武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
线性代数 B 参考答案（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$,这里 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots n.$

解：$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第2行}-\text{第1行}\\ \text{第3行}-\text{第1行}\\ \cdots\cdots\\ \text{第n行}-\text{第1行}}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{\text{第1列}+\text{第i列}\times\frac{a_1}{a_i}\\ (i=2,3,\cdots,n)}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$=(1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n})a_2\cdots a_n$$

$$=(a_1+\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n})a_2\cdots a_n$$

$$=(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})a_1a_2\cdots a_n$$

二、（10 分）**设** $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$**，计算** $\boldsymbol{A^{2022}}$

解：记 $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \alpha^T\alpha=3$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}=-\alpha\alpha^T$$

$$A^{2022}=\left(-\alpha\alpha^T\right)^{2022}=\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)^{2021}\alpha^T=-3^{2021}A$$

三、（12 分）

已知$\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$， $\beta=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，$\alpha^T\beta=6, B=\alpha\beta^T$，$A=I-B$

证明：（1）$B^k=6^{k-1}B$ (2)$A+5I$或$A-I$不可逆 (3)A及$A+4I$都可逆

证明：（1）$B^k=\left(\alpha\beta^T\right)^k=\alpha\left(\beta^T\alpha\right)^{k-1}\beta^T=6^{k-1}B$

(2)$A^2=\left(I-B\right)^2=I-2B+B^2=I-2B+6B=I+4B$

$\left(A+5I\right)\left(A-I\right)=A^2+4A-5I=I+4B+4I-4B-5I=0$

所以$|A+5I|$=0或$|A-I|=0$,从而$A+5I$或$A-I$不可逆。

(3)$A(A+4I)=A^2+4A=5I$

所以$|A+4I|\neq 0, |A|\neq 0$

即A及$A+4I$都可逆。

四、（10 分）求X,使得$AX=B$，其中$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$.

解：若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

$$(A\ \ B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}，所以X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

五、（10 分）设A为n阶方阵（$n\geq 2$), A^*是A的伴随矩阵，证明

$$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n,\\1, & R(A)=n-1,\\0, & R(A)\leq n-2.\end{cases}$$

证明：当$R(A)=n, |A|\neq 0, AA^*=|A|E\Rightarrow|A^*|\neq 0\Rightarrow R(A^*)=n$

当$R(A)=n-1$, A至少有一个$n-1$阶子式不为0，从而$A^*\neq 0$，有$R(A^*)\geq 1$.

另一方面由于$A^*A=|A|E$=0，得到$R(A^*)+R(A)\leq n$,所以$R(A^*)=1$.

当$R(A)\leq n-2$, A所有$n-1$阶子式都为0，从而A^*=0，有$R(A^*)$=0.

六、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda+2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \end{cases},$$

问 λ 取何值时，此方程组有惟一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

解：经计算系数行列式得 $|A| = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$，于是由克莱姆法则有如下结论：

(1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时， $R(A) = R(B) = 3$，方程组有唯一解；

(2) 当 $\lambda = 1$ 时， $R(A) = 1$， $R(B) = 2$，该情形方程组无解；

(3) 当 $\lambda = -2$ 时，$R(A) = R(B) = 2$,，此时方程组有无限多个解。而

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}，即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}，(c \in R).$$

七、（15 分）

计算向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix},\ \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

的秩，并求出该向量组的一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$

极大线性无关组α_1,α_2.

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$， $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$

八、（8 分）

设$A\left(A\neq 0\right)$是n阶实对称矩阵，证明必存在正实数k,使得对任意实向量α ，都有$\left|\alpha^T A\alpha\right|\le k\alpha^T\alpha$.

证明：因为A是n阶实对称矩阵，必存在正交矩阵P，使得$P^TAP=\Lambda$,

其中Λ是以A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵, $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

对任意实向量α ，令$y=P^T\alpha$, 则$\alpha=Py$

$$y^Ty=\left(P^T\alpha\right)^TP^T\alpha=\alpha^TPP^T\alpha=\alpha^T\alpha.$$

取$k=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots|\lambda_n|\}$

都有$\left|\alpha^TA\alpha\right|=\left|(Py)^T APy\right|=\left|y^TP^TAPy\right|=\left|y^T\Lambda y\right|=\left|\sum_{i=1}^n\lambda_i {y_i}^2\right|\le ky^Ty=k\alpha^T\alpha.$

九、（15 分）**已知二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$$

（1）写出二次型 f 的矩阵表达式；

（2）用正交变换把二次型 f 化为标准型，并写出相应的正交矩阵；

（3）判断二次型是否为正定二次型？

解：(1)二次型的矩阵形式为$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-3&0\\-2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+3&0\\2&0&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda+4)$

A的三个特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-3,\lambda_3=-4$。

由$(2E-A)x=0$，求得对应$\lambda_1=2$的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$

由$(-3E-A)x=0$，求得对应$\lambda_2=-3$的特征向量为$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

由 $(-4E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_3=-4$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

因 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是分别属于三个不同特征值的特征向量，故正交。

单位化，$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

令 $Q=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，有 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -3 & \\ & & -4\end{pmatrix}$。

经过正交变换 $x=Qy,$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=y^T\Lambda y=2y_1^2-3y_2^2-4y_3^2$$

(3) 不是正定二次型。