第 10 章　静电场 习题解答

10.1——10.18 思考题答案略

10.19　在某一时刻，（铀）U^{238} 发生放射性衰变而逸出 α 粒子，变成新核（钍）Th^{234}，α 粒子中心到新核 Th^{234} 中心的距离为 9.0×10^{-15} m。试问：

（1）作用在 α 粒子上的力为多大？

（2）α 粒子的加速度为多大？

10.19 解：（1）α 粒子的电荷为 $2e$，新核（钍）Th^{234} 的电荷为 $90e$，它们的中心相距为 9.0×10^{-15} m 时，作用在 α 粒子上的力为

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e\cdot 90e}{r^2}=9\times10^9\times\frac{2\times90\times(1.6\times10^{-19})^2}{(9.0\times10^{-15})^2}=512\ \text{N}$$

（2）α 粒子的质量为 6.68×10^{-27} kg，则 α 粒子的加速度为

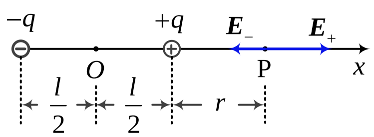
$$a=\frac{F}{m_\alpha}=\frac{512}{6.68\times10^{-27}}=7.66\times10^{28}\,(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

10.20　电偶极子由相距为 l 的两个点电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成，试求两电荷延长线上任一点的电场强度。

10.20 解：如图所示，取电偶极子轴线的中点为坐标原点 O，轴的沿长线为 Ox 轴，轴上任意一点 P 距原点 O 为 x，点电荷 $+q$、$-q$ 分别在 P 点处产生的场强 $\boldsymbol{E}_+$、$\boldsymbol{E}_-$ 为

$$\boldsymbol{E}_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(x-l/2\right)^2}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{E}_-=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(x+l/2\right)^2}\boldsymbol{i}$$



习题10.20解图

因此点 P 的总场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_++\boldsymbol{E}_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(x-l/2\right)^2}-\frac{q}{\left(x+l/2\right)^2}\right]\boldsymbol{i}$$

$$=\frac{2qxl}{4\pi\varepsilon_0x^4\left(1-\dfrac{l}{2x}\right)^2\left(1+\dfrac{l}{2x}\right)^2}\boldsymbol{i}=\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0x^3\left(1-\dfrac{l^2}{4x^2}\right)^2}\boldsymbol{i}$$

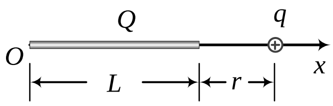
当 $x >> l$ 时，上式分母中 $\dfrac{l^2}{4x^2} << 1$，所以

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{x^3}\boldsymbol{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\boldsymbol{p}}{x^3}$$

式中 $\boldsymbol{p} = ql\boldsymbol{i}$ 称为电偶极矩。

不难看出，如果场点 P 在 $-q$ 的左侧，则场强大小的表达式不变，但方向相反。

10.21　正电荷 Q 均匀分布在长度为 L 的细棒上，将正点电荷 q 放在细棒延长线上距离细棒一端为 r 处，取细棒另一端为坐标原点 O，如图所示。



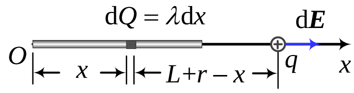
题10.21图

（1）求均匀带电细棒在点电荷 q 处产生的电场强度和点电荷 q 所受的电场力。

（2）如果点电荷 q 距离细棒很远（$r >> L$），则该点的场强和点电荷所受电场力取何种形式？

10.21 **解：**（1）在细棒上距离 O 为 x 处取一个长为 $\mathrm{d}x$ 的电荷元，如图所示，其所带电量为：$\mathrm{d}Q = \dfrac{Q}{L}\mathrm{d}x$，则此电荷元在点电荷 q 处产生的电场强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{(L+r-x)^2}\boldsymbol{i}$$



习题10.21解图

由场强叠加原理可知，q 处的总电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{L(L+r-x)^2}\,\boldsymbol{i} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{L+r}\right)\boldsymbol{i}$$

所以点电荷受到的电场力为

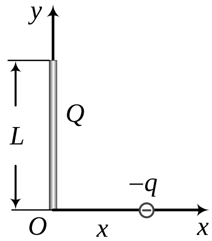
$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{L+r}\right)\boldsymbol{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r(L+r)}\boldsymbol{i}$$

（2）如果 $r >> L$，则

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r(L+r)}\,\boldsymbol{i} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \approx \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{i}$$

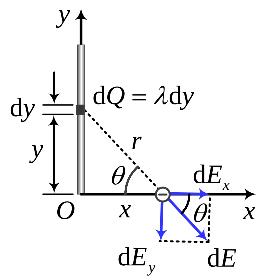
10.22　正电荷 Q 均匀分布在长度为 L 的细棒上，并取坐标系如图所示，在 x 轴上任一点放置点电荷 $-q$，试求点电荷所在位置的电场强度和该点电荷所受的电场力。



题10.22图

10.22 解：根据已建立坐标系，在细棒上距离 O 为 y 处取一个长为 $\mathrm{d}y$ 的电荷元，如图所示，其电量为：$\mathrm{d}Q=\dfrac{Q}{L}\mathrm{d}y$。由点电荷的场强公式，该电荷元在 $-q$ 处产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$



习题10.22解图

它在 x、y 轴上的分量为

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\sin\theta=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

对上述两个分量分别积分，得

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int_0^L\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=-\int_0^L\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)$$

所以该点的总电场强度为

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}}\boldsymbol{i}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)\boldsymbol{j}$$

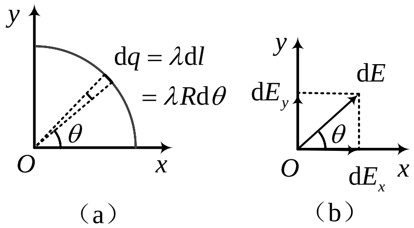
点电荷 $-q$ 受到的电场力为

$$\boldsymbol{F}=-q\boldsymbol{E}=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 x}\frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}}\boldsymbol{i}+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)\boldsymbol{j}$$

10.23　负电荷 $-Q$ 均匀分布在一个半径为 R 的 1/4 圆弧上，试求圆心处的电场强度。

10.23 解：建立坐标系如图中（a）所示，在圆弧上任取一个弧长为$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$的电荷元，其电量为

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = -\frac{Q}{\pi R/2} R\mathrm{d}\theta = -\frac{2Q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$



习题10.23解图

由点电荷的场强公式，该电荷元在圆心O点处产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\mathrm{d}q|}{R^2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta$$

因为$\mathrm{d}q < 0$，所以其方向如图（b）所示，它在x、y轴上的分量分别为

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{Q\cos\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\theta = \frac{Q\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

对上两式分别积分，可得

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int_0^{\pi/2}\frac{Q\cos\theta}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int_0^{\pi/2}\frac{Q\sin\theta}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

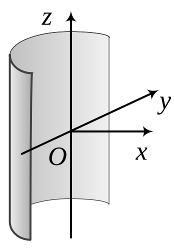
所以圆心O点的场强为

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$

其大小为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

10.24　真空中有半径为R的无限长半圆柱面均匀带正电，电荷面密度为σ，如图所示。试求：半圆柱中部轴线上O点的电场强度。



题10.24图

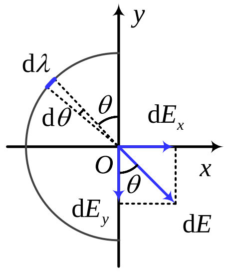
10.24 **解**：无限长均匀带电半圆柱面可看成是由沿轴线分布的许多无限长带电“细”直线组成的。任取一条宽为$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$的均匀带电“细”

直线，如图所示（图中画出的是俯视图，图中半圆表示了无限长均匀带电的半圆柱面）。则该带电“细直线”单位长度上所带电量为

$$\mathrm{d}\lambda=\sigma\mathrm{d}l=\sigma R\mathrm{d}\theta$$

由“无限长”均匀带电的场强分布公式可知，它在轴线上 O 点产生的场强大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\theta$$



习题24解图

$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的方向如图所示，它在 x、y 轴上的分量分别为

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\sin\theta=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\cos\theta=-\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

由对称性分析可知，y 方向的场强分量相互抵消，x 方向的分量为

$$E_x=\int_0^{\pi}\mathrm{d}E\sin\theta=\int_0^{\pi}\frac{\sigma\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

所以轴线上 O 点的场强为

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{i}$$

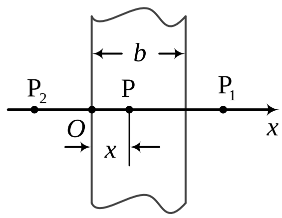
上式表明场强的方向沿 x 轴的正向。

10.25　如图所示，厚度为 b 的“无限大”带电平板，其电荷体密度为 $\rho=kx$ （$0\le x\le b$），式中 k 为一正的常量。试求：

（1）平板外任意点 P_1 和 P_2 处的电场强度；

（2）平板内任一点 P 处电场强度；

（3） x 轴上场强为零的点在何处？



题10.25图

10.25 解：此带电平板可看成是由许多“无限大”均匀带电“薄板”组成的集合。在距离 O 点为 x 处取一个厚度为 $\mathrm{d}x$ 的无限大“薄板”，则此“薄板”上的电荷面密度为

$$\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}x=kx\mathrm{d}x$$

该带电“薄板”产生的场强方向垂直于“薄板”向外，大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{kx}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x$$

（1）由对称性分析可知，平板外两侧场强大小处处相等，方向垂直于平板且背离平板，所以由场强叠加原理，可得 P_1 和 P_2 处的场强大小为

$$E_{p1}=E_{p2}=\int_0^b \frac{kx}{2\varepsilon_0}dx=\frac{k}{4\varepsilon_0}b^2$$

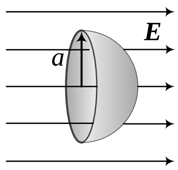
（2）同理，对于平板内的任意点 P 处的场强大小为

$$E_P=\int_0^x \frac{kx}{2\varepsilon_0}dx-\int_x^b \frac{kx}{2\varepsilon_0}dx=\frac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2-\frac{b^2}{2}\right) \qquad 0\le x\le b$$

（3）由上述讨论可知，$\boldsymbol{E}=0$ 的点只可能在板内，令 $E_p=0$，有：$x^2=\dfrac{b^2}{2}$

即场强为零的点在 $x=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$ 处。

10.26　电场强度为 $\boldsymbol{E}$ 的均匀电场与半径为 a 的半球面的轴线平行，如图所示。试计算通过此半球面的电通量。



题10.26图

10. 26 解：由于通过半球面的电场线全部通过半径为 a 的圆平面，即通过半球面和圆平面的电通量相等，即

$$\Phi_e=\iint_{\text{半球面}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{\text{平面}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\pi a^2 E$$

10.27　在半径分别为 R_1 和 R_2（设 $R_1<R_2$）的两个同心球面上，分别均匀带电 Q_1 和 Q_2，求空间的场强分布，并作出 $E\sim r$ 关系曲线。

10.27 解：由题意可知，电荷及其产生的场强分布均具有球对称性，为此取一个半径为 r 的同心球面为高斯面。由对称性可知，该高斯面上各点的场强大小处处相等，方向沿径向。根据高斯定理

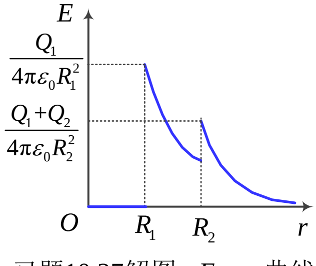
$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\oiint_S EdS\cos 0^{\circ}=E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

即：

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum q$$

当 $0<r<R_1$ 时，高斯面内无电荷，$\sum q=0$，故

$$E_1=0$$



习题10.27解图：$E\sim r$ 曲线

当$R_1 < r < R_2$时，$\sum q = Q_1$，故 ：$E_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

当$r > R_2$时，$\sum q = Q_1 + Q_2$，故：$E_3 = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

电场强度随场点位置r的变化曲线如图所示。

10.28　有一半径为R的带电球体，电荷体密度随半径变化规律为：$\rho = kr$，其中k为正的常数，试求此带电球体产生的电场强度分布。

10. 28 **解：**由于带电球体的电荷密度只与r有关，故电荷及其产生的场强分布均具有球对称性。为此可作一个半径为r的同心球面作为高斯面，由高斯定理可得

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

即高斯面上任意一点的场强大小为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum q \qquad (1)$$

为求高斯面内的电量$\sum q$，可将带电球体看成是由许多均匀带电的“薄球壳”组成的集合。先考虑一个半径为r，厚度为$\mathrm{d}r$的“薄球壳”，该“薄球壳”内所带的电荷量为

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V = kr \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 4\pi k r^3 \mathrm{d}r$$

对于球面外的场点，高斯面半径$r > R$，所以高斯面内的电荷量就是整个带电球体的电量，即

$$\sum q = \int \mathrm{d}q = \int_0^R 4\pi k r^3 \mathrm{d}r = k\pi R^4$$

代入（1）式，可得球面外任意一点的场强大小为

$$E = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > R)$$

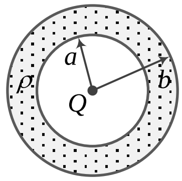
对于球体内的场点，$r < R$，高斯面内的电量为

$$\sum q = \int \mathrm{d}q = \int_0^r 4\pi k r^3 \mathrm{d}r = k\pi r^4$$

代入（1），可得球面内任意一点的场强大小为

$$E = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0} \qquad (r < R)$$

10.29　如图所示，有一带电球壳，内、外半径分别为a和b，电荷体密度$\rho = A/r$，另外在球心处还有一点电荷Q。试证明当$A = \dfrac{Q}{2\pi a^2}$时，球壳区域内的电场强度$\boldsymbol{E}$的大小与半径r无关。



题10.29图

10.29 解：由题意可知，电荷分布具有球对称性，故可断定场强分布也具有球对称性。为此作一个半径为r的同心球面为高斯面，由高斯定理可得

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

显然，当$a < r < b$时，式中

$$\sum q = Q + \int_a^r \frac{A}{r} \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = Q + 2\pi A(r^2 - a^2)$$

所以球壳区域内任意一点的场强为

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$

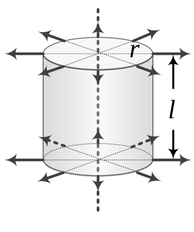
由上式可知，当$A = \dfrac{Q}{2\pi a^2}$时，球壳区域内$E = \dfrac{A}{2\varepsilon_0}$，与$r$无关。

10.30 设气体放电形成的等离子体在圆柱体内的体电荷分布可用下式表示

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left[1 + (r/a)^2\right]^2}$$

式中r为到中心轴线的距离，ρ_0为轴线上的电荷体密度，a为常数（它是ρ减小到$\rho_0/4$时到轴线的距离）。试计算其场强分布。

10.30 **解：**由于圆柱体内的电荷分布只与r有关，故可推知电荷及其产生的场强分布均具有“无限长”的轴对称性。为此取一个与等离子圆柱体同轴、半径为r、长为l，且底面垂直于轴线的闭合圆柱面为高斯面，如图所示。则圆柱面侧面上各点场强大小相等，方向沿径向向外，由高斯定理可得



习题10.30解图

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{侧面} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{上底面} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{下底面} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_{侧面} E\mathrm{d}S = ES_{侧面} = E2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

所以

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 rl}\sum q \qquad (1)$$

式中$\sum q$为高斯面内的总电荷。为求$\sum q$，可将该高斯面所围的圆柱体看成是由许多半径为r、厚度为$\mathrm{d}r$、长为l的薄圆筒组成的集合，该薄圆筒内所带的电量为

$$\mathrm{d}q = \rho(r)\mathrm{d}V = \rho(r)2\pi rl\mathrm{d}r$$

所以高斯面内所带的总电量为

$$\sum q = \int \mathrm{d}q = \int_0^r \rho(r)2\pi rl\mathrm{d}r = \int_0^r \frac{\rho_0}{\left[1+\left(r/a\right)^2\right]^2}2\pi rl\mathrm{d}r = \frac{\pi\rho_0 la^2r^2}{a^2+r^2}$$

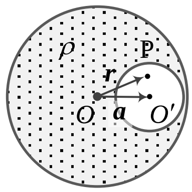
将此代入（1）式，可得场强分布为

$$E = \frac{1}{2\pi rl\varepsilon_0}\frac{\pi\rho_0 la^2r^2}{a^2+r^2} = \frac{\rho_0 a^2 r}{2\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

10.31 一个均匀带电球体，其电荷体密度为ρ（$\rho>0$），若以$\boldsymbol{r}$代表从球心O指向球内一点的位矢。

(1) 试证明：$\boldsymbol{r}$处的电场强度为$\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$；

(2) 若在这球内挖去一部份电荷，形成一个球形空腔，如图所示。试证明：这空腔内各点的电场是均匀的，其场强为$\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$，式中$\boldsymbol{a}$表示由球心$O$指向空腔中心$O'$的矢量。



题10.31图

10.31 证明：（1）均匀带电球体内的电荷分布及其产生的场强分布具有球对称性。为此作一个半径为r的同心球面为高斯面，则由高斯定理

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0}r^3$$

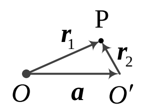
所以高斯面上各点场强的大小为：$E=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r$，又因场强的方向沿径向向外，所以

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$$

（2）从产生电场的效果来看，在均匀带电球体内部挖出一个球形空腔后产生的电场分布，等效于一个电荷密度为ρ的均匀带电大球体和一个在空腔处电荷密度为$-\rho$均匀带电小球体产生的两个场强的叠加（矢量和）。

设两个球心O和O'到空腔内任意点 P 的矢径分别为$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$，如图所示，则由（1）可知：电荷密度为ρ的大球体单独在 P 点产生的场强为

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_1$$



习题10.31解图

电荷密度为$-\rho$的小球单独在 P 点产生的场强为

$$\boldsymbol{E}_2=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_2$$

所以 P 点的总场强为

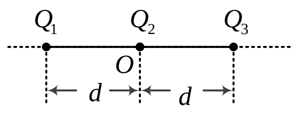
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$$

又由于：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$，因此

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$$

此式表明空腔里的场强是均匀的。

10.32 如图所示，有三个点电荷Q_1、Q_2、Q_3沿一条直线等间距分布，已知其中任一点电荷所受合力均为零，且$Q_1=Q_3=Q$。试求在固定Q_1、Q_3的情况下，将Q_2从O点移到无限远处时外力所做的功。



题10.32图

10.32 解：由题意可知，Q_1所受的合力为零，即

$$Q_1\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}+Q_1\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}=0$$

由此解得

$$Q_2 = -\frac{1}{4}Q_3 = -\frac{1}{4}Q$$

由点电荷的电势分布及电势叠加原理，可得电荷 Q_1、Q_3 在 O 点产生的电势为

$$V_O = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

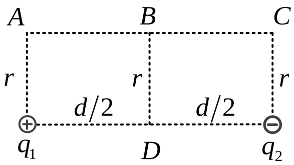
所以将 Q_2 从点 O 移到无限远处时外力（克服电场力）所做的功为

$$A_{外力} = -Q_2(V_O - V_\infty) = -Q_2 V_O = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

10.33 如图所示，已知 $r = 6\text{cm}$，$d = 8\text{cm}$，$q_1 = 3\times10^{-8}\text{C}$，$q_2 = -3\times10^{-8}\text{C}$。试求：

(1) 将电荷量为 $2\times10^{-9}\text{C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点时，电场力做的功；

(2) 将此点电荷从 C 点移到 D 点时，电场力做的功。



题10.33图

10.33 解：由点电荷的电势公式和电势叠加原理，可得 q_1、q_2 在 A、B、C、D 四个点产生的电势分别为

$$V_A = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2}} = 1.8\times10^3\ \text{V}$$

$$V_B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+(d/2)^2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+(d/2)^2}} = 0$$

$$V_C = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -1.8\times10^3\ \text{V}$$

$$V_D = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(d/2)} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0(d/2)} = 0$$

（1）将点电荷 q_0 由 A 点移到 B 点时，电场力做功为

$$A_{AB} = q_0(V_A - V_B) = q_0 V_A = 3.6\times10^{-6}\ \text{J}$$

（2）将点电荷 q_0 由 C 点移到 D 点时，电场力做功为

$$A_{CD} = q_0(V_C - V_D) = q_0 V_C = -3.6\times10^{-6}\ \text{J}$$

10.34　真空中有一半径为R的半圆细环，均匀带电Q。设无限远处为电势零点，则圆心O处的电势为多少？若将一带电量为q的点电荷从无限远处移到圆心O点，试求电场力做的功。

10.34 解: 在半圆环上任取一个电荷元$\mathrm{d}q$，它在圆心O处产生的电势为

$$\mathrm{d}V_O=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以圆心O处的总电势为

$$V_O=\int_0^Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^Q\mathrm{d}q=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

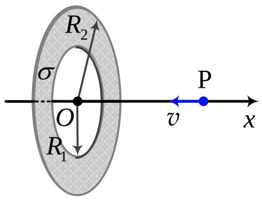
将一带电量为q的点电荷从无限远处移到圆心O点时，电场力做功为

$$A=q(V_\infty-V_O)=-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

10.35　如图所示，有一个内外半径分别为R_1和R_2的均匀带电圆环，电荷面密度为σ（$\sigma>0$）。

（1）计算通过环心垂直于环面的轴线上任意一点 P 的电势；

（2）若有一质子沿轴线从无限远处射向带正电的圆环，要使质子能穿过圆环，它的初速度至少是多少？

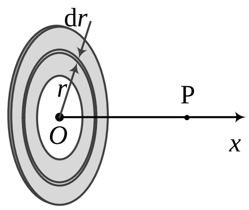


题10.35图

10.35 解:（1）在带电圆环上任取一个半径为r、宽度为$\mathrm{d}r$的细圆环，其所带电量为

$$\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}S=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

它在轴线上任意一点 P 处产生的电势为



习题10.35解图

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{1/2}}=\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{1/2}}$$

由电势叠加原理， P 点的总电势为

$$V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+x^2}-\sqrt{R_1^2+x^2}\right]$$

（2）由上述结果可知，在带电圆环圆心O处的电势为

$$V_O=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2-R_1\right)$$

为使质子能够穿过圆环中心，其在圆环中心处的动能 E_k 必大于零。根据能量守恒定律，质子在轴上无限远处的初速度 v_0 应满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + eV_\infty = E_k + eV_O \geq eV_O$$

所以有

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2eV_O}{m}} = \sqrt{\frac{e\sigma}{\varepsilon_0 m}(R_2 - R_1)}$$

上式表明质子欲穿过环心，其速率不能小于 $\sqrt{\frac{e\sigma}{\varepsilon_0 m}(R_2 - R_1)}$ 。

10.36　两个同心均匀带电球面的半径分别为 R_1 和 R_2（设 $R_1 < R_2$ ），所带电量分别为 Q_1 和 Q_2 。试求：

（1）空间各区域的电势分布，并画出 $V \sim r$ 曲线；

（2）两球面的电势差。

10.36 解:（1）由高斯定理可求得电场强度的分布为

$$E_1 = 0 \qquad\qquad r < R_1$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad R_1 < r < R_2$$

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r > R_2$$

场强的方向均沿径向。由电势的定义式可得，当 $r < R_1$ 时

$$V_1 = \int_r^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_r^{R_1} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{R_2}^\infty \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= 0 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + \int_{R_2}^\infty \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时

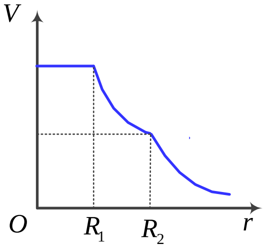
$$V_2 = \int_r^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_r^{R_2} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{R_2}^\infty \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\int_r^{R_2}\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

当 $r>R_2$ 时

$$V_3=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_2}^{\infty_1}\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



习题10.36解图：$V\sim r$ 曲线

由此可画出电势分布曲线如图所示。

（2）两球面之间的电势差为

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

10.37　一半径为 R 的无限长均匀带电圆柱体，其电荷体密度为 ρ 。现取圆柱体表面电势为零。试求：圆柱体内外的电势分布并画出电势分布曲线。

10.37 解：无限长均匀带电圆柱体的场强分布具有轴对称性。取高为 l 、半径为 r 且与带电圆柱体同轴、底面与轴线垂直的闭合圆柱面为高斯面，由高斯定理可得

$$\oiint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\text{侧面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E2\pi rl=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

所以

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 rl}\sum q$$

当 $r<R$ 时， $\sum q=\rho V=\rho\pi r^2 l$ ，所以

$$E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

当 $r>R$ 时， $\sum q=\rho\pi R^2 l$ ，所以

$$E(r)=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

若取棒表面，即 $r=R$ 处为零电势参考点，则由电势的定义式，可得电势分布为

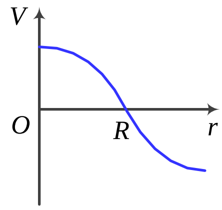
当 $r<R$ 时

$$V=\int_r^R \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r=\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left(R^2-r^2\right)>0$$

当 $r>R$ 时

$$V=\int_r^R \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^R \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}<0$$

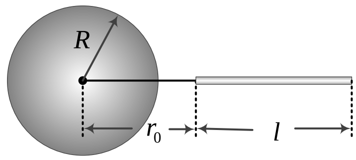
电势 V 随空间位置 r 的分布曲线如图所示。



习题10.37解图：$V\sim r$ 曲线

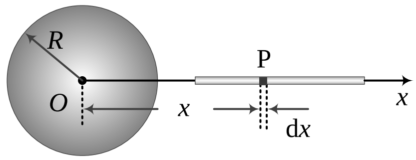
显然本题中不能取无限远处为零电势点，因为这将导致各点电势趋于无限大。

10.38　如图所示，半径为 R 的均匀带电球面，带电量为 Q，沿半径方向有一均匀带电细线，线电荷密度为 λ，长度为 l，细线近端离球心距离为 r_0，设球面和细线上的电荷分布不相互影响。试求细线所受球面电荷的电场力和带电细线在该电场中的电势能（设无限远处的电势为零）。



题10.38图

10.38 解： 设 x 轴沿细线方向，原点在球心处。由高斯定理可得，均匀带电球面在带电细线上点 P 处产生的场强为



习题10.38解图

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\boldsymbol{i}$$

在该处的带电细线上取一电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，它受电场力的大小为

$$\mathrm{d}F=E\cdot\mathrm{d}q=\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\mathrm{d}x$$

由于每个电荷元所受的电场力方向均沿 x 轴方向，故均匀带电细线所受电场力的合力为

$$F=\int\mathrm{d}F=\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r_0+l}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{Q\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 r_0(r_0+l)}$$

方向沿 x 轴正方向。

若以无限远处为电势零点，则均匀带电球面在细线上点 P 处产生的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

所以该处的电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$ 具有的电势能为

$$\mathrm{d}W = V\mathrm{d}q = \frac{Q\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

故带电细线在该电场中的总电势能为

$$W = \int \mathrm{d}W = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r_0+l}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0+l}{r_0}\right)$$

10.39 两个同心的带电球面、半径分别为 $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$， $R_2 = 40\,\mathrm{cm}$， 其电势分别为 $V_1 = 40\mathrm{V}$， $V_2 = -20\mathrm{V}$ 。试求：电势为零的球面半径 R_0 以及该球面上的电场强度。

10.39 解：由电势分布的连续性可知，电势为零的球面一定在两个同心的带电球面之间，设其半径为 $R_0\left(R_1 < R_0 < R_2\right)$。同时假设设半径为 R_1 的球面上带有 Q 的电荷，则由高斯定理可知，在 $R_1 < r < R_2$ 区域中的电场强度大小为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad ①$$

方向沿径向。由此可得半径为 R_1 球面的电势为

$$V_1 = \int_{R_1}^{R_0}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{R_1}^{R_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_0}\right) = 40\mathrm{V} \qquad ②$$

半径为 R_2 球面的电势为

$$V_2 = \int_{R_2}^{R_0}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{R_2}^{R_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_0}\right) = -20\mathrm{V} \qquad ③$$

联立②③式，求解可得电势为零的球面半径为

$$R_0 = 20\,\mathrm{cm}$$

同时还可求得 $Q = 32\pi\varepsilon_0$ ，将此代入①式，可得电势为零的球面上电场强度的大小为

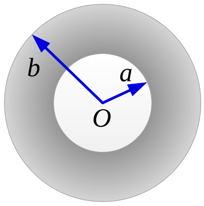
$$E\Big|_{r=R_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_0^2} = 200\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

方向沿径向相外。

10.40 如题 10.40 图所示，一带电球壳的内外半径分别为 a 和 b，壳体中的电荷密度按 $\rho = \rho_0 r$ 的规律进行分布，式中 ρ_0 为大于 0 的常量，r 是球壳内部任一点到球心的距离。试求

（1）带电壳体内外的场强分布；

（2）球壳内外表面之间的电势差。



题 10.40 图

10.40 解：（1）由对称性分析可知，本题中场强分布具有球对称性，场强方向沿径向向外。为此，作一个半径 r 的同心球面为高斯面 S，由高斯定理：$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum Q$，得

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum Q$$

式中的 $\sum Q$ 是高斯面 S 所包围的电量的代数和。

当 $r<a$ 时，即在球壳的空腔内，$\sum Q=0$ ，所以：$E=0$

当 $a<r<b$，即在球壳内部，$\sum Q=\int \rho \mathrm{d}V=\int_a^r \rho_0 r\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r=\pi\rho_0\left(r^4-a^4\right)$

所以
$$E=\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{r^4-a^4}{r^2}$$

当 $r>b$ 时，即在球壳外部，$\sum Q=\int \rho \mathrm{d}V=\int_a^b \rho_0 r\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r=\pi\rho_0\left(b^4-a^4\right)$

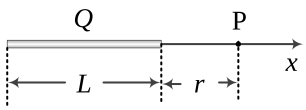
所以
$$E=\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{b^4-a^4}{r^2}$$

（2）球壳内外表面的电势差为

$$U_{ab}=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^b \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{r^4-a^4}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)+a^4\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]=\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{4}{3}a^3+\frac{a^4}{b}\right)$$

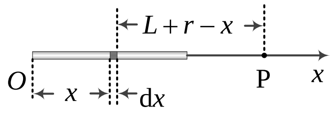
10.41　正电荷 Q 均匀分布在长度为 L 的细棒上，如题 10.41 图所示，点 P 是细棒延长线上的任意一点，到细棒一端的距离为 r，试求该点的电势，并利用场强与电势的微分关系求 P 点的电场强度。



题10.41图

10.41 解:以细棒的左端点为坐标原点 O，建立 Ox 坐标轴，在细棒上距离 O 点为 x 处，取一个长为 $\mathrm{d}x$ 的电荷元：$\mathrm{d}q=\dfrac{Q}{L}\mathrm{d}x$。若以无限远处为零电势点，则 $\mathrm{d}q$ 在 P 点产生的电势为

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r+L-x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\mathrm{d}x}{L(r+L-x)}$$



习题10.41解图

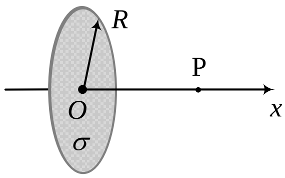
由电势叠加原理，可得 P 点的总电势为

$$V = \int_0^L \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}x}{L(r+L-x)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{r+L}{r}$$

由对称性分析可知，P 点的场强沿 x 轴方向，所以由电势与场强的微分关系，可得 P 点的场强为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{i} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{L+r}\right)\boldsymbol{i}$$

10.42　如题 10.42 图所示，有一半径为 R，电荷面密度为 σ（$\sigma>0$）的均匀带电圆盘。



习题10.42图

（1）求圆盘轴线上的电势分布；

（2）根据电势与场强的微分关系，求圆盘轴线上的场强分布；

（3）当 $R=3.00\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 、$\sigma=2.00\times10^{-5}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$ 时，求轴线上离盘心为 30.0 cm 处的电势和电场强度的大小。

10.42 解:（1）在圆盘上距离盘心为 r 处，取一个面积为 $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 的电荷元，其所带电荷量为 $\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，它在轴线上 P 点处产生的电势为

$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

由电势叠加原理，可得整个均匀带电圆盘在轴线上的电势分布为

$$V=\int \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

（2）由对称性分析可知，P 点的场强沿 x 轴方向，根据电势与场强的微分关系可得 P 点场强为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{i} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

（3）将 $R=3.00\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 、$\sigma=2.00\times10^{-5}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$ 上述结论，可得轴线上离盘心为 30.0cm 处的电势和电场强度的大小分别为

$$V = 1.69\times10^3\ \mathrm{V} \qquad \boldsymbol{E} = 5.61\times10^3\boldsymbol{i}\ \ \mathrm{V/m}$$