武汉大学数学与统计学院

2012-2013 学年二学期《高等数学 A2》期末试卷(A 卷)参考解答

一、(9 分)设 $\vec{a}=\{3,-3,4\},\vec{b}=\{3,6,2\}$,求 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ 及 $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(5\vec{a}-4\vec{b})$。

解 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=4|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=87$ 4 分

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\times(5\vec{a}-4\vec{b})=-12\vec{a}\times\vec{b}-10\vec{b}\times\vec{a}=2\vec{b}\times\vec{a}=2\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\3&6&2\\3&-3&4\end{vmatrix}=6\{10,-2,-9\}$$ 5 分

二、(9 分)求 A,B,使平面 $\pi\colon Ax+By+6z-7=0$ 与直线 $l\colon\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$ 垂直。

解 π 法向量为 $\vec{n}=\{A,B,6\}$,l 方向向量为 $\vec{S}=\{2,-4,3\}$,

l 与 π 垂直,$\vec{n}//\vec{S}$,故 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{-4}=\dfrac{6}{3}$, 4 分

解得:$A=4,\quad B=-8$ 5 分

三、(10 分)设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-y^2=2[z-\varphi(x+y-z)]$ 所确定的函数,其中 φ 具有二阶导数,且 $\varphi'\neq-1$,求:(1)$\mathrm{d}z$;(2)记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$。

解 (1) $xdx-ydy=dz-\varphi'(x+y-z)\cdot(dx+dy-dz)$,

$$dz=\frac{(x+\varphi')dx+(\varphi'-y)dy}{\varphi'+1},$$ 4 分

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+y}{1+\varphi'(x+y-z)}$, $u(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{1+\varphi'(x+y-z)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\varphi''(1-\frac{\partial z}{\partial x})}{(1+\varphi')^2}=\frac{-\varphi''(1-\frac{x+\varphi'}{1+\varphi'})}{(1+\varphi')^2}=\frac{-\varphi''(1-x)}{(1+\varphi')^3}$$ 5 分

四、(9 分)计算二重积分 $\iint\limits_D|y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D\colon\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le1$。

解 由对称性知,此积分等于 D 域位于第一象限中的部分 D_1 上积分的 4 倍,

在第一象限 $|y|=y$ 3 分

原式 $=4\int_0^a ax\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}ydy=2\int_0^a\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\dfrac{4}{3}ab^2$ 6 分

五、(9 分)计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega zdv$,其中 Ω 是由锥面 $\sqrt{x^2+y^2}=z$ 及平面 $z=1,z=2$ 所围成的闭区域。

解 $\iiint\limits_\Omega zdv=\pi\int_1^2 z^3dz=\dfrac{15}{4}\pi$ 9 分

六、(9 分)已知 $\int_C\varphi(x)y\,\mathrm{d}y+xy^2[\varphi(x)+1]\,\mathrm{d}x$ 在全平面上与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数,并当 C 是起点在 $(0,0)$,终点为 $(1,1)$ 的有向曲线时,该曲线积分值为 $1/2$,试求函数 $\varphi(x)$.

解 由 $\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,得 $\varphi'(x)y=2xy[\varphi(x)+1]$, $\ln[\varphi(x)+1]=x^2+C_1$,

即 $\varphi(x)=e^{x^2+C_1}-1=Ce^{x^2}-1$,

所以有 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(Ce^{x^2}-1)ydy+Cxy^2e^{x^2}dx=\frac{1}{2}$ 3 分

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(Ce^{x^2}-1)ydy+Cxy^2e^{x^2}dx=\int_0^1(Ce-1)ydy=\frac{1}{2}(Ce-1)$. 故有 $(Ce-1)=1$，即 $C=\frac{2}{e}$

所以有 $\varphi(x)=2e^{x^2-1}-1$ 6 分

七、(9 分) 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截得的有限部分。

解： $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$ 3 分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}a^3\cos^3\theta d\theta=\frac{32\sqrt{2}a^3}{9}$$ 6 分

八、(9 分) 求曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程。

解：设切点 $P(x_0,y_0,z_0)$,由已知条件得：$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{-1}$ ，4 分

得到 $x_0=2,y_0=1,z_0=\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=3$. 切平面方程为 $2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$,即 $2x+2y-z-3=0$ 5 分

九、(7 分) 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 6^n}x^{n+1}$ 的收敛区间及和函数 $S(x)$.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 6^n}{(n+1)\cdot 6^{n+1}}=\frac{1}{6}$，$\therefore$ 收敛半径为 $R=6$,当 $x=-6$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n}$ 发散;

当 $x=6$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 6}{n}$ 收敛，收敛区间为 $(-6,6]$， 3 分

$$\text{设 } S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 6^n}x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 6^n}$$

$$=x\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n\cdot 6^n}]'dt=\frac{x}{6}\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{t}{6})^{n-1}]dt$$

$$=\frac{x}{6}\int_0^x\frac{1}{1+\frac{t}{6}}dt=x\ln(1+\frac{x}{6}),x\in(-6,6]$$ 4 分

十、(7 分) 求曲面积分 $\iint\limits_{S}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 S 是由曲线 $\begin{cases}z=1-y^2\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转面 $(z\geq 0)$ 的上侧。

解：$\iint\limits_{S}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S: $z=1-x^2-y^2\quad(z\geq 0)$ 不封闭

补充 S_1：$z=0\ (x^2+y^2\leq 1)$ 下侧，则 $S+S_1$ 封闭，取外侧.

$I=\iint_S 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\oiint_{S+S_1}-\iint_{S_1}\right)[2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]$ 3 分

由高斯公式，得 $\oiint_{S+S_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_\Omega 6(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\,\mathrm{d}z=2\pi$ 而 $\iint_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$

因此 $I=2\pi-3\pi=-\pi$ 4 分

十一、（7 分）试在曲面 $S:2x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点，使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 沿着点 A(1,1,1)到点 B(2,0,1)的方向导数具有最大值。

解：由曲面 S 的方程为 $2x^2+y^2+z^2=1$，给定的方向 $\vec{l}^{\,0}=(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0)$

方向导数函数 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\sqrt2\,(x-y)$

设 $L=\sqrt2(x-y)+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)$， 令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=\sqrt2+4\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-\sqrt2+2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=2\lambda z=0\\ 2x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$,解之得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt2}{4\lambda}\\ y=\frac{\sqrt2}{2\lambda}\\ z=0\end{cases}$ 3 分

$\lambda=\pm\frac{\sqrt3}{2}$ ，$\lambda=\frac{\sqrt3}{2}$，得 S 上的点为 $(-\frac{\sqrt6}{6},\frac{\sqrt6}{3},0)$，此时 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt3$

$\lambda=-\frac{\sqrt3}{2}$，得 S 上的点为 $(\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt6}{3},0)$，此时 $\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt3$，

所以，所求的 S 上的点为 $(\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt6}{3},0)$ 4 分

十二、（6 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。

证 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a$，可得 $f(0)=0,f'(0)=a$，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数及 $f'(0)=a>0$，知存在 $l>0$，使在 $[0,l]$ 上 $f'(x)>0$， 于是存在 $N>0$，使当 $n>N$ 时，$f\left(\frac{1}{n}\right)>0$，而且 $f\left(\frac{1}{n+1}\right)<f\left(\frac{1}{n}\right)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，可见交错级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛， 4 分

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛，但由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=a>0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。3 分