

第7章 机械波

波动 (wave) 是振动状态在空间的传播过程, 也是一种常见的物质运动形式。机械振动在弹性媒质中的传播, 称为**机械波** (mechanical wave)。例如水波、声波等都是机械波。电磁振荡在空间的传播, 称为**电磁波** (electromagnetic wave) (见第 15 章)。例如无线电波、光波、 x 射线、 γ 射线等都是电磁波。近代物理学指出, 微观粒子具有波动性, 这种波叫做**物质波** (material wave), 它是量子力学的基础。各种波在本质上虽然不同, 但都具有波动的共同特征。例如, 机械波和电磁波都具有一定的传播速度, 都伴随着能量的传播, 都能产生反射、折射、衍射和干涉等现象。本章作为波动学的基础, 将以机械波为例, 讨论波动的特征和基本规律。

§ 7.1 机械波的产生和传播

7.1.1 机械波的基本概念

1. 机械波的产生条件

人们对于波动最初、最直观的认识来自于水面波。当我们还在孩提时就已经观察到, 将小石子投入平静的水中, 在水面上就会激起波纹, 并且以落水点为中心由近及远地传播出去, 从而产生水面波。如果在水面上有一片树叶, 我们发现树叶不会随波而去, 而是在原地上下振动。这表明, 水面波在向前传播时是水的振动状态的传播, 而不是水在流动。同样的情况在声波的传播中也是如此。人们在敲锣时, 通过敲击使锣面振动, 锣面的振动又带动周围空气中分子的振动, 使这种振动由近及远地传播出去, 从而形成声波。那为什么这种机械振动可以在媒质中传播形成波动呢? 原因就在于这些媒质都是**弹性媒质** (elastic medium)。所谓**弹性媒质**就是由无穷多个质元通过弹性力结合在一起形成的连续介质。在弹性介质中, 由于各质元之间是以弹性力互相联系的, 如果介质中有一个质点 A 离开了它的平衡位置, A 周围的质点就将对 A 施加一个弹性力, 使 A 回到平衡位置, 并在平衡位置附近做振动; 同时根据作用力与反作用力定律, A 对周围的质点也会施加一个弹性力, 使 A 周围的质点也离开各自的平衡位置; 当它们离开平衡位置时其周围的质点又对它们施加弹性力, 使它们回到平衡位置, 因而也要产生振动。所以, 在弹性媒质中一个质点的振动会引起邻近质点的振动, 邻近质点的振动又引起较远质点的振动。于是振动就以一定的速度由近及远地向各个方向传播出去, 形成波动。由此可见, 要产生机械波, 必须要满足两个条件: (1) 要有波源 (即振动源); (2) 要有能够传播机械振动的弹性介质。

需要注意的是: 波动只是振动状态的传播过程, 媒质中各质点并不随波前进, 各质点只是在各自的平衡位置附近做振动。

2. 横波和纵波

波在传播时，质点的振动方向和波的传播方向并不一定相同。人们根据媒质中各质点的振动方向与波的传播方向之间的关系将波动分为横波与纵波两类。如果质点的振动方向和波的传播方向相互垂直，则这种波称为**横波**（transverse wave）。例如把一根绳子的一端固定，另一端捏在手中拉直，并在垂直于绳子的方向不停地抖动，就可以看到一个接一个的波形沿着绳子向另一端传播，从而在绳子上形成了横波，如图 7.1 所示。

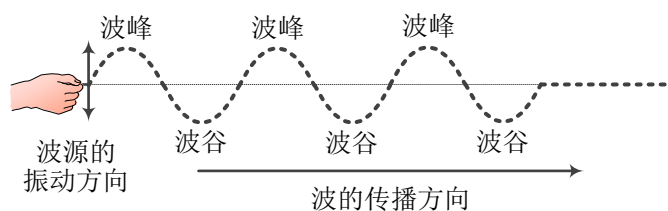


图7.1 绳索上的横波

如果质点的振动方向和波的传播方向相互平行，则这种波称为**纵波**（longitudinal wave）。例如一根被水平悬挂的软弹簧，如果我们让其一端沿弹簧方向连续振动，就会在弹簧上形成一系列沿弹簧方向传播的纵波，如图 7.2 所示。声波就是纵波。

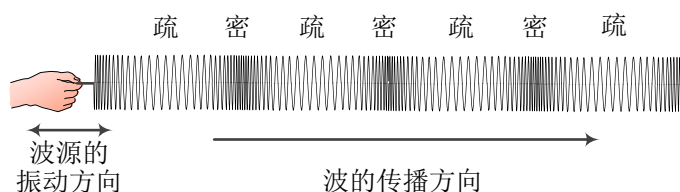


图7.2 软弹簧上的纵波

从图 7.1 和图 7.2（或上页微课中给出的横波与纵波的动画视频）可以直观地看出横波与纵波的传播特点：

- （1）各质点都在平衡位置附近做振动，不会随波而去，所以波动是媒质中所有质点的集体振动；
- （2）各质点依据离波源的距离由近及远地依次投入振动，离波源越远，开始振动的的时间越晚（相当于振动相位越落后）；
- （3）各质点的振动都是受迫振动，策动力来源于波源，它们的振动方向和振动周期与波源的振动方向和振动周期完全相同。

此外，在横波中凸起的位置称为**波峰**，下凹的位置称为**波谷**，横波的传播可形象地看成是波峰与波谷的传播，这就是横波的传播特征；在纵波传播时，原本均匀分布的媒质出现了有规则的疏密分布图案，并且疏部和密部随波一起向前传播，所以纵波有时被形象地称为疏密波。

横波和纵波是波的两种基本类型。有一些波既不是横波，也不是纵波，例如水面波、地震波等。以水面波为例，在水面上，当波通过时，水面上每个质点的运动既有上下运动，也

有前后运动，每个质点的运动轨迹是一个椭圆，这是因为水面上每个质点受到的回复力是重力和表面张力的合力。所以水面波含有横波和纵波两种成分。

一般情况下，介质中传播的波动很复杂。但是有一种最简单、最基本的波，它的波源做简谐振动，介质中各质点因此也做简谐振动，这种由简谐振动的传播所构成的波称为**简谐波**（simple harmonic wave）也称为**余弦波**或**正弦波**。可以证明，任何其它复杂的波可以由多列简谐波合成而得。本章主要讨论简谐波。

3. 波的几何描述

描述波动传播的几何特性时常用到波阵面和波线这两个概念，下面作一介绍。

上面已经指出，在波动过程中，媒质中的各个质点都在振动，但是它们开始振动的时间（或振动相位）一

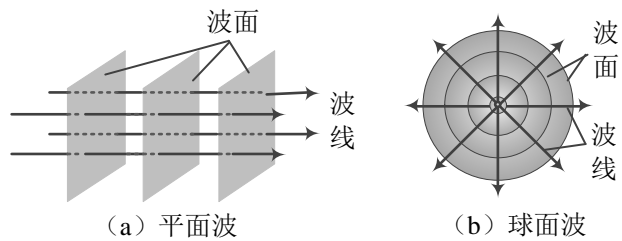


图7.3 波面与波线

般是不同的。人们将媒质中振动相位相同的点连成的面称为**波阵面**，简称**波面**（wave surface），波面中最前面的那个波面称为**波前**（wave front）。由于波面上各点的振动相位相同，所以波面是等相位面。

波面是平面的波称为**平面波**（plane wave），如图 7.3（a）所示，波面是球面的波称为**球面波**（spherical wave），如图 7.3（b）所示。沿波的传播方向画出的射线称为**波射线**或**波线**（wave ray）。在各向同性的介质中，波线总是与波面互相垂直，平面波的波线是垂直于波阵面的互相平行的射线，球面波的波线是从波源沿径向向外的射线。

7.1.2 描述机械波的物理量

1. 波速

单位时间内振动状态在介质中传播的距离称为波的传播速度，简称**波速**。在弹性介质中，机械波的传播速度决定于介质的惯性与弹性，也就是决定于介质的密度和弹性模量，与波源在介质中的运动速度无关。

理论上可以证明，在拉紧的弹性绳索中，横波的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{F}{\lambda}} \quad (7.1)$$

式中 F 是绳中的张力， λ 是绳的质量线密度，即单位长度上绳的质量。

在固体中，既可以传播横波，也可以传播纵波，它们的传播速度分别为

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (\text{横波}) \quad (7.2)$$

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (\text{纵波}) \quad (7.3)$$

式中 ρ 是固体的密度， G 和 Y 分别是固体的**切变弹性模量**（shear elastic module）和**杨氏弹性模量**（Young's elastic module），它们是反应材料形变和内应力关系的物理量，其单位都是： $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ 。（有关弹性模量的概念请参考力学或材料力学教材，此处不做介绍）

液体和气体只有体积弹性变形，所以在液体和气体内部只能传播与体积应变有关的弹性纵波。可以证明在液体和气体中，纵波的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (7.4)$$

式中 B 是介质的体积弹性模量， ρ 是液体或气体的密度。

对于理想气体，根据分子动理论和热力学理论，可以证明理想气体中**声波的传播速度**为

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (7.5)$$

式中 M 是气体分子的摩尔质量， γ 是气体的定压摩尔热容量与定容摩尔热容量之比，简称比热容比， p 是气体的压强， T 是热力学温度， R 是普适气体常量。式（7.5）表明，气体中声波的传播速度不仅与气体的性质有关，还与温度有关。

2. 波长、周期和频率

上一节已经指出，沿波的传播方向各质点的振动相位依次落后，同一波线上相位差在 2π 以内的质点振动状态各不相同，其它地方质点的振动状态是这些状态的重复。因此人们将同一波线上相位差为 2π 的两点之间的距离称为**波长**（wavelength），用 λ 表示。在横波的情形下，波长等于相邻两个波峰（或相邻两个波谷）之间的距离；而在纵波情形下，波长等于相邻两个密集部分（或相邻两个稀疏部分）之间的距离。显然，波长描述了波在空间的周期性。

波向前传播一个波长的距离所需的时间，叫做**波的周期**，用 T 表示。波速 u 、波长 λ 和周期 T 三者之间有如下关系

$$u = \frac{\lambda}{T} \quad (7.6)$$

周期的倒数称为**频率**，用 ν 表示，即 $\nu = \frac{1}{T}$ ，所以式（7.6）可改写为

$$u = \nu \lambda \quad (7.7)$$

由频率和周期的互为倒数关系可以看出，波的频率就是在单位时间波向前传播的距离上完整波长的个数。

当波源和弹性媒质没有相对运动（仅仅在媒质中做振动）时，波源每做一次完全振动，

波就会向前传播一个波长的距离，这表明波源的振动周期和振动频率在数值上与波的周期和波的频率是相等的，即两组物理量可以通用。如果波源与媒质有相对运动，则两组物理量有差异，不可通用（详见本章 § 7.7 多普勒效应）。

§ 7.2 平面简谐波的波动表达式

上一节我们讨论了机械波的形成过程、产生条件和波动的几个基本概念。现在我们要讨论波在传播过程中，媒质中各质点在振动时离开平衡位置的位移是如何随质点在波线上的位置和时间变化的，亦即如何用数学函数式来描述介质中各质点的位移随时间的变化。这样的数学函数式称为**波动表达式**，也称为**波函数**（wave function）。

上一节中已经指出简谐波就是由简谐振动的传播形成的波，也称为余弦波或正弦波。平面简谐波是最简单、最基本的波。各种复杂的波动都可以看成是不同频率、不同振幅的平面简谐波的叠加。下面先讨论平面简谐波在理想的、无吸收的、无限大均匀介质中传播时的波动表达式。

7.2.1 平面简谐波的波动表达式

平面简谐波在理想的、无吸收、无限大均匀介质中传播时，介质中各质点都在做同一频率、且振幅相等的简谐振动；此外根据波阵面的定义可知，在任一时刻处在同一波阵面上的各质点都有相同的振动相位，因而它们有相同的振动表达式。所以，只要知道了某一条波线上各点的振动表达式，就知道了波所到达的空间各点的振动表达式。这样，求空间任意一点的振动表达式的问题就简化为求某一条波线上各点的振动表达式。因此，通过选择一条波线为坐标轴，就可把三维空间的问题简化到一维空间来处理。

如图 7.4 所示，设有一平面简谐波，在无吸收、无限大均匀介质中沿 x 轴的正方向传播，波速为 u 。取任意一条波线为 x 轴，并取 O 点作为 x 轴的坐标原点。假定在 O 点处（即 $x=0$ 处）质点的振动表达式为

$$y_O(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.8)$$

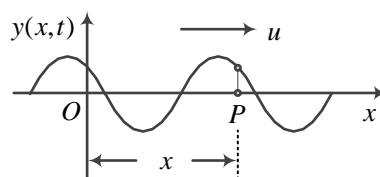


图7.4 平面简谐波的波函数

式中 y_O 是波线 x 轴上坐标原点处的质点在时刻 t 离开其平衡位置的位移（若是横波，位移方向与 Ox 轴垂直，若是纵波，位移沿着 Ox 轴）， A 是振幅， ω 是角频率， φ_0 是 O 点的振动初相位。

现在来求波线 x 轴上平衡位置位于 P 点的质点的振动表达式。设 P 点与 O 点的距离为 x ，因为波动从 O 点传到 P 点处所需的时间为 $\frac{x}{u}$ ，所以 P 点处的质点在 t 时刻的位移与 O 点处的质点在 $t - \frac{x}{u}$ 时刻的位移相同，即

$$y_P(t) = y_O\left(t - \frac{x}{u}\right) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_O\right]$$

由于 P 点的坐标 x 是任意的。因此上式就表示了波线上任意一点 x 处，质点的振动表达式（即位移随时间的变化规律），忽略下标 P ，上式可写为

$$y(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_O\right] \quad (7.9)$$

这就是沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的波动表达式，也称为波函数。

当然，我们也可以用相位的超前与落后关系求出波函数。由于沿波的传播方向，波线上各点的振动相位依次落后，每隔一个波长的距离，后者比前者的相位落后 2π 。因此，如果已知波长 λ ，则当波从 O 点传到 P 点时， P 点的振动相位比 O 点落后 $\Delta\varphi = 2\pi\frac{x}{\lambda}$ ，即

$$\varphi_P = \varphi_O - \Delta\varphi = \varphi_O - 2\pi\frac{x}{\lambda} \quad (7.10)$$

所以 P 点的振动表达式，即此波的波函数为

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi_P) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_O\right) \quad (7.11)$$

考虑到 $u = \frac{\lambda}{T}$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ ，可得 $\frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，所以式 (7.9) 和式 (7.11) 两种形式的波动表达式实际上是等价的。当然利用上述关系，还可以得到波动表达式的其它常见形式，如

$$y(x, t) = A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_O\right] \quad (7.12)$$

在导出上述平面简谐波的波动表达式时，我们假定波动是沿着 x 轴的正方向传播的，如果波动沿 x 轴的负方向传播，那么 P 点处（参见图 7.4）质点的振动要比 O 点处的质点早开始 $\frac{x}{u}$ 时间，即 P 点处的质点在 t 时刻的位移与 O 点处的质点在 $t + \frac{x}{u}$ 时刻的位移相同；从相位

的角度来看， P 点处质点的振动相位要比 O 点的相位超前 $\Delta\varphi = 2\pi\frac{x}{\lambda} = \frac{\omega}{u}x$ ，即

$$\varphi_P = \varphi_O + \Delta\varphi = \varphi_O + 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

所以 P 点处质点的振动表达式为

$$y(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_O\right] \quad (7.13)$$

或

$$y(x, t) = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_O\right) \quad (7.14)$$

$$y(x,t) = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] \quad (7.15)$$

式 (7.13) ~ (7.15) 就是沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的波动表达式的几种常见形式。

比较两组波动表达式可以发现, 沿 x 轴正向和负向传播的波动表达式, 其数学形式相似, 不同之处仅仅是变量 x 前面的符号, 取 “-” 表示沿 x 轴正向传播的波, “+” 表示沿 x 轴负向传播的波。

7.2.2 波动表达式的物理意义

在波动表达式中含有 x 和 t 两个自变量, 各质点振动时相对于平衡位置的位移 y 是该质点在波线上的坐标 x 和时间 t 的二元函数, 因此波动表达式的物理意义要分三种情况来讨论。

(1) 如果 x 给定, 那么位移 y 就只是时间 t 的周期函数。这时的波动表达式就是波线上 P 点处质元的振动表达式。

式, 式中 $\left(\pm \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right)$ 是该质元的振动初相位, 其中 “-”

号对应于沿 x 轴正向传播的波, “+” 对应于负向波。

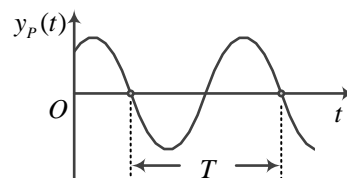


图7.5 波线上 P 点的振动曲线

若将波动表达式分别对时间求一阶和二阶偏导数, 可得波线上任一质元 P 的振动速度和加速度分别为

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega \sin \left[\omega \left(t \pm \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (7.16)$$

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos \left[\omega \left(t \pm \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (7.17)$$

如果以 y 为纵坐标, t 为横坐标, 就可以得到该质元做简谐振动时的位移~时间曲线 (即波线上 P 点的振动曲线), 如图 7.5 所示。不难理解, 曲线上任意一点的斜率表示了该质元在对应时刻的振动速度。

(2) 如果时间 t 给定, 那么位移 y 将只是 x 的周期函数。如果以 y 为纵坐标, x 为横坐标, 将得到 “周期” 为 λ 的 **波形曲线**, 如图 7.6 中的实线所示。就象在给定时刻 t 给波动拍摄的一张照片。

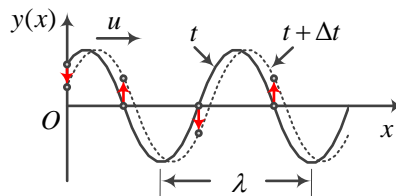


图7.6 波形曲线 (波形图)

由于在给定时刻的波形图上, 只是给出了该时刻各质元离开平衡位置的位移分布情况, 是一幅静态图案, 因此无法确定该时刻各质元的运动方向。解决的办法就是根据波的传播方向, 再画出在 $t + \Delta t$ ($\Delta t \ll T$) 时刻的波形图, 并将它与 t 时刻的波形图进行比较, 从而可以得到各质元的运动方向。

(3) 如果 x 和 t 都在变化, 那么波动表达式将是 x 和 t 的二元函数。如以 y 为纵坐标, x

为横坐标，先画出在某一时刻 t_1 的一条波形曲线，再画出在另一时刻 $t_1 + \Delta t$ 的波形曲线，分别如图 7.7 中的实线和虚线所示。 $t_1 + \Delta t$ 时刻的波形曲线是 t_1 时刻的波形曲线沿 x 轴平移 Δx 的距离而得，即波形是随时间向前移动的。因为波形在移动，所以称为**行波**，取

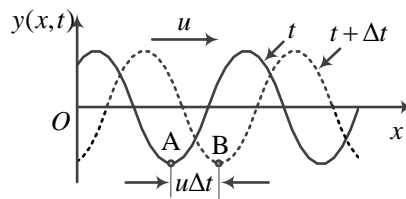


图7.7 行波（沿 x 轴正向传播）

“行走”之意。前面所述的波动表达式就是平面简谐行波的波动表达式。

在 t_1 时刻的波形图上任取一点 A，在 $t_1 + \Delta t$ 时刻的波形图上取一点 B，A、B 在波线上的位置坐标分别是 x 和 $x + \Delta x$ 。假设这两点的位移和速度都相同，则它们的振动状态相同、振动相位相等，即

$$\omega \left(t_1 - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 = \omega \left(t_1 + \Delta t - \frac{(x + \Delta x)}{u} \right) + \varphi_0$$

由此可得

$$\Delta x = u \Delta t$$

这就是说，在 Δt 时间内，整个波形沿波的传播方向移动的距离为 $u \Delta t$ ，所以波速 u 就是整个波形向前传播的速度，同时也是振动相位向前传播的速度，所以 u 也称为**相速度**。

例 7.1 已知波动表达式 $y(x, t) = 5 \times 10^{-2} \cos \pi(2.50t - 0.01x)$ (SI)。试求：该波的波长、周期和波速。

解： 波动表达式的一般形式为

$$y(x, t) = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right)$$

为此，将波动表达式改写成

$$y(x, t) = 5 \times 10^{-2} \cos(2.50\pi t - 0.01\pi x) \text{ (SI)}$$

通过比较可得

$$\omega = 2.5\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \frac{2\pi}{\lambda} = 0.01\pi$$

所以波的周期、波长和波速分别为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.8 \text{ (s)}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{0.01\pi} = 200 \text{ (m)}, \quad u = \frac{\lambda}{T} = 250 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

例 7.2 如图 7.8 所示，一列沿 x 轴正向传播的平面简谐波，在 x 轴上有 A、D 两点相距为 d ，已知该波在 D 点的振动表达式为

$$y_D(t) = A \cos(\omega t + \varphi_d)$$

试求：以 A 为坐标原点的波动表达式。

分析： 沿 x 轴传播的波动表达式的一般形式是

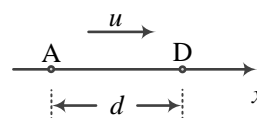


图7.8 例7.2图

$$y(x,t) = A \cos \left[\omega \left(t \pm \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad \text{或} \quad y(x,t) = A \cos \left(\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right)$$

式中 φ_0 是坐标原点 ($x=0$) 处质点的振动初相位, 当波沿 x 轴正向传播时取 “-”, 负向传播时取 “+”。所以在已知 A 、 ω 、 u (或 λ) 时, 求解波动表达式的关键是求 φ_0 。

解: (方法一) 假设所求波动表达式为

$$y(x,t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (1)$$

由波动表达式的物理意义可知, 当 $x=d$ 时①式就代表了波线上 D 处质点的振动表达式, 即

$$y(d,t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{d}{u} \right) + \varphi_0 \right] = y_D(t) = A \cos(\omega t + \varphi_d)$$

比较可得

$$\varphi_0 = \varphi_d + \frac{\omega d}{u} \quad (2)$$

再将②式代入①式并整理, 可得此波动表达式为

$$y(x,t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x-d}{u} \right) + \varphi_d \right] \quad (3)$$

(方法二) 利用波线上前后两点的相位关系来求解

沿波动的传播方向各质元的振动相位依次落后, 可得 A、D 两点处质元的振动相位差为

$$\varphi_0 - \varphi_d = \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{\omega}{u} d$$

所以: $\varphi_0 = \varphi_d + \frac{\omega d}{u}$, 将此代入①式可得波动表达式③。

(方法三) 利用振动状态的传播特性来求解

由于此波从 A 向 D 传播, 波速为 u 。所以此波从 $x=d$ 的 D 点传播到任意位置 x 处时, 所需时间为 $\frac{x-d}{u}$ 。由此可知, 在 x 处的质点在 t 时刻的振动位移与 $x=d$ 处的质点在

$t - \frac{x-d}{u}$ 时刻的位移相同, 即

$$y(x,t) = y_D \left(t - \frac{x-d}{u} \right) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x-d}{u} \right) + \varphi_d \right]$$

这就是所求的波动表达式。

读者不妨思考, 如果此波沿 x 轴负向传播, 则波动表达式应取何种形式?

例 7.3 频率为 $\nu = 12.5 \text{ kHz}$ 的平面余弦纵波沿细长的金属棒传播, 棒的杨氏弹性模量为 $Y = 1.9 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, 棒的密度 $\rho = 7.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。取棒上某点为坐标原点, 已知坐标

原点处质元的振幅为 $A = 20 \times 10^{-3} \text{ mm}$ ，且 $t = 0$ 时，该质元恰好通过平衡位置并向正位移方向运动。试求：

- (1) 坐标原点处质元的振动表达式；
- (2) 该波的波动表达式；
- (3) 离原点 10cm 处质元的振动表达式；
- (4) 离原点 20cm 和 30cm 两点处质元的振动相位差；
- (5) $t = 0.0021 \text{ s}$ 时的波形函数。

解：(1) 由题意，可得此纵波的波速、波长和角频率分别为

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{1.9 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}}{7.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}} = 5.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{5.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{12.5 \times 10^3 \text{ s}^{-1}} = 0.40 \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 25 \times 10^3 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

设坐标原点处质点的振动表达式为

$$y_o(t) = A \cos(\omega t + \varphi_o)$$

由题意可知： $A = 20 \times 10^{-3} \text{ mm} = 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ ，且 $t = 0$ 时

$$y_o(0) = A \cos \varphi_o = 0, \quad v_o(0) = -A\omega \sin \varphi_o > 0$$

由此得： $\varphi_o = -\pi/2$

所以坐标原点处质点的振动表达式为

$$y_o(t) = 2.0 \times 10^{-5} \cos(25 \times 10^3 \pi t - \pi/2) \text{ m}$$

(2) 由波线上坐标原点处的振动表达式求波动表达式时，只需将 t 变换为 $t \pm \frac{x}{u}$ ，或

者在振动表达式的相位项中插入 $\pm \frac{2\pi}{\lambda} x$ 即可，当波沿 x 轴正向传播时取负号，负向传播时

取正号。所以此波的波动表达式为

$$y(x, t) = 2.0 \times 10^{-5} \cos \left[25 \times 10^3 \pi \left(t - \frac{x}{5 \times 10^3} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \text{ m}$$

式中 x 以 m 计， t 以 s 计。

(3) 将 $x = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$ 代入波动表达式，可得该处质元的振动表达式为

$$\begin{aligned} y_p(t) &= 2.0 \times 10^{-5} \cos \left[25 \times 10^3 \pi \left(t - \frac{0.1}{5 \times 10^3} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \text{ m} \\ &= 2.0 \times 10^{-5} \cos(25 \times 10^3 \pi t - \pi) \text{ m} \end{aligned}$$

(4) 因为这两点间的距离 $\Delta x = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$ ，所以相应的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = \frac{\pi}{2}$$

(5) 将 $t = 0.0021\text{s}$ 代入波动表达式, 可得该时刻的波形函数为 (式中 x 以 m 计)

$$\begin{aligned} y(x) &= 2.0 \times 10^{-5} \cos \left[25 \times 10^3 \pi \left(0.0021 - \frac{x}{5 \times 10^3} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \text{m} \\ &= 2.0 \times 10^{-5} \cos(52\pi - 5\pi x) \text{m} = 2.0 \times 10^{-5} \cos 5\pi x \text{m} \end{aligned}$$

例 7.4 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播。设已知

$t = 0$ 时的波形曲线如图 7.9 所示, 波速为 $12 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

试求:

- (1) 波线上任一质点的最大振动速率;
- (2) 图中 A、B 两点的相位关系;
- (3) 波动表达式。

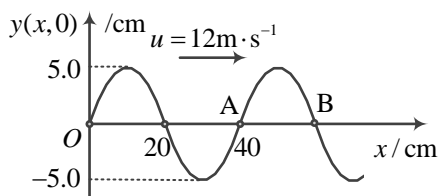


图 7.9 例 7.4 图

解: (1) 由波形曲线图 7.9 可看出: $A = 5.0 \text{cm}$ 、 $\lambda = 40 \text{cm}$ 、 $u = 12 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 所以此波的周期和角频率为

$$T = \frac{\lambda}{u} = \frac{0.4}{12} = \frac{1}{30} \text{s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 60\pi \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

所以波线上各质点的最大振动速率为

$$v_m = A\omega = 5.0 \times 10^{-2} \times 60\pi (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) = 9.4 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

(2) 因为 A、B 两点距离 $\Delta x = \lambda/2$, 且波动由 A 传播到 B, 所以 A 点相位比 B 点超前 π , 即 $\varphi_A - \varphi_B = \pi$ 。

(3) 由 $t = 0$ 时刻的波形图可知, 波线上坐标原点 ($x = 0$) 处的质元在初始时刻恰好处于平衡位置, 且向下运动, 所以该质元的初始运动状态为

$$y_o(0) = A \cos \varphi_o = 0, \quad v_o(0) = -A\omega \sin \varphi_o < 0$$

所以坐标原点处质点的振动初相位为

$$\varphi_o = \pi/2$$

由此可得波动表达式为

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_o \right) \\ &= 5.0 \times 10^{-2} \cos \left[(60\pi t - 5\pi x) + \pi/2 \right] \text{m} \end{aligned}$$

7.2.3 波动方程

将波动表达式 (7.9) 分别对 t 和 x 求二阶偏导数, 有

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -A\left(\frac{\omega}{u}\right)^2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

比较上述两式，可得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.18)$$

可以证明，只要是在无吸收的介质中、沿 x 轴传播的平面波，无论是否是简谐波，都满足方程(7.18)。所以式(7.18)称为平面波的**动力学微分方程**，简称**波动方程**(wave equation)。该方程也可以从受力分析的角度，用牛顿运动定律导出，此处略。感兴趣的读者可参考徐斌富主编的《大学基础物理》第三版 第一册 (P.190~191) (科学出版社 2013 年)。

§ 7.3 平面简谐波的能量

7.3.1 波的能量

波动在传播过程中，波源的振动状态通过弹性介质由近及远地传播出去，使介质中各点依次在各自的平衡位置附近做振动，当弹性波传播到介质中的某处时，该处原来不动的质点开始振动，因而具有动能，同时该处的介质也将产生形变，因而也具有形变势能。由此可见，波动传播的过程也是能量向外传播的过程，这是波动的另一个重要特征。

我们首先以弹性绳索上的横波为例来定性分析波线上动能和势能的变化情况。如图 7.10 所示，当媒质中的质元运动到波峰或波谷位置时，质元的振动速度为零，同时质元的形变为零（可直观的比较波峰、波谷处的质元和尚未振动的质元的大小关系），所以波峰或波谷处质元的动能和形变势能都为零；当质元运动到平衡位置时，位移为零，但其速度最大，同时该质元的形变也最大，所以回到平衡位置时质元的动能和势能同时达到最大值。

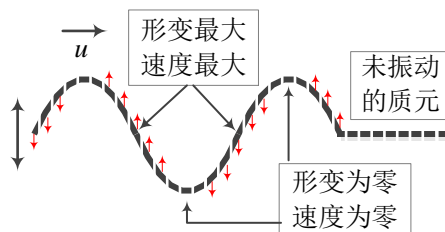


图7.10 波的能量

这表明，当波动在媒质中传播时，质元中的动能和势能总是同步变化的。在波峰、波谷处，动能势能同时为零；在平衡位置处，两者同时到达最大值。进一步的定量分析（见下面）还表明，任一质元中的动能和势能不仅同步变化，而且大小总是相等的。这就是波动的能量特点。

这表明，当波动在媒质中传播时，质元中的动能和势能总是同步变化的。在波峰、波谷处，动能势能同时为零；在平衡位置处，两者同时到达最大值。进一步的定量分析（见下面）还表明，任一质元中的动能和势能不仅同步变化，而且大小总是相等的。这就是波动的能量特点。

下面，我们以平面余弦弹性纵波在棒中传播的特殊情况为例，对波动能量的传播作进一步的定量分析。

如图 7.11 所示，假设匀质细棒的横截面积为 S ，棒的密度为 ρ ，杨氏弹性模量为 Y ，

在棒中 x 处取一段长度为 dx 的棒元，其体积为 $dV = Sdx$ ，质量为 $dm = \rho dV = \rho Sdx$ 。当波动传播到这里时，这段棒元由于振动而具有动能 dE_k ，由于形变而具有弹性势能 dE_p 。不失一般性，假设棒中平面简谐波的波函数为

$$y(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (7.19)$$

则该棒元的振动速度为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (7.20)$$

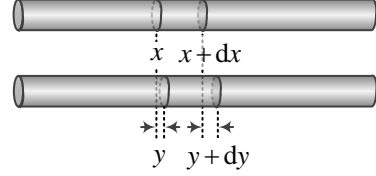


图7.11 细棒中弹性纵波的能量

所以该棒元内的**振动动能**为

$$dE_k = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho dV \cdot A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (7.21)$$

如果将这棒元看作一段劲度系数为 k 的弹簧，当其长度变化 dy 时，其弹性势能为

$dE_p = \frac{1}{2} k(dy)^2$ 。那么，这段棒元的劲度系数 k 如何表示呢？根据杨氏弹性模量 Y 的定义，

如果这段横截面积为 S 、长为 dx 的棒元在拉力 F 的作用下，其长度的伸长量为 dy ，则

$$Y = \frac{F/S}{dy/dx} \quad (7.22)$$

不难看出： Y 的物理意义就是其单位横截面上的拉力 F/S （称为应力），与单位长度上的伸长量 dy/dx （称为应变）之比。将上式改写为

$$F = \frac{YS}{dx} \cdot dy \quad (7.23)$$

将式 (7.23) 与胡克定律 $F = k \cdot dy$ 比较，可得这段棒元的劲度系数为 $k = \frac{YS}{dx}$ 。所以该棒元

中的弹性势能为

$$dE_p = \frac{1}{2} k(dy)^2 = \frac{1}{2} \frac{YS}{dx} (dy)^2 = \frac{1}{2} Y dV \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (7.24)$$

式中由于 y 是 x 和 t 的二元函数，所以应将 $\frac{dy}{dx}$ 用偏导表示， $dV = Sdx$ 。式 (7.24) 表明：

棒元内波动的弹性势能与应变的平方成正比。

又因为固体中纵波的传播速度为 $u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ ，所以 $Y = \rho u^2$ ，再由波动表达式 (7.19)，可

得应变为

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -A \frac{\omega}{u} \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

将上式代入式 (7.24)，整理后可得该棒元的**弹性势能**为

$$dE_p = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (7.25)$$

比较式 (7.21) 和式 (7.25), 可见

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

即在波动传播到的任意位置, 任意体积元 dV 内的动能和势能总是相等的, 且同步变化。所以, 体积元 dV 中波动的总能量为

$$dE = dE_k + dE_p = \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (7.26)$$

从式 (7.21)、式 (7.25) 和式 (7.26) 可以看出, 波动的能量和简谐振动的能量有明显的不同。在简谐振动系统中, 动能达到最大时势能为零, 势能达到最大时动能为零, 两者相互转化, 使系统的总机械能保持守恒。但在行波的传播过程中, 任意体积元中的动能和势能两者不仅大小相等, 而且随时间同步变化。动能达到最大时势能也达到最大, 动能为零时势能也为零。因此, 任何体积元中波动的总能量是不守恒的。同时式 (7.26) 还表明波的能量同样沿波的传播方向, 以速度 u 在向前传播。每个体积元不断地从后面的介质获得能量, 同时又把能量传递给前面的介质。这样, 能量就随着波动的行进在介质中向前传递。这说明波动也是能量传播的一种方式。

7.3.2 波的能量密度

人们将介质中单位体积内具有的波动能量称为**波的能量密度** (energy density of wave), 记为 w , 由式 (7.26) 可得

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (7.27)$$

上式说明, 波的能量密度是同样是时间 t 和空间坐标 x 的二元函数, 且沿波的传播方向 (x 轴) 以速度 u 传播。

通常把能量密度在一个时间周期 T 内的平均值, 叫做**平均能量密度**, 并用 \bar{w} 表示, 即

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} w dt$$

因为正弦函数的平方在一个周期内的平均值为 $1/2$, 所以平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (7.28)$$

此式虽然是从平面余弦弹性纵波的特殊情况中导出的, 但是这个结论对于所有弹性波都是适用的。

7.3.3 能流 平均能流密度

波在传播过程中伴随着能量的传播。人们将单位时间内通过介质中某一横截面的波的能量称为**能流** (energy flux)，用 P 表示。

假设在介质中有一个与波速 u 垂直的面积 S ，若波的能量密度为 w ，则在 dt 时间内通过面积 S 的能量等于以 S 为底，长为 $u dt$ 的体积 $u dt \cdot S$ 中包含的波的能量，如图 7.12 所示。所以通过横截面 S 的能流为

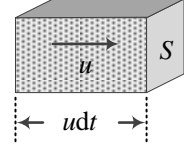


图7.12 能流

$$P = wuS = \rho A^2 \omega^2 u S \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

上式表明能流 P 与能量密度 w 一样是随时间周期性变化的，通常取其在一个时间周期 T 内的平均值，称为**平均能流** (average energy flux)，记为 \bar{P} ，所以平均能流为

$$\bar{P} = \bar{w}uS \quad (7.29)$$

式中 \bar{w} 是平均能量密度。

式 (7.29) 表明，平均能流不仅与波的平均能量密度 \bar{w} 、波速 u 有关，还与所取横截面积 S 的大小有关。所以平均能流不能客观地反映波自身的能量传播性质。为此需要引入**平均能流密度**的概念，它是波在单位时间内，通过与波的传播方向垂直的单位面积上的能量，也就是与传播方向垂直的单位面积上的平均能流。通常称为**平均能流密度**(average energy flux density)，也称为**波的强度**(intensity of wave)，简称**波强**，用 I 表示，即

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{w}u = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2 \quad (7.30)$$

式 (7.30) 表明，弹性介质中简谐波的强度与振幅的平方、角频率的平方成正比，与介质的密度和波速成正比。在国际单位制中，波强的单位为：瓦·米⁻² (W·m⁻²)。

在导出平面简谐波的波动表达式时，我们曾经假定在无吸收的均匀介质中传播时同一波线上各质元的振幅 A 相同。现在从波的能量观点说明平面简谐波振幅不随传播距离而变的原因。假设在平面波的同一波线上取两个与传播方向垂直的、面积都等于 S 的平面，如图 7.13 所示。用 A_1 和 A_2 分别表示平面波在这两平面处的振幅，由式 (7.29) 可知，通过这两个平面的平均能流分别为

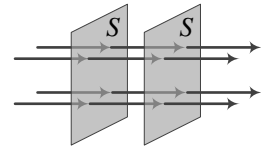


图7.13 平面波的能流

$$\bar{P}_1 = \bar{w}_1 u S = \frac{1}{2} \rho A_1^2 \omega^2 u S$$

$$\bar{P}_2 = \bar{w}_2 u S = \frac{1}{2} \rho A_2^2 \omega^2 u S$$

因为介质不吸收波的能量，所以 $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ ，由上两式可得 $A_1 = A_2$ 。

所以，平面简谐波在无吸收的介质中传播时振幅保持不变。

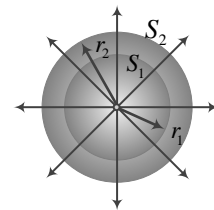


图7.14 球面波的能流

对于球面波，在无吸收的均匀介质中传播时振幅将与传播距

离成反比，传播距离越远、振幅越小，波的强度越弱。分析如下，在距离波源为 r_1 和 r_2 处取两个同心球面，面积分别为 $S_1 = 4\pi r_1^2$ 和 $S_2 = 4\pi r_2^2$ ，如图 7.14 所示。因为介质不吸收波的能量，所以通过这两个球面的能流应相等，即

$$\frac{1}{2} \rho A_1^2 \omega^2 u \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2} \rho A_2^2 \omega^2 u \cdot 4\pi r_2^2$$

式中 A_1 、 A_2 分别是波在两个球面处的振幅。

由此刻得

$$A_2 = \frac{r_1}{r_2} A_1$$

即球面波的振幅与离开波源的距离成反比。由于波的强度与振幅的平方成正比，所以球面波的波强与离开波源的距离 r 的平方成反比。

§ 7.4 惠更斯原理 波的衍射、反射和折射

7.4.1 惠更斯原理



惠更斯 (C. Huygens)

波动是波源的振动在弹性介质中的传播过程。由于介质中相邻质点之间都有相互作用，介质中任意一点的振动都将引起邻近质点的振动，因此波动所引起的任何一点的振动都可以看作新的波源。例如，水面上的一列水面波，假如在前进中遇到障碍物 AB，AB 上有一小孔，当小孔的孔径 a 比波长 λ 小时，就可看到，穿过小孔的波是圆形的，与原来波面的形状无关，这说明小孔可看作新的波源，如图 7.15 所示。

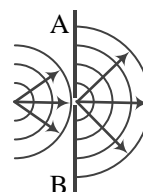


图7.15 障碍物上的小孔就是新的波源

荷兰物理学家惠更斯 (C. Huygens, 1629-1695) 在总结上述现象的基础上，于 1679 年首先提出了关于波的传播规律：**在波的传播过程中，波所到达的每一点都可看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波的包络面就是新的波前。**

这就是**惠更斯原理** (Huygens principle)。在图 7.16 中，用惠更斯原理分别描绘了球面波和平面波的传播。图中 S_1 为某一时刻 t 的波前，根据惠更斯原理， S_1 上的每一点都可以看作子波的波源，它们发出的球面子波，经 Δt 时间后形成半径为 $u\Delta t$ 的半球面，在波的前进方向上，这些子波的包络面 S_2 就是 $t + \Delta t$ 时刻新的波前。

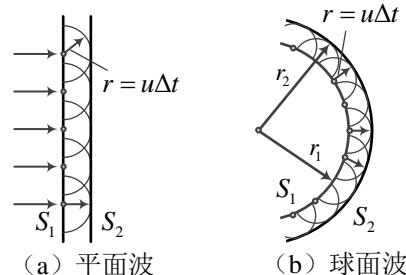


图7.16 用惠更斯原理确定波的传播方向

惠更斯原理对任何波动过程都是适用的，不论是机械波还是电磁波，不论这些波经过的

介质是均匀的还是非均匀的，只要知道某一时刻的波阵面，就可根据这一原理用几何方法来决定任一时刻的波阵面，因而在很广泛的范围内解决了波的传播问题。

应该指出，惠更斯原理并没有说明各个子波在传播中对某一点的振动究竟有多少贡献。这个问题直到 19 世纪初菲涅耳在解释光的衍射现象时对惠更斯原理作了补充后才得到解决。

7.4.2 惠更斯原理的应用

根据惠更斯原理，可以简捷地用作图方法说明波在传播中发生的衍射、散射、反射和折射等现象。

1. 波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物时，能够偏离原来的直线传播方向，绕到障碍物后面的绕射现象，称为**波的衍射**（diffraction）。如图 7.17 所示，平面波通过屏障上的狭缝后一部分偏离原来的传播方向而绕到屏障的背后。这一现象可用惠更斯原理作定性说明。

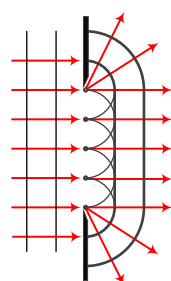


图7.17 波的衍射

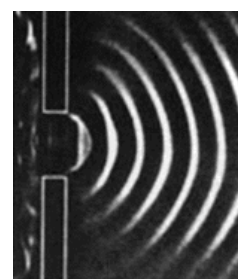


图7.18 水面波的衍射

当波阵面到达狭缝时，狭缝处各点成为子波

源，它们发射的子波的包迹在缝的边缘附近不再是平面，从而使波的传播方向偏离原方向而向外延展，绕到屏障背后的区域。图 7.18 为水波通过屏障上的小孔时产生的衍射图样。

衍射现象是否显著，与缝宽 a 和波长 λ 的比值 a/λ 有关，当 $a/\lambda \gg 1$ 时，衍射现象不明显； $a/\lambda \sim 1$ 时，衍射现象比较明显； a/λ 越小，衍射现象越明显。衍射现象是波动的重要特征之一。

2. 波的反射和折射

当波传播到两种介质的分界面时，一部分从界面返回，形成反射波；另一部分穿过界面，形成折射波。根据实验的结果，可得到波动的反射定律和折射定律。这两个定律也可以用惠更斯原理来证明。

(1) 反射定律

设有一平面波向两种介质的分界面 MN 传播，如图 7.19 所示。在 t 时刻，入射波的波前为 AB（即通过 AB 线并与图面垂直的平面），波阵面上的 A 点与分界面相遇后，波阵面上 A_1 、B 等各点相继到达分界面上

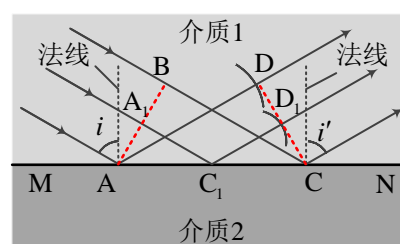


图7.19 波的反射

C_1 、 C 各点。由于反射波和入射波的传播速度相等，在 $t + \Delta t$ 时刻，当 B 点子波源的波面传到 C 点时， A 点反射波的波面就是以 \overline{AD} 为半径的半球面， C_1 点反射波的波面是以 $\overline{C_1D_1}$ 为半径的半球面，而且 $\overline{BC} = \overline{AD} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1D_1}$ 。过 C 点作这些半球面的公切线（面） CD ，则 CD 就是反射波在 $t + \Delta t$ 时刻的波前。由图中的几何关系不难证明，入射角等于反射角，即 $i = i'$ ，同时还可以直观地看出入射线与反射线在同一平面内、且分居界面法线的两侧。这两点就构成了反射定律基本内容。

(2) 折射定律

当波动从一种介质进入另一种介质时，由于在两种介质中的波速不同，在分界面上要发生折射现象。设在介质 1 中的波速是 u_1 ，在介质 2 中的波速是 u_2 ， MN 为两种介质的分界面。在 t 时刻，入射波的波阵面在 AB 位置，如图 7.20 所示。在 $t + \Delta t$ 时刻，当 B 点子波源的波前传到 C 点时， A 点的子波源在介质 2 中的波前就是以 \overline{AE} 为半径的半球面，且

$$\Delta t = \frac{\overline{BC}}{u_1} = \frac{\overline{AE}}{u_2} \quad (7.30)$$

同理和可以画出在同一时刻， AC 之间其它子波源在介质 2 中的波前。过 C 点作一条与这些半球面的公切线（面） CE 。则 CE 就是折射波在 $t + \Delta t$ 时刻的波前。由图中的几何关系不难得出

$$\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\sin i} = \frac{\overline{AE}}{\sin r} \quad (7.31)$$

将式 (7.30) 和 (7.31) 联立，容易得到

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = n_{21} \quad (7.32)$$

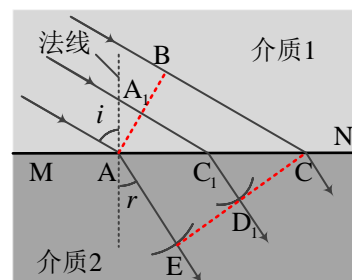


图7.20 波的折射

式中 $n_{21} = \frac{u_1}{u_2}$ 称为介质 2 对介质 1 的相对折射率。上式表示，入射角的正弦与折射角的

正弦之比等于波动在介质 1 中的波速与介质 2 中的波速之比。从图中还可以看出，入射线、折射线和分界面的法线在同一平面内，且入射线和折射线分居法线两侧。以上两点就是折射定律的基本内容。

由式 (7.32) 可知，若 $u_1 > u_2$ ，则 $r < i$ ，折射线偏向法线；反之，若 $u_1 < u_2$ ，则 $r > i$ ，折射线远离法线。

§ 7.5 波的干涉

7.5.1 波的叠加原理

如果有几列波同时在同一种介质中传播，那么当它们在空间某处相遇以后，每一列波都

将保持自己原有的特性（频率、波长、振动方向等）继续传播，就像在各自的路径中，并没有遇到其它波一样，这称为**波传播的独立性原理**。例如在乐队合奏或几个人同时讲话时，我们能够辨别出各种乐器或每个人的声音，这表明某种乐器或某个人发出的声波不受其它乐器或其他人同时发出的声波的影响。在水面上两列水波相遇后或在空中几束手电筒光相遇后，各列水波或光波也都保持自己原有的特性继续传播。这些都是波传播的独立性原理的实例。当几列波在某个区域内相遇时，在任一时刻相遇区域内的任意一个质点的振动是各列波单独存在时在该点所引起的振动合振动，这称为**波的叠加原理**（superposition principle）。

图 7.21 给出了同一直线上沿相反方向传播的两个孤波叠加的分解图。

应该指出，波的叠加原理并不普遍成立，只有在线性媒质中当波的强度较小时才成立。对于强度很大的波，或者当波在非线性媒质中传播时，叠加原理不成立。一般情况下，声波和电磁波的强度不是很大，所以，通常总是不加说明地使用叠加原理。

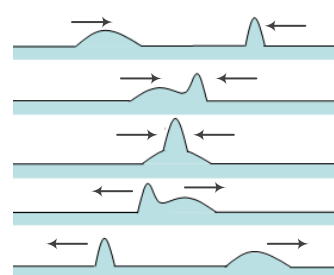


图7.21 同一直线上沿相反方向传播的两列波的叠加

7.5.2 波的干涉

首先来考察水面波的干涉。将两个小球装在同一个支架上，使小球的下半球与水面接触。当支架沿着竖直方向以一定的频率振动时，两个小球和水面的触点就形成了两个振动方向相同、振动频率相同、振动相位差为零的两个波源，在水面上激起两列圆形水面波。它们在水面上相遇时，呈现出如图 7.22 所示的图案，由图可以看出，有些地方水面的起伏很厉害，这说明这些地方质点的振动加强了；有些地方水面的起伏很小，几乎静止不动，这说明这些地方质点的振动减弱了，甚至完全静止不动。

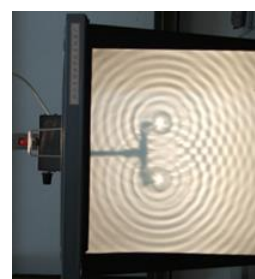


图7.22 水面波的干涉

人们将**振动方向相同、振动频率相同、振动相位差恒定的两个波源**发出的波在空间相遇时，在相遇区域中有些质点的振动始终加强、有些点的振动始终减弱的现象，称为**波的干涉**（interference）现象。能产生干涉现象的两列波称为**相干波**，相应的波源称为**相干波源**。显然两波源的**振动方向相同、振动频率相同、振动相位差恒定不变**是两列波能够产生干涉的必要条件。

图 7.23 是用单个波源实现波干涉的一种常用方法。在波源 S 附近放置一个障碍物 AB ，在 AB 上有两

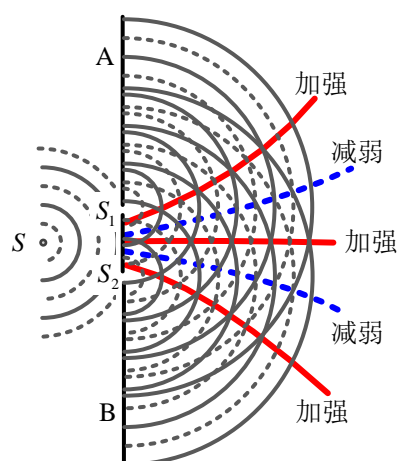


图7.23 用单波源实现波的干涉

个小孔 S_1 和 S_2 。根据惠更斯原理，小孔 S_1 和 S_2 可看作子波波源，它们发出的子波就具有振动频率相同、振动方向相同、相位差恒定的特点，满足相干条件，所以能产生干涉现象。图中，由 S_1 和 S_2 发出的一系列的球形波阵面，其波峰用实线圆弧表示，波谷用虚线圆弧表示，两相邻波峰或波谷之间的距离是一个波长 λ 。在两列波相遇的空间，对于两列波波峰与波峰重合（或波谷与波谷重合）的点，两列波在该点引起的振动相位相同，因而合振幅最大，干涉加强。对于两列波波峰与波谷重合的点，两列波在该点引起的振动相位相反，因而合振幅最小，干涉减弱。在图中，合振幅最大的各点用粗实线连接起来，合振幅最小的各点用粗虚线连接起来。

下面从波的叠加原理出发，来定量讨论两列波干涉的情况。如图 7.24 所示，设有两个相干波源 S_1 和 S_2 ，它们的振动初相位分别为 φ_1 和 φ_2 ，并且 $\varphi_2 - \varphi_1$ 恒定不变。两波源到空间某点 P 的距离分别为 r_1 和 r_2 ，它们发出的两列相干波在 P 点引起的振动表达式分别为

$$y_1 = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \varphi_1\right)$$

$$y_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \varphi_2\right)$$

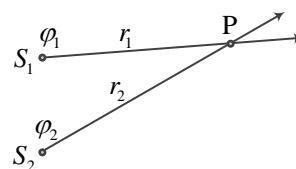


图7.24 两列相干波的干涉

式中 A_1 和 A_2 分别为两列波单独在 P 点产生的振幅，根据叠加原理， P 点的合振动为

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.33)$$

式中 A 和 φ 分别是合振动的振幅和初相。根据同方向、同频率简谐振动的合成规律，可得

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin\left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1 \cos\left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \cos\left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)} \quad (7.34)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right)} \quad (7.35)$$

由式 (7.35) 可以看出， P 点合振动的振幅不仅与 A_1 、 A_2 的大小有关，还与两列相干波在 P 点所引起的两个振动的相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \quad (7.36)$$

有关。由于两波源的相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$ 是恒定的，所以对于相遇区域中的某个给定点， $\Delta\varphi$ 也是恒定的，故合振幅 A 也是恒定的。而在不同的点上，合振幅一般不相同。

由式 (7.35) 可知，凡是满足

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.37)$$

的空间各点, $A = A_{\max} = A_1 + A_2$, 这些点合振幅最大, 这称为**干涉加强**, 或**相长干涉**。凡是满足

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.38)$$

的空间各点, $A = A_{\min} = |A_1 - A_2|$, 这些点合振幅最小, 称为**干涉减弱**。如果 $A_1 = A_2$, 则 $A = A_{\min} = 0$, 即该点的合振幅为零, 这称为**相消干涉**。

式 (7.37) 和式 (7.38) 分别称为两列相干波干涉加强和干涉减弱的条件。

如果 $\varphi_2 = \varphi_1$, 即两相干波源同相位, 则上述干涉加强与减弱条件可简化为

$$\delta = r_2 - r_1 = k\lambda \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{合振幅最大、干涉加强}) \quad (7.39)$$

$$\delta = r_2 - r_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{合振幅最小、干涉减弱}) \quad (7.40)$$

式中 $\delta = r_2 - r_1$ 是从波源 S_1 和 S_2 发出的两列相干波到达 P 点时所经历的路程之差, 常称为**波程差**。式 (7.39) 和 (7.40) 表明, 两个相干波源同相位时, 在两列波的叠加区域内, 波程差等于波长整数倍的各点处, 合振幅最大; 波程差等于半波长奇数倍的各点处, 合振幅最小。

由于波的强度正比于振幅的平方, 所以两列波叠加后的强度

$$I \propto A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi$$

即

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \Delta\varphi \quad (7.41)$$

式中 $I_1 \propto A_1^2$ 、 $I_2 \propto A_2^2$ 分别是两列波单独传播时波的强度。不难看出, 在空间各点, 由于两列相干波所引起的振动的相位差 $\Delta\varphi$ 不同, 所以干涉后合成波的强度在空间各点不再均匀分布, 有些地方加强了 ($I > I_1 + I_2$), 有些地方减弱了 ($I < I_1 + I_2$)。

如果 $I_1 = I_2 = I_0$, 则式 (7.41) 可写成

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (7.42)$$

在满足 $\Delta\varphi = 2k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的各点处, $I = 4I_0$, 波的强度最大, 等于单个波强度的 4 倍。在满足 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的

各点处, $I = 0$, 波的强度最小。合成波的强度 I 随相位差 $\Delta\varphi$ 变化的情况如图 7.25 所示。

因为只有波动的叠加, 才能产生干涉现象, 所以, 干涉现象是波动具有的又一重要特征, 它和衍射现象一样都是作为判断某种运动是否具有波动性的主要依据。干涉现象对于光学、声学等都非常重要, 对于近代物理学的发展也有重大影响。

最后应该指出, 波的干涉是波动叠加的一种特殊情况。只有满足相干条件的两列波叠加时才可以产生干涉现象。

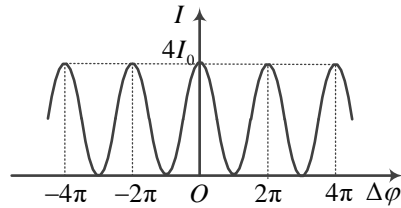


图7.25 合成波的强度随 $\Delta\varphi$ 的变化

例 7.5 如图 7.26 所示, A、B 为两个相干波源, 振幅相同, 两者相距 20 m。两列波的波速均为 $200\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 、频率均为 100Hz , 两波源的振动相位差为 π 。试求在两列波的连线上因干涉而静止的各点的位置。

解: 取 AB 的连线为 x 轴, 并以 A 点为 x 轴的坐标原点。

由题意可知, $\varphi_A - \varphi_B = \pi$, $\lambda = \frac{u}{\nu} = 2\text{m}$ 。首先考察 AB 之间的任意一点 P , 要使 P 点因干涉而静止, 则必须满足

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_P &= (\varphi_A - \varphi_B) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_{PA} - r_{PB}) \\ &= \pi - \pi(x - 20 + x) = (2k + 1)\pi \quad \text{其中: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

由此解得

$$x = 10 - k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10$$

即在 AB 之间, 距离 A 点为 0m、1m、2m、 \dots 、19m、20m 的各点都因干涉而静止。

再考虑 A 点外侧的任意一点 Q 。因两列波在 Q 点的振动相位差为

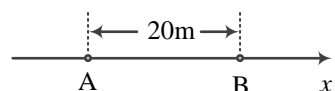
$$\Delta\varphi_Q = (\varphi_A - \varphi_B) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_{QA} - r_{QB}) = \pi - (-20\pi) = 21\pi$$

满足相消干涉条件, 故 A 外侧的所有质点都因干涉而静止。

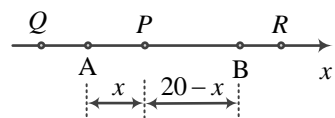
同理考虑 B 点外侧的任意一点 R 。因两列波在 R 点的振动相位差为

$$\Delta\varphi_R = (\varphi_A - \varphi_B) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_{RA} - r_{RB}) = \pi - 20\pi = -19\pi$$

满足相消干涉条件, 故 B 外侧的所有质点同样都因干涉而静止。



(a) 例题7.5图



(b) 例题7.5解图

图7.26 例题7.4解图

§ 7.6 驻波

7.6.1 驻波的形成和特点

两列振幅相同的相干波在同一直线上沿相反方向传播时相干叠加所产生的波叫驻波

(standing wave)。驻波是干涉的特例。图 7.27 是一个产生弦驻波的演示实验装置。一条绷紧的水平弦线(橡皮筋), 左端系在固定的金属棒 A 上, 右端系在振子 B 上, 振子 B 可在竖直方向做微小振动。调节 AB 之间的距离可改变弦线中的张力。当振子 B 上下振动时, 在弦线上产生一列向左传播的简谐横波, 该波达到 A 点后被反射, 产生向右传播的反射波。这样入射波和反射波在同一弦线上沿相反方向传播, 并相干叠加。适当改变振子 B

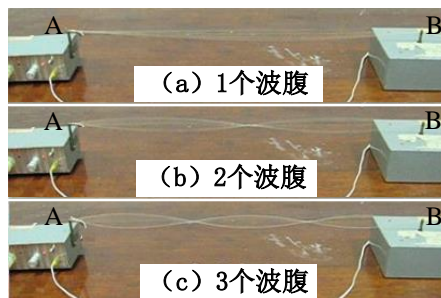


图7.27 弦驻波演示实验

的振动频率就可使弦线出现如图 7.27 (a)、(b)、(c) 等不同的波动状态，这就是驻波。

从图中可以看出，驻波有如下特点：

(1) 波线上有位置固定的波腹和波节。驻波形成后，弦线上的各质点都在做振幅不同简谐振动；振幅最大的点称为**波腹** (wave loop)，振幅为零 (静止不动) 的点称为**波节** (wave node)。可以证明 (见下一小节)，相邻两个波节或相邻两波腹之间的距离都是波长的一半，即 $\lambda/2$ ；

(2) 在相邻的两个波节之间，各质点的振动相位完全相同，即它们总是同时到达最大位移处，又同时回到平衡位置并沿相同的方向运动；在一个波节的两侧，各质点的振动相位相反，即当波节一侧的质点到达正最大位移时，另一侧的质点恰好到达负最大位移处；

(3) 波线上没有波形与能量的传播 (这是称为驻波的根本原因)。

7.6.2 驻波方程

上面已指出：驻波是由两列振幅相等的相干波在同一直线上沿相反方向传播时相干叠加所产生的一种特殊的干涉现象。假设沿 x 轴正向传播的波为

$$y_1(x, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_1\right)$$

沿 x 轴负方传播的波为

$$y_2(x, t) = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_2\right)$$

利用余弦函数的和差化积公式，可得合成波 (即驻波) 的表达式为

$$y_{\text{合}}(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) \quad (7.43)$$

式 (7.43) 就称为**驻波方程**。

由驻波方程可以解释驻波的上述三个特点

1、关于波腹和波节

由驻波方程 (7.43) 可知：波线上的各个质点都在做同频率的简谐振动，各点的振幅为

$$A_{\text{合}} = \left| 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| \quad (7.44)$$

这表明驻波上各点的振幅不同，其大小与位置 x 有关。当 $\left| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| = 1$ ，合振幅

达到最大值 ($A_{\text{合}} = 2A$)，这就是波腹，由此得波腹的位置条件为

$$\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.45)$$

当 $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0$ 时，合振幅为零（ $A_{\text{合}} = 0$ ），所以波节的位置条件为

$$\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.46)$$

由式（7.45）或（7.46），可以证明，相邻两个波节或波腹之间的距离为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2} \quad (7.47)$$

从干涉的角度来说，所有波腹位置就是两列相干波满足相长干涉的位置，波节位置就是满足相消干涉的位置。

2、关于驻波中各点的相位

在驻波方程式（7.43）中，表面上看，各点的振动相位都是“ $\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$ ”，与各点的位置 x 无关。但由于 $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$ 有正负之分，在相邻的两个波节之间，该项的正负号不变，但在一个波节的两侧，该项的正负号相反。该项为正的各点，振动相位均为“ $\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$ ”；该项为负的各点，振动相位变为“ $\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \pi$ ”。因此在相邻的两个波节之间，各点的振动相位相同，在每个波节的两侧，相位相反。

3、关于驻波的能量

由于形成驻波的两列相干波振幅相同，传播方向相反，因此它们平均能流密度的大小相等，方向相反。所以驻波的总平均能流密度为零。这表明驻波中没有能量传播。驻波的能量只能在波腹和波节的小范围之间来回迁移。下面我们以弦驻波为例来定性解释这种小范围内能量迁移的规律。

假设在某一时刻，波线上的所有质元全部运动到平衡位置，则各处的质元均无弹性形变，即势能为零，但是各质点的运动速度达到最大值，动能最大，又所有质点中波腹处质点的速度最大，所以此刻驻波的能量主要集中于波腹处，以动能的形式体现。经过 $1/4$ 周期时，各质点都运动到了最大位移处，速度为零，动能为零，但是各处质元的形变都达到了最大值，势能最大（相比而言，波腹处形变最小，波节处形变最大），所以此刻驻波的能量主要集中在波节处，以势能的形式体现。再过 $1/4$ 周期，各质点又再次运动到平衡位置，势能全部转变成了动能，并集中在波腹附近；…如此反复。由此可知，驻波中的能量只是在波腹和波节之间的小范围内发生迁移和转化，没有形成能量的传播，也没有波形（或振动状态的）传播。

7.6.3 半波损失

在图 7.27 给出的弦驻波演示实验中，反射点 A 是固定不动的，该处是一个波节，满足相消干涉条件。由波的干涉条件可知，当反射点固定不动时，反射波与入射波分别在反射点 A 引起的两个振动相位相反，即反射波和入射波在该处的振动相位差为 π 。由于行波在传播过程中，沿波的传播方向各点的振动相位是依次落后的，只有相距半个波长 ($\lambda/2$) 的两个质点，它们的振动相位差才是 π 。所以反射波在反射点由于反射而引起的 π 的相位跃变，相当于反射波在反射时突然损失（或增加）了半个波长的波程。这种现象我们称为**半波损失**（half-wave loss）或**相位突变**。

那是不是所有反射都会有出现半波损失呢？答案是否定的！一般情况下，入射波在两种介质的分界面处反射时，反射波在反射点是否出现相位突变（半波损失），即反射点究竟出现波节还是波腹，决定于两种介质的性质以及入射角的大小等诸多因素。在波动垂直入射的条件下，对弹性波而言，反射时是否出现半波损失决定于 ρu 的乘积在两种介质中的相对大小，其中 ρ 是介质的密度， u 是介质中的波速。通常，把乘积 ρu 较大的介质称为波密介质，乘积 ρu 较小的介质称为波疏介质。

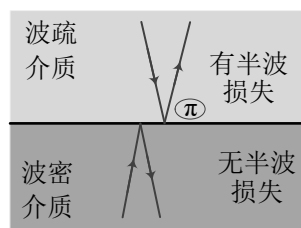


图7.28 半波损失

当波从波疏介质传播到波密介质，在分界面处反射时，反射点出现波节，就是说，反射波在反射点的相位相对入射波有 π 的突变，反射波有半波损失。当波从波密介质向波疏介质传播，在分界面处反射时，反射波在反射点的相位与入射波在该点的相位相同，反射点出现波腹，反射波没有半波损失。这种情况可形象地用图 7.28 来图示。图 7.29 (a)、(b) 中分别给出了一端固定在振源上的软绳或钢锯条，另一端分别为自由端 (a) 和固定端 (b) 时产生的驻波情况。

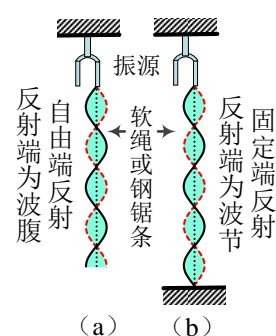


图7.29 反射端分别为自由端和固定端的驻波

可以看出，当反射端为自由端时，反射端是波腹，没有半波损失。当反射端为固定端时，反射端是波节，反射波在反射端有半波损失，出现相位突变。

相位突变问题不仅在机械波反射时存在，在电磁波和光波的反射时也同样存在。对于光波，通常把反射面两侧折射率 n 较大的介质称为光密介质，折射率 n 较小的介质称为光疏介质。当来自光疏介质的入射光在光密介质表面反射时，反射波在反射点也有半波损失。反之，来自光密介质的入射光在光疏介质表面反射时，反射波在反射点没有半波损失。

7.6.4 驻波的简正模式

在两端固定的拉紧的弦线上形成驻波时，由于弦的两个固定端必须是波节，因而弦长 L 与波长 λ 之间必须满足以下条件

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.48)$$

该式表明，不是任何波长的波动都可以在弦上形成驻波的。

式 (7.48) 可以改写为

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (7.49)$$

由波速 $u = \lambda \nu$ ，可得到能形成驻波的各种频率是

$$\nu_n = n \frac{u}{2L} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (7.50)$$

其中， $n=1$ 的频率称为基频，其它频率依次称为 2 次谐频，3 次谐频，…。对声驻波则称为基音和泛音。各种允许频率所对应的驻波称为**简正模式**，如图 7.30 所示，相应的频率称为**简正频率**。对两端固定的弦，有无限多个简正模式和简正频率。一个系统的简正模式所对应的简正频率是系统的固有频率。如果通过外界驱使系统振动，当驱动力的频率等于系统的某一固有频率时，系统将被激起振幅很大的驻波，这种现象也称为**共振或谐振**。

对一端固定、一端自由的棒（或一端封闭、一端开放的管），由于自由端为波腹，所以驻波条件为

$$L = (2n-1) \frac{\lambda_n}{4} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (7.51)$$

它的简正模式见图 7.31 所示。对两端自由的棒（或两端开放的管），驻波条件与两端固定的情况相同。锣面、鼓皮也都是驻波系统，由于是二维的情况，它们的简正模式要比棒的简正模式复杂得多。

例 7.6 如图 7.32 所示，一列在空气中沿 x 轴正方向传播的平面简谐声波，其波动表达式为

$$y_{\lambda}(x, t) = 5.0 \times 10^{-5} \cos \left[680\pi \left(t - \frac{x}{340} \right) \right] \text{ m}$$

式中 t 以 s 记， x 以 m 记。已知该波在 $x=10.25\text{m}$ 处被一面竖直的墙壁全部反射。忽略振幅随传播距离的衰减问题，试求

- (1) 反射波的波动表达式；
- (2) 驻波方程；
- (3) O 、 P 之间所有波腹和波节的位置。

解： (1) 由题意可知，入射波沿 x 轴正方向传播，反射波沿 x 轴负向，所以不妨设反射波的波动表达式为

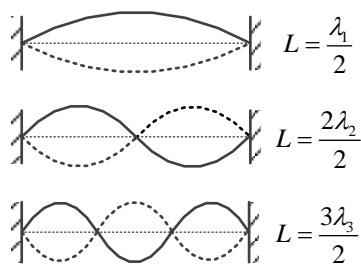


图7.30 两端固定的弦振动的简正模式

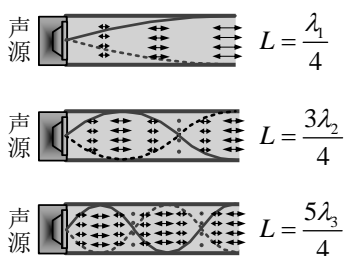


图7.31 一端开口的玻璃管中声振动的简正模式

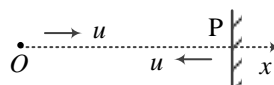


图7.32 例题7.6图

$$y_{\text{反}}(x, t) = 5.0 \times 10^{-5} \cos \left[680\pi \left(t + \frac{x}{340} \right) + \varphi_{\text{反}} \right] \text{ m}$$

其中 $\varphi_{\text{反}}$ 是反射波在坐标原点 ($x=0$) 处的振动初相位。又对于声波来说, 空气是波疏介质, 墙壁是波密媒质, 所以反射端为波节。即反射波在反射点有半波损失, 或者说反射波和入射波在 P 点满足相消干涉条件: $\Delta\varphi_{\text{P}} = \varphi_{\text{反P}} - \varphi_{\text{入P}} = \pi$, 为此将 $x_{\text{P}} = 10.25\text{m}$ 代入两个波动表达式, 必有

$$\left[680\pi \left(t + \frac{10.25}{340} \right) + \varphi_{\text{反}} \right] - \left[680\pi \left(t - \frac{10.25}{340} \right) \right] = \pi$$

解此方程可得: $\varphi = -40\pi$ 。所以反射波的波动表达式为

$$\begin{aligned} y_{\text{反}}(x, t) &= 5.0 \times 10^{-5} \cos \left[680\pi \left(t + \frac{x}{340} \right) - 40\pi \right] \text{ m} \\ &= 5.0 \times 10^{-5} \cos \left[680\pi \left(t + \frac{x}{340} \right) \right] \text{ m} \end{aligned}$$

(2) 利用余弦函数的和差化积公式, 可得驻波方程为

$$y(x, t) = y_{\text{入}}(x, t) + y_{\text{反}}(x, t) = 1.0 \times 10^{-4} \cos(2\pi x) \cos(680\pi t) \text{ m}$$

(3) 由驻波方程可知, 波线上各点的合振幅为: $A = |1.0 \times 10^{-5} \cos(2\pi x)|$

令: $\cos(2\pi x) = \pm 1$, 可得波腹位置

$$2\pi x = k\pi \quad \text{即} \quad x = k/2 \quad k = 0, 1, 2, \dots, 20$$

令: $\cos(2\pi x) = 0$, 可得波节位置

$$2\pi x = (2k+1)\pi/2 \quad \text{即} \quad x = (2k+1)/4 \quad k = 0, 1, 2, \dots, 20$$

§ 7.7 多普勒效应

7.7.1 机械波的多普勒效应

在前面的讨论中, 波源与观察者(或说接收器)相对于介质都是静止的, 所以观察者接收到波的频率与波源发出波的频率是相同的。但是在日常生活和科学观测中, 经常会遇到波源或观察者相对于介质运动的情况。例如, 当火车接近观察者时, 火车汽笛的音调比其远离时要高。这种由于波源或观察者相对于介质的运动, 使观察者接收到的频率与波源的频率不同的现象是由多普勒(J. C. Doppler)在 1842 年首先发现的, 故称为**多普勒效应**(doppler effect)。下面就来分析这一现象。

首先应分清楚波源的频率、观察者接收到的频率和波的频率。**波源的频率** ν_s 是波源在单位时间内振动的次数, 或在单位时间内发出的完整波的数目; **观察者接收到的频率** ν_r 是

观察者在单位时间内接收到的振动次数或完整波的数目；而**波的频率** ν 则是介质中质点在单位时间内的振动次数，或单位时间内通过介质中某点的完整波的数目，它满足 $\nu = u/\lambda$ 的关系，其中 u 为**介质中的波速**， λ 为介质中的波长。只有当波源和观察者都相对介质静止时，这三个频率才是相等的，其他情形一般不相同。为简单起见，先讨论波源和观察者沿着二者的连线方向相对于介质运动的情况。设**波源相对介质的运动速度**为 v_s ，**观察者相对介质的运动速度**为 v_R 。下面分三种情况来讨论。

1、波源不动，观察者以速度 v_R 相对于介质运动

在观察者向着波源运动的情形下，观察者在单位时间内所接收到的完整波数比他静止时接收到的要多。在单位时间内波在介质中传播的距离为 u ，观察者相对介质运动的距离为 v_R ，观察者相对于波列运动的距离为 $u + v_R$ ，在这距离内的完整波数就是观察者在单位时间所接收的完整波数，如图 7.33 所示，于是观察者接受到的频率为

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{\lambda} = \frac{u + v_R}{u/\nu} = \frac{u + v_R}{u} \nu$$

由于波源在介质中静止，所以波的频率就等于波源的频率， $\nu = \nu_s$ ，由此得到：波源静止时，若观察者向着波源运动，观察者接收到的频率为

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u} \nu_s \quad (7.53a)$$

即观察者接收到的频率高于波源的频率。

类似的分析可得，波源静止时，若观察者背离波源运动，观察者接收到的频率为

$$\nu_R = \frac{u - v_R}{u} \nu_s \quad (7.53b)$$

此时，观察者接收到的频率低于波源的频率。

综合所述，当波源不动，观察者以速度 v_R 相对于介质运动时，观察者接收到的频率为

$$\nu_R = \frac{u \pm v_R}{u} \nu_s \quad (7.54)$$

式中当观察者向着波源运动时取“+”号，当观察者背离波源运动时取“-”号。

2、观察者不动，波源以速度 v_s 相对于介质运动

当波源运动时，介质中的波长将发生变化，如图 7.34 (a) 所示，在波源运动的前方，波长变短；波源的后方，波长变长。波源在运动中仍按自己的频率发射波，在一个周期 T_s 内，波在介质中传播距离 uT_s ，发出一个完整波形。在这段时间内，波源位置由 S 运动到 S_1 ，移过距离 $v_s T_s$ ，将前方的波形压缩，后方的波形拉伸，如图 7.34 (b) 中实线所示，图中虚线

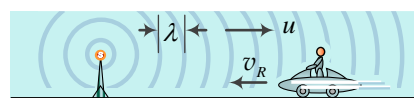


图7.33 多普勒效应
波源不动 观察者相对于介质运动

是波源不动时的波形。由于波源的运动，在波源运动的前方，介质中的波长为 $\lambda = uT_s - v_s T_s$ ，在波源的后方，介质中的波长为 $\lambda = uT_s + v_s T_s$ 。于是在波源运动的前方，波的频率为

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{(u - v_s)T_s} = \frac{u}{u - v_s} \nu_s$$

在波源运动的后方，波的频率为

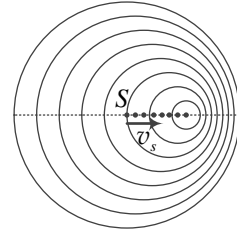
$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{(u + v_s)T_s} = \frac{u}{u + v_s} \nu_s$$

由于观察者静止，他接收到的频率就是波的频率，因而得到结论：若波源向着观察者运动，静止观察者接受到的频率为

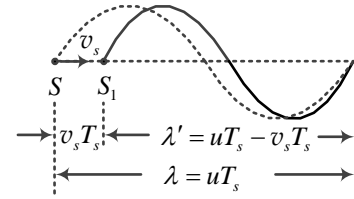
$$\nu_R = \nu = \frac{u}{u - v_s} \nu_s \quad (7.55a)$$

若波源背离观察者运动，静止观察者接受到的频率为

$$\nu_R = \nu = \frac{u}{u + v_s} \nu_s \quad (7.55b)$$



(a) 前方压缩 后方拉长



(b) 波源运动 波长变化

图7.34 多普勒效应 观察者不动 波源相对于介质运动

当波源向着观察者运动时，观察者接收到的频率高于波源的频率；当波源背离观察者运动时，观察者接收到的频率低于波源的频率。

综合式 (7.55a) 和 (7.55b) 可知：当观察者不动，波源相对于介质运动时，观察者接收到的频率为

$$\nu_R = \frac{u}{u \mp v_s} \nu_s \quad (7.56)$$

式中当波源向着观察者运动时取“-”号，当波源远离观察者时取“+”号。

3、观察者与波源同时相对介质运动

根据以上讨论，由于波源的运动，介质中波的频率为

$$\nu = \frac{u}{u \mp v_s} \nu_s$$

由于观察者的运动，观察者接收到的频率与波的频率之间的关系为

$$\nu_R = \frac{u \pm v_R}{u} \nu$$

由此可得当观察者和波源同时运动时，观察者接收到的频率和波源的频率关系为

$$\nu_R = \frac{u \pm v_R}{u \mp v_s} \nu_s \quad (7.54)$$

式中“+”、“-”号的取法与式 (7.54) 和式 (7.56) 中的规定相同。

如果波源和观察者的运动是任意方向的，那么只要将速度在波源和观察者连线上的分量

代入上述公式即可。不过随着两者的运动，在不同时刻 v_s 和 v_r 的分量也不同，这种情况下观察者接收到的频率将随时间变化。如果波源和观察者的运动方向与两者的连线垂直，则 $v_s = v_r = 0$ ，即机械波没有横向多普勒效应发生。对于光波则要考虑相对论，存在横向多普勒效应。

例 7.7 一警报器发射频率为 1kHz 的声波，离开观察者向一墙壁运动，其速度为 $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。已知：空气中的声速为 $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，试求：

- (1) 观察者直接听到从警报器传来声音的频率；
- (2) 观察者听到从墙壁反射回来的声音频率；
- (3) 观察者听到的拍频。

解： 已知 $\nu_s = 1000 \text{ Hz}$ ， $v_s = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ， $u = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- (1) 由式 (7.53b) 得观察者听到直接从警报器传来声音的频率

$$\nu_1 = \frac{u}{u + v_s} \nu_s = \frac{340}{340 + 10} \times 1000 \text{ Hz} = 971.4 \text{ Hz}$$

- (2) 墙壁接收到的声音频率由式 (7.53a) 得到

$$\nu_2' = \frac{u}{u - v_s} \nu_s = \frac{340}{340 - 10} \times 1000 \text{ Hz} = 1030.3 \text{ Hz}$$

墙壁反射的声音频率等于入射声音的频率 ν_2' ，静止观察者听到反射声音的频率

$$\nu_2 = \nu_2' = 1030.3 \text{ Hz}$$

- (3) 两波合成的拍的频率为

$$\nu_B = \nu_2 - \nu_1 = (1030.3 - 971.4) \text{ Hz} = 58.9 \text{ Hz}$$

例 7.8 用一固定波源发出频率为 100kHz 的超声波，监测汽车行驶的速度。当汽车迎着波源驶来时，安装在波源上的接收器收到从汽车反射回来的超声波的频率为 110kHz，已知空气中声速为 $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，求汽车行驶的速度。

解 本题应分两步来求解。第一步，固定波源发出的超声波被迎面而来的汽车接受，此时汽车作为观察者迎着波源运动。设汽车的行驶速度为 v ，则汽车接受到的频率为

$$\nu' = \frac{u + v}{u} \nu$$

第二步，波从汽车表面反射回来，此时汽车作为波源向着接收器运动，汽车发出的波的频率即是它接收到的频率 ν' ，而接收器此时是观察者，它接收到的频率为

$$\nu'' = \frac{u}{u - v} \nu' = \frac{u + v}{u - v} \nu$$

由此式可解得汽车行驶的速度为

$$v = \frac{\nu'' - \nu}{\nu'' + \nu} u = \frac{110 - 100}{110 + 100} \times 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 16.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

*7.6.2 冲击波

当波源向着观察者运动时，若波源运动的速度 v_s 超过波的速度，则不会出现多普勒效应。这是因为波源本身超过了此前它所发出波的波前，在波源前方不可能有任何波动产生，如图 7.35 所示。当波源在 S 位置时发出的波，在其后 t 时刻的波阵面是一个半径等于 ut 的球面，但此时波源已前进了 $v_s t$ 的距离到达

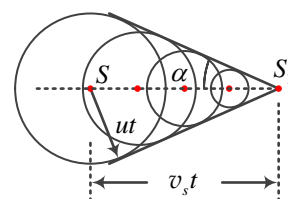


图7.35 冲击波的产生

S_1 位置，在整个 t 时间内，波源在各个位置上发出的波前的切面形成一个圆锥面，这个圆锥面叫**马赫锥**，其半顶角 α 称为**马赫角**，满足

$$\sin \alpha = \frac{ut}{v_s t} = \frac{u}{v_s} \quad (7.55)$$

$\frac{v_s}{u}$ 称为马赫数。随着时间的推移，各波前不断扩展，锥面也不断扩展形成波，这种以点波源为顶点的圆锥形的波称为**冲击波**。冲击波面到达的地方，介质中压强、密度和温度都会发生突变。

飞机、炮弹等以超音速飞行时，都会在空气中激起冲击波。过强的冲击波能使其掠过的物体遭到破坏，这种现象称为“声爆”。

又如当船只的航行速度超过水波的传播速度时，也会产生类似的冲击波。此时，随着船的前进，在水面上激起以船头为顶端的 V 形波，通常称为**船波**，如图 7.36 所示。



图7.36 船波

* § 7.8 声波 次声波和超声波

在弹性介质中传播的机械纵波，一般称为**声波** (sound wave)。能引起人耳听觉的声波的频率范围是 20Hz~20 000Hz。频率低于 20Hz 的声波称为**次声波** (infrasonic wave)，频率高于 20 000Hz 的声波称为**超声波** (ultrasonic wave)。声波除了具有机械波的一般性质外，还具有一些声波自身的特性。

*7.8.1 声波

1、声压

介质中有声波传播时的压强与无声波时的静压强之间有一差值，这一差值称为**声压** (sound pressure)，通常用符号 p 表示。声压是由于声波而引起的附加压强。声压产生的原因很容易理解，因为声波是纵波，在稀疏区域，压强小于静压强，声压为负值；在稠密区域，压强大于静压强，声压为正值。而介质中的静压强是不变的。假设平面简谐声波的波动表达

式为: $y(x,t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$, 可以证明介质中的声压为

$$p = -\rho u \omega A \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (7.56)$$

式中 ρ 是介质的密度。式 (7.56) 这表明, 介质中的声压随波一起以波速 u 向前传播。对于介质中的任意给定点 (x 给定时), 声压将随时间作周期性变化。声压的振幅为

$$p_m = \rho u \omega A \quad (7.57)$$

2. 声强 声强级

声强就是声波的平均能流密度。根据波的强度公式 (7.29), 可得声强 I 与声压振幅的关系为

$$I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho u} \quad (7.58)$$

由于直接测量声强比测量声压困难。所以在实际测量声强时, 一般总是先测量声压, 再利用声强与声压的关系换算出声强。

人们通常说的**音量** (volume) 是指人耳感受到的声音的大小, 它通常取决于声强, 同时还与频率有关。人耳能够听到的声音的频率范围是 20Hz ~ 20000Hz。给定一个频率, 其引起听觉的声强有一个范围。声强太小, 不能引起听觉; 声强太大, 也不能引起听觉, 只能引起痛觉。能引起听觉的声强下限值称为听觉阈, 能引起听觉的声强上限值称为痛觉阈, 如图 7.37 所示。对于频率为 1KHz 的声波, 正常人耳能听到的最大声强

为 $1 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, 最小声强为 $10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, 这一最低的声强值称为参考声强, 用 I_0 表示, 即 $I_0 = 10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。频率在 20Hz 以下和 20000Hz 以上时, 任何强度的振动都不会引起听觉。

因为能够引起听觉的声强的数值相差悬殊 (可达 10^{12} 倍), 所以用声强来表示声音的大小不太方便。而且, 人耳对声音大小的主观感觉 (响度) 也不与声强成正比, 而近似地与声强的对数成正比。为此人们引入了**声强级**的概念, 用并符号 I_L 表示。它定义为

$$I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (7.59)$$

式中 $I_0 = 10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 称为参考声强, I 是声强。声强级 I_L 的单位是分贝 (dB)。表 7.1 给出了一些常见声音的声强、声强级和响度。

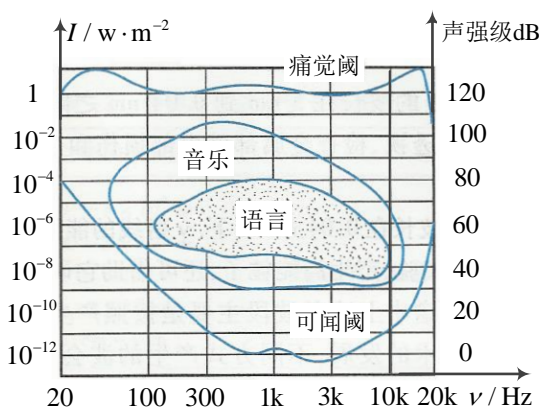


图7.37 人耳的听觉范围

表 7.1 几种常见声音的声强、声强级和响度

声源	声强	声强级 (dB)	人耳的感觉 (响度)
听觉阈	$10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	0	极轻
夜深人静时的乡间小道	$10^{-10} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	20	极轻
居民区夜间的卧室内	$10^{-9} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	30	很轻
正常谈话	$10^{-7} \sim 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	50-60	正常
繁忙的街道	$10^{-5} \sim 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	70-80	响
警笛	$10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	90	很响
燃放鞭炮 (听觉阈)	$10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	100	极响
大炮轰鸣、炸弹爆炸	$10^0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	120	震耳

3、音调与音色

通常人们感觉到女人说话的声音比较尖,男人说话的声音比较低,指的就是**音调 (tone)**的高低。音调高表示声音比较尖,音调低表示声音比较低沉。根据傅里叶分析,任何一种周期性振动都可以分解成若干个不同频率和不同振幅的谐振动的叠加,其中频率最低的那个分振动的频率与该周期性振动的频率相等,这个频率称为**基频**,其它分振动的频率是基频的整数倍,这些频率称为**谐频**或**泛频**。声音的音调就取决于基频,基频高则音调高,声音尖;基频低则音调低,声音低沉。

音色 (timbre)取决于声音中谐频的振幅。不同的人、不同的乐器发出同一音调的声音其音色不同,其原因就是声音中各谐频的振幅不同。

*7.8.2 次声波

次声波 (infrasonic wave)是频率低于 20Hz 的声波,它的频率范围大致为 $10^{-4} \sim 20 \text{ Hz}$ 。自然界中的次声波主要由一些大范围的气象现象和地球物理现象所造成的,例如龙卷风、台风、雪崩、地震、火山爆发等自然现象都与一定的次声波相联系。由于次声波频率低、波长长,在介质中传播时次声波的能量衰减极小,遇到高山河流时又能很容易地产生衍射,因此次声波在介质中可以传播很长的距离。其中最著名的是 1883 年 8 月 27 日在印度尼西亚喀拉喀托火山爆发,它产生的次声波传播了十几万千米,大约绕地球传播了三周,历时 108 小时。利用次声波的这些特性,我们不仅能测出地震震中的位置,还能测出地震的强度。目前,次声波已成为研究地球、海洋、大气等大规模运动的有力工具。

次声波虽然听不见,但对人体的危害往往可能比可闻声波更严重。原因之一是人的日常行动的“频率”(如举手、投足),特别是人体内脏器官的固有振动频率大多在几赫兹这样的次声频段。当强度较大的次声波与人体内脏的固有振动频率趋于一致时,会使人感到极度的

不舒服、恐慌甚至伤害。在地震、火山爆发、海啸等大规模地质灾害来临之前，人们往往会发现许多动物会出现一些反常行为，也许就是这些动物对次声波更加敏感、更容易引起恐慌的原因。

***7.8.3 超声波**

1、超声波的产生

频率大于 20 000Hz 的声波称为**超声波** (ultrasonic wave)。超声波在自然界中广泛存在，例如，日常活动中两个金属片的撞击声，管道上小孔的漏气声，都有超声成分。许多动物的叫声中也含有超声波，例如蝙蝠、老鼠、海豚等。最早的人工超声是 1883 年英国人加尔顿 (F. Galton) 发明的一种哨产生的。这种哨称为加尔顿哨，由通过狭缝的高速气流吹到一锐利的刀口上而发出超声波。目前实验室和各种超声仪上大量使用具有电致伸缩效应的某些晶片或压电陶瓷来作为接受和发射超声波的换能器。在这些晶片或压电陶瓷表面加上一个高频交变电压，就可以引起晶片厚度的快速变化，从而能发出超声波。反过来当超声波传播到这些晶片或压电陶瓷上时，超声波的声压会使这些器件的表面产生电荷，因而也可以作为接受超声波的换能器。

2、超声波的主要特性

(1) 传播方向性好。由于超声波的波长极短，因此衍射很小，传播的方向性好，具有极强的定向传播功能。

(2) 强度大，声压大。由于超声波的频率很高，因此可以具有极大的声强，目前用聚焦方法，超声波的最大声强已达 $10^8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ，相应的声压约为数百个大气压。这样的强度足以击碎金属等坚硬物质，还会使液体产生空化作用。这是因为高强度的超声波会使液体产生明显的疏密变化，使液体时而受压、时而受拉。在较强的拉力作用下，在有杂质或气泡的地方，液体会被拉断产生一些近似真空的小空穴。而在压缩过程中，气泡内的压强可达到几百个大气压，空穴被压发生破碎，并伴随局部高温，这就是超声波的空化作用。

(3) 穿透本领大。超声波在液体、固体中传播时衰减很小，在固体中可以穿透几十米的厚度，在海水中可以穿透数千米的距离。

(4) 反射效果好。超声波在传播中遇到两种介质的分界面时会有明显的反射波。

3、超声波的应用

超声的应用主要分为两大类。一类是利用超声波强度大、声压高的特点进行各种加工处理。例如利用超声在液体中的空化作用，可将水银捣碎成小粒子，使其和水均匀地混合在一起成为乳浊液；在医药上可用于捣碎药物制成各种药剂，在食品工业上可以制成许多调味品；还可用超声波进行超声清洗、焊接；也可用超声进行医学治疗等等。

超声波的第二类用途是超声检测。超声波几乎能穿透任何材料，并且在两种不同材料的分界面上有很明显的反射。这对其它辐射能量不能穿透的某些材料，超声波有明显的优点。例如，用超声波来侦察潜艇，就是因为熟知的光波、电磁波难以穿透海水。又如超声探伤、超声诊断等，也是因为金属、人体等都是不透光介质。目前，超声波已广泛地用于各种材料的无损探伤、测厚、测距、医学诊断和成像等。医学上的 B 超检查就是利用超声波来显示人体内脏的病变图样。由于超声波对人体无害，加上 B 超检查费用不高，所以可以多次反复检查，目前 B 超已成为妇产科和人体内脏的首选检查方法。

思 考 题

- 7.1 根据波长、频率、波速的关系式 $u = \lambda \nu$ ，是否频率越高，波速越大？
- 7.2 当波从一种介质传入另一介质时，波长、频率、波速、振幅各量中，那些量会改变？那些量不会改变？
- 7.3 沿简谐波的传播方向相隔 Δx 的两质点在同一时刻的相位差是多少？用波长 λ 表示出来。
- 7.4 在波的传播过程中，每个质元的能量随时间而变，这是否违反能量守恒定律？
- 7.5 拉紧的橡皮绳上传播横波时，在同一时刻，何处动能密度最大，何处弹性势能密度最大？何处总能量密度最大？何处这些能量密度最小？
- 7.6 试叙述波强的物理意义，它与哪些因素有关？为什么说，球面波的振幅与离波源的距离成反比？
- 7.7 衍射现象是否显著与什么因素有关？
- 7.8 两列简谐波相遇叠加时，能产生干涉现象的条件是什么？
- 7.9 驻波与行波相比，有哪些特点？
- 7.10 什么是“半波损失”？什么情况下会产生“半波损失”，什么情况下不会？
- 7.11 给二胡、吉他等弦乐器调音时，要转动旋杆调节弦线中的张力；演奏时手指触压弦线的不同部位，就能发出各种音调不同的声音。这都是什么原因？
- 7.12 声源向接收器运动和接收器向声源运动，都会产生频率增高的效果。这两种情况有区别否，如果两种情况的运动速度相同，接收器接收的频率会不同吗？

习 题

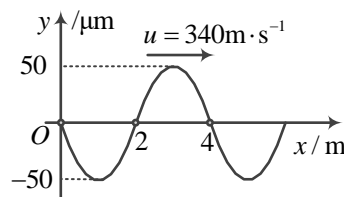
- 7.13 一列沿 x 轴传播的平面简谐波，其波函数为 $y(x, t) = 0.25 \cos(8t + 3x + \pi/4)$ (SI)。式中 t 以 s 计， x 、 y 以 m 计。
 - (1) 试求该波的传播方向、频率、波长和波速；
 - (2) 指出式中 $\pi/4$ 所代表的物理意义。
- 7.14 一横波沿绳子传播时的波动表达式为 $y(x, t) = 5.0 \times 10^{-2} \cos(10\pi t - 4\pi x)$ (SI)，式中 x 以 m 为单位， t 以 s 为单位。试求：
 - (1) 此波的传播方向、波速、频率和波长；
 - (2) 绳子上任一质点的振动速度和加速度的表达式以及速度和加速度的最大值；
 - (3) $x = 0.2\text{m}$ 处的质点在 $t = 1\text{s}$ 时的相位。它是坐标原点 ($x = 0$) 处的质点在哪一时刻的相位？

7.15 一列沿 x 轴负方向传播的平面简谐波, 振幅为 1.0cm , 周期为 0.10s , 波速为 $200\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 开始计时时, 测出坐标原点 O (即 $x=0$) 处的质元恰好通过平衡位置并向正方向运动, 试求:

(1) 坐标原点 O 处质元的振动表达式;

(2) 波动表达式。

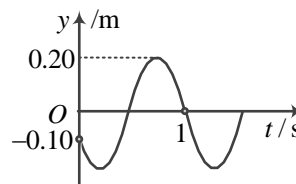
7.16 如图所示为 $t=3T/4$ 时平面简谐波的波形曲线, 试求其波动表达式。



习题7.16图

7.17 一平面简谐波沿 x 轴正方向运动, 已知: 振幅为 5.0cm , 周期为 20ms , 波速为 $200\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。现测得在 $t=30\text{ms}$ 时, $x=3.0\text{m}$ 处的质元恰好运动到负最大位移处。试求该波的波动表达式。

7.18 一平面简谐波沿 x 轴正向传播, 波长 $\lambda=4.0\text{m}$ 。如图所示为波线上 $x=1.0\text{m}$ 处质点的振动曲线。试求:



习题7.18图

(1) 波线上 $x=1.0\text{m}$ 处质点的振动表达式 (用余弦函数表示);

(2) 该波的波动表达式。

7.19 一平面简谐波沿 x 轴正向传播, 振幅 $A=10.0\text{cm}$, 频率 $\nu=10\text{Hz}$, 当 $t=1.0\text{s}$ 时, $x=10\text{cm}$ 处的质点 a 的振动状态为 $y_a=0$, $v_a<0$; 此时 $x=20\text{cm}$ 处的质点 b 的振动状态为 $y_b=5.0\text{cm}$, $v_b>0$, a 点和 b 点之间没有其它质点的振动状态与 b 点的相同, 试求波动表达式。

7.20 设一平面简谐波在密度为 $\rho=800\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 的介质中传播时, 其波速为 $u=1000\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 振幅为 $A=1.0\times 10^{-5}\text{m}$, 频率 $\nu=1000\text{Hz}$ 。试求:

(1) 波的平均能流密度;

(2) 1 分钟内垂直通过面积 $S=4\times 10^{-4}\text{m}^2$ 的总能量。

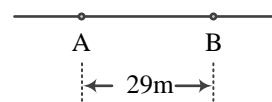
7.21 一束频率为 300Hz 的声波, 在直径为 0.14m 的圆柱形管中传播, 波速为 $340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。现测出波的强度为 $9.0\times 10^{-3}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ 。试求:

(1) 波中的平均能量密度;

(2) 两个相邻的、相位差为 2π 的等相位面之间波的总能量。

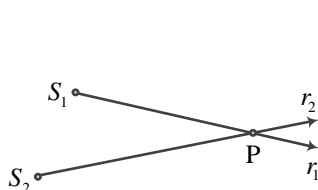
7.22 一声波的频率为 1000Hz , 在空气中的声速为 $340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 到达人耳时声波的振幅为 $1.0\times 10^{-6}\text{m}$ 。已知空气的密度为 $1.3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 。试求此声波在人耳处的平均能量密度和波的强度。

7.23 同一介质中的两个波源位于 A 、 B 两点, 其振幅相等, 频率都是 100Hz , 相位差为 $\varphi_B - \varphi_A = \pi/2$ 。若 A 、 B 两点相距为 29m , 波在介质中的传播速度为 $400\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 假设两列波在 A 、 B 连线上和延长线上传播时振幅相等, 且不随传播距离改变。试求 AB 连线上因干涉而静止的各点位置。

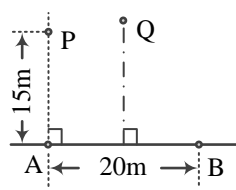


习题7.23图

7.24 如图所示, S_1 、 S_2 为两个相干波源, S_2 的相位比 S_1 落后 $\pi/2$ 、波长 $\lambda=10\text{m}$, $\overline{S_1P}=15\text{m}$, $\overline{S_2P}=20\text{m}$, S_1 在 P 点产生的振幅为 5.0cm , S_2 在 P 点产生的振幅为 4.0cm 。试求: P 点的合振幅。



习题7.24图



习题7.25图

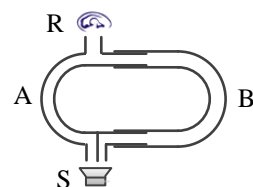


习题7.26图

7.25 如图所示, A、B 为同一介质中的两个相干波源, 两列波的频率都是 10Hz, 当 A 为波峰时, B 为波谷, 它们单独在 P 点激起的振幅都是 0.05m。假设在介质中的波速为 $40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 不计振幅随传播距离的变化, 试求: 从 A、B 发出的两列波分别在 P 点和 AB 中垂线上的任意一点 Q 干涉时的合振幅。

7.26 如图所示, 两列振动频率相同、振动方向相同的平面简谐波, 其中一列沿 BP 方向传播, 它在 B 点的振动表达式为 $y_B(t) = A \cos(\omega t - \pi/2)$, 另一列沿 CP 方向传播, 它在 C 点的振动表达式为 $y_C(t) = A \cos \omega t$ 。已知 $\overline{BP} = 5.25\lambda$, $\overline{CP} = 6.75\lambda$ 。不考虑沿传播方向振幅的衰减, 试求当两列波在 P 点相遇时 P 点合振动的表达式。

7.27 如图所示为声音干涉仪, 干涉仪两端的开口与大气相连, S 为扬声器 (声源), R 为声音接受器, 如耳或话筒。路径 SAR 是固定的, 连续调节 B 的位置, 改变路径 SBR 的长度, 发现声音强度随 B 的位置交替变化。现测得声音强度为极小时相邻两个 B 的位置之差为 0.034m。设空气中声速为 $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 试求:



习题7.27图

(1) 声源发出的声波频率;

(2) 设声波在干涉仪内传播时振幅不变, 测得声强极大值与极小值之比为 9:1, 求声波在 A、B 两管中的振幅之比。

7.28 在一根线密度为 $\rho = 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ 、张力 $F = 100 \text{ N}$ 的弦线上, 有一列沿 x 轴正方向传播的简谐波, 其频率 $\nu = 50 \text{ Hz}$, 振幅 $A = 4.0 \text{ cm}$ 。已知弦线上离坐标原点为 $x_1 = 5 \text{ m}$ 处的质点在 $t = 0$ 时刻的位移为 $A/2$, 且沿 y 轴负方向运动。当传播到固定端 $x_2 = 10 \text{ m}$ 米处时, 被全部反射。试写出:

(1) 入射波和反射波的表达式;

(2) 入射波与反射波叠加形成的驻波方程;

(3) 在 $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$ 区间内所有波腹和波节的位置坐标。

7.29 设入射波的表达式为 $y_{\lambda}(x, t) = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right]$ 。已知此波在 $x = 0$ 处发生反射, 且反射点

为一固定端。设反射时无能量损失, 试求:

(1) 反射波的表达式; (2) 合成波的表达式; (3) 波腹和波节的位置。

7.30 一安装在铁路边的频率测量仪器, 当一列车驶近它时, 测得动车汽笛声的频率为 700Hz; 当动车远离时, 测得动车汽笛声的频率降低为 500Hz, 求该列车行驶的速度 v_s 。(已知空气中声速为 $v_0 = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)

7.31 高铁列车以 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的速度行驶, 其汽笛的频率为 500Hz。一个人乘汽车在铁轨旁的高速公路上以 $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的速率与列车逆向行驶。求此人听到汽笛声的频率为多大?

7.32 一固定的超声波探测器, 在海水中发出一束频率 30 000 Hz 的超声波, 被一艘向着探测器驶来的潜艇反射回来, 反射波与原来的波合成后, 得到频率为 300 Hz 的拍。设超声波在海水中的波速为 $1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 试求潜艇的速率。

7.33 两人轻声说话时的声强级为 40 dB, 闹市中的声强级为 80 dB, 问闹市中的声强是轻声说话时声强的多少倍?