第 1 章 质点运动学

一、知识点网络框图

质点运动学

描述质点运动状态的两个物理量

1. 位置矢量

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

2. 速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

直角坐标系中的表示：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

大小：$v=|\boldsymbol{v}|=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

$$=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

自然坐标系中的表示

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$

描述质点运动状态发生变化的物理量

1. 位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

$$=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

2. 加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

直角坐标系中的表示

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

自然坐标系中的表示

$$\boldsymbol{a}=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}$$

$$=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

圆周运动的线量与角量

1. 圆周运动的角量

角位移：$\mathrm{d}\theta$

角速度：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度：

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

2. 角量与线量的关系

$$\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$$

$$v=R\omega$$

$$a_\tau=R\alpha$$

$$a_n=R\omega^2$$

相对运动

$$\boldsymbol{r}_{OP}=\boldsymbol{r}_{OO'}+\boldsymbol{r}_{O'P}$$

$$\boldsymbol{v}_{OP}=\boldsymbol{v}_{OO'}+\boldsymbol{v}_{O'P}$$

$$\boldsymbol{a}_{OP}=\boldsymbol{a}_{OO'}+\boldsymbol{a}_{O'P}$$

质点运动学中的两类基本问题

1、微分类问题：已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求 $\Delta\boldsymbol{r}$、$v(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$、$a_t(t)$、$a_n(t)$

2、积分类问题：已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ 及 v_0 和 $\boldsymbol{r}_0$，求 $v(t)$、$\boldsymbol{r}(t)$

二、基本要求

1. 熟练掌握描述质点运动的物理量：位置矢量、位移、速度和速率以及加速度的概念；理解它们的矢量性、瞬时性和相对性。
2. 学习并掌握矢量运算、微积分运算在大学物理中的应用，熟练掌握运动学中两类基本问题（微分类问题和积分类问题）的求解方法。
3. 理解运动的相对性，掌握相对运动问题的处理方法。

三、主要内容

（一）、描述质点运动的物理量

1．位置矢量和运动学方程

从坐标原点指向质点所在位置的有向线段称为**位置矢量**，用 $\boldsymbol{r}$ 表示，在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

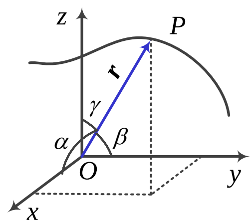


图 1.1　位置矢量

其大小和方向余弦分别为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}\qquad\cos\beta=\frac{y}{r}\qquad\cos\gamma=\frac{z}{r}$$

质点运动时，位置矢量随时间变化的函数关系称为质点的**运动学方程**，其矢量式为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

运动学方程在直角坐标系中的分量式为

$$x=x(t)\ ,y=y(t)\ ,z=z(t)$$

若将分量式中的参数 t 消去，即可得质点运动的轨迹方程

$$F(x,y,z)=0$$

2．位移和路程

设在 t 时刻质点位于位置 A，在 $t+\Delta t$ 时刻位于 B，则从 A 指向 B 的有向线段称为质点在这 Δt 时间内的位移，用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示，即

$$\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

这表明位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 等于位置矢量的增量。质点从 A 到 B 轨迹的实际长度 $\Delta s=\mathrm{AB}$ 称为质点在 Δt 时间内所经历的路程。一般情况下 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$，且 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$ 。

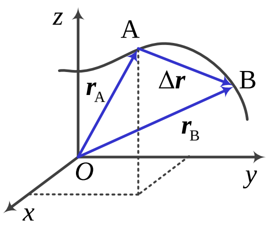


图 1.2 位移

3．速度和速率

平均速度：$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$　　　　平均速率：$\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\neq|\bar{\boldsymbol{v}}|$

瞬时速度：$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$　　　　瞬时速率：$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}|$

速度在直角坐标系中的表示为

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

这表明速度等于位置矢量对时间的一阶导数，它在直角坐标系中的某个分量就等于质点在该方向上的位置坐标对时间的一阶导数。

瞬时速度的大小就是瞬时速率，即

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

4．加速度

加速度是描述质点速度变化快慢的物理量，其定义为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

这表明加速度等于速度对时间的一阶导数，也等于位置矢量对时间的二阶导数。它在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

（二）、圆周运动中的角量表示

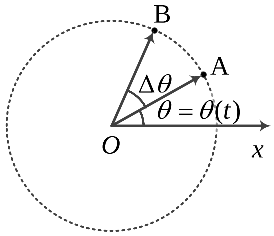


图 1.3　圆周运动的角量表示

1．角位置：$\theta=\theta(t)$

2．角位移：$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$　，$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$

3．角速度：$\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$

4．角加速度：$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t^2}$

注意：有限大小的角位移$\Delta\theta$不是矢量，但无限小的角位移$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$是矢量，其方向由右手螺旋法则确定，同样角位移和角加速度也是矢量，它们的方向沿圆周的轴线方向

5．切向加速度与法向加速度

当质点做圆周运动或其它平面曲线运动时，可将加速度沿曲线的切线和法线方向做正交分解，如图 1.4 所示。其相应的两个分量分别称为切向加速度和法向加速度，其大小分别为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\quad,\quad a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

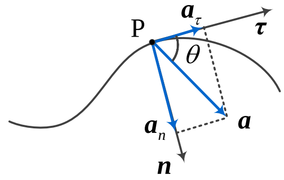


图 1.4 切向与法向加速度

于是

$$\boldsymbol{a}=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

注意：切向加速度只能改变速度的大小，法向加速度只能改变速度的方向。在所有的直线运动中，法向加速度为零，在所有的匀速率曲线运动中切向加速度为零。

6．角量与线量的关系

当质点在一个给定的圆周上做圆周运动时，质点的运动既可以用一组角量（θ、$\Delta\theta$、ω、α）来表示，也可以用一组线量（Δs、v、a_τ、a_n）来表示，它们之间的关系为

$$\Delta s=R\Delta\theta\quad,\quad v=R\omega\quad,\quad a_\tau=R\alpha\quad,\quad a_n=R\omega^2$$

（三）、相对运动

在两个相互做平动的参照系中，建立两个坐标系，质点相对于这两个坐标系的位置矢量、速度、加速度之间的变换关系为

$$\boldsymbol{r}_{PO}=\boldsymbol{r}_{PO'}+\boldsymbol{r}_{O'O}$$

$$\boldsymbol{v}_{PO}=\boldsymbol{v}_{PO'}+\boldsymbol{v}_{O'O}$$

$$\boldsymbol{a}_{PO}=\boldsymbol{a}_{PO'}+\boldsymbol{a}_{O'O}$$

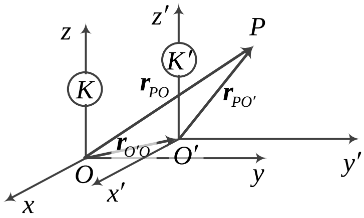


图 1.5　相对运动

四、典型例题解法指导

本章习题大致可分为两种基本类型：

1．第一类：求导类问题

已知质点的运动学方程$\boldsymbol{r}(t)$（通常可由已知条件或几何关系得到），求任意一段时间内的位移$\Delta\boldsymbol{r}$、路程Δs、任意时刻的速度$\boldsymbol{v}(t)$、加速度$\boldsymbol{a}(t)$（包括切向加速度和法向加速度）等。这类问题原则上可以利用速度和加速度定义，通过矢量运算和求导运算求解。

2．第二类：积分类问题

已知质点在任意时刻的运动速度$\boldsymbol{v}(t)$和初始位置$\boldsymbol{r}_0$，求质点在任意时刻的位置矢量$\boldsymbol{r}(t)$；或已知任意时刻的加速度$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$及初始速度$\boldsymbol{v}_0$，求质点在任意时刻的速度$\boldsymbol{v}(t)$。这类问题从本质上来说是求解微分方程的问题，一般情况下可以通过分离变量，应用积分运算来求解，即

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t \quad 和 \quad \int_{r_0}^{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$$

此外，我们还必须考虑速度和加速度的瞬时性、矢量性和相对性，所以实际求解时（特别是作积分运算时），首先要选择一个恰当的坐标系，然后针对坐标系中的各分量式进行计算，使问题简化。

例 1.1 已知一个质点在 O-xy 平面内做曲线运动，其运动方程为 $\boldsymbol{r}=(3+4t)\boldsymbol{i}+\left(4+4t-5t^2\right)\boldsymbol{j}$ (SI)。试求：

（1）质点在头 3 秒内的位移和平均速度；

（2）质点在任意时刻的速度和加速度；

（3）在任意时刻质点的切向加速度和法向加速度的大小。

分析：本题属于第一类问题，可以通过矢量代数和求导运算来求解。

解：（1）由题意可知 $t=0\,\text{s}$ 和 $t=3\text{s}$ 时，质点的位置矢量分别为：$\boldsymbol{r}(0)=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ m 和 $\boldsymbol{r}(3)=15\boldsymbol{i}-29\boldsymbol{j}$ m，所以质点在头 3 秒内的位移和平均速度分别为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(3)-\boldsymbol{r}(0)=12\boldsymbol{i}-33\boldsymbol{j}\ \text{m}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{12\boldsymbol{i}-33\boldsymbol{j}}{3}=4\boldsymbol{i}-11\boldsymbol{j}\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

（2）质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=4\boldsymbol{i}+(4-10t)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-10\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

（3）（解法一）由任意时刻的速度表达式，可得任意时刻速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4^2+(4-10t)^2}=\sqrt{100t^2-80t+32}$$

再由切向加速度的定义，可得质点在任意时刻的切向加速度的大小为

$$a_{\text{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{100t-40}{\sqrt{100t^2-80t+32}}$$

又由 $a^2=a_{\text{t}}^2+a_{\text{n}}^2$，且由（2）可知：$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，所以质点在任意时刻的法向加速度的大小为

$$a_{\text{n}}=\sqrt{a^2-a_{\text{t}}^2}=\frac{40}{\sqrt{100t^2-80t+32}}$$

（解法二）（解题提示）：利用矢量标量积的运算规则和切向加速度的物理意义来求解因为：$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=va\cos\theta=va_{\text{t}}$，所以

$$a_{\text{t}}=a\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{v}=\frac{v_xa_x+v_ya_y}{v}$$

请读者自己完成余下的运算

例 1.2　已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j}$ (SI)，其中 a、b、ω 均匀常。试求：

（1）质点的速度和加速度的表达式；

（2）质点在任一时刻的切向加速度的大小；

（3）质点的轨迹方程。

分析：本题属于运动学中的第一类问题，运用求导运算来求解。

解：（1）质点的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+b\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}\ (\mathrm{SI})$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}\ (\mathrm{SI})=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

这表明该质点加速度的方向总是与位置矢量的方向相反，并指向坐标原点。

（2） 由（1）可知该质点速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(a\omega\sin\omega t)^2+(b\omega\cos\omega t)^2}$$

所以由切向加速度的定义，可得切向加速度的大小为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{a^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t-b^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{(a\omega\sin\omega t)^2+(b\omega\cos\omega t)^2}}=\frac{(a^2-b^2)\omega^3\sin 2\omega t}{2\sqrt{(a\sin\omega t)^2+(b\cos\omega t)^2}}$$

（3）由题意可知质点运动的参数方程为： $x=a\cos\omega t$， $y=b\sin\omega t$， 消去参数 t， 可得轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

例题 1.3 如图 1.6 所示，路灯距离水平地面的高为 H， 一个身高为 h 人在地面上从路灯的正下方开始以速度 v_0 沿直线匀速行走。试求：

（1）在任意时刻，人影中头顶的移动速度；

（2）影子长度增长的速率。

分析：本题需要借助几何关系来建立运动学方程，然后求相应的各个物理量。

解：（1）以地面上路灯正下方为坐标原点，人的运动方向为 x 轴正方向。假设在 t 时刻，人的位置坐标为 $x_1=v_0t$，由几何关系可得人影中头顶的 x 坐标为

$$x_2=\frac{H}{H-h}x_1$$

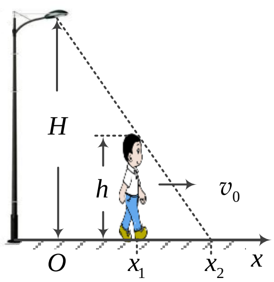


图 1.6 例 1.3 图

将上式两边同时对时间求一阶导数，可得人影中头顶的移动速度为

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{H}{H-h}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{H}{H-h}v_0$$

（2）由图可知，任意时刻人影的长度为

$$L = x_2 - x_1 = \frac{h}{H-h}x_1$$

所以影子长度增长的速率为

$$v_L = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{H-h}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{H-h}v_0$$

例 1.4　一质点沿半径为 R 的圆周运动，其运动学方程为 $\theta = bt + ct^2$ 。，其中 b 、 c 都是大于零的常量。试求：从 $t=0$ 开始到切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间。

分析：本题要根据圆周运动的特征，并利用角量与线量的关系来求解，仍然属于质点运动学中的第一类问题。

解： 由题意可知质点做圆周运动时的角速度和角加速度分别为

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = b + 2ct \quad , \quad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2c$$

由角量与线量的关系，可知切向和法向加速度的大小分别为

$$a_\tau = R\alpha = 2cR \quad , \quad a_n = R\omega^2 = R(b+2ct)^2$$

令： $a_\tau = a_n$， 即

$$2cR = R(b+2ct)^2$$

解之可得经历的时间为

$$t = \frac{\sqrt{2c} - b}{2c}$$

例 1. 5 一质点沿 x 轴正向运动，其速度为 $v = \alpha\sqrt{x}$，式中 α 为正的常数。已知 $t=0$ 时，$x=0$ 。试求：

（1）该质点的运动方程以及速度和加速度随时间的变化规律；

（2）质点从坐标原点（ $x=0$ ）运动到任意位置 x 的过程中的平均速度。

分析：首先这是一个一维直线运动问题。在一维直线运动中，所有矢量均可以不用矢量式表示，而是用有正负号的代数量表示，其方向体现在正负号中，即：$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ，$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 。其次，本题既有积分问题也有微分问题。

解：（1）根据题意有

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha\sqrt{x} \qquad ①$$

将①式分离变量，并在等式两边同时作定积分有（注意：积分下限为两个变量在初始时刻或某个给定时刻的值，积分上限为两个变量在任意时刻的值。）

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_0^t \alpha \mathrm{d}t \qquad ②$$

积分可得质点的运动方程为

$$x = \frac{\alpha^2}{4}t^2 \qquad ③$$

于是质点速度随时间的变化规律为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha^2}{2}t$$

加速度随时间的变化规律为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha^2}{2}$$

（2）（解法一）由③式可知，质点位于坐标原点时 $t=0$，所以质点从 $x=0$ 运动到 x 处所需的时间为：$\Delta t = t = 2\sqrt{x}/\alpha$，所以由平均速度的定义，可得这段时间内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x}{2\sqrt{x}/\alpha} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{x}$$

（解法二）由（1）可知，质点的加速度 a 为常数，即质点做匀加速直线运动，又质点在 $x=0$ 处，$v_0=0$；在 x 处 $v=\alpha\sqrt{x}$，故质点从 $x=0$ 处，运动到 x 处的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{v+v_0}{2} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{x}$$

例题 1.6　已知一质点沿 x 轴做直线运动，其加速度为 $a = 5+2t$ (SI)。在 $t=0\text{s}$ 时，$v = 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，$x=-5\ \text{m}$。试求质点在任意时刻的速度和位置。

分析：本题属于质点运动学中的第二类问题。对于这类问题，通常可由速度、加速度的定义首先得到一个微分方程，然后通过分离变量用积分法进行求解。另外本题属于一维直线运动问题，所以各矢量可以不用矢量式表示，其方向用正负号表示。

解：由已知条件可知

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=5+2t$$

对上述微分方程进行分离变量，然后在等式两边同时取定积分，即

$$\int_2^v \mathrm{d}v=\int_0^t(5+2t)\mathrm{d}t$$

积分可得该质点的速度为

$$v=2+5t+t^2$$

又因 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2+5t+t^2$，再次分离变量，并取定积分，即

$$\int_{-5}^x \mathrm{d}x=\int_0^t\left(2+5t+t^2\right)\mathrm{d}t$$

所以质点在任意时刻的位置为

$$x=-5+2t+\frac{5}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$$

例题 1.7 一质点沿 y 轴做直线运动，其加速度为 $a=a_0-ky$，已知 $t=0\mathrm{s}$ 时，$y=0\ \mathrm{m}$，$v=v_0$。试求：

（1）质点的速度与位置的函数关系；

（2）质点运动的最大速率。

分析：本题中加速度是位置坐标的函数，由加速度的定义可得微分方程的形式为：$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a_0-ky$，显然该方程不能直接进行分离变量，所以先要进行变量替换再求解。因为 $a(y)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，再分离变量可得 $v\mathrm{d}v=a(y)\mathrm{d}y$，积分 $\int a(y)\mathrm{d}y=\int v\mathrm{d}v$ 可求出 $v=v(y)$。

解：因为：$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，所以由题意可得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=a_0-ky$$

对上式分离变量并作定积分，即

$$\int_{v_0}^v v\mathrm{d}v=\int_0^y(a_0-ky)\mathrm{d}y$$

积分可得质点的速度与位置坐标的函数关系为

$$v=\pm\sqrt{v_0^2+2a_0y-ky^2} \qquad ①$$

（2）令：$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\pm\dfrac{a_0-ky}{2\sqrt{v_0^2+2a_0y-ky^2}}=0$，可得速率最大的位置为：$y=\dfrac{a_0}{k}$，将此代入①式，可得最大速率为

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{a_0^2}{k}}$$

例题 1.8 飞机驾驶员想让飞机往正北方向飞行，飞机在静止的空气中的航速为 600Km/h，而风速为 60km/h，风向为东风。试问驾驶员应让飞机取什么航向？飞机相对于地面的速率为多少？

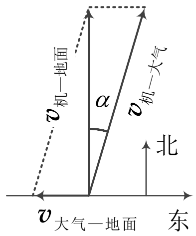


图 1.7 例 1.8 解图

分析：这是相对运动问题，对这类问题的分析通常可借助于矢量图使问题简化。另外将速度叠加原理 $\boldsymbol{v}_{绝对}=\boldsymbol{v}_{相对}+\boldsymbol{v}_{牵连}$，写成 $\boldsymbol{v}_{\text{A-C}}=\boldsymbol{v}_{\text{A-B}}+\boldsymbol{v}_{\text{B-C}}$ 的形式，更有利于处理实际问题。

解：根据相对运动中的速度合成原理，有

$$\boldsymbol{v}_{机\text{-}地面}=\boldsymbol{v}_{机\text{-}大气}+\boldsymbol{v}_{大气\text{-}地面}$$

作矢量图如图 1.7 所示。不难看出，飞机相对于地面的速度大小为

$$v_{机—地面}=\sqrt{v_{机—大气}^2-v_{大气—地面}^2}=\sqrt{600^2-60^2}=597(\mathrm{km/h})$$

他应取的航向为北偏东

$$\alpha=\arcsin\frac{v_{大气—地面}}{v_{机—大气}}=\arcsin\frac{60}{600}=5.74^\circ$$

五 自我测试题

1.1 若质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$，则下列表示正确的是：（ ）

A. $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，$a=\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$ ；

B. $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ，$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}i+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}j$；

C. $v=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ ，$a=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$ ；

D. $v=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ ，$a=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ 。

1.1 答案： C

解： $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 是矢径长度的变化率，$\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$ 是矢径长度对时间的二阶导数，故 A 错；B 中第一项错，第二项中两个单位矢量既不是黑体字（代表矢量）、也没有矢量符号“$\rightarrow$”，也错；D 中第二项错，因为 a 是加速度的大小。

1.2 一质点从静止开始沿半径为 R 的圆周做匀加速圆周运动。当切向加速度和法向加速度大小相等时，质点走过的路程为：（　　　　）

A. $\dfrac{R}{2}$ ；　　B. R；　　C. $\dfrac{\pi R}{2}$；　　D. πR 。

1.2 答案： A

解法提要： 由 $v=a_\tau t$，得 $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{a_\tau^2t^2}{R}$ ；令 $a_n=a_\tau$，可得 $t=\sqrt{R/a_\tau}$ ；再由 $s=\dfrac{1}{2}a_\tau t^2$ 求解

1.3 一质点在 O-xy 平面内做曲线运动，其运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+\left(4-t^2\right)\boldsymbol{j}$ (SI)。在 $t>0$ 的时间内，其速度矢量和位置矢量垂直的时刻为：（　　　　）

A. 1s ；　　B. 2s ；　　C. $\sqrt{2}$ s ；　　D. $\sqrt{3}$ s 。

1.3 答案： C

解法提要： 利用两个矢量的标量积（点积）的运算规则求解，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cdot\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

1.4 一质点在 O-xy 平面内做曲线运动，其运动方程为：$x=at$，$y=b+ct^2$，其中 a、b、c 均为正的常量。当质点的速度方向与 x 轴的正方向成 60° 角时，质点速度的大小为：（　　　　）

A. a ；　　B. $\sqrt{2}a$　　C. $2a$　　D. $\sqrt{a^2+4c^2}$ 。

1.4 答案： C

解法提要： 由题意 $v_x = a$ ； $v_y = 2ct$ ； 当 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴正方向成 $60°$ 角时，必有 $\tan 60° = \dfrac{v_y}{v_x}$ ，最后由 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 求得答案

1.5　一质点沿半径为 2 米的圆周运动，其运动方程为 $\theta = 2t + 2t^2$（SI 单位）表示，在 $t = 2\text{s}$ 秒时，它的法向加速度 $\boldsymbol{a}_n =$ ________ m/s^2，切向加速度 $a_\tau =$ ________ m/s^2 。

1.5 答案： 200 , 8

解法提要： $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2 + 4t$ ， $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 4$ ，则 $a_n = R\omega^2$ ， $a_\tau = R\alpha$

1.6 一质点沿 x 轴运动，其加速度与位置坐标的关系为： $a = 4x + \dfrac{1}{x^2}$ 。如果质点在 $x = 1\ \text{m}$ 处的速度为零，试求质点在任意位置处的速度。

1.6 答案： $\pm\sqrt{4x^2 - \dfrac{2}{x} - 2}$

解法提要： 由 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 及题意可得： $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 4x + \dfrac{1}{x^2}$，对此式分离变量，并作定积分，即： $\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_1^x \left(4x + \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$，积分可得： $v = \pm\sqrt{4x^2 - \dfrac{2}{x} - 2}$

1.7 一质点在 O-xy 平面内做曲线运动。已知 $v_x = 3\sqrt{t}$（SI），$y = \left(\dfrac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right)$（SI），且 $t = 0$ 时， $x_0 = 5\ \text{m}$ 。试求：

（1）写出该质点运动学方程的矢量表达式；

（2）质点在 $t_1 = 1\ \text{s}$ 和 $t_2 = 4\ \text{s}$ 时的位置矢量和这 3s 内的位移；

（3）质点在 $t = 4\ \text{s}$ 时的速度和加速度的大小和方向。

1.7 答案： $\boldsymbol{r} = \left(5 + 2t^{3/2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right)$(SI)；$7\boldsymbol{i} - 0.5\boldsymbol{j}$，$21\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}\ \text{m}$，$14\boldsymbol{i} + 16.5\boldsymbol{j}\ \text{m}$；速度 $\sqrt{85}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，与 x 正方向的夹角 $49.4°$，加速度 $5/4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，与 x 正方向的夹角 $53.1°$

解：（1）因为 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3\sqrt{t}$， 分离变量并积分 $\int_5^x \mathrm{d}x = \int_0^t 3\sqrt{t}\mathrm{d}t$，得 $x = 5 + 2t^{3/2}$

由此可求 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=\left(5+2t^{3/2}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)$(SI)

（2）$\boldsymbol{r}_1=7\boldsymbol{i}-0.5\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}_2=21\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}$ m ，$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=14\boldsymbol{i}+16.5\boldsymbol{j}$ m ，

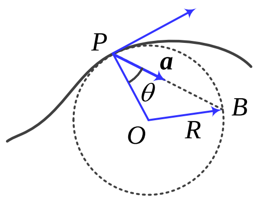
（3）因为 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\sqrt{t}\boldsymbol{i}+(t+3)\boldsymbol{j}$ $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{2\sqrt{t}}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

所以：$\boldsymbol{v}(4)=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}$ $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ，$\boldsymbol{a}(4)=\frac{3}{4}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

速度大小：$v=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85}$ $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ，与 x 正方向的夹角 $\theta_v=\arctan\frac{7}{6}=49.4°$

加速度大小：$a=\sqrt{(3/4)^2+1}=5/4$ $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，与 x 正方向的夹角 $\theta_a=\arctan\frac{1}{0.75}=53.1°$

1.8 如测试题 1.8 图所示，一个质点沿着一条平面曲线运动。在曲线上 P 点处，加速度的方向与该处曲率圆上的弦线 $\overline{PB}$ 重合。已知 $\overline{PB}=L$，物体在 P 点的速率为 v。试求质点在 P 点的加速度的大小。



测试题 1.8 图

1.8 答案： $2v^2/L$

解： 设 P 点处曲率圆的半径为 R，总加速度为

$\boldsymbol{a}=a_n\boldsymbol{n}+a_\tau\boldsymbol{\tau}$，其大小为 a，则法向加速度和切向加速度分别为

$$a_n=a\cos\theta=\frac{v^2}{R}\quad,\quad a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a\sin\theta$$

又由几何关系可得：$\cos\theta=\frac{L}{2R}$，由此可得

$$a=\frac{a_n}{\cos\theta}=\frac{2v^2}{L}$$

1.9 设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处，然后又向西飞回到 A 处，飞机相对空气的速率为 v'，空气流相对地面的速率为 u，A、B 间的距离为 L。假定飞机相对空气的速率 v' 和空气流的速率 u 均保持不变，空气流的速度方向向北，求：飞机来回飞行的时间。

1.9 答案： $\frac{2L}{\sqrt{v'^2-u^2}}$

解： 因为飞机相对于地面来回的飞行速率均为：$v=\sqrt{v'^2-u^2}$，所以

$$\Delta t = \frac{2L}{v} = \frac{2L}{\sqrt{v'^2 - u^2}}$$