武汉大学 2008—2009 学年第二学期《高等数学 B2》考试试题

（B 卷）

一、（18 分）1、将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开为？的幂级数；

2、指出该幂级数的收敛域；

3、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ 的和.

二、（18 分）设微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

1、 证明：若 $1+P(x)+Q(x)=0$ ，则方程有一特解 $y=e^x$；若 $P(x)+xQ(x)=0$ ，则方程有一特解 $y=x$。

2、根据上面的结论，求 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的通解和满足初始条件 $y(0)=2,\ y'(0)=1$ 的特解。

3、求 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 满足初始条件 $\lim_{x\to0}\frac{\ln[y(x)-1]}{x}=1$ 的特解。

三、（12 分）计算 $\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ ，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

四、（10 分）设 $z=f\left(x+y,\ xy\right)$，其中函数 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n!\frac{x^n}{n^n}$ 的收敛域（端点情形要讨论）.

六、（12 分）利用 Gauss（高斯）公式计算曲面积分

$\oiint_{\Sigma}(x^2y-z)\,dydz+(y^2z-x)\,dzdx+(z^2x-y)\,dxdy$,

七、（12 分）设 $\varphi(\pi)=1$，试确定函数 $\varphi(u)$，使得曲线积分 $\int_L \left[\sin x+\varphi(x)\right]\frac{y}{x}dx+\varphi(x)dy$

在 $x>0$ 或在 $x<0$ 的域内与路径无关，并求由点 $A(1,\ \ )$ 到 $B(\pi,\ \pi)$ 的上述积分 .

八、（8 分）判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1!)^2+(2!)^2+(3!)^2+\cdots+(n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性.

武汉大学 2008—2009 学年第二学期《高等数学 B2》考试试题参考解答

（B 卷）

一、（18 分） ⑴. 将 ? 展开为 ? 的幂级数；⑵. 指出该幂级数的收敛域；

⑶. 求级数 ? 的和.

解：1、因为 ? ?，且 ?，所以，

? ?

而

所以

2、幂级数 的收敛域为 .

3、令 ，则有

.

二、（18 分）设微分方程 （1）证明：若 $1+P(x)+Q(x)=0$，则方程有一特解 ；若 $P(x)+xQ(x)=0$，则方程有一特解 。(2) 根据上面的结论，求 的通解和满足初始条件 的特解。（3）求 满足初始条件 的特解。

解：1、直接验算即可

2、将微分方程变形为 因为 ，由（1）知 都是方程的特解，且 常数，故通解为 . 由初始条件得 ，故所求特解为

3、 的通解为 .

由 知， ,于是 . 从而

得 ， 故 所 求 特 解 为

三、（12 分）计算 ，其中 是由圆周 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

解：作极坐标变换 则有

四、（10 分）设 ，其中函数 具有二阶连续的偏导数，求 .

解： 所以，

五、（10 分）求幂级数 的收敛域（端点情形要讨论）.

解：设 ， 则 ，

所以，收敛半径为 ， 当 时，级数为

而

所以，? 因此，级数 ? 发散．同理，当 ? 时，级数 ? 也发散

所以幂级数 ? 的收敛区间为 ?

六、（12 分）利用 Gauss（高斯）公式计算曲面积分 ? ，

其中 ? 为球面 ? 的外侧.

解：? ，? ，?

所以，? 所以，由 Gauss 公式，得

?

?

其中 Ω 为空间区域 ? ……4

而 ? 的重心为 ? ，又设 ? 的体积为 ?，则

? ，? ，?

因此，? ?

? ? ?

七、（12 分）设 ? ，试确定函数 ? ，使得曲线积分 ?

在 ? 或在 ? 的域内与路径无关，并求由点 ? 到 ? 的上述积分．

解：因为 ? ，?

由于曲线积分 在 或在 的域内与路径无关，因此

所以得微分方程 解此方程，得通解 代入 ，得

所以，所求函数为

八、（8分）判别级数 的敛散性.

解：

而

所以，由比值判别法，知级数 收敛.

再由比较判别法知级数 收敛.