

武汉大学 2015-2016 第一学期线性代数 B 期末试题 A

一、(8 分) 设 P, A 均为 3 阶矩阵, 且 $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $P = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$Q = (\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_2, \sigma_3)$, 求 $Q^T A Q$.

二、(10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AX + I = A^2 + X$, 其中 I 为三阶单位矩阵, 求矩阵 X .

三、(10 分) 若 3 阶方阵 A 与对角矩阵 $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ 相似, 计算矩阵

$$C = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E)$$

四、(8 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ , 求 a .

五、(12 分) 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 4)$, $\alpha_2 = (2, 1, 3, 5)$, $\alpha_3 = (1, -1, 3, -2)$, $\alpha_4 = (3, 1, 5, 6)$ 的一个极大无关组, 并把其余的向量用该极大无关组线性表出.

六、(10 分) 若 2 阶实矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的两个特征值都是 λ_0 , 且 $b \neq 0$, 证明: 矩阵 $C = \begin{bmatrix} b & 0 \\ \lambda_0 - a & 1 \end{bmatrix}$

满足 $C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

七、(8 分) 若二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ (式中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$), 适合 $|A| < 0$.

求证: 必存在向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 使 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha^T A \alpha < 0$.

八、(8 分) 若 $n \times r$ 矩阵 A 的秩为 r , 其 r 个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系, B 为 r 阶可逆方阵, 证明 AB 的 r 个列向量也是该齐次线性方程组一个基础解系.

九、(16 分) 对线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不等, 问方程组是否有解, 为什么?

(2) 若 $a_1 = a_3 = b$, $a_2 = a_4 = -b$ ($b \neq 0$), 且已知方程的两个解 $\xi_1 = (1, 1, -1)^T$, $\xi_2 = (-1, 1, 1)^T$, 试给出方程组的通解.

十、(10 分) 设二次曲面的方程 $axy + 2xz + 2byz = 1$ ($a > 0$) 经正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$, 化

成 $\xi^2 + \eta^2 - 2\zeta^2 = 1$, 求 a, b 的值及正交矩阵 Q .

武汉大学 2015-2016 第一学期线性代数 B 期末试题 A 解答

一、(8 分) 设 A, P 均为 3 阶矩阵, 且 $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $P = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$Q = (\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_2, \sigma_3)$, 求 $Q^T A Q$.

解: 由于 $Q = (\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{于是 } Q^T A Q &= \left(P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T A \left(P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^T A P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

二、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AX + I = A^2 + X$, 其中 I 为三阶单位矩阵, 求矩阵 X .

解 由题知 $(A - I)X = A^2 - I = (A - I)(A + I)$,

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 可逆, 故 } X = (A - I)^{-1}(A - I)(A + I) = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

三、(10 分) 若 3 阶方阵 A 与对角矩阵 $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ 相似, 计算矩阵

$$C = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E).$$

解 因 $A \sim B$, 故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$ 则 $P^{-1}CP = P^{-1}(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E)P = P^{-1}(A - \lambda_1 E)PP^{-1}(A - \lambda_2 E)PP^{-1}(A - \lambda_3 E)P = (B - \lambda_1 E)(B - \lambda_2 E)(B - \lambda_3 E) = 0$, 故 $C = 0$

四、(8 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ , 求 a .

解: 由 $|A - \lambda I| = 0$, 得 A 的三个特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$. 由于 A 相似于对角矩阵,

$$R(A - 6I) = 1, \text{ 即 } \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 显然, 当 } a = 0 \text{ 时, } R(A - 6I) = 1, A \text{ 的二}$$

重特征值 6 对应两个线性无关的特征向量, 所以当 $a=0$ 时, A 相似于对角矩阵 $\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

五、(12 分) 求向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,4)$, $\alpha_2 = (2,1,3,5)$, $\alpha_3 = (1,-1,3,-2)$, $\alpha_4 = (3,1,5,6)$ 的一个极大无关组, 并把其余的向量用该极大无关组线性表出.

解: 极大无关组 α_1, α_2 , $\alpha_3 = 2\alpha_2 - 3\alpha_1$, $\alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_1$.

六、(10 分) 若 2 阶实矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的两个特征值都是 λ_0 , 且 $b \neq 0$, 证明: 矩阵

$$C = \begin{bmatrix} b & 0 \\ \lambda_0 - a & 1 \end{bmatrix} \text{ 满足 } C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{证 } C^{-1} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \lambda_0 & b \end{pmatrix}, \quad C^{-1}AC = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \lambda_0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ \lambda_0 - a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

(用到 $bc = (a - \lambda_0)(d - \lambda_0)$ 及 $a + b = 2\lambda_0$)

七、(8 分) 若二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ (式中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$), 适合 $|A| < 0$.

求证: 必存在向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$, 使 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha' A \alpha < 0$.

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 因 $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n < 0$, 故至少有一个特征值取负值, 不妨设 $\lambda_1 < 0$, 存在正交矩阵 T 令 $X = TY$, ($Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$) 则 $X'AX = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = F(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 取 $Y_0 = (1, 0, \dots, 0)$ 则 $F(1, 0, \dots, 0) = \lambda_1 < 0$, 令 $\alpha = TY_0$ 则 $\alpha' A \alpha = \lambda_1 < 0$

八、(8 分) 若 $n \times r$ 矩阵 A 的秩为 r , 其 r 个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系, B 为 r 阶可逆方阵, 证明 AB 的 r 个列向量也是该齐次线性方程组一个基础解系.

证: 记 A 的列向量为 A_1, A_2, \dots, A_r , 记 AB 列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = (A_1, A_2, \dots, A_r)B \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

即 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 可由 A_1, \dots, A_r 线性表出. 又 $\because A_1, \dots, A_r$ 为某一齐次方程组的解, $\therefore \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 也为其解.

又 $\because B$ 可逆, $\therefore \textcircled{1}$ 式可得: $(A_1, \dots, A_r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)B^{-1}$, 即 A_1, \dots, A_r 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出

$\therefore A_1, \dots, A_r$ 与 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 等价, 从而 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 亦为该齐次方程组的基础解系.

$$\text{九、(16 分) 对线性方程组 } \begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不等, 问方程组是否有解, 为什么?

(2) 若 $a_1 = a_3 = b$, $a_2 = a_4 = -b$ ($b \neq 0$), 且已知方程的两个解 $\xi_1 = (1, 1, -1)^T$, $\xi_2 = (-1, 1, 1)^T$, 试给出方程组的通解.

$$\text{解: (1) } \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \neq 0,$$

$R(A:b) \neq R(A)$, 无解.

(2) $R(A) = 2$, $n = 3$, 故通解 $\mathbf{x} = k(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1 = k \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, ($k \in \mathbf{R}$).

十、(10 分) 设二次曲面的方程 $axy + 2xz + 2byz = 1$ ($a > 0$) 经正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$, 化

成 $\xi^2 + \eta^2 - 2\zeta^2 = 1$, 求 a 、 b 的值及正交矩阵 \mathbf{Q} .

解: 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2} & 1 \\ \frac{a}{2} & 0 & b \\ 1 & b & 0 \end{bmatrix}$, 由 $|\mathbf{A} - \mathbf{E}| = 0, |\mathbf{A} + 2\mathbf{E}| = 0$ 知 $a = 2, b = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, $\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (1, -1, 2)^T$

当 $\lambda = -2$ 时, $\mathbf{A} + 2\mathbf{E} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\xi_3 = (-1, 1, 1)^T$. 故正交阵 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.