# 武汉大学 2021-2022 学年第一学期《线性代数 B》期中考试试卷

**一、单项选择题**(每小题 3 分，共 15 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶方阵，下列命题正确的是________.

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(B) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$

(C) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \Rightarrow |\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O} \Rightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

则必有________

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　(B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则_____.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(4) 当 $\boldsymbol{A}=$_____时，$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$ 构成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(A) $(-2,1,1)$　(B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组，则下列结论正确的是_____.

(A) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(B) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；

(C) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；

(D) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

**二、填空题**(每小题 3 分，共 15 分)

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的第 4 行元素的代数余子式之和 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$__________.

(2) 若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}=5$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=6$，则 $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2d & -2e & -2f \\ 4x+\alpha & 4y+\beta & 4z+\gamma \end{vmatrix}=$______.

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解向量，且 $R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$c$ 表任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$______.



满绩小铺：1433397577，搜集整理不易，自用就好，谢谢！

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，则$a=$______.

**三、**(10 分) 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&x+1&3&\cdots&n\\1&2&x+1&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2&3&\cdots&x+1\end{vmatrix};$$

**四、**(10 分) 解下列矩阵方程：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}，其中\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}.$$

**五、**(10 分) 设 3 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda+1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda+1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

问$\lambda$取何值时：

（1） $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表达式唯一；

（2） $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表达式不唯一；

（3） $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

**六、**(10 分) 求向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(3,-2,-1,b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=(-2,6,10,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_5=(4,-1,6,10)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组.

**七、**(10 分) 设四元齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}.$$

还知道另一齐次线性方程组(II)的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

求方程组(I)与(II)的公共解.

**八、**(10 分) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，证明：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$均可逆，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

**九、**(10 分) 设$\boldsymbol{A}$为$n\times m$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$m\times n$矩阵，其中$n<m$，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明$\boldsymbol{B}$的列向量线性无关.



满绩小铺：1433397577，搜集整理不易，自用就好，谢谢！