武汉大学2016-2017学年第二学期期末考试高等数学A2试题（A）参考解答

1、（8分）单位圆O的圆周上有相异两点P,Q，$\angle POQ=\theta,a,b$为正的常数，求$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1}{\theta^2}[a+b-\left|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}\right|]$.

解　由 $\left|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}\right|^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta$

故有 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1}{\theta^2}[a+b-\left|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}\right|]$。$=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1}{\theta^2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta})$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{2ab(1-\cos\theta)}{\theta^2(a+b+\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta})}=\frac{ab}{2(a+b)}$$

2、（10分）讨论极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$的存在性，若存在求出极限，若不存在说明理由。

解　由于$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=0$　　$\lim\limits_{\substack{x=y^2\\ y\to 0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^{12}}{(2y^4)^3}=\dfrac{1}{8}$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$不存在。（或 $\lim\limits_{\substack{x=ky^2\\ y\to 0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{k^4y^{12}}{[(k^2+1)y^4]^3}=\dfrac{k^4}{(k^2+1)^3}$）

3、（8分）求过点$M(-4,-5,3)$，且与两条直线l_1:$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$和$l_2$:$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-5}$都相交的直线方程。

解　l_1过点$P_1(-1,-3,2)$，方向向量为$\overrightarrow{S_1}=\{3,-2,-1\}$

l_2过点$P_2(2,-1,1)$，方向向量为$\overrightarrow{S_2}=\{2,3,-5\}$

由M及l_1所确定的平面法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{P_1M}\times\overrightarrow{S_1}=4\{1,0,3\}$

故此平面方程为π_1:$x+3z-5=0$

由M及l_2所确定的平面法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{P_2M}\times\overrightarrow{S_2}=2\{7,-13,-5\}$

故此平面方程为π_2:$7x-13y-5z-22=0$

所求直线为π_1,π_2交线　即 $\begin{cases}x+3z-5=0\\ 7x-13y-5z-22=0\end{cases}$

4、（10 分）设$z=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，其中$u=e^x\cos y,v=e^x\sin y$，试证明：若$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证明 $z_x=f_u'\cdot e^x\cos y+f_v'\cdot e^x\sin y;\ \ z_y=-f_u'\cdot e^x\sin y+f_v'\cdot e^x\cos y$

$z_{xx}=f_u'\cdot e^x\cos y+f_v'\cdot e^x\sin y+f_{uu}''\cdot e^{2x}\cos^2 y+2f_{uv}''e^{2x}\sin y\cos y++f_{vv}''\cdot e^{2x}\sin^2 y$

$z_{yy}=-f_u'\cdot e^x\cos y-f_v'\cdot e^x\sin y+f_{uu}''\cdot e^{2x}\sin^2 y-2f_{uv}''e^{2x}\sin y\cos y++f_{vv}''\cdot e^{2x}\cos^2 y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=0$$

5、（8分）设$u=f(x,y,z)$，$y=\ln x$，$g(\sin x,e^y,z)=0$，且$\dfrac{\partial g}{\partial z}\neq 0$，求$\mathrm{d}u$。

解　对 $y=\ln x$ 两边对 x 求导数，有 $y'=\dfrac{1}{x}$，

对 $g(\sin x,e^y,z)=0$ 两边对 x 求导数，有 $g_1\cdot\cos x+g_2\cdot e^y\cdot y'+g_3\cdot z'=0$，注意由 $y=\ln x$ 可知 $e^y=x$，从而 $z'=-\dfrac{\cos x\cdot g_1+g_2}{g_3}$。

对 $u=f(x,y,z)$ 两边同时对 x 求导，得

$$\mathrm{d}u=(f_1+f_2\cdot y'+f_3\cdot z')\mathrm{d}x=[f_1+f_2\cdot\frac{1}{x}+f_3\cdot\left(-\frac{\cos x\cdot g_1+g_2}{g_3}\right)]\mathrm{d}x$$

6、（10 分）在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}$ 的方向导数最大。

解：函数 $f(x,y,z)$ 的方向导数的表达式为 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$。

其中：$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=0$ 为方向 $\vec{l}$ 的方向余弦。因此 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$。

于是，按照题意，即求函数 $\sqrt{2}(x-y)$ 在条件 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 下的最大值。设

$F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$，则由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sqrt{2}+4\lambda x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\sqrt{2}+4\lambda y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=2\lambda z=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}=2x^2+2y^2+z^2-1=0\end{cases}$$

得 $z=0$ 以及 $x=-y=\pm\dfrac{1}{2}$，即得驻点为 $M_1=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$ 与 $M_2=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$。

因最大值必存在，故只需比较 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_1}=\sqrt{2}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_2}=-\sqrt{2}$，

的大小。由此可知 $M_1=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$ 为所求。

7、（10 分）设 $y=\varphi(x)\quad x\in[1,3]$ 是具有连续导数的函数，点 $A(1,2)$ 及点 $B(3,4)$ 在曲线 $L:y=\varphi(x)$ 上，而 L 恒在弦 $\overline{BA}$ 之上方，且弧 $\widehat{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 所围成弓形 D 的面积为 S，试计算曲线积分 $\displaystyle\int_{\widehat{AB}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$

解　$\overline{AB}$ 的方程：　$y=x+1,\quad 1\le x\le 3$

$$\int_{\widehat{AB}}=\int_{\widehat{AB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=-\iint_D(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2})dxdy-\int_3^1(\frac{x+1}{x^2}+x-\frac{1}{x})dx=-s+\frac{14}{3}.$$

8、（8 分）设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可微周期函数，又设 $f'(x)$ 连续，a_0，a_n，$b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数。求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

解　由分步积分法，对 $n=1,2,3,\cdots$，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

又由 $f'(x)$ 连续，故存在 $M>0$，使当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时，$|f'(x)|\le M$。从而

$$|a_n|\le\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)\sin nx|\,\mathrm{d}x\le\frac{2M}{n}\to0\quad |b_n|\le\frac{|f(\pi)-f(-\pi)|}{n\pi}+\frac{2M}{n}\to0,\quad n\to\infty$$

9、（10 分）试将函数 $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ 展开成 x 的幂级数。

解　由于 $f(x)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$　利用 $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad x\in(-1,1)$

得 $f(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}-\frac{2x^{3k+3}}{3(k+1)}\right)\quad x\in(-1,\ 1)$

10、（10 分）设有向量场 $\vec{F}=\{x^2yz^2,\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}-xy^2z^2,\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)\}$，

（1）计算 $div\vec{F}\mid_{(1,1,1)}$ 的值。

（2）设空间区域 Ω 由锥面 $y^2+z^2=x^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所围成 $(x>0)$，其中 a 为正常数，记 Ω 表面的外侧为 Σ，计算积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\vec{F}d\vec{s}=\oiint_{\Sigma}x^2yz^2dydz+[\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}+xy^2]dzdx+[\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)]dxdy$$

解　（1）令 $P=x^2yz^2,Q=\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}-xy^2z^2,R=\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)$，

故有 $\frac{\partial P}{\partial x}=2xyz^2$，$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{z})^2}-2xyz^2$，$\frac{\partial R}{\partial y}=-\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{z})^2}+(1+2xyz)$，

故有 $(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})=1+2xyz$

所以 $div\vec{F}\mid_{(1,1,1)}=(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})|_{(1,1,1)}=(1+2xyz)|_{(1,1,1)}=3$

（2）记 Ω 为 Σ 所围区域，则有高斯公式得：

$$I=\iiint_{\Omega}(1+2xyz)dxdydz=\iiint_{\Omega}dxdydz+2\iiint_{\Omega}xyzdxdydz=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_a^2r^2\sin\varphi dr=\frac{7}{3}a^3(2-\sqrt{2})\pi$$

（由于 Ω 关于 xoz 面对称，xyz 是域 Ω 上的奇函数，故有 $\iiint_{\Omega}xyzdxdydz=0$）

11、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}y \ge 1$.

证　因为对任意实数 t 都有 $e^t \ge 1+t$，所以 $e^{f(x)}\cdot e^{-f(y)} = e^{f(x)-f(y)} \ge 1+f(x)-f(y)$，

故

$$\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}y \ge \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 [1+f(x)-f(y)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y - \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y = 1$$

故 $\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}y \ge 1$。