，无论是否存在电介质都成立。

## （四）、电场能量

### 1. 电容器的储能公式

电容器是一个储能元件。若电容器的电容为  $C$ ，当两极板上带等量异号电荷  $Q$ ，或两极板间的电势差为  $U$  时，电容器储存的能量为

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q U$$

### 2. 电场的能量

电场是客观存在的一种特殊的物质。和其他物质一样，也具有能量、质量和动量。电容器储存的能量实际上存在于极板上的电荷所激发的电场中。电场的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

给定空间中电场的总能量为

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV$$

## 四、典型例题解法指导

本章习题主要以下有四种类型：

1. 静电平衡时导体上的电荷分布、导体周围的场强分布和电势分布的计算。
2. 有电介质存在时高斯定理的综合应用。
3. 电容器电容的计算或估算。
4. 电场能量的计算。

这四类问题的核心都是通过场强叠加原理或高斯定理求场强分布、再求电势分布。

**例 11.1** 三块平行放置的金属薄板 A、B 和 C，面积均为  $S$ ，AC 间距离为  $d_1$ ，AB

间距离为  $d_2$ ，且  $d_1 \ll \sqrt{S}$ 、 $d_2 \ll \sqrt{S}$ 。如果使 A 板带正电荷  $Q$ ，B、C 两板接地，略去电场的边缘效应，试求：

(1) B、C 板上感应电荷的电量；

(2) 空间各处的场强分布。

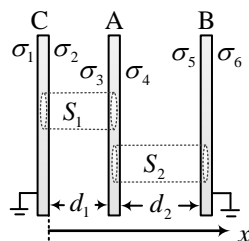


图 11.5 例 11.1 图

**分析：**此题属于导体的静电平衡问题。根据导体静电平衡的特点，导体上的电荷仅分布在导体表面，导体内部场强处处为零，

导体表面场强处处与导体表面垂直，其大小为  $E = \sigma / \epsilon_0$ ；又由题意可知，三块金属导体板均可视为“无限大”，空间某点的场强是所有无限大带电平板产生的场强的矢量和。

**解：**(1) 选向右为  $x$  轴正方向。三块导体板共有六个表面，设六个表面的电荷密度分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\dots$ 、 $\sigma_6$ ，如图 11.5 所示。因 B、C 两导体板接地，故 B、C 板外的场强为零，由此首先可得

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_6 = 0$$

作如图 11.5 中所示的两个闭合圆柱面  $S_1$ 、 $S_2$  为高斯面，其底面积均为  $\Delta S$ 、且均在导体板内，侧面与极板表面垂直。根据高斯定理和导体的静电平衡条件，有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = 0$$

对于  $S_1$  面有： $\sum q_i = \Delta S \sigma_2 + \Delta S \sigma_3 = 0$ ；对于  $S_2$  面有： $\sum q_i = \Delta S \sigma_4 + \Delta S \sigma_5 = 0$ 。由此得

$$\sigma_2 = -\sigma_3 \quad \sigma_4 = -\sigma_5 \quad (1)$$

又 AB、AC 之间的场强和电势差分别为

$$E_{AB} = \sigma_4 / \epsilon_0 \quad E_{AC} = \sigma_3 / \epsilon_0 \quad (2)$$

$$U_{AB} = E_{AB} d_2 = \sigma_4 d_2 / \epsilon_0 \quad U_{AC} = E_{AC} d_1 = \sigma_3 d_1 / \epsilon_0 \quad (3)$$

因为 B、C 接地，故有： $U_{AB} = U_{AC}$ ，由③可得

$$\sigma_4 d_2 = \sigma_3 d_1 \quad (4)$$

由题意可知

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q \quad (5)$$

联立求解①④⑤式，得

$$\sigma_3 = -\sigma_2 = \frac{d_2 Q}{(d_1 + d_2)S}$$

$$\sigma_4 = -\sigma_5 = \frac{d_1 Q}{(d_1 + d_2)S}$$

故 B、C 板上的感应电荷分别为

$$Q_B = (\sigma_5 + \sigma_6)S = -\frac{d_1 Q}{d_1 + d_2}$$

$$Q_C = (\sigma_1 + \sigma_2)S = -\frac{d_2 Q}{d_1 + d_2}$$

(2) 将  $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$  代入②式, 可得 AB 之间 AC 之间的场强分布为

$$E_{AB} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} = \frac{d_1 Q}{(d_1 + d_2)\varepsilon_0 S} \quad \text{方向沿 } x \text{ 轴正方向}$$

$$E_{AC} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} = \frac{d_2 Q}{(d_1 + d_2)\varepsilon_0 S} \quad \text{方向沿 } x \text{ 轴负方向}$$

B、C 两板外侧的场强均为 0。

**例 11.2** 带电量为  $Q$  的导体球壳, 内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 现将电量为  $q_1$  的点电荷放在球壳内部离球心  $O$  为  $r_1$  处 ( $r_1 < R_1$ ), 电量为  $q_2$  的点电荷放在球壳外面离球心  $O$  为  $r_2$  ( $r_2 > R_2$ ) 处, 如图 11.6 所示。若以无穷远处为零电势点, 试求球心  $O$  点处的电势。

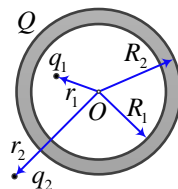


图 11.6 例 11.2 图

**分析:** 根据电势叠加原理, 球心  $O$  的电势是所有电荷在该点产生的电势的代数和, 这里的所有电荷是指两个点电荷  $q_1$ 、 $q_2$ , 以及在导体球壳内、外表面上出现的电荷。

**解:** 由题意可知, 在空腔球壳的内表面上分布有感应电荷, 电量为  $-q_1$ , 球壳外表面上的总电量为  $Q + q_1$ 。空腔内表面上的感应电荷在球心处的电势为

$$V_{\text{内}} = \int_0^{-q} \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

同理可知, 空腔外表面上的电荷在球心处的电势为

$$V_{\text{外}} = \int_0^{Q+q} \frac{dq''}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



由电势叠加原理， $O$  点处的电势为所有电荷单独存在时在  $O$  点产生的电势的代数和，即

$$U = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + V_{\text{内}} + V_{\text{外}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_1 + Q}{R_2} \right)$$

**例 11.3** 一个内、外半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$  的导体球壳 A，带电量为  $Q$ ，另有一半半径为  $R$  的同心导体球 B，带电量  $q$ ，如图 11.7 所示。

(1) 若球壳 A 通过导线与大地相连，然后断开，求 A 球壳上的电荷分布和 A、B 两球的电势；

(2) 在上述条件下，再使 B 球通过导线经 A 上的小孔接地，再求 A、B 上的电荷分布和电势（忽略小孔的影响，且假设两球离地面很远）。

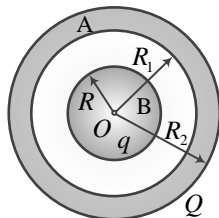


图 11.7 例 11.3 图

**分析：**静电平衡时导体上的电荷分布在导体表面，导体内部场强为零，导体为等势体。导体接地时，意味着该导体的电势为零，为满足这一条件，导体上的总电量将发生变化，电荷重新分布。

**解：**(1) 导体球壳 A 没有接地时，B 的外表面带电量  $q$ ，球壳 A 的内表面出现感应电荷，电量为  $-q$ ，其外表面的电量为  $Q + q$ 。当球壳 A 接地时，一方面其电势为零，即： $V_A = 0$ ，另一方面 A 外表面的电量也变为零，同时内表面上的电荷量  $-q$  保持不变。接地线断开后，这一状态保持不变。

又由于 A、B 同心放置，故 A 的内表面和 B 的外表面上电荷均匀分布，所以由电势叠加原理可得 B 球电势为

$$V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

(2) 由于 A 的接地线已经断开，所以当 B 球接地时，A 上的总电量  $-q$  保持不变，B 球的电势变为零，同时 B 球表面的电量发生变化，可设为  $q'$ 。由于静电感应，球壳 A 的内表面出现感应电荷  $-q'$ ，其外表面电荷为  $-q + q'$ 。由电势叠加原理，可得 B 球的电势为

$$V'_B = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q + q'}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

令： $V'_B = 0$ ，可得

$$q' = \frac{R_1 R q}{R_1 R - R_2 R + R_1 R_2}$$

于是，球壳 A 的电势为

$$V_A = \frac{q' - q' + (-q + q')}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q' - q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q(R - R_1)}{4\pi\epsilon_0 (R_1 R - R_2 R + R_1 R_2)}$$

**例 11.4** 一个平行板电容器，极板面积为  $S$ ，极板间距为  $d$ 。现在两极板的正中间平行地插入一块相对电容率为  $\epsilon_r$ 、厚度为  $d/3$ 、面积也为  $S$  的电介质板，如图 11.8 所示。

已知电容器极板上的电荷面密度分别为  $\pm\sigma$ ，忽略电场的边缘效应，试求：

(1) 电介质内外电场强度  $\mathbf{E}$ 、电位移矢量  $\mathbf{D}$  和电极化强度  $\mathbf{P}$  的分布；

(2) 两极板间的电势分布（假设带负电的极板接地）；

(3) 电容器的电容；

(4) 电介质表面的极化电荷面密度；

(5) 若将电介质板换成同样尺寸的金属板，再求该电容器的电容。

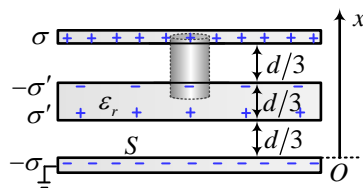


图 11.8 例 11.4 图

**分析：**此题为有电介质存在时高斯定理的综合应用题。

**解：**(1) 在平行板电容器中，当忽略电场的边缘效应时，电介质内外的电场都是均匀电场，方向从正极板指向负极板。为此，作一个底面积为  $\Delta S$ 、侧面与极板表面垂直的闭合柱面为高斯面，其上底面在上极板内部、下底面在两极板之间，如图 11.8 所示，由高斯定理  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$ ，可得两极板之间的电位移矢量的大小

$$D = \sigma$$

方向沿  $x$  轴负向。再由  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ ，可得介质内、外的电场强度和电极化强度的大小分别为：在电介质外部，因  $\epsilon_r = 1$ ，故

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad P = 0$$

方向沿  $x$  轴负向；在电介质内部

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad P = D - \epsilon_0 E = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma$$

方向沿  $x$  轴负向。

(2) 因负极板接地，表明负极板电势为零，根据电势与场强的积分关系

$$V = \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_x^0 -E dx$$

可得极板间电介质内外的电势分布为

$$V = \begin{cases} \frac{\sigma x}{\varepsilon_0} & \text{当: } x \leq \frac{d}{3} \text{ 时} \\ \frac{(3x-d)\sigma}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} + \frac{d\sigma}{3\varepsilon_0} & \text{当: } \frac{d}{3} < x \leq \frac{2d}{3} \text{ 时} \\ \frac{(3x-d)\sigma}{3\varepsilon_0} + \frac{d\sigma}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} & \text{当: } \frac{2d}{3} < x \leq d \text{ 时} \end{cases}$$

(3) 由 (2) 可得，两极板之间的电势差为

$$U = V_+ - V_- = \left[ \frac{(x-d/3)\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{d\sigma}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} \right]_{x=d} = \frac{d\sigma(2\varepsilon_r+1)}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

所以电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma \cdot S}{U} = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d(2\varepsilon_r+1)}$$

(4) 由于电介质的极化，在电介质表面靠近正极板的界面上出现负的极化电荷，另一界面上出现正的极化电荷，设电荷的面密度为  $\pm\sigma'$ ，则

$$\sigma' = P = \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \sigma$$

(5) 若将电介质板换成同样尺寸的金属板，则静电平衡时，金属板内的场强为零，金属板为一个等势体，金属板外的电场为匀强电场，场强的大小为  $E = \sigma/\varepsilon_0$ ，所以两极板间的电势差为

$$U' = V'_+ - V'_- = \int_d^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_d^{2d/3} -E dx + \int_{d/3}^0 -E dx = \frac{2\sigma d}{3\varepsilon_0}$$

所以插入金属板后，电容器的电容为

$$C' = \frac{Q}{U'} = \frac{3\varepsilon_0 S}{2d}$$

当然，插入金属板后，读者也可以将此电容器看作两个极板间距为  $d/3$  的平行板电

容器的串联，然后求串联电容器的等效电容，请读者自己完成相关运算。

**例题 11.5** 在一个圆柱电容器的两极板之间充满了两层均匀电介质，如图 11.9 所示，已知内层电介质是相对电容率为  $\varepsilon_{r1} = 4.0$  的油纸，内半径  $a = 2.0\text{cm}$ 、外半径  $R = 2.1\text{cm}$ 。外层是相对电容率为  $\varepsilon_{r2} = 7.0$  的玻璃，其外半径为  $b = 2.2\text{cm}$ 。若电容器的长度  $L = 10\text{cm}$ ，不计电场的边缘效应，试求：

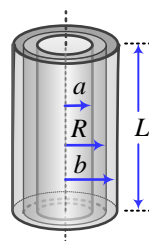


图 11.9 例题 11.5 图

(1) 该电容器的电容；

(2) 若该电容器两极板之间的电势差为  $1000\text{V}$ ，求电容器储存的静电能。

**分析：**电容器的电容只与电容器的几何结构和电容器内部填充的电介质有关，与电容器所带的电荷量无关，所以求电容时可先假设两极板分别带电量  $+Q$  和  $-Q$ 。由于不计电场的边缘效应，所以圆柱形电容器内部的场强近似具有“无限长”的轴对称性，可以用高斯定理计算（或估算）两极板之间的场强分布，进而可求出两极板之间的电势差  $U$ ，最后由  $C = Q/U$  求电容。

**解：**设电容器充电后内外极板上沿轴线单位长度上所带的电量分别为  $\pm\lambda$ ，则电容器所带的总电量为  $Q = \lambda L$ 。在电容器内作一个半径为  $r$ ，高度为  $h$  的同轴闭合圆柱面为高斯面，由高斯定理  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$ ，可得两极板之间的电位移矢量为

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad a < r < b$$

其中  $\mathbf{e}_r$  是从轴线到场点的径向单位矢量。再由  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ ，可得两层电介质内的电场强度分别为

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} r} \mathbf{e}_r & a < r < R \\ \mathbf{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} r} \mathbf{e}_r & R < r < b \end{cases} \quad (1)$$

于是，该电容器两极板之间的电势差为

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^R \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_R^b \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \ln \frac{R}{a} + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \ln \frac{b}{R}$$

所以该电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \ln \frac{R}{a} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}} \ln \frac{b}{R}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}L}{\epsilon_{r2} \ln \frac{R}{a} + \epsilon_{r1} \ln \frac{b}{R}}$$

将  $a=2.0\text{cm}$ 、 $R=2.1\text{cm}$ 、 $\epsilon_{r1}=4.0$ 、 $\epsilon_{r2}=7.0$ 、 $b=2.2\text{cm}$ 、 $L=10\text{cm}$  代入上式，可得

$$C = 29.5 \times 10^{-12} \text{F} = 29.5 \text{pF}$$

(2) 由电容器的储能公式，可得电容器储存的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \times 29.5 \times 10^{-12} \times 1000^2 (\text{J}) = 14.8 \times 10^{-6} (\text{J})$$

**例 11.6** 在相对电容率为  $\epsilon_{r2}$  的“无限大”均匀电介质中有一半径为  $R$  的“无限长”均匀带电直圆柱体，沿轴线单位长度上圆柱体内所带电量为  $\lambda$ ，圆柱体自身的相对电容率为  $\epsilon_{r1}$ 。试求：

(1) 圆柱体内外电位移矢量  $\mathbf{D}$  和电场强度  $\mathbf{E}$  的分布；

(2) 单位长度上带电圆柱体内部静电场的能量。

**分析：**由于电荷及介质分布均具有“无限长”的轴对称性，所以场强分布也具有轴对称性，且各点的场强方向均垂直于轴线沿径向向外，所以本题可用高斯定理求出圆柱体内外的场强分布，然后利用电场能量密度公式求静电场的能量。难点在于如何由  $\lambda$  求圆柱体内的电荷体密度  $\rho$ 。

**解：**(1) 由于圆柱体上所带电量在圆柱体内均匀分布，所以圆柱体上单位体积内所带的电量（即电荷体密度）为

$$\rho = \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

作一个半径为  $r$ ，高度为  $h$  的同轴闭合圆柱面为高斯面，由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r h = \sum q_0$$

可得

$$D = \frac{\sum q_0}{2\pi r h}$$

当  $r < R$  时， $\sum q_0 = \rho \cdot \pi r^2 h = \frac{r^2}{R^2} \lambda h$ ，所以

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi R^2} r \quad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} R^2} r$$

当  $r > R$  时,  $\sum q_0 = \rho \cdot \pi R^2 h = \lambda h$ , 所以

$$D_2 = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} r}$$

(2) 圆柱体内静电场的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} D_1 E_1 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} R^4} r^2$$

在圆柱体内作一个半径为  $r$ , 厚度为  $dr$ 、长度为 1 的同轴薄圆筒形体积元  $dV$ , 则该体积元内静电场的能量为  $dW = w_e dV$ , 所以沿轴线单位长度上, 圆柱体内静电场的能量为

$$W = \int w_e dV = \int_0^R \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} R^4} r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\lambda^2}{16\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}$$

## 五、自我测试题

11.1 在一个不带电的导体球壳的球心处放置一个点电荷, 并测量球壳内外的电场分布。如果将此点电荷从球心处移到球壳内其它位置, 重新测量球壳内外的场强分布, 将发现 ( )。

- A. 球壳内、外场强分布均无变化;
- B. 球壳内场强分布改变, 球壳外不变;
- C. 球壳外场强分布改变, 球壳内不变;
- D. 球壳内、外场强分布均改变。

**11.1 答案: B**

**解:** 球壳内表面的感应电荷的分布随点电荷的位置而改变, 因而球内电场分布也发生改变; 而球壳外表面的电荷分布不随球内点电荷的位置而变化, 所以球外场强分布不变。

11.2 在一个不带电的导体球壳的球心处放入一个点电荷  $q$ , 当  $q$  从球心处移开, 但仍在球壳内, 下列说法正确的是 ( )。

- A. 球壳内、外表面的感应电荷不再是均匀分布的;
- B. 球壳内表面感应电荷分布不均匀, 外表面感应电荷分布均匀;
- C. 球壳内表面电荷分布均匀, 外表面感应电荷分布不均匀;

D. 球壳内外表面感应电荷仍保持均匀分布。

### 11.2 答案: B

11.3 一平行板真空电容器, 充电后, 将电源断开, 并在两极板间充以相对电容率为  $\epsilon_r$  的电介质, 则电容器极板间的电场强度  $E$  和电势差  $\Delta U$  将 ( )。

- A.  $E$  变大,  $\Delta U$  变大                      B.  $E$  变大,  $\Delta U$  变小  
C.  $E$  变小,  $\Delta U$  变大                      D.  $E$  变小,  $\Delta U$  变小

### 11.3 答案: D

**解:** 断开电源, 电容器上的电量不变, 充满介质后,  $C = \epsilon_r C_0$ , 由  $U = Q/C$  可知,  $U$  减小; 又由  $E = U/d$  可知,  $d$  不变时,  $E$  减小。

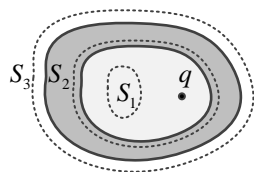
11.4 一空气平行板电容器, 极板间距为  $d$ , 电容为  $C$ 。若在极板间平行地插入一块厚度为  $d/3$  的金属板, 则其电容值变为 ( )。

- A.  $C$ ;              B.  $\frac{2C}{3}$ ;              C.  $\frac{3C}{2}$ ;              D.  $2C$

### 11.4 答案: C

**解题提要:** 插入金属板后, 对应的电容等效为两个电容器的串联, 由电容器的串联公式可求得总电容为  $3C/2$ 。

11.5 如图所示, 点电荷  $q$  位于不带电的空腔导体内。设有三个封闭曲面  $S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$  (为图中虚线所示), 在这三个曲面中,  $E$  的通量为零的是曲面\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_, 曲面上场强处处为零的是曲面\_\_\_\_\_。



测试题 11.5 图

### 11.5 答案: $S_1$ 、 $S_2$ ; $S_2$

**解:** 在高斯定理的表达式  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$  中,  $\sum q$  是闭合曲面所包围的电荷的代数和。

又空腔导体的内表面出现感应电荷  $-q$ , 外表面出现感应电荷  $q$ , 故  $E$  对  $S_1$ 、 $S_2$  的通量为零。因曲面  $S_2$  在导体内, 由导体的静电平衡条件可知,  $S_2$  上电场强度处处为零。

11.6 一平行板电容器, 充电后与电源保持连接, 然后使两极间充满相对电容率为  $\epsilon_r$  的各向同性的均匀电介质, 这时电容器的电容是原来的\_\_\_\_\_倍; 极板上的电荷是原来的\_\_\_\_\_倍; 两极板间的电场强度是原来的\_\_\_\_\_倍。

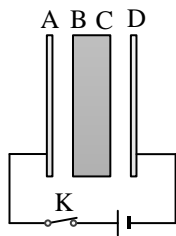
### 11.6 答案: $\varepsilon_r$ 、 $\varepsilon_r$ 、1

解: 根据平行板电容器的电容公式:  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C_0$ , 即:  $\frac{C}{C_0} = \varepsilon_r$ ;

与电源保持连接, 即保持电压不变, 由  $Q = CU$  可知,  $\frac{Q}{Q_0} = \frac{C}{C_0} = \varepsilon_r$ ;

平行板电容器内部的电场是均匀电场, 由  $E = U/d$  可知, 电压  $U$  不变, 则  $E$  不变。

11.7 如图所示, 两块平行放置的金属板 A、D 分别与电源的正负极相连, 在 A、D 之间平行地插入一块厚度均匀的金属板 BC, 如 A、D 间的电势差为  $U$ , A、B 间的电势差为  $u$ , 忽略静电场的边缘效应, 则 C、D 间的电势差  $U_{CD} =$  \_\_\_\_\_; 如果把金属板 BC 用一厚度均匀的电介质板代替, 且  $\overline{AB} = \overline{BC}/2 = \overline{CD}$ , 电介质的相对电容率  $\varepsilon_r = 4$ , 则:  $U_{AB} =$  \_\_\_\_\_,  $U_{BC} =$  \_\_\_\_\_,  $U_{CD} =$  \_\_\_\_\_。



测试题 11.7 图

### 11.7 答案: $U - u$ ; $0.4U$ 、 $0.2U$ 、 $0.4U$

解: 当 BC 是金属板时, BC 是等势体, 所以  $U_{AD} = U_{AB} + U_{CD}$ , 即

$$U_{CD} = U_{AD} - U_{AB} = U - u$$

当 BC 是电介质板时, 设介质外的电场强度为  $E_{AB} = E_{CD} = E_0$ , 则电介质内的电场强度为

$$E_{BC} = E_{AB} / \varepsilon_r = E_0 / 4$$

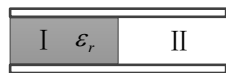
设:  $\overline{AB} = \overline{BC}/2 = \overline{CD} = x$ , 则

$$U = E_{AB} \overline{AB} + E_{BC} \overline{BC} + E_{CD} \overline{CD} = E_0 x + \frac{1}{4} E_0 2x + E_0 x = 2.5 E_0 x$$

即:  $E_0 x = 0.4U$ , 所以

$$U_{AB} = E_{AB} \overline{AB} = E_0 x = 0.4U, \quad U_{BC} = E_{BC} \overline{BC} = 0.2U, \quad U_{CD} = E_{CD} \overline{CD} = 0.4U$$

11.8 一空气平行板电容器充电后, 将其中的一半充满各向同性的均匀电介质, 其相对电容率为  $\varepsilon_r$ , 如图所示。若不计电场的边缘效应, 则图中 I、II 两部分中电场强度的大小之比  $E_1/E_2 =$  \_\_\_\_\_,



测试题 11.8 图

两部分中电位移矢量的大小之比  $D_1/D_2 =$  \_\_\_\_\_, 两部分所对应的极板上的自由电荷面密度之比  $\sigma_1/\sigma_2 =$  \_\_\_\_\_。



**11.8 答案:**  $1/1$ 、 $\varepsilon_r/1$ 、 $\varepsilon_r/1$

**解:** 由于导体是等势体, 所以两侧极板间的电势差相等, 即:  $U_1 = U_2$ , 且:  $U_1 = E_1 d$ 、 $U_2 = E_2 d$ , 所以  $E_1/E_2 = 1/1$ 。又由  $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_1 = \sigma_1$ 、 $D_2 = \varepsilon_0 E_2 = \sigma_2$ , 可得

$$D_1/D_2 = \varepsilon_r/1, \quad \sigma_1/\sigma_2 = \varepsilon_r/1$$

11.9 一个空气平行板电容器, 充电后把电源断开, 这时电容器中储存的能量为  $W_0$ , 然后在两极板之间插入并充满相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性的均匀电介质, 则该电容器中储存的能量  $W =$  \_\_\_\_\_; 若在保持与电源连接状态下插入相同的电介质, 则该电容器中储存的能量  $W' =$  \_\_\_\_\_。

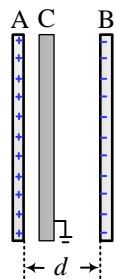
**11.9 答案:**  $W_0/\varepsilon_r$ 、 $\varepsilon_r W_0$

**解:** 电容器中充满电介质后,  $C = \varepsilon_r C_0$ 。断开电源, 是保持平行板电容器上的电量不变,

根据  $W_e = \frac{Q^2}{2C}$ , 可得  $\frac{W_0}{W} = \frac{C}{C_0} = \varepsilon_r$ , 即:  $W = \frac{W_0}{\varepsilon_r}$ ; 保持与电源连接, 就是保持电容器

极板上的电压不变, 根据  $W_e = \frac{1}{2} C U^2$ , 可得  $\frac{W_0}{W'} = \frac{C_0}{C}$ , 即:  $W' = \varepsilon_r W_0$ 。

11.10 如图所示, 平行板电容器由面积  $S = 2.00\text{m}^2$  的两个平行导体板 A、B 组成, 两板放在空气中, 相距  $d = 1.00\text{cm}$ 。当 A、B 间的电压充电到  $U = 100\text{V}$  后与电源断开, 然后再插入一块面积相同、厚度  $d' = 2.0\text{mm}$  的导体板 C, 它与 A、B 两板的距离分别为  $2.0\text{mm}$  和  $6.0\text{mm}$ , 并将 C 板接地。不计电场的边缘效应, 试求:



(1) 插入 C 板后, A、B 间的电势差;

(2) 若用一根导线连接导体板 A、B, 求 A、C 两板之间的电势差。

测试题 11.10 图

**11.10 答案:**  $80\text{V}$ 、 $0\text{V}$

**解:** (1) 由题意可知, 插入导体板 C 之前, 平行板电容器 AB 的电容为

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 2.00}{1.00 \times 10^{-2}} = 1.77 \times 10^{-9} (\text{F})$$

充电后, A、B 极板上所带电量为

$$Q_0 = C_0 U = 1.77 \times 10^{-9} \times 100 = 1.77 \times 10^{-7} (\text{C})$$

不妨假设 A 板带正电、B 板带负电。插入 C 板后, 由静电感应和导体的静电平衡条件可

知, C 板的左右两侧分别出现感应电荷  $-Q_0$  和  $Q_0$ 。由高斯定理可得, AC 间和 CB 间的场强大小均为

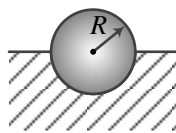
$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} = \frac{1.77 \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12} \times 2.00} = 1.00 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

方向均水平向右, C 板内部的场强为 0。所以 AB 两极板的电势差为

$$U_{AB} = E \cdot (\overline{AC} + \overline{CB}) = 80(\text{V})$$

(2) 用导线连接 A、B 板后, 由于 C 板接地, 电势为零, 所以 A、B 上原有的电荷被中和了, 且 A、B 两板电势相等, 于是整个空间的场强处处为零。故极板 A、C 之间的电势差为零。

11.11 如图所示, 球形电极浮在相对电容率  $\varepsilon_r = 3.0$  的大型油槽中, 球的一半浸没在油中, 另一半在空气中。已知电极所带净电荷  $Q_0 = 2.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ , 问球的上下部分各有多少电荷。



测试题 11.11 图

**11.11 答案:**  $\frac{Q_0}{(1 + \varepsilon_r)} = 0.5 \times 10^{-6} \text{ C}$ 、 $\frac{\varepsilon_r Q_0}{(1 + \varepsilon_r)} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ C}$

**解法一:** 由于导体球的一半浸在油中, 导体球上下表面的电荷面密度不再相等, 可设为  $\sigma_{\text{上}}$  和  $\sigma_{\text{下}}$ , 则

$$Q_0 = 2\pi R^2 \sigma_{\text{上}} + 2\pi R^2 \sigma_{\text{下}} = 2\pi R^2 (\sigma_{\text{上}} + \sigma_{\text{下}}) \quad (1)$$

由于静电平衡时导体球面是个等势面, 由电场线和等势面之间的几何关系可知, 空间各点场强的方向依然沿径向向外, 而且电场强度的分布仍然具有球对称性, 即在任意半径为  $r$  ( $r > R$ ) 的球面上各点电场强度的大小相等, 即在同一球面的上下两个半球面上

$$E_{\text{上}} = E_{\text{下}} \quad (2)$$

在空气和油中分别作一个半径为  $r$  的同心封闭半球面为高斯面, 对于空气中的上半球面, 由高斯定理, 得

$$\oint_{\text{封闭的上半球面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{上半球面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{底面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{\text{上}} \cdot 2\pi r^2 = \sum q_0 = \sigma_{\text{上}} 2\pi R^2$$

式中  $\int_{\text{底面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , 所以

$$D_{\text{上}} = \sigma_{\text{上}} R^2 / r^2$$

同理对于油中的下半球面，可得

$$D_{\text{下}} = \sigma_{\text{下}} R^2 / r^2$$

又

$$E_{\text{上}} = \frac{1}{\varepsilon_0} D_{\text{上}} = \frac{\sigma_{\text{上}} R^2}{\varepsilon_0 r^2} \quad , \quad E_{\text{下}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} D_{\text{下}} = \frac{\sigma_{\text{下}} R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \quad (3)$$

由②③两式可得

$$\sigma_{\text{下}} = \varepsilon_r \sigma_{\text{上}} \quad (4)$$

再由①④两式可得

$$\sigma_{\text{上}} = \frac{Q_0}{(1 + \varepsilon_r) 2\pi R^2} \quad , \quad \sigma_{\text{下}} = \frac{\varepsilon_r Q_0}{(1 + \varepsilon_r) 2\pi R^2}$$

所以球形电极上下两个半球面所带电量分别为

$$Q_{\text{上}} = 2\pi R^2 \sigma_{\text{上}} = \frac{Q_0}{(1 + \varepsilon_r)} = 0.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_{\text{下}} = 2\pi R^2 \sigma_{\text{下}} = \frac{\varepsilon_r Q_0}{(1 + \varepsilon_r)} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

**解法二：**将悬浮在油中的导体球理解为两个分别处在油中和空气中的半球形孤立导体的并联，因上半球在空气中，其电容为

$$C_{\text{上}} = 2\pi \varepsilon_0 R \quad (1)$$

下半球在油中，其电容为

$$C_{\text{下}} = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R \quad (2)$$

设上、下半球分别带电量  $Q_{\text{上}}$  和  $Q_{\text{下}}$ ，则上、下半球的电势分别为

$$V_{\text{上}} = \frac{Q_{\text{上}}}{C_{\text{上}}} \quad , \quad V_{\text{下}} = \frac{Q_{\text{下}}}{C_{\text{下}}}$$

由于静电平衡时导体球是一个等势体，即：  $V_{\text{上}} = V_{\text{下}}$ ，由此得

$$Q_{\text{下}} = \frac{C_{\text{下}}}{C_{\text{上}}} Q_{\text{上}} = \varepsilon_r Q_{\text{上}} \quad (3)$$

又因为导体球上的电荷总量为  $Q_0$ ，有

$$Q_{\text{上}} + Q_{\text{下}} = Q_0 \quad (4)$$

由 (1) (2) (3) (4) 式可得

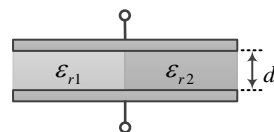
$$Q_{\text{上}} = \frac{C_{\text{上}}}{C_{\text{上}} + C_{\text{下}}} Q_0 = \frac{1}{\epsilon_r + 1} Q_0 = 0.5 \times 10^{-6} \text{C}$$

$$Q_{\text{下}} = \frac{C_{\text{下}}}{C_{\text{上}} + C_{\text{下}}} Q_0 = 1.5 \times 10^{-6} \text{C}$$

11.12 一个平行板电容器，极板面积为  $S$ ，板间距为  $d$ ，相对电容率分别为  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$  的两种电介质分别充满极板间空间的一半，如图所示。试求：

(1) 电容器充电后，两电介质所对的极板上自由电荷的面密度之比；

(2) 该电容器的电容。



测试题 11.12 图

**11.12 答案：**  $\epsilon_{r1}/\epsilon_{r2}$  ;  $\frac{\epsilon_0 S}{2d}(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})$

**解：** (1) 因为电容器充电后，两个极板都是等势体，所以该电容器左右两侧的电势差相等。由  $U = Ed$  可知，两种介质中的电场强度相等，即

$$E_1 = E_2$$

又由  $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$  可知，左右两侧电介质中电位移矢量的大小之比为

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

设极板上左右两侧的电荷面密度分别为  $\pm\sigma_1$  和  $\pm\sigma_2$ ，由高斯定理可得

$$D_1 = \sigma_1, \quad D_2 = \sigma_2$$

所以有

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

(2) 该电容器可看成是两个极板面积均为  $S/2$  的两个平行板电容器的并联，其中

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{2d}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{2d}$$

所以该电容器的电容为

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2d}(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})$$

11.13 一半径为  $R$ 、相对电容率为  $\varepsilon_r$  的均匀带电的介质球，带电量为  $Q$ ，球外为空气。试求：

(1) 带电球体内外的电势分布；

(2) 带电球体激发的电场能量。

**11.12 答案：** 球内：  $\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3}(R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 、球外：  $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ；  $\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

**解：** (1) 由于场强分布具有球对称性，作一个半径为  $r$  的同心球面为高斯面，由高斯定

理  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r^2 = \sum q_0$ ，以及  $E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ ，可得

当  $r < R$  时：  $\sum q_0 = \frac{Q}{R^3} r^3$ ，  $E_1 = \frac{Q r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3}$

当  $r > R$  时：  $\sum q_0 = Q$ ，  $E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

所以球内 ( $r < R$  时) 任意一点的电势为

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^R \frac{Q r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3} dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

球外 ( $r > R$ ) 任意一点的电势为

$$V_2 = \int_r^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(2) 因为介质球内外电场的能量密度分布为

球内：  $w_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E_1^2 = \frac{Q^2 r^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r R^6}$

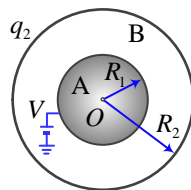
球外：  $w_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_2^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}$

取一个半径为  $r$ 、厚度为  $dr$  的同心薄球壳体积元  $dV = 4\pi r^2 dr$ ，于是电场能量为

$$W_e = \int_{\text{球内}} w_1 dV + \int_{\text{球外}} w_2 dV = \int_0^R \frac{Q^2 r^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r R^6} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0\epsilon_r R} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

11.14 如图所示, A 是一个半径为  $R_1$  导体球, B 是一个同心导体薄球壳, 半径为  $R_2$ 。已知导体球 A 的电势为  $V$ , 外球壳上的带电量为  $q_2$ 。试求:



测试题 11.14 图

- (1) 导体球 A 所带的电量  $q_1$ ;
- (2) 整个带电系统的电场能量 (用  $q_1$ 、 $q_2$  表示)。

**11.14 答案:**  $4\pi\epsilon_0 R_1 V - \frac{R_1}{R_2} q_2$ ;  $\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1^2}{R_1} + \frac{q_2^2}{R_2} + \frac{2q_1 q_2}{R_2} \right)$

**解:** (1) 设导体球 A 所带的电量为  $q_1$ , 根据均匀带电球面的电势分布规律和电势叠加原理, 可知导体球 A 的电势为

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

故

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V - \frac{R_1}{R_2} q_2$$

- (2) 由于系统具有球对称性, 由高斯定理以及导体的静电平衡条件, 可得

$$E_1 = 0 \quad (r < R_1)$$

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_2 < r < \infty)$$

取半径为  $r$ 、厚度为  $dr$  的同心薄球壳体积元  $dV = 4\pi r^2 dr$ , 可得带电体系的电势能为

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 4\pi r^2 dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_3^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1^2}{R_1} + \frac{q_2^2}{R_2} + \frac{2q_1 q_2}{R_2} \right) \end{aligned}$$

11.15 一个长直圆柱形电容器, 由半径为  $R_1$  的直导线和与它同轴的半径为  $R_2$  的导体薄圆桶组成, 其间充满了相对电容率为  $\epsilon_r$  的均匀电介质。假设沿轴线单位长度的导线上

带电量为 $+\lambda$ ，薄圆筒带电量为 $-\lambda$ 。略去电场的边缘效应，试求：

- (1) 电介质中 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{P}$ 的分布；
- (2) 介质表面的束缚电荷面密度 $\sigma'$ ；
- (3) 该电容器单位长度上的电容 $C$ ；
- (4) 电容器中沿轴线单位长度上的电场能量 $W_e$ 。

**11.15 答案：**  $\frac{\lambda}{2\pi r}\mathbf{e}_r$ 、 $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}\mathbf{e}_r$ 、 $\frac{(\epsilon_r-1)\lambda}{2\pi\epsilon_r r}\mathbf{e}_r$ ； $-\frac{(\epsilon_r-1)\lambda}{2\pi\epsilon_r R_1}$ 、 $\frac{(\epsilon_r-1)\lambda}{2\pi\epsilon_r R_2}$ ；

$$\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)}；\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

**解：**(1) 长直圆柱形电容器中的电场分布具有“无限长”的轴对称性，场强方向垂直于轴线沿径向向外。作一个半径为 $r$ ，长为 $l$ 的同轴闭合圆柱面为高斯面 $S$ ，由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r l = \lambda l，\text{得电介质中的电位移矢量为}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (R_1 < r < R_2)$$

式中 $\mathbf{e}_r$ 是从轴线到场点的径向单位矢量。所以介质中的电场强度和电极化强度矢量分别为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_r r} \mathbf{e}_r$$

(2) 在电介质的内表面( $r = R_1$ )上，极化电荷面密度为

$$\sigma'_1 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_r r} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_r R_1}$$

同理，在电介质的外表面( $r = R_2$ )上，极化电荷面密度为

$$\sigma'_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_r r} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_r = \frac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_r R_2}$$

(3) 因为电容器内外极板上的电势差为

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

所以沿轴线单位长度上的电容为

$$C' = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda \cdot 1}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

(4) 由电场的能量密度公式:  $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$ , 可得电容器内沿轴线单位长度上的电场能量为

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

或者由电容器的储能公式求电场能量, 即

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(\lambda \cdot 1)^2}{2C} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

**11.16** 一平行板电容器, 极板面积为  $S$ , 极板间的距离为  $d$ 。充电到两极板分别带电  $+q$  和  $-q$  后, 断开电源。然后将厚度为  $d$ 、相对电容率为  $\epsilon_r$  的电介质板插入电容器中, 试求插入过程中电场力所做的功。

**11.16 答案:**  $\frac{dq^2}{2S\epsilon_0} \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}$

**解:** 在未插入电介质板时, 电容器的电容为  $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ , 充电后电容器中的电场能量为

$$W_{e1} = \frac{q^2}{2C_0}$$

当插入电介质板后, 电容器的电容为  $C = \epsilon_r C_0$ 。由于插入过程中, 极板上电量保持不变, 所以插入后的电场能量为

$$W_{e2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_r C_0}$$

根据功能原理, 电场力所做的功为

$$A = W_{e1} - W_{e2} = \frac{q^2}{2C_0} - \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C_0} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) = \frac{dq^2}{2S\epsilon_0} \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}$$