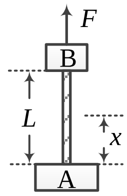
第二章 牛顿运动定律 习题解答

2.1—2.7 思考题答案略

2.8 如图所示，质量$m=2.0\text{kg}$的均匀绳，长$L=1.0\text{m}$，两端分别连接重物 A 和 B，$m_{\text{A}}=8.0\text{kg}$、$m_{\text{B}}=5.0\text{kg}$，今在 B 端施以大小为$F=180\text{N}$的竖直拉力，使绳和物体向上运动，求距离绳的下端为$x$处绳中的张力$T(x)$。

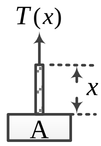


题 2.8 图

2.8 解：以 A、B 和绳作为一个整体来研究，则有

$$F-mg-m_{\text{A}}g-m_{\text{B}}g=(m+m_{\text{A}}+m_{\text{B}})a$$

$$a=\frac{F-(m+m_{\text{A}}+m_{\text{B}})g}{m+m_{\text{A}}+m_{\text{B}}}=\frac{F}{m+m_{\text{A}}+m_{\text{B}}}-g$$



题 2.8解 图

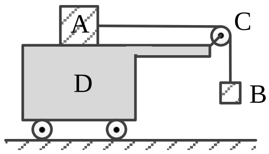
再以距离绳子下端长度为x的一段绳子和物体 A 为研究对象，有

$$T(x)-m_{\text{A}}g-\frac{x}{L}mg=\left(m_{\text{A}}+\frac{x}{L}m\right)a$$

所以绳中拉力为

$$T(x)=\left(m_{\text{A}}+\frac{x}{L}m\right)(g+a)=\frac{\left(m_A+m\,x/L\right)F}{m+m_A+m_B}=\left(96+24x\right)\ \text{N}$$

2.9 水平面上有一质量$M=51\text{kg}$的小车 D，其上有一定滑轮 C。通过绳在滑轮两侧分别连有质量为$m_1=5\text{kg}$和$m_2=4\text{kg}$的物体 A 和 B，其中物体 A 在小车的水平台面上，物体 B 被绳悬挂。各接触面和滑轮轴均光滑。系统处于静止时，各物体关系如图所示。现在让系统运动，试求：以多大的水平力$\boldsymbol{F}$作用于小车上，才能使物体 A 与小车 D 之间无相对滑动。（滑轮和绳的质量均不计，绳与滑轮间无相对滑动）



题 2.9 图

2.9 解：首先建立x、y坐标。设小车 D 受力$\boldsymbol{F}$时，连接物体 B 的绳子与竖直方向成α角，则系统在运动过程中，当 A、D 间无相对滑动时，A 与 D 的接触面之间无摩擦力存在，由此可画出物体 A、B 及小车 D 的受力如图所示。由牛顿运动定律

对于 A： $T=m_1a_x$ ①

对于 B： $T\sin\alpha=m_2a_x$ ②

$$T\cos\alpha - m_2 g = 0 \qquad ③$$

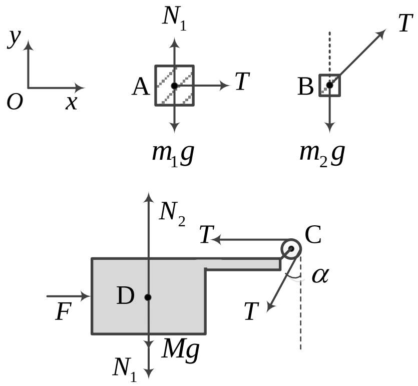
对于 D： $F - T - T\sin\alpha = Ma_x$ ④

联立①、②、③式，可解出

$$a_x = \frac{m_2 g}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} \qquad ⑤$$

联立①、②、④式，或者将 A、B 和 D 作为一个整体可以解出

$$F = \left(m_1 + m_2 + M\right)a_x = \frac{(m_1 + m_2 + M)m_2 g}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}$$

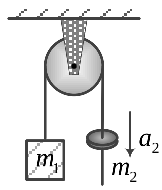


题 2.9 各物体的受力分析图

代入数据得

$$F = 784\text{N}$$

2.10 如图所示，一条轻绳跨过一个轻质滑轮（滑轮与轴间摩擦可忽略），在绳的一端挂一个质量为 m_1 的物体，在另一端穿过一个质量为 m_2 的圆环。试求：当圆环相对于绳以恒定的加速度 a_2 沿绳向下滑动时，物体和圆环相对地面的加速度各是多少？圆环与绳间的摩擦力多大？



题 2.10 图

2.10 解: 因绳子和滑轮的质量均可忽略不计，所以滑轮两边绳中的张力相等，设为 T，圆环受到的摩擦力在数值上等于绳子的张力 T。由题意可设 m_1 相对地面的加速度大小为 a_1，方向↓。因绳子不可伸长，所以右边绳子对地面的加速度大小也为 a_1，但方向↑，设 m_2 相对地面的加速度大小为 a_2'，方向↓。由相对运动的规律 $\boldsymbol{a}_{A-B} = \boldsymbol{a}_{A-C} + \boldsymbol{a}_{C-B}$，可得

$$a_2' = -a_2 + a_1$$

再对 m_1、m_2 分别用牛顿第二定律，有

$$m_1 g - T = m_1 a_1$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2'$$

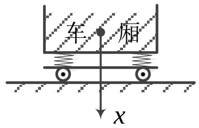
联立求解，可得

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2 a_2}{m_1 + m_2}$$

$$a_2' = \frac{(m_1 - m_2)g - m_1 a_2}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{(2g - a_2)m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

2.11　一质量为 m 的汽车车厢在车架弹簧上作上下振动，以竖直向下为 x 轴的正方向，车厢的平衡位置作为坐标原点 O，其运动规律为 $x = A\sin\omega t$，式中 A、ω 为恒量。试求：弹簧对车厢的支承力。



题 2.11 图

2.11 解：车厢在竖直方向只受到两个力的作用，重力 $mg\downarrow$ 和弹簧对车厢的支承力 $N\uparrow$，由牛顿第二定律可得

$$mg - N = ma \qquad 即 \qquad N = mg - ma$$

又有题意可知，车厢的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\sin\omega t$$

所以弹簧对车厢的支承力的大小为

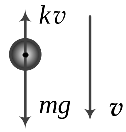
$$N = mg - ma = mg + m\omega^2 A\sin\omega t$$

方向向上。

2.12　质量为 m 的质点在空气中无初速地自由下落时，在速度不大的情况下，阻力 F 的大小和速度成正比，即 $F = -kv$，式中 k 为常数。试求：质点下落速度随时间的变化关系。

2.12 解：如图所示，质点 m 在下落过程中受重力 $mg\downarrow$ 和阻力 $kv\uparrow$ 作用。若以下落点为坐标原点 O，竖直向下为 y 轴的正方向，由牛顿运动定律，有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$$



题 2.12 解图

将上式分离变量，可得　$$\frac{m\mathrm{d}v}{mg - kv} = \mathrm{d}t$$

两边同时取定积分，即　$$\int_0^v \frac{m\mathrm{d}v}{mg - kv} = \int_0^t \mathrm{d}t$$

积分得物体下落速度随时间的函数关系为

$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

2.13　质量为 m 的物体，由地面以初速 v_0 竖直向上发射，物体受到的空气阻力的大小为 $F_r=kv$ 。试求：

（1）物体发射到最大高度所需要的时间；

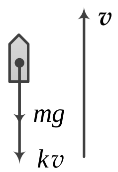
（2）物体能到达的最大高度。

2.13 解：（1）物体在向上发射的过程中，受到重力和阻力作用，方向均与速度方向相反。以竖直向上作为正方向，由牛顿运动定律可得

$$-mg-kv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ①$$

对上式分离变量并取定积分，同时注意到物体到达最大高度时 $v=0$ ，即

$$\int_0^t \mathrm{d}t=\int_{v_0}^0 -\frac{m}{mg+kv}\mathrm{d}v$$



题 2.13 解图

积分得物体达到最大高度所需的时间为

$$t=\frac{m}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg}$$

（2）利用；$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，代入①式，可得　$-mg-kv=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$

分离变量并取定积分，即：　$\int_0^y \mathrm{d}y=\int_{v_0}^0 -\frac{mv}{mg+kv}\mathrm{d}v$

所以物体可达到的最大高度为：　$y=\frac{m}{k}\left[v_0-\frac{mg}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg}\right]$

2.14 质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为 k ，忽略子弹重力的影响。试求：

（1）子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数式；

（2）子弹进入沙土的最大深度。

2.14 解：（1）忽略子弹重力时，子弹进入沙土后仅受阻力 $-kv$ 。由牛顿定律，有

$$-kv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

对上式先分离变量，再取定积分，即

$$-\frac{k}{m}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}v}{v} \qquad \int_0^t -\frac{k}{m}\mathrm{d}t=\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

由此解得速度随时间变化的函数式为

$$v=v_0\mathrm{e}^{-kt/m}$$

（2）**解法一**：因 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$

分离变量并取定积分，有 $\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,\mathrm{d}t$

由此解得射入深度随时间的函数关系为

$$x=\frac{mv_0}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

所以射入的最大深度为： $x_{\max}=\lim\limits_{t\to\infty}x=\dfrac{mv_0}{k}$

解法二：因 $-kv=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

所以 $\mathrm{d}x=-\dfrac{m}{k}\mathrm{d}v$

考虑到在最深处，速度为零。故对上式取定积分

$$\int_0^{x_{\max}}\mathrm{d}x=-\int_{v_0}^{0}\frac{m}{k}\mathrm{d}v$$

有此得最大深度为： $x_{\max}=mv_0/k$

2.15 已知一质量为 m 的质点在 x 轴上运动，质点只受到指向原点的引力的作用，引力大小与质点离原点的距离 x 的平方成反比，即 $f=-k/x^2$，k 是比例常数。设质点在 $x=A$ 时的速度为零，求质点在 $x=A/4$ 处的速度的大小。

2.15 解：根据牛顿第二定律

$$f=-\frac{k}{x^2}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

分离变量，并取定积分，有

$$v\mathrm{d}v=-\frac{k}{mx^2}\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^v v\mathrm{d}v=-\int_A^{A/4}\frac{k}{mx^2}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{k}{m}\left(\frac{4}{A}-\frac{1}{A}\right)=\frac{3}{mA}k$$

所以物体的速度大小为

$$v=\sqrt{\frac{6k}{mA}}$$

2.16 飞机降落时的着地速度大小 $v=90\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$，方向与地面平行，飞机与地面间的摩擦系数 $\mu=0.10$，迎面空气阻力为 $C_x v^2$，升力为 $C_y v^2$ （v 是飞机在跑道上的滑行速度，C_x 和 C_y 为某两常量)。已知飞机的升阻比 $k=C_y/C_x=5$，试求：飞机从着地到停止这段时间所滑行的距离。（设飞机刚着地时对地面无压力）

2.16 解：以飞机的着地点为坐标原点，滑行方向为 x 轴的正方向。设飞机质量为 m，着地后地面对飞机的支持力为 N。在竖直方向上

$$N+C_y v^2-mg=0$$

即

$$N=mg-C_y v^2$$

又飞机受到地面的摩擦力

$$f=\mu N=\mu(mg-C_y v^2)$$

由牛顿运动定律，在水平方向上

$$-\mu(mg-C_y v^2)-C_x v^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

分离变量可得

$$\mathrm{d}x=\frac{-mv\mathrm{d}v}{\mu mg+\left(C_x-\mu C_y\right)v^2}$$

由题意可知：当 $x=0$ 时，$v=v_0=90\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}=25\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，当滑行到最大距离 $x=S$ 时，$v=0$。所以有

$$S=\int_0^S\mathrm{d}x=\int_{v_0}^0\frac{-mv\mathrm{d}v}{\mu mg+\left(C_x-\mu C_y\right)v^2}$$

积分可得

$$S=\frac{m}{2\left(C_x-\mu C_y\right)}\ln\frac{\mu mg+\left(C_x-\mu C_y\right)v_0^2}{\mu mg}$$

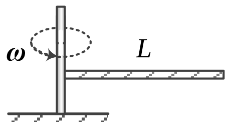
又因为飞机刚着地前的瞬间，所受重力等于升力，即：$mg=C_y v_0^2$，所以

$$C_y=\frac{mg}{v_0^2}\quad,\quad C_x=\frac{C_y}{k}=\frac{mg}{5v_0^2}$$

将上述C_y、C_x代入S的表达式，并化简，然后代入数据可得

$$S=\frac{5v_0^2}{2g(1-5\mu)}\ln\frac{1}{5\mu}=221\,\mathrm{m}$$

2.17 一条质量均匀分布的绳子，总质量为$m_{总}$、长度为L，一端拴在竖直转轴OO'上，并以恒定的角速度ω在水平面上旋转。设转动过程中绳子始终伸直不打弯，且忽略重力的影响，求距离转轴为r处绳中的张力$T(r)$。



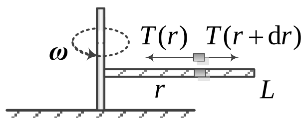
题 2.17 图

2.17 解：在距离转轴为r处，取一个长为$\mathrm{d}r$的一小段绳子，其质量为 $\frac{m_{总}}{L}\mathrm{d}r$，其两端受力如图所示，由于该段绳子作圆周运动，所以由牛顿第二定律得

$$T(r)-T(r+\mathrm{d}r)=\mathrm{d}m\cdot a_n=\frac{m_{总}}{L}\mathrm{d}r\cdot r\omega^2$$

令 $$T(r)-T(r+\mathrm{d}r)=-\mathrm{d}T(r)$$

得 $$\mathrm{d}T=-\frac{m_{总}\omega^2}{L}r\mathrm{d}r$$



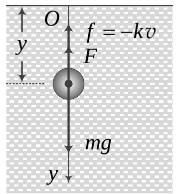
题 2.17 解图

式中：$\mathrm{d}T$就是该小段绳子所受的合外力，“－”号表示该段绳子受到的合外力的方向与矢径$\boldsymbol{r}$相反，指向圆心。根据力的叠加原理，离轴r处绳中的张力就是r以外所有小段绳子所受的合力的绝对值之和，即

$$T(r)=\int\left|\mathrm{d}T\right|=\int_r^L\frac{m_{总}\omega^2}{L}r\mathrm{d}r=\frac{m_{总}\omega^2}{2L}\left(L^2-r^2\right)$$

2.18 质量为m的小球，在水中受到的浮力为常数F，当它从水面由静止开始沉降时，受到水的粘滞阻力大小为$f=kv$（k为常数）。试求：小球在水中沉降的深度与沉降速度v的函数关系。

2.18 解：小球在水中下沉时受力如图所示，以小球开始沉降前静止的位置（即水面）为坐标原点，向下为 y 轴正方向。由牛顿运动定律可得



题2.18解图

$$mg - F - kv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot v$$

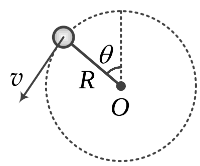
将上式分离变量，并取定积分，即

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^v \frac{mv}{mg - F - kv}\mathrm{d}v$$

求解积分式，可得小球沉降的深度与沉降速度 v 的关系为

$$y = \frac{m}{k}\left(\frac{mg - F}{k}\cdot\ln\frac{mg - F}{mg - F - kv} - v\right)$$

2.19 质量为 m 的物体系于长度为 R 的绳子的一端，在竖直平面内绕固定点 O 作圆周运动。设 t 时刻物体瞬时速度的大小为 v，绳子与竖直向上的方向成 θ 角，如图所示。

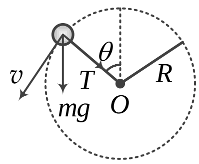


题 2.19 图

（1）求 t 时刻绳中的张力 T 和物体的切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$；

（2）说明在物体运动过程中 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的大小和方向如何变化？

2.19 解：（1）t 时刻物体受力如图所示。在法向



题 2.19 解图

$$T + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

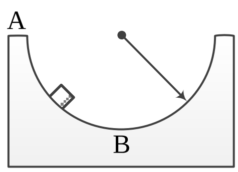
由此得绳中的张力为 $$T = \frac{mv^2}{R} - mg\cos\theta$$

在切向 $$mg\sin\theta = ma_\tau$$

所以切向加速度为 $$a_\tau = g\sin\theta$$

（2）由 $a_\tau = g\sin\theta$ 可知，a_τ 的数值随 θ 的按正弦函数规律变化。（规定物体由顶点开始转一周又回到顶点，相应 θ 角由 0 连续增加到 2π）。当 $0 < \theta < \pi$ 时，$a_\tau > 0$，表示 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{v}$ 方向相同；当 $\pi < \theta < \pi$ 时，$a_\tau < 0$，表示 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{v}$ 方向相反。

2.20 在地面上有一个半径为 R 的半圆槽，一个质量为 m 的滑块从静止开始从槽的边缘 A 点滑入槽内，如图所示。假设半圆槽内侧是光滑的，试求：



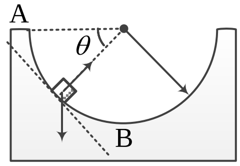
题 2.20 图

（1）滑块滑到槽底部 B 点时速率。

（2）当滑块与圆心的连线与水平方向成30°时，滑块对槽内侧的正压力。

2.20 解：（1）当滑块与圆心的连线的夹角成θ时，滑块的受力如图所示，其中：mg为重力，N为槽的支持力，指向圆心。利用牛顿第二定律沿切向的分量式，可得

$$mg\cos\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{R\mathrm{d}\theta}\cdot v \qquad ①$$



题 2.20 解图

对上式分离变量并取定积分得

$$\int_0^{\theta} Rg\cos\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{v} v\mathrm{d}v$$

所以滑块的速度为

$$v = \sqrt{2Rg\sin\theta} \qquad ②$$

滑块滑到槽底部 B 点时$\theta = \dfrac{\pi}{2}$，所以此时其速率为$v = \sqrt{2Rg}$

（2）利用牛顿第二定律沿法向的分量式

$$N - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

将②式代入，有：$$N = mg\sin\theta + m\frac{v^2}{R} = 3mg\sin\theta$$

当$\theta = 30^{\circ}$时，有：$$N = \frac{3}{2}mg$$

再由牛顿第三定律可得，此时滑块对槽内侧的正压力大小也为$\dfrac{3}{2}mg$。

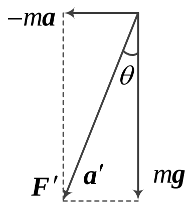
2.21 小车在水平地面上以$a = 2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$的匀加速度向右运动时，从高为$2\mathrm{m}$的车顶上突然掉下一小球。略去空气阻力，并取重力加速度$g = 10\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$。试求

（1）小球相对于车厢的加速度的大小和方向；

（2）小球在车厢地板上的落地点距离掉落点的水平距离。

2.21 解：（1）以小车为参考系，显然这是一个非惯性系。小球受力有真实力重力$m\boldsymbol{g}$和惯性力$-m\boldsymbol{a}$，如图所示。小球所受合力为

$$\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{g}$$



题 2.21 解图

合力的大小为 $$F' = m\sqrt{g^2 + a^2}$$

所以小球相对于车厢的的加速度的大小为

$$a' = F'/m = \sqrt{g^2 + a^2} = 10.2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

方向为 $$\theta = \arccos\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} = 11.4^\circ$$

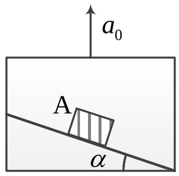
（2）以小球离开车顶时为计时零点，设t时刻小球落到车厢地板上，则有

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad 即 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.63\,\mathrm{s}$$

所以小球在车厢地板上的落地点距离掉落点的水平距离为

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 0.4\mathrm{m}$$

2.22 一升降机内有一倾角为α的固定光滑斜面，如图所示。当升降机以匀加速度a_0加速上升时，质量为m的物体 A 沿斜面滑下，试以升降机为参考系，试求



题 2.22 图

（1）A 对相对于升降机的加速度$\boldsymbol{a}'$；

（2）A 相对于地面的加速度$\boldsymbol{a}$。

2.22 解：加速上升的升降机是一个非惯性参照系。取A为研究对象，则A受力有：重力$m\boldsymbol{g}$、支持力$\boldsymbol{N}$、还有惯性力$-m\boldsymbol{a}_0$，如图（a）所示。因物体在升降机内相对于斜面以加速度$\boldsymbol{a}'$加速下滑，所以由非惯性系中的牛顿运动定律，可知垂直于斜面方向：

$$N - mg\cos\alpha - ma_0\cos\alpha = 0$$

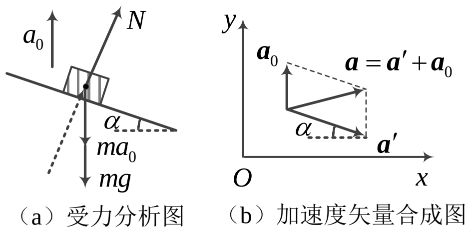
沿斜面方向

$$mg\sin\alpha + ma_0\sin\alpha = ma'$$

所以相对于升降机的加速度大小为

$$a' = g\sin\alpha + a_0\sin\alpha$$

方向沿斜面向下。



（a）受力分析图 （b）加速度矢量合成图

题 2.22 解图

（2）由相对运动中加速度的变换式，可知物体相对于地面的加速度$\boldsymbol{a}$满足：

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0$$

在地面参照系中选 O-xy 直角坐标系如图（b）所示，则 A 对地面的加速度在 x 和 y 方向的投影分别为

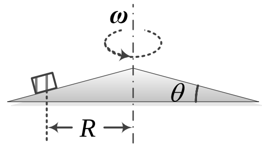
$$a_x = a'\cos\alpha = (g + a_0)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$a_y = a_0 - a'\sin\alpha = a_0\cos^2\alpha - g\sin^2\alpha$$

所以 A 相对于地面的总加速度为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = (g + a_0)\sin\alpha\cos\alpha\boldsymbol{i} + (a\cos^2\alpha - g\sin^2\alpha)\boldsymbol{j}$$

2.23 在倾角为 θ 的圆锥体的侧面放一质量为 m 的小物体，圆锥体以角速度 ω 绕竖直轴匀速转动，轴与物体间的距离为 R 。为了使物体能在锥体该处保持静止不动，试以转动的椎体为参照系，求出物体与锥面间的静摩擦系数至少为多少？简单讨论所得到的结果。



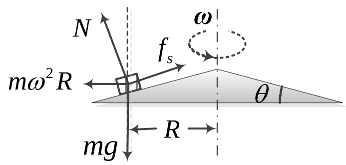
题 2.23 图

2.23 解： 建立如图所示的坐标，以转动的椎体为参照系，m 所受真实力有重力 mg，支持力 N 和最大静摩擦力 f_s，所受惯性力有惯性离心力 $m\omega^2 R$，其方向沿径向向外。由于物体 m 在锥面上静止不动，所以由牛顿定律有，

水平方向： $f_s\cos\theta - N\sin\theta - m\omega^2 R = 0$ ①

竖直方向： $f_s\sin\theta + N\cos\theta - mg = 0$ ②

且： $f_s = \mu N$ ③



题 2.23 解图

将③式代入①②两式，再由①÷②得

$$\frac{\mu\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} = \frac{\omega^2 R}{g}$$

由此解得

$$\mu = \frac{g\sin\theta + \omega^2 R\cos\theta}{g\cos\theta - \omega^2 R\sin\theta}$$

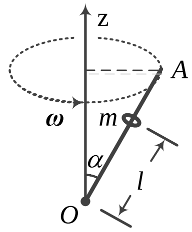
对给定的 ω、R 和 θ 值，μ 不能小于此值，否则最大静摩擦力不足以维持 m 在斜面上不动。

讨论：由 $\mu > 0$ 可得

$$g\cos\theta-\omega^2R\sin\theta>0 \qquad \text{即} \qquad \mathrm{tg}\,\theta<\frac{g}{\omega^2R}$$

当 $\mathrm{tg}\,\theta\geq\dfrac{g}{\omega^2R}$ 时，不论 μ 多么大物体也不可能在锥面上静止不动。

2.24 一光滑直杆 OA 与竖直轴 Oz 成 α 角（α 为常数）。直杆以匀角速度 ω 绕 Oz 轴转动，杆上有一质量为 m 的小滑环，在距 O 点为 l 处与直杆相对静止，如图所示。试以 OA 杆为参考系求出此时杆的角速度 ω，并讨论小滑环是否处于稳定平衡。



题 2.24 图

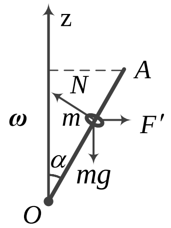
2.24 解：(1) 取转动的杆 OA 为参考系，杆上的小环受力有：重力 mg、支持力 N 以及惯性离心力 $F'=m\omega^2l\sin\alpha$，如图所示。由于环在杆上处于静止状态，故三者合力为零，即

在竖直方向 $\qquad N\sin\alpha-mg=0 \qquad$ ①

在水平方向 $\qquad F'-N\cos\alpha=0 \qquad$ ②

其中，惯性离心力 $\qquad F'=m\omega^2l\sin\alpha \qquad$ ③

由此可解得 $\qquad \omega=\dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{g\cos\alpha}{l}}$



题 2.24 解图

(2) 因为 N 与杆是垂直的，故无论 N 取何值，都不影响小环沿杆的运动。为此只需考察惯性离心力 F' 和重力 mg 沿杆方向上的合力，即

$$F_{\text{合（OA）}}=F'\sin\alpha-mg\cos\alpha=m\omega^2l\sin^2\alpha-mg\cos\alpha$$

在平衡位置，此合力为零，即 $F_{\text{合（OA）}}=0$。

现假定小环受到一个扰动，使小环向杆的 A 端产生一段位移 Δl，即 Δl 大于零，则

$$F'_{\text{合（OA）}}=m\omega^2\left(l+\Delta l\right)\sin^2\alpha-mg\cos\alpha>0$$

即沿 OA 方向的合力指向 A，从而使环加速向 A 端滑动。

反之，如果小环向 O 端产生一段位移 Δl，此时 $\Delta l<0$，故

$$F'_{\text{合（OA）}}=m\omega^2\left(l+\Delta l\right)\sin^2\alpha-mg\cos\alpha<0$$

即沿 OA 方向的合力指向 O，所以小环也不会再次返回平衡位置。由此可知，小环所处的平衡是不稳定平衡。