# 武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
# 线性代数 B（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，这里 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots n.$

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，计算 $A^{2022}$

三、（12 分）

已知 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$， $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=6$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$

证明： (1) $\boldsymbol{B}^k=6^{k-1}\boldsymbol{B}$  (2) $\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 不可逆  (3) $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$ 都可逆

四、（10 分）求 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

五、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵（$\boldsymbol{n}\geq 2$), $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

$$\boldsymbol{R}(A^*)=\begin{cases} \boldsymbol{n}, & \boldsymbol{R}(A)=\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{R}(A)=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}, \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{R}(A)\leq \boldsymbol{n}-\boldsymbol{2}. \end{cases}$$

六、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+(\lambda+1)x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda+2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1 \end{cases},$$

问 $\lambda$ 取何值时，此方程组有惟一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

七、（15 分）

**计算向量组**

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-2\\-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\0\\7\\-5\\-4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

**的秩，并求出该向量组的一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合**

八、（8 分）

设$A\left(A\neq 0\right)$是$n$阶实对称矩阵，证明必存在正实数$k$,使得对任意实向量$\alpha$ ，

都有$\left|\alpha^T A\alpha\right|\leq k\alpha^T\alpha.$

九、（15 分）**已知二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$$

**（1）写出二次型 $f$ 的矩阵表达式；**

**（2）用正交变换把二次型 $f$ 化为标准形，并写出相应的正交矩阵；**

**（3）判断二次型是否为正定二次型？**