第 3 章 运动的守恒定律

一、知识点网络框图

- 运动的守恒定律
  - 功与能 机械能守恒定律
    - 功：$A=\int_{ab}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 功率：$P=\mathrm{d}A/\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$
    - 质点的动能定理：$A_{合外力}=E_k-E_{k0}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$
    - 常见保守力的功及势能
      - 重力的功：$A_{ab}=mgh_a-mgh_b$ 重力势能：$E_p=mgh$
      - 弹性力的功：$A_{ab}=\frac{1}{2}kx_a^2-\frac{1}{2}kx_b^2$ 弹性势能：$E_p=\frac{1}{2}kx^2$
      - 万有引力的功：$A_{ab}=\left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)$ 万有引力势能：$E_p=-G\frac{Mm}{r}$
    - 质点系
      - 动能定理：$A_{外力}+A_{内力}=\sum_i\frac{1}{2}mv_i^2-\sum_i\frac{1}{2}mv_{i0}^2$
      - 功能原理：$A_{外力}+A_{非保守内力}=\left(E_k+E_p\right)-\left(E_{k0}+E_{p0}\right)$
      - 机械能守恒定律：若 $A_{外力}+A_{非保守内力}=0$，则 $\left(E_k+E_p\right)=$ 常量
  - 动量与冲量 动量守恒定律
    - 冲量：$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}t$ 动量：$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$ 质点的动量定理：$\boldsymbol{I}=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1$
    - 质点系的动量定理：$\boldsymbol{I}_{合外力}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{合外}\cdot\mathrm{d}t=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_{i2}-\sum_i m_i\boldsymbol{v}_{i1}$
    - 动量守恒定律：若 $\boldsymbol{F}_{合外}=0$，则 $\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=$ 常量
    - 碰撞——无论正碰、斜碰、弹性或非弹性，碰撞过程系统动量守恒
  - 角动量及其守恒定律
    - 角动量：$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ 力矩：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 冲量矩：$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}t$
    - 角动量定理：$\boldsymbol{M}_{合外}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ 或 $\boldsymbol{M}_{合外}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{L}$，$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}_{合外}\mathrm{d}t=\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1$
    - 角动量守恒定律：若 $\boldsymbol{M}_{合外}=0$，则 $\boldsymbol{L}=$ 恒矢量

二、基本要求

1．掌握功与功率、动能与势能的概念，熟练掌握变力做功的计算方法；

2．正确理解质点和质点系的动能定理、功能原理和机械能守恒定律，并能熟练地求解相关习题；

3．熟练掌握动量与冲量的概念，掌握变力冲量的计算方法，正确理解动量定理和动量守恒定律，并能熟练求解相关习题；

4．掌握碰撞类问题的一般处理方法，熟练掌握完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞的规律；

5．正确理解力矩、冲量矩和角动量的概念，理解质点和质点系的角动量定理和角动量守恒定律，并能熟练地求解相关习题；

6. 理解质心的概念和质心运动定律。

三、主要内容

（一）功与功率 质点的动能定理

1．功的计算

若有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用在质点上，当质点发生元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 对质点做的元功为

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F\cos\alpha\left|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right|$$

当质点从 a 点沿某路径 L 运动到 b 点时，力 $\boldsymbol{F}$ 对质点做的总功为

$$A=\int\mathrm{d}A=\int_{a(L)}^{b}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{a(L)}^{b}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

一般情况下，上述积分（即力做的功）不仅与物体所在的起点和终点位置有关，还与物体所经过的具体路径有关。

2．功率 P

功率是用于描述力做功快慢程度的物理量，其定义为

$$P=\mathrm{d}A/\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=Fv\cos\alpha$$

3．质点的动能定理

作用于质点上的合外力对质点做的功等于质点动能的增量，即

$$A = E_{kb} - E_{ka} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

式中的 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$，称为质点的**动能。**

（二）保守力与非保守力　势能

1．保守力与非保守力

如果某力做功只与物体的始末位置有关，而与物体所经过的具体路径无关，则这样的力称为保守力，否则称为非保守力。力学中常见的保守力有重力、万有引力和弹性力，此外电学里的静电力也是保守力。摩擦力、流体的粘滞阻力等是非保守力。

2．势能

在保守力场中，由发生保守力作用的两个物体之间的相对位置所决定的能量称为**势能**，符号为 E_p。若物体在保守力场中从 a 点沿任意路径运动到 b 点，则**保守力对物体所做的功等于系统势能的减少量**，即

$$\int_a^b \boldsymbol{F}_{保守} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = E_{pa} - E_{pb}$$

式中：E_{pa} 和 E_{pb} 分别是物体在 a 点和 b 点时系统具有的势能。

注意：势能的大小具有相对性，零势能点的位置可以任意选定。若以 b 点为零势能点，则物体在 a 点时系统具有的势能为

$$E_{pa} = \int_a^b \boldsymbol{F}_{保守} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

3．三种保守力的功及其势能

重力的功：$A_{ab} = mgh_a - mgh_b$　　　　重力势能：$E_p = mgh$

万有引力的功：$A_{ab} = \left(-G\frac{Mm}{r_a}\right) - \left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)$　　　　引力势能：$E_p = -G\frac{Mm}{r}$

弹性力的功：$A_{ab} = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2$　　　　弹性势能：$E_p = \frac{1}{2}kx^2$

（三）质点系的动能定理、功能原理和机械能守恒定律

1．质点系的动能定理

作用于质点系上所有的外力和内力对质点系做的总功等于系统总动能的增量，即

$$\sum_i A_{i\,外力} + \sum_i A_{i\,内力} = \sum_i \Delta E_{ik} = \sum_i E_{ik} - \sum_i E_{ik_0}$$

2．质点系的功能原理

作用于质点系上所有的外力和非保守内力做的总功等于系统机械能的增量，即

$$A_{外力} + A_{非保守内力} = E - E_0 = \left(E_k + E_p\right) - \left(E_{k0} + E_{p0}\right)$$

式中 $E = E_k + E_p$ 称为系统的机械能。

3．机械能守恒定律

在一个力学过程中，如果作用于质点系上所有的外力和非保守内力均不做功，或做的总功为零，则系统的机械能守恒，即

$$如果\quad A_{外力} + A_{非保守内力} = 0 \quad ，\quad 则\quad E_k + E_p = 恒量$$

（四）动量与冲量 质点（系）的动量定理 动量守恒定律

1．动量与冲量

动量：物体的质量与其速度的乘积称为物体的动量，用 $\boldsymbol{P}$ 表示，即

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} = mv_x\boldsymbol{i} + mv_y\boldsymbol{j} + mv_z\boldsymbol{k}$$

冲量：冲量是描述力对时间的积累作用的物理量。力 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $\mathrm{d}t$ 时间内的元冲量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = F_x(t)\mathrm{d}t\ \boldsymbol{i} + F_y(t)\mathrm{d}t\ \boldsymbol{j} + F_z(t)\mathrm{d}t\ \boldsymbol{k}$$

力 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $t_1 \to t_2$ 时间内的冲量为

$$\boldsymbol{I} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{2} F_x(t)\mathrm{d}t\ \boldsymbol{i} + F_y(t)\mathrm{d}t\ \boldsymbol{j} + F_z(t)\mathrm{d}t\ \boldsymbol{k}$$

平均冲力：在打击、碰撞类问题中，物体间的相互作用力 $\boldsymbol{F}(t)$ 的数值很大、作用时间很短、变化极快，这种力称为冲击力，常用平均冲力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 来表示冲击力的大小，其定义为

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$$

2．质点或质点系的动量定理

作用于质点或质点系上合外力的冲量等于质点或质点系的总动量的增量，即

$$\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{P} \qquad 或 \qquad \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1$$

质点系的动量定理表明，系统的内力不会改变系统的总动量，内力的作用只能使系统

的动量从系统内的一个物体转移到另一个物体上。

3．质点或质点系的动量守恒定律

如果一个质点或系统不受外力作用，或所受的合外力为 0，则该质点或系统的总动量恒定不变，即

$$若\ \sum_i \boldsymbol{F}_{外i}=0\ \ ，则\ \ \boldsymbol{P}=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=恒矢量$$

应用动量守恒定律的注意事项：

（1） 动量守恒定律仅在惯性系中成立；

（2） 当合外力不等于零时，系统的总动量不守恒。但如果在某个方向上，合外力的分量为零，则系统的总动量在该方向上的分量守恒。

（3） 当系统受合外力为零时，系统的总动量守恒，但内力的作用可以使系统的动量从系统内部的一个物体转移到另一个物体上；

（4） 在打击、碰撞、炸弹在空中的爆炸等过程中，内力的作用时间极为短暂、且内力远远大于外力（如重力、摩擦力等），则外力的冲量可以忽略不计，可近视认为在这些过程中系统的动量守恒。

（五）质点或质点系的角动量、角动量定理和角动量守恒定律

1．质点和质点系的角动量

若在某一时刻，从参考点 O 到质点的矢径为 $\boldsymbol{r}$，质点的动量为 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$，则该质点对参考点 O 的角动量为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x & y & z\\ mv_x & mv_y & mv_z\end{vmatrix}$$

其大小为 $L=rP\sin\theta=rmv\sin\theta$，方向垂直于 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 组成的平面，且与 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 成右手螺旋关系。

质点系中所有质点对同一参考点的角动量的矢量和称为质点系的总角动量，即

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{P}_i=\sum \boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$$

2．力矩　冲量矩

若从参考点 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，则该力对参考点 O 的力矩为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

其大小为$M=Fr\sin\theta=Fd$，式中$d=r\sin\theta$是参考点O到力的作用线的垂直距离，称为力臂，力矩的方向垂直于$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{F}$组成的平面，且与$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$成右手螺旋关系，如图 3.1 所示。

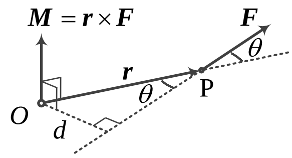


图3.1 力矩

力矩对时间的积累作用$\boldsymbol{M}_{合外}\mathrm{d}t$或$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{M}_{合外}\mathrm{d}t$称为冲量矩。

3．质点或质点系的角动量定理

作用于质点或质点系上的合外力矩的冲量矩等于质点或质点系的角动量的增量，即

$$\boldsymbol{M}_{合外}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{L} \qquad 或 \qquad \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{M}_{合外}\mathrm{d}t=\int_{L_0}^{L}\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}_0$$

系统的角动量定理表明：只有系统的合外力矩才能改变系统的总角动量。

4．质点（系）的角动量守恒定律

在某个过程中，若作用于质点或质点系的合外力矩为零，则质点或质点系的总角动量恒定不变，即

$$若 \quad \boldsymbol{M}_{合外}=0 \quad ， \quad 则 \quad \boldsymbol{L}=恒矢量$$

推论：当质点仅在有心力作用下运动时，因$\boldsymbol{M}=0$，质点对该“心”的角动量守恒。

（六）质心 质心运动定律

1、质心

质心是物体的质量中心，是物体的质量集中于此的一个假想点。质心的位置矢量可由下式计算

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+\cdots+m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{m} \qquad ①$$

或

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\int\boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\int\boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{m} \qquad ②$$

其中：m代表系统的总质量，①式适用于由n个质点组成的质点系，②式适用于质量连续分布的物体。

2、质心运动定律

质心的运动，就如同一个质点的运动，该质点的质量等于整个质点系的质量，并且集中在质心；而此质点所受的力是系统内各质点所受的所有外力的矢量和，即

$$\sum_i \boldsymbol{F}_{i外} = m\boldsymbol{a}_C$$

式中 $\boldsymbol{a}_C$ 是质心的加速度。质心运动定理表明，系统的内力不会影响质心的运动状态。若系统所受外力的矢量和为零，则质心将保持静止或作匀速直线运动。

四、典型例题解法指导

本章习题的类型主要有：1、变力做功的计算；2、动能定理、功能原理、机械能守恒定律的应用；3、变力的冲量的计算、动量定理、动量守恒定律的应用；4、角动量定理和角动量守恒定律的应用；5、三种守恒定律的综合应用等等。

例 3.1 如图 3.2 所示，在高出地面为 h 的墙头，用一根不可伸长的绳通过一个轻质滑轮将置于地面上的重物拉向墙边。假设重物的质量为 m，重物与地面的滑动摩擦系数为 μ，拉力 F 的大小恒定不变，开始时重物离墙边的距离为 L_0，轮轴上的摩擦可以忽略不计，不计重物和滑轮高度的影响。当重物离墙边的距离从 L_0 减小为 $L_0/2$ 时，试求：

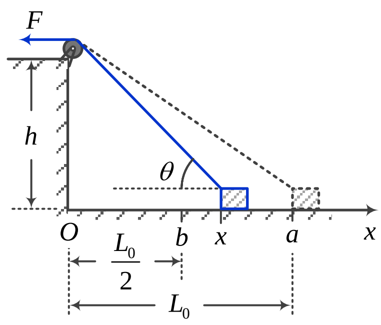


图 3.2 例 3.1 图

（1）摩擦力做的功；

（2）拉力 F 对物体做的功；

分析：本题中尽管拉力 F 的大小恒定不变，但是该拉力在物体运动方向上的分力以及地面对物体的摩擦力都随重物的位置而变，所以要用变力做功来求解

解：（1）以墙角为坐标原点，建立坐标如图 3.2 所示。当物体离墙边的距离为 x 时，物体受力如图 3.2 所示。因

$$F_N = mg - F\sin\theta = mg - \frac{Fh}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

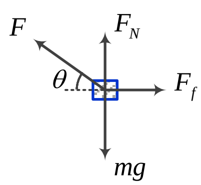


图 3.2 例 3.1 解图

所以重物受到的摩擦力为

$$F_f = \mu F_N = \mu mg - \frac{\mu Fh}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

当物体从 x 移动到 $x+\mathrm{d}x$ 时，摩擦力做的元功为

$$\mathrm{d}A_f=\boldsymbol{F}_f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F_f\mathrm{d}x=\left(\mu mg-\frac{\mu Fh}{\sqrt{h^2+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

所以，当重物离墙边的距离从 L_0 减小为 $L_0/2$ 时，摩擦力做的总功为

$$A_f=\int\mathrm{d}A_f=\int_{L_0}^{L_0/2}\left(\mu mg-\frac{\mu Fh}{\sqrt{h^2+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\mu mgL_0}{2}+\mu Fh\ln\frac{2\left(L_0+\sqrt{L_0^2+h^2}\right)}{L_0+\sqrt{L_0^2+4h^2}}$$

（2）当物体从 x 移动到 $x+\mathrm{d}x$ 时，因 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}=-F\cos\theta\boldsymbol{i}+F\sin\theta\boldsymbol{j}$ ，所以拉力 $\boldsymbol{F}$ 对物体做的元功为

$$\mathrm{d}A_F=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-F\cos\theta\mathrm{d}x=-F\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\mathrm{d}x$$

所以整个过程中拉力对物体做的总功为

$$A_F=\int\mathrm{d}A_F=\int_{L_0}^{L_0/2}-F\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\mathrm{d}x=F\left(\sqrt{L_0^2+h^2}-\sqrt{\frac{L_0^2}{4}+h^2}\right)$$

这个结果表明：由于拉力是恒力，所以拉力对物体做的功就等于作用于绳端的拉力与绳端在拉力方向上移动距离的乘积。

例 3.2 如图 3.5 所示，一个表面光滑、半径为 R 的固定半圆柱和一个质量为 m 与劲度系数为 k 的弹簧相连的物体相接触。开始时物体 m 处于 a 处，此时弹簧无伸缩。在与半圆柱面始终相切的拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，使物体在半圆柱面上匀速、且缓慢地由 a 移动到 b 。试求拉力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功。

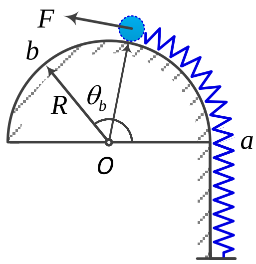


图 3.5 例 3.2 图

分析： 本题有两种求解方法，一种是利用功的定义，用变力做功的方法求解；另一种方法是利用系统的功能原理来求解。

解法一： 利用功的定义求解

假设在时刻 t，物体被缓慢地拉到了圆柱面上的某一点 c，且 $\angle cOa=\theta$，此时物体受力如图 3.4 所示。由于物体在圆柱面上匀速运动，故其受到的切向力的合力始终为 0，即物体在 c 点时有

$$F - mg\cos\theta - F_T = 0$$

式中 $F_T = k \cdot R\theta$ 是弹簧作用于物体上的弹性力，所以拉力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$F = mg\cos\theta + k \cdot R\theta$$

当物体在 c 处沿切线方向产生 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = R\mathrm{d}\theta \boldsymbol{e}_\tau$ 位移时，拉力 $\boldsymbol{F}$ 做的元功为

$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = F\mathrm{d}l = \left(mg\cos\theta + kR\theta\right)R\mathrm{d}\theta$$

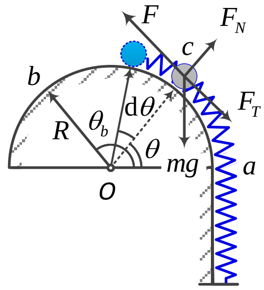


图 3.4 例 3.2 解图

所以，物体从 a 运动到 b 时，拉力做的总功为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^{\theta_b} \left(mg\cos\theta + kR\theta\right)R\mathrm{d}\theta = mgR\sin\theta_b + \frac{1}{2}kR^2\theta_b^2$$

解法二：利用系统的功能原理求解

以物体、弹簧和地球为研究对象，物体受到拉力 $\boldsymbol{F}$ 、支撑力 $\boldsymbol{F_N}$ 、弹性力 $\boldsymbol{F_T}$ 和重力 $m\boldsymbol{g}$ 作用。其中支撑力 $\boldsymbol{N}$ 不做功，弹力和重力为系统的保守内力。取 a 点为重力势能和弹性势能的零势能点，则物体在 a 、 b 两点时系统的机械能为

$$E_a = 0 \quad , \quad E_b = mgR\sin\theta_b + \frac{1}{2}k\left(R\theta_b\right)^2$$

所以由系统的功能原理，拉力 $\boldsymbol{F}$ 对物体做的功为

$$A = E_b - E_a = mgR\sin\theta_b + \frac{1}{2}k\left(R\theta_b\right)^2$$

例 3.3 一个质量为 m 的物体沿 x 轴作直线运动。其速度随时间的函数关系为 $v = bt^2$ ，式中 b 为常数。已知 $t = 0$ 时，质点位于坐标原点。质点运动时受到的阻力为： $F_f = -kv$ ，式中比例系数 k 为常量。试求：

（1）在 0 到 t 时间内，阻力对物体做的功；

（2）在 0 到 t 时间内，作用于物体上的合外力对物体做的功。

解：（1）由题意可知， $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = bt^2$ ，物体在 x 轴上从 x 运动到 $x + \mathrm{d}x$ 时，阻力对物体作的元功为

$$\mathrm{d}A_f = F_f\mathrm{d}x = -kv\mathrm{d}x = -kbt^2bt^2\mathrm{d}t = -kb^2t^4\mathrm{d}t$$

所以在 0 到 t 时间内，阻力对物体做的功为

$$A_f=\int \mathrm{d}A_f=\int_0^t -kb^2t^4\mathrm{d}t=-\frac{kb^2}{5}t^5\text{(SI)}$$

（2）方法一： 由变力做功来求

由牛顿第二运动定律，作用于物体上的合外力为

$$F=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2mbt$$

方向沿 x 轴正方向，所以合外力对物体做的功为

$$A=\int \mathrm{d}A=\int F\mathrm{d}x=\int_0^t 2mbt\cdot bt^2\mathrm{d}t=\frac{mb^2}{2}t^4\text{(SI)}$$

方法二： 由质点的动能定理求

由质点的动能定律，在 0 到 t 时间内合外力做的功为

$$A=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mb^2t^4$$

例 3.4 如图 3.6 所示，一根长为 L，质量 m 的匀质软绳盘在水平桌面上，现用力将绳的一端以匀速 v 竖直向上提起。试求：当提起的绳长为 l（$l<L$）时拉力的大小。

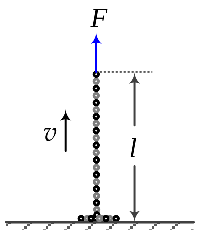


图 3.5 例 3.4 的图

分析： 本题可用质点或质点系的动量定理来求解，有两种方法。方法一是将整个软绳分三部分来讨论，方法二是将软绳作为一个整体来讨论。

解：方法一 将软绳分为三部分来讨论，一是在 t 时刻已经被提起来的长为 l 的部分，这部分在拉力和重力作用下匀速向上运动，其所受拉力为 $F_1=\frac{l}{L}mg$；二是在 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 被拉起的长为 $\mathrm{d}l$ 的部分；三是尚未拉到的部分。

假设作用于第二部分的拉力为 F_2，其质量为 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l=\frac{m}{L}v\mathrm{d}t$，以竖直向上作为正方向，由质点的动量定理有

$$\left(F_2-\mathrm{d}m\cdot g\right)\mathrm{d}t=\mathrm{d}P=\mathrm{d}m\left(v-0\right)=v\mathrm{d}m$$

将 $\mathrm{d}m=\frac{m}{L}v\mathrm{d}t$ 代入上式，并忽略二阶无穷小量可得

$$F_2=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{m}{L}v^2$$

所以总的拉力为

$$F = F_1 + F_2 = \frac{l}{L}mg + \frac{m}{L}v^2$$

方法二 将整个链条作为一个整体。由题意可知，在t时刻，被提起部分的长度为$l = vt$，链条所受的外力有重力$mg\downarrow$，拉力$F\uparrow$，桌面的支撑力$F_N = \frac{L-l}{L}mg\uparrow$，整个链条在$t$时刻的动量为$P = \frac{l}{L}mv\uparrow$，以向上为正方向，由质点系的动量定理，可得

$$F + F_N - mg = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{l}{L}mv\right) = \frac{m}{L}v^2$$

由此得拉力为

$$F = mg - F_N + \frac{m}{L}v^2 = \frac{l}{L}mg + \frac{m}{L}v^2$$

例 3.5 如图 3.7 所示，一个劲度系数为k的弹簧竖直悬挂，在弹簧的下端，吊着一个质量为$m_木$的木块，整个系统处于平衡状态。另一个质量为m（$m < m_木$）的小球自下向上以速度v_0撞击木块。若碰撞是完全弹性的，试求碰后木块的最大位移。

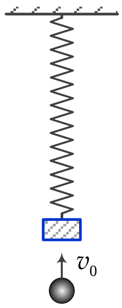


图 3.6 例 3.5 图

分析：此题的物理过程可分为两个过程：一是碰撞过程，另一个是碰后木块到达最大位移x_{max}的过程。在完全弹性碰撞过程中系统的动量守恒，动能也守恒；在碰后物体到达最大位移x_{max}的过程中，系统的机械能守恒。

解： 以竖直向上为正方向，设碰撞后物体和粒子的速度分别为：V和v。在完全弹性碰撞过程中，小球和物体组成的系统动量守恒，同时动能守恒，故有

$$mv_0 = mv + m_木 v_木$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_木 v_木^2$$

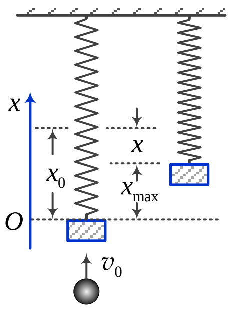


图 3.7 例 3.5 解图

由此解得

$$v_{木} = \frac{2m}{m_{木} + m} v_0 \qquad\qquad v = -\frac{m_{木} - m}{m_{木} + m} v_0$$

由于 $m < m_{木}$，所以 $v < 0$。这表明碰撞后木块向上运动，小球向下运动。

在木块被碰撞后向上运动到达最大位移 $x_{\max}$ 的过程中，由于木块只受弹力和重力作用，若以木块、弹簧和地球为一个系统，则此过程中系统的机械能守恒。将弹簧挂上木块后的平衡位置取为 x 轴的坐标原点，如图 3.8 所示，并设该处为重力势能的零点，则碰后系统的初始机械能为

$$E_0 = \frac{1}{2} m_{木} v_{木}^2 + \frac{1}{2} k x_0^2$$

式中 x_0 是木块处于平衡位置时弹簧的伸长量，满足：$k x_0 = m_{木} g$

当木块到达最大位移 $x_{\max}$ 时，弹簧的伸长量减小为 $x = x_0 - x_{\max}$，速度为 0，系统的机械能为

$$E = \frac{1}{2} k \left(x_0 - x_{\max} \right)^2 + m_{木} g x_{\max}$$

由机械能守恒有：$E = E_0$，即

$$\frac{1}{2} k \left(x_0 - x_{\max} \right)^2 + m_{木} g x_{\max} = \frac{1}{2} m_{木} v_{木}^2 + \frac{1}{2} k x_0^2$$

将 $v_{木} = \dfrac{2m}{m_{木} + m} v_0$ 代入上式，并注意到 $k x_0 = m_{木} g$，解此方程可得木块的最大位移为

$$x_{\max} = \frac{2 m v_0}{m_{木} + m} \sqrt{\frac{m_{木}}{k}}$$

例 3.6 火箭飞行时，火箭内部的燃料发生爆炸性燃烧，产生大量的气体从火箭尾部相对于火箭以恒定的速度 u 向后喷出，如图 3.9 所示。假设在 t 时刻，质量为 M 的火箭（含剩余燃料），相对于某惯性系的速度为 v，单位时间内从火箭尾部喷出的气体质量为 α，沿飞行方向火箭受到的外力为 F。

（1）求火箭运动的微分方程；

（2）若火箭从地球表面从静止开始竖直向上发射，其初始质量为 M_0，忽略空气阻力，重力加速度 g 为常量，求火箭发射后

图 3.9 长征 9 号运载火箭

飞行速度与时间的函数关系 $v(t)$；

（3）若火箭在星际空间飞行，相对于某惯性系的初始速度为V_0，质量为M_0，燃料耗尽时的质量为M。求火箭的末速度V。

分析：火箭飞行问题是典型的变质量系统的动力学问题。对此类问题的求解，关键在于灵活应用动量定理及动量守恒定律。

解：（1）以火箭及其喷出的气体为一个系统，火箭的飞行方向作为运动的正方向。在t时刻，系统的动量为

$$P(t)=Mv$$

在$t+\mathrm{d}t$时刻，火箭的质量和速度分别为$M-\mathrm{d}m$和$v+\mathrm{d}v$，在$\mathrm{d}t$时间内喷出的气体的质量为$\mathrm{d}m$，相对惯性系的速度为$v-u$，故在$t+\mathrm{d}t$时刻系统的动量为

$$P(t+\mathrm{d}t)=(M-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m(v-u)$$

根据动量定理有

$$P(t+\mathrm{d}t)-P(t)=(M-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m(v-u)-Mv=F\mathrm{d}t$$

即

$$M\mathrm{d}v-\mathrm{d}m\mathrm{d}v-\mathrm{d}mu=F\mathrm{d}t$$

忽略二阶无穷小量可得

$$F=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-u\alpha \qquad ①$$

式中$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$就是火箭所获得的加速度，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\alpha$是火箭在单位时间内向后喷出的气体质量，它等于火箭在单位时间内减少的质量，即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \qquad ②$$

将②式代入①并整理得

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F-u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \qquad ③$$

此式即为**火箭运动的微分方程**。它表明火箭的加速度由$F-u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$决定，$-u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$称为火箭发动机的推力。在外力$F$一定时，气体向后喷出的速率越大、单位时间内喷出的气体质量

$\alpha = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(= -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right)$越大，则火箭发动机的推力越大，火箭的加速度越大。

（2）若火箭从地球表面竖直向上发射，在忽略空气阻力的条件下，火箭只受重力的作用，由③得

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Mg - u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

又由题意可知，$M = M_0 - \alpha t$，将之代入上式并整理可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{u\alpha}{M_0 - \alpha t}$$

对上式分离变量并取定积分，有

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \left[-g + \frac{\alpha u}{M_0 - \alpha t}\right]\mathrm{d}t$$

所以火箭在任意时刻的飞行速度为

$$v(t) = -gt + u\ln\frac{M_0}{M_0 - \alpha t}$$

（3）当火箭在星系空间中飞行时，系统所受的合外力为零，即$F = 0$。由③得

$$\mathrm{d}v = -\frac{u}{M}\mathrm{d}M$$

对上式两边同时积分，有

$$\int_{V_0}^V \mathrm{d}v = \int_{M_0}^M -\frac{u}{M}\mathrm{d}M$$

由此解得火箭的飞行速度为

$$V = V_0 + u\ln\frac{M_0}{M}$$

式中M_0/M为火箭的质量比。

现代火箭的喷气速率理论上可达$5000\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，但实际速率最大不到理论值的一半。若火箭的质量比为3，初始速度为$3000\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，喷出气体的速率为$2500\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，则该火箭可达到的末速度$5746\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$。由于单级火箭的质量比不可能做的很大，因此要将人造卫星送入预定轨道，必须采取多级火箭。

例 3.7 一架喷气式飞机的巡航速度为$960\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$，飞机引擎每秒从飞机前方吸入

$100\,\mathrm{kg}$ 的气体，然后与 $0.6\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ 的航空煤油混合燃烧，燃烧后的气体相对于飞机以 $700\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度向后喷出。试求：该喷气式飞机获得的推力。

分析：喷气式飞机发动机的工作原理和火箭发动机的工作原理有所不同，所以他们的推力来源也不同，但都属于变质量系统的动力学问题，都可以用动量定理或动量守恒定律求解。

解：假设在 t 时刻，飞机的质量（含燃料）为 M，巡航速度为 v。在 $\mathrm{d}t$ 时间内飞机吸入空气的质量为 $\mathrm{d}m'$，消耗的燃油质量为 $\mathrm{d}m$，燃烧后向后喷出的气体相对于飞机的速度为 u。在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，飞机的速度为 $v+\mathrm{d}v$，将飞机（含燃料）和吸进的空气作为一个系统，以飞机的飞行方向为正方向，由动量守恒定律，有

$$Mv=\left(M-\mathrm{d}m\right)\left(v+\mathrm{d}v\right)+\left(\mathrm{d}m+\mathrm{d}m'\right)\left(v+\mathrm{d}v-u\right)$$

整理，并忽略二阶无穷小量，可得

$$M\mathrm{d}v=u\left(\mathrm{d}m+\mathrm{d}m'\right)-v\mathrm{d}m'$$

对于飞机而言，由牛顿第二定律，它所获得的推力为

$$F=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}\right)-v\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}$$

由题意可知，$u=700\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$v=960\mathrm{km\cdot h^{-1}}=267\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0.6\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$，$\dfrac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}=100\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$。代入上式可得飞机获得的推力为

$$F=700\times\left(0.6+100\right)-267\times100=4.37\times10^{4}\text{（N）}$$

据公开报道，我国歼 11 的空重 16.4 吨，最大起飞重量 33 吨，内载燃油 9 吨，使用两台 WS-10A 涡扇发动机，最大飞行速度 2.35 马赫（高空），航程为 4000km，作战半径 1500km。当发动机的耗油率为 $1.667\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ 时，可产生推力 $8.637\times10^{4}\,\mathrm{N}$。另：航空煤油的燃烧值约为 $4.2\times10^{7}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$，充分燃烧时气体的温度最高可达 1100℃。

四、自我测试题

3.1　一质点在力 $F=3x^2+2$ (SI) 的作用下沿 x 轴做直线运动，当质点从 $x_1=1.0\mathrm{m}$ 运动到 $x_2=3.0\mathrm{m}$ 米的过程中，该拉力做的功为（　　　　）

（A） 28J　　　（B） 30J　　　（C） 34J　　　（D） 58J

3.1 答案：B

解题提要： $A=\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{x_1}^{x_2}F_x\mathrm{d}x=\int_{1.0}^{3.0}\left(3x^2+2\right)\mathrm{d}x$

3.2　火车相对于地面以恒定的速度v_0运动。车上一个质量为m的质点最初相对于火车静止，在拉力$F=kt$的作用下相对于火车做加速运动，拉力方向与火车的运动方向相同。以地面为参照系，在$0\sim t$时间内，质点动能的增量ΔE_k为（　　　）

（A）$\dfrac{1}{2}v_0kt^2+\dfrac{1}{8m}k^2t^4$　　　（B）$\dfrac{1}{8m}k^2t^4$

（C）$v_0kt^2+\dfrac{1}{2m}k^2t^4$　　　（D）$\dfrac{1}{2m}k^2t^4$

3.2 答案：A

解：因火车相对于地面作匀速运动，火车也是惯性参照系，故由牛顿运动定律，物体相对于火车的加速度为

$$a'=\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t}=\frac{F}{m}=\frac{k}{m}t$$

分离变量，并取定积分

$$\int_0^{v'}\mathrm{d}v'=\int_0^t\frac{k}{m}t\mathrm{d}t$$

所以在t时刻物体相对于火车的速度为：$v'=\dfrac{k}{2m}t^2$

由运动叠加原理，物体相对于地面的速度：$v=v'+v_0=\dfrac{k}{2m}t^2+v_0$

所以在地面参照系中，物体动能的增量为

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}v_0kt^2+\frac{1}{8m}k^2t^4$$

3.3　劲度系数为k、原长为l_0的弹簧，其弹力与形变的关系遵守胡克定律。在拉力F的作用下，当弹簧的长度由l_0缓慢地变为l（$l>l_0$）的过程中，拉力做的功为（　　　）

（A）$F\left(l-l_0\right)$　　（B）$k\left(l-l_0\right)^2$　　（C）$\dfrac{1}{2}k\left(l-l_0\right)^2$　　（D）$\dfrac{1}{2}kl^2-\dfrac{1}{2}kl_0^2$

3.3 答案：C

解题提要：弹簧被缓慢的拉伸过程中，拉力做的功等于弹簧弹性势能的增量。所以选 C

3.4 宇宙飞船关闭发动机返回地球的过程，若不考虑大气摩擦，可以认为是仅在地球万有引力作用下的运动。若用 m 表示飞船质量，m_E 表示地球质量，G 为万有引力常量。则飞船从距离地心 r_1 下降到 r_2（$r_1 > r_2$）的过程中，飞船动能的增量为（　　）

（A）$G\dfrac{mm_E}{r_1 - r_2}$　（B）$G\dfrac{mm_E}{(r_1 - r_2)^2}$　（C）$Gmm_E\dfrac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$　（D）$Gmm_E\dfrac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 r_2^2}$

3.4 答案：C

解：当飞船仅在地球万有引力作用下运动时，飞船和地球组成的系统机械能守恒，即：$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$，所以动能增量为

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2} = \left(-G\frac{m_E m}{r_1}\right) - \left(-G\frac{m_E m}{r_2}\right) = Gmm_E\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

3.5 对于多个质点组成的系统有以下几种说法：

（1）系统的内力不能改变质点系的总动量；

（2）系统的内力不能改变质点系的总动能；

（3）系统机械能的改变与保守内力做功无关；

（4）系统的内力对系统做的总功不一定为零。

在以上说法中正确的有（　　）

（A）（1）、（2）、（3）　　（B）（1）、（2）、（4）

（C）（2）、（3）、（4）　　（D）（1）、（3）、（4）

3.5 答案：D

解：系统的内力（如摩擦力）可以改变系统的总动能，故包含（2）的选项错误。

3.6 质量为 m 的重锤，从高度为 h 处自由下落，与桩发生完全非弹性碰撞，设碰撞时的打击时间为 Δt，重锤的质量不能忽略，则铁锤受到桩对它的平均冲击力为（　　）

（A）$\dfrac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} + mg$　（B）$\dfrac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} - mg$　（C）$\dfrac{2m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$　（D）$\dfrac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$

3.6 答案：A

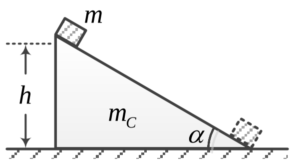
解：铁锤打桩时受重力和桩对它的平均冲力的作用，以向上为正方向，由质点动量定理：

$$\left(\overline{F}-mg\right)\Delta t=0-(-mv)=m\sqrt{2gh}$$

得平均冲力为

$$\overline{F}=\frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}+mg$$

3.7 如图所示，在光滑的水平面上有一个质量为 m_C 的斜劈，另一质量为 m 的物体从斜劈顶部沿斜劈无摩擦地滑下，斜劈顶部高为 h，斜面与水平面的夹角为 α。当 m 到达斜面底部时，斜劈 m_C 的速度大小为 v_C， m 相对于 m_C 的速度大小为 v，则下列表达式中正确的是（　　　）



测试题 3.7 图

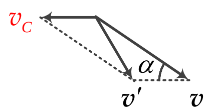
（A） $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m_C v_C^2=mgh$　　（B） $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}(m_C+m)v_C^2=mgh$

（C） $mv\cos\alpha=(m_C+m)v_C$　　（D） $mv\cos\alpha=m_C v_C$

3.7 答案：C

解：由速度叠加原理， m 相对于水平面的速度为

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_C$$



测试题 3.7 解图

如右图所示，其水平分量为： $v'_x=v\cos\alpha-v_C$，所以速度大小为

$$v'=\sqrt{v^2+v_C^2-2vv_C\cos\alpha}$$

由机械能守恒，可得

$$\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}m_C v_C^2=mgh$$

所以 A、B 选项是错的

又 m 从斜劈上下滑过程中， m 与 m_C 组成的系统在水平方向所受合外力为零，故系统在水平方向的动量守恒，所以由动量守恒：得

$$mv'_x-m_C v_C=0$$

即

$$mv\cos\alpha=(m_C+m)v_C$$

所以 D 错误，C 正确。综上所述答案选 C。

3.8 静止于水平地面上的炮车，其质量为 m_B（含炮弹），炮口的仰角为 α，发射的

炮弹质量为m，出口速度的大小为v_0（相对于地面）。则炮弹发射后的瞬间，炮车在地面上获得的反冲速度为（　　　）

（A）$\dfrac{m}{m_{\mathrm{B}}}v_0\cos\alpha$　　　（B）$\dfrac{m}{m_{\mathrm{B}}}v_0$

（C）$\dfrac{m}{m_{\mathrm{B}}-m}v_0\cos\alpha$　　　（D）$\dfrac{m}{m_{\mathrm{B}}+m}v_0\cos\alpha$

3.8 答案：C

解：对于炮弹和炮车组成的系统，在炮弹发射过程中，系统在水平方向的动量守恒，即$mv_0\cos\alpha-(m_{\mathrm{B}}-m)u=0$。所以$u=\dfrac{m}{m_{\mathrm{B}}-m}v_0\cos\alpha$。

3.9　处于惯性系中的质点或质点系，下列有关角动量的说法中错误的是（多选）（　　　）

（A）　若质点系的总动量为零，则它的总角动量也一定为零；

（B）　当质点作匀速直线运动时，它对于任意参考点的角动量一定恒定不变；

（C）　若质点受到的合外力的方向总是指向坐标原点，则它相对于坐标原点的角动量一定守恒；

（D）　质点角动量的方向总是垂直于它的速度方向。

（E）　质点的角动量只与参考系的选择有关，与参考点的选择无关。

3.9 答案：A、E

解：质点角动量的定义为$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$，这表明角动量与参考点的选择有关，故 E 错，同时 A 也错。

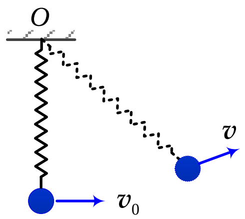
3.10　一根劲度系数为k、原长为l的轻质弹簧，上端悬挂在O点，下端系一个质量为m的小球（可视为质点）。现给予小球一个水平方向的初速度v_0，使小球在竖直平面内向上摆动。若以小球、弹簧和地球作为一个系统，则小球在上摆过程中，下列说法正确的是（　　　）

（A）　系统的机械能守恒，系统对O点的角动量守恒

（B）　系统的机械能不守恒，系统对O点的角动量守恒

（C）　系统的机械能守恒，系统对O点的角动量不守恒

（D）　系统的机械能不守恒，系统对O点的角动量不守恒



测试题 3.10 图

3.10 答案：C

解：小球在竖直平面内运动时，只受重力和弹簧的弹性力作用，故系统的机械能守恒。又小球在运动过程中，重力对 O 点的力矩不为零，系统对 O 的角动量不守恒。

3.11 质量相等的两个小球作完全弹性**斜碰**，且碰撞前其中一个小球是静止的。设碰撞后两小球速度方向之间的夹角为 α，则 $\alpha=$____________。

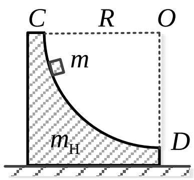
3.11 答案：90°

解：两质量相等的小球作完全弹性斜碰时，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}mv_{10}^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2$$

即：$v_{10}^2=v_1^2+v_2^2$。这表明三个速度矢量的大小之间满足勾股定理，所以碰后两小求的速度方向互相垂直。

3.12 一质量为 m 的滑块，从质量为 m_H、静止于光滑水平面上的圆弧形槽的顶端由静止开始滑下。设圆弧形槽的半径为 R，圆心角为 $\pi/2$，如图所示，所有摩擦力都可忽略。当滑块刚离开槽面底端时，滑块的速度为___________，槽的速度为___________；滑块从 C 滑到 D 的过程中，对槽所做的功为____________。



测试题 3.12 图

3.12 答案： $v=\sqrt{\dfrac{2m_Hgh}{m_H+m}}$；$v_H=-\dfrac{m}{m_H}\sqrt{\dfrac{2m_Hgh}{m_H+m}}$；$A=\dfrac{1}{2}m_HV^2=\dfrac{m^2gh}{m_H+m}$

解：设滑块的速度为 v，槽的速度为 v_H，由动量守恒有

$$mv+m_Hv_H=0$$

下滑过程中由机械能守恒定律有

$$mgR=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m_Hv_H^2$$

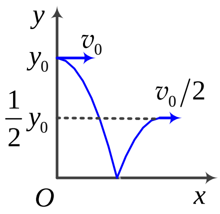
由此得

$$v=\sqrt{\frac{2m_Hgh}{m_H+m}}\quad,\quad v_H=-\frac{m}{m_H}\sqrt{\frac{2m_Hgh}{m_H+m}}$$

因作用于槽上的重力对槽不做功，所以只有滑块对斜面做功。再由动能定律可得，滑块对物体做的功为

$$A=\frac{1}{2}m_{\mathrm{H}}v_{\mathrm{H}}^{2}=\frac{m^{2}gh}{m_{\mathrm{H}}+m}$$

3.13 如图所示，质量为m的小球自高为y_0处沿水平方向以速率v_0抛出，与地面碰撞后跳起的最大高度为$0.5y_0$，水平速率为$0.5v_0$。则碰撞过程中地面对小球的垂直冲量为____________，水平冲量为____________。



测试题 3.13 图

3.13 答案： $m\sqrt{gy_0}\left(1+\sqrt{2}\right)$，$-0.5mv_0$

解： 小球在落地前、后的一瞬间，其速度的y分量分别为

$$v_{y0}=-\sqrt{2gy_0}\quad ,\quad v_y=\sqrt{2g\,y_0/2}=\sqrt{gy_0}$$

速度的x分量分别为

$$v_{x0}=v_0\quad ,\quad v_x=v_0/2$$

由质点动量定理的分量式，地面对小球的垂直冲量为

$$I_y=mv_y-mv_{y0}=m\sqrt{gy_0}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

水平冲量为

$$I_x=mv_x-mv_{x0}=-\,0.5mv_0$$

3.14 在光滑的水平面上有两个滑块 A 和 B 发生碰撞，已知滑块 A 的质量$m_A=1\mathrm{kg}$，滑块 B 的质量是 A 的 4 倍，碰撞前 A 的速度为$\boldsymbol{v}_{A0}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，B 的速度为$\boldsymbol{v}_{B0}=2\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。若碰撞后滑块 A 的速度为$\boldsymbol{v}_A=7\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，则 B 的速度为$\boldsymbol{v}_B=$________________，在碰撞过程中系统损失的机械能为________________。

3.14 答案： $\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，34 J

解： 由动量守恒定：$m_A\boldsymbol{v}_{A0}+m_B\boldsymbol{v}_{B0}=m_A\boldsymbol{v}_A+m_B\boldsymbol{v}_B$，且$m_B=4m_A$，可得

$$\boldsymbol{v}_B=\frac{m_A\boldsymbol{v}_{A0}-m_A\boldsymbol{v}_A+m_B\boldsymbol{v}_{B0}}{m_B}=\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{v}_{A0}-\boldsymbol{v}_A\right)+\boldsymbol{v}_{B0}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由：$v_{A0}^2=3^2+4^2=25$，$v_{B0}^2=2^2+7^2=53$，$v_A^2=7^2+4^2=65$，$v_B^2=1^2+5^2=26$，得碰撞过程损失的机械能为

$$-\Delta E_k=\left(\frac{1}{2}m_Av_{A0}^2+\frac{1}{2}m_Bv_{B0}^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Av_A^2\right)=34\ (\mathrm{J})$$

3.15 已知地球的半径为 R，人造地球卫星绕地运行时，其近地点的高度为 h_1，远地点的高度为 h_2，则卫星在近地点和远地点的运行速率之比为______________。

3.15 答案：$(R+h_2)/(R+h_1)$

解：人造卫星绕地运动时，仅受地球万有引力的作用，该力始终指向地心，对地心的力矩为零，故卫星绕地运动时对地心的角动量（$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$）守恒，所以有

$$mv_{近}(R+h_1)=mv_{远}(R+h_2)$$

由此得

$$v_{近}/v_{远}=(R+h_2)/(R+h_1)$$

3.16 用锤子将钢钉钉入木板，假设木板对钢钉的阻力与钢钉钉入木板的深度成正比。假设每次锤击时锤子的速度相同，铁钉的质量 << 锤子的质量。试求第二次锤击和第一次锤击钢钉钉入木板的深度之比。

3.16 答案： $\sqrt{2}/1$

解： 由题意可设木板对钢钉的阻力为：$F_f=-kx$

设第一次和第二次锤击后钉子钉入的深度分别为 d_1 和 d_2，则两次锤击过程中，阻力对钉子做功分别为

$$A_1=\int_0^{d_1}F\cdot\mathrm{d}x=\int_0^{d_1}-kx\cdot\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}kd_1^2$$

$$A_2=\int_{d_1}^{d_2}F\cdot\mathrm{d}x=\int_{d_1}^{d_2}-kx\cdot\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}k\left(d_2^2-d_1^2\right)$$

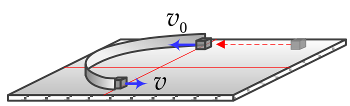
因每次锤击时，锤子的速度相同，故钉子获得的初动能相同，根据质点的动能定律，阻力对钉子做的动等于钉子动能的增量。由此可推得：$A_1=A_2$，即

$$-\frac{1}{2}kd_1^2=-\frac{1}{2}k\left(d_2^2-d_1^2\right)$$

由此解得

$$d_2/d_1=\sqrt{2}/1$$

3.17 如图所示，在光滑的水平桌面上，平放有一固定的半圆形屏障。一个质量为 m 的滑块以初速度 v_0 沿切线方向进入屏障内，滑块与屏障的滑动摩擦系数为 μ。求



测试题 3.17 图

滑块从屏障的另一端滑出时，摩擦力所做的功。

3.17 答案： $\frac{1}{2}mv_0^2\left(\mathrm{e}^{-2\pi\mu}-1\right)$

解： 滑块进入屏障后，在水平面内只受屏障对滑块的支持力 F_N（指向圆心）和屏障对滑块的摩擦力 F_f 的作用，由牛顿运动定律，有

$$F_N = m\frac{v^2}{R}$$

$$F_f = ma_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

且 $$F_f = -\mu F_N$$

由此可得 $$\frac{1}{v}\mathrm{d}v = -\frac{\mu}{R}\mathrm{d}s$$

设滑块从另一端滑出时的速度为 v，此时滑块滑过的弧长为 $s=\pi R$，对上式两边同时取定积分，即

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}\mathrm{d}v = \int_0^{\pi R}-\frac{\mu}{R}\mathrm{d}s$$

积分得 $$v = v_0\mathrm{e}^{-\pi\mu}$$

根据质点的动能定律，摩擦力对物体做的功为

$$A_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\mathrm{e}^{-2\pi\mu}-1\right)$$

3.18 质量为 10kg 的质点，在外力作用下做平面曲线运动，该质点的速度随时间的函数关系为 $\boldsymbol{v} = 4t^2\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}$ (SI)。开始时质点位于坐标原点。试求

（1）质点在任意时刻的位置矢量；

（2）质点从 $y=16\mathrm{m}$ 运动到 $y=32\mathrm{m}$ 的过程中，外力做的功。

3.18 答案： $\frac{4}{3}t^3\boldsymbol{i} + 16t\boldsymbol{j}$ ； 1200 J

解：（1）由速度的定义得：$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 4t^2\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}$

对上式分离变量，并取定积分

$$\int_0^{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^{t}\left(4t^2\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}\ \right)\mathrm{d}t$$

积分得质点在任意时刻的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=\frac{4}{3}t^3\boldsymbol{i}+16t\,\boldsymbol{j}\ (\mathrm{SI})$$

（2） 由位置矢量的表达式可以看出，当质点从 $y=16\mathrm{m}$ 运动到 $y=32\mathrm{m}$ 时，对应的时间从 $t=1\mathrm{s}$ 到 $t=2\mathrm{s}$，相应的速度大小分别为

$$v_1=\sqrt{4^2+16^2}=\sqrt{272}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}，\quad v_2=\sqrt{(4\times4)^2+16^2}=\sqrt{512}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由质点的动能定律，可得在此过程中外力做的功为

$$A=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=1200\ \mathrm{J}$$

3.19 劲度系数为 k 的轻弹簧，一端固定在墙上，另一端系一个质量为 m_{A} 的物体 A，放在光滑的水平面上。当把弹簧压缩 x_0 后，再靠着 A 放一个质量为 m_{B} 的物体 B。开始时，由于外力的作用系统处于静止状态。若除去外力，试求

（1）A 和 B 刚要分离时，B 的运动速度 v_{B}；

（2）A 能够移动的最大距离 $x_{\max}$。

3.19 答案： $\sqrt{\dfrac{k}{m_A+m_B}}x_0$； $x_0+\sqrt{\dfrac{m_A}{m_A+m_B}}x_0$

解：（1）当弹簧变为原长时，A 和 B 刚要分离。在此之前，可将 A 和 B 作为一个整体，两者的速度相同，由机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}(m_A+m_B)v_B^2$$

所以

$$v_B=v_A=\sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}x_0$$

（2） A 和 B 分离后，A 在重力、支持力和弹簧弹力的作用下运动，其中只有弹力做功，所以机械能守恒。当弹簧伸长量达到最大 $\Delta x_{\max}$ 时，A 的速度为零，即

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2=\frac{1}{2}m_Av_A^2$$

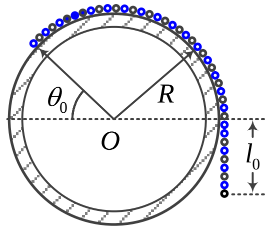
由此得弹簧的最大伸长量为

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_A}{k}} v_A = \sqrt{\frac{m_A}{m_A + m_B}} x_0$$

物体 A 能运动的最大距离为

$$x = x_0 + \Delta x = x_0 + \sqrt{\frac{m_A}{k}} v_A = x_0 + \sqrt{\frac{m_A}{m_A + m_B}} x_0$$

3.20 如图所示，一段均质软绳静止于半径为 R 的光滑圆柱面上，绳长等于圆柱面周长的一半。若软绳经轻微扰动后向右侧下滑，且始终沿圆柱面运动。试求：当绳的左端上滑到 θ_0 位置时，绳沿圆柱面滑动的速率 v 。



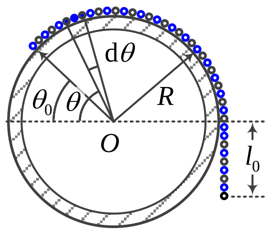
测试题 3.20 图

3.20 答案： $\sqrt{\frac{2gR}{\pi}\left(1-\cos\theta_0+\frac{\theta_0^2}{2}\right)}$

解： 设软绳单位长度上的质量为 λ，对于由软绳、圆柱面和地球组成的系统，只有重力对软绳做功，所以软绳在运动过程中机械能守恒，可以用质点系的动能定理或功能原理来求解。

软绳的左端从起始位置滑到 θ_0 时，整条软绳重力势能的变化可等效为将 θ_0 所对应的长度为 $R\theta_0$ 的一段直接由左侧移动到右侧下垂部分时重力势能的变化。若以圆柱体轴线所在的水平面为重力势能的零点，则在圆柱面上，位于 θ 处，质量为 $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \lambda R\mathrm{d}\theta$ 的质元的重力势能为

$$\mathrm{d}E_{p1} = \mathrm{d}m \cdot gR\sin\theta = gR^2 \sin\theta \lambda \mathrm{d}\theta$$



测试题 3.20 解图

所以，开始时左端长度为 $R\theta_0$ 的绳的重力势能为

$$E_{p_1} = \int_0^{\theta_0} \lambda gR^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = \lambda gR^2 (1-\cos\theta_0) \quad ①$$

当左端滑到 θ_0 位置时，右端下垂部分的重力势能为

$$E_{p2} = -\lambda R\theta_0 g \cdot \frac{1}{2} R\theta_0 = -\frac{1}{2} R^2 \theta_0^2 \lambda g \quad ②$$

由系统的机械能守恒定律，得

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} \quad ③$$

式中

$$E_{k1} = 0，\ E_{k2} = \frac{1}{2} m_{总} v^2 = \frac{1}{2} \lambda\pi R v^2 \quad ④$$

将①②④代入③，可得链条的速度为

$$v=\sqrt{\frac{2gR}{\pi}\left(1-\cos\theta_0+\frac{\theta_0^2}{2}\right)}$$

3.21 火箭从地面竖直向上发射。已知火箭和燃料最初的总质量为m_{r0}，其中燃料的总质量为m_0，单位时间内向下喷出的气体质量为α，喷出的气体相对于火箭的速度为u，其中α、u均为常量，并假设在火箭上升的高度内重力加速度g为常量。试求

（1）火箭发动机的推力和火箭获得的加速度；

（2）燃料耗尽时，火箭获得的速度。

3.21 答案： $u\alpha$、$\dfrac{u\alpha}{m_{r0}-\alpha t}-g$；$u\ln\dfrac{m_{r0}}{m_{r0}-m_0}-\dfrac{m_0 g}{\alpha}$

解：（1）假设在t时刻，火箭的质量为m_r，速度为v，在$t+\mathrm{d}t$时刻火箭的质量为$m_r-\mathrm{d}m$，速度为$v+\mathrm{d}v$，在$\mathrm{d}t$时间内火箭喷出气体的质量为$\mathrm{d}m=\alpha\mathrm{d}t$，喷出气体相对于地面的速度为$v+\mathrm{d}v-u$。以向上为正方向，将火箭和喷出的气体视为一个系统，在t到$t+\mathrm{d}t$时间内，系统动量的增量为

$$\mathrm{d}P=(m_r-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m(v+\mathrm{d}v-u)-m_r v=M\mathrm{d}v-u\mathrm{d}m$$

由于火箭在向上发射过程中还受到方向向下的重力$m_r g$的作用，所以由动量定理可知，

$$-m_r g=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=m_r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

即

$$m_r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-m_r g$$

由此可知，火箭发动机的推力和火箭的加速度分别为

$$F_{推力}=u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=u\alpha$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{u}{m_r}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-g=\frac{u\alpha}{m_{r0}-\alpha t}-g$$

（2）由（1）可得，火箭的加速度为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{u\alpha}{m_{r0}-\alpha t}-g$$

将上式分离变量，并取定积分

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \left(\frac{u\alpha}{m_{r0} - \alpha t} - g \right) \mathrm{d}t$$

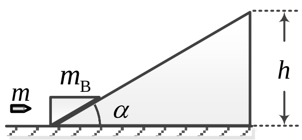
由此得火箭速度随时间的变化为

$$v = u \ln \frac{m_{r0}}{m_{r0} - \alpha t} - gt$$

又燃料耗尽所需的时间为 $t = \dfrac{m_0}{\alpha}$，代入上式，得燃料耗尽时火箭的速度为

$$v = u \ln \frac{m_{r0}}{m_{r0} - m_0} - \frac{m_0 g}{\alpha}$$

3.22 如图所示，一质量为 m_B 的物块放置在固定斜面的最底端，斜面的倾角为 α，高度为 h，物块与斜面的滑动摩擦系数为 μ，现有一质量为 m 的子弹以速度 v_0 沿水平方向射入物块并留在其中，并使物块沿斜面向上滑动，求物块滑出斜面顶端时的速度大小。



测试题 3.22 图

3.22 答案： $\sqrt{\left(\dfrac{m v_0 \cos\alpha}{m_B + m} \right)^2 - 2\mu g h \cot\alpha - 2gh}$

解： 设子弹射入物块后，物块获得的速度为 v。以子弹和物块作为一个系统，则在子弹射入木块的前后瞬间，系统沿斜面方向动量守恒，即

$$m v_0 \cos\alpha = (m_B + m) v$$

所以

$$v = \frac{m v_0 \cos\alpha}{m_B + m}$$

物块沿斜面向上滑动时，斜面对物块的摩擦力为

$$f = \mu N = \mu (m_B + m) g \cos\alpha$$

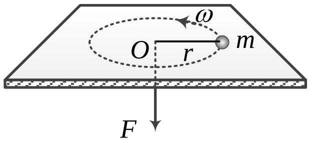
由质点的动能定理可得

$$-f \frac{h}{\sin\alpha} - (m_B + m) g h = \frac{1}{2} (m_B + m) v'^2 - \frac{1}{2} (m_B + m) v^2$$

式中 v' 就是物块滑出顶端时的速度大小，将 f，v 的表达式代入上式，整理可得

$$v' = \sqrt{\left(\frac{mv_0 \cos\alpha}{m_B + m}\right)^2 - 2\mu gh\cot\alpha - 2gh}$$

3.23 在光滑水平桌面上有一质量为 m 的物体，桌面中心有一个光滑的圆孔 O，一根穿过圆孔的轻质细绳，其一端与物体相连，另一端用力 F 拉住，如图所示。开始时，该物体距圆孔 O 的距离为 r_0，并以角速度 ω_0 绕 O 作圆周运动。现增大拉力，当拉力缓慢地增大到原来的 2 倍时，试求：



测试题 3.23 图

（1）物体绕 O 作圆周运动的半径 r 和角速度 ω；

（2）在此过程中拉力做的功。

3.23 答案： $r_0/\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{4}\omega_0$；$\frac{1}{2}\left(2^{2/3}-1\right)m\omega_0^2 r_0^2$

解：（1）当小球作圆周运动的半径为 r_0 时，由牛顿运动定律，可得

$$F = m\omega_0^2 r_0 \qquad ①$$

当拉力大小缓慢增加时，小球的运动半径逐渐减小，其径向运动的速度可以忽略不计。所以，当拉力缓慢地增加到 $2F$ 时，小球仍然作圆周运动，设其半径和角速度分别为 r 和 ω，则

$$2F = m\omega^2 r \qquad ②$$

由①②得

$$2\omega_0^2 r_0 = \omega^2 r \qquad ③$$

又在此过程中，小球对圆心的角动量守恒，即

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega r^2 \qquad ④$$

由③④可解得

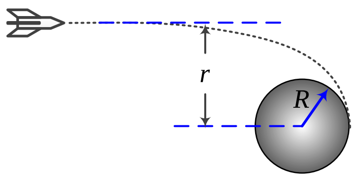
$$r = r_0/\sqrt[3]{2} \qquad , \qquad \omega = \sqrt[3]{4}\omega_0$$

（2）由质点的动能定理，可得此过程中拉力做的总功为

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_0^2 = \frac{1}{2}\left(2^{2/3}-1\right)m\omega_0^2 r_0^2$$

3.24 如图所示，某星球半径为 R，质量为 m_S。在距离星球很遥远的地方有一艘飞船以速度 v_0 沿直线向星球方向飞行，其飞行的直线与星球中心的距离为 r。当飞船靠近星

球时，由于引力作用使飞船的飞行轨迹发生偏转。试求，当 r 为多少时，飞船恰好以平行于星球表面的速度着陆，并求着陆时的速度。



测试题 3.24 图

3.24 解：飞船在飞行过程中只受星球对它的万有引力的作用，故飞船在飞行过程中满足角动量守恒和机械能守恒。设飞船在着陆时的速度为 v，则

$$mv_0 r = mvR$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_S m}{R}$$

解此方程组可得

$$r = R\sqrt{1+\frac{2Gm_S}{Rv_0^2}}$$

$$v = v_0\sqrt{1+\frac{2Gm_S}{Rv_0^2}}$$

例 3.8 **（本题不要）**如图 3.9 所示，一质量$m=1.20\times10^4\text{kg}$的登月飞船，在离月球表面高度$h=100\text{km}$处绕月球作圆周运动。飞船采用如下登月方式：当飞船位于A点时，它向外侧短时间喷气，使飞船与月球相切地到达 B 点，且OA与OB垂直。飞船所喷气体相对飞船的速度为$u=3.00\times10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，已知月球半径$R=1700\text{km}$，月球质量$M=7.35\times10^{22}\text{kg}$，万用引力常数$\text{G}=6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$。试问登月飞船在登月过程中所需消耗燃料的质量$\Delta m$是多少?

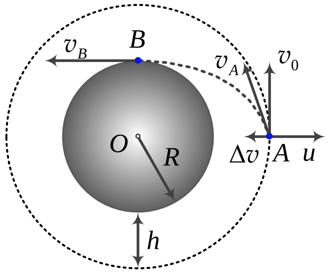


图 3.9 例 3.8 图

分析：本题应分三个过程来讨论。第一个是飞船绕月作圆周运动的过程；第二个是短时间的喷气过程，在此过程中，将飞船和其喷出的气体视为一个系统，动量守恒。第三个是登月过程，在此过程中飞船只受月球的万有引力作用，故此过程中同时满足系统的机械能守恒和飞船对月球中心的角动量守恒。

解 设飞船在A点喷气前的速度为v_0,由万有引力定律和牛顿第二定律有

$$\text{G}\frac{Mm}{(R+h)^2}=m\frac{v_0^2}{R+h}$$

由此可得：$v_0=1650\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

当飞船在A点以相对速度$\boldsymbol{u}$向轨道外侧短时间喷气后，飞船的质量减少了Δm，变为$m-\Delta m$，并获得速度增量$\Delta\boldsymbol{v}$，使飞船的速度变为$\boldsymbol{v}_\text{A}$，如图 3.8 所示。由于飞船喷气时间很短，故可认为在喷气过程中，飞船和其喷出的气体组成的系统在与飞行方向垂直的方向上动量守恒，所以有

$$\Delta m\left(u-\Delta v\right)=\left(m-\Delta m\right)\Delta v \qquad \text{即} \qquad u\cdot\Delta m=\Delta v\cdot m \tag{①}$$

由于$\Delta\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{v}_0$方向垂直，所以喷气后飞船在A点的速度为

$$v_A^2=v_0^2+(\Delta v)^2 \tag{②}$$

喷气后的飞船（剩余质量为$m-\Delta m$）从A点运动到B点的过程中只受万有引力的作用，故在此过程中同时满足角动量守恒及机械能守恒，即

$$\left(m-\Delta m\right)v_0(R+h)=\left(m-\Delta m\right)v_BR$$

即

$$v_0(R+h)=v_BR \tag{③}$$

$$\frac{1}{2}(m-\Delta m)v_A^2 - G\frac{M(m-\Delta m)}{R+h} = \frac{1}{2}(m-\Delta m)v_B^2 - G\frac{M(m-\Delta m)}{R}$$

即

$$v_A^2 - 2G\frac{M}{R+h} = v_B^2 - 2G\frac{M}{R} \qquad ④$$

将 v_0 代入方程③，可得

$$v_B = 1747\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

将 v_B 代入方程④，可得

$$v_A = 1653\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

再将 $\boldsymbol{v_A}$ 代入方程②，可得

$$\Delta v = \sqrt{v_A^2 - v_0^2} = 100\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

最后将 Δv 代入方程①，可得

$$\Delta m = \frac{\Delta v}{u}m = \frac{100}{3000}\times 1.2\times 10^4 = 400\ (\mathrm{kg})$$