2013-2014 高数 B2 期末试题解

一、（8 分）利用二重积分的性质，比较积分 $I_1=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)d\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \left[\ln(x^2+y^2)\right]^2 d\sigma$ 的大小,其中 $D: e\le x^2+y^2\le 2e$。

解：$D_1: e\le x^2+y^2\le \frac{3}{2}e, D_2: \frac{3}{2}e\le x^2+y^2\le 2e$。

$$I_2-I_1=\iint\limits_D \left\{\left[\ln(x^2+y^2)\right]^2-\ln(x^2+y^2)\right\}d\sigma$$
$$=\iint\limits_{D_1} \left\{\left[\ln(x^2+y^2)\right]^2-\ln(x^2+y^2)\right\}d\sigma$$
$$+\iint\limits_{D_2} \left\{\left[\ln(x^2+y^2)\right]^2-\ln(x^2+y^2)\right\}d\sigma$$
$$\ge\iint\limits_{D_2} \left\{\left[\ln(x^2+y^2)\right]^2-\ln(x^2+y^2)\right\}d\sigma>0$$

所以 $I_2>I_1$。

二、（8 分）设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1+y\left(xf_{11}-\frac{x}{y^2}f_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f_2+\frac{1}{y}\left(xf_{21}-\frac{x}{y^2}f_{22}\right)$$
$$=f_1+yxf_{11}-\frac{x}{y}f_{12}-\frac{1}{y^2}f_2+\frac{x}{y}f_{21}-\frac{x}{y^3}f_{22}$$
$$=f_1+yxf_{11}-\frac{1}{y^2}f_2-\frac{x}{y^3}f_{22}$$

三、（8 分）求过点 $M(1,-2,3)$ 的平面，使它与平面 $\pi: x+y-z-3=0$ 垂直，且与直线 $L: x=y=z$ 平行。

解：$\pi: x+y-z-3=0$ 的法向量 $\vec{n}_\pi=\{1,1,-1\}$，$L: x=y=z$ 的 $\vec{s}=\{1,1,1\}$。

设所求平面的法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$。则 $\vec{n}\perp\vec{n}_\pi,\vec{n}\perp\vec{s}$

$\begin{cases}A+B-C=0\\A+B+C=0\end{cases}$ 有解 $A=1,B=-1,C=0$。$\vec{n}=\{1,-1,0\}$。所求平面是 $x-1-y+2=0$ 即

$x-y+1=0$。

四、（8 分）设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xyz=\arctan(x+y+z)$ 所确定的隐函数，求全微分 dz 在点 $(0,1,-1)$ 处的值。

解：$xyz=\arctan(x+y+z)$ 两边微分

$$yzdx+xzdy+xydz=\frac{1}{1+(x+y+z)^2}(dx+dy+dz)$$

$(0,1,-1)$ 代入上式得 $-dx=dx+dy+dz$，解得

$$dz=-2dx-dy$$

五、（10 分）计算曲线积分 $\int_L(2a-y)dx+xdy$，式中 L 是从原点 $O(0,0)$ 沿曲线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$ 到点 $A(2\pi a,0)$ 的弧段。

解：$L:\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}(t:0\to 2\pi)$，$\begin{cases}dx=a(1-\cos t)dt\\dy=a\sin tdt\end{cases}$，

$$\begin{aligned}&\int_L(2a-y)dx+xdy=\int_0^{2\pi}(2a-a+a\cos t)a(1-\cos t)dt+a(t-\sin t)a\sin tdt\\&=a^2\int_0^{2\pi}t\sin tdt=-a^2\int_0^{2\pi}td\cos t=-a^2(t\cos t|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos tdt)\\&=-2\pi a^2\end{aligned}$$

六、（10 分）设 Ω 是由曲面 $z^2=x^2+y^2, z=2$ 所围的闭区域，计算 $\iiint\limits_{\Omega}z^2dV$。

解：$\iiint\limits_{\Omega}z^2dV=\int_0^2dz\iint\limits_{D_z}z^2dxdy=\int_0^2z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^2z^2\pi z^2dz=\frac{32\pi}{5}$。

七、（10 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{S}(x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dzdx+(z^3+y^2)dxdy$，其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

解：设 $S_1:x^2+y^2\le 1, z=0$ 下侧。

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dzdx+(z^3+y^2)dxdy$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz$$
$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^2r^2\sin\varphi dr$$
$$=\frac{3}{5}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi=\frac{6\pi}{5}$$
$$\iint\limits_{S}(x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dzdx+(z^3+y^2)dxdy$$
$$=\frac{6\pi}{5}-\iint\limits_{S_1}(x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dzdx+(z^3+y^2)dxdy$$
$$=\frac{6\pi}{5}+\iint\limits_{x^2+y^2\le1}y^2dxdy=\frac{6\pi}{5}+\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2)dxdy$$
$$=\frac{6\pi}{5}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\rho d\rho=\frac{6\pi}{5}+\frac{\pi}{4}=\frac{29}{20}\pi$$

八、（8 分）求曲线 $x=\sin^2 t, y=\sin t\cos t, z=\cos^2 t$ 在对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线和法平面方程。

解：对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点 $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，切向量

$$\vec{T}=\left\{\sin 2t,\cos 2t,-\sin 2t\right\}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left\{1,0,-1\right\}$$

切线：$\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$；法平面：$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0$ 即 $x-z=0$。

九、（8 分）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$，将它展开成 Fourier 级数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_0^{\pi}dx\right)=0$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=0$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n=2k-1\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x,(x\neq k\pi,k\in Z)$$

把 $x=\frac{\pi}{2}$ 代入上式得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

十、（9 分）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-x)}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数并利用其求 $\int_0^x f(t)dt$。

解：$\left[\ln(1-x)\right]'=-\frac{1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n,(-1<x<1)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{\ln(1-x)}{x}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},(-1<x<1,x\neq 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=-1=f(0)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\bigg|_{x=0}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\text{收敛},-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\text{发散}$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}x^n,(-1\leq x<1)$$

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(n+1)^2}x^{n+1},(-1\leq x\leq 1)$$

十一、（6 分）设 $a_n\geq 0(n=1,2,\cdots)$，且数列 $\{na_n\}$ 有界，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

证明：数列 $\{na_n\}$ 有界，存在常数 M 使得

$$0 \le na_n \le M$$

$$0 \le a_n^2 \le \frac{M^2}{n^2},(n=1,2,\cdots)$$

P 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M^2}{n^2}$收敛。根据比较审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛。

十二、（7 分）求二元函数$f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$在限制条件$x-y=\frac{\pi}{4}$下的极值。

解：在限制条件$x-y=\frac{\pi}{4}$下$f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y=\cos^2 x+\cos^2(x-\frac{\pi}{4})=g(x)$，

$$g(x)=\cos^2 x+\cos^2(x-\frac{\pi}{4})=\cos^2 x+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)^2$$

$$g(x)=\frac{1}{2}+\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$g'(x)=-\sin 2x+\cos 2x$$

让$g'(x)=0$解得$x=\frac{4k+1}{8}\pi,k\in Z$。

$$g''(x)=-2(\sin 2x+\cos 2x)$$

$$g''\left(\frac{4k+1}{8}\pi\right)=2\sqrt{2}(-1)^{k+1}$$

极大值$g\left(\frac{4\cdot 2k+1}{8}\pi\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，极小值$g\left(\frac{4\cdot 2k+5}{8}\pi\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$。