武汉大学 2007–2008 学年第一学期

《线性代数B》(工科 54 学时)试题

一. (10 分) 计算下列行列式

1. $D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$, $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$, 求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|$.

二. (10 分) 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$ 成立, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关. 试讨论该结论是否正确?

三. (12 分) 设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求

1. A 的特征值和特征向量; 2. A^k (k 为正整数)及其特征值和特征向量.

四. (15 分) 当 λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$ 有唯一解, 无解, 有无穷多解? 在有解时, 求出方程组的解.

五. (15 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$, 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

1. 求 a,b 的值; 2. 用正交变换将二次型 f 化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

六. (18 分) 在四维实向量构成的线性空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2-a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

1. 求 a 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的基;
2. 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 P;
3. 设线性变换 T 为: $T(\boldsymbol{\alpha}_i)=\beta_i,(i=1,2,3,4)$, 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的变换矩阵 C.

七.(20 分) 证明题

1. 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 $A^\star$, 证明: 若 $|A|=0$, 则 $|A^\star|=0$;
2. 设 A 和 B 为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2=A,B^2=B,r(A+B-E)=n$, 证明: $r(A)=r(B)$.