武汉大学数学与统计学院

2020--2021 学年第二学期线性代数 B 期末考试试卷(A 卷) 答案

一、单项选择题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) (D)　　(2) (B)　　(3) (A)　　(4) (B)

二、填空题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) $(-1)^{mn}ab$　　(2) $k_1+k_2=0$　　(3) $c>6$　　(4) $S=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$，$(3,-5,2)^{\mathrm{T}}$.

三、（12 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&2&\cdots&2\\1&2&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&2\\1&2&\cdots&2&0\end{vmatrix}$ 的值，这里 $n\geq 3$.

解 $D_n\xlongequal[i\geq 2]{r_i-2r_1}\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&-2&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&-2\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+\sum\limits_{j\geq 2}\frac{1}{2}c_j}\begin{vmatrix}\frac{n-1}{2}&1&\cdots&1\\&-2&&\\&&\ddots&\\&&&-2\end{vmatrix}=\frac{n-1}{2}(-2)^{n-1}$.

四、（12 分）已知矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 因

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\1&-1&0&2&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\0&-2&1&1&2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\0&0&3&2&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\div 2]{r_3\div 3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2+r_3]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{11}{6}&\frac{1}{2}&1\\0&1&0&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&1&0\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}11&3&6\\-1&-3&0\\4&6&0\end{pmatrix}$.

或解：因 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$（过程略），所以 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}11&3&6\\-1&-3&0\\4&6&0\end{pmatrix}$.

五、（12 分）设非齐次线性方程组 $\begin{cases}-x_1-2x_2+ax_3=1\\ x_1+x_2+2x_3=b\\ 4x_1+5x_2+10x_3=2\end{cases}$ ，试问：当 a,b 满足什么条件时，方程组有（1）唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？在有无穷多解时，求出对应的齐次线性方程组的基础解系以及该非齐次方程组的通解.

解 系数矩阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|=a+4$，故

(1) 当 $a\neq -4$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，方程组有唯一解；

(2) 当 $a=-4$ 时，对增广矩阵作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-2&-4&1\\1&1&2&b\\4&5&10&2\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-2&-4&1\\0&-1&-2&b+1\\0&0&0&3-3b\end{array}\right),$$

当 $b\neq 1$ 时，则 $R(\boldsymbol{A})=2<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；

(3) 当 $a=-4,b=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$，此时方程组有无穷多解，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&3\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

非齐次线性方程组的一个特解为 $\eta^*=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\xi=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$. 非齐次方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，$c$ 为任意实数.

六、（12 分）已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\beta_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\beta_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，求 a,b 的值.

解 显然 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\geq 2$，因 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$，故 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，得 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，有 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=0$，即 $\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a=0$。

又因 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，得 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \beta_3)$，因

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&\frac{5-b}{3}\end{array}\right),$$

得 $b=5$，$a=15$。

七、（12 分）设齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+ax_2+x_3=0,\\(a+2)x_1-2x_2+2x_3=0,\\4x_1+(a-1)x_2+2x_3=0\end{cases}$$

有非零解，且3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为$-4, 2, 2$，对应的特征向量分别有

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2a\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}a-1\\a+2\\a+1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}a+2\\a+1\\1\end{pmatrix}.$$

试确定参数a，并求矩阵$\boldsymbol{A}$.

解　3×3齐次线性方程组有非零解，则系数行列式为0，即

$$\begin{vmatrix}2 & a & 1\\ a+2 & -2 & 2\\ 4 & a-1 & 2\end{vmatrix}=-(a-2)(a+1)=0,$$

得$a=2$或-1.

若$a=2$，则$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$，与$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$是$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征向量矛盾！故$a=-1$. 当$a=-1$时，

$$\boldsymbol{x}_1=(1,-2,3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

显然$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$线性无关，从而$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$线性无关.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，可求得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix}$，且

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(-4,2,2)$，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(-4,2,2)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}.$$

八、证明（16分，每小题8分）：

(1) 设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，试证：若3维非零向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$满足$\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1$，$\boldsymbol{A}^2\alpha_3=\alpha_1$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(2) 假设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶实对称矩阵，并且$\boldsymbol{A}$的特征值均大于$a$，$\boldsymbol{B}$的特征值均大于$b$，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的特征值均大于$a+b$.

证　(1) 设有数k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

等式两边左乘$\boldsymbol{A}$，由$\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1$，有

$$k_2\boldsymbol{A}\alpha_2+k_3\boldsymbol{A}\alpha_3=k_2\alpha_1+k_3\boldsymbol{A}\alpha_3=\boldsymbol{0}\tag{2}$$

等式两端再左乘$\boldsymbol{A}$，得

$$k_2\boldsymbol{A}\alpha_1+k_3\boldsymbol{A}^2\alpha_3=k_3\alpha_1=\boldsymbol{0}\tag{3}$$

所以$k_3=0$. 由(2)得$k_2=0$. 再由(1)知$k_1=0$. 所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(2) 依题设条件有，实对称矩阵$\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$的特征值全为正，故$\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$均正定，因此$(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$也正定，故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的特征值全大于$\mathrm{a}+\mathrm{b}$.