武汉大学 2006 – 2007 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算下列行列式

1. $D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$;

2. $D = |A|$,其中 $A = (a_{ij})$ 是 2007 阶方阵, $a_{ij} = i - j$.

二.（10 分） 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1 - 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (4, 1, 3, 1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个极大无线性关组.

三. (10 分) 设二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, 试求该二次型的矩阵, 并指出 λ 取何值时 f 正定?

四. （15 分） a, b 为何值时, 方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & a+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+7 \end{pmatrix}$ 有唯一解、无解、有无穷多解? 在有解时, 求出方程组的解.

五. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k = 1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 Q^TAQ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k = 0$ 时, A 能否与对角阵相似 (说明理由)?

六. (20 分) 设三阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A + B = AB$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 0),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 1).$$

1. 求矩阵 A;
2. 求秩 $r(A^\star B^\star)$, 其中 $A^\star$, $B^\star$ 分别为 A, B 的伴随矩阵;
3. 设 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)B$, 求 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$.
4. 设线性变换 T 为: $T(\boldsymbol{\alpha}_i) = \beta_i, (i = 1, 2, 3)$, 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的变换矩阵 C.

七. (20 分) 设三阶方阵 $A = (a_{ij})$,

1. 若 $A^T = A$ 且 $A^2 = O$, 证明 $A = O$; 并由反例说明一般情况下: $A^2 = O$ 得不出 $A = O$.
2. 如果 A 可逆, 将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 B, 问 $BA^{-1} - AB^{-1}$ 是否可逆?