第五章　流体力学基础

流体（fluid）是气体和液体的总称。在人们的日常生活中随时随地都可遇到流体。所以流体力学是与人类日常生活和生产事业密切相关的。流体各部分之间很容易发生相对运动，没有固定的形状，这种性质叫做流动性，是流体区别于固体的主要特征。研究流体及其运动规律的学科叫**流体力学**（fluid mechanics），流体力学分为流体静力学和流体动力学。流体静力学是由古希腊的阿基米德建立起来的，主要包括物体浮力定律和浮体稳定性在内的液体平衡理论。本章主要介绍流体动力学的部分内容，首先讨论理想流体运动的一些基本概念和规律，然后简要介绍实际流体的流动规律及其应用。

§5.1　理想流体的定常流动

在流体动力学中，认为流体是由大量宏观小、微观大的流体质元组成的。我们在研究流体的整体宏观行为时，可忽略流体微观结构的量子性，将其看成是连续介质，其处理方法既不同于牛顿质点力学的方法，也不同于热学中气体动理论的方法。

对于流动的流体，若用牛顿力学的方法对每个流体质元的运动情况进行追踪描述，则需要无穷多个力学方程，该方法称为拉格朗日法（lagrangian method）。显然，这是难以实现的，实事上也是没有必要的。欧拉（Euler）则采用研究流体粒子的速度、压强、密度等物理量对流经的空间及时间的分布规律，即用场的观点，从整体上描述流体的运动情况，这种方法称为欧拉法（Eulerian method）。欧拉法方便实用，在流体力学中得到广泛应用。

5.1.1　理想流体

实际流体在流动过程中千变万化，十分复杂。为了使问题简化，我们先忽略一些次要因素，提出理想流体的模型，导出理想流体运动的基本规律，再结合实际流体的特点，总结出实际流体运动的规律。

所谓**理想流体**（frictionless fluid 或 ideal fluid）就是指绝对不可压缩，且完全没有粘滞性的流体。

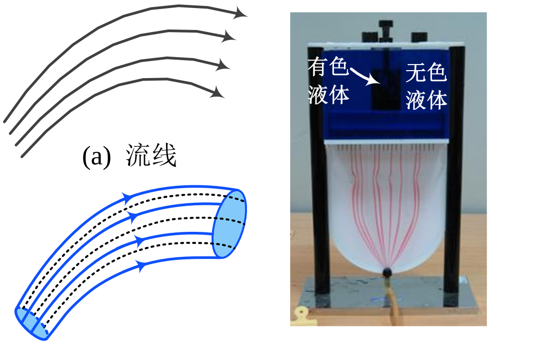
实际流体是可以被压缩并具有黏性的。液体的压缩性一般很小，例如水在 1000 大气压(一个大气压约 10^8Pa)的作用下，其体积仅减小约 5%，故在压强不太大时，液体的压缩性是可以忽略不计的；气体比较容易压缩，但在温度和压强保持不变的情况下，也可以认为它的体积没有变化。气体的黏性很小，通常可以忽略；静止的液体内不存在静摩擦力，其黏性表现在液体各部分做相对运动时存在着内摩擦力。例如，着色甘油在竖直安放的滴定管中向下流动时，可观察到滴定管轴心处流速最大，从滴定管轴心到滴定管壁流速依次减小至零，这说明液体是分层流动的，相邻液层之间存在着沿界面的摩擦力。甘油、蓖麻油等油类液体

的黏性较大，而水、酒精、血浆等液体的黏性很小。对于黏性很小的液体其黏性也是可以忽略的。因此，理想流体运动的规律是实际流体流动很好的近似描述。

5.1.2　定常流动

一般说来，流体流动时，在同一时刻流体内空间各点上流体质元的速度是不尽相同的，在不同时刻通过空间同一点的流体质元的速度也是不相同的。为了形象地表示流体流动情况，在任一时刻，可以在流体流动的空间内画出一系列曲线，使曲线上每一点的切线方向与流体质元通过该点时的速度方向一致，如图 5.1（a）所示，这种曲线叫做该时刻的**流线**（filament line）。流线形象地表示了流体质元在空间流速的瞬时分布。

一般地，空间的流线图形在不同时刻是不一样的。如果空间各点的流速分布不随时间变化，即在不同时刻相继出现在空间同一点的流体质元总是以同样的速度通过该点，这样的流动叫做**定常流动**（steady flow）。反之，如果空间各点的流速随时间改变，就称为**非定常流动**。实际上流体在流管中流动时，只要流速变化不太大，都可以视为定常流动。流体做定常流动时，空间流线图形是不随时间而变的，并且流线就是流体质元运动的轨迹，如图 5.1（c）所示。应该注意，流体质元运动的轨迹是流体质元在一段时间内所通过的轨迹，不能将它与某一时刻的流线图形混为一谈。仅当流体做定常流动时，两者是一致的，否则是不一样的。



(a) 流线

(b) 流管　(c) 稳定流动时的流线演示

图5.1　流管与流线

流体中一束流线所围成的管状区域叫做**流管**（flow tube）。如图 5.1（b）所示。流体做定常流动时，两条流线不可能相交，即流体粒子不可能从一条流线流到另一条流线上。因此，流体做定常流动时，流体不可能从流管壁流入或流出。在流动的流体中可以分出许多流管，研究流体在任意流管中的运动规律，就可以了解整个流体的运动。整个流体就是一个大的流管。

5.1.3　连续性方程

设理想流体做定常流动，在流体中任取一根细流管，并在流管中任选两个与流线垂直的横截面，其截面面积分别为 S_1 和 S_2，两个截面处的平均流速为 v_1 和 v_2，如图 5.2 所示，因为流体不可压缩，则在任意一段时间 Δt 内，从截面 S_1 流入该段流管的流体体积 $S_1v_1\Delta t$ 应与从截面 S_2 流出的流体

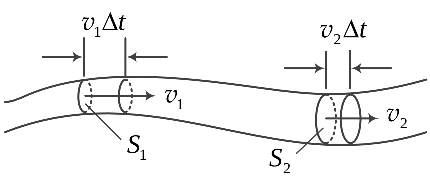


图5.2　连续性方程的推导

体积 $S_2v_2\Delta t$ 相等，即

$$S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t$$

从而有

$$S_1v_1 = S_2v_2 \tag{5.1}$$

由于截面 S_1 和 S_2 是任选的，故式（5.1）对任意两个与流管垂直的截面都成立，于是（5.1）可写成

$$Sv = 常量 \tag{5.2}$$

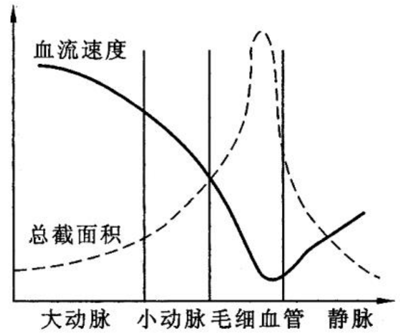


图 5.3　人体各段血管中的血流

式（5.1）和（5.2）称为理想流体做定常流动时的**连续性方程**（continuity equation）。它表明，同一流管中任意截面处的流速与流管截面积成反比，或任意截面处，截面积与流速的乘积 Sv 为恒量。我们将乘积 Sv 叫做通过该流管的**流量**或**流率**（rate of flow），记为 Q 。

显然，当不可压缩的流体做定常流动时，在一段时间内，流进一段流管的流量等于流出这段流管的流量。这实质上是质量守恒定律的具体表现。

在日常生活中，常见的自来水管和煤气管都可视为流管。当管道有分支时，不可压缩的流体在各分支管的流量之和等于总管流量。若总管横截面积为 S_0，平均流速为 v_0，各分支管横截面积分别为 S_1、S_2、…、S_n，流速分别为 v_1、v_2、…、v_n，则由连续性方程有

$$S_0v_0 = S_1v_1 + S_2v_2 + \ldots S_nv_n \tag{5.3}$$

连续性方程可以说明在人体内血液循环过程中血流速度大小变化不大的情况下，虽然心脏总是在周期性地收缩和舒张，但是血管具有很好的弹性，故血液循环可近似看作不可压缩的流体在做定常流动。血管的总截面积从主动脉到小动脉再到毛细血管是逐渐增大的，所以血流速度从主动脉到毛细血管是逐渐减小的；而从毛细血管到静脉，总截面积是逐渐减小的，所以血流速度是逐渐加快的。图 5.3 为人体内循环系统中血流速度分布示意图。

§5.2　伯努利方程及其应用

5.2.1　伯努利方程

伯努利方程（Bernoulli equation）是流体力学的基本方程，它给出了理想流体在重力场中做定常流动的动力学规律。

设理想流体在重力场中做定常流动，在流体中任意选择一个细流管，如图 5.4 所示，取流管中任意两处 X、Y 作为考察点。设流体密度为 ρ（因为流体不可压缩，密度 ρ 处处都相同），X 处的截面积为 S_1，压强为 p_1，平均流速为 v_1，高度（离参考面）为 h_1；Y 处的截面积为 S_2，压强为 P_2，平均流速为 v_2，高度为 h_2。经过 Δt 时间后，X、Y 处的流体运动到了 X'、Y' 处。由于流体做定常流动，X、Y 处流体质元的流速不会随时间变化。

由于流体不可压缩，显然，$X-X'$段流体的体积等于$Y-Y'$段流体的体积，即

$$S_1v_1\Delta t=S_2v_2\Delta t=\Delta V$$

由于 $X-Y'$ 之间流体的运动状态没有发生变化，从效果上看，相当于经过Δt时间，$X-X'$段这一部分流体运动到了$Y-Y'$处。

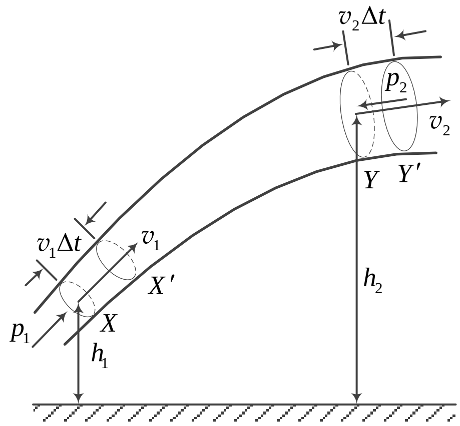


图5.4 伯努利方程的推导

下面讨论在Δt时间内外力对$X-Y$这段流体所做的功，以及这段流体机械能的变化。

由于理想流体没有黏性，$X-Y$这段流体与外界流体之间没有切向摩擦力，所受的外力就是周围流体对它的压力，由于这段流体受到的侧面压力与它流动的方向垂直，故对这段流体所做的功，只有X、Y两端面的正压力F_1、F_2，F_1、F_2做的功总和为

$$W=F_1v_1\Delta t-F_2v_2\Delta t=p_1S_1v_1\Delta t-p_2S_2v_2\Delta t=p_1\Delta V-p_2\Delta V$$

由于$X'-Y$之间流体的机械能不会发生变化，所以$X-Y$这段流体机械能的增量就是$Y-Y'$段流体的机械能和$X-X'$段流体的机械能之差。设$X-X'$段（$Y-Y'$段）流体的质量为m，则有

$$\Delta E=\left(\frac{1}{2}mv_2^2+mgh_2\right)-\left(\frac{1}{2}mv_1^2+mgh_1\right)$$

由功能原理得

$$p_1\Delta V-p_2\Delta V=\left(\frac{1}{2}mv_2^2+mgh_2\right)-\left(\frac{1}{2}mv_1^2+mgh_1\right)$$

移项并两边除ΔV得

$$\boxed{p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2} \tag{5.4}$$

式中，$\frac{1}{2}\rho v^2$是单位体积流体的动能；ρgh是单位体积流体的重力势能。

由于X、Y两截面是任意选定的，故式（5.4）对流管中的任意两个截面都成立，即当理想流体做定常流动时，对于同一流管的任一截面，每单位体积流体的功能$\frac{1}{2}\rho v^2$、势能ρgh以及压强p三者之和为一常量，即

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=\text{常量}} \tag{5.5}$$

式（5.4）和（5.5）称为理想流体做定常流动时**伯努利方程**（Bernoulli equation）。

例 5.1 如图 5.5 所示，有一截面面积很大竖直放置的圆柱形水桶，其底部有一个截面积很小的小孔，当水桶内水深为 h 时，求水从小孔流出的速度大小？

解： 取水桶和小孔作为流管，选桶内水面 A 处为 1，小孔出口 B 处为 2，由于水面 A 及出口 B 处均为大气，故 A、B 处压强均为大气压 p_0，所以若以小孔出口处为高度的参考面，则由题给条件有

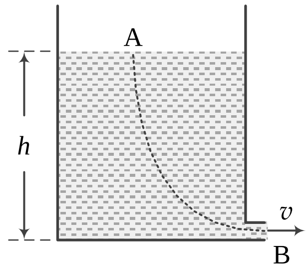


图5.5 例5.1图

$$p_1 = p_2 = p_0\text{、}\ h_1 = h\text{、}\ h_2 = 0$$

又由于水桶的截面积比小孔的截面积大得多，因此可认为 $v_1 \to 0$，将上述条件代入伯努利方程式（5.4），得

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho \times 0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \times 0$$

整理可得

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

该结论与质点从高为 h 处自由下落的情况一样。

5.2.2 伯努利方程的应用

1．水平管中压强与流速的关系

当高度 h 一定，即所选流管处于水平位置时，伯努利方程可简化为

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{5.6}$$

式（5.6）就是理想流体在水平流管中流动时压强与流速的关系，流速大处压强小，流速小处压强大。结合连续性方程式（5.1）可知，理想流体在截面不均匀的水平管内流动时，管子截面大处流速小压强大，截面小处流速大压强小。于是，当流体以较快流速通过管道时，在管道狭窄部分流速很大，可能使该处压强小于管外的大气压强，如果此处开口与外界液体或空气连通，那么可吸入外界液体或空气，这种现象叫**空吸作用**（suction effect）。医疗上用于治疗上呼吸道疾病的雾化器，杀虫、消毒多用途喷雾器，甚至是香水瓶的喷嘴都是根据空吸原理设计的。

根据压强和流速的关系，还可以解释飞机获得升力的原因；也可以解释两艘并行前进的船为什么会容易发生相互靠拢碰撞事故；还可以解释换气扇和抽油烟机的工作原理等。

血液在血管中流动时，靠近血管壁的流速小于血管中心处的流速，因此血液中的红细胞在随着血液一起沿血管流动的同时，还沿径向向血管中心移动，这种现象称为红细胞的轴向集中。

（a）喷雾器原理图　　（b）医用雾化器　　（c）多用途喷雾器

图 5.6　空吸作用的原理及应用

2．均匀管中压强与高度的关系

如果流管截面均匀，那么各截面上流速相同，伯努利方程可简化为

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 \tag{5.7}$$

由式（5.7）可见，在截面积均匀的流管中，处于较高处的流体压强较小，处于较低处的流体压强较大，这与静止液体中压强与高度的关系相同。压强与高度之间的这种关系，可以用来解释为什么楼层高的自来水压力比楼层低的自来水压力低，也可以解释人体体位因素对血压的影响。例如，人体取卧位时，头部与脚部的动脉压大致相等，静脉压也大致相等；人体站立时，头部与脚部相比，动脉压及静脉压都要低 130mmHg 左右（普通身体）。因此，测量血压时一定要注意体位和测量部位。

例 5.2　测量液体（或气体）的流速可用一种所谓比托管的装置，其原理如图 5.7 所示。比托管的 C、D 两管由一压强计连通，压强计中贮有与所测流体不相混合且密度很大的液体（如水银）。比托管放在水平管道之中，其管口 C 与流体流动方向平行，管口 D 与流体流动方向垂直，因而压强计显示一定的压强差，由水银面的高度差 h 表示。试计算流体流动的速率？

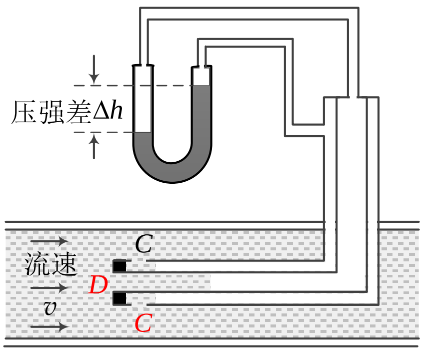


图 5.7 皮托管装置示意图

解：在水平管道中选一段流管，两截面取在比托管的管口 C、D 处，因管口 C 与流体流动方向平行，将不影响该处流体质元流动的速率 v_C；而管口 D 迎着流体流动方向，则管口 D 前流体质元将被阻挡，该处流动的速率 v_D 为零。管口 C 与管口 D 处高度相差很小，可以忽略不计，即 $h_C \approx h_D$。利用水平管中的伯努利方程式（5.6），有

$$\frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_D - p_C = \rho' gh$$

于是，水平管道中流体流动的速率为

$$v_C = \sqrt{\frac{2\rho' gh}{\rho}}$$

式中，ρ' 为压强计中所用液体（水银）的密度。

用比托管测量流速时，需将比托管与流体接触，因而会干扰流体的流动，现在更多地使用根据多普勒效应原理制成的非接触式激光流速仪来测定流体的流速。

例 5.3 利用灌满液体的曲管将液体越过高于液面的地方引向低处，这种输运液体的曲管叫虹吸管，如图 5.8 所示。现用一均匀虹吸管跨过堤坝从水库取水，点 C 比水库水面高 2.5m，出水口点 D 比水库面积低 4.5m。假设水在虹吸管中做定常流动，求水从出水口流出的速率以及虹吸管中 B 、C 两处的压强？

解：取虹吸管为流管，选流线 $ABCD$ 上的 A、D 两点，以水库水面为参考面，则有

$$h_A = h_B = 0\text{，}\ h_C = 2.5\text{m}\text{，}\ h_D = -4.5\text{m}$$

而

$$p_A = p_D = p_0$$

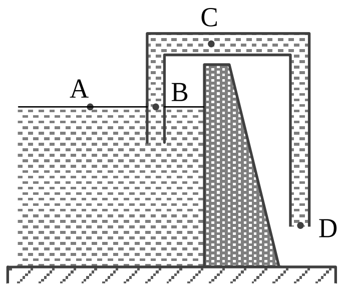


图5.8 例5.3图

（1）对 A、D 两点，根据伯努利方程有

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2 + \rho g h_D$$

由连续性方程有 $S_A v_A = S_B v_B$，因为 $S_A >> S_D$，所以 v_A 近似为零，于是得

$$v_D = \sqrt{2g(h_A - h_D)} = \sqrt{2\times 9.8\times 4.5} \approx 9.4\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

（2）对 A、B 两点，根据伯努利方程有

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

即

$$p_B = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

由于虹吸管上各处的截面积相等，所以 $v_B = v_C = v_D$，代入得

$$p_B = \left(1.013\times 10^5 - \frac{1}{2}\times 1000\times 9.4^2\right)\text{Pa} \approx 5.7\times 10^4\ \text{Pa}$$

同理，对 C、D 两点，根据伯努利方程有

$$p_C + \rho g h_C = p_0 + \rho g h_D$$

整理得

$$p_C = p_0 + \rho g(h_D - h_C)$$
$$= \left[1.013\times 10^5 + 1000\times 9.8\times(-4.5-2.5)\right]\text{Pa} \approx 3.3\times 10^4\ \text{Pa}$$

由计算结果可以看出，虹吸管的最高点 C 处的压强比入口处点 B 的压强低，正是因为

如此，水库里的水才能经由虹吸管越过一定的高度被引出来。

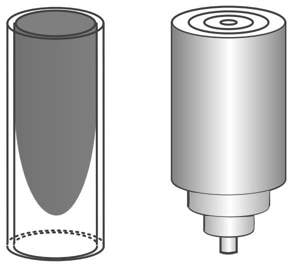
§5.3　实际流体的流动规律

实际流体都有黏性，故又称为**黏性流体**。不同流体的黏性可以相差很大，根据其流动特性又可分为**牛顿流体**和**非牛顿流体**。例如 水、酒精、血浆等属于牛顿流体；而血液、沥青、原油等则是非牛顿流体。

5.3.1　层流的流动规律

1. 层流

在不同条件下，黏性流体的流动状态是不同的，当流速不太大时，流体是分层流动的，相邻各层以不同速度做相对滑动，彼此不相混合，这种分层流动称为**层流**或**片流**（Laminar）。如图 5.9（a）所示，在一支竖直放置的滴管中倒入无色甘油，再在上面装一些着色的甘油，打开滴管下端活塞，就可以看到甘油在圆管中流动时，管轴心处流速最大，沿管径方向流速逐渐变小，在管壁处液粒黏附在管壁而流速几乎为零，如图 5.10 所示。这时可将管中流体看成为许多平行于滴管轴的圆筒形薄层，各层之间有相对滑动，即流体是分层流动的，图 5.9（b）是层流的示意图。



（a）　　（b）

图5.9 圆管中层流示意图

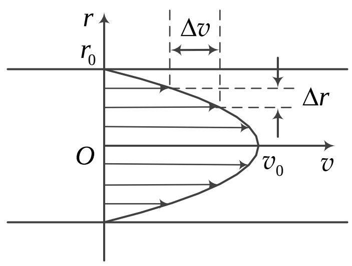


图5.10 圆管中层流的速度分布

2. 牛顿黏滞定律

流体做层流时，速率是逐层变化的，其速率分布如图 5.10 所示。设图 5.10 中相距为Δr的两液层的速率差为Δv，则$\Delta v/\Delta r$表示这两层之间速率随距离的平均变化率。当$\Delta r \to 0$（即两液层无限靠近）时，速率随距离的平均变化率的极限$\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$称为该处的速率梯度。

流速逐层变化表明相邻液层间存在阻碍相对运动的内摩擦力，即黏滞力，其方向与两液层接触面相切，运动慢的液层对运动快的液层有阻滞力，运动快的液层对运动慢的液层有推动力。

实验表明，液体的内摩擦力F的大小与该处速率梯度$\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$成正比，与两液层的接触面积S成正比，即

$$F=\eta S\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \tag{5.8}$$

式（5.8）称为**牛顿黏滞定律**。式中，η 称为液体的**黏滞系数**或**黏度**，是与液体种类和温度有关的物理量。黏度的大小反映液体流动的难易，黏度越大，也就是内摩擦力越大，液体越不容易流动。黏度的单位在SI制中为帕·秒（Pa·s）。表5.1列出了一些常见液体的黏度。

表5.1　不同温度下一些液体的黏度

液体	温度℃	黏度（Pa·s）	液体	温度℃	黏度（Pa·s）
水	0	1.8×10^{-3}	蓖麻油	17.5	1225.08×10^{-3}
水	20	1.0×10^{-3}	蓖麻油	50	122.7×10^{-3}
水	37	0.68×10^{-3}	血液	37	（2.5-3.5）$\times10^{-3}$
水	100	0.3×10^{-3}	血液	37	（1.0-1.4）$\times10^{-3}$
汞	0	1.68×10^{-3}	血液	37	（0.9-1.2）$\times10^{-3}$
汞	20	1.55×10^{-3}	甘油	20	830×10^{-3}
汞	100	1.2×10^{-3}	甘油	26.5	494×10^{-3}

实际的流体有些遵守牛顿黏滞定律，有些不遵守。人们将遵守牛顿黏滞定律的液体称为牛顿流体，其流动又称为牛顿流动。牛顿流体的黏度在一定温度下是常数，即只与流体的种类有关。

不遵守牛顿黏性定律的流体称为非牛顿流体。非牛顿流体的黏度不是常量，对其流动过程的分析要用流变学方法进行处理。通常非牛顿流体中含有大量分子量较大的大分子，例如血液就是非牛顿流体，因为血液中含有大量的红细胞。但在近似条件下也可将血液视作牛顿流体。现在临床上比较流行的血液流变学检测方法，就是通过对人体血液黏度的检测和分析，为某些疾病的诊断提供依据。

3．黏滞流体的伯努利方程

在推导理想流体的伯努利方程时，我们忽略了流体的可压缩性和黏性。对于实际流体的定常流动，其流动过程中的可压缩性仍可忽略不计，但黏滞性必须要考虑。

由于存在内摩擦力，流动过程中必然有一部分机械能被消耗，如图5.11所示，当水从水塔中经均匀水平管流出时，流管中各处的水的流速保持不变，但压强逐渐降低。这表明，在流动过程中单位体积水的机械能就有一部分被消耗了。所以，在描述黏滞流体做定常流动时式（5.3）或（5.4）给出的伯努利方程就不能直接应用，必须修正为

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2+\Delta E \tag{5.9}$$

式（5.9）称为黏滞流体做定常流动时的伯努利方程。式中修正项 ΔE 为正值，它表示单位体积的流体在流管中从截面 1 流到截面 2 的过程中所消耗的机械能。对于截面均匀的水平管，上式可简化为

$$p_1 - p_2 = \Delta E \qquad (5.10)$$

ΔE 一般与流管的几何结构及流体的黏度有关。式（5.10）表明，即使在均匀水平管中，管两端也必须有一定的压强差（ $p_1 - p_2 > 0$ ），才能使实际的黏滞流体做定常流动。

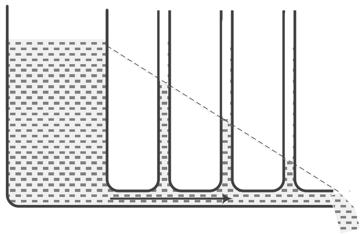


图5.11 黏滞流体在均匀水平管中流动时的压强分布

4．泊肃叶定律

下面讨论黏性流体在截面均匀的圆形管中流动的流速与流量。

（1）流速分布 如图 5.12 所示，设黏度为 η 的流动体在半径为 r_0、长度为 L 的均匀水平直圆管中做层流，管两端的压强差为

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

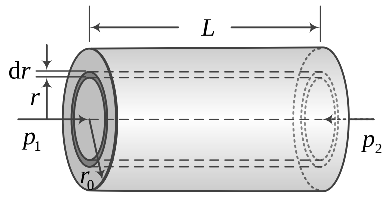


图5.12 推导流速分布及泊肃叶定律用图

在管中取与管同轴、半径为 r 、厚度为 $\mathrm{d}r$ 、长度为 L 的圆筒形流体质元作为研究对象，它受到由管两端因压强差产生的推动力为

$$\Delta p \mathrm{d}S = \Delta p 2\pi r \,\mathrm{d}r$$

其内层流体给它施加的内摩擦力为

$$F = \eta S \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \eta 2\pi r L \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

其外层流体施予的内摩擦力为

$$F' = F + \mathrm{d}F$$

即该流体元受到的黏滞力为

$$-\mathrm{d}F = F - F' = -\eta 2\pi L \mathrm{d}\left(r \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

由于管内流体做定常流动，所以推动力等于黏滞力，即

$$\Delta p 2\pi r \,\mathrm{d}r = -\eta 2\pi L \mathrm{d}\left(r \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

整理可得

$$\mathrm{d}\left(r \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta L} r \,\mathrm{d}r$$

两边积分，得

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\frac{\Delta p}{2\eta L}r^2+C$$

又在$r=0$处v最大，$\mathrm{d}v/\mathrm{d}r=0$，所以$C=0$，于是得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\frac{\Delta p}{2\eta L}r$$

分离变量后再积分，得

$$v=-\frac{\Delta p}{4\eta L}r^2+C'$$

又因为在管壁 $r=r_0$处，$v=0$，得：$C'=\dfrac{\Delta p}{4\eta L}r_0^2$，于是有

$$v=\frac{\Delta p}{4\eta L}(r_0^2-r^2) \tag{5.11}$$

式（5.11）表明，黏滞流体在水平均匀管中做定常流动时，横截面上各处的流速v随该处到管轴距离r的增大而减小，其关系曲线如图 5.10 所示，在管轴心处流速最大，其值为：$v_m=\dfrac{\Delta p}{4\eta L}r_0^2$；在管壁处流速为零。

（2）流量　由于流速沿管径连续变化，所以不能直接按$Q=Sv$计算流量。应将圆管横截面划分为许多小环带，先计算出每个环带上的流量$\mathrm{d}Q$，然后通过积分求出总流量Q。

在圆管的截面上任取一个半径为r、宽度为$\mathrm{d}r$的圆环形面积元，如图 5.12 中所示，因该处的流速为v，则通过此小圆环的流量为

$$\mathrm{d}Q=v\,\mathrm{d}S=v\,2\pi r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi\Delta p}{2\eta L}(r_0^2-r^2)r\,\mathrm{d}r$$

对$\mathrm{d}Q$从$r=0$到$r=r_0$进行积分，即可得通过整个横截面的流量为

$$Q=\int\mathrm{d}Q=\int_0^{r_0}\frac{\pi\Delta p}{2\eta L}(r_0^2-r^2)r\,\mathrm{d}r=\frac{\Delta p\pi}{8\eta L}r_0^4 \tag{5.12}$$

式（5.12）称为**泊肃叶（J.L.M. Poiseuille）定律**。

泊肃叶定律表明，黏性流体在水平圆管中做层流时，流量与流管两端的压强差Δp成正比，与圆管半径的四次方成正比，与液体的黏度和流管的长度成反比。因此，对于同一种黏性流体，若流管两端的压强差Δp保持不变，流管的长度不变，当圆管的半径增大一倍时，流量将增加到原来的 16 倍。

由泊肃叶公式（5.12）可得黏滞流体在圆管中做层流的平均流速为

$$\bar{v}=\frac{Q}{\pi r_0^2}=\frac{\Delta p}{8\eta L}r_0^2=\frac{1}{2}v_m \tag{5.13}$$

式（5.13）表明，圆形管道中流体的平均流速是轴心处最大流速的二分之一。

（3）流阻　　泊肃叶定律常写成如下形式：

$$Q = \frac{\Delta p}{R} \tag{5.14}$$

式中，$R = \dfrac{8\eta L}{\pi r_0^4}$，称为**流阻**（ flow resistance）。

流阻的大小反映了黏滞流体在管道中流动时所受阻力的大小，单位是$\text{Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-3}$。其大小由管道的几何因素与流体的黏度共同决定。对圆形管而言，管径对流阻的影响最大；如果管径增加一倍，流阻将减小 16 倍。不难看出，式（5.14）与电路中的欧姆定律$I = \dfrac{U}{R}$在数学形式上相同，通过横向比较有利于我们理解流阻及流量概念。

若流体连续通过n段流阻不同的管道，则总流阻为各管流阻之和，即

$$R_{总} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \tag{5.15}$$

当n个管道并联时，则总流阻的倒数等于各管流阻的倒数之和，即

$$\frac{1}{R_{总}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \ldots + \frac{1}{R_n} \tag{5.16}$$

显然，这又与电阻的串、并联相似。

血液在血管中流动的流阻在生理学中叫做**外周阻力**（peripheral resistance）。外周阻力是反映脑血管微循环通畅程度的定量指标。循环系统的外周阻力主要是指小动脉和微动脉对血流的阻力。从主动脉至腔静脉的流阻，即体循环的总流阻，称为总外周阻力。在一般情况下，血液循环从整体来看，可以做层流，循环系统中任何一段血管的血压差Δp、流量Q与流阻R之间的关系都遵从泊肃叶定律，即可用$R = \Delta p/Q$来计算外周阻力。计算总外周阻力时Δp取平均动脉压，Q为每秒的心输出量；计算一段血管的外周阻力时，Δp为这一段血管的血压差，流量Q为这段血管的血流量。

通常血管长度一般变化不大，故流阻R随着管径r_0及黏度η而变，由于流阻R与管径r_0^4成反比，所以外周阻力的变化主要取决于血管内径的变化。如果人体某部分血管的流阻发生变化，将使总外周阻力改变，并导致总血流量及各器官血流量的改变，这在医学上是很有意义的。测量人体外周阻力已成为检测心血管疾病十分重要的诊断方法之一。

5.3.2 湍流与雷诺数

当黏滞流体的流速超过某一限度时，流体将不再保持分层流动，外层流体分子可以进入内层，整个流动紊乱而不稳定，流体中每一点的速度大小和方向都在不断变化，并且还会出现旋涡，这种流动叫做**湍流**（turbulent flow）。湍流是流体的一种流动状态。当流速很小时，流体分层流动，互不混合，称为层流；逐渐增加流速，流体的流线开始出现波浪状的摆动，摆动的频率及振幅随流速的增加而增加，此种流动状况称为过渡流；当流速很大时，流

线不再清楚可辨，层流被破坏，流场中有许多小漩涡，流体运动杂乱无章，出现湍流。此时，流体的内摩擦力急剧增大，因而机械能损耗急剧增加。

雷诺通过分析大量实验结果后指出，由层流过渡到湍流取决于**雷诺数**（Reynolds number）

$$Re=\frac{\rho v d}{\eta} \tag{5.17}$$

其中；ρ 为流体密度；η 为流体黏度；v 为流速；d 为流管的直径。例如流体流过圆形管道，则 d 为管道的当量直径。利用雷诺数可区分流体的流动是层流或湍流，也可用来确定物体在流体中流动所受到的阻力。实验结果表明：

当 $Re<2000$ 时，流体做层流；

当 $Re\ >3000$ 时，流体做湍流；

当 $2000<Re<3000$ 时，流动状态是不确定的，可能做层流，也可能做湍流；

当 $Re=2000$ 时对应的流速称为临界速度。

此外，如果管道有急弯、分支或管径骤变（如S、T、Y 等形状的管道），或者流体被迫流经小孔或在障碍物后，都可能在较低的雷诺数时形成湍流，并可能形成局部漩涡。这些漩涡不能持续太远，但从漩涡消耗能量来说，有一定的生物学意义。

流体的流速超过临界速度将出现湍流，人体主动脉直径约为 1.5cm，取血液的黏度为 0.003Pa·s，根据式（5.17），可算出主动脉中血液的临界流速约为

$$v_C=\frac{\eta}{\rho d}Re=\frac{0.003}{1000\times 0.015}\times 2000\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})=0.40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

图5.13 测量血压

人体心脏收缩开始时射出的血液速度，或剧烈运动时主动脉的中血液的平均流速，都将超过此值，此外，心脏瓣膜狭窄、瓣膜闭锁不全或缺损、动脉瘤以及血管中存在杂物，都会引起局部的湍流。

液体做湍流时，伴随着发出声音，其频率可高达几百赫兹，在人耳的听觉范围之内，这在医学中是有实用价值的。例如动、静脉堵塞以及心脏瓣膜狭窄在血管中引起的异常心音，就是由于血流产生湍流的结果。测量血压时，将可充气袖带环绕于手臂上部，在袖带内侧靠近肱动脉处放入听诊器，如图 5.13 所示。对袖带充气使肱动脉中的血液停止流动，然后缓慢放气，当袖带中的压强稍低于心脏的收缩压时，血液通过被压扁的血管形成湍流，此时在听诊器中可听到湍流声；当袖带中的压强继续降低，血管完全回复原状时，湍流声消失，这时的压强恰好与心脏的舒张压一致。

5.3.3　流体对固体的作用力

当物体在黏滞液体中运动时，物体表面所附着的一层液体与相邻液层间有内摩擦力，阻碍着物体的运动，当物体的运动速率不大时，所受的阻力主要是这种黏滞阻力，黏滞阻力F的大小和物体的速率v、液体的黏度η及物体的形状大小有关。理论证明，对于半径为r的球形物体，在液体中的运动时受到的黏滞阻力为

$$F=6\pi\eta vr \tag{5.18}$$

式（5.18）称为**斯托克斯定律**（stokes' low）。

根据斯托克斯定律可测量液体的黏度或小球的半径：小球在黏滞液体中受重力作用下降时，所受的力有重力、浮力和黏滞阻力，黏滞阻力随小球下降速率的增加而增大，当速率增大到某一数值时，三个力平衡，小球作匀速下降，此时有

$$6\pi\eta vr=\frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho-\rho'\right)g$$

整理得

$$v=\frac{2}{9\eta}r^2\left(\rho-\rho'\right)g \tag{5.19}$$

或

$$\eta=\frac{2}{9v}r^2\left(\rho-\rho'\right)g \tag{5.20}$$

式中，ρ为小球密度；ρ'为液体的密度；v称为沉降速度。

式（5.19）指出，黏滞液体中小球（如黏性液体中的细胞、胶粒等）的沉降速度与小球自身半径的平方、小球及液体的密度差以及重力加速度成正比，与液体的黏度成反比。对于质量很小的微粒，如生物大分子，按式（5.19）其沉降速度将很小，此时通常可利用离心机来增加等效“重力”加速度g值，以加大其沉降速度。由式（5.20）可知，通过测出小球的沉降速度和半径，可以求出液体的黏度。

思 考 题

5.1　有人设计了一个连接有通气管的面具，认为只要把通气管的上端露出水面，在水下任何深度处都能吸到所需的空气。你认为这可能吗？为什么？

5.2　在较宽阔的地方感觉到风不大时，在两栋楼房之间的狭巷里会觉得风很大，这是什么原因？

5.3　连续性方程表明流管截面积大处流速小，而泊肃叶定律表明流量与管半径四次方成正比，即截面积大处流速大，这二者是否矛盾？为什么？

5.4　流速计形式有很多种，比托管只是其中一种，若均匀水平管中是某种液体在作定常流动，试设计出测其流速的方法，并写出结果。

5.5　1998 年夏天，长江流域出现特大洪水，在江堤的许多地段出现了“管涌”。管涌对江堤的安全有极大的威胁，严重时可导致江堤塌陷。广大军民艰苦奋战，及时堵住了所有的管涌，保护了江堤。试说明为什么会出现管涌？出现了管涌应该怎样处理？

5.6　血液的主要成分是血浆和血红细胞（红血球），血红细胞浮悬在血浆中，试分析：当血液在血管中流动时会出现什么现象，并说明其原因。

习　题

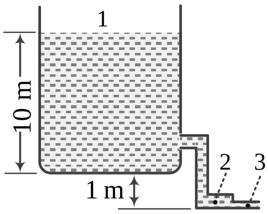
5.7　有一个三通管，水流过 A 管后，经 B 、 C 两个支管流出，已知三管的横截面积分别为 $S_A = 100\,\mathrm{cm}^2$，$S_B = 40\,\mathrm{cm}^2$，$S_C = 80\,\mathrm{cm}^2$，A 、B 两管中流速分别为 $v_A = 40\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$，$v_B = 30\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ 。试求 C 管中的流速 v_C 。

5.8　水在截面积不同的水平管中做定常流动，出口处的截面积为管的最细处的三倍，若出口处的流速为 $2.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，已知水管外大气压强为 $P_0 = 1.0\mathrm{atm}$ 。试求：

（1）　管中最细处的压强为多少标准大气压？

（2）　若在最细处开一个小孔，水会不会流出来？

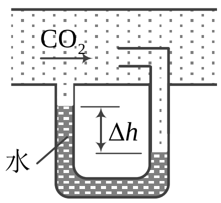
5.9　水由蓄水池稳定流出（如图 5.9 所示），蓄水池中水面（图中 1 处）比池底高出 $10.0\,\mathrm{m}$，水管中 2 处和 3 处比池底低 $1.0\,\mathrm{m}$，2 处水管的横截面积为 $0.04\,\mathrm{m}^2$，3 处水管的横截面积为 $0.02\,\mathrm{m}^2$，蓄水池水面的面积远大于水管的横截面积。假设水面处空气的压强为 1.0 个标准大气压。试求：



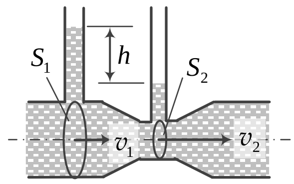
习题5.9图

（1）水管中 2 处的压强；

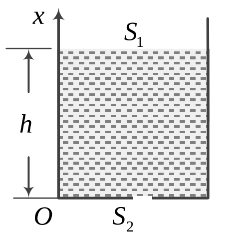
（2）水的排出率。



习题5.10图



习题5.12图



习题5.14图

5.10　在一个采集 CO_2 气体的管道上连接了一个压强计，如图 5.10 所示。如果压强计中两边的水面高度差是 $2.0\mathrm{cm}$， CO_2 气体的密度为 $\rho = 2.0\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，采气管的横截面积为 $10\,\mathrm{cm}^2$，试求：在 $5\,\mathrm{min}$ 内能采集到的 CO_2 气体有多少立方米。

5.11 在一封闭的水箱内，水面上部的空气压强为 $0.923\mathrm{atm}$，水箱外部的气压为 $1.00\ \mathrm{atm}$ 。在水箱一侧、距水面 $1.0\,\mathrm{m}$ 处有一小孔，求水从小孔流出的速率。

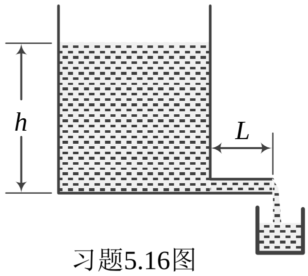
5.12 为了测定某一管道中液体的流量，可以在该管道中接入一段截面积不均匀的水平管，并在截面积为 S_1 和 S_2 处分别装一根竖直支管。这种装置叫做汾丘里流量计，如图 5.12 所示。设 $S_1 > S_2$，则当液体流过时，S_1 处竖直管中的液面将高于 S_2 处竖直管中的液面，若测得两处液面的高度差为 h，试求管中液体的流量 Q 。

5.13　一容器底部有一个面积为 $0.50\,\mathrm{cm}^2$ 的小孔，若水以 $Q = 1.5\times10^{-4}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$ 的流量注入容器中，问容器中水面将保持在多大高度。

5.14　如图 5.14 所示，圆桶的横截面积为 $6.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2$，在圆桶的底部有一截面积为 $1.0\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$ 的小孔。当水桶中水深为 $H = 0.70\,\mathrm{m}$ 时，试求：圆桶中的水全部流完所需要的时间。

5.15　20℃的水在半径为$2.0\,\mathrm{cm}$的水平均匀圆管内流动，若管轴处的流速为$0.10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，在流动方向上相距$10\,\mathrm{m}$的两处，由于水的黏性使压强降低了多少？（水的黏滞系数为$1.0\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$）

5.16　如图 5.16 所示，一个宽大的玻璃容器的底部有一根水平的细玻璃圆管，内直径$d=0.10\,\mathrm{cm}$，长$L=10.0\,\mathrm{cm}$。容器内盛有深$h=5.0\,\mathrm{cm}$的硫酸，它的密度$\rho=1.9\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$。测得$1\,\mathrm{min}$内由细管流出的硫酸为$0.66\,\mathrm{g}$，试求硫酸的黏滞系数$\eta$。



习题5.16图

5.17 人体主动脉的内半径约为$0.75\times10^{-2}\,\mathrm{m}$，当血流量为$2.7\times10^{-4}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$时，在一段长$0.20\,\mathrm{m}$的血管中的血液阻力和血液压降各是多少？（已知人体血液的黏度为$3.5\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$）。

5.18 设某人的心输血量为$0.83\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$，体循环的总压强差为$1.2\times10^{5}\,\mathrm{Pa}$，试求此人体循环的总流阻（即外周阻力）是多少$\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-5}}$？

5.19 设橄榄油的黏性系数为$0.18\ \mathrm{Pa\cdot s}$，流过长度为$0.50\,\mathrm{m}$、半径为$1.0\,\mathrm{cm}$的圆管时，圆管两端压强差为$2.0\times10^{4}\ \mathrm{N\cdot m^{-2}}$，试求管中橄榄油的流量。

5.20 有一黏性系数为$0.12\,\mathrm{Pa\cdot s}$的液体，在直径为$1.0\,\mathrm{cm}$的水平圆管中流动，流量为$50\,\mathrm{cm^3.s^{-1}}$，试求管中相距$31.4\,\mathrm{cm}$的a、b两点压强差（流动方向从a到b）。

5.21 人体主动脉的横截面积为$3.0\,\mathrm{cm^2}$，黏度$3.5\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$的血液以$30\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$的平均速率在其中流过，已知血液的密度为$1.05\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，问此时血流是层流还是湍流？

5.22 液体中有一直径为$1.0\,\mathrm{mm}$的空气泡，如果液体的黏度是$1.5\,\mathrm{g\cdot cm^{-1}\cdot s^{-1}}$，密度为$0.90\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，问气泡在该液体中做匀速上升时的速率是多少。（空气密度是$1.3\times10^{-3}\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$。）