1．计算下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

解　(1) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3\right)x_1 + \left(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3\right)x_2 + \left(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3\right)x_3$$

$$= a_{11}x_1^2 + \left(a_{12} + a_{21}\right)x_1x_2 + \left(a_{13} + a_{31}\right)x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + \left(a_{23} + a_{32}\right)x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \text{。}$$

(2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} + a_{33} \end{pmatrix}$.

2． $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而$n\geq 2$为整数，则$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$____________.

解 方法 1：因

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A},$$

故有

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}。$$

方法 2：由$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$，等式两边同右乘$\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^3=(2\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}^2=2(2\boldsymbol{A})=2^2\boldsymbol{A},$$

递推可得

$$\boldsymbol{A}^{n-1}=2^{n-2}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A},$$

故$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=2^{n-1}\boldsymbol{A}-2\cdot 2^{n-2}\boldsymbol{A}=2^{n-1}\boldsymbol{A}-2^{n-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。

3． 已知$\alpha=(1,2,3)$，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，且$\boldsymbol{A}=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$，则$\boldsymbol{A}^n=$________.

解 $\boldsymbol{A}^n=(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)\cdots(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)=\alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\cdots(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\beta$

$$=(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}\alpha^{\mathrm{T}}\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}。$$

4．求与$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$可交换的全体 2 阶矩阵.

解　设$B=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$,满足$AB=BA$则

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\text{即}\begin{pmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_1+x_2\\ x_3 & x_3+x_4\end{pmatrix}$$

整理有$x_3+x_4=x_4$，$x_1+x_2=x_2+x_4$，从而$x_3=0$，$x_1=x_4$.

满足要求的矩阵为$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ 0 & x_1\end{pmatrix}$，$x_1,x_2$为任意常数.

5．所求即是与$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$可交换的二阶矩阵，设此矩阵为$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$,有

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,整理有

$$\begin{pmatrix}x_1+x_2 & 2x_1-2x_2\\ x_3+x_4 & 2x_3-2x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_3 & x_2+2x_4\\ x_1-2x_3 & x_2-2x_4\end{pmatrix}$$

故$x_2=2x_3, 2x_1=3x_2+2x_4, x_1=3x_3+x_4$，

即所求为$\begin{pmatrix}x_1 & 2x_3\\ x_3 & x_1-3x_3\end{pmatrix}$.

6. 若矩阵$\boldsymbol{A}$与所有的n阶矩阵可交换，则$\boldsymbol{A}$一定是数量矩阵，即$\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}$.

证 设$\boldsymbol{E}_{ii}=\mathrm{diag}(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$表示第$i$个元素为 1，其余元素全为零的对角矩阵，则由$\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ii}$，可得$a_{ij}=0$，$\forall i\neq j$，故$\boldsymbol{A}$是对角矩阵。

设n阶矩阵$\boldsymbol{E}_{lm}$表示第l行第m列元素为 1，其余元素全为 0 的方阵，故此时$\boldsymbol{E}_{lm}\boldsymbol{A}$中第$l$行第$m$列的元素$a_{mm}$，其余元素全为 0；$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{lm}$中第$l$行第$m$列的元素分别为$a_{ll}$，其余元素全为 0. 由$\boldsymbol{E}_{lm}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{lm}$，得$a_{ll}=a_{mm}$，由$l, m$的任意性，故对角矩阵$\boldsymbol{A}$的对角线上的元素全部相等，从而$\boldsymbol{A}$一定是数量矩阵.

7．证明：不存在n阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$．

7．证明：不存在n阶方阵A和B，使得$AB-BA=E$。

证　设A，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，设$C=AB=(c_{ij})_{n\times n}$，$D=BA=(d_{ij})_{n\times n}$，则

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{ki}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{ji}，\quad d_{jj}=\sum_{k=1}^{n}b_{jk}\cdot a_{kj}=\sum_{i=1}^{n}b_{ji}\cdot a_{ij}，\quad \forall i,j，$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}-\sum_{j=1}^{n}d_{jj}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{ji}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}=0，$$

从而$AB-BA$主对角线之和为 0，但E中对角线元素之和为n，故$AB-BA\neq E$.

8．证明：设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$阶实矩阵，若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$．

8．证明：设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$阶实矩阵，若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$，依题设有

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}\cdot a_{ki}=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}^{2}=0，\quad j，$$

得$a_{ki}=0$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，$j$，故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。

9．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$分别是 3 阶实对称和实反对称矩阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$．

9. 设A，B分别是 3 阶实对称和实反对称矩阵，且$A^2=B^2$，证明：$A=B=O$.

证 依题设有$A^{\mathrm{T}}=A$，$B^{\mathrm{T}}=-B$，从而$AA^{\mathrm{T}}=A^2$，$BB^{\mathrm{T}}=-B^2$，故$AA^{\mathrm{T}}=-BB^{\mathrm{T}}$。又因对任意方阵$M$，$MM^{\mathrm{T}}$的对角线元素为$\sum_{j=1}^{n}m_{ij}^2$，$i=1,2,\cdots,n$，非负，故$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2=0$，从而$A=B=O$。

10．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为 3 阶矩阵，$\left|\boldsymbol{A}\right| = -2$，$\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{ABA} + 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，求$\left|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\right|$。

解　由$\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{ABA} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} = -4\boldsymbol{E},$$

故$\left|\boldsymbol{A}\right| \cdot \left|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\right| \cdot \left|\boldsymbol{A}\right| = \left|-4\boldsymbol{E}\right| = (-4)^3$，从而可得$\left|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\right| = -16$。

11．设$\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n} \geq 2$）阶方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵为$\boldsymbol{A}^*$，且$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq 0$，证明：$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}$．

证　由矩阵与伴随矩阵之间的关系，有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$，因$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq 0$，两边取行列式，可得$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}$。

12．(2013) 设$A=(a_{ij})$是 3 阶非零矩阵，$\left|A\right|$为A的行列式，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，若$a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则$\left|A\right|=$______．

12．(2013) 设$A=(a_{ij})$是 3 阶非零矩阵，$|A|$为A的行列式，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，若$a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则$|A|=$______.

解　由$a_{ij}+A_{ij}=0$可得$A_{ij}=-a_{ij}$，从而$A^{*}=-A^{\mathrm{T}}$，故$AA^{*}=-AA^{\mathrm{T}}=|A|E$. 两边取行列式得（因$A$为 3 阶矩阵）

$$|A|^{3}=-|A|^{2},$$

故$|A|=0$或$|A|=-1$.

当$|A|=0$时，$-AA^{\mathrm{T}}=O$，从而$A=O$（可通过验证AA^{T}的对角线元素为$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{2}=0$，得证$A$的每个元素均须为 0），与已知矛盾，故$|A|=-1$.

13． 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为 3 维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)，\quad \boldsymbol{B}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)，$$

如果$|\boldsymbol{A}|=1$，那么$|\boldsymbol{B}|=$________.

解 **方法 1：**由题设，有

$$\boldsymbol{B}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}，$$

于是有$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times2=2$。

13. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为 3 维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)，\quad \boldsymbol{B}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)，$$

如果$|\boldsymbol{A}|=1$，那么$|\boldsymbol{B}|=$________.

解 **方法 2：利用行列式性质**

$$|\boldsymbol{B}|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$\overset{\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_1}{\underset{\boldsymbol{c}_3-\boldsymbol{c}_1}{=\!=\!=\!=}}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|$$

$$\overset{\boldsymbol{c}_3-2\boldsymbol{c}_2}{=\!=\!=\!=}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3|$$

$$\overset{\boldsymbol{c}_2-3\boldsymbol{c}_3}{\underset{\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_3}{=\!=\!=\!=}}2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|，$$

因$|\boldsymbol{A}|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1$，故$|\boldsymbol{B}|=2$.

15． 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为三维列向量，且$\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right| = 5$，求

$$\left|\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \quad \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1 \quad \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2\right|.$$

解 $\left|\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \quad \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1 \quad \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2\right|$

$$\xlongequal[c_3 + c_1]{c_2 + c_1} \left|\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \quad -2\alpha_3 \quad -2\alpha_2\right|$$

$$= 4\left|\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2\right|$$

$$\xlongequal{c_1 + c_2 + c_3} 4\left|\alpha_1 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2\right|$$

$$\xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_3} -4\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right| = -20。$$

14. 设A是 3 阶方阵，A^*是A的伴随阵，$\left|A\right| = \frac{1}{2}$，求行列式$\left|(3A)^{-1} - 2A^*\right|$.

解 因$AA^* = \left|A\right|E = \frac{1}{2}E$，故$A^* = \frac{1}{2}A^{-1}$，从而

$$\left|(3A)^{-1} - 2A^*\right| = \left|\frac{1}{3}A^{-1} - A^{-1}\right| = \left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right| = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{\left|A\right|} = -\frac{16}{27}。$$

1．举例说明下列命题是错误的.

（1）若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

（2）若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

（3）若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

1．举例说明下列命题是错误的.

（1）若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

（2）若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

（3）若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

解 （1）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，但$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$。

（2）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，但$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$。

（3）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，满足条件，但$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$。

2. (2016) 设n阶矩阵A与B等价，则必有(　　)

(A) 当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$时，$|\boldsymbol{B}|=a$.　　(B) 当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　　(D) 当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

2．(2016) 设n阶矩阵A与B等价，则必有(　　)

(A) 当$|A|=a(a\neq 0)$时，$|B|=a$.　　(B) 当$|A|=a(a\neq 0)$时，$|B|=-a$.

(C) 当$|A|\neq 0$时，$|B|=0$.　　(D) 当$|A|=0$时，$|B|=0$.

解　因为矩阵A与B等价的充分必要条件是：存在可逆矩阵P，Q，使得$PAQ=B$，从而$|P|\cdot|A|\cdot|Q|=|B|$，故$|A|=0$时，有$|B|=0$，选 D.

也可由. . 与B等价得$r(A)=r(B)$，从而当$|A|=0$时，$r(A)<n$，故$r(B)<n$，即$|B|=0$，选 D.

3．判断下列命题是否正确：

(1) 可逆对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵；

(2) 设A,B为n阶方阵，若AB不可逆，则A,B均不可逆；

(3) 设A,B,C为n阶方阵，若$ABC=E$，则$C^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

(4) 设A,B为n阶可逆方阵，若$AB=BA$，则$A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

(5) 设A,B为n阶方阵，若$A+B$，$A-B$均可逆，则A,B一定可逆。

3．判断下列命题是否正确：

(1) 可逆对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵；

(2) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵，若$\boldsymbol{AB}$不可逆，则$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均不可逆；

(3) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$为$n$阶方阵，若$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶可逆方阵，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(5) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵，若$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$均可逆，则$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$一定可逆。

解　(1) 正确。因$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，且$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$，故$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，即$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，得$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，得逆矩阵仍对称。

(2) 错误。例如：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{AB}$不可逆，但$\boldsymbol{A}$可逆。

(3) 错误。由$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$得$\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{AB}$，无法得到$\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，除非$(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$。

(4) 正确。对等式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$两边取逆即可得证。

(5) 错误。例如：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$均可逆，但$\boldsymbol{B}$不可逆。

4．证明下列命题：

（1）若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^*$可逆且$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

（2）若$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，则$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

（3）$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

4．证明下列命题：

（1）若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^*$可逆且$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

（2）若$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，则$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

（3）$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

证　由伴随矩阵的性质，有$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，从而

（1）$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，得$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$；

（2）由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$知$|\boldsymbol{A}|^2=1$，又

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A},$$

$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，故$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$。

（3）$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

5． 设n阶行列式$\left|\boldsymbol{A}\right|=\dfrac{1}{2}$，则$(2\boldsymbol{A}^*)^*=$________.

解 因$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$，且$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$，有$\boldsymbol{A}^*=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{\left|\boldsymbol{A}\right|}\boldsymbol{A}$，$\left|\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}$，

从而

$$(2\boldsymbol{A}^*)^*=\left|2\boldsymbol{A}^*\right|(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}=2^n\left|\boldsymbol{A}^*\right|\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=2^{n-1}\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}\cdot\frac{1}{\left|\boldsymbol{A}\right|}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}。$$

7．（2010）设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$________．

解　由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$，所以

$$|A+B^{-1}|=|A(A^{-1}+B)B^{-1}|=|A||A^{-1}+B||B^{-1}|,$$

因 $|B|=2$，故 $|B^{-1}|=|B|^{-1}=\dfrac{1}{2}$，所以有

$$|A+B^{-1}|=|A||A^{-1}+B||B^{-1}|=3\times 2\times\frac{1}{2}=3.$$

8．(2012) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\left|\boldsymbol{A}\right| = 3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第二行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\left|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*\right| =$______.

8．(2012) 设A为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第一行与第二行得到矩阵B，则$|BA^*|=$______.

解　由伴随矩阵的性质对n阶方阵$\boldsymbol{A}$，有：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，可得$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}|^2$.

设$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$|\boldsymbol{E}_{12}|=-1$，且依题意有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$，从而

$$|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|^3=-27.$$

9. (2011) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（　　）

(A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P_2$　　(C) P_2P_1　　(D) $P_2P_1^{-1}$

解　由初等矩阵与初等变换的关系知 $AP_1=B$，$P_2B=E$，故 $A=BP_1^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$，故选 D.

10．（2012） 设A为 3 阶矩阵，P为 3 阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$．若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^{-1}AQ=$（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

10.（2012）设A为 3 阶矩阵，P为 3 阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^{-1}AQ=$(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解　$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=PE_{12}(1)$，又$E_{12}^{-1}(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，故

$$Q^{-1}AQ=\left(PE_{12}(1)\right)^{-1}A\left(PE_{12}(1)\right)=E_{12}^{-1}(1)(P^{-1}AP)E_{12}(1)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix},$$

故选 B.

11．(2015) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{a} & -1 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$且$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

（1）求a的值；

（2）若矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位阵，求$\boldsymbol{X}$.

11．(2015) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{a} & -1 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$且$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

（1）求a的值；

（2）若矩阵X满足$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，$E$为 3 阶单位阵，求$X$.

解 (1) 由$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，得$|\boldsymbol{A}|=0$，从而

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{a} & -1 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a} & -1 \\ -\boldsymbol{a} & 1 & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}=\boldsymbol{a}^3=0,$$

得$a=0$．验证可得$a=0$时$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$成立.

(2) 由题意知$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，可得$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$，

从而$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$，可得

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\left((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\right)^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})^{-1}.$$

因$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，有

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&-1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{\substack{r_1-r_3\\r_2-r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-1&1&0&-1\\0&2&-1&0&1&-1\\0&-1&1&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-1&1&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&-1&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-1&1&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&3&1&-2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right),$$

故$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

12． 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$ ＝________．

解 由题设 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，从而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}).$$

13．(2018) 已知a是常数，且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \boldsymbol{a}\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$可经初等变换化为矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{a} & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

（1）求$\boldsymbol{a}$；

（2）求满足$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.

13．(2018) 已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等变换化为矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

（1）求a；

（2）求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

解 (1) 因A与B等价，故$r(A)=r(B)$. 又

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}\underline{\underline{r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0,$$

所以

$$\left|B\right| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_3 + r_1}} \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{vmatrix} = 2 - a = 0,$$

得$a=2$．可验证$a=2$时，A可通过初等变换化为B（秩均为 2）.

(2) 可逆矩阵P满足$AP=B$，即解矩阵方程$AX=B$:

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得

$$P = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix};$$

又P可逆，所以$\left|P\right| \neq 0$，得$k_2 \neq k_3$，其中k_1, k_2, k_3为任意常数.

2．用矩阵分块的方法，证明下列矩阵可逆，并求其逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

解　（1）$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & \\ & 3 & \\ & & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，则有$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{21}^{-1} \\ \boldsymbol{B}_{12}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{C}_{11}^{-1}\boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

（4）$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

令$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_{n-1} \end{pmatrix}$，则$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \frac{1}{a_{n-1}} \end{pmatrix}$，

而原式=$\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ a_n & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_n} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} px_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+px_2+x_3=p \\ x_1+x_2+px_3=p^2 \end{cases}$

$$(A,b)=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 1 & p & 1 & p \\ p & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 1-p & 1-p^2 & 1-p^3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 0 & (1-p)(p+2) & (1-p)(1+p)^2 \end{pmatrix}$$

1） 无解 $(1-p)(p+2)=0$但是$(1-p)(1+p)^2 \neq 0$时无解，即$p=-2$.

2） 唯一解 $|A| \neq 0$即$1\cdot(p-1)(1-p)(p+2) \neq 0$，解得$p \neq 1$且$p \neq -2$. 此时的解为

$\left(-\dfrac{p+1}{p+2}, \dfrac{1}{p+2}, \dfrac{(p+1)^2}{p+2}\right)$.3） 无穷解 $|A|=0$,解之有$p=1$或者$p=-2$（舍）. 故$p=1$

解为$(1-k_1-k_2, k_1, k_2)$,

2. 解矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\4&-5&2\\1&-4&-1\end{pmatrix}.$$

解 $$\left(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&-2&-1\\2&1&0&4&-5&2\\-3&2&-5&1&-4&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&-2&-1\\0&1&-2&2&-1&4\\0&2&-2&4&-10&-4\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&-2&-1\\0&1&-2&2&-1&4\\0&0&2&0&-8&-12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3\div 2\\ r_1-r_3}]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&2&5\\0&1&0&2&-9&-8\\0&0&1&0&-4&-6\end{array}\right),$$

故$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-9&-8\\0&-4&-6\end{pmatrix}.$$

3. 若$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{A}^{-1}$, 其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{X}$.

3. 若X满足$X+A^{-1}X=A^{*}+A^{-1}$, 其中$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求$X$.

解 对等式$X+A^{-1}X=A^{*}+A^{-1}$两边同时左乘A，利用$AA^{*}=|A|E$可得$AX+X=|A|E+E$，即$(A+E)X=(|A|+1)E$，计算易得$|A|=-2$，从而$X=-(A+E)^{-1}$.

也对下面矩阵进行初等行变换，可得

$$\left(A+E\;\vdots\;-E\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&-1&0&0\\0&3&0&0&-1&0\\1&0&2&0&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{\substack{r_3-r_1\\ r_2\div 3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&-2&0&1\\0&1&0&0&-\frac{1}{3}&0\\1&0&2&1&0&-1\end{array}\right),$$

故$X=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-\frac{1}{3}&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$。

4．判断下列命题是否正确：

(1) 初等矩阵的乘积仍是初等矩阵；

(2) 单位矩阵是初等矩阵；

(3) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵；

(4) 初等矩阵的伴随矩阵仍是初等矩阵；

(5) 可逆矩阵只经过初等列变换便可化为单位矩阵；

(6) 矩阵的初等变换不改变矩阵的可逆性。

解　(1) 不正确。

(2) 正确。

(3) 正确。

(4) 不正确。

(5) 正确。

(6) 正确。

5．已知$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 8 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 16 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{X}$.

解　对下面矩阵进行初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & -4 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 0 & -1 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

设$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$，则原矩阵方程等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{k}_1\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{k}_2\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{k}_3\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-11\\0\\5\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$为任意实数。故原方程的解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-3\boldsymbol{k}_1-1 & -3\boldsymbol{k}_2+4 & -3\boldsymbol{k}_3-11\\ \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{k}_2 & \boldsymbol{k}_3\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix},$$ 其中$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$为任意实数。

6. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 3 & 1\end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{AB})^{-1}=$__________.

解　易知$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 3\end{pmatrix}$，可得$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$。

7． 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+E$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，则$|B|=$________.

解 **方法 1：** 易计算得$|A|=3$，对等式两边同时右乘A，得$ABA^*A=2BA^*A+A$，于是有$3AB=6B+A$，即$(3A-6E)B=A$，再两边取行列式，有$|3A-6E||B|=|A|=3$，而$|3A-6E|=27$，故所求行列式为$|B|=\dfrac{1}{9}$。

方法 2： 由题设条件$ABA^*=2BA^*+E$得$(A-2E)BA^*=E$，两边取行列式，得$|A-2E||B||A^*|=|E|=1$，其中

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=3,\quad |A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2=9,\quad |A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1,$$

故$|B|=\dfrac{1}{|A-2E||A^*|}=\dfrac{1}{9}$。

8． 设A为任一n（$n \geq 3$）阶方阵，A^*为A的伴随阵，又常数$k \neq 0, \pm 1$，则$(kA)^*$必为________.

(A) kA^*　　(B) $k^{n-1}A^*$　　(C) k^nA^*　　(D) $k^{-1}A^*$.

解　当A可逆时，由$A^* = |A|A^{-1}$，有

$$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A| \cdot \frac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*.$$

故应选 B.

9．设n阶方阵A,B,C满足$ABC=E$，其中E是n阶单位阵，则必有________.

(A) $CBA=E$　(B) $BCA=E$　(C) $BAC=E$　(D) $ACB=E$

解　由于A,B,C满足$ABC=E$，对等式两边取行列式，得$|A|\cdot|B|\cdot|C|=1$，得$|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$，$|C|\neq 0$，故A，B，C均可逆。对于$ABC=E$，先左乘A^{-1}再右乘A有$BCA=E$，故应选 B.

事实上，对于$ABC=E$先右乘C^{-1}再左乘C，也有$CAB=E$.

11. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶方阵，则必有________.

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$ (B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$ (D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

11． 设A,B均为n阶方阵，则必有________.

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ (B) $AB=BA$

(C) $|AB|=|BA|$ (D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

解 应选 C。

当行列式的一行(列)是两个数的和时,可把行列式对该行(列)拆开成两个行列式之和，拆开时其它各行(列)均保持不变．对于行列式的这一性质应当正确理解.

因此，若要拆开n阶行列式$\left|A+B\right|$，则应当是2^n个n阶行列式的和，所以(A)错误．矩阵的运算是表格的运算，它不同于数字运算，矩阵乘法没有交换律，故(B)不正确.

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$存在时，不一定$\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$都存在，即使两者均存在，也不一定有D 选项成立，例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}，$$

故选项(D)错误.

由行列式乘法公式$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$知(C)正确.

注意，行列式是数，故恒有$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|$. 而矩阵则不行，故(B)不正确.

13． 设A是 3 阶方阵，将A的第 1 列与第 2 列交换得B，再把B的第 2 列加到第 3 列得C，则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q为________

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 由题设，有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{AQ},$$

故$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，应选 D.

14. 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，将$\boldsymbol{A}$的第 2 行加到第 1 行得$\boldsymbol{B}$，再将$\boldsymbol{B}$的第 1 列的-1倍加到第 2 列得$\boldsymbol{C}$，记$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则________

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ (B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$ (C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ (D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$

解 依题设，将$\boldsymbol{A}$的第 2 行加到第 1 行得$\boldsymbol{B}$，将$\boldsymbol{B}$的第 1 列的-1倍加到第 2 列得$\boldsymbol{C}$，即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C},$$

因$\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$，故$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}$，从而$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$，选 B.

15． 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$， $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$A$可逆，则$B^{-1}=$__________.

（A） $A^{-1}P_1P_2$　　（B） $P_1A^{-1}P_2$　　（C） $P_1P_2A^{-1}$　　（D） $P_2A^{-1}P_1$

解　将A的2、3列互换，再1、4列互换，可得B，根据初等阵的性质，有$B=AP_2P_1$，两边求逆，且$P_1^{-1}=P_1, P_2^{-1}=P_2$，得

$$B^{-1}=\left(AP_2P_1\right)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}=P_1P_2A.$$

故应选（C）.

1． 已知$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{A}^5$.

解 先求$\boldsymbol{P}^{-1}$。

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&0&-2&1&0\\0&1&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&-1&0\\0&0&1&-4&1&1\end{array}\right),$$

故$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}。$$

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

2. 对n阶方阵$\boldsymbol{A}$，证明：$(\boldsymbol{A}^*)^* = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

证　若 A 可逆, 则$\boldsymbol{A}^* = \left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1} \Rightarrow (\boldsymbol{A}^*)^* = \left|\boldsymbol{A}^*\right|(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1} \cdot \dfrac{\boldsymbol{A}}{\left|\boldsymbol{A}\right|} = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-2}\boldsymbol{A}$;

若 A 不可逆, 则

$$R(A) < n \Rightarrow R(A^*) \le 1 \Rightarrow R((A^*)^*) = O \Rightarrow (A^*)^* = O = \left|A\right|^{n-2}A.$$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{n}-1 \\ \boldsymbol{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，求 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}$.

解 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}$ 即 $\boldsymbol{A}^*$ 中所有元素相加。因 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n-1}\boldsymbol{n}!\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 可逆。可求

得 $$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}=|\boldsymbol{A}|\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)=(-1)^{n-1}\boldsymbol{n}!\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\boldsymbol{i}}。$$

5． 设A可逆，且A的每行元素之和均为a，证明：

（1） $a \neq 0$；

（2） A^{-1}的每行元素之和等于$\frac{1}{a}$；

（3） A^m（m为正整数）的每一行的元素之和为a^m.

证 （1）将矩阵A所对应的行列式中每一列均加到第一列，从而第一列有公因子a，由行列式的性质可得 $|A| = a|B| \neq 0$，故$a \neq 0$.

（2）设$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$A^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$，$E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$为单位矩阵，由题设条件有

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = (a, a, \cdots, a)^{\mathrm{T}},$$

因$A^{-1}A = E$，即$A^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$，从而

$$A^{-1}\alpha_j = e_j, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\alpha_1 + \boldsymbol{A}^{-1}\alpha_2 + \cdots + \boldsymbol{A}^{-1}\alpha_n = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

即$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{a}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = (\frac{1}{\boldsymbol{a}}, \frac{1}{\boldsymbol{a}}, \cdots, \frac{1}{\boldsymbol{a}})^{\mathrm{T}}.$$

(3) 由$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \cdots, \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}$，即$\boldsymbol{A}(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{a}(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，从而可得

$$\boldsymbol{A}^2(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{a}(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{A}(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{a}^2(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

重复上述过程，有$\boldsymbol{A}^m(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{a}^m(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，即$\boldsymbol{A}^m$ (m为正整数) 的每一行的元素之和为$\boldsymbol{a}^m$.