武汉大学数学与统计学院
2019-2020 第二学期《高等数学 A2》期中考试试卷

一、计算（8 小题，共 48 分）

1、设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直，$|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=12$，试求 $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$.

2、求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$.

3、设 $f(x,y)=x\sin y+y\cos x, x\in[0,\pi], y\in[0,\pi]$，试求 x 的值，使 $f_x\Big|_{(x,\frac{\pi}{2})}=f_y\Big|_{(x,\frac{\pi}{2})}$.

4、求函数 $u=xy+3yz-zx$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$ 平行方向的方向导数。

5、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\varphi(y+z)+y\psi(x+z)+zg(x+y)=1$ 所确定，其中 φ,ψ,g 具有连续一阶偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 。

6、设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\,\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微；$p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 。

7、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 。

8、求函数 $z=y(x^2+y^2+2x)$ 在闭域 D:$-2\le x\le 2, 0\le y\le 1$ 上的最小值和最大值。

二、证明（5 小题，前 4 题各题 7 分，第 5 题 6 分，共 34 分）

1、证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3-y^3}{|x|^3+|y|^3}$ 不存在。

2、设 $u^2=yz, v^2=xz, w^2=xy$，且 $f(u,v,w)=F(x,y,z)$ 具有连续偏导数，试证明：

$$uf_u+vf_v+wf_w=xF_x+yF_y+zF_z$$

3、证明：$f(x,y)=\begin{cases} x\sin(4\arctan\dfrac{y}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在点(0，0)处偏导数存在，但不可微。

4、设 $u=f(\vec{a}\cdot\vec{r})$，其中 $\vec{a}$ 为常向量，$\vec{r}$ 为 $M(x,y,z)$ 点的向径，$f(t)$ 可微，证明：沿与 $\vec{a}$ 垂直的任一方向上该函数的方向导数为零。

5、证明曲线 $x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同。

三、应用（3 小题，共 18 分）

1、求曲线 $\begin{cases} x+y-z^4=1\\ 2x^2-y^3-2z=-1\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线 L_1，求曲线 $x=4t-2, y=t^2+3t-1,$ $z=t^3-2t^2+4t+1$ 在点 $(2,3,4)$ 处的切线 L_2 。证明 L_1 与 L_2 是异面直线，并求它们之间的距离。

2、求曲线 $x=2t^3+2t+2, y=t^3+2t+1, z=4t-3$ 上的点，使曲线在该点处的法平面平行于平面 $13x+7y+2z=0$，并写出曲线在该点处的切线方程。

3、求与曲面 $x^2+2y^2+4z^2=\dfrac{5}{3}$ 相切且平行于平面 $3x+2y-4z=5$ 的平面方程。