2008-2009 下学期《高等数学》期中试题解

一、（36 分）试解下列各题

1、求曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在点（1，-2，1）处的切面和法线方程。

2、设 $z=e^{xy}+y^2\ln x$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3、计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2,x\ge 0,y\ge 0\right\}$。

4、交换积分次序 $\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$。

5、已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某个函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a 和 b 的值。

6、计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dv$，其中 Ω 是 xy 平面上的直线 $y=z$ 绕 y 轴转一周得到的曲面与 $z=1,z=2$ 所围成的空间区域。

解.1、$F=x^2+y^2+z^2-6$，$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,-2,1)}=(2x,2y,2z)\big|_{(1,-2,1)}=(2,-4,2)$，

切面：$x-1-2(y+2)+z-1=0$，法线：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$。

2、$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+\frac{y^2}{x},\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\frac{2y}{x}$。

3、

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^a\rho^3d\rho=\frac{a^4}{4}\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{8}$$

4、$\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\iint\limits_D f(xy)dxdy=\int_0^1dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1}f(x,y)dx$。其中

$$D=\{(x,y)|-\sqrt{1-y^2}\le x\le y-1,0\le y\le 1\}。$$

5、$P=(axy^3-y^2\cos x),Q=(1+by\sin x+3x^2y^2),$

$\frac{\partial P}{\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\frac{\partial Q}{\partial x}=by\cos x+6xy^2$，由 $3axy^2-2y\cos x\equiv by\cos x+6xy^2$ 得

$a=2,b=-2$。

6、用一套二方法，

$$I=\int_1^2 dz\iint_{D_z}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_1^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{e^z}{\rho}\rho d\rho=\int_1^2 e^z dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z d\rho=2\pi\int_1^2 ze^z dz=2e^2\pi$$

二、（10 分）求函数 $z=x+y+\dfrac{1}{xy}$（$x>0,y>0$）的极值。

解. $z_x=1-\dfrac{y}{x^2y^2},z_y=1-\dfrac{x}{x^2y^2}$。解 $\begin{cases}1-\dfrac{y}{x^2y^2}=0\\1-\dfrac{x}{x^2y^2}=0\end{cases}$ 得 $x=y=1$。此时

$z_{xx}=2,z_{yy}=2,z_{xy}=1,\Delta=3>0$，（1，1）是极小值点，极小值 $z=3$。无极大值。

三、（12 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，证明

1、 $f(x,y)$ 在（0，0）处不连续；

2、 $f(x,y)$ 在（0，0）处偏导数存在；

3、 $f(x,y)$ 沿任一方向的方向导数并不都存在。

证.1、因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xkx}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 与 k 有关，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在（0，0）处不连续。

2、 $\varphi(x)=f(x,0)\equiv0,\psi(y)=f(0,y)\equiv0$，故 $f_x(0,0)=\varphi'(0)=0,f_y(0,0)=\psi'(0)=0$ 都存在。

3、讨论在（0，0）点沿不平行坐标轴方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数：

$\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{t}$ 不存在。故 $f(x,y)$ 沿任一方向的方向导数并不都存在。

四、（12 分）设 $z=f(x,y,u)=xy+xF(u)$，其中 F 是可微函数，且 $u=\dfrac{y}{x}$，证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$$

证. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+xF'(u)(-\dfrac{y}{x^2})=y+F(u)-F'(u)\dfrac{y}{x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)\dfrac{1}{x}=x+F'(u)$

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+xF(u)-yF'(u)+xy+yF'(u)=z+xy$。

五、（15 分）设Ω为曲面$x^2+y^2=az,z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$围成的空间区域。（1）求$\Omega$的体积；（2）求$\Omega$的表面积。

解.（1）$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{1}{a}(x^2+y^2)}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}dz=\iint\limits_{D_{xy}}\left[2a-\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{a}(x^2+y^2)\right]dxdy$

$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left[2a-\rho-\dfrac{1}{a}\rho^2\right]\rho d\rho=(a^3-\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{4}a^3)2\pi=\dfrac{5}{6}\pi a^3$。

其中$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$。

（2）记Ω表面的上部分为Σ_1下部分为Σ_2。Ω的表面积

$$A=\iint\limits_{\Sigma_1}dS+\iint\limits_{\Sigma_2}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{4}{a^2}(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\pi a^2+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+\frac{4}{a^2}\rho^2}\rho d\rho=\sqrt{2}\pi a^2+2\pi\frac{a^2}{12}(1+\frac{4}{a^2}\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\sqrt{2}\pi a^2+\frac{\pi a^2}{6}(5^{\frac{3}{2}}-1)$$

六、（15 分）设$f(x)$在$[a,b]$上连续。试研究$\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$，从而证明不等式$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$，且仅当$f(x)$为常数时等号成立。

证. $\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=\iint\limits_D[f(x)-f(y)]^2dxdy\ge 0$，另一方面

$$\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=\int_a^b dx\int_a^b[f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)]dy$$
$$=\int_a^b dx\int_a^b f^2(x)dy+\int_a^b dx\int_a^b f^2(y)dy-2\int_a^b dx\int_a^b f(x)f(y)dy=2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$$

故$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$。

$(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D[f(x)-f(y)]^2dxdy$，可见，等号成立等价于$[f(x)-f(y)]^2\equiv 0$即$f(x)\equiv f(y)$。故仅当$f(x)$为常数时等号成立。