武汉大学 2023–2024 学年第二学期

《高等数学 A2》 期末试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 13 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

2. 请将答案全部写在**考试答题纸**上的对应题号区域, 写在其他位置无效.

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=1$, 求 $\big[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\big]\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 已知直线 $L_1:\begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 和 $L_2:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+8}{-1}$. 求直线 L_1 与 L_2 的夹角.

3. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 问该函数在点 $(0,0)$ 处的一阶偏导数及全微分是否存在, 并说明理由.

4. 设 $f(x,y)$ 是可微函数, 其定义域是 $\mathbb{R}^2$. 给定 4 个点 $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(4,4)$, $D(3,5)$. 若 $f(x,y)$ 在 A 点处沿 AB 方向的方向导数等于 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, 沿 AC 方向的方向导数等于 $\dfrac{11}{5}$.

   (1) 记函数 $f(x,y)$ 在点 A 处的梯度为 $\mathbf{grad}\, f=(a,b)$, 求 a, b.

   (2) 求 $f(x,y)$ 在 A 点处沿 AD 方向的方向导数.

5. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程.

6. 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$, 计算 $\displaystyle\iint_\Sigma\big(x+|y|+2|z|\big)\,\mathrm{d}S$.

7. 求 $I=\displaystyle\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $|x|\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$ 确定.

8. 计算

$$I=\oint_L\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $(z\geqslant 0)$, 从 z 轴正向往下看, L 的方向为逆时针方向.

9. 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n}+\frac{2^n}{n}\right)x^n$ 的和函数.

10. 将 $f(x)=x-1\ (0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数, 并由此求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

二、解答下列各题 (本题满分 30 分, 每小题 10 分)

11. 物质曲线 L 的形状由方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ \quad x+y+z=1\end{cases}$$

确定, 其线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$, 求该物质曲线的质量 m.

12. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转一周所围成的立体体积 V.

13. 要制造一个无盖的长方形容器, 已规定表面积为 S, 希望容积 V 最大, 问该容器的长、宽、高应是多少?

2023–2024 学年第二学期《高等数学 A2》参考答案 · 卷 (A)

1. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=1$, 求 $\big[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\big]\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

解:

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\ &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\ &= 2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2.\end{aligned}$$

2. 已知直线 $L_1:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3\end{cases}$ 和 $L_2:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+8}{-1}$. 求 L_1 与 L_2 的夹角.

解: 直线 L_1 的方向向量是

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(-1,-1,2).$$

直线 L_2 的方向向量是 $\boldsymbol{S}_2=(-1,2,-1)$, 从而直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2}{|\boldsymbol{S}_1|\cdot|\boldsymbol{S}_2|}\right|=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

因此 L_1 与 L_2 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

可能出现的错误解法: $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2}{|\boldsymbol{S}_1|\cdot|\boldsymbol{S}_2|}=-\dfrac{1}{2}$, 得 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

3. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 问该函数在点 $(0,0)$ 处的一阶偏导数及全微分是否存在, 并说明理由.

解: 由偏导数定义

$$\begin{aligned}f'_x(0,0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1,\\ f'_y(0,0)&=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1.\end{aligned}$$

故在点 $(0,0)$ 处两个偏导数都存在.

因

$$\begin{aligned}&f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y\\ =&\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-x+y=\frac{xy(x-y)}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ 沿直线 $y=kx$, 有

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot kx(x-kx)}{(x^2+k^2x^2)^{3/2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^3k(1-k)}{|x|^3\,(1+k^2)^{3/2}},$$

极限不存在, 故函数在点 $(0,0)$ 处不可微.

4. 设 $f(x,y)$ 是可微函数, 其定义域是 $\mathbb{R}^2$. 给定 4 个点 $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(4,4)$, $D(3,5)$. 若 $f(x,y)$ 在 A 点处沿 AB 方向的方向导数等于 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, 沿 AC 方向的方向导数等于 $\dfrac{11}{5}$.

(1) 记函数 $f(x,y)$ 在点 A 处的梯度为 $\mathbf{grad}\, f=(a,b)$, 求 a, b.

(2) 求 $f(x,y)$ 在 A 点处沿 AD 方向的方向导数.

解: (1) 由 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$, 与之同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_1=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$; 又 $\overrightarrow{AC}=(4,3)$, 与之同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_2=(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$. 由题设知

$$\begin{cases}(a,b)\cdot(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{4}{\sqrt{5}},\\ (a,b)\cdot(\frac{4}{5},\frac{3}{5})=\frac{11}{5}.\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}a+2b=4,\\ 4a+3b=11.\end{cases}$$

故 $a=2$, $b=1$.

(2) 由 $\overrightarrow{AD}=(3,4)$, 与之同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_3=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, 故所求方向导数为

$$(a,b)\cdot\boldsymbol{e}_3=2\cdot\frac{3}{5}+1\cdot\frac{4}{5}=2.$$

5. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程.

解: 记 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$, 有 $F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=6z$.
由题设知 $\dfrac{2x}{1}=\dfrac{4y}{4}=\dfrac{6z}{6}$, 即 $z=2x$, $y=2x$, 代回椭球面方程, 得 $x=\pm1$, $y=\pm2$, $z=\pm2$. 即切点的坐标为 $(1,2,2)$ 或 $(-1,-2,-2)$.
故切平面方程为 $1\cdot(x\pm1)+4\cdot(y\pm2)+6\cdot(z\pm2)=0$, 即满足条件的平面有两个: $x+4y+6z=21$, 和 $x+4y+6z=-21$.

6. 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$, 计算 $\displaystyle\iint_\Sigma\big(x+|y|+2|z|\big)\,\mathrm{d}S$.

解: 曲面 Σ 关于 yOz 面对称, x 是奇函数, 则

$$\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=0.$$

由轮换对称性, $\displaystyle\iint_\Sigma|x|\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma|y|\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma|z|\,\mathrm{d}S$, 故

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma(|y|+2|z|)\,\mathrm{d}S&=\iint_\Sigma(|x|+|y|+|z|)\,\mathrm{d}S\\&=\iint_\Sigma 1\,\mathrm{d}S=8\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}S\\&=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

其中 Σ_1 是 Σ 在第一卦限的部分. Σ_1 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形.
综上, $\displaystyle\iint_\Sigma\big(x+|y|+2|z|\big)\,\mathrm{d}S=4\sqrt{3}$.

7. 求 $I=\displaystyle\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $|x|\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant2$ 确定.

解: 用曲线 $y=x^2$ 将 D 分为 D_1, D_2.

$$\begin{aligned}I&=\iint_{D_1}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

8. 计算 $I=\oint_L\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $(z\geqslant 0)$, 从 z 轴正向往下看, L 的方向为逆时针方向.

解: 记 Σ 为曲线 L 所围球面部分的外侧. 则 Σ 与 L 的方向符合右手法则. 由斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\y^2+z^2&z^2+x^2&x^2+y^2\end{vmatrix}\\&=2\iint_\Sigma(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint_\Sigma\left[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是球面上点 (x,y,z) 处指向外侧的单位法向量. 由球面方程知指向外侧法向量为 $(x-2,y,z)$, 将其单位化则有 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{x-2}{2},\dfrac{y}{2},\dfrac{z}{2}\right)$, 从而

$$\begin{aligned}I&=2\iint_\Sigma\left[\frac{x-2}{2}(y-z)+\frac{y}{2}(z-x)+\frac{z}{2}(x-y)\right]\mathrm{d}S\\&=2\iint_\Sigma(z-y)\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

由于曲面 Σ 关于 xOz 坐标面对称, 被积函数关于 y 是奇函数, 得 $\iint_\Sigma y\,\mathrm{d}S=0$. 故

$$I=2\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S=2\iint_D\frac{z}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\pi,$$

其中 D 是曲面 Σ 在 xOy 坐标面上的投影区域: $x^2+y^2\leqslant 2x$.

9. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{2^n}{n}\right)x^n$ 的和函数.

解: (1) 等比级数两边求导, 有

$$\begin{aligned}1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots&=\frac{1}{1-x},\qquad x\in(-1,1),\\1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots&=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1),\end{aligned}$$

两边乘以 x, 得

$$x+2x^2+\cdots+nx^n+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2},\qquad x\in(-1,1),$$

上式在 $x=\pm1$ 时发散. 将上式中 x 替换为 $\frac{x}{2}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n=\frac{\frac{x}{2}}{(1-\frac{x}{2})^2}=\frac{2x}{(2-x)^2},\qquad x\in(-2,2).$$

(2) 等比级数两边在 $[0,x]$ 上积分:

$$1+x+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x},\qquad x\in(-1,1),$$

$$x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n}x^n+\cdots=-\ln(1-x),\quad x\in[-1,1),$$

上式在 $x=-1$ 时收敛, 在 $x=1$ 时发散. 将上式中 x 替换为 $2x$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n=-\ln(1-2x),\quad 2x\in[-1,1),\quad 即\ \ x\in[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}).$$

综上得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n}+\frac{2^n}{n}\right)x^n=\frac{2x}{(2-x)^2}-\ln(1-2x),\qquad x\in[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}).$$

10. 将 $f(x)=x-1\ (0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数, 并由此求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

解:

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}x=0,\\
a_n&=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\ \mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}\sin\frac{n\pi x}{2}\\
&=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}\big[(-1)^n-1\big]\\
&=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\end{cases}\qquad(k=1,2,\cdots)
\end{aligned}$$

所以 $f(x)=-\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$, $x\in[0,2]$.

取 $x=2$, 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

11. 物质曲线 L 的形状由方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ \quad x+y+z=1\end{cases}$$

确定, 其线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$, 求该物质曲线的质量 m.

解: 由第一类曲线积分的物理意义知

$$m=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s,$$

由轮换对称性

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L\mathrm{d}s.$$

注意到原点到 $x+y+z=1$ 的距离为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 故 L 的半径为 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, 其周长为 $2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

故质量 $m=\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

12. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转一周所围成的立体体积 V.

解: 取极轴为 z 轴, 在球坐标系下旋转面方程为 $\rho=a(1+\cos\varphi)$. 故立体 V:

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant a(1+\cos\varphi).$$

因此

$$\begin{aligned}V&=\iiint_V \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}\rho^2\ \mathrm{d}\rho\\&=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

13. 要制造一个无盖的长方形容器, 已规定表面积为 S, 希望容积 V 最大, 问该容器的长、宽、高应是多少?

解: 设长、宽、高分别为 x,y,z. 即求函数 $f=xyz$ 在约束条件 $xy+2xz+2yz=S$ 下的最值.

构造 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(S-xy-2xz-2yz)$, 得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=yz-\lambda y-2z\lambda=0,\\\dfrac{\partial L}{\partial y}=xz-\lambda x-2z\lambda=0,\\\dfrac{\partial L}{\partial z}=xy-2x\lambda-2y\lambda=0,\\\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=S-xy-2xz-2yz=0.\end{cases}$$

将上述方程组的第一个方程乘以 x, 第二个方程乘以 y, 第三个方程乘以 z, 再两两相减得:

$$\begin{cases}\quad 2yz-2xz=0,\\\lambda xy-2\lambda yz=0,\\\lambda xy-2\lambda xz=0.\end{cases}$$

解得 $x=y=2z$, 代入第四个方程得 $z=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{3}}$, $x=y=\sqrt{\dfrac{S}{3}}$.