武汉大学数学与统计学院

2012-2013 学年二学期《高等数学 A2》期末试卷(A 卷)

一、(9 分)设 $\vec{a}=\{3,-3,4\},\vec{b}=\{3,6,2\}$，求 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ 及 $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(5\vec{a}-4\vec{b})$。

二、(9 分)求 A,B，使平面 $\pi: Ax+By+6z-7=0$ 与直线 $l: \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$ 垂直。

三、(10 分)设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-y^2=2[z-\varphi(x+y-z)]$ 所确定的函数，

其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$，求：(1) $\mathrm{d}z$；(2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$。

四、(9 分)计算二重积分 $\iint\limits_{D}|y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$.

五、(9 分)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$，其中 Ω 是由锥面 $\sqrt{x^2+y^2}=z$ 及平面 $z=1, z=2$ 所围成的闭区域。

六、(9 分)已知 $\int_C \varphi(x)y\,\mathrm{d}y+xy^2[\varphi(x)+1]\mathrm{d}x$ 在全平面上与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数，并当 C 是起点在 $(0,0)$，终点为 $(1,1)$ 的有向曲线时，该曲线积分值为 $1/2$，试求函数 $\varphi(x)$.

七、(9 分)计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面

$x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截得的有限部分。

八、(9 分)求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程。

九、(7 分)试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 6^n}x^{n+1}$ 的收敛区间及和函数 $S(x)$.

十、(7 分)求曲面积分 $\iint\limits_{S}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是由曲线 $\begin{cases} z=1-y^2 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转面 $(z\ge 0)$ 的上侧。

十一、(7 分)试在曲面 $S: 2x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点，使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 沿着点 A(1,1,1)到点 B(2,0,1)的方向导数具有最大值。

十二、(6 分)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$，

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 发散。