2012-2013 高等数学 B2 题解

一、（9 分）已知三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，其中 $\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$，又 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=3$，求 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$。

解：由 $\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$ 知 $(\vec{a}\times\vec{b})//\vec{c}$。

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|=\pm|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{3}|\vec{c}|=\pm2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot3=\pm3\sqrt{3}$$

二、（9 分）求 A,B，使平面 $\pi:Ax+By+6z-7=0$ 与直线 $l:\frac{x-4}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$ 垂直。

解：π 的法向量 $\vec{n}=\{A,B,6\}$，l 的方向向量 $\vec{s}=\{2,-4,3\}$。π 与 l 垂直 $\Leftrightarrow\vec{n}//\vec{s}$。

由 $A:2=B:-4=6:3$ 得 $A=4,B=-8$。

三、（9 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-y^2=2[z-\varphi(x+y-z)]$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq-1$，求（1）dz；（2）记 $u(x,y)=\frac{1}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$。

解：$x^2-y^2=2[z-\varphi(x+y-z)]$ 两边微分

$$2xdx-2ydy=2[dz-\varphi'(x+y-z)(dx+dy-dz)]$$

解出

$$dz=\frac{x+\varphi'(x+y-z)}{1+\varphi'(x+y-z)}dx+\frac{\varphi'(x+y-z)-y}{1+\varphi'(x+y-z)}dy$$

得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+\varphi'(x+y-z)}{1+\varphi'(x+y-z)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi'(x+y-z)-y}{1+\varphi'(x+y-z)}$$

$$u(x,y)=\frac{1}{1+\varphi'(x+y-z)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\varphi''(x+y-z)\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left[1+\varphi'(x+y-z)\right]^2}=-\frac{\varphi''(x+y-z)\left(1-\dfrac{x+\varphi'(x+y-z)}{1+\varphi'(x+y-z)}\right)}{\left[1+\varphi'(x+y-z)\right]^2}$$

$$=-\frac{\varphi''(x+y-z)(1-x)}{\left[1+\varphi'(x+y-z)\right]^3}$$

四、（9分）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。

解：$y=x$ 把 D 分割成

$$D_1=\{(x,y)|0\le y\le x,0\le x\le 1\},D_2=\{(x,y)|x\le y\le 1,0\le x\le 1\}$$

$$e^{\max\{x^2,y^2\}}=\begin{cases}e^{x^2}, & (x,y)\in D_1\\ e^{y^2}, & (x,y)\in D_2\end{cases}$$

$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{y^2}dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1$$

五、（9分）求三重积分 $\iiint\limits_\Omega zdv$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=2$ 与三个坐标平面围成的区域。

解：Ω 在 xy 平面上的投影 $D_{xy}=\{(x,y)|0\le y\le 2-x,0\le x\le 2\}$。

$$\iiint\limits_\Omega zdv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{2-x-y} zdz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}\frac{1}{2}(x+y-2)^2dy=\int_0^2\frac{1}{6}(2-x)^3dx=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

六、（9分）已知 $\int_C \varphi(x)ydy+xy^2[\varphi(x)+1]dx$ 在全平面上与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数，并当 C 是起点在 $(0,0)$，终点为 $(1,1)$ 的有向曲线时，该积分值为 $\frac{1}{2}$，试求函数 $\varphi(x)$。

解：$\dfrac{\partial}{\partial x}(\varphi(x)y)=\dfrac{\partial}{\partial y}(xy^2[\varphi(x)+1])$ 得

$$\varphi'(x)y=2xy[\varphi(x)+1]$$

由 y 的任意性

$$\varphi'(x) - 2x\varphi(x) = 2x$$

$$\int (-2x)dx = -x^2, \int 2xe^{-x^2}dx = -e^{-x^2}$$

$$\varphi(x) = e^{x^2}\left(C - e^{-x^2}\right) = Ce^{x^2} - 1$$

$$\frac{1}{2} = \int_C \varphi(x)ydy + xy^2[\varphi(x)+1]dx = \int_0^1 \varphi(1)ydy = \frac{1}{2}\varphi(1), \varphi(1) = 1，C = 2e^{-1}。$$

$$\varphi(x) = 2e^{x^2-1} - 1$$

七、（9 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+z)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2 \le 2x$ 内的部分。

解：由对称性，$\iint\limits_{\Sigma} xydS = 0$。$\Sigma$ 在 xy 平面上的投影 $D_{xy} = \left\{(x,y)\middle| x^2+y^2 \le 2x\right\}$，

$\Sigma: z = \sqrt{x^2+y^2}, (x,y) \in D_{xy}$，$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$。

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+z)dS = \iint\limits_{\Sigma} zdS = \sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\rho d\rho$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)d\sin\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

八、（7 分）试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{n+1}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$。

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}4^{n+1}$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}(-4)^{n+1} = 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{n+1}$ 的收敛域是 $K=(-4,4]$。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n \overset{\frac{x}{4}=t}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$$

$$S_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$$

$$S_1'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{n-1}=\frac{1}{1+t}$$

$$S_1(t)=\ln(1+t),\left(S_1(0)=0\right)$$

$$S(x)=xS_1\left(\frac{x}{4}\right)=x\ln\left(1+\frac{x}{4}\right),\left(-4<x\le 4\right)$$

九、（9 分）求曲目 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程。

解：设切点为 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$。$\vec{n}=\left\{2x_0,4y_0,6z_0\right\}$。$x+4y+6z=0$ 的法向量 $\vec{n}_\pi=\left\{1,4,6\right\}$。由 $\vec{n}_\pi//\vec{n}$ 有 $z_0=y_0=2x_0$。代入 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 得 $x_0=\pm 1,z_0=y_0=2x_0=\pm 2$。切点 $\left(1,2,2\right)$ 或 $\left(-1,-2-2\right)$。切平面有两个

$$\left(x-1\right)+4\left(y-2\right)+6\left(z-2\right)=0$$

$$\left(x+1\right)+4\left(y+2\right)+6\left(z+2\right)=0$$

十、（7 分）设函数 $u=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}y^4+z^3-3z$，求向量场 $\vec{A}=\overrightarrow{gradu}$ 穿过曲面 S 流向上侧的通量，其中 S 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧。

解：$\vec{A}=\left\{2x^3,2y^3,3z^2-3\right\}$。$S$ 在 xy 平面上的投影 D_{xy}：$x^2+y^2\le 1$。

$\vec{n}=\left\{2x,2y,1\right\}$，$dydz=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=2xdxdy,dzdx=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=2ydxdy$。

向下的 D_{xy} 记为 S_1。S 和 S_1 所围区域记为 Ω。所求的通量

$$\Phi=\iint_{S+S_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+(3z^2-3)dxdy-\iint_{S_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+(3z^2-3)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(6x^2+6y^2+6z\right)dxdydz-3\iint_{D_{xy}}dxdy=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_0^{1-x^2-y^2}\left(6x^2+6y^2+6z\right)dz-3\pi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left[6\rho^2(1-\rho^2)+3(1-\rho^2)^2\right]\rho d\rho-3\pi$$

$$=2\pi\int_0^1\left(3\rho-3\rho^5\right)d\rho-3\pi=2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)-3\pi=-\pi$$

十一、（8 分）试在曲面 $S:2x^2+y^2+z^2=1$ 求一点，使得函数

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 沿着点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,0,1)$ 的方向导数具有最大值。

解：$\vec{l}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}$，$\frac{\partial}{\partial \vec{l}}f(x,y,z)=\sqrt{2}x-\sqrt{2}y$。条件极值问题

$$\begin{cases} g(x,y,z)=x-y \\ 2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

$L=x-y+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases} L_x=1+4\lambda x=0 \\ L_y=-1+2\lambda y=0 \\ L_z=2\lambda z=0 \\ L_\lambda=2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} z=0 \\ y=\mp\frac{2}{\sqrt{6}} \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$

所求的点是 $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)$。

十二、（6 分）设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由。

解：正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 存在且 $a>0$。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1$$

故，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛。