第 1 章 质点运动学

运动学的任务是描述物体在空间的位置和速度随时间的变化规律，不涉及物体间相互作用与运动的关系。我们知道，所有的物体都处于永恒的运动之中，物体的运动形式是多种多样的，机械运动是其中最简单、最基本的运动。

本章在引入参照系、坐标系、质点等概念的基础上，首先介绍描述物体运动的几个主要物理量，如位置矢量、运动表达式、位移、速度和加速度等，然后讨论运动学问题的基本处理方法、曲线运动中的切向加速度和法向加速度，以及相对运动等问题。

§1.1 参考系 坐标系 质点

一个物体相对于另一个物体的位置，或一个物体的某些部分相对于其他部分的位置随时间变化的过程，叫做**机械运动**（mechanical motion）。为了研究物体的机械运动，首先需要对复杂的物体运动进行科学合理的抽象，提出物理模型，还要给出能反映物体位置变化及位置变化快慢程度的物理量。

研究物体的机械运动规律，首先要确定如何描述物体的运动。物体运动的描述，起源于人们对运动物体的观察、归纳和综合，从而抽象出必要的概念，然后再建立必要的基本物理量来实现。本节主要介绍参考系、坐标系和质点的概念。

1.1.1. 参考系

在自然界中，绝对静止的物体是找不到的。 大到星系，小到原子、电子等微观粒子，无一不在运动着。 静止在地面上的物体（例如建筑物、树木等）似乎是不动的，但是由于地球有公转和自转，因此地面上的物体自然也跟着地球一起在运动。总之，自然界中所有的物质都处于永恒的运动之中，运动和物质是不可分割的，运动是物质的存在形式，是物质的固有属性。这就是**运动的绝对性**。

然而，对物体运动的描述是相对的。例如：在行进的火车中，坐在车厢中的乘客看到窗外的树木、房屋都在向后倒退；可是，站在地面（即地球）上的人却看到这些树木、房屋都是静止的。由此可知，物体运动的状态因观察者的不同而不同。这就是**运动描述的相对性。为了描述一个物体的运动，通常需要选择另外一个物体**（如上述的车厢、地

球等）**或一组彼此静止的物体组作为参考，这个被选作参考的物体或物体组**，就称为**参考系**或**参照系**（reference system）。选择不同的参考系，对同一物体运动状况的描述是不同的。因此，在描述物体的运动时，必须指明是对什么参考系而言的。从对运动的描述来说，参考系的选择可以是任意的，主要看问题的性质和研究的方便而定。例如，在研究宇宙飞船的运动时，当运载火箭刚发射时，可以选地面作为参考系；当宇宙飞船在太阳系中飞行时，常选太阳作为参考系。

1.1.2. 坐标系

为了确定运动物体相对于参考系的具体位置，需要在选定的参考系上建立一个恰当的**坐标系**。常用的坐标系有：直角坐标系、极坐标系、柱坐标系、球坐标系和自然坐标系等。究竟应当选用哪种坐标系，坐标原点设在何处，坐标轴的取向如何，应以问题的处理方便为准。例如，我们在飞机场观看飞行表演时，我们可以以机场塔台为坐标原点，建立一个直角坐标系，并用坐标（x, y, z）来描述飞机的位置，如图 1.1 所示；而在讨论人造地球卫星的位置时，可以以地心为坐标原点，建立一个球坐标系，并用球坐标（r, θ, φ）来确定其位置，如图 1.2 所示。

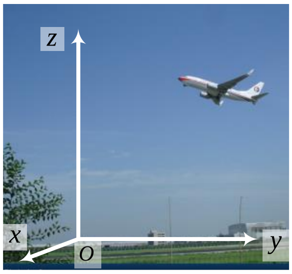


图1.1 直角坐标系

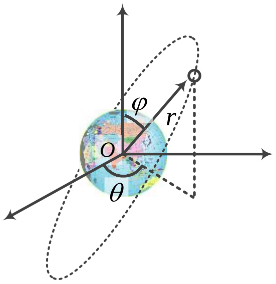


图1.2 球坐标系

1.1.3. 质点

物体的运动一般而言是很复杂的。原因是物体都有一定的形状和大小，物体上各点的运动也不完全一样，物体本身的形状和大小也可以不断变化。因此，要详细描写物体的运动是不容易的。例如：在太阳系中，行星除了绕太阳公转外，还有自转；从枪口射出的子弹，它在空间向前飞行的同时，同样还有绕自身轴的高速转动；由多个原子组成的分子，除了分子的平动、转动外，分子内各原子还在做振动。

但是，在研究某些运动时，在一定的近似条件下，可以不考虑物体上各部分之间的运动差异性，用物体上任意一点的运动来代表整个物体的运动。这时我们就可以**忽略物体的形状和大小，把物体看作是一个有一定质量的点**，这样的点模型物体就称为**质点**

（mass point or particle）。例如：研究地球绕太阳公转的规律时，虽然地球的尺寸很大（其半径约为$6.37\times10^{3}\,\text{km}$），但比起地球到太阳的距离（约为$1.5\times10^{8}\,\text{km}$）来说小得多，地球上各点相对于太阳的运动可近似地看作是相同的，这时就可以忽略地球的大小和形状，把地球当作一个质点来处理。但是在研究地球的自转时，则不能把地球看作一个质点。由此看来，一个物体能否抽象为一个质点，应根据问题的具体情况而定。

质点是一个理想化的模型，它体现了物理学中化繁为简、突出问题主要方面的研究方法，在实践上和理论上都有重要意义。当我们所研究的物体不能看作质点时，可把整个物体看成是由许多质点所组成的，弄清楚这些质点的运动，就可以弄清楚整个物体的运动。因此，研究质点的运动是研究物体运动的基础。

§1.2 描述质点运动的物理量

上面已经指出：为了确定运动质点在空间的位置及其变化规律，我们需要在给定的参照系中，选定一个参考点O作为坐标原点，并建立一个坐标系。最常见坐标系就是直角坐标系O-xyz。下面，我们将以直角坐标系为例来讨论描述质点运动的几个物理量。

1.2.1 位置矢量

微视频1.2：
位矢、位移与路程

质点在空间的位置常用**位置矢量**（简称**位矢**）（position vector）来表示，它是从坐标原点O指向质点所在位置P的有向线段，如图 1.3 所示，常用符号$\boldsymbol{r}$表示，即

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$$

在直角坐标系O-xyz中，质点的位置P既可以用位置矢量$\boldsymbol{r}$来表示，也可以用一组坐标（x、y、z）来表示。若引入沿x、y、z三个坐标轴正方向的单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则位置矢量$\boldsymbol{r}$在直角坐标系O-xyz中可以表示为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (1.1)$$

位置矢量$\boldsymbol{r}$的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\boldsymbol{r}$的方向可以用一组方向角，即$\boldsymbol{r}$与x轴、y轴和z轴之间的夹角（α、β、γ）来表示，相应的方向余弦

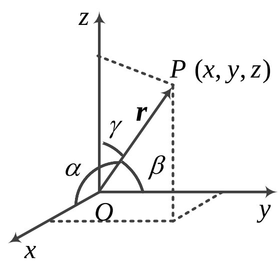


图1.3 直角坐标系中的位置矢量

由下式确定

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}\qquad\cos\beta=\frac{y}{r}\qquad\cos\gamma=\frac{z}{r}\tag{1.2}$$

1.2.2 运动学方程与轨迹方程

当质点运动时，它相对于坐标原点 O 的位矢是随时间而变化的。所以，位矢 $\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}\tag{1.3}$$

式（1.3）称为质点的**运动学方程**（kinematic equation）（亦称为**运动表达式**）。

显然，质点在运动过程中，它在直角坐标系中的位置坐标（x、y、z）也是时间 t 的函数，即

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\tag{1.4}$$

式（1.4）称为质点运动学方程的分量式。在分量式中，如果消去时间参数 t，便可得到质点运动的**轨迹方程**。如果轨迹是直线，就叫做直线运动；如果轨迹是曲线，就叫做曲线运动。例如：当质点做自由落体运动时，若以起始点为坐标原点，竖直向下为 y 轴正方向，则它的运动学方程可写作：$y=\dfrac{1}{2}gt^2$，其轨迹是直线。式中 y 的单位为米（m），t 的单位为秒（s），$g=9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$。当质点以初速 v_0 做平抛运动时，若以抛出点为坐标原点，水平抛出方向为 x 轴的正方向，竖直向下为 y 轴正方向，则其运动学方程的分量式可写作

$$x=v_0t\quad,\quad y=\frac{1}{2}gt^2$$

从中消去时间参数 t 后，可得其轨迹方程为

$$y-\frac{g}{2v_0^2}x^2=0$$

不难看出其轨迹是一条抛物线。

知道了质点的运动学方程（或运动表达式），就能确定任一时刻质点的位置，从而可

以确定质点的运动规律。运动学的重要任务之一，就是要找出各种物体运动时所遵循的运动学方程（或运动表达式）。

1.2.3　位移与路程

质点在空间运动时，它的位置将随时间发生变化。如图 1.4 所示，假设在时刻t，质点在 A 点处，在时刻$t+\Delta t$，质点到达 B 点处。在这Δt时间间隔内，质点相对坐标原点O的位置矢量由$\boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}$变化到$\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}}$，显然，位置矢量的大小和方向都发生了变化。我们将从质点的起始点 A 指向终点 B 的有向线段$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$称为质点在$\Delta t$时间内的**位移**（displacement），并用$\Delta \boldsymbol{r}$表示。不难看出，有向线段$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$除了表明终点 B 与起点 A 之间的距离外，还表明了 B 点相对于 A 点的方位，所以位移$\Delta \boldsymbol{r}$ $(=\overrightarrow{\mathrm{AB}})$是矢量。从图 1.4 中可以看出，位移$\Delta \boldsymbol{r}$和位矢$\boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}$、$\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}}$之间的关系为

$$\Delta \boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} \tag{1.5}$$

式（1.5）表明，质点在Δt时间内的位移$\Delta \boldsymbol{r}$ $(=\overrightarrow{\mathrm{AB}})$等于在这段时间内位置矢量的增量，所以位移用$\Delta \boldsymbol{r}$来表示。

在直角坐标系O-xyz中，位移可表示为

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{r}&=(x_{\mathbf{B}}-x_{\mathbf{A}})\boldsymbol{i}+(y_{\mathbf{B}}-y_{\mathbf{A}})\boldsymbol{j}+(z_{\mathbf{B}}-z_{\mathbf{A}})\boldsymbol{k}\\&=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.6}$$

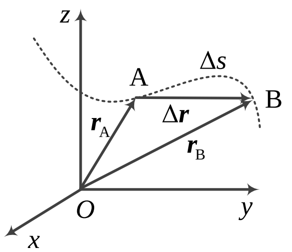


图1.4　位移和路程

位移的大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2} \tag{1.7}$$

位移的方向可以用它的方向余弦表示，即

$$\cos\alpha=\frac{\Delta x}{|\Delta \boldsymbol{r}|}\qquad \cos\beta=\frac{\Delta y}{|\Delta \boldsymbol{r}|}\qquad \cos\gamma=\frac{\Delta z}{|\Delta \boldsymbol{r}|} \tag{1.8}$$

应当注意，位移是描述质点位置变化的物理量，它只表示位置变化的实际效果，并非质点所经历的路程。例如，在图 1.4 中，曲线所示的路径是质点实际运动的轨迹，从 A 点到 B 点轨迹的实际长度$\Delta s=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，为质点在$\Delta t$时间内所经历的**路程**（path）。显然，路程是标量，而位移$\Delta \boldsymbol{r}$是矢量，它的大小$|\Delta r|$就是割线 AB 的长度。一般情况下，位移的大小和路程并不相等，即

$$\Delta s \neq |\Delta r| \tag{1.9}$$

只有在时间 Δt 趋近于零时，无限小的路程（常称为**元路程**，记为：$\mathrm{d}s$ ）与无限小的位移（称为**元位移**，记为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ）的大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 才是相等的，即

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$$

即便在直线运动中，位移与路程也是截然不同的两个概念。例如，一质点沿直线从 A 点到 B 点又折回 A 点，显然路程等于 A 、B 之间距离的两倍，而位移则为零。

1.2.4　速度与速率

速度（velocity）是描述物体运动快慢和运动方向的物理量。假设在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，质点从 A 点运动到 B 点，产生的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$ ，如图 1.4 所示。人们将质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与完成这段位移所需的时间间隔 Δt 的比值称为质点在这段时间内的**平均速度**（average velocity），并用 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.10}$$

平均速度的方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同。

在描述质点运动的快慢时，也常用速率这个物理量。人们将质点在 Δt 时间内所经过的路程 Δs 与该段时间间隔的比值 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ，叫做质点在这段时间内的**平均速率**（average speed），并用 $\bar{v}$ 表示，即

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.11}$$

显然，平均速率是一个标量，它等于质点在单位时间内所通过的路程，而不用考虑质点的运动方向。因此，不能把平均速率与平均速度等同起来。例如，假设在某一段时间内，质点沿某个闭合路径运动了一周，显然质点的位移等于零，所以平均速度等于零，而质点的平均速率却不等于零。

在式（1.10）中，如果使时间 Δt 无限地减小而趋近于零，则**平均速度的极限值称为质点在 t 时刻的瞬时速度**（instantaneous velocity）（简称**速度**，并用 $\boldsymbol{v}$ 表示），即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.12}$$

上式表明，瞬时速度$\boldsymbol{v}$在数学上等于位置矢量$\boldsymbol{r}$对时间t的一阶导数，它描述了质点的位置矢量对时间的瞬时变化率。

同理，当Δt趋近于零时，平均速率的极限值称为**瞬时速率**（instantaneous speed），用v表示，即

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \qquad (1.13)$$

由于当Δt趋近于零时，$\Delta \boldsymbol{r}$的大小$|\Delta \boldsymbol{r}|$就趋近于Δs，即$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$，因此瞬时速度的大小就等于瞬时速率，即

$$|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

值得注意的是：速度是矢量，速度的方向就是当Δt趋近于零时，位移$\Delta \boldsymbol{r}$的极限方向，也就是质点运动轨迹的切线方向，并指向质点前进的一方。

将位置矢量在直角坐标系$O\text{-}xyz$中的表达式（1.1）代入式（1.12），并注意到三个单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$与时间t无关，可得瞬时速度$\boldsymbol{v}$在直角坐标系中的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \\ &= v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \qquad (1.14)$$

其中v_x、v_y、v_z分别是速度$\boldsymbol{v}$在x、y、z方向上投影（或分量）的大小，显然

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad , \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

速度的大小，即速率为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \qquad (1.15)$$

其方向可以用方向余弦表示，即

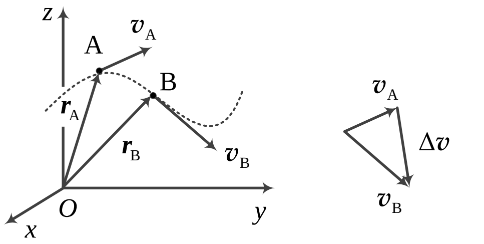
$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \quad , \quad \cos\beta = \frac{v_y}{v} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v} \qquad (1.16)$$

瞬时速度和瞬时速率都与一定的时刻相对应，很难直接测量，在技术上常常用很短时间内的平均值近似地表示相应的瞬时值，随着技术的进步，测量可以达到很高的精确度。

1.2.5 加速度

微视频1.4：
加速度

质点在不同的时刻或在轨迹上不同的位置，通常有着不同的速度。如图 1.5（a）所示，假设一质点在时刻t、位于 A 点时的速度为$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$，在时刻$t+\Delta t$，位于 B 点时的速度为$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$，则在$\Delta t$时间内，质点速度的增量为



（a）速度随位置的变化　　（b）速度增量

图1.5 加速度

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$$

这里要注意，$\Delta\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$与$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$之间满足矢量的三角形或平行四边形合成法则，如图 1.5（b）所示。显然，$\Delta\boldsymbol{v}$所描述的速度变化，包括了速度方向的变化和速度量值的变化两个方面，为了定量地描述各个时刻速度矢量随时间的变化情况，我们引入**加速度**（acceleration）的概念，常用符号$\boldsymbol{a}$表示。

与平均速度的定义相类似，质点的**平均加速度**（average acceleration）定义为

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.17}$$

平均加速度只是描述在Δt时间内速度的平均变化率。为了精确地描述质点在任一时刻t的速度对时间的变化率，必须在平均加速度概念的基础上引入**瞬时加速度**（instantaneous acceleration）（简称**加速度**）的概念。瞬时加速度的定义为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.18}$$

这就是说，质点在某时刻t的瞬时加速度等于当时间间隔Δt趋近于零时平均加速度的极限值。从式（1.18）不难看出，瞬时加速度等于速度矢量对时间的一阶导数，或等于位置矢量对时间的二阶导数，所以加速度是描述速度随时间变化的物理量。

将速度矢量和位置矢量在直角坐标系O-xyz中的表达式代入式（1.18），可得加速度在直角坐标系中的表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1.19}$$

式中a_x,a_y,a_z分别是$\boldsymbol{a}$在直角坐标系中的三个分量，即

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \ , \ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \ , \ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

而加速度的大小为

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.20}$$

加速度的方向也可用方向余弦表示。

加速度是矢量。从物理图像上来看，加速度的方向就是当Δt趋近于零时，速度增量$\Delta \boldsymbol{v}$的极限方向。应该注意：$\Delta \boldsymbol{v}$的方向一般与速度$\boldsymbol{v}$的方向不同。因而加速度的方向一般与该时刻的速度方向不一致。例如，图 1.6 中所示的是斜抛运动中速度方向和加速度方向的关系，质点在运动轨迹上各点的速度方向都沿轨迹的切线方向，而加速度方向总是竖直向下的；在运动轨迹的不同点上$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{v}$之间有不同的夹角。

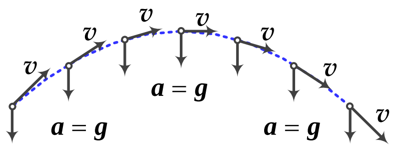


图1.6 斜抛运动中的速度和加速度

在国际单位制中，加速度的单位是米每秒平方（$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$）。

§1.3 质点运动学中的两类基本问题

在质点运动学中有两类基本问题。即：求导类型和积分类型

1. 求导类型

求导类型为第一类基本问题，它是已知质点的运动学方程$\boldsymbol{r}(t)$（通常可由已知条件及几何关系得到），求任意一段时间内的位移$\Delta \boldsymbol{r}$以及任意时刻的速度$\boldsymbol{v}(t)$和加速度$\boldsymbol{a}(t)$等。这类问题原则上可以通过矢量运算，并利用速度和加速度定义式，通过求导运算求解。

2. 积分类型

积分类型为第二类基本问题，它是已知质点在任意时刻的运动速度$\boldsymbol{v}(t)$和初始位置$\boldsymbol{r}_0$，求质点的运动学方程$\boldsymbol{r}(t)$；或已知任意时刻的加速度$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$及初始速度$\boldsymbol{v}_0$，求质点在任意时刻的速度$\boldsymbol{v}(t)$。这类问题是第一类问题的逆问题，本质上来说是求解微分方程的问题，一般情况下可以通过分离变量，应用积分运算来求解，即

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t \quad 和 \quad \int_{r_0}^{r} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$$

当然并非所有的问题都能积分出来，而且矢量积分是比较麻烦的，所以通常采用在直角坐标系中的分量形式进行计算，使问题得以简化。

例 1.1 在离水面高为 h 的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图 1.7 所示。设人以匀速率 v_0 收绳，试求：当船距岸边 x_0 时，船的速度和加速度的大小各是多少？

解： 建立坐标系如图所示。设初始时刻，船与岸上 A 点之间的绳长为 l_0。在任意时刻船离岸边的距离为 x，绳长为 l。船在运动过程中，l 和 x 均是时间 t 的函数。由题意可知：$l = l_0 - v_0 t$，所以

微视频1.5：例1.1讲解

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

又由图可知

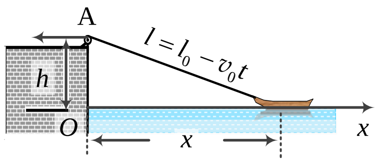


图1.7 例1.1图

$$l^2 = x^2 + h^2$$

将上式两边同时对时间 t 求导，可得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

则船运动的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{x}v_0$$

再将速度对时间 t 求导，即可得到船的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0}{x^2}\left(x\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} - l\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{v_0^2 h^2}{x^3}$$

令 $x = x_0$，得船在离岸边为 x_0 时的速度和加速度分别为

$$v = -\frac{\sqrt{x_0^2 + h^2}}{x_0}v_0 \qquad a = -\frac{v_0^2 h^2}{x_0^3}$$

式中的负号表示船的速度和加速度的方向与 x 轴的正方向相反。

在本例中，由于船沿 x 轴做一维直线运动，所以其速度和加速度均没有用矢量式表示，而是先选定坐标轴的正方向，并用正负号来表示这些矢量的方向。当实际值为正时，表示该矢量的方向与坐标轴的正方向相同，为负时则相反。实际上这是处理一维直线运动问题的常用方法。

例 l.2 曲柄OA以角速度ω绕固定点O沿逆时针方向匀速转动。同时带动在A点与它连结的杆BC运动。开始时OA与x轴重合。杆BC的端点B和C只能分别沿两个固定的直线Oy和Ox滑动，如图1.8所示。试求：BC上E点的运动表达式、速度、加速度和轨迹方程。已知：$OA = BA = CA$，$BE = a$，$EC = b$。

解： 由题意可知，E、B、C都在O-xy平面内运动。而且在任一时刻t，$\theta = \varphi = \omega t$，所以E点的位置坐标为

$$x = a\cos\theta = a\cos\omega t$$

$$y = b\sin\theta = b\sin\omega t$$

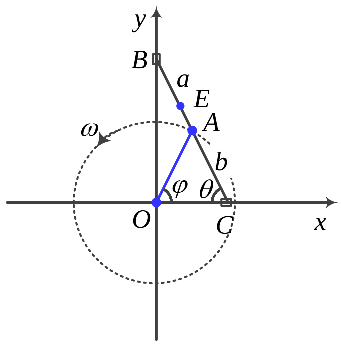


图1.8 例1.2图

此即E点的运动表达式在直角坐标系中的分量形式，其矢量形式为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + b\sin\omega t\,\boldsymbol{j}$$

将上式对时间t求一阶导数，可得E点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{i} + b\omega\cos\omega t\,\boldsymbol{j}$$

将速度$\boldsymbol{v}$对时间再求一阶导数，得E点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -a\omega^2\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - b\omega^2\sin\omega t\,\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{r}$$

此式表明，E点在任意时刻的加速度的方向与该时刻的位置矢量$\boldsymbol{r}$的方向相反，即加速度的方向总是指向坐标原点，大小与矢径$\boldsymbol{r}$的大小$|\boldsymbol{r}| = r$成正比。

最后，由运动表达式在直角坐标系中的分量形式，并消去时间t，可得E点运动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

此式为标准的椭圆方程式。它表明E点在O-xy平面内的运动轨迹是一个椭圆。

例 1.3 已知质点在x轴上做匀变速直线运动，其加速度a为常数，在$t = 0$时刻，质点位于x_0处，速度为v_0。试求：质点在任意时刻的速度和位置坐标的表达式，以及速度随位置坐标的函数关系式（即用积分法导出匀变速直线运动的规律）。

解： 由于质点沿x轴做一维直线运动，故质点的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

因 a 是常数，将上式分离变量，可得

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$$

将上式两边同时取定积分，即

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

由此可得质点的速度表达式为

$$v=v_0+at \tag{①}$$

再由一维直线运动中速度的定义式：$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0+at$$

将上式分离变量，可得

$$\mathrm{d}x=(v_0+at)\mathrm{d}t$$

将上式两边同时取定积分，即

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t (v_0+at)\mathrm{d}t$$

由此可得质点的运动表达式为

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{②}$$

为了得到运动速度和位置坐标的函数关系，可将加速度改写为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

因 a 是常数，对上式分离变量，可得

$$v\mathrm{d}v=a\mathrm{d}x$$

再对上式两边同时取定积分，即

$$\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x$$

由此可得

$$v^2=v_0^2+2a(x-x_0) \tag{③}$$

式①、② 、③就是在高中物理中学习过的匀变速直线运动的基本公式。在这里我们通过速度和加速度的定义式用积分的办法进行了重新推导。

例题 1.4 一个物体在空中由静止开始下落时，由于受到空气阻力的作用，其下落时的加速度随速度的增大而减小，即 $a = g - kv$，其中 g 为重力加速度，且 g 和 k 均为常量。试求物体在任意时刻的下落速度。

解： 由题意，可取竖直向下为物体的运动正方向。由加速度的定义，可得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv$$

将上式分离变量

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{g - kv}$$

再对上式两边同时取定积分

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g - kv}$$

$$t = -\frac{1}{k}\ln\frac{g - kv}{g}$$

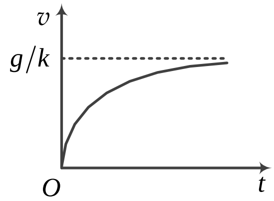


图1.9 例1.4解图 $v \sim t$ 曲线

由此可得物体在任意时刻的下降速度为

$$v = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$$

其速度时-间图像如图 1.9 所示。

§1.4 圆周运动

圆周运动是一种常见的、简单而基本的曲线运动，它是研究一般曲线运动和物体做定轴转动的基础。本节我们首先讨论圆周运动和一般曲线运动中的切向和法向加速度，然后讨论圆周运动的角量表示，以及角量与线量的关系。

1.4.1 切向加速度和法向加速度

1. 圆周运动中的切向加速度和法向加速度

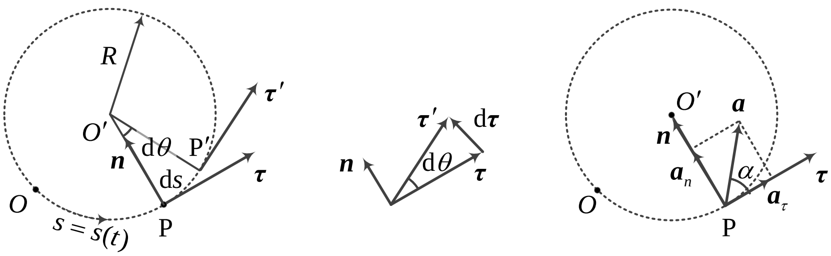
如图 1.10（a）所示，设质点在以 O' 为圆心、R 为半径的圆周上做圆周运动。在圆周

上任取一点O作为坐标原点，并以质点所在位置P处曲线的切线方向和法线方向建立两个互相垂直的坐标轴，其中切向坐标轴的正方向指向质点前进的方向，该方向的单位矢量用$\boldsymbol{\tau}$表示；法向坐标轴的正方向指向曲线凹的一侧，相应的单位矢量用$\boldsymbol{n}$表示。这样的坐标系就叫做**自然坐标系**（natural coordinate system）。显然，随着质点在曲线上的运动，自然坐标系中两个坐标轴的方位是不断变化的。

在自然坐标系中，从坐标原点O到质点所在位置P点之间曲线的弧长就是质点所经过的路程，用s表示，路程随时间的变化规律可表示为

$$s = s(t) \tag{1.21}$$

式（1.21）就是自然坐标系中的运动表达式。



（a）自然坐标系　（b）$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$的方向　（c）切向与法向加速度

图1.10　自然坐标系中的切向与法向加速度

因为质点的速度方向总是沿着曲线的切线方向，因此，在自然坐标系中，可将它写成

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} \tag{1.22}$$

将速度对时间求一阶导数，可得质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(v\boldsymbol{\tau}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \tag{1.23}$$

上式中第一项的大小是速率对时间的变化率，方向沿曲线的切线方向，故称为**切向加速度**（tangential acceleration），用$\boldsymbol{a}_\tau$表示，即

$$\boldsymbol{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau} \tag{1.24}$$

为了弄清第二项的大小和方向，参考图1.10（a），考察在t和$t+\mathrm{d}t$时刻，质点所在位置P和P′处的两个切向单位矢量$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\tau}'$，则$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}$，由于$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\tau}'$均为单位矢量，

且 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \to 0$，所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{\tau}$，并指向曲线上凹的一侧，与该处的法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向一致，如图 1.10(b)所示。由于单位矢量的长度为 1，所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 的大小应为 $|\boldsymbol{\tau}|\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$，于是 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\theta\boldsymbol{n}$，式中 $\mathrm{d}\theta$ 是单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}'$ 之间的夹角，也是圆周上 P 和 P′ 之间的弧长 $\mathrm{d}s$ 关于圆心 O' 的圆心角。又因为：$\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$，所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\theta\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}s}{R}\boldsymbol{n}$$

因而式（1.23）中的第二项为

$$v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n} = \frac{v}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

这表明该项的大小为 $\frac{v^2}{R}$，方向沿曲线的法线方向，并指向圆心，所以称为**法向加速度**（normal acceleration）（又称为**向心加速度**），并用 $\boldsymbol{a}_n$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}_n = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n} \qquad (1.25)$$

将式（1.24）和式（1.25）代入式（1.23），得

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n} \qquad (1.26)$$

由此可见，当质点做圆周运动时，可将其加速度沿曲线的切线方向和法线方向正交分解为相互垂直的切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 两个分量，其大小分别为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_n = \frac{v^2}{R} \qquad (1.27)$$

总加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \qquad (1.28)$$

其方向可用它和圆周切线方向之间的夹角 α 表示，即

$$\alpha = \arctan\frac{a_n}{a_\tau} \qquad (1.29)$$

2. 平面曲线运动中的切向加速度和法向加速度

对于平面上的任何曲线运动，上述结论也同样适用。也就是说当质点做平面曲线运

动时，我们总是可以沿曲线的切线方向 $\boldsymbol{\tau}$ 和法线方向 $\boldsymbol{n}$，将加速度 $\boldsymbol{a}$ 分解为切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 两个分量，即

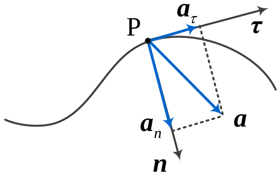


图1.11 曲线运动中的切向和法向加速度

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \qquad (1.30)$$

上式中 ρ 是质点所在位置处曲线的**曲率半径**（radius of curvature）。一般而言，曲线上各处的曲率中心和曲率半径是逐点变化的。但法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向处处指向曲率中心。质点运动时，如果同时有法向加速度和切向加速度，那么速度的方向和大小将同时改变，这是一般曲线运动的特征。质点运动时，如果只有切向加速度、没有法向加速度，那么速度不改变方向而只改变大小，这就是变速直线运动。如果只有法向加速度，没有切向加速度，那么速度只改变方向而不改变大小，这就是匀速率曲线运动。

1.4.2 圆周运动的角量表示

质点做圆周运动时，也常用角位置、角位移、角速度和角加速度等角量来表示。假设一质点在 Oxy 平面内，绕坐标原点 O 做圆周运动，如图 1.12 所示。如果在时刻 t，质点在 A 点，半径 OA 与 x 轴之间的夹角为 θ，则 θ 叫做**角位置**（angular position）。在时刻 $t+\Delta t$，质点到达 B 点，半径 OB 与 x 轴成 $\theta+\Delta\theta$ 角，就是说，在 Δt 时间间隔内，质点转过角度 $\Delta\theta$，这 $\Delta\theta$ 叫做质点对 O 点的**角位移**（angular displacement）。角位移不但有大小而且还有转向。

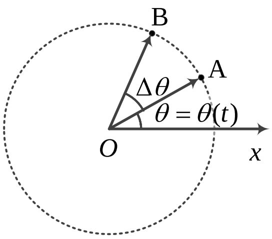
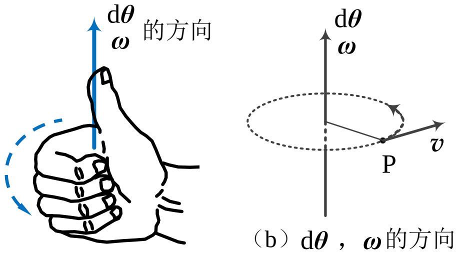


图1.12 角位置和角位移

特别注意：有限大小的角位移尽管既有大小，又有转向，但不是矢量，因为它不满足矢量的基本运算规则——矢量加法的交换律。但是无限小的角位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 是矢量，其方向由右手螺旋法则确定，即以右手四指自然弯曲的方向表示获得角度的转向，则右手大拇指的指向就是无限小角位移的方向，如图 1.13（a）所示。



（a）右手螺旋法则　（b）$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{\omega}$ 的方向与圆面垂直
图1.13 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{\omega}$ 的方向——右手螺旋法则

与速度的定义类似，角位移 $\Delta\theta$ 与时间间隔 Δt 之比，叫做在 Δt 这段时间内质点对 O 点的**平均角速度**，用 $\overline{\omega}$ 来表示，即

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

当 Δt 趋近于零时，相应的 $\Delta\theta$ 也趋于零，其比值趋于某一极限值

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.31}$$

ω 即为在 t 时刻质点对 O 点的**瞬时角速度**，简称**角速度**（angular velocity）。

由于无限小的角位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 是矢量，所以瞬时角速度 ω 也是矢量，其方向与无限小角位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 的方向一致，即同样可以用右手螺旋法则确定，如图 1.13（a）所示。不难看出，角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向一定垂直于质点的运动平面，与圆周的轴线平行，如图 1.13（b）所示。

如果质点在 t 时刻的角速度是 $\boldsymbol{\omega}$，在 $t+\Delta t$ 时刻的角速度是 $\boldsymbol{\omega}+\Delta\boldsymbol{\omega}$，则角速度的增量 $\Delta\boldsymbol{\omega}$ 与这段时间间隔 Δt 之比，称为在 Δt 这段时间内质点对 O 点的平均角加速度。用 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 表示，即

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 的极限值称为**瞬时角加速度**，简称**角加速度**（angular acceleration），并用 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1.32}$$

显然，角加速度也是矢量，其方向就是角速度增量的方向。

角位置和角位移的单位是弧度（rad），角速度和角加速度的单位分别为：$\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 和 $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$。

尽管无限小的角位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 都是矢量，但是当质点在一个给定的圆周上做圆周运动时，它们的方向只有在垂直于圆平面的轴线方向上有两种可能的取向。所以在处理实际问题时，我们可以先选定轴线的正方向，将这些矢量用有正负号的代数量来表示，当矢量的实际方向与轴线的正方向相同时取“＋”号，相反时取“－”号，就如同质点做直线运动时对位置矢量、位移、速度、加速度的处理方法一样。

质点做匀速圆周运动时，角速度 ω 是常量，角加速度 α 为零。质点做变速圆周运动

时，角速度ω不是常量，角加速度α也就不为零。如果角加速度α为常量，这就是匀变速圆周运动。

质点做匀速和匀变速圆周运动时，用角量表示的运动规律与匀速和匀变速直线运动的运动规律在数学形式上完全相似，并且可以用类似的方法导出。匀速圆周运动的运动规律为

$$\theta=\theta_0+\omega t$$

匀变速圆周运动的规律为

$$\omega=\omega_0+\alpha t \qquad (1.33a)$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1.33b)$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0) \qquad (1.33c)$$

式（1.33）中θ_0、ω_0分别是$t=0$时的角位置和角速度。上述结论请读者自己导出。

1.4.3 角量与线量的关系

质点做圆周运动时，相关线量（路程、速度、加速度）和角量（角位移、角速度、角加速度）之间，存在着—定的关系。参考图 1.14，假设圆的半径为R，在时间Δt内，质点从圆周上的 A 点运动到 B 点，通过的路程Δs就是弧长AB，相应的角位移为$\Delta\theta$。由几何关系，可得

$$\Delta s=\mathrm{AB}=R\cdot\Delta\theta \qquad (1.34)$$

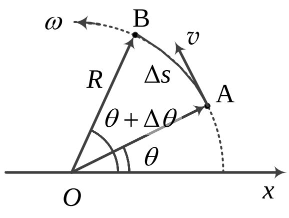


图1.14 角量与线量的关系

将上式两边除以Δt，并取$\Delta t\to 0$的极限值，可得线速度（速率）和角速度之间的关系为

$$v=R\omega \qquad (1.35)$$

将式（1.35）两边同时对时间t求导，可得切向加速度与角加速度之间的关系为

$$a_\tau=R\alpha \qquad (1.36)$$

如果将$v=R\omega$代入法向加速度公式，可得质点法向加速度a_n与角速度ω之间的关系为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \qquad (1.37)$$

式（1.34）—（1.37）就称为圆周运动中**角量与线量的关系**。

例 l.5 一个半径 $R=1\mathrm{m}$ 的飞轮，以转速 $n=1500\ \mathrm{rev}\cdot\mathrm{min}^{-1}$〔转／分〕转动时，因受制动而均匀减速，经 50s 后停止转动。试求：

（1）飞轮的角加速度 α 和在这段时间内飞轮转过的转数 N；

（2）制动开始后 25s 时，飞轮的角速度 ω；

（3）制动开始后 25s 时，飞轮边缘上任意一点的线速度和加速度。

解 （1） 设开始制动时，作为计时起点（$t=0$）。则由题意可知，飞轮的初始角速度为

$$\omega_0=2\pi n=2\pi\times\frac{1500}{60}=50\pi\ (\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

在 $t=50\mathrm{s}$ 时，飞轮停止转动， $\omega=0$，由 $\omega=\omega_0+\alpha t$ ，可得飞轮的角加速度为

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=-\frac{50\pi}{50}=-\pi\ (\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

式中“－”号表示角加速度的方向与角速度的方向相反，即飞轮做减速圆周运动。再由 $\omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0)$，可得飞轮从开始制动到停止转动的时间内转过的角位移为

$$\theta-\theta_0=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha}=\frac{0-(50\pi)^2}{-2\pi}=1250\pi\ (\mathrm{rad})$$

所以飞轮转过的转数为

$$N=\frac{\theta-\theta_0}{2\pi}=\frac{1250\pi}{2\pi}=625\ (\mathrm{rev})$$

（2）$t_1=25\mathrm{s}$ 时，飞轮的角速度为

$$\omega_1=\omega_0+\alpha t=50\pi-\pi\times25=25\pi\ (\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

（3）$t_1=25\mathrm{s}$ 时，飞轮边缘上任意一点的线速度为

$$v_1=R\omega_1=1\times25\pi=25\pi\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

相应的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t=R\alpha=1\times(-\pi)=-\pi\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

$$a_n=R\omega_1^2=1\times(25\pi)^2=625\pi^2\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

由此可得飞轮边缘上任意一点的加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}\approx625\pi^2\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

§1.5　相对运动

我们知道，物体的运动具有相对性。在不同的参照系中，描述同一个物体的运动时将会给出不同的结果。例如，在一个相对于地面做做匀速直线运动的车厢里，用一个小球做自由落体实验时，车厢里的观察者将发现小球沿竖直向下的方向做直线运动；而站在地面上的观察者发现，该小球做平抛运动，其轨迹是一条抛物线。

在实际问题中，常常需要在不同的参考系中来描述同一质点的运动。那么，在不同的参考系中，描述同一质点运动的位置矢量之间、速度之间和加速度之间又有什么关系呢？下面就来研究这个问题。

假设有两个参考系 K 和 K'，并在两个参考系中各自建立一个坐标系 O-xyz 和 O'-$x'y'z'$，如图 1.15 所示。为简单起见，只讨论 K 和 K' 之间只有相对平动而无相对转动，且各对应坐标轴在运动中始终保持平行的情况。假设在某一时刻 t，质点运动到 P 点，该点在 K 系和 K' 系中的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_{PO}$ 和 $\boldsymbol{r}_{PO'}$，分别称为质点的**绝对位置矢量**和**相对位置矢量**，由矢量的三角形合成法则，可得

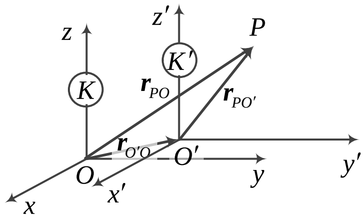


图1.15　相对运动

$$\boldsymbol{r}_{PO} = \boldsymbol{r}_{PO'} + \boldsymbol{r}_{O'O} \tag{1.38}$$

式中 $\boldsymbol{r}_{O'O}$ 是两个参考系的坐标原点 O' 相对于 O 的位置矢量，称为**牵连位置矢量**。上式表明：质点的**绝对位置矢量等于相对位置矢量和牵连位置矢量的矢量和**。

将式（1.38）两边同时对时间 t 求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{PO}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{PO'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{O'O}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\boldsymbol{v}_{PO} = \boldsymbol{v}_{PO'} + \boldsymbol{v}_{O'O} \tag{1.39}$$

式中：$\boldsymbol{v}_{PO} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{PO}}{\mathrm{d}t}$ 是质点相对于 K 系的速度，称为**绝对速度**（absolute velocity）；

$\boldsymbol{v}_{PO'} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{PO'}}{\mathrm{d}t}$ 是质点相对于 K' 系的速度，称为**相对速度**（relative velocity）；$\boldsymbol{v}_{O'O} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{O'O}}{\mathrm{d}t}$ 是 K' 系相对于 K 系的速度，称为**牵连速度**（convected velocity）。上式表明质点的**绝对速度**

等于相对速度和牵连速度的矢量和。这称为经典力学中的**速度叠加原理**。

再将式（1.39）对时间t 求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{PO}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{PO'}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{O'O}}{\mathrm{d}t}$$

或

$$\boldsymbol{a}_{PO}=\boldsymbol{a}_{PO'}+\boldsymbol{a}_{O'O} \tag{1.40}$$

式中$\boldsymbol{a}_{PO}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{PO}}{\mathrm{d}t}$是质点相对于$K$系的加速度，称为**绝对加速度**； $\boldsymbol{a}_{PO'}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{PO'}}{\mathrm{d}t}$是质点相对于$K'$系的加速度，称为**相对加速度**；而$\boldsymbol{a}_{O'O}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{O'O}}{\mathrm{d}t}$是$K'$系相对于$K$系的加速度，称为**牵连加速度**。式（1.40）表明：质点的**绝对加速度等于相对加速度和牵连加速度的矢量和。**

当K'系相对于K系做匀速直线运动时，$\boldsymbol{a}_{O'O}=0$，则有

$$\boldsymbol{a}_{PO}=\boldsymbol{a}_{PO'} \tag{1.41}$$

这表明，在相对做匀速直线运动的不同参考系中，观察同一质点的运动时，所测得的加速度是相同的。

例 1.6 江水由西向东流，假设江水相对于岸的流速为$v_1=3.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，江面宽度为$b=2.4\times10^3\mathrm{m}$。要想使汽艇在$t=10\mathrm{min}$（分钟）内，由南向北横渡过江。试求：汽艇相对于江水的航向和航速。

解： 由于汽艇在流动的江水中航行，所以汽艇相对于岸边的速度$\boldsymbol{v}$为绝对速度，汽艇相对于江水的速度$\boldsymbol{v}_2$为相对速度，江水相对于岸边的速度$\boldsymbol{v}_1$为牵连速度。由速度叠加原理可知

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$$

其矢量关系如图 1.16 所示。

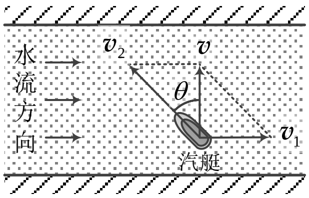


图1.16 例1.6图

又由题意可知，绝对速度$\boldsymbol{v}$的大小为

$$v=\frac{b}{t}=\frac{2.4\times10^3}{10\times60}=4.0\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

方向垂直于岸边（即垂直于v_1），指向对岸。所以由速度矢量合成图，可得汽艇相对于江水的最小航速为

$$v_2 = \sqrt{v^2 + v_1^2} = \sqrt{3.0^2 + 4.0^2} = 5.0\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

航向：北偏西，偏过的角度为

$$\theta = \arctan\frac{v_1}{v} = \arctan\frac{3}{4} = 36^{\circ}52'$$

即汽艇应在向北偏西$36°52'$的方向上，以$5.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$的航速航行。

思　考　题

1.1 回答下列问题：

(1) 物体具有加速度而其速度为零，是否可能？

(2) 物体具有恒定的速率但仍有变化的速度，是否可能？

(3) 物体具有恒定的速度但仍有变化的速率，是否可能？

(4) 物体具有沿 x 轴正方向的加速度而有沿 x 轴负方向的速度，是否可能？

(5) 物体的加速度大小恒定而其速度的方向改变，是否可能？

1.2 质点位置矢量的方向不变，质点是否一定做做直线运动；质点沿直线运动，其位置矢量是否一定方向不变？

1.3 若质点速度的方向不变仅大小改变，质点做何种运动？若速度的大小不变而方向改变，又做何种运动？

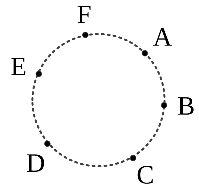
1.4 “瞬时速度就是很短时间内的平均速度”，这一说法是否正确？如何正确表述瞬时速度的定义？我们是否能按照瞬时速度的定义通过实验测量瞬时速度？

1.5 试就质点的直线运动论证：加速度与速度正负号相同时，质点做 加速运动；加速度与速度正负号相反使时做减速运动。是否可能存在这样的直线运动，质点速度逐渐增加但其加速度却在减小？

1.6 设质点做直线运动时瞬时加速度 $a_x =$ 常量，试证明在任意相等的时间间隔内的平均加速度相等。

1.7 在参考系一定的条件下，质点运动状态的具体形式是否与计时起点和坐标系的选择有关？

1.8 质点沿圆周运动，自 A 点起，从静止开始做加速运动，经 B 点到 C 点；过 C 点后开始做匀速圆周运动，经 D 点直到 E 点；过 E 点以后做减速运动，经 F 点再到回到 A 点时，速度变成零。试用矢量定性表示出质点在 A、B、C、D、E、F 各点的法向加速度和切向加速度的方向。



题 1.8题图

1.9 一人在以恒定速度运动的火车上竖直向上抛出一块小石子，此石子能否落在此人的手中？如果小石子抛出后，火车以恒定的加速度前进，结果又将怎样？

1.10 装有竖直挡风玻璃的汽车。在大雨中以速率 v 前进。车内的观察者发现雨滴以速率 v' 竖直下

落。试问当汽车静止时雨滴将以什么角度打击挡风玻璃？

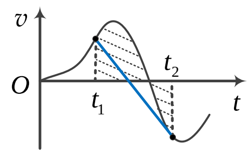
1.11　做斜抛运动的物体，其水平初速度的大小是 v_0，问在其轨迹的最高点处，轨迹的曲率半径是多大？

1.12　一质点做直线运动，其速度与时间的关系曲线如图所示。试问下列各量分别表示什么？

（1）　t_1 时刻曲线的斜率；

（2）　t_1 与 t_2 曲线间割线的斜率；

（3）　图中阴影部份的面积。



题 1.12题图

习　　题

1.13　有一质点沿 x 轴做直线运动，在 t 时刻的位置坐标为：$x = 4.5t^2 - 2t^3$ (SI)。试求：

（1）第 2 秒内的平均速度；

（2）第 2 秒末的瞬时速度；

（3）第 2 秒内的路程。

1.14　一质点在 O-xy 平面内做曲线运动，其运表达式为：$x = 2t^2$，$y = 2t + t^3$。试求：

（1）质点在第 2 秒内的位移和平均速度；

（2）质点在任意时刻的速度和加速度。

1.15　一质点沿 x 轴做直线运动，其加速度为 $a = 4 - t^2$ (SI)，已知 $t = 3$ s 时，质点位于 $x = 9$ m 处，速度为 $v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。试求其位置和时间的关系式。

1.16　一质点从静止开始做直线运动，开始时加速度为 a_0，此后加速度随时间均匀增加，经过时间 τ 后，加速度为 $2a_0$，经过时间 2τ 后，加速度为 $3a_0$，…。试求经过时间 $n\tau$ 后，该质点的速度和走过的距离。

1.17　一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为：$a = 2 + 6x^2$ (SI)。如果质点在坐标原点处的速度为零，试求该质点在任意位置 x 处的速度。

1.18　一物体悬挂在弹簧上沿竖直方向做振动，以平衡位置为坐标原点，竖直向下作为 y 轴的正方向，其加速度为：$a = -ky$，式中 k 为常量，y 是物体的位置坐标。假定振动物体在坐标 y_0 处的速度为 v_0，试求：物体的振动速度 v 与坐标 y 的函数关系式。

1.19　一艘正在沿直线行驶的摩托艇，在发动机关闭后，由于受到水面阻力的缘故作

减速运动，其加速度的大小与速度平方成正比，方向相反，即 $a=-kv^2$，式中 k 为常量，负号表示加速度的方向与速度方向相反。试证明：摩托艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为

$$v=v_0\exp(-kx)$$

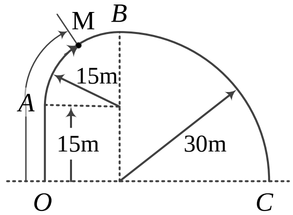
其中 v_0 是发动机刚关闭时的速度。

1.20　一质点沿半径为 R 的圆周运动。质点所经过的弧长与时间的关系为 $s=bt+\frac{1}{2}ct^2$，其中 b、c 都是大于零的常量。试求：从 $t=0$ 开始到切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间。

1.21　质点 M 在水平面内的运动轨迹如图所示，其中 OA 段为直线，AB、BC 段分别为不同半径的两个 1/4 圆周。设 $t=0$ 时，质点 M 在 O 点，已知质点的运动学方程为

$$s=30t+5t^2\ \text{(SI)}$$

试求：在 $t=2\text{s}$ 时刻，质点 M 的切向加速度和法向加速度的大小。



题 1.21 题图

1.22　一质点在 O-xy 平面内做曲线运动，其速度随时间的函数关系为

$$\boldsymbol{v}=2t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}\ \left(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$$

在 $t=0$ 时刻，质点的位置矢量为：$\boldsymbol{r}_0=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\ (\text{m})$ 。试求

（1）质点在任意时刻的加速度矢量和切向加速度的大小；

（2）质点在任意时刻的位置矢量。

1.23　有人从楼房窗口以水平初速度 v_0 向外抛出一个小球，以抛出时刻为计时起点，抛出点为坐标原点，初速度 v_0 的方向为 x 轴正方向，竖直向下为 y 轴正方向。已知重力加速度 g 为常量，且不计空气阻力。试求：

（1）在任意时刻 t，小球的位置矢量及其轨迹方程；

（2）在任意时刻 t，小球的速度矢量；

（3）在任意时刻 t，小球的切向加速度和法向加速度的大小。

1.24　一质点在重力场中做斜上抛运动，初速度的大小为 v_0，与水平方向的夹角为 α。若不计空气阻力，且重力加速度 g 的大小为恒量。试求

（1）质点到达与抛出点同一高度时的切向加速度和法向加速度的大小；
（2）质点到达轨道的最高点时，质点法向加速度的大小以及该处轨迹的曲率半径。

1.25　河水自西向东流动，速度为 10 km/h。一轮船在水中航行，船相对于河水的航向为北偏西 30°，相对于河水的航速为 20 km/h。此时风向为正西，风速为 10 km/h。试求在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向。（设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度）

1.26　一敞顶电梯以恒定速率 $v = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 上升。当电梯离地面 h =10 m 时，从电梯的地板上竖直向上射出一个小球，球相对于电梯的初速的大小为 $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。试问：
（1）从地面算起，球能达到的最大高度为多大？
（2）抛出后经过多长时间小球落到电梯上？

*1.27　有一宽为 l 的大江，江水由北向南流去。设江中心流速为 u_0，靠两岸的流速为零。江中任一点的流速与江中心流速之差和江心至该点距离的平方成正比。今有相对于水的速度为 v_0 的汽船由西岸出发，向东偏北 45°方向航行，试求其航线的轨迹方程以及到达东岸的地点。