#《线性代数》复习题

2023/5/29

1. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

答案：$n+1$

2. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+n-1 & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n+n \end{vmatrix}$$

答案：$n!(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k})$

3. 已知 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\mathbf{det}A^{-1}$.

答案：$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{(n+1)^{n-1}}$

4. 已知三阶方阵 A 的特征值为 1, 1, -2, 求 $\mathbf{det}(A^2+2A-4E)$.

答案：-4

5. 已知三阶方阵 A 按列分块为 $A=(a_1,a_2,a_3)$, 且 $\mathbf{det}A=5$, 又设 $B=(a_1+2a_2,3a_1+4a_3,5a_2)$, 求 $\mathbf{det}B$.

答案：-100

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 A^*, 求 $(A^*)^{-1}$.

答案：$\frac{1}{6}A$

7. 若向量 $\beta=(0,k,k^2)$ 能由向量 $\alpha_1=(1+k,1,1),\alpha_2=(1,1+k,1),\alpha_3=(1,1,1+k)$ 唯一线性表示, 求 k 应满足的条件.

答案：$k\neq 0$ 且 $k\neq 3$

8. 设 A 为正交矩阵且 $\mathbf{det}=-1$, 证明: $-E-A$ 不可逆.

提示：$|E+A|=|A^TA+A|=|A^T+E||A|=-|(A+E)^T|=-|A+E|\Rightarrow |A+E|=0$

9. 设 n 阶可逆矩阵 A 中每行元素之和为常数 a, 证明: (1) 常数 $a\neq 0$; (2)A^{-1} 的每行元素之和为 a^{-1}.

提示：令 $e=(1,1,\cdots,1)^T$, 依题意有 $Ae=ae$, 则 a 为 A 的特征值, e 为属于 a 的特征向量.

10. 设 A 是 n 阶实对称矩阵且满足 $A^2=A$, 又设 A 的秩为 r.

1). 证明 A 的特征值为 1 或者 0.

2). 求行列式 $\mathbf{det}(2E-A)$, 其中 E 是 n 阶单位阵.

提示：2）因 A 可对角化且特征值为 1 或 0, 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}E_r&\\&0\end{pmatrix}$, $|2E-A|=|2PP^{-1}-P\Lambda P^{-1}|=|2E-\Lambda|=2^{n-r}$.

11. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&a&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB=0$, 求常数 a.

答案：-1

12. 设 A 是 n 阶非零实矩阵, 若 $A^T = A^*$, 试证: $\mathbf{det}A \neq 0$.

提示：课件例题

13. 设有矩阵 $A_{m\times n}$ 和 $B_{n\times m}$, 且 $m < n, AB = E$. 证明 A 的行向量组线性无关.

提示: $m = R(E_m) = R(AB) \leqslant R(A) \leqslant m$, 所以 $R(A) = m$.

14. 设方阵 A 满足 $1998A = 6A^2 + 12E$, 求 A^{-1}.

答案：$\frac{1}{2}(333E - A)$

15. 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的秩为 $k(k \leqslant r)$, 且 $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r; \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r; \cdots; \beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r-1}$, 求向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 的秩.

答案：k

16. 设四元非齐次线性方程组 $AX = b$ 的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量, 其中 $\eta_1 = (0, 6, 1, 2)^T, \eta_2 + \eta_3 = (1, 9, 9, 8)^T$, 求该方程组的通解.

答案：$k(1, -3, 7, 4)^T + \eta_1, k$ 为任意实数

17. 已知向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 求矩阵 $A = \alpha^T\beta$ 的全部特征值.

答案：$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$

18. 已知 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x 及 y.

答案：$x = 0, y = -2$, 注意相似的矩阵特征值和行列式都相同.

19. 已知二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 经正交变换化为标准型 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 求 a, b.

答案：$a = b = 0$

20. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $x = (1, 1, -1)^T$.

1). 求 a, b 的值及特征向量 x 对应的特征值.

2). A 能否与对角阵相似? 说明理由.

提示：1）$Ax=\lambda x$ 得 $a=-3, b=0, \lambda=-1$; 2) 不能. -1 是三重特征值, 但对应一个线性无关的特征向量.

21. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, 问 k 为何值时, 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$(对角阵), 并求 P 和 Λ.

提示：先由特征方程求出特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$(二重). 由二重特征值对应的齐次线性方程组的基础解系需含有两个向量得到 $k=0$. 常规方法求得 P.

22. 设 A 为三阶实对称矩阵, 且满足条件 $A^2+2A=0$, 已知 A 的秩 $R(A)=2$.

1) 求 A 的全部特征值.

2) 当 k 为何值时, 矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵, 其中 E 为三阶单位阵.

提示：1) $A^2+2A=0 \Rightarrow \lambda^2 x=-2\lambda x, x\neq 0 \Rightarrow \lambda=-2$ 或 0. 又 $A\sim\Lambda \Rightarrow R(A)=R(\Lambda)=2$, 所以 -2 是二重特征值; 2) $A+kE \sim diag(k, k-2, k-2)$ 由相似实对称矩阵有相同的正定性, 得 $k>2$.

23. 已知三阶矩阵 A 与三维向量 x, 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足 $A^3x=3Ax-2A^2x$.

1）记 $P=(x, Ax, A^2x)$, 求三阶矩阵 B, 使得 $A=PBP^{-1}$;

2) 计算行列式 $|A+E|$.

提示：1)

$$\begin{aligned} B=P^{-1}AP &= (x\ Ax\ A^2x)^{-1}A\ (x\ Ax\ A^2x) \\ &= (x\ Ax\ A^2x)^{-1}(Ax\ A^2x\ A^3x) \\ &= (x\ Ax\ A^2x)^{-1}(x\ Ax\ A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) 利用 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ 或者矩阵 B 可计算得到 A 的特征值为 $0, 1, -3$, 从而 $A + E$ 的特征值为 $1, 2, -2$, 得 $|A + E| = -4$

24. 已知三维向量空间 $\mathbf{R^3}$ 的一组基: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; 设 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3$.

1). 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $\mathbf{R^3}$ 的一组基;

2). 求由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵;

3). 若向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(1, -2, 0)^T$, 求 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

提示：1)

$$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

计算右边矩阵行列式，说明是可逆的，得证.

2) 过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

3)$\alpha_\beta = (1, 0, -1)^T$.

25. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与设 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一, 试求 1)a 的值；2）正交矩阵 Q, 使得 Q^TAQ 为对角阵.

提示：1) 由 $R(A\ \beta) = R(A) < 3$ 得到 $a = -2$. 2) 计算特征方程解得特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$, 分别解特征向量并单位化可得 Q.

26. λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} (2\lambda + 1)x_1 - \lambda x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda - 1 \\ (\lambda - 2)x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (\lambda - 2)x_3 = \lambda \\ (2\lambda - 1)x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (2\lambda - 1)x_3 = \lambda \end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解? 在无穷多解时求通解.

提示: 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 有唯一解; 当 $\lambda = 0$ 时, 无解; 当 $\lambda = 1$ 时, 有无穷多解, 通解为 $x = (1, -3, 0)^T + k(-1, 2, 1)^T$, k 为任意实数.