武汉大学 2019-2020 学年
第二学期期末考试《线性代数 B》试题（A 卷）

1.（5 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix}$，求矩阵 A^{2020} 及其秩 $r\left(A^{2020}\right)$.

2.（8 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一组基，证明：$\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 也是 R^3 的一组基，并求向量 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 在基 $\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 下的坐标。

3.（5 分）已知 3 阶矩阵 A 第一行元素与对应的代数余子式分别为 $a_{11}=1$, $a_{12}=3$, $a_{13}=-2, A_{11}=3, A_{12}=1, A_{13}=3$，求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解。

4.（6 分）已知 A、B 均为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2$，计算行列式 $|2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}+\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{-1}|$ 的值。

5.（10 分）设有三阶矩阵 A,B，其中 $A^3-6A^2+11A-6E=0$，B 的第一行元素为 A 的特征值（$b_{11}=\lambda_1,b_{12}=\lambda_2,b_{13}=\lambda_3,\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3$），第二行元素 $b_{21}=2,b_{22}=1,b_{23}=a$ 对应的余子式依次是 $3,a,1$，试计算 $|B|$ 的值。

6.（10 分）已知 A 为 3 阶实对称可逆矩阵，其特征值为 a_1,a_2,a_3，求矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值以及相似对角矩阵。

7.（12 分）计算行列式 $|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|,\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2+x & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+x & 4 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+x \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

8.（10 分）设向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0,a-3)^T$,.
$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,a,6)^T,\boldsymbol{\alpha}_5=(1,1,2,3)^T$ 求：（1）a 为何值时，该向量组的秩等于 3；（2）求该向量组的一个极大无关组；（3）用所求的极大无关组表示其余向量.

9.（12 分）设四元齐次线性方程组 (I) 为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，又已知某四元齐次线性方程组 (II) 的通解为：$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$（$k_1,k_2$ 为任意常数)。(1) 求方程组 (I) 的基础解系；（2）问方程组 (I) 与 (II) 是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解。若没有，则说明理由。

10.（12 分）设二次曲面的方程 $axy+2xz+2byz=1$（$a>0$）经正交变换 $(x,y,z)^T=\boldsymbol{Q}(\xi,\eta,\zeta)^T$，化成 $\xi^2+\eta^2-2\zeta^2=1$，求 a、b 的值及正交矩阵 Q.

11. （10 分）已知四阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2020 & 1 & 0 \\ 2020 & 0 & 2020 & 0 \\ 1 & 2020 & 0 & 2020 \\ 0 & 0 & 2020 & 0 \end{pmatrix}$（1）求 $|A|$；（2）证明：A 有两个正特征值和两个负特征值。