高等数学 2011-2012B2 试题解

一、（8’）已知$\vec{a}=\vec{i},\vec{b}=\vec{j}-2\vec{k},\vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,求一单位向量$\vec{m}$，使$\vec{m}\perp\vec{c}$，且$\vec{m}$与$\vec{a},\vec{b}$共面。

解：设$\vec{m}=\{x,y,z\}$.则

$$\begin{cases}2x-2y+z=0\\ \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\x&y&z\end{vmatrix}=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-2y+z=0\\ z+2y=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2y\\ z=-2y\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\pm\dfrac{2}{3}\\ y=\pm\dfrac{1}{3}\\ z=\mp\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$\vec{m}=\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right\}$或$\vec{m}=\left\{-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$。

二、(11’)设$f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$,问$f(x,y)$在$(0,0)$点：（1）是否连续？（2）偏导数是否存在？（3）是否可微？

解：因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt[3]{x^2y}=0=f(0,0)$,所以$f(x,y)$在$(0,0)$点连续。因为$\varphi(x)=f(x,0)\equiv0,\psi(y)=f(0,y)\equiv0$，所以$f_x(0,0)=\varphi'(0)=0,f_y(0,0)=\psi'(0)=0$都存在。因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{y=kx}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{k}x}{\sqrt{1+k^2}x}=\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{1+k^2}}$$ 与 k

有关,所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

三、（8’）设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}y=f(x,t)\\ t=F(x,y)\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$（假定隐函数定理条件满足）。

解: $\begin{cases}y=f(x,t)\\ t=F(x,y)\end{cases}$ 等价于 $y=f(x,F(x,y))$。把 y 看作 x 的函数，两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,F(x,y))+f_2(x,F(x,y))\left(F_1(x,y)+F_2(x,y)\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_1(x,F(x,y))+f_2(x,F(x,y))F_1(x,y)}{1-f_2(x,F(x,y))F_2(x,y)}$$

四、（8’）设 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定 a,b 使 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+au(x,y)e^{ax+by}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+bu(x,y)e^{ax+by}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=b\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+a\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+abu(x,y)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+(ab-a-b+1)u(x,y)e^{ax+by}$$

当 $a=b=1$ 时 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$。

五、（10’）求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $a_1x+a_2y+a_3z=1\ (a_i>0,i=1,2,3)$ 下的最小值。

解：所求最小值是原点到所给平面距离的平方。即

$$f_{\min}=\left(\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right)^2=\frac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

六、（8’）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}x^3y^2zdV$，$\Omega$为马鞍面$z=xy$与平面$y=x,x=1,z=0$所包围的空间区域。

解：$\iiint\limits_{\Omega}x^3y^2zdV=\iint\limits_{\substack{0\le y\le x\\0\le x\le1}}dxdy\int_0^{xy}x^3y^2zdz=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\le y\le x\\0\le x\le1}}x^5y^4dxdy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^x x^5y^4dy=\frac{1}{10}\int_0^1x^{10}dx=\frac{1}{110}。$$

七、（8’）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+(-2)^n\right](x+1)^n$的收敛域。

解：令$x+1=t$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+(-2)^n\right](x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+(-2)^n\right]t^n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}}+(-2)^{n+1}}{\frac{1}{2^n}+(-2)^n}\right|=2$。$R_t=\frac{1}{2}$。

当$t=\frac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+(-2)^n\right]\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散；

当$t=-\frac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+(-2)^n\right]\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$发散；

$-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$。

幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+(-2)^n\right](x+1)^n$的收敛域$K=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$。

八、（8’）求二重积分$I=\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-4\right|dxdy$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+y^2\le16\right\}$。

解：$D = D_1 \cup D_2$，其中 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 4\}$，$D_2 = \{(x, y) | 4 \le x^2 + y^2 \le 16\}$。

$$I = \iint_{D_1} (4 - x^2 - y^2) dxdy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 4) dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 (\rho^2 - 4)\rho d\rho$$
$$= 2\pi \left(2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^2 + 2\pi \left(\frac{1}{4}\rho^4 - 2\rho^2\right)\Big|_2^4$$
$$= 16\pi + 2\pi \left(\frac{1}{4} \cdot 4^4 - 2 \cdot 4^2\right) = 80\pi$$

九、（10’）计算曲面积分 $\iint_S (2x + z)dydz + zdxdy$，其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角。

解：S 往 xy 平面的投影 D_{xy}：$x^2 + y^2 \le 1$。$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$。

$$\iint_S (2x + z)dydz + zdxdy = \iint_{D_{xy}} \left[(2x + x^2 + y^2)(-2x) + x^2 + y^2\right] dxdy$$
$$= -2\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)xdxdy + \iint_{D_{xy}} (y^2 - 3x^2)dxdy = \iint_{D_{xy}} (y^2 - 3x^2)dxdy$$
$$= \frac{1}{2}\left[\iint_{D_{xy}} (y^2 - 3x^2)dxdy + \iint_{D_{xy}} (x^2 - 3y^2)dxdy\right] = -\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)dxdy$$
$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{\pi}{2}$$

十、（11’）已知 L 是第一象限中从 $O(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $A(2, 0)$，再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $B(0, 2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $\int_L 3x^2ydx + (x^3 + x - 2y)dy$。

解：L_1 是从 $B(0, 2)$ 到 $O(0, 0)$ 的直线段。

$$\int_{L+L_1} 3x^2ydx + (x^3 + x - 2y)dy = \iint_D dxdy = \frac{\pi}{2}(4 - 1) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\frac{3\pi}{2}-\int_{L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$$

$$=\frac{3\pi}{2}-\int_2^0(-2y)dy=\frac{3\pi}{2}-4$$

十一、（10’）将$f(x)=1-x^2(0\le x\le\pi)$展开成余弦级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$的和。

解：$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)dx=\frac{2}{\pi}\left(\pi-\frac{1}{3}\pi^3\right)=2\left(1-\frac{1}{3}\pi^2\right)$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)\cos nxdx$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$f(x)=1-\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx(0\le x\le\pi)$$

令$x=0$得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\pi^2-1\right)$。