

武汉大学数学与统计学院 2019-2020 第一学期

《线性代数 B》 (A 卷)

一、(10 分) 计算下列行列式: $D_n = \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 - x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix};$

二、(10 分) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ x_1 - 2x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + 2x_3 - 3x_4 = b_3 \end{cases}$ 有三个解向量:

$$\xi_1 = (1 \ 1 \ -2 \ 1)^T, \xi_2 = (2 \ -1 \ 1 \ 1)^T, \xi_3 = (3 \ 2 \ 4 \ 2)^T$$

求此方程组系数矩阵的秩, 并求其通解 (其中 $a_{ij}, b_i, i=1,2,3; j=1,2,3,4$ 为已知常数)。

三、(10 分) 设 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 有关系

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m \\ \dots\dots\dots \\ \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1} \end{cases}$$

问 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是否同秩? 证明你的结论。

四、(10 分) 已知矩阵 X 满足 $X + A^{-1}X = A^* + A^{-1}$ 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

五、(10 分) 讨论 a, b 取何值时, 方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 有解。

六 (10 分) 设 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求:

(1) A 的特征值和特征向量;

(2) A^k (k 为正整数) 及其特征值和特征向量。

七、(8 分) 设 A 和 B 为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B, r(A+B-E) = n$, 证明: $r(A) = r(B)$.

八、(10 分) 已知 $\alpha_1 = (-1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组; (2) 求生成的子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一个标准正交基。

九、(12 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 经过正交变换 $X = P Y$ 化为 $y_1^2 + 2y_2^2$.

(1) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 是否正定?

(2) 计算行列式 $|A|$ 的值;

(3) 若 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

十、(10 分) 在四维实向量构成的线性空间 R^4 中, 已知: $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1, 0)^T, \alpha_4 = (1, 1, 1, 1)^T; \beta_1 = (1, -1, a, 1)^T, \beta_2 = (-1, 1, 2-a, 1)^T, \beta_3 = (-1, 1, 0, 0)^T, \beta_4 = (1, 0, 0, 0)^T$.

(1) 求 a 使 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 R^4 的基;

(2) (2) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵 P .

武汉大学数学与统计学院 2019-2020 第一学期

《线性代数 B》 (A 卷答案)

一、(10 分) 计算下列行列式: $D_n = \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 - x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix};$

解 各列加到第一列, 提出公因子, 得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 - x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n a_i - x \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 - x & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 - x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i - x \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} x^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i - x \right). \end{aligned}$$

二、(10 分) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ x_1 - 2x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + 2x_3 - 3x_4 = b_3 \end{cases}$ 有三个解向量:

$$\xi_1 = (1 \ 1 \ -2 \ 1)^T, \xi_2 = (2 \ -1 \ 1 \ 1)^T, \xi_3 = (3 \ 2 \ 4 \ 2)^T$$

求此方程组系数矩阵的秩, 并求其通解 (其中 $a_{ij}, b_i, i=1,2,3; j=1,2,3,4$ 为已知常数)。

解 由题设条件知 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的三个解向量, 因此

$$\xi_3 - \xi_1 = (2, 1, 6, 1)^T, \xi_3 - \xi_2 = (1, 3, 3, 1)^T$$

是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的线性无关解向量, 所以齐次线性方程组系数矩阵的秩 $r(A) \leq 2$

又系数矩阵有二阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, 所以 $r(A) \geq 2$ 因此有 $r(A) = 2$

因此 $\xi_3 - \xi_1 = (2, 1, 6, 1)^T, \xi_3 - \xi_2 = (1, 3, 3, 1)^T$ 为齐次线性方程组的基础解系。因此非齐次线性

方程组的通解为: $k_1(\xi_3 - \xi_1) + k_2(\xi_3 - \xi_2) + \xi_3 = k_1(2, 1, 6, 1)^T + k_2(1, 3, 3, 1)^T + (3, 2, 4, 2)^T$

其中 k_1, k_2 为任意常数。

三、(10 分) 设 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 有关系

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m \\ \cdots \cdots \cdots \\ \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1} \end{cases}$$

问 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是否同秩? 证明你的结论。

解 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 秩相等。下面证之:

由条件知 $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m) = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)P$

$$\text{其中 } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad |P| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1} \neq 0$$

所以 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 等价, 故秩相同。

四、(10 分) 已知矩阵 X 满足 $X + A^{-1}X = A^* + A^{-1}$ 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X 。

解 方程两边左乘 A 得 $AX + X = AA^* + I$, 即 $(A + I)X = (|A| + 1)I$, 又 $|A| = -2$

$$\text{所以有 } (A + I)X = -I, \text{ 即 } X = -(A + I)^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

五、(10 分) 讨论 a, b 取何值时, 方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 有解。

解: 由于系数行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = b(1-a)$, 所以当 $b \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 由克莱姆法则可知方程组有解。

当 $b=0$ 时, 增广矩阵为 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 方程组无解。

当 $a=1$ 时, 增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{bmatrix}$ 故当 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 时方程组有

解, 当 $a=1, b \neq \frac{1}{2}$ 时方程组无解。

六 (10 分) 设 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求:

(1) A 的特征值和特征向量;

(2) A^k (k 为正整数) 及其特征值和特征向量。

解 (1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$, 故 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=2$ 。

当 $\lambda_1=1$ 时, 解线性方程组 $(A-E)x=0$, 由 $A-E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

可得基础解系 $p_1=(0,1,1)^T$, 故 A 对应于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量为 $k_1 p_1$ ($k_1 \neq 0$);

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解 $(A-2E)x=0$, 可得基础解系 $p_2=(0,1,0)^T$, $p_3=(1,0,1)^T$,

故 A 对应于 $\lambda_{2,3}=2$ 的全部特征向量为 $k_2 p_2+k_3 p_3$ (k_2, k_3 不全为零);

(2) 令 $P=(p_1, p_2, p_3)$, 则有 $P^{-1}AP=\text{diag}(1,2,2)$, 即有 $A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$, 从而

$$A^k=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 2^k-1 & 2^k & -2^k+1 \\ 2^k-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^k 的特征值为 $\mu_1=1, \mu_2=\mu_3=2^k$. 且 A^k 的特征值对应的特征向量与 A 相应特征值对应的特征向量相同。

七、(8分) 设 A 和 B 为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2=A, B^2=B, r(A+B-E)=n$, 证明: $r(A)=r(B)$ 。

证明 因为 $A(A+B-E)=A^2+AB-A=AB$, $(A+B-E)B=AB+B^2-B=AB$,

由 $(A+B-E)$ 为可逆矩阵, 可得:

$r(A(A+B-E))=r(A)=r(AB)$, $r((A+B-E)B)=r(B)=r(AB)$, 所以, $r(A)=r(B)$ 。

八、(10分) 已知 $\alpha_1=(-1,0,1)^T, \alpha_2=(2,2,0)^T, \alpha_3=(0,1,1)^T$

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组; (2) 求生成的子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一个标准正交基。

解 (1) 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 作为列构造矩阵, 再作初等行变换化矩阵为阶梯形:

$$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=2$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个都可为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组, 不妨取 α_1, α_2

(2) 由 (1) 知, α_1, α_2 为 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一个基, 于是只需正交单位化即可。

正交化: 令 $\beta_1=\alpha_1=(-1,0,1)^T$, $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1=\alpha_2+\beta_1=(1,2,1)^T$

单位化: $e_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T, e_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^T$

e_1, e_2 就是生成的子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一个标准正交基。

九、(12分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=X^TAX$ 经过正交变换 $X=PY$ 化为 $y_1^2+2y_2^2$ 。

(1) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=X^TAX$ 是否正定? (2) 计算行列式 $|A|$ 的值;

(3) 若 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

解 (1) 由已知条件知矩阵 A 的特征值为: $1, 2, 0$, 所以二次型为半正定。

(2) $|A| = 1 \times 2 \times 0 = 0$

(3) 由已知 $Q^T A Q = \text{diag}(1, 2, 0)$

$$\begin{aligned} \text{于是 } A &= Q \text{diag}(1, 2, 0) Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

十、(10 分) 在四维实向量构成的线性空间 R^4 中, 已知: $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1, 0)^T$, $\alpha_4 = (1, 1, 1, 1)^T$; $\beta_1 = (1, -1, a, 1)^T$, $\beta_2 = (-1, 1, 2-a, 1)^T$, $\beta_3 = (-1, 1, 0, 0)^T$, $\beta_4 = (1, 0, 0, 0)^T$. (1) 求 a 使 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 R^4 的基; (2) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵 P .

解 (1) $a \neq 1$;

(2) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)P$, 则

$$P = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ -1-a & a-1 & 1 & 0 \\ a-1 & 1-a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$