第3章　线性方程组

3.1　n 维向量及其线性相关性

3.1 n 维向量及其线性相关性

1. n元向量的概念

定义3.1 由 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组称为 n 元向量，

记作$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，其中 a_i 称为第 i 个分量。

如果 a_i ($i=1,2,\ldots,n$)是实(复)数叫做实(复)向量。

行向量是 $1\times n$ 矩阵,记作 $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$;

列向量是 $n\times 1$ 矩阵,记作 $[a_1, a_2, \ldots, a_n]^{\mathrm{T}}$。

如果 n 个分量全为零，叫做零向量，用 $\mathbf{0}$ 表示。

全体 n 元实向量组成的集合记作 $\mathbf{R}^n$ 。

常用 α, β, γ 等表示 n 元向量。

2. 向量的线性运算

定义3.2 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}\in F^n$, $\boldsymbol{\beta}=[b_1, b_2, \cdots, b_n]^{\mathrm{T}}\in F^n$, $\lambda\in F$。

F为数域

(1) $\alpha=\beta$ 当且仅当 $a_i=b_i$, $i=1,2,\ldots,n$。

(2) α 与 β 之和：$\alpha+\beta=[a_1+b_1, a_2+b_2,\ldots, a_n+b_n]^{\mathrm{T}}$

(3) 数 λ 与 α 之乘积: $\lambda\alpha=[\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n]^{\mathrm{T}}$，简称数乘。

向量的加法与数量乘法统称为向量的线性运算，其运算规律与矩阵的相同

$k=-1$时，$-\alpha=[-a_1, -a_2,\ldots, -a_n]^{\mathrm{T}}$

$$\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$$

加法满足4条运算律：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\forall\alpha$ 有 $\alpha+\mathbf{0}_n=\alpha$;

(4) $\forall\alpha$ 有 $(-\alpha)$，使 $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}_n$。

数乘满足4条运算律：

$\forall \alpha, \beta \in F^n, \forall \lambda, \mu \in F$有：

$1\alpha=\alpha$;

$\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$;

$\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$;

$(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$。

其他:

(1) $\forall \boldsymbol{\alpha}$ 有 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}_n$； $k\mathbf{0}_n=\mathbf{0}_n$。

(2) 若 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}_n$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}_n$ 或 $k=0$。

(3) 向量方程 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$$

定义3.3 数域 F上的全体 n 元向量，在其中定义了上述的加法和数乘运算，称为数域 F上的n维向量空间，记作 F^n ($\mathbf{R}^n$为实空间)。

定义3.4 设$\boldsymbol{\alpha}_i \in F^n$，$\lambda_i \in F$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, 则向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m \qquad (1)$$

称为向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合，或 $\boldsymbol{\alpha}$可用$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$线性表示。

(1)式可表示为：$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$。此时， $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}$ 为列向量，

矩阵$A=[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m]$，$\boldsymbol{x}=[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]^T$。

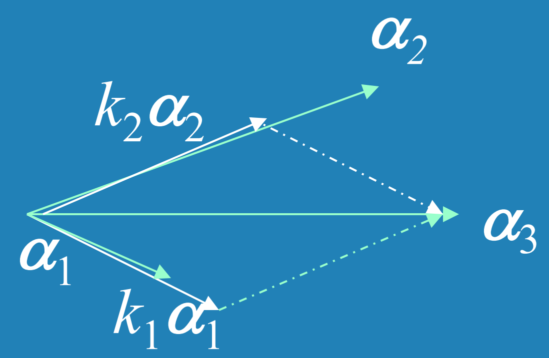
例如，在 $\mathbf{R}^3$中，任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1, a_2, a_3]^T$ 可由基本向量

$\boldsymbol{e}_1=[1, 0, 0]^T$, $\boldsymbol{e}_2=[0, 1, 0]^T$, $\boldsymbol{e}_3=[0, 0, 1]^T$线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$$

在$\mathbf{R}^3$中，如果三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$共面，则至少有一个向量可以由另两个向量线性表示，如图，

$$\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$



即存在不全为 0 的 k_1，k_2，k_3 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$$

如果三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$不共面，则任意一个向量都不能由其余两个向量线性表示，如

$$\alpha_1 = a_1\boldsymbol{e}_1,\quad \alpha_2 = a_2\boldsymbol{e}_2,\quad \alpha_3 = a_3\boldsymbol{e}_3$$

向量与线性空间

行向量是 $1\times n$ 矩阵,记作 $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$；
列向量是 $n\times 1$ 矩阵,记作 $[a_1,a_2,\ldots,a_n]^T$。
全体 n 元实向量组成的集合记作 $\mathbf{R}^n$

线性空间$\mathbf{R}^n$ ： 关于向量的数乘与加法运算封闭

设 $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbf{R}^n$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2,\ldots, m)$, 则向量

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合，或 $\boldsymbol{\alpha}$可用$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$线性表示。

$\boldsymbol{e}_i=[0, \ldots, 0, 1, 0,\ldots,0]^T$是第 i 个分量为 1 $(i=1,2, , \ldots, n)$ 其余分量全为零的向量。

3. 向量的线性相关性

定义3.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathrm{R}^n$ ， 如果存在不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ ，使

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \qquad (*)$$

成立，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，否则，线性无关。

“否则”是指：不线性相关就是线性无关，

“仅当 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 全为零时，才使(*)式成立”。这等价于“如果(*)式成立，则 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 必须全为零”。

定理3.1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示。

证 必要性：设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

不妨设 $\lambda_1 \neq 0$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1 = -\lambda_1^{-1}\lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \lambda_1^{-1}\lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m$

充分性：若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$中的一个向量可由其余向量线性表示，如

$$\alpha_j = \mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{j-1}\alpha_{j-1} + \mu_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + \mu_m\alpha_m$$

则 $$\mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{j-1}\alpha_{-1} - \alpha_j + \mu_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + \mu_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

其中$\mu_1, \ldots, \mu_{j-1}, -1, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_m$不全为零，充分性得证。

定理3.1 的等价命题： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m \geq 2)$线性无关的充要条件是其中任一个向量都不能由其余向量线性表示。

例1 $\mathbf{R}^n$中的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是线性无关的。

其中 $\boldsymbol{e}_i=[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T$是第 i 个分量为 1 ($i=1,2, , \ldots, n$）其余分量全为零的向量。

解：因为，由

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

即 $$[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] = [0, 0, \ldots, 0]$$

必有 $$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

注意：(1) 单个向量 α 线性相关的充分必要条件是：

α 为零向量

因为 $\exists\ \lambda \neq 0$ 使 $\lambda\alpha = \mathbf{0}$ 成立的充要条件是 $\alpha = \mathbf{0}$;

(2) 两个非零向量 α，β 线性相关的充分必要条件是：

α，β 成比例

即存在 $\beta = k\alpha$ 或 $\alpha = l\beta$。

(3) $\mathbf{R}^3$中三个向量 α，β，γ 线性相 关的充分必要条件是

α，β，γ 共面

例2 含零向量的任何向量组$\{\mathbf{0}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$都线性相关。因为

$$1 \cdot 0 + 0\,\alpha_1 + 0\,\alpha_2 + \cdots + 0\,\alpha_n = \mathbf{0}$$

例3 如果向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$中有一部分向量线性相关，则 整个向量组也线性相关。

证： 不妨设$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$线性相关, 于是有不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$，使 $\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$ 成立，

从而有不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots \lambda_k, 0, \dots, 0$ 使

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{\alpha}_k + 0\, \boldsymbol{\alpha}_{k+1} + 0\, \boldsymbol{\alpha}_{k+2} + \cdots + 0\, \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

成立，所以$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$线性相关。

例如， $\boldsymbol{\beta}_1 = [1, -2, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = [-2, 4, -2]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = [1,1,3]^{\mathrm{T}}$。因为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关（成比例），所以， $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例3 的等价命题是： 线性无关向量组的任一子集（任一部分向量）都线性无关。

总之：向量组部分线性相关，则整体线性相关；

整体线性无关，则任一部分都线性无关。

定理3.2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s \in F^n$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]^{\mathrm{T}}$,
$\boldsymbol{\alpha}_2 = [a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}]^{\mathrm{T}}$, $\ldots$, $\boldsymbol{\alpha}_s = [a_{1s}, a_{2s}, \ldots a_{ns}]^{\mathrm{T}}$,

则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是 s 元线性齐次方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有非零解,其中 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s]$, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_s]^{\mathrm{T}}$,

即
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_3 = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s = 0 \end{cases}$$
有非零解。

证：设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0}$

即
$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0, \text{或 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$$

有非零解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关。

此定理的等价命题是： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关的充要条件是 $Ax=0$ 只有零解。

推论. 任意 s 个 n 维向量，当 $s>n$ 时都线性相关。

因为 s 个未知量, n个方程的齐次线性方程组必有非零解，即 $s>n$ 时 $A_{n\times s}x=0$ 必有非零解。故≥n+1个n维向量必线性相关。

定理3.3 若向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$线性无关，而向量组 $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 线性相关，则 β 可由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示，且表示法唯一。

证： 由于向量组$\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$线性相关，所以存在不全为零的数 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 使得

$$\lambda\beta + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_r\alpha_r = 0$$

其中 λ 必不等于零(如果 $\lambda=0$, 则由$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$线性无关又得 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 全为零，与题设矛盾), 于是

$$\beta = -\lambda^{-1}\lambda_1\alpha_1 - \lambda^{-1}\lambda_2\alpha_2 - \dots - \lambda^{-1}\lambda_r\alpha_r$$

则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示。

再证**表示法唯一**。设有两种表示法:

$$\boldsymbol{\beta} = b_1\boldsymbol{\alpha}_1 + b_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + b_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

$$\boldsymbol{\beta} = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + c_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

于是,$(b_1 - c_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (b_2 - c_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + (b_r - c_r)\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$

而$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$线性无关,所以 $b_i = c_i\ (i = 1, 2, \dots, r)$,

故 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 表示是唯一的。

推论 如果$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中线性无关的 n 个向量,则 $\mathbf{R}^n$ 中任一个向量 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,且表示法 唯一。

这是因为 $\mathbf{R}^n$ 中任何 $n+1$个向量都线性相关。故 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性相关,由 **定理3.3,** 向量 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,且表示法 唯一。

例4 (1) a 取何值时，$\beta_1=[1,3,6,2]^T$，$\beta_2=[2,1,2,-1]^T$，$\beta_3=[1,-1,a,-2]^T$ 线性无关？

(2) $a=-2$时，β_3可否由β_1,β_2 线性表示？若可以，求表示式。

解 (1)设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\mathbf{0}$ (*)

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&-1\\6&2&a\\2&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&-10&a-6\\0&-5&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&0&a+2\\0&0&0\end{bmatrix};$$

当 $a\neq-2$ 时，方程组(*)只有零解：$x_1=x_2=x_3=0$，所以 β_1,β_2,β_3 线性无关。

解 (2)设 $\beta_3=x_1\beta_1+x_2\beta_2$ (**)

$$[\beta_1,\beta_2\,\vdots\,\beta_3]=\begin{bmatrix}1&2&\vdots&1\\3&1&\vdots&-1\\6&2&\vdots&-2\\2&-1&\vdots&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&2&\vdots&1\\0&-5&\vdots&-4\\0&0&\vdots&0\\0&0&\vdots&0\end{bmatrix};$$

得 $x_2=4/5$

$x_1=-3/5$

所以，

$$\beta_3=-\frac{3}{5}\beta_1+\frac{4}{5}\beta_2$$

例5 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，问：

$\boldsymbol{\beta}_1 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2$，$\boldsymbol{\beta}_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \alpha_2 + 4\alpha_3$ 是否线性无关？

解 设 $x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}$，则

$$x_1(2\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) + x_2(2\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0},$$

即 $(2x_1 + 2x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-2x_1 - 2x_2 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_2 + 4x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以，它的系数必须全部为0，即

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$，所以，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关。

注：若方程组存在非零解，则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

思考：由定理3.2，若向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ 线性无关，对每一个 α_i 各增加 m 个分量得到的向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$ 也线性无关。其逆否命题是什么？

3.2 向量组的秩及其极大线性无关组

定义3.6 向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$中存在 r 个线性无关的向量：

$$\alpha_{i\_1}, \alpha_{i\_2}, \ldots, \alpha_{i\_r}$$

且任意一个向量均可由它们线性表示，则称向量组的秩为 r，记 作

$$秩\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} = r \quad 或 \quad r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} = r$$

并称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$是一个极大线性无关组。

注意：一个向量组的秩是唯一确定的，但它的极大线性无关组不是唯一的。例如

$$\alpha_1 = [1, 0]; \alpha_2 = [0, 1]; \alpha_3 = [1, 2]; \alpha_4 = [2, -1]$$

$$秩\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 2$$

其中任意两个$\alpha_i, \alpha_j\,(i, j = 1,2,3,4且\ i \neq j)$都线性无关，都是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$的一个极大线性无关组。

定义3.7 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 中每个向量均可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，则称 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示。如果它们可以互相线性表示，则称它们等价，记作

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \sim \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$$

定理3.4 设向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 可由另一向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表示。如果 $s>r$, 则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关。

在 $\mathbf{R}^3$ 中的几何背景是：如果 α_1, α_2 线性无关，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 α_1, α_2 线性表示，则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都位于 α_1, α_2 所确定的平面上，故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关。

证：设 $\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} \boldsymbol{\alpha}_i, \quad j = 1, \cdots, s$

再设 $x_1 \boldsymbol{\beta}_1 + x_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_s \boldsymbol{\beta}_s = \mathbf{0}$

即 $$\sum_{j=1}^{s} x_j \boldsymbol{\beta}_j = \sum_{j=1}^{s} x_j \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} \boldsymbol{\alpha}_i \right) = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} x_j \right) \boldsymbol{\alpha}_i = 0$$

(交换和号顺序)

令 $\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i=0$ 中 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,n)$的系数全为零, 即

$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}x_j=0 \quad （i=1,\cdots,r） \qquad （*）$$

此式是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 的齐次线性方程组，由于 $r<s$（方程个数 < 未知数个数）, 必有非零解，从而有不全为零的

$x_1,x_2,\cdots,x_s$ 使 (*) 式成立，即有不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 使

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=\mathbf{0}$$

故$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$线性相关。

推论1(定理3.4的等价命题，即逆否命题): 在定理3.4的条件下，

若$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性无关, 则 $s\le r$。

推论2 若秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}=r$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$中任意 $r+1$ 个向量都是线性相关的。

因为任意 $r+1$个向量都可经线性无关的 r 个向量线性表示。

若秩$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} = r$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组。

推论3 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，则

$$秩\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\} \le 秩\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$$

证 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ 分别是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组，则

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 可经 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 线性表示。 已知 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，又 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可经其极大线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ 线性表示。因此， $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 可经 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ 线性表示，由推论1得 $r \le p$。

推论4 若向量组$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\} \sim \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$，则

$$秩\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\} = 秩\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$$

推论4的逆命题不成立。例如，

$\alpha_1 = [1, 0, 0]$; $\alpha_2 = [0, 1, 0]$; $\alpha_3 = [0, 0, 1]$

$$秩\{\alpha_1, \alpha_2\} = 秩\{\alpha_1, \alpha_3\} = 2$$

但$\{\alpha_1, \alpha_2\}$和$\{\alpha_1, \alpha_3\}$不是等价向量组。

除掌握秩和极大线性无关组的定义外，还要掌握秩和极大线性无关组的求法，以及向量组中的一个向量如何用极大线性无关组线性表示。