２００７－２００８第二学期《高等数学Ｂ２》试题参考解答

一、试解下列各题：

1、求通过直线$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+2y+3z=6 \end{cases}$且平行于直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$的平面方程。

解：$\vec{n}$=(2,1,0)×(4,2,3)×(1,2,4)=(3,-6,0)×(1,2,4)=(-24,-12,12)

令x=0，解$\begin{cases} y=0 \\ 2y+3z=6 \end{cases}$得$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$。

所求平方程为：$2x+y-(z-2)=0$

2、在两边向量为$\vec{AB}=(0,4,-3),\vec{AC}=(4,-5,0)$的$\Delta ABC$中，求$AB$上的高$h$。

解：$S=|(0,4,-3)\times(4,-5,0)|=|(-15,-12,-16)|=25$

$$h=\frac{S}{|(0,4,-3)|}=\frac{25}{5}=5$$

3、求曲面$x^2+y^2+z^2=6$在点(1,-2,1)处的切平面和法线方程。

解：$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$

$$\vec{n}=(F_x(1,-2,1),F_y(1,-2,1),F_z(1,-2,1))=(2,-4,2)$$

切平面方程：$(x-1)-2(y+2)+(z-1)=0$

法线方程：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$

4、设$z=e^{xy}+y^2\ln x$，求二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+\frac{y^2}{x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\frac{2y}{x}$$

5、计算二重积分$\iint\limits_D xydxdy$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2,x\ge 0,y\ge 0\}$。

解：$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho=\frac{1}{8}a^4\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{8}$

满绩小铺QQ：1433397577，搜集整理不易，资料自用就好，谢谢！

6、 交换积分次序 $\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$ 。

解：$\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1}f(x,y)dx$

二、求函数 $z=x+y+\frac{1}{xy},(x>0,y>0)$，的极值。

解：$z_x=1-\frac{1}{x^2y}$， $z_y=1-\frac{1}{y^2x}$ 。

解 $\begin{cases}1-\frac{1}{x^2y}=0\\1-\frac{1}{y^2x}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 。

在（1，1）点，

$A=z_{xx}=\frac{2}{x^3y}\Big|_{(1,1)}=2>0,C=z_{yy}=\frac{2}{y^3x}\Big|_{(1,1)}=2,B=z_{xy}=\frac{1}{x^2y^2}\Big|_{(1,1)}=1,\Delta=3>0$，

因此，函数的极小值 $z(1,1)=3$，无极大值。

三、设函数 $g(x)$ 具有连续导数，曲线积分 $\int_L[e^x+g(x)]ydx-g(x)dy$ 与路径无关，

1、 求满足条件 $g(0)=-\frac{1}{2}$ 的函数 $g(x)$；

2、 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+g(x)]ydx-g(x)dy$ 的值。

解：1、 $P=[e^x+g(x)]y,Q=-g(x),\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+g(x),\frac{\partial Q}{\partial x}=-g'(x)$，

因为曲线积分 $\int_L[e^x+g(x)]ydx-g(x)dy$ 与路径无关，所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$g'(x)+g(x)=-e^x$$

$p(x)=1,q(x)=-e^x,\int p(x)dx=x,\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=-\frac{1}{2}e^{2x},g(x)=Ce^{-x}-\frac{1}{2}e^x$

由 $g(0)=-\frac{1}{2}$ 得 $C=0,g(x)=-\frac{1}{2}e^x$

2、因为曲线积分 $\int_L[e^x+g(x)]ydx-g(x)dy$ 与路径无关，选择平行于坐标轴的折线计算：

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+g(x)]ydx-g(x)dy=-\int_0^1 g(1)dy=\frac{e}{2}$ 。

满绩小铺QQ：1433397577，搜集整理不易，资料自用就好，谢谢！

四、证明级数$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots$收敛，并求其和。

证明：$u_n=\frac{2n-1}{2^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2n-1}}{2}=\frac{1}{2}<1$，根据根值审敛法，级数$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots$收敛。

解：当$|x|<1$，记$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n-\frac{x}{1-x}$

记$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则$\int_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}, f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$。

$s(x)=\frac{2x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}$。

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots=s(\frac{1}{2})=3$。

五、1、求函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$的二阶偏导数$f_{xy}(0,0)$；

2、问微分方程$y'''-y''-2y'=0$的哪一条积分曲线$y=y(x)$通过点(0,-3)，在这点处有倾角为$arctg6$的切线，且$y''|_{x=0}=f_{xy}(0,0)$。

解：1、$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$\psi(y)=f_x(0,y)\equiv 0$，因此

$$f_{xy}(0,0)=\psi'(0)=0。$$

3、记$p=y'$，解问题

$$\begin{cases}p''-p'-2p=0\\ p'|_{x=0}=0\\ p|_{x=0}=6\end{cases}$$

$$r^2-r-2=0, r_1=1, r_2=-2$$

$$p=C_1e^x+C_2e^{-2x}$$

满绩小铺QQ：1433397577，搜集整理不易，资料自用就好，谢谢！

$$p' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$$

$$\begin{cases} C_1 - 2C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

$$p = 4e^x + 2e^{-2x}$$

$$y = \int (4e^x + 2e^{-2x})dx = 4e^x - e^{-2x} + C$$

$$\because y(0) = -3, \therefore C = -6$$

所要求积分曲线：$y = 4e^x - e^{-2x} - 6$。

六、试求向量$\vec{F} = \vec{i} + z\vec{j} + \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}$穿过由$z = \sqrt{x^2+y^2}, z = 1, z = 2$所围成区域的外侧面（不包含上、下底）的流量。

解：记所围区域Ω。

$$I_1 = \iiint_\Omega \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz = \int_1^2 e^z dz \iint_{D_z} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_1^2 e^z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z d\rho = 2\pi \int_1^2 z e^z dz$$

$$= 2\pi e^2，(D_z = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 \le z^2\})$$

$$I_2 = \iint_{x^2+y^2\le 4} \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 4\pi e^2$$

$$I_3 = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 2\pi e$$

所求流量

$$I = I_1 - I_2 + I_3 = 2\pi(e - e^2)$$

满绩小铺QQ：1433397577，搜集整理不易，资料自用就好，谢谢！