武汉大学 2014-2015 学年第二学期期末考试高等数学 A2 试题（A）

一、（8 分）设 $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b},\vec{q}=k\vec{a}+\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，问：
(1) k 为何值时，$\vec{p}\perp\vec{q}$？ (2) k 为何值时，以 $\vec{p},\vec{q}$ 为边的平行四边形面积为 6?

二、（8 分）设有数量场 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$，问当 a,b,c 满足什么条件时，才能使函数 $u(x,y,z)$ 在点 $p(1,-2,2)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=\{1,-2,-1\}$ 的方向导数最大?

三、（6 分）函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(x+y+z)$ 所确定，其中 f 二阶可导，且 $f'\neq 1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

四、（6 分）设 $u=f(x+y+z,xyz)$ 具有一阶连续偏导数，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2ze^{y^2}=\sin z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$。

五、（6 分）求曲线 $\begin{cases} ax+by+cz=ab+2bc \\ a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2=a^2b^2 \end{cases}$ 在点 (b,c,b) 处的切线及法平面方程。(其中 $a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$)

六、（10 分）设 l_1:$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$，$l_2$:$\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{3}$，试求与直线 l_1,l_2 都垂直且相交的直线的方程。

七、（10 分）设 $z=x^3+\alpha x^2+2\gamma xy+\beta y^2+\alpha\beta^{-1}(\gamma x+\beta y)$，试证：当 $\alpha\beta\neq\gamma^2$ 时，函数 z 有一个且仅有一个极值，又若 $\beta<0$，则该极值必为极大值。

八、（12 分）计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2dydz-y^2dzdx+z^2dxdy$ 其中 Σ 是立体 Ω 的表面的外侧，立体 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=3R^2$ 与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=R^2$ 及平面 $z=0$ 所围 成的含有 oz 轴正半轴的那部分。

九、（12 分）确定常数λ，使得在不包含 X 轴的单连域内，曲线积分

$$\int_L \frac{x}{y}(x^2+2xy+2y^2)^{\lambda}dx-\frac{x^2}{y^2}(x^2+2xy+2y^2)^{\lambda}dy=\int_L Pdx+Qdy$$

与路径无关，并在上述条件下，求积分 $\int_{(-3,3)}^{(-1,1)} Pdx+Qdy$ 之值。

十、（10 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)\dfrac{x^{n-1}}{3^n}$ 在 $(-3,\ 3)$ 内的和函数。

十一、（6 分）设级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在[0, 1]上收敛，证明：当 $a_0=a_1=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛。

十二、（6 分）设 $f(x,y)$ 在单位圆上有连续的偏导数，且在边界上取值为零，计算极限：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_{D}\frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy$$

其中 D 为圆环域：$\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1$.