武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试

高等数学（微积分）A2

1、（10 分）已知$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$, 试求以向量$\vec{A}=5\vec{a}+2\vec{b},\vec{B}=\vec{a}-3\vec{b}$为边的平行四边形的面积。

2、（10 分）计算极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\tan(xy^2)}{x^2+y^2}$.

3、（10 分）设函数$z=f(xy,g(x))$，函数f具有二阶连续偏导数，函数$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}}$

4、（10 分）计算二重积分$\iint\limits_D |xy|dxdy$, 其中$D: x^2+y^2\le a^2\quad(0<a)$.

5、（9 分）已知直线$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$平行于空间曲线$x=t,y=t^2,z=\dfrac{1}{3}t^3$在$t=1$处的切线，求直线$L$在平面$\pi$：$x-y+z-2=0$上的投影直线方程。

6、（10 分）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有二阶连续的导数，满足$f(0)=1$，$f(\dfrac{1}{2})=e^{-1}$且使曲线积分$\int_L (f'(x)+6f(x))ydx+f'(x)dy$在全平面与积分路径无关，试确定函数$f(x)$的解析式并计算曲线积分$\int_{(1,0)}^{(2,3)}(f'(x)+6f(x))ydx+f'(x)dy$.

7、（9 分）设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}(x-1)^n$，求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(1)$的和。

8、设有椭球面Σ：$z=2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}}$.

（1）（8 分）设点$M(x,y)$为Σ在xoy面投影域内一点，求函数z在点$M(x,y)$处的梯度。

（2）（10 分）在第一卦限内作椭球面Σ的一张切平面，使得该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求切点坐标。

（3）（8 分）计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} yz^2dzdx+xy^2dydz+zx^2dxdy$其中$\Sigma$是上半椭球面的上侧。

9、（6 分）求证：当$0<x<1$时，对任何自然数n，有$\sum\limits_{k=1}^{n}x^k(1-x)^{2k}\le\dfrac{4}{23}$.