武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
线性代数 C 参考答案（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

解：（1）若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 存在某个 $a_i = 0$，则 $D_n = \prod_{j \neq i} a_j$

（2）若 $a_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{第2行}-\text{第1行} \\ \text{第3行}-\text{第1行} \\ \cdots\cdots \\ \text{第n行}-\text{第1行}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{第1列+第i列}\times\frac{a_1}{a_i} \\ (i=2,3,\cdots,n)}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1+a_1+\dfrac{a_1}{a_2}+\cdots+\dfrac{a_1}{a_n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n})a_2\cdots a_n$$

$$= (a_1+\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n})a_2\cdots a_n$$

$$= (1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})a_1 a_2\cdots a_n$$

二、（10 分）**设** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，**计算** A^{2022}

解：记$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha^T\alpha=3$

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}=-\alpha\alpha^T$$

$$A^{2022}=\left(-\alpha\alpha^T\right)^{2022}=\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)^{2021}\alpha^T=-3^{2021}A$$

三、（12 分）**设有三阶方阵** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$**，求** A^{-1} **和** $\left|A^*-3A^{-1}\right|$**.**

解:$\boldsymbol{|A|=-1\neq 0}$**,因此矩阵**$\boldsymbol{A}$**可逆，且有**

$$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}$$

故$\boldsymbol{\left|A^*-3A^{-1}\right|=\left||A|A^{-1}-3A^{-1}\right|=(-4)^3\left|A^{-1}\right|=64}$

四、（12 分）

设**4**元非齐次线性方程组的系数矩阵A的秩为**3**，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是它的三个解向量，且

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$，求该方程组的通解。

解：设**4**元非齐次线性方程组$Ax=b$.

已知$A\boldsymbol{\alpha}_1=b,A\boldsymbol{\alpha}_2=b$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=b$

$A(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=b+b-2b=0$,得到$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$是$Ax=0$的解。

又$R(A)=3,n-R(A)=4-3=1$.

所以$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-5\\0\\4\\-4\end{pmatrix}$为$Ax=0$的一个基础解系。

则非齐次线性方程组$Ax=b$的通解为$x=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-5\\0\\4\\-4\end{pmatrix}$，$c$为任意实数。

五、（15 分）**求向量组**

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\1\\a\\-10\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\10\\0\end{pmatrix},$$

的秩，并求出该向量组的一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

解：

$$\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\1&-1&1&3\\4&-2&a&10\\2&4&-10&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-2&-1\\0&0&a&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

当$a\neq 0$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$

极大线性无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.$

$\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2$

当$a=0$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$

极大线性无关组$\alpha_1,\alpha_2.$

$\alpha_3=-\alpha_1-2\alpha_2$， $\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2$

六、（10 分）**设有线性方程组**

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+(\lambda+1)x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda+2\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1\end{cases},$$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

解：经计算系数行列式得$|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,于是由克莱姆法则有如下结论：

(1)当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，$R(A)=R(B)=3$,方程组有唯一解；

(2)当$\lambda=1$时，$R(A)=1$，$R(B)=2$，该情形方程组无解；

(3)当$\lambda=-2$时，$R(A)=R(B)=2$,，此时方程组有无限多个解。而

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\2&-1&-1&0\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ \ \ x_3 = x_3 \end{cases}，即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}，(c \in R).$$

七、（9 分）

设A为n阶方阵,已知β为n维非零列向量，若存在正整数k,使得$A^k\beta \neq 0$,且$A^{k+1}\beta=0$,
则向量组β，$A\beta$，$A^2\beta,\cdots A^k\beta$线性无关。

证明：设$x_0\beta + x_1A\beta + x_2A^2\beta + \cdots + x_kA^k\beta = 0$ (1)

证其系数$x_i = 0 \quad (i = 0,1,2,\cdots k)$.

在（1）式的两边左乘矩阵A^k,由$A^{k+1}\beta=0$，知$A^{k+2}\beta=A(A^{k+1}\beta) = 0,\cdots A^{2k}\beta = A^k\left(A^k\beta\right) = 0$,得到

$0=A^k\left(x_0\beta + x_1A\beta + x_2A^2\beta + \cdots + x_kA^k\beta\right)=x_0A^k\beta + x_1A^{k+1}\beta + x_2A^{k+2}\beta + \cdots + x_kA^{2k}\beta$

$=x_0A^k\beta$

因为$A^k\beta \neq 0$,所以x_0=0。

同理，依次在（1）式两边左乘矩阵$A^i(i = k-1, k-2,\cdots,2,1)$可得$x_j=0(j = 1,2,\cdots k)$.

因此向量组β，$A\beta$，$A^2\beta,\cdots A^k\beta$线性无关。

八、（10 分） 证明二次型$f=x^TAx$在$\|x\|=1$时的最大值为最大特征值，最小值为最小特征值。

证明：A为对称阵，则存在正交矩阵P,使得$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$,

其中Λ是以A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵,$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

不妨设λ_1最大，λ_n最小。

$f = x^TAx = x^TP^TAPx = y^T\Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

其中$y = Px$.

当$\|y\| = \|Px\| = \|x\| = 1$,

$\lambda_n = \lambda_n y_1^2 + \lambda_n y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \le f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \le \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2 = \lambda_1$

九、（12 分）**已知二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3,$$

（1）写出二次型 f 的矩阵；

（2）用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵；

解：（1）二次型对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda & 1\\ 0 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$

A的三个特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$。

由$(E-A)x=0$，求得对应$\lambda_1=1$的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

由$(2E-A)x=0$，求得对应$\lambda_2=2$的特征向量为$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

由$(-E-A)x=0$，求得对应$\lambda_3=-1$的特征向量为$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

因ξ_1,ξ_2,ξ_3是分别属于三个不同特征值的特征向量，故正交。

单位化，$\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

令$Q=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，有$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$。

经过正交变换$x=Qy,$

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=y^T\Lambda y=y_1^2+2y_2^2-y_3^2$