

武汉大学 2018-2019 第二学期高等数学 B2 期末试题 A 参考解答

1. (10 分) 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切平面方程, 并求该曲面与平面 $2x - 3y + 5z - 4 = 0$ 的交线在点 $M(1,1,1)$ 的切线方程.

解: 记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3x$, 则 $F_x(1,1,1) = -1, F_y(1,1,1) = 2, F_z(1,1,1) = 2$ 5 分

得切平面方程: $-(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$, 即 $-x + 2y + 2z = 3$ 8 分

交线的切线方程: $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \\ -x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ 10 分

2. (8 分) 设函数 $z = f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $u = x + y, v = x \sin y$, 计算 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \sin y$ 5 分

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (f'_1 + f'_2 \sin y) \\ &= \frac{\partial f'_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial f'_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin y + f'_2 \cos y \\ &= f''_{11} + f''_{12} x \cos y + (f''_{21} + f''_{22} x \cos y) \sin y + f'_2 \cos y \\ &= f''_{11} + f''_{12} (x \cos y + \sin y) + f''_{22} x \cos y \sin y + f'_2 \cos y \end{aligned}$$
 8 分

3. (9 分) 设函数 $f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y + 3$,

1) 求函数 $f(x, y)$ 的极值;

2) 写出 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的极值问题的拉格朗日函数 (无需求出条件极值).

解: 1) $f_x = 4x - 6y - 2 = 0$, $f_y = 10y - 6x + 2 = 0$, 解得唯一驻点 $(2, 1)$; 5 分

此外, $f_{xx} = 4, f_{xy} = -6, f_{yy} = 10$, 可知 $AC - B^2 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 > 0, f_{xx} > 0$, 因此 $f(x, y)$

在点 $(2, 1)$ 处取得极小值 $f(2, 1) = 2$; 7 分

$$\begin{aligned} 2) \quad F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \\ &= 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$
 9 分

4. (9 分) 计算二重积分 $I = \iint_D (e^y \sin x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解：由对称性可知 $\iint_D e^y \sin x dx dy = 0$ 3 分

$$I = 0 + \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho \cdot \rho d\rho$$
 7 分

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_1^2 = \frac{14\pi}{3}$$
 9 分

5. (9 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \min\{z, 1\} dx dy dz$, 其中 Ω 为 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 与 $z = 0$ 所围成的区域.

解： $\iiint_{\Omega} \min\{z, 1\} dx dy dz = \int_0^2 \min\{z, 1\} dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 2-z} dx dy$ 5 分

$$= \pi \int_0^2 \min\{z, 1\} (2-z) dz$$
$$= \pi \left(\int_0^1 z(2-z) dz + \int_1^2 (2-z) dz \right)$$
 7 分

$$= \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7\pi}{6}$$
 9 分

6. (8 分) 计算第一类曲线积分 $\int_{\Gamma} (x^2 + 2y^2) ds$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$.

解：利用轮换对称性，有 $\int_{\Gamma} x^2 ds = \int_{\Gamma} y^2 ds = \int_{\Gamma} z^2 ds$

$$\int_{\Gamma} (x^2 + 2y^2) ds = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_{\Gamma} R^2 ds$$
 6 分

$$= R^2 \int_{\Gamma} ds = R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi R^3$$
 8 分

7. (9 分) 计算积分 $I = \int_L 2x(y + \cos y) dx - x^2 \sin y dy$, 其中 $L: y = \sqrt{2x - x^2}$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$.

解：用 L_1 表示是从 $(2,0)$ 到 $(0,0)$ 的线段，利用格林公式有： 3 分

$$I = \int_{L+L_1} - \int_{L_1} 2x(y + \cos y) dx - x^2 \sin y dy$$
$$= - \iint_D (-2x \sin y - 2x(1 - \sin y)) dx dy - \int_{L_1} 2x(y + \cos y) dx - x^2 \sin y dy$$
 7 分

$$= \iint_D 2x dx dy + \int_0^2 2x dx$$
$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi + 4 = 4 + \pi$$
 9 分

8. (9 分) 计算积分 $I = \iint_S x^2 dy dz + 2y dz dx + z dx dy$, S 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 取上侧.

解：在 S 上添加圆盘 $S_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 且取下侧，利用高斯公式，有： 3 分

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{S \cup S_1} - \iint_{S_1} x^2 dy dz + 2y dz dx + z dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} (2x + 2 + 1) dx dy dz - \iint_D 0 dx dy \end{aligned} \quad 7 \text{ 分}$$

$$= \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = \frac{3}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 = 2\pi R^3 \quad 9 \text{ 分}$$

其中 Ω 为 S 以及 S_1 所围成的区域， D 为 S_1 对应的平面区域.

9. (9 分) 将函数 $f(x) = \frac{3x}{(2-x)(2x-1)}$ 展开成 x 的幂级数，并写出该幂级数的收敛域.

解： $f(x) = \frac{2}{2-x} - \frac{1}{1-2x}$ ；分别展开，有 3 分

$$\frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n, \text{ 收敛域为 } (-2, 2)$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \text{ 收敛域为 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以, } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 2^n\right) x^n, \text{ 收敛域为 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad 9 \text{ 分}$$

10. (10 分) 已知 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, 计算 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 以及 $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$.

$$\text{解: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad 6 \text{ 分}$$

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = -(2 \sin \frac{\pi}{3})^2 = -3 \quad 10 \text{ 分}$$

11. (10) 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ (令 $(-1)!! = 0!! = 1$, n 为正整数时 $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot 2n$,

$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)$), 考虑如下问题:

1) 求此级数的收敛半径;

2) 证明 $S(x)$ 满足 $2(1-x)S'(x) = S(x)$;

3) 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}}$.

$$\text{解: } 1) \text{ 收敛半径 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!! (2(n+1))!!}{(2n)!! (2(n+1))!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{2n+1} = 1 \quad 3 \text{ 分}$$

$$2) \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} nx^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} x^{n-1} \quad 5 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} 2(1-x)S'(x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1-2n) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = S(x) \end{aligned} \quad 7 \text{ 分}$$

$$3) \text{ 利用第 2) 问及 } S(0)=1 \text{ 解微分方程得 } S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\text{另一方面, } \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}} = \frac{(2n)!}{((2n)!!)^2 2^{2n}} = \frac{(2n-1)!}{(2n)!!} \frac{1}{4^n}, \text{ 因此}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}} = S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad 10 \text{ 分}$$