第 2 章 牛顿运动定律

一、知识点网络框图

牛顿运动定律及其应用

牛顿运动定律

1. 牛顿第一定律

——惯性定律

2. 牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

直角坐标系中的分量式：

$$F_x=ma_x=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$F_y=ma_y=m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$F_z=ma_z=m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

自然坐标系中的分量式：

$$F_\tau=ma_\tau=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$F_n=m\frac{v^2}{\rho}$$

3. 牛顿第三定律

作用力与反作用力定律

几种常见的力

1. 重力

$$\boldsymbol{G}=m\boldsymbol{g}$$

2. 万有引力

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{r}^0$$

3. 弹性力

正压力：F_N

拉力：F_T

弹簧的弹性力：

$$\boldsymbol{F}=-kx\boldsymbol{i}$$

4. 摩擦力

滑动摩擦力

$$F_f=\mu N$$

最大静摩擦力

$$F_{f_0}=\mu_0 N$$

非惯性系、惯性力

1. 非惯性系

牛顿运动定律不成立的参照系

2. 非惯性系中的动力学方程

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{惯}=m\boldsymbol{a}'$$

式中：$\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}_0$ 称为惯性力，$\boldsymbol{a}'$ 为物体相对非惯性系的加速度。$\boldsymbol{a}_0$ 是非惯性系相对于惯性系的加速度。

3. 常见的惯性力：

平动参照系中的平动惯性力

$$\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}_0$$

转动参照系中的惯性离心力

$$\boldsymbol{F}_{惯性离心}=-m\boldsymbol{a}_n=mR\omega^2\boldsymbol{e}_r$$

$\boldsymbol{e}_r$ 为径向单位矢量

转动参照系中的科里奥利力

$$\boldsymbol{F}_c=2m\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega}$$

式中 $\boldsymbol{v}'$ 为质点相对于转动参考系的运动速度。

牛顿运动定律应用中的两类基本问题

1、微分类问题：已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 及 m，求 $\boldsymbol{F}(t)$、$F_t(t)$、$F_n(t)$

2、积分类问题：已知 $\boldsymbol{F}(t)$、m 及 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0$，求 $\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{r}(t)$

二、基本要求

1. 熟练掌握牛顿运动三定律的内容和意义，明确牛顿运动定律的适用范围；
2. 熟练掌握用牛顿运动定律处理动力学问题的基本方法；
3. 掌握用矢量代数和微积分求解动力学方程的基本方法和技巧；
4. 理解惯性系和非惯性系，理解在非惯性系中处理动力学问题的思路和方法。

三、主要内容

【牛顿运动三定律】

第一定律：任何物体都将保持静止或匀速直线运动的状态，直至其它物体的作用迫使它改变这种状态时为止。

牛顿第一定律给出了惯性和力两个重要概念。①任何物体都有保持其原有的静止或匀速直线运动状态的性质，物体的这种性质称为惯性，因此第一定律也称为惯性定律。②力是物体与物体之间的相互作用，其作用效果是改变物体的运动状态，而不是维持物体的运动。

第二定律：物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与合外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与合外力的方向相同。其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

第二定律给出了力与加速度之间的定量关系，同时也揭示了质量是衡量物体惯性大小的量度。

在应用时应注意一下几点

1. 适用对象：宏观低速（远小于光速）运动的质点；
2. 适用条件：惯性参照系；
3. 用分量式求解。第二定律在直角坐标系中的分量式为

$$\left.\begin{aligned} F_x&=ma_x=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ F_y&=ma_y=m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\\ &\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

$$F_z = ma_z = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

在自然坐标系中的分量式为

$$\left.\begin{aligned} F_\tau &= ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ F_n &= ma_n = m\frac{v^2}{\rho} \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

第三定律：两个物体之间的作用力 $\boldsymbol{F}$ 和反作用力 $\boldsymbol{F}'$，大小相等、方向相反，并且在同一直线上，其数学关系为

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}' \tag{2.4}$$

第三定律也称为作用力与反作用力定律。

【惯性系与非惯性系 惯性力】

1、惯性系与非惯性系

牛顿运动定律能够成立的参考系称为惯性系，牛顿运动定律不能成立的参照系称为非惯性参照系。一切相对于某个惯性系做匀速运动的参照系都是惯性系；相对于惯性系做加速运动的参照系都是非惯性系。

2、非惯性系中的动力学方程 惯性力

若质点相对于某个非惯性系的加速度为 $\boldsymbol{a}'$，该参照系相对于惯性参照系的加速度为 $\boldsymbol{a}_0$，则质点在该非惯性参照系中的动力学方程为

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{惯}} = m\boldsymbol{a}' \tag{2.5}$$

式中：$\boldsymbol{F}_{\text{惯}} = -m\boldsymbol{a}_0$ 称为惯性力。惯性力并非物体间的相互作用力，它是在非惯性参照系中引入的虚拟的、假象的力，是运动物体惯性的一种表现形式。

在相对于惯性参照系做加速平动的参照系中，$\boldsymbol{F}_{\text{惯}} = -m\boldsymbol{a}_0$ 称为平动惯性力。

在转动参照系中，惯性力比较复杂，一般表达式为：

$$\boldsymbol{F} \; = m\omega^2\boldsymbol{r} + 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.6}$$

其中第一项称为惯性离心力，第二项称为科里奥利力。

四、典型例题解法指导

牛顿运动定律的应用类问题和质点运动学的问题一样，大致也分为两类基本问题：

第一类问题(求导类型):已知质点的质量 m，及质点的运动规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求作用在质点上的合外力 $\boldsymbol{F}(t)$ 或其中的某个分力 $\boldsymbol{F}_i(t)$。这类问题解法是：先由 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ 求出加速度 $\boldsymbol{a}$，然后由牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 求出质点所受的合外力 $\boldsymbol{F}(t)$ 或其中的某个分力 $\boldsymbol{F}_i(t)$。

第二类问题(积分类型)：已知作用于质点上的合外力 $\boldsymbol{F}(t)$ 和初始条件（即在初始时刻，质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度矢量 $\boldsymbol{v}_0$），求质点的运动速度 $\boldsymbol{v}(t)$、位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 等。对这类问题的解法是通过牛顿第二定律：$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 在坐标系中的分量形式（2.2）式或（2.3）式，列出质点的动力学（微分）方程（组）。然后求解该方程组即可。

应注意的是：如果合外力不是常数，而是变力，则列出的方程（组）通常是一个**微分方程（组）**，此时需要先对微分方程进行分离变量，然后再用积分法求解微分方程，并根据初始条件确定积分常数即可，或者直接用定积分求解微分方程。**这正是大学物理中要求学生重点掌握的内容**。

显然，要解决实际的动力学问题，还需要读者具备足够的中学物理基础和解题技巧，如：能够正确理解并熟练掌握力学中的四种常见力（万有引力、重力、弹力和摩擦力）的基本性质和计算式，熟练掌握力的正交分解与合成的技巧和方法，能熟练、正确地对物体进行受力分析，能熟练掌握用牛顿运动定律解题的基本步骤和方法，其基本步骤为：1.确定研究对象；2.弄清物体的运动规律；3.选择参照系并建立坐标系；4.对物体进行受力分析；5.用 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 的分量形式列方程（组）；6.求解方程组并分析结果的合理性。这种步骤和方法与高中物理的是相同的。**大学物理与高中物理的主要区别在于：**高中物理用 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 列初等代数方程（组），并用初等代数方法求解；大学物理用 $\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 列微分方程（组），并用矢量代数和微积分求解。

例 2.1 雨滴在大气中下落时受到的空气阻力与雨滴的速度成正比，即 $F_f=-kv$。若雨滴的初速度为零且大气是静止的。试求

（1）雨滴下落过程中速度 v 与下落时间 t 的函数关系，并求雨滴的极限速度；

（2）雨滴下落的高度与时间的函数关系

分析：此题已知质点的受力情况，求运动规律，属积分类题型。

解：（1）雨点受到重力 mg 和空气阻力 $F_f=-kv$ 的作用，如图 2.1 所示。以竖直向下作为 y 轴的正方向，开始下落处为坐标原点，根据牛顿第二定律可得雨滴的动力学微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv \quad ①$$

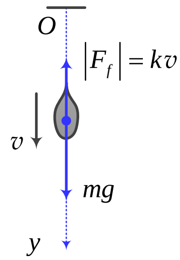


图 2.1 例 2.1 图

对上式分离变量可得

$$\mathrm{d}t=\frac{m}{mg-kv}\mathrm{d}v$$

由题意可知 $t=0$ 时，$v_0=0$，对上式两边作定积分，即

$$\int_0^t \mathrm{d}t=\int_0^v \frac{m}{mg-kv}\mathrm{d}v$$

积分可得

$$t=-\frac{m}{k}\ln\frac{mg-kv}{mg}$$

所以下落过程中速度 v 随下落时间 t 的函数关系为

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \quad ②$$

由①式或②式可知，当 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，或当 $t\to\infty$ 时，雨滴的极限速度为

$$v_{\max}=\frac{mg}{k}$$

（2）因为：$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$，分离变量并取积分，即

$$\int \mathrm{d}y=\int\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\mathrm{d}t$$

积分可得

$$y=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}+C \quad ③$$

③式中C为积分常数，由初始条件确定。由（1）可知$t=0$时，$y=0$，代入③式可得：$C=-\dfrac{m^2 g}{k^2}$，所以雨滴下落的高度与时间的函数关系为

$$y=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2 g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)$$

这一结果看起来与我们熟悉的无阻力自由落体公式完全不同，但可以证明：当$k\to 0$时，利用$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots$，取其前三项近似，由上式可自然地过渡到无阻力的自由落体公式：$y=\dfrac{1}{2}gt^2$。

例 2.2　如图 2.2 所示，长为l的轻绳，一端系一个质量为m的小球，另一端系于定点O，小球能在竖直平面内绕O点做圆周运动。已知：$t=0$时小球位于最低位置，并具有水平速率v_0。请用牛顿运动定律，求小球在任意位置的速率及绳中的张力。

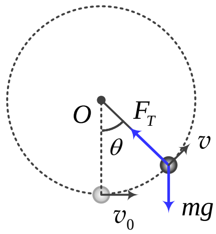


图 2.2 例 2.2 图

分析：对于圆周运动的问题，一般在自然坐标系中求解，这样可使问题的求解过程简化。

解：依题意可设：在任意时刻t，轻绳与铅直方向的夹角为θ，速率为v。此时小球受重力mg和绳的拉力F_T的作用，如图所示。将重力mg和拉力F_T沿圆周的切线和法线方向做正交分解，再由牛顿第二定律在自然坐标系中的分量形式，可得

在切线方向
$$-mg\sin\theta=ma_\tau=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ①$$

在法线方向
$$F_T-mg\cos\theta=ma_n=m\frac{v^2}{l} \qquad ②$$

由于①式中出现了 3 个变量：θ、v、t，所以不能直接对它分离变量，需要先利用角量与线量的关系，进行变量替换。利用：$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{v}{l}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$，将此代入①式，可得

$$-mg\sin\theta=m\frac{v}{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

对上式进行分离变量并取定积分，即

$$\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=-\int_0^{\theta}gl\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

积分可得小球在任意位置的速率为

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos\theta - 1)}$$

将 v 代入②式，可得绳中的拉力为

$$F_T = \frac{m{v_0}^2}{l} + 3mg\cos\theta - 2mg$$

注：如果没有求解方法的限制，本题也可用功能关系求解。

例 2.3 如图 2.3 所示，一根质量为 m，长为 l 的匀质链条，摊直放在光滑的水平桌面上，其一端有极小的一段被推出桌子的边缘，在重力的作用下从静止开始滑落，试求整个链条刚刚离开桌面时速度的大小。

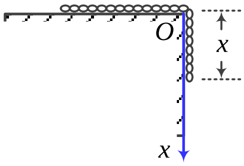


图 2.3 例 2.3 图

分析: 尽管链条不是一个质点，但是整个链条的速度和加速度的大小都是相同的，所以我们仍然可以将链条作为一个整体，用牛顿运动定律来求解。

解： 以链条下落的方向作为 x 轴的正方向。设链条在下落的过程中的任意时刻，下落的长度为 x，则整个链条在竖直方向受到的合外力等于下落部分的重力，即 $F = m_x g = \frac{m}{l}gx$。根据牛顿第二定律 $F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{l}gx$$

由于此方程中含有 3 个变量：v、x、t，为此需要先做变量替换。利用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，上式可变换为

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{g}{l}x$$

对上式分离变量，并取定积分，即

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_0^l \frac{g}{l}x\mathrm{d}x$$

积分可得链条刚离开桌面时的速度为

$$v = \sqrt{gl}$$

例 2.4 高速战斗机降落时，为了减少在跑道上的滑行距离，通常在落地时向后释放一个降落伞，利用空气阻力使其尽快停稳。已知飞机的质量为 m，降落时制动机构产生的

恒定阻力为F_f，降落伞产生的空气阻力与速度的平方成正比，即$F' = -kv^2$。假设降落伞刚释放时飞机的速度为v_0。试求飞机在跑道上滑行速度与滑行距离的函数关系，并求最大滑行距离。

分析：飞机在跑道上在制动力和空气阻力的共同作用下做减速运动，又空气阻力与速度有关，故可由牛顿运动定律列出动力学微分方程。

解：以飞机的滑行方向作为x轴的正方向，因为飞机在滑行方向只受制动力和空气阻力的作用，由题意可得飞机滑行时的动力学微分方程为

$$-F_f - kv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{①}$$

由于题中要求出滑行速度与滑行距离的关系，所以首先做变量替换以方便求解。由

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

于是方程①可改写为

$$-F_f - kv^2 = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

对上式分离变量，并取定积分，即

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v} m\frac{v\mathrm{d}v}{-F_f - kv^2}$$

积分得

$$x = \frac{m}{2k}\ln\frac{F_f + kv_0^2}{F_f + kv^2} \tag{②}$$

由此得滑行速度与滑行距离的函数关系为

$$v = \sqrt{\frac{F_f + kv_0^2}{k}e^{-\frac{2k}{m}x} - \frac{F_f}{k}}$$

由②可知，当$v = 0$时，可求出飞机的最大滑行距离为

$$x_{\max} = \frac{m}{2k}\ln\frac{F_f + kv_0^2}{F_f}$$

例 2.5 质量为m_1的楔放在水平面上，楔的斜面上放一质量为m_2的物体，如果每一接触面都是光滑的，斜面与水平面的夹角为θ角，如图 2.4 所示。试求：

（1）楔对地的加速度 a_1；

（2）物体对楔的加速度 a_2；

（3）物体对楔的正压力 N_1；

（4）楔对桌面的正压力 N_2。

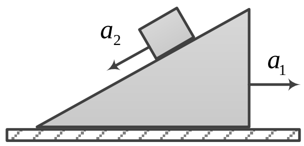


图 2.4 例 2.5 图

分析：由于物体在楔的斜面上运动，又楔相对于地面也在做加速度运动，所以在分析斜面上物体的运动时应加上惯性力，用非惯性系中的动力学规律列方程。而对于楔来说，则仍然以地面为参照系，用牛顿运动定律列方程。

解：首先用隔离体法对楔和楔上的物体进行受力分析，如图 2.5 所示，其中 $\boldsymbol{F}_0=-m_2\boldsymbol{a}_1$ 是物体在非惯性参照系中的平动惯性力，其大小为 m_2a_1，方向与 a_1 的方向相反。

对于楔，以地面为惯性参照系，由牛顿运动定律可得

在水平方向

$$F_{N2}\sin\theta=m_1a_1 \qquad ①$$

在竖直方向

$$F_{N2}-F_{N1}\cos\theta+m_1g=0 \qquad ②$$

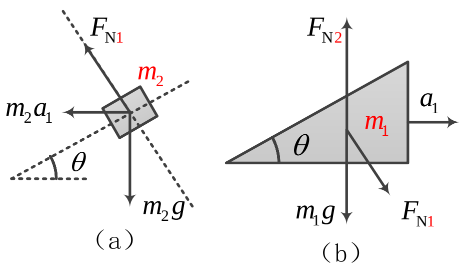


图2. 5 例2. 5解图

对于物体 m_2，以楔为参照系，由非惯性系中的动力学方程，在沿斜面方向（以沿斜面向下为正方向）

$$m_2g\sin\theta+m_2a_1\cos\theta=m_2a_2 \qquad ③$$

在垂直于斜面方向

$$F_{N1}+m_2a_1\sin\theta-m_2g\cos\theta=0 \qquad ④$$

联立求解方程组①~④，可得

（1）楔对地的加速度大小为

$$a_1=\frac{m_2\sin\theta\cos\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta}g$$

方向水平向右

（2）物体对楔的加速度大小为

$$a_2=\frac{(m_1+m_2)\sin\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta}g$$

方向平行于斜面向下

（3）物体对楔的正压力的大小为

$$F_{\mathrm{N1}}=\frac{m_1m_2\cos\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta}g$$

方向垂直于斜面向下

（4）楔对桌面的正压力

$$F_{\mathrm{N2}}=\frac{m_1\left(m_1+m_2\right)}{m_1+m_2\sin^2\theta}g$$

方向垂直于桌面向下

例 2.6　如图 2.6 所示，光滑金属丝上穿一小环，当金属丝绕竖直轴 Oy 以角速度 ω 匀速转动时，小环在金属丝上的任何位置均保持与金属丝相对静止，求证金属丝的曲线方程为 $y=\dfrac{\omega^2}{2g}x^2$。

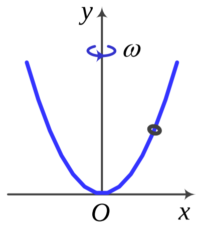


图 2.6　例 2.6 图

分析：小环在转动的金属丝上保持相对静止，若以金属丝为参照系，则这是一个转动参照系，是非惯性系。所以在受力分析时应加上惯性离心力，然后用非惯性参照系中的动力学方程来讨论。

解：以转动的金属丝为参照系，在这非惯性系中，小环受力如图所示，其中 $\boldsymbol{F}'=m\omega^2\boldsymbol{x}$ 为惯性离心力。由于小环在转动参照系中是静止的，所以由非惯性系中的平衡条件，可得

$$F\cos\theta=mg \qquad ①$$

$$F\sin\theta=m\omega^2x \qquad ②$$

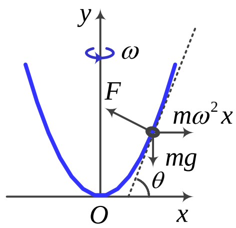


图 2.7　例 2.6 解图

由①、②两式得：　$\tan\theta=\dfrac{\omega^2}{g}x$

又小环所处位置金属丝的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\theta$$

由此得：　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\omega^2}{g}x$

对上式分离变量并积分：　$\displaystyle\int_0^y\mathrm{d}y=\int_0^x\frac{\omega^2}{g}x\mathrm{d}x$

积分得金属丝的曲线方程为：　　　　　　$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2$

五、自我测试题

2.1 一只质量为m的猴子，开始时抓住了一根吊在天花板上、质量为M的竖直杆。当悬挂杆的钩子突然脱落时，猴子沿杆竖直向上爬，以保持其离地面的高度不变。则此时杆下落的加速度的大小为（　　　　）

（A）g　　（B）$\frac{M+m}{M}g$　　（C）$\frac{M-m}{M}g$　　（D）$\frac{M+m}{M-m}g$

2.1 答案：B

解法提要：当猴子相对于地面保持高度不变时，其所受合外力为零，即杆对猴子的作用力为mg，方向向上。由牛顿第三定律，猴子对杆的作用力大小也为mg，但方向向下。于是杆受到的合外力为$mg+Mg$，再由$mg+Mg=Ma$可得解。

2.2 质量为M的气球下面用绳系着一个质量为m的物体，两者正以加速a度匀加速上升。不考虑物体m所受的浮力，当绳突然断开时，气球的加速度为（　　　　）

（A）a　　（B）$\frac{M+m}{M}a$　　（C）$a+\frac{m}{M}g$　　（D）$a+\frac{m}{M}(g+a)$

2.2 答案：D

解法提要：在绳子断开前后的极短时间内，气球的速度变化可忽略不计，故断开前后的极短时间内气球受浮力和空气阻力的合力不变，可记为F，方向向上。由断开前

$$F-(M+m)g=(M+m)a$$

断开后

$$F-Mg=Ma'$$

联立上述两个方程，即可解得气球的加速度a'。

2.3 质量为m的质点，沿x轴运动，其运动方程为$x=A\cos\omega t$，则在任意时刻，质点受到的合外力为（　　　　）

（A）ω^2x　　（B）$-\omega^2x$　　（C）$m\omega^2x$　　（D）$-m\omega^2x$

2.3 答案：　D

解法提要：因为$F=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-mA\omega^2\cos\omega t$

2.4 质量$m=4\mathrm{kg}$的物体，在合外力$F=(10+2t)$ (SI) 的作用下沿x轴做直线运动。$t=0$时，速度$v=2\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。则$t=2\mathrm{s}$时的速度为（　　　　）

（A）$6\mathrm{m\cdot s^{-1}}$　　（B）$7\mathrm{m\cdot s^{-1}}$　　（C）$8\mathrm{m\cdot s^{-1}}$　　（D）$9\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

2.4 答案： C

解法提要：由$\boldsymbol{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$得：$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{F}{m}=\dfrac{5+t}{2}$，分离变量并积分，即：$\int_2^v \mathrm{d}v=\int_0^t \dfrac{5+t}{2}\mathrm{d}t$，积分可得$v=v(t)$。

2.5 质量为 0.25kg 的质点，受力$\boldsymbol{F}=t\boldsymbol{i}$ (SI)的作用，式中t为时间。$t=0$时刻该质点以$\boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速度通过坐标原点，则该质点任意时刻的位置矢量是______________。

2.5 答案： $\boldsymbol{r}=\dfrac{2}{3}t^3\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$ (SI)

解法提要：由$\boldsymbol{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$得：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\boldsymbol{F}}{m}=4t\boldsymbol{i}$，分离变量并取定积分，即：$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t 4t\boldsymbol{i}\mathrm{d}t$，积分可得$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+2t^2\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{j}+2t^2\boldsymbol{i}$，即$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2t^2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，再次分离变量并取定积分，即：$\int_0^r \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t\left(2t^2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}t$，积分可得结果。

2.6 一质量为m的物体沿x轴正方向运动，假设该质点通过坐标为x时的速度为$v=kx$(k为正常数)，则此时作用于该质点的力$\boldsymbol{F}=$ ________ ，该质点从$x=x_0$点出发运动到$x=x_1$处所经历的时间$\Delta t=$______________ .

2.6 答案： mk^2x；$\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{x_1}{x_0}$

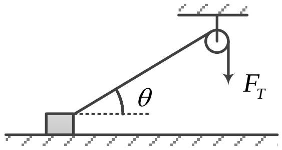
解：$F=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mkv=mk^2x$

由$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx$，分离变量并取定积分$\int_{x_0}^{x_1}\dfrac{1}{kx}\mathrm{d}x=\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t$，所以：$\Delta t=\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{x_1}{x_0}$

2.7 如图所示，用绳子跨过轻质定滑轮拉一个质量为m的木箱（可视为质点）。设木箱与地面之间的滑动摩擦因数为μ，要使物体在移动过程中始终保持匀速运动，问在夹角

θ 为多大时最省力?

2.7 答案： $\tan\theta=\mu$



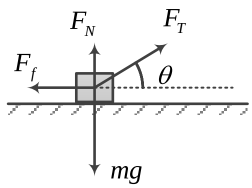
测试题 2.7 图

解：对木箱进行受力分析，如图所示。因木箱匀速运动，所以

在水平方向： $F_T\cos\theta-F_f=0$

在竖直方向： $F_N+F_T\sin\theta-mg=0$

且： $F_f=\mu F_N$



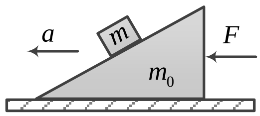
测试题 2.7 解图

联立以上三式，可得： $F_T=\dfrac{\mu mg}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$

因拉力 F_T 与角度 θ 有关，要求其极小值，可令： $\dfrac{\mathrm{d}F_T}{\mathrm{d}\theta}=0$，由此可得最省力的条件是：

$$\tan\theta=\mu$$

2.8 有一光滑的三棱柱，质量为 m_0，斜面倾角为 θ，放在光滑的水平桌面上。另一质量为 m 的滑块放在三棱柱的斜面上，如图所示。现给三棱柱施加一个水平向左的恒力 F，问当 F 多大时，才能保持 m 相对于 m_0 静止不动？此时 m_0 相对于水平桌面的加速度为多大？。



测试题 2.8 图

2.8 答案： $(m_0+m)g\tan\theta$、 $g\tan\theta$

解： 当滑块与三棱柱保持相对静止时，可将两者作为一个整体，其受力有：重力 $(M+m)g$ ↓，桌面的支持力 N_1 ↑，和水平推力 F ←。由牛顿运动定律，可得其水平加速度为

$$a=\frac{F}{m_0+m} \quad ①$$

再对滑块进行分析，其受力有重力 mg ↓，斜面的支持力 N_2 方向垂直斜面向上。由牛顿运动定律，在竖直方向有 $N_2\cos\theta=mg$ ②

在水平方向 $N_2\sin\theta=ma$ ③

联立①②③可得

$$F=(m_0+m)g\tan\theta \qquad a=g\tan\theta$$

2.9 质量$m=2.0\text{kg}$的物体在沿x方向的周期性合外力$F=8.0\cos 4\pi t$ (SI) 的作用下做直线运动，开始时，物体静止于坐标原点处。试求：

（1）任意时刻物体的运动速度；

（2）任意时刻物体的位置。

2.9 答案： $\dfrac{1}{\pi}\sin 4\pi t$ (SI)；$\dfrac{1}{4\pi^2}\left(1-\cos 4\pi t\right)$ (SI)

解：（1）由牛顿运动定律可知，物体的加速度为

$$a=F/m=4.0\cos 4\pi t$$

即 $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4.0\cos 4\pi t$$

对上式分离变量并取定积分 $$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t 4.0\cos 4\pi t\mathrm{d}t$$

积分可得物体的速度为 $$v=\frac{1}{\pi}\sin 4\pi t \text{ (SI)}$$

（2）因$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，由（1）可知 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\pi}\sin 4\pi t$$

再对上式分离变量并积分，即 $$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t \frac{1}{\pi}\sin 4\pi t\mathrm{d}t$$

由此得物体在任意时刻的位置为 $$x=\frac{1}{4\pi^2}\left(1-\cos 4\pi t\right) \text{ (SI)}$$

2.10 一质量$m=2\text{kg}$的质点在$O\text{-}xy$平面内运动，受到合外力$\boldsymbol{F}=4\boldsymbol{i}-18t^2\boldsymbol{j}$ (N) 的作用，式中t的单位为 s。当$t=0$时，质点的初速度$\boldsymbol{v}_0=3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。试求

（1）$t=1\text{s}$时的速度；

（2）$t=1\text{s}$时合外力的法向分量。

2.10 答案： $5\boldsymbol{i}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$；$-18\boldsymbol{j}$ N

解：（1）由牛顿运动定律，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}=2\boldsymbol{i}-9t^2\boldsymbol{j}$$

分离变量并取定积分，即

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t\left(2\boldsymbol{i}-9t^2\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}t$$

积分得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+2t\boldsymbol{i}-3t^3\boldsymbol{j}=(3+2t)\boldsymbol{i}+(3-3t^3)\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由此可得当 $t=1\mathrm{s}$ 时，质点的速度为： $\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

（2）由于 $t=1\mathrm{s}$ 时， $\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，即速度沿 x 轴正方向。又速度的方向就是曲线的切线方向，所以此时质点所在位置处曲线的法线方向就沿 y 轴方向，故此时的法向分力为

$$\boldsymbol{F}_n=F_y\boldsymbol{j}\big|_{t=1}=-18\boldsymbol{j}\ \mathrm{(N)}$$

2.11　质量为 m 的物体从一栋高楼的阳台上，从静止开始落下，已知空气阻力与速度的平方成正比，物体下落时能达到的极限速率为 $50\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。试求

（1）物体下落速率达到 $25\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时所需的时间；

（2）在此过程中物体下落的高度。

2.11 答案： 2.8 s； 36.7m

解：（1）物体下落时受重力和空气阻力的共同作用。由题意可设空气阻力的大小为：$F_f=kv^2$，方向↑。当物体达到最大速度（极限速度）$v_m=50\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时，必有：$mg-kv_m^2=0$，所以：

$$v_m=\sqrt{\frac{mg}{k}}=50\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

以向下为正方向，由牛顿第二定律，可得物体的动力学方程为

$$mg-kv^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ①$$

分离变量并取定积分，即

$$\int_0^t\mathrm{d}t=\int_0^v\frac{m}{mg-kv^2}\mathrm{d}v$$

积分可得： $$t=\frac{1}{2g}\sqrt{\frac{mg}{k}}\ln\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+v}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v}=\frac{v_m}{2g}\ln\frac{v_m+v}{v_m-v}$$

由此可得当 $v=\frac{1}{2}v_m=25\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时， $t=\frac{v_m}{2g}\ln\frac{1+0.5}{1-0.5}=\frac{50}{2\times9.8}\ln3=2.8\ \mathrm{(s)}$

（2） 利用$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，则方程①可改写为

$$mg-kv^2=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

分离变量并取定积分，即： $\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^v \frac{mv}{mg-kv^2}\mathrm{d}v$

积分即可得： $x=-\frac{m}{2k}\ln\left(1-\frac{k}{mg}v^2\right)=-\frac{v_m^2}{2g}\ln\left(1-\frac{v^2}{v_m^2}\right)$

将$v=\frac{v_m}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{k}}=25\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$代入，可得： $x=36.7\mathrm{m}$

2.12 一质量为m的物体以初速度v_0做竖直上抛运动，所受的空气阻力与速度成正比，比例系数为k。试求：

（1）物体在上升过程中速度随时间的变化关系。

（2）物体能上升的最大高度H。

2.12 答案： $v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$； $\frac{m}{k}v_0-\frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1+\frac{kv_0}{mg}\right)$

解：（1）物体在向上运动时受到重力mg和空气阻力$F_f=kv$的共同作用，两者方向都向下。以竖直向上作为x轴的正方向，抛出点为坐标原点，根据牛顿第二定律可得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg-kv \qquad ①$$

对上式分离变量并取定积分，即

$$\int_0^t \mathrm{d}t=\int_{v_0}^v \frac{m}{-mg-kv}\mathrm{d}v$$

积分可得

$$t=-\frac{m}{k}\ln\frac{mg+kv}{mg+kv_0}$$

所以速度v随下落时间t的函数关系为

$$v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

（2） 利用 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，则方程①可改写为

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-mg-kv$$

分离变量并取定积分

$$\int_0^H \mathrm{d}x=\int_{v_0}^0 \frac{mv}{-mg-kv}\mathrm{d}v$$

由此解得最大高度为： $$H=\frac{m}{k}v_0-\frac{m^2 g}{k^2}\ln\left(1+\frac{kv_0}{mg}\right)$$

请读者思考：如何由此证明当 $k\to 0$ 时，$H=\dfrac{v_0^2}{2g}$？