武汉大学 2005 – 2006 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (30 分)计算题

1. 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 当 n 是不小于 1 的整数时, 计算 A^n.

2. 设二阶方阵 A 满足方程 $A^2-3A+2I=O$, 求 A 所有可能的特征值.

3. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩.

4. 已知 A 为 $n\ (n\geq 2)$ 阶矩阵, 且 A 非奇异, 求 $(A^{\star})^{\star}$.

5. 设 A 是三阶实对称矩阵, 其对应的二次型的正负惯性指数均为 1, 且满足 $|E+A|=|E-A|=0$, 计算 $|2E+3A|$.

6. 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x,0,\cdots,0,x)^T$, 矩阵 $A=I_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 且 $A^{-1}=I_n+x\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求实数 x.

二. (45 分) 解答题

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$, 且 $R(A)=2$, X 满足$AX+E=A^2+X$, 求 a 及 X.

2. 已知线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$, 问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其解.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$,

   (1). 求出二次型 f 的矩阵 A 的全部特征值;

   (2). 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵;

   (3). 计算 $|A^m|$ (m 为正整数).

三. (25 分) 证明题和讨论题

1. (10 分) 设 A 是 n 阶实方阵,

   (1). 当 n 为奇数且 $AA^T=I$ 及 $|A|=1$ 时, 证明: $|I-A|=0$.

   (2). 当 m 为任意给定正整数且 $(A+I)^m=O$ 时, 证明: A 可逆.

2. (15 分) 对线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, 讨论下面的问题:

   (1). 向量组 B 是否能成为 $\mathbb{R}^3$ 中的基? 能否用 A 线性表示 B? 如果可以, 试求出由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 的过度矩阵 P, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-a \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad (a\in\mathbb{R}).$$

满绩小铺：1433397577，搜集整理不易，自用就好，谢谢！

(2). 若 $\boldsymbol{\beta}_1 = k(2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = k(2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_3 = k(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, k 是非零实数,

(a). 给出向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关的一个充要条件, 并证明之;

(b). 给出矩阵 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$ 为正交阵的一个充要条件, 并证明之.

满绩小铺：1433397577，搜集整理不易，自用就好，谢谢！