武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
线性代数 D（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（8 分）计算行列式$\begin{vmatrix} 102 & 100 & 204 \\ 198 & 200 & 395 \\ 302 & 300 & 600 \end{vmatrix}$

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，计算 A^{2022}

三、（12 分）设有三阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$，求 A^{-1} 和 $\left|A^{*}-3A^{-1}\right|$.

四、（12 分）

设**4**元非齐次线性方程组的系数矩阵A的秩为**3**，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是它的三个解向量，且

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，求该方程组的通解。

五、（15 分）求向量组

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\xi_4=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

的秩及一个最大无关组，并把其它的向量用最大无关组表示出来.

六、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda+2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda-1 \end{cases},$$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

七、（8 分）

已知$R(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4) = 3, R(\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4;\alpha_5) = 4$,证明

(1)α_1能由$\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性表示;

(2)α_5不能由$\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$线性表示.

八、（10 分）

设3阶对称矩阵A的特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=0$. 对应$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量依次为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$,求$A$.

九、（15 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，

(1)写出二次型对应的矩阵A；

(2)求A的特征值和特征向量;

(3)用正交变换把二次型化为标准型，并写出相应的正交矩阵.