

## 第 12 章 真空中的稳恒磁场

在前面两章中我们研究了静止电荷在其周围激发的静电场的性质和规律，以及静电场与导体和电介质的相互作用规律。如果电荷在运动，那么电荷周围就不仅有电场，而且还有磁场。本章我们首先讨论恒定电流的描述及其产生的条件，然后重点讨论稳恒电流产生的磁场的性质和规律，主要内容有：描述磁场性质的物理量——磁感应强度矢量  $\mathbf{B}$ ，电流激发磁场的基本公式——毕奥-萨伐尔定律；描述磁场性质的两个基本定理——磁场的高斯定理和安培环路定理；磁场对电流和运动电荷的作用规律——安培力和洛伦兹力。

### § 12.1 恒定电流

我们知道当导体在静电场中处于静电平衡状态时，其内部的电场强度  $\mathbf{E}$  处处为零，导体内部的自由电荷没有宏观的定向运动，只有无规则的热运动，整个导体是一个等势体。但是如果在导体两端维持一个恒定的电势差，从而在导体内部产生一个恒定不变的电场，则导体内的自由电荷做无规则热运动的同时，还将在电场力的驱动下做宏观的定向运动而形成电流。

本节将论述恒定电流的描述及其形成条件，欧姆定律的微分形式，电源电动势等基本概念。

#### 12.1.1 电流 电流密度

电流是由电荷的定向运动形成的。导体中的运动电荷可以是自由电子、正离子或负离子，这些运动电荷统称为**载流子**（carrier），载流子的定向运动形成的电流称为**传导电流**（conductive current）。此外，带电物体做机械运动时也能形成电流，称为**运流电流**（convection current）。本节只讨论传导电流。

我们知道在导体内要形成传导电流必须满足两个条件，一是存在可以自由移动的载流子，二是有驱动载流子做定向运动的电场。在金属导体内，形成电流的载流子是自由电子；半导体内的载流子是带负电的自由电子和带正电的“空穴”；电解液中的载流子是正负离子。通常人们规定正电荷定向流动的方向为电流的方向。因此导体内的电流总是沿着电场线的方向流动，即总是由电势高处流向电势低处。必须指出，电流虽然有大小和流向，但不是矢量，而是标量。

描述电流强弱的物理量是**电流强度**，简称**电流**（electric current），用  $I$  表示，它定义为单位时间内通过导体横截面的电量，即

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (12.1)$$

在国际单位制中，电流为 7 个基本物理量之一，其单位为安培，用符号 A 表示。安培

的定义为：当基本电荷  $e$ ，以单位 C，即  $A \cdot s$ ，表示时，将其固定数值取为  $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$  来定义安培，其中秒用  $\nu_{Cs}$  定义。电流的其它常用单位还有毫安（mA）和微安（ $\mu A$ ），它们之间的换算关系为： $1\mu A = 10^{-3} mA = 10^{-6} A$ 。

电流  $I$  仅仅反映了通过导体横截面的电流的整体情况，当电流在粗细不均匀的导体中或者在大块导体中流动时，电流  $I$  不能具体描述导体任一横截面上各处的电流分布情况，如图 12.1 所示。为了定量地描述导体内电流的空间分布特点，必须引入一个新的物理量——**电流密度**（current density），用符号  $\mathbf{j}$  表示。电流密度是一个矢量，其方向表示导体内任一点处电流的方向（即正电荷在该处定向漂移的运动方向），大小表示通过该点与电流方向垂直的单位横截面上电流的大小。在国际单位制中，其单位是： $A \cdot m^{-2}$ 。

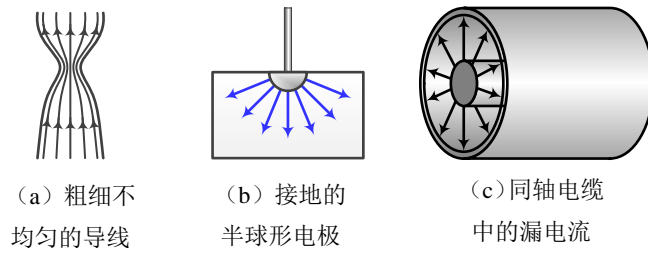


图 12.1 在大块导体中的电流分布

如图 12.2 所示，假设在大块导体内任意一点处，在垂直于电流方向上取一面积元  $dS_0$ ，若在  $t$  时刻通过面积元  $dS_0$  的电流为  $dI$ ，则该处电流密度  $\mathbf{j}$  为

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_0} \mathbf{n}_0$$

(12.2)

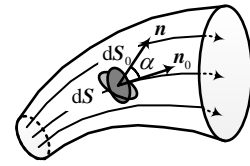


图 12.2 电流密度

式中  $\mathbf{n}_0$  是沿电流方向的单位矢量。一般情况下，面积元  $dS$  的法线方向与该处电流方向之间有一个夹角  $\alpha$ ，则通过该面积元的电流为

$$dI = j \, dS \cos \alpha = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.3)$$

于是通过导体内任意一个曲面  $S$  的电流为

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.4)$$

上式表明，通过导体内任意曲面  $S$  的电流等于电流密度矢量通过该曲面的通量，即电流密度  $\mathbf{j}$  对于该曲面  $S$  的曲面积分。

在大块导体内各点电流密度  $\mathbf{j}$  的大小和方向一般是不同的，而且随时间改变，即  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z, t)$ ，因此电流密度  $\mathbf{j}$  在导体内将会形成一个随时间变化的矢量场，称之为**电流场**，它反映了导体内部在某一时刻电流的空间分布情况。为了能形象、直观地描述电流在导体内部的分布情况，我们引入**电流线**（electric current line）的概念来描述电流场。人们规定：**电流线上任意一点的切线方向与该点处电流密度矢量  $\mathbf{j}$  的方向一致**（也与正电荷在该点定向

漂移的运动方向一致), 电流线的疏密程度表示电流密度的大小。

### 12.1.2 电流连续性方程 电流恒定的条件

根据电流的定义:  $I = \frac{dq}{dt}$ , 若在导体内任取一封闭曲面  $S$ , 则电流密度  $\mathbf{j}$  对该封闭曲面的通量  $\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  就是单位时间内从该封闭曲面内流出的总电量  $\frac{dq}{dt}$ 。由电荷守恒定律可知, 在  $dt$  时间内从封闭曲面  $S$  内向外流出的电量  $dq$ , 应等于封闭曲面内总电量  $Q$  的减少量  $-dQ$ 。若以  $\frac{dQ}{dt}$  表示封闭曲面内总电量随时间的变化率, 则有

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (12.5a)$$

式 (12.5a) 称为**电流的连续性方程**。显然, 该方程是电荷守恒的必然结果, 也是电荷守恒定律的数学表述。若利用  $Q = \iiint_V \rho dV$ , 其中  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  为电荷体密度分布函数, 则电流的连续性方程式 (12.5a) 又可表示为

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (12.5b)$$

下面从电流连续性方程 (12.5) 出发, 来讨论恒定电流产生的条件。在导体内任意取一个封闭曲面  $S$ , 如果在封闭曲面  $S$  内的总电量  $Q$  不随时间变化, 亦即  $dQ/dt = 0$ , 则有

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (12.6)$$

上式表明, 当导体内任何地方都不会出现电荷的积累或削减时, 从封闭曲面的一部分流入的电流, 等于从封闭曲面其余部分流出的电流。这意味着此时导体内的电流分布达到了稳定状态, 即电流密度矢量  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z)$  的空间分布将不随时间变化, 这样的电流称为**恒定电流**, 或称为**稳恒电流**。所以式 (12.6) 就是**电流恒定的条件**。

### 12.1.3 欧姆定律及其微分形式

#### 1. 欧姆定律

德国物理学家欧姆 (Georg Simon Ohm, 1787--1854) 在 1826 年通过实验发现, 导体中的电流  $I$  与该导体两端的电势差  $U = V_1 - V_2$  成正比, 与该导体的电阻  $R$  成反比, 即

$$I = \frac{U}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R} \quad (12.7)$$

这一规律称为**欧姆定律**。欧姆定律表明: 当导体两端的电势差  $U$  一定时, 导体的电阻  $R$  越大, 流过导体的电流  $I$  就越小;  $R$  越小, 通过导体的电流就越大。所以电阻  $R$  的大小反映了导体对电流的阻碍程度。

实验表明,导体的电阻与导体材料的性质、形状、尺寸和温度等因素有关。对于横截面均匀的导体,当导体的材料均匀一致,温度一定时,其电阻 $R$ 与导体的长度 $l$ 成正比,与导体的横截面积 $S$ 成反比,即

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (12.8)$$

此式称为**电阻定律**。式中的比例系数 $\rho$ 由导体材料的性质和温度决定,称为导体的**电阻率**,

其倒数称为**电导率**,用符号 $\sigma$ 表示,即 $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ,电导率越大表示导体的导电能力越强。

在国际单位制中,电阻 $R$ 的单位是: $\Omega$ ,电阻率 $\rho$ 的单位是: $\Omega \cdot \text{m}$ ,电导率的单位是: $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

若电流在截面不均匀的导体中流动,或导体的电阻率 $\rho$ 不均匀时,则可将导体沿电流方向分解为无穷多个长为 $dl$ 的“短导体”的串联,导体的总电阻可通过以下积分式计算,即

$$R = \int dR = \int \rho \frac{dl}{S} \quad (12.9)$$

**例 12.1** 如图 12.3a 所示,高度为 $h$ 的两个共轴金属圆环,其内环的外半径和外环的内半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ,两环间充满电阻率为 $\rho$ 的均匀导电材料( $\rho$ 远大于金属圆环的电阻率)。当两环之间加上电压 $U$ 后,电流沿径向由内向外流动。试求:

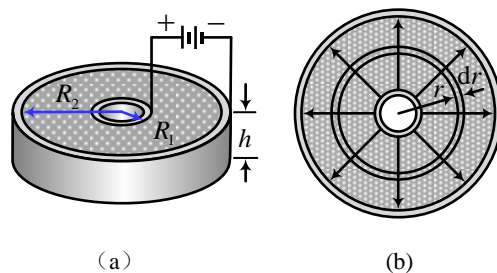


图 12.3 例 12.1 图

- (1) 两圆环之间导电材料的总电阻;
- (2) 两环之间距离环心为 $r$ 处电流密度的大小和方向。

**解:** (1) 由题意可知,两导体圆环之间将有径向电流,电流方向沿径向从内向外,相应的电阻称为径向电阻。由于沿径向方向导体的横截面积随半径改变,所以因利用式(12.9)计算总电阻。为此,在导电材料上任取一半径为 $r$ 、宽度为 $dr$ 、高度为 $h$ 的薄圆环,其侧面积为 $2\pi rh$ ,则薄圆环的径向电阻为

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi rh}$$

所以整个导电材料的径向总电阻为

$$R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{2\pi rh} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

- (2) 由欧姆定律可得导电材料中的径向总电流为

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi h U}{\rho \ln(R_2/R_1)}$$

于是在距离环心为 $r$ 处电流密度的大小为

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi rh} = \frac{U}{r\rho \ln(R_2/R_1)}$$

方向沿径向向外。

## 2. 欧姆定律的微分形式

导体中的电流是导体中的载流子在电场力的驱动作用下做定向运动的结果, 而导体内电流的分布状况用电流密度矢量  $\mathbf{j}$  来描述, 因此导体内电流密度的分布与电场强度的分布必定有密切关系, 这种关系可以用欧姆定律  $I = U/R$  导出。

如图 11.4 所示, 在恒定电流场  $\mathbf{j}$  中沿电流线方向取一段长为  $d\mathbf{l}$ 、横截面积为  $dS$  的微流管, 则该微流管中的电流为  $dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = j dS$ , 电阻为  $R = \rho \frac{d\mathbf{l}}{dS}$ , 式中  $\rho$  为微流管中的电阻率。假设微流管两端的电势分别为  $V$  和  $V + dV$ , 其两端的电势差为

$$dU = V - (V + dV) = -dV$$

再由欧姆定律  $dI = \frac{dU}{R}$ , 可得

$$j = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{dV}{d\mathbf{l}} \right) = \sigma E \quad (12.10)$$

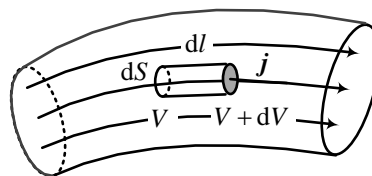


图 12.4 欧姆定律的微分形式

式中  $E = -\frac{dV}{d\mathbf{l}}$  是微流管中的电场强度。因导体内  $\mathbf{j}$  与  $\mathbf{E}$  的方向处处相同, 所以式 (12.10)

也可表示为矢量形式, 即

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (12.11)$$

这一关系称为**欧姆定律的微分形式**。

欧姆定律的微分形式描述了导体内部  $\mathbf{j}$  与  $\mathbf{E}$  的线性响应的关系, 它表明导体中各点的电流密度与该点处的电场强度成正比。它不仅在稳恒条件下适用, 而且在场强  $\mathbf{E}$  不太大、电流变化不太快的非稳恒条件下也适用, 因此欧姆定律的微分形式比由式 (12.7) 给出的欧姆定律更具普适性。

## 12.3 电源 电动势

### 1. 电源

要在导体中维持稳恒电流, 就必须在导体内保持恒定不变的电场, 也就是要在导体两端维持恒定不变的电势差。那么, 怎样才能维持恒定不变的电势差呢?

首先我们来考察一个带电电容器的放电过程, 如图 12.5 所示。开始时电容器的两个极板 A、B 分别带有正负电荷, 当用导线将电容器的正负极板连接起来时, 在静电力作用下, 正电荷从正极板通过导线流到负极板形成电流 (实际流动的是带负电的自由电子), 但这种

电流是一种瞬态电流,因为两极板上的正负电荷因不断中和而逐渐减少,两极板间的电势差与导线中的电流也逐渐减小直至为零。可见在电流回路中仅有静电力的作用无法维持稳恒电流。

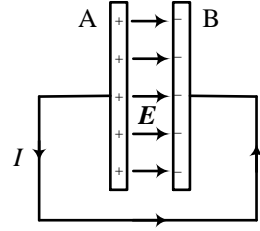


图 12.5 电容器的放电过程

为在导体内维持恒定电流,需要有一种本质上与静电力完全不同的**非静电力**,它能不断地将正电荷从负极输运到正极,以维持两极板间有一个恒定的电势差,从而在导体中建立恒定电场,产生恒定电流。我们将**能够提供非静电力、并能将其他形式的能量转换成电能的装置称为电源 (power)**。由此可见,电源的作用就是提供非静电力,用于反抗静电力而做功,将正电荷从电源负极通过电源内部输运到电源正极,以维持正负极之间有一个恒定不变的电势差,同时将其其他形式的能量转换成电能。

电源的种类有很多,常见的有干电池、纽扣电池、可充电的铅锌蓄电池、锂电池、太阳能电池以及各种交直流发电机等。

## 2. 电动势

通常的电源都有正、负两极。正电荷经电源的外电路,在静电力作用下从电源正极流向电源负极,然后在非静电力作用下,通过电源正负两极之间的内电路,从负极流向正极,内外电路衔接形成闭合电路。在电源的持续作用下,电荷在闭合电路中源源不断地流动,形成恒定电流。

我们用  $E_k$  表示单位正电荷受到的非静电力,人们将**单位正电荷从电源负极经电源内部输运到正极时,非静电力所做的功**:  $\int_-^+ E_k \cdot dl$ , 称为电源的**电动势 (electromotive force)**, 常用  $\varepsilon$  表示, 即

$$\varepsilon = \int_-^+ E_k \cdot dl$$

(12.12)

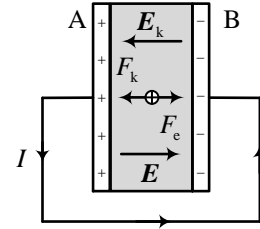


图 12.6 电源及其电动势

电源电动势的大小反应了电源内部非静电力做功的本领,或者说反映了电源将其它形式的能量转换为电能的能力。在国际单位制中,电动势的单位也是: 伏【特】(V)。

**电动势是标量**,但是习惯上我们给电动势定义了一个方向,即在**电源内部从负极指向正极作为电动势的方向**。

如果在整个闭合回路上都存在着非静电力,例如在电磁感应中,当闭合回路放在随时间变化的磁场中时,回路上处处都存在由涡旋电场产生的非静电力。在这种情形,就没有“电源内部”和“电源外部”之分,整个闭合回路的总电动势为

$$\varepsilon = \oint_L E_k \cdot dl$$

(12.13)

上式表明,闭合回路上的电动势等于将单位正电荷沿此回路运动一周时非静电力所做的功。

## § 12.2 磁场 磁感应强度

### 12.2.1 基本的磁现象

早在公元前 6~7 世纪,人类对磁现象就有了初步的发现与认识。我国春秋时期的古书《吕氏春秋》中就记载有“磁石召铁”的现象。人类早期发现的磁铁矿( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )是一种天然磁石,而现代广泛使用的磁铁则多数是由铁、钴、镍等合金人工制成。研究发现,天然磁铁和人工磁铁都具有吸引铁、钴、镍等物质的特性,称为**磁性**(magnetism)。磁铁上磁性最强的区域称为**磁极**(magnetic pole)。自然界中磁铁的磁极总是成对出现的,分别被称为北极(N极)和南极(S极)。无论将磁铁截断分割成多么小的部分,它的每一部分都具有—对磁极。迄今为止,人类还没有发现能在自然界稳定存在的单独磁极(也称为磁单极)。如同静止电荷之间存在相互作用的静电库仑力—样,磁极之间也存在相互作用,并有类似的规律:即同性磁极相互排斥,异性磁极相互吸引。实验观测表明,地球自身就是一个巨大的磁体,因为放置在地球表面的小磁针的两极总是分别指向地球的南北两极。古代中国人最早利用这一现象发明了指南针,被广泛应用于军事与航海活动,并最早发现了地磁场的两极方向与地理上的南北极方向之间的夹角,称为**磁偏角**(magnetic declination),这一发现被记载于沈括的《梦溪笔谈》。

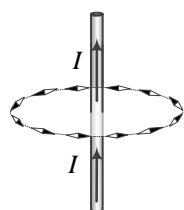


图 12.7 直流电附近小磁针取向的右手定则

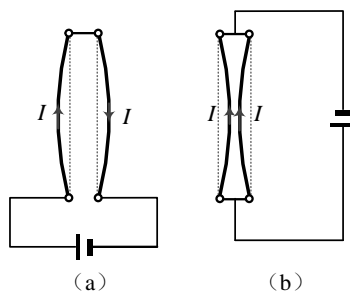


图 12.8 通电导线之间的相互作用

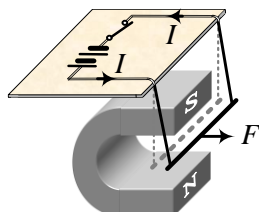


图 12.9 磁场对通电导线的作用

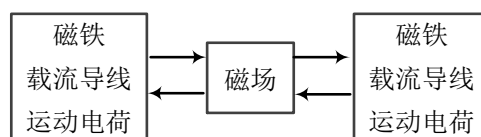


图 12.10 6 种基本的磁相互作用

实际上在人类发展的历程中,磁现象的发现要早于电现象。但在相当长的一段时期内,磁现象与电现象的研究一直彼此独立地进行着,这是因为当时人们还没有认识到两种现象之间的内在联系。直至 1820 年 7 月 21 日,丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted)公布了他的一项重要发现:通电导线会使其附近的小磁针发生偏转。这才逐渐揭开了电磁现象之间的内在联系。同年 9 月 18 日,法国物理学家安培(A. M. Ampere)通过大量实验发现了载流导线周围小磁针偏转的右手定则,如图 12.7 所示;9 月 27 日又发现了两根通电载流导线也有

相互作用，如图 12.8 所示。在随后完成的一系列的实验中，人们又相继发现了磁铁与载流导线之间、磁铁与运动电荷之间、甚至运动电荷与运动电荷之间都有相互作用力。这种力统称为**磁力**（magnetic force）。由此人们总结出基本的磁相互作用可以用图 12.10 来表示。

至此人们认识到磁现象与电现象之间是彼此密切相关的。基于这一认识，安培于 1822 年提出了著名的有关物质磁性本质的**分子电流假说**。安培认为一切磁现象的根源是电流，磁性物质的分子中存在环形电流，称为分子电流（molecular current）。物质的磁性起源于构成物质的分子电流对外界的磁效应的总和。

安培的这一假说与现代的物质磁性理论是符合的。近代物理理论指出，分子电流是由原子核外电子的绕核运动和自旋运动形成的，而导线中的电流同样是由电荷的定向运动形成的，所以一切磁现象的本质都起源于电荷的运动。

## 12.2.2 磁场 磁感应强度

同电荷与电荷之间的电相互作用需要电场来传递一样，各种磁相互作用也不是超距作用，也需要一种特殊的物质来传递，这种特殊的物质称为**磁场**（magnetic field）。各种磁性物质、载流导线和运动电荷都会产生磁场，并对处于磁场中的其它磁性物质、载流导线和运动电荷产生磁力作用，如图 12.10 所示。近代物理实验表明，磁场和电场一样，都是物质存在的一种形式，它们都具有能量和质量，当电磁场在空间运动时，它们还具有动量。

人们曾经用试验电荷作为测试手段，来讨论和检测静电场的强弱和性质。与此类似，在研究磁场时，我们也可从磁场对运动电荷或小磁针或小线圈的作用规律出发，来定量地描述和研究磁场，从而定义体现磁场强弱和性质的一个重要的物理量——**磁感应强度**（magnetic induction），并用矢量符号  $\mathbf{B}$  表示。

实验发现，磁场对运动电荷的作用力的大小和方向不仅与运动电荷的电量有关，而且还与电荷运动的速度大小以及方向有关，当电量为正（ $q > 0$ ）的试验电荷，以速度  $\mathbf{v}$  进入某一磁场时，

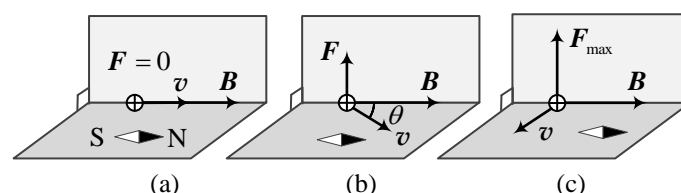


图 12.11 运动电荷在磁场中受到的磁力——洛伦兹力

1. 如果试验电荷在磁场内沿某个特殊的方向（或其相反方向）运动，运动电荷在磁场中所受的磁力为零，即  $\mathbf{F} = 0$ ；如果我们在磁场中放置一个小磁针，则小磁针停止转动时其 N 极就指向该特殊方向，如图 12.11（a）所示。我们规定这个特殊方向就是该处磁场中磁感应强度矢量  $\mathbf{B}$  的方向，也称为该处的磁场方向。



2. 当试验电荷的运动方向与磁场方向有任意夹角  $\theta$  时, 试验电荷  $q$  在磁场中受到的磁力  $F$  的大小虽然不同, 但其方向总是垂直于  $v$  与磁场方向所组成的平面, 如图 12.11 (b) 所示。

3. 当试验电荷  $q$  的速度  $v$  垂直于磁场方向时, 其所受到的磁力取得最大值  $F_{\max}$ , 如图 12.11 (c) 所示。定量研究表明, 这个最大磁力  $F_{\max}$  的大小与试验电荷的电量  $q$  和它速度的大小  $v$  的乘积成正比, 但比值  $\frac{F_{\max}}{qv}$  具有确定的值, 只与该点磁场的强弱有关。磁场中不同的点这一比值一般不同, 这反映了不同点处磁场的强弱程度一般不同。

由此, 我们定义磁感应强度矢量  $B$  的大小为

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \quad (12.14)$$

磁感应强度矢量  $B$  的方向就是小磁针在该处静止时 N 极的指向。

人们通过实验归纳出运动电荷在磁场中受到的磁力可表示为

$$F = qv \times B \quad (12.15)$$

这就是运动电荷在磁场中受到的磁场力, 通常称为洛伦兹力。

在国际单位制 (SI) 中, 磁感应强度  $B$  的单位为特斯拉, 符号为 T, 即

$$1\text{T} = \frac{1\text{N}}{1\text{C} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 1\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

在工程上,  $B$  的单位还有另外一种常用的、非国际单位制单位, 称为高斯 (Gauss), 符号为 G, 它与特斯拉 (T) 的关系为

$$1\text{T} = 10^4\text{G}$$

## § 12.3 毕奥—萨伐尔定律

在静电场中求任意带电体产生的场强分布时, 我们可将带电体看成是由无限多个电荷元组成的集合, 先求出任意电荷元 (可视为点电荷) 的场强分布, 再利用场强叠加原理求解该带电体产生的场强分布。本节, 我们将采用类似的方法求解任意载流导线所产生的磁场分布。

### 12.3.1 毕奥-萨伐尔定律

1820 年 10 月, 法国物理学家毕奥 (J. B. Biot) 和萨伐尔 (F. Savart) 通过实验发现, 载流直导线周围任意一点的磁场, 其磁感应强度的大小与直导线上电流的大小成正比, 与直导线到该场点的距离  $r$  成反比。后来法国数学家拉普拉斯 (P. S. M. Laplace) 根据毕奥和萨伐尔的实验结论, 运用物理学的思想方法, 从数学上给出了一个电流元产生的磁感应强度的数学表达式, 从而建立了著名的毕奥-萨伐尔定律。

在真空中, 任意形状的一段载流导线可以看作是由许多长度为  $dl$ 、电流为  $I$  的无限小段

电流构成的集合，每一小段上的电流  $I$  与其长度矢量  $d\mathbf{l}$  的乘积称为**电流元**，记为  $I d\mathbf{l}$ 。特别注意：电流元  $I d\mathbf{l}$  是一个矢量，其方向就是电流元所在位置处电流的方向。

毕奥-萨伐尔定律指出：电流元  $I d\mathbf{l}$  在空间某点 P 处激发的磁感应强度  $d\mathbf{B}$  的大小与电流元  $I d\mathbf{l}$  的大小成正比，与电流元到点 P 的距离  $r$  的平方成反比，与电流元  $I d\mathbf{l}$  和矢径之间的夹角  $\theta$  的正弦成正比，在国际单位制中， $d\mathbf{B}$  的大小用数学公式可表示为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (12.16)$$

式中  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  为比例系数， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$  称为真空磁导率。 $d\mathbf{B}$  的方向与  $I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$  的方向相同，即  $d\mathbf{B}$  的方向与  $I d\mathbf{l}$  和  $\mathbf{r}$  的方向之间满足右手螺旋关系，如图 12.12 (b) 所示。若将式 (12.16) 写成矢量形式，则有

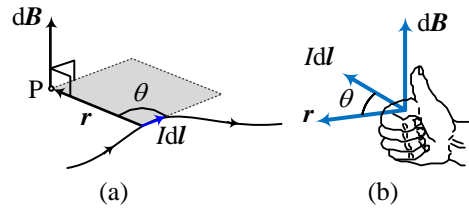


图 12.12 毕奥-萨伐尔定律

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (12.17)$$

其中  $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$  为  $\mathbf{r}$  方向的单位矢量。此即毕奥-萨伐尔定律的数学表达式。实验证明，磁场和电场一样，也遵守场强叠加原理。因此，整个载流导线在空间某点 P 产生的磁感应强度等于各电流元在 P 点产生的磁感应强度  $d\mathbf{B}$  的矢量和，即

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (12.18)$$

上式为一矢量积分，实际计算时可根据具体情况先求出  $d\mathbf{B}$  在各坐标轴上的分量，然后对各分量式进行积分，最后进行矢量合成。

应该指出，毕奥-萨伐尔定律是在大量实验基础上经理论分析与科学抽象得出的结论，由于不存在单独的电流元，因此，该结论不能用实验直接证明，然而由这个定律得到的结果和实验相符，这就间接证明了毕奥-萨伐尔定律的正确性。

### 12.3.2 毕奥-萨伐尔定律的应用

毕奥-萨伐尔定律表明，只要给定任意形状载流体的电流的空间分布，原则上，就可以算得磁场的空间分布。下面应用式 (12.18) 来导出几种典型形状的载流导线的激发的磁场分布公式。

#### 1. 载流直导线的磁场

如图 12.13 所示，真空中有一根长度为  $l$ 、通有恒定电流  $I$  的直导线  $A_1A_2$ ，试求载流直导线附近任意一点 P 处的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。已知 P 点到直导线的垂直距离为  $a$ 。

过 P 点作直导线的垂线，取其垂足为坐标原点 O，建立如图 12.13 所示的直角坐标系 O-xyz，载流导线沿 y 轴放置，电流沿 y 轴正方向流动。在载流导线上距离 O 为 y 处任取一电流元 Idy。由毕奥-萨伐尔定律，它在 P 点处激发的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idy \sin \theta}{r^2}$$

其方向垂直于 O-xy 平面并沿 z 轴负方向。由于载流导线上各电流元在 P 点处产生的磁感应强度的方向均相同，因此整个载流导线在 P 点产生的磁感强度大小为

$$B = \int_{A_1}^{A_2} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin \theta dy}{r^2}$$

式中 r、y、θ 均为变量。由图中的几何关系可知，

$$r = \frac{a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{a}{\sin \theta}$$

$$y = a \cot(\pi - \theta) = -a \cot \theta$$

将上式两边取微分，有

$$dy = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

将以上关系式代入 B 的表达式，并积分可得

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (12.19)$$

其中，θ<sub>1</sub> 为载流导线起点处电流方向与连线 A<sub>1</sub>P 之间的夹角；θ<sub>2</sub> 为导线终点处电流方向与连线 A<sub>2</sub>P 之间的夹角。

当直导线的长度 l >> a 时，此时载流直导线近似为“无限长”。在导线的起点处 θ<sub>1</sub> = 0，终点处 θ<sub>2</sub> = π，代入式 (12.19)，可得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (12.20)$$

这就是“无限长”载流直导线的磁感应强度的分布公式。不难看出，“无限长”载流直导线产生的磁场分布具有“无限长”的轴对称性，即在与直导线垂直的任意平面内，在半径为 a 的圆周上各点磁感应强度的大小均相等，方向均沿圆周的切线方向，并与电流方向满足右手螺旋法则，如图 12.14 所示。

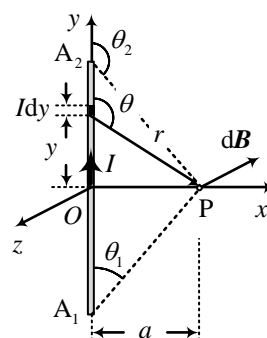


图 12.13 载流直导线的磁场

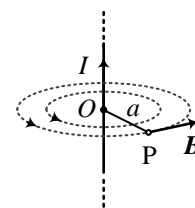


图 12.14 “无限长”载流直导线的场强分布

## 2. 圆电流轴线上任意一点的磁场

如图 12.15 所示，真空中有一载流圆环，通有恒定电流 I，已知圆环的半径为 R，试求圆环轴线上任意一点 P 处的磁感应强度。

以圆心为坐标原点，x 轴沿圆环的轴线方向，建立直角坐标系，如图所示。在圆环上任

取一个电流元  $I d\mathbf{l}$ ，该电流元到轴线上任意一点 P 点的矢径为  $\mathbf{r}$ ，不难看出，电流元矢量  $I d\mathbf{l}$  与矢径  $\mathbf{r}$  的夹角为  $\pi/2$ 。由毕奥-萨伐尔定律可得，电流元  $I d\mathbf{l}$  在 P 点的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\pi/2)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

方向垂直于  $I d\mathbf{l}$  与  $\mathbf{r}$  构成的平面。显然，圆环上各电流元在 P 点激发的磁感应强度的方向各不相同。但由电流分布的轴对称性可知，圆环上各电流元在 P 点激发的磁感应强度在垂直于  $x$  轴方向上的投影分量  $d\mathbf{B}_\perp$  将互相抵消，所以

P 点处磁感应强度的方向将平行于  $x$  轴。为此，我们只需考虑  $d\mathbf{B}$  沿  $x$  轴上的分量  $d\mathbf{B}_x$ ，并对其积分即可。由图可知

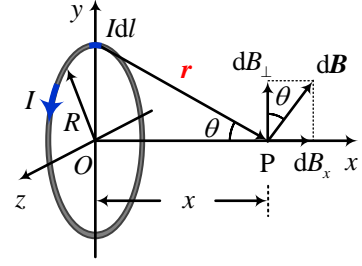


图 12.15 圆电流轴线上的磁场

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} dl$$

所以圆电流在 P 处产生的磁感应强度  $\mathbf{B}$  的大小为

$$B = \int_l dB_x = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}$$

通常将上式改写为

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (12.21a)$$

此即圆电流轴线上任意一点 P 处磁感应强度  $\mathbf{B}$  的计算公式，场强的方向与电流方向同样满足右手螺旋定则。

由式 (12.21a)，可以得到在圆电流的圆心处 ( $x=0$ )，磁感应强度的大小为

$$B_o = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (12.22)$$

利用圆电流圆心处的场强公式，圆电流轴线上任意一点的场强公式 (12.21a) 还可以写成更加简单和更便于记忆的公式，即

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \sin^3 \theta = B_o \cdot \sin^3 \theta \quad (12.21b)$$

其中  $B_o$  为圆电流在圆心处激发的磁场。

在讨论圆电流和其它平面载流线圈的磁性质时，我们通常引入**磁矩** (magnetic moment) 概念来加以描述。如果有一个平面载流线圈，线圈中的电流为  $I$ ，线圈的面积为  $S$ ，线圈的总匝数为  $N$ ，则该平面载流线圈的磁矩定义为

$$\mathbf{P}_m = NIS\mathbf{n} \quad (12.23)$$

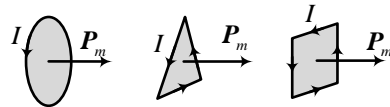


图 12.16 平面载流线圈的磁矩

式中， $\mathbf{n}$  为线圈平面法向的单位矢量，它与线圈中的电流方向构成右手螺旋关系，如图 12.16

所示。于是圆电流轴线上任意一点的磁感应强度公式还可以写为

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 P_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (12.21c)$$

### 3. 载流密绕直螺线管线圈在其轴线上的磁场

设真空中有一半径为  $R$  的均匀密绕的载流直螺线管线圈，其电流为  $I$ ，管长为  $l$ ，沿轴线单位长度的匝数为  $n$ 。图 12.17 画出了包含线圈轴线的纵向剖面图。

试求螺线管内轴线上任意一点  $P$  处的磁感应强度  $B$ 。

整个载流直螺线管线圈可看成是由许多半径相同的圆电流的集合。取  $P$  点为坐标原点  $O$ ， $x$  轴沿轴线方向。在距离  $P$  点为  $x$  处，任取一小段长为  $dx$  的圆线圈（可视为圆电流），其上圆线圈的匝数为  $ndx$ ，相应的等效圆电流的大小为

$$dI = nI dx$$

利用圆电流轴线上任意一点的场强公式（12.21a），该等效圆电流在  $P$  点处激发的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^2 nI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

方向沿轴线方向，且与电流方向成右手螺旋关系。所以  $P$  点处总磁感应强度的大小为

$$B = \int dB = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 R^2 nI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{\mu_0 nI}{2} \left[ \frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right] \quad (12.24)$$

式（12.24）就是载流密绕直螺线管线圈轴线任意一点处磁感应强度的计算公式。

当管长  $l \gg R$  时，螺线管可近似为无限长，此时  $x_1 \rightarrow -\infty$ ， $x_2 \rightarrow \infty$ ，代入上式，可得

$$B = \mu_0 nI \quad (12.25)$$

此结果表明，无限长载流密绕直螺线管线圈在其轴线上各点的磁感应强度均相等。下一节还将证明，长直螺线管内部的磁场是均匀磁场。

在长直螺线管线圈的端口处，如螺线管的左端， $x_1 = 0$ 、 $x_2 \rightarrow \infty$ ，于是

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 nI \quad (12.26)$$

比较式（12.25）和（12.26）可知，载流密绕直螺线管端口处磁感应强度的大小近似等于螺线管中部轴线上磁感应强度大小的一半，螺线管轴线上各处磁感应强度的分布情况大致如图 12.18 所示。

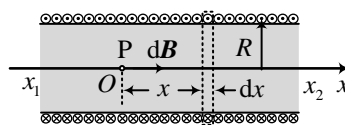


图 12.17 载流直螺线管线圈轴线上任意一点处的磁场计算

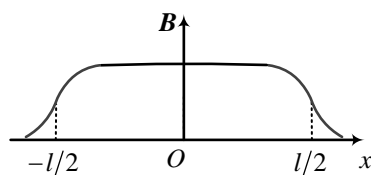


图 12.18 载流直螺线管线圈轴线上磁场分布

**例 12.2** 一根无限长载流导线被弯曲成如图 12.19 所示的形状, 其中 ab、cd 均为直线段, bc 段是半径为  $R$  的圆弧, 对应的圆心角为  $120^\circ$ , 圆心在 ab 的延长线上, 且 ab 与 cd 垂直。已知导线中的电流为  $I$ 。试求载流导线在圆心  $O$  处产生的磁感应强度。

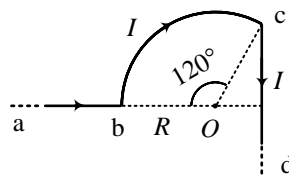


图 12.19 例 12.2 图

**解:** 根据场强叠加原理, 圆心  $O$  处的磁场由 ab、bc、cd 三段载流导线共同产生。由于  $O$  点在导线 ab 的延长线上, 由毕奥-萨伐尔定律可知, ab 段在  $O$  处产生的磁感应强度为零, 即  $B_{ab} = 0$

圆心  $O$  到直导线 cd 段的距离为

$$a = R \sin 30^\circ = R/2$$

所以由载流直导线产生的场强分布公式, 可得直导线 cd 段在圆心  $O$  点产生的磁感应强度为

$$B_{cd} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 30^\circ - \cos 180^\circ) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$$

方向垂直纸面向里;

再求圆弧 bc 段产生的磁场。在圆弧上任取一个电流元  $Idl$ , 由毕奥-萨伐尔定律, 可知它在圆心  $O$  处产生的磁感应强度的大小为

$$dB_{bc} = \frac{\mu_0 Idl \sin 90^\circ}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}$$

方向垂直纸面向里, 所以整个  $1/3$  圆弧段产生的磁感应强度的大小为

$$B_{bc} = \int dB_{bc} = \int_0^{2\pi/3} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{1}{3}$$

根据场强叠加原理, 圆心  $O$  处总磁感应强度的大小为

$$B = B_{ab} + B_{bc} + B_{cd} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) + \frac{\mu_0 I}{6R}$$

方向垂直纸面向里。

**例 12.3** 如图 12.20 所示, 一块宽为  $b$  的无限长载流导体薄板, 其电流为  $I$ 。试求薄板中轴线外、离薄板的距离为  $a$  的 P 点的磁感应强度。

**解:** 以 P 点到薄板中轴线的垂足作为坐标原点  $O$ , 建立坐标系如图 12.21 所示, 其中图 (b) 是它的俯视图。该载流薄板可看成是由许多沿  $z$  轴流动的长直载流导线组成的集合。任取一个宽为  $dy$  的

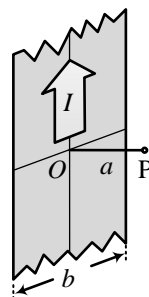


图 12.20 例 12.3 图

长直导线, 其上电流为  $dI = \frac{I}{b} dy$ , 它在 P 点处激发的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi r} dI = \frac{\mu_0 I}{2\pi b \sqrt{a^2 + y^2}} dy$$

其方向在  $O$ - $xy$  平面内，且与由  $dy$  引向点  $P$  的矢径垂直，如俯视图 (b) 中所示。不难看出， $dB$  在  $x$ 、 $y$  轴上的投影分量为

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I y}{2\pi b (a^2 + y^2)} dy$$

$$dB_y = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I a}{2\pi b (a^2 + y^2)} dy$$

对上述两个分量分别积分，可得

$$B_x = \int dB_x = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\mu_0 I y}{2\pi b (a^2 + y^2)} dy = 0$$

$$B_y = \int dB_y = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\mu_0 I a}{2\pi b (a^2 + y^2)} dy = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{2a}$$

即  $P$  点磁感应强度的大小为  $\frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{2a}$ ，方向沿  $y$  轴方向。

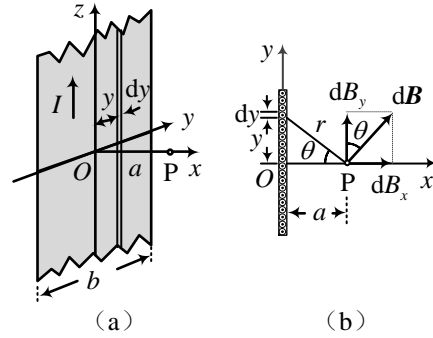


图 12.21 例 12.3 解图

### 12.3.3 运动电荷的磁场

由于电流是由电荷的定向运动形成的，据此我们自然地能够理解，电流产生的磁场从本质而言是运动电荷产生的磁感应强度的叠加的结果。下面我们利用毕奥-萨伐尔定律推导出运动电荷产生的磁感应强度的计算公式。

如图 12.22 所示，设导体中单位体积内有  $n$  个做定向运动的电荷，每个电荷带有电量  $q$ （不妨假设  $q > 0$ ），以平均漂移速度  $v$  沿电流元  $Idl$  方向匀速运动而形成电流  $I$ ，如果电流元的横截面为  $s$ ，则单位时间通过横截面  $s$  的电量为  $nqsv$ ，亦即  $I = nqsv$ ，将其代入电流元  $Idl$  表达式，则有

$$Idl = nqsvdl = nqsdl \cdot v$$

由毕奥-萨伐尔定律，该电流元在场点  $P$  处产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \times r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{nqsdl(v \times r)}{r^3}$$

同时注意到电流元内有  $dN = nsdl$  个运动电荷，故每一个以速度  $v$  运动的电荷  $q$  在场点  $P$  处产生的磁感应强度  $B$  就是

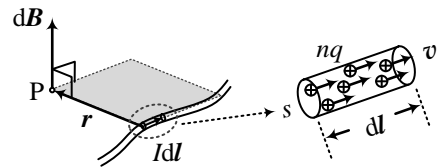


图 12.22 运动电荷产生的磁场公式的推导

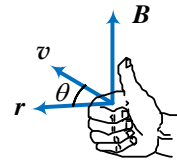


图 12.23  $q > 0$  时， $B, v, r$  成右手螺旋关系

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (12.27)$$

当  $q > 0$  时, 场强的方向与 “ $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ ” 的方向相同, 即垂直于  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{r}$  组成的平面, 且与  $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{r}$  成右手螺旋关系, 如图 12.23 所示。式 (12.27) 就是运动电荷激发的磁感应强度的计算公式。

**例 12.4** 如图 12.24 所示, 一半径为  $R$  的均匀带电薄圆盘, 其电荷面密度  $\sigma > 0$ 。当圆盘绕通过其中心并与盘面垂直的轴, 以角速度  $\omega$  转动时, 试求圆盘中心  $O$  点处的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。

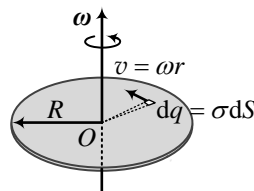


图 12.24 例 12.4 图

**解:** 在圆盘上任取一个面积为  $dS = r dr d\theta$  的电荷元, 则该电荷元所带的电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$$

它随圆盘转动时的线速度为  $v = r\omega$ 。由运动电荷的场强公式, 可得电荷元在圆心  $O$  处产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{v dq \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{r\omega \cdot \sigma r dr d\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \omega \sigma r dr d\theta$$

当  $\sigma > 0$  时, 方向沿转轴向上 (与角速度  $\omega$  的方向相同)。所以圆心处的总磁感应强度的大小为

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \omega \sigma r dr d\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma R$$

方向沿转轴向上。

注: 整个带电圆盘也可以看成是由许多圆环组成的集合。半径为  $r$ , 宽度为  $dr$  的带电圆环绕其中心轴转动时就形成了一个等效圆电流  $dI = \frac{\omega}{2\pi} dq$  (称为运流电流), 式中  $dq$  为该圆环所带的电量, 然后可用圆电流的场强公式来计算。请读者试着用这种方法完成计算。

## § 12.4 真空中稳恒磁场的基本定理

与点电荷产生的静电场极为类似, 决定电流元激发的磁感应强度的毕奥-萨伐尔定律有着与距离成平方反比的空间分布规律, 这也决定了稳恒电流的磁场与静电场一样, 同样可以用高斯定理和环路定理来描述磁场的性质。本节我们首先介绍由法拉第提出的磁力线的概念, 然后再讨论磁场的高斯定理和环路定理及其应用。

### 12.4.1 磁感应线

在稳恒磁场中, 不同场点处磁感应强度  $\mathbf{B}$  的大小和方向一般不相同, 但对于磁场中某个确定的场点而言,  $\mathbf{B}$  的大小与方向是确定而唯一的。为了形象地描述磁场在空间的分布



情况，仿照引入电场线的方法，我们用一系列的曲线来描述磁场的空间分布，这些曲线被称为**磁感应线**（magnetic induction line）（又称**磁力线**），规定曲线上任一点的切线方向就是该点处磁感应强度  $B$  的方向，而空间任意点处磁感应线的疏密程度则反映了该处磁场的强弱。图 12.25 中描绘了几种典型的载流导线在某一平面内的磁感应线的分布情况。

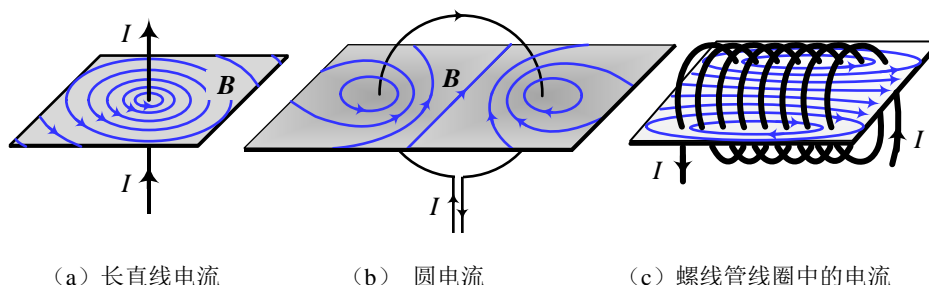


图 12.25 各种电流的磁感线

通过观察以上几种电流所产生的磁感应线的分布，可以看出磁感应线的分布有如下几个特点：

1. 所有磁感应线均为闭合曲线，既无起点，也无终点；
2. 对于一个给定的磁场分布，空间任一点的磁感应强度的方向是确定的，任何两条磁感应线不会相交；

3. 电流方向与其激发的磁场的磁感应线的方向符合右手螺旋法则，即：若用右手大拇指代表电流方向，则右手其余四指自然弯曲的指向即表示磁感应线的方向；反之，若用右手大拇指代表磁感应线的方向，则右手其余四指自然弯曲的指向即表示电流的方向。因此，人们通常采用右手螺旋法则来判断电流所产生的磁场的方向，如图 12.26 所示。

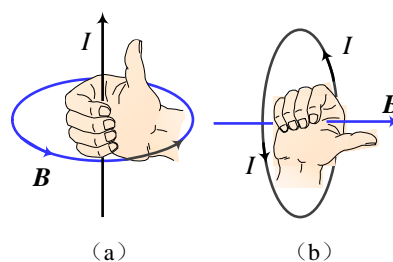


图 12.26 右手螺旋法则

## 12.4.2 磁通量

为了使磁感应线既能描述磁场的方向，还能描述磁场的强弱，对磁感应线的密度作如下规定：在磁场中某点处，通过与磁场方向垂直的单位面积上的磁感应线的根数就等于该点处磁感应强度的大小，即

$$B = \frac{dN}{dS_{\perp}} \quad (12.28)$$

可见  $B$  大的地方，磁感应线较密集； $B$  小的地方，磁感应线较稀疏。对于均匀磁场，磁感应线相互平行，且各处场线密度均匀；对于非均匀磁场，各条磁感应线不平行，各处磁感应线的密度不均匀。

我们将磁场中通过某个曲面的磁感应线的根数，称为通过该曲面的**磁通量**（magnetic

flux), 用  $\Phi_m$  表示。

对于均匀磁场中的一个平面  $S$ , 当磁场方向与该平面的法线方向的夹角为  $\theta$  时, 如图 12.27 (a) 所示, 通过该平面的磁通量为

$$\Phi_m = BS \cos \theta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (12.29)$$

而对于非均匀磁场中的一个任意曲面  $S$ , 如图 12.27 (b) 所示, 为了求出通过该曲面的磁通量, 我们首先在该曲面上任意取一个非常小的面元:  $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$ , 其中  $\mathbf{n}$  为该面元的法向单位矢量, 通过该面元的磁通量记为

$$d\Phi_m = B \cos \theta dS = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.30a)$$

于是, 通过整个曲面  $S$  的总磁通量为

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \iint_S B \cos \theta dS = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.30b)$$

式 (12.30) 就是计算磁通量的基本公式。由磁通量的计算式可以看出, 磁通量是一个有正负之分的标量。当面元的法线方向与该处磁场方向之间的夹角  $\theta < 90^\circ$  时, 通过该面元的磁通量为正, 当于夹角  $\theta > 90^\circ$  时, 磁通量为负。

在国际单位 (SI) 制中, 磁通量的单位为韦伯 (wb), 即  $1\text{wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$ 。

**例题 12.5** 在一根“无限长”载流直导线旁, 有一个与直导线共面的矩形回路, 其中回路的  $ab$  边与长直导线平行, 矩形回路的尺寸以及与直导线的位置关系如图 12.28 所示。当长直导线内通有电流  $I$  时, 试求通过矩形回路的磁通量。

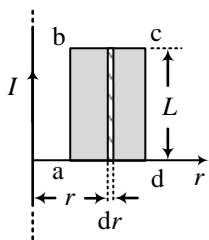


图 12.29 例 12.5 解图

**解:** 因为长直载流导线在导线外任意一点产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向垂直于矩形回路所在平面。为此在回路内距离导线为  $r$  处,

取一个长为  $L$ 、宽为  $dr$  的面元  $dS = Ldr$ , 如图 12.29 所示。则通过该面元的磁通量为

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} Ldr$$

所以通过整个矩形回路的磁通量为

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} Ldr = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

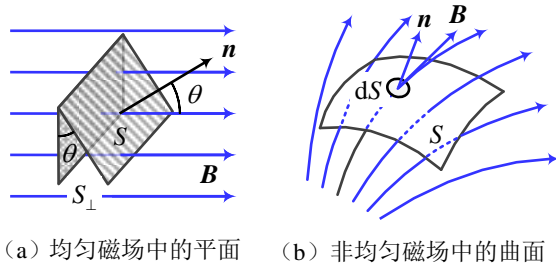


图 12.27 磁通量

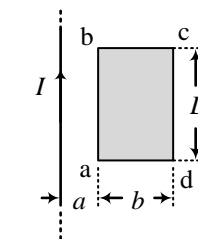


图 12.28 例 12.5 图

### 12.4.3 磁场的高斯定理

对于闭合曲面来说，闭合曲面上任意一个面积元的法线正方向  $\mathbf{n}$  同常规定为从曲面内指向曲面外。这样，当磁感应线从曲面外穿进曲面内时，该处的磁通量为负 ( $\theta > 90^\circ$ )，当磁感应线从曲面内穿出时，该处的磁通量为正 ( $\theta < 90^\circ$ )，如图 12.30 所示。由于所有的磁感应线都是闭合曲线，有多少条磁感应线穿入闭合曲面，就有多少条磁感线穿出该曲面，所以由磁通量的物理意义可知，磁感应强度对任意一个闭合曲面的磁通量必等于零，即

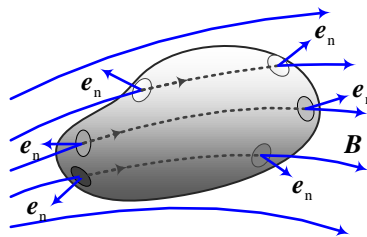


图12.30 闭合曲面的磁通量

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (12.31)$$

上式就是**磁场的高斯定理**的数学表达式，它是描述磁场基本性质的重要定理之一，它不仅适用于磁铁、电流和运动电荷产生的稳恒磁场，也适用于变化的电场所激发的磁场（参见本书第 15 章 电磁场与电磁波）。

磁场的高斯定理与静电场的高斯定理  $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$  虽然形似，却有着本质的区别。

静电场的高斯定理表明静电场是有源场（或电场线是发散的）；磁场的高斯定理表明磁场是无源场，所有的磁感应线都是无头无尾的闭合曲线，即磁场是涡旋场，自然界不存在与电荷相对应的磁荷（或叫**磁单极**），所有的磁极总是成对出现的。所以静电场和磁场是两类不同性质的场。

### 12.4.4 真空中磁场的安培环路定理

在静电场中，由于静电场是有源的无旋场，即描述静电场分布的电场线都是发散的，不可能形成闭合曲线，所以电场强度  $\mathbf{E}$  对于任意一个闭合回路的环流（或线积分）恒等于零，即： $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。而在磁场中，描述磁场分布的磁力线都是闭合曲线，即磁场是无源的涡旋场，所以磁感应强度  $\mathbf{B}$  对于任意一个闭合回路的环流（即线积分）不一定为零。由毕奥-萨伐尔定律可以证明（此处从略）：**在真空中磁感应强度  $\mathbf{B}$  对于任意一个闭合回路  $L$  的环流（即线积分）等于真空中的磁导率  $\mu_0$  与该闭合回路  $L$  所包围的电流的代数和  $\sum I_i$  之积。**其数学表达式为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i \quad (12.32)$$

上式就是**真空中磁场的安培环路定理**（Ampere circuital theorem）。 $\sum I_i$  中的电流是取正值还是取负值，要依据电流穿过闭合回路时的方向与回路的绕行方向是否符合右手螺旋关系而定：若符合则  $I$  取正值，否则  $I$  取负值。

式(12.32)表达了电流与它所激发的磁场之间的普遍规律，它说明了磁场的一个普遍性质，即磁场是涡旋场，或者说磁场是非保守力场。

值得注意的是：① 表达式(12.32)中的 $\mathbf{B}$ 是空间所有电流产生的总磁感应强度，但 $\sum I_i$ 仅仅指穿过闭合回路的电流的代数和，与闭合回路外的电流无关；② 即使 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 等于零，仅仅表明穿过回路的电流的代数和为零，但回路 $L$ 上任一点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 不一定等于零；③ 该定理仅适用于稳恒电流所产生的磁场（对于非稳恒电流情况，则要用全电流的安培环路定律，参见本书第15章 电磁场与电磁波）。

对于电流连续分布的载流体情形，安培环路定律可表示为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.33)$$

式中的 $\mathbf{j}$ 是以闭合回路 $L$ 为边界的曲面 $S$ 上的电流密度， $S$ 是以闭合回路 $L$ 为边界的任意曲面。

### 12.4.5 安培环路定理的应用

利用安培环路定理可以很简便地求出某些具有一定对称分布的电流产生的磁场分布。其方法是：先依据电流分布的对称性分析磁场分布的对称性；然后适当选取积分回路，选取积分回路的关键是：使回路上任一点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小相等，或者使回路的某一部分上 $\mathbf{B}$ 与 $d\mathbf{l}$ 垂直，使得 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ，以便使 $\mathbf{B}$ 能够从积分式 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 中作为常数提出来。最后确定回路所包围的电流的代数和 $\sum I_i$ ，并由 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ 求 $\mathbf{B}$ 的大小。下面举例说明磁场的安培环路定理的应用。

**例 12.6** 如图 12.31 所示，一根半径为 $R$ 的“无限长”载流直圆柱形导体，电流 $I$ 沿轴向流动，且在圆柱体的横截面上均匀分布。试求圆柱体内外磁感应强度的分布。

**对称性分析：**由于电流在圆柱形导体的横截面上均匀分布，所以电流及其产生的磁场分布都具有“无限长”的轴对称性，即在与圆柱体垂直的任意一个截面内，在任意半径为 $r$ 的同轴圆的圆周上，各点磁感应强度的大小均相等，方向与圆柱体上的电流方向成右手螺旋关系。实际上该圆周就是一根磁感应线。

**解：**在垂直于圆柱体的截面内，取一个半径为 $r$ 的同轴圆周作为闭合回路，其绕行方向与磁感线的方向一致，由安培环路定理 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ ，可得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B \cdot d\mathbf{l} \cdot \cos 0^\circ = B \oint_L d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 \sum I_i$$

即

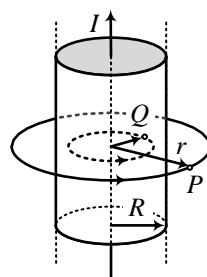


图 12.31 无限长载流直圆柱体内外的场强分布

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum I_i$$

当  $r \geq R$ ，即考察的场点  $P$  在圆柱体外部时， $\sum I_i = I$ ，代入上得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r \geq R)$$

当  $r < R$ ，即考察的场点  $Q$  在圆柱体内部时， $\sum I_i = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I}{R^2} r^2$ ，得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (0 < r < R)$$

$B$  的方向沿圆周的切线方向，并与圆柱体上的电流  $I$  成右手螺旋关系。

**例 12.7** 如图 12.32 所示为一个截面半径为  $R$  的载流密绕长直螺线管线圈，沿螺线管轴线单位长度上的线圈匝数为  $n$ ，线圈内通有电流  $I$ ，方向如图所示。试求螺线管内磁感应强度的分布。

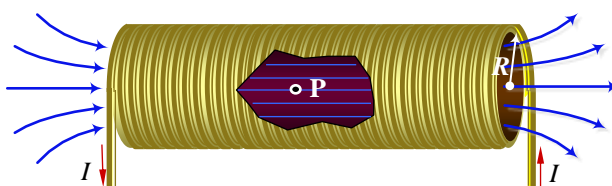


图 12.32 例 12.7 图

**对称性分析：**螺线管内、外任意一点的磁场是每一匝线圈（相当于一个圆电流）产生的磁感应强度  $B$  的矢量和，根据电流线与磁感应线之间的右手螺旋关系，可知管内磁场的方向沿螺线管的轴线方向；管外远离两端口的磁场很微弱，可忽略不计；两端管口处存在端口效应，在此不予讨论。

**解：**如图 12.33 所示为上述载流密绕长直螺线管的剖面图。过管内任意一点  $P$  作一个长为  $L$  的矩形回路  $abcd$ ，其中  $ab$  边与轴线平行， $cd$  边在螺线管的外面。由场强分布的对称性可知， $ab$  边上各点的磁感应强度的大小相同，方向从  $a$  指向  $b$ ，而且此回路所包围的电流  $\sum I_i = n \cdot \overline{ab} \cdot I = nLI$ 。由

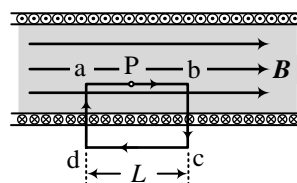


图 12.33 长直载流螺线管内的场强分布

安培环路定理  $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ ，我们有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 nLI$$

对于  $\overline{ab}$  段，因  $d\mathbf{l}$  与  $\mathbf{B}$  方向相同，且各点处  $\mathbf{B}$  的大小相同，所以  $\int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot \overline{ab} = BL$ ；

对于  $\overline{cd}$  段，因  $\mathbf{B} = 0$ ，所以  $\int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ；

对于  $\overline{bc}$  和  $\overline{da}$  段，因  $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$ ，所以  $\int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ；

最后整理可得

$$B = \mu_0 nI \quad (12.34)$$

方向沿螺线管的轴线方向，并与线圈中的电流成右手螺旋关系。

计算结果表明，载流长直密绕螺线管内的磁感应强度与 P 点的位置无关，且方向一致，因此螺线管内的磁场为一匀强磁场。

**例 12.8** 试求：载流密绕螺绕环内磁感应强度的分布。

已知螺绕环线圈的总匝数为  $N$ ，线圈中的电流为  $I$ ，环的内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，如图 12.34 所示。

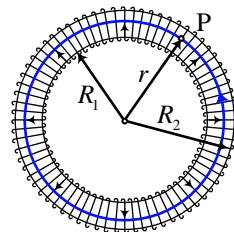


图 12.34 例 12.8 图

**对称性分析：**紧密缠绕着导线的环形管线圈称为**螺绕环**。因环上的线圈密绕，线圈通有电流时，产生的磁场几乎全部集中在环内，环外磁场几乎为零。由对称性分析可知，环内的磁感应线为一系列同轴圆，同一圆周上各点  $B$  的大小相等，方向均沿圆周的切线方向，并与线圈中的电流成右手螺旋关系。

**解：**为求环内任意一点 P 处磁感应强度的大小，取一个通过 P 点、半径为  $r$  的同轴圆作为闭合回路，其绕向与通过 P 点的磁感应线的方向相同。由安培环路定理  $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ ，可得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

所以螺绕环内任意一点处的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在环外，因  $\sum I_i = 0$ ，所以  $B = 0$ 。

计算结果表明，螺绕环内的磁感应强度  $B$  与 P 点的位置有关，即螺绕环内的磁场为非均匀磁场，且  $B$  的大小与  $r$  成反比。但如果螺绕环很细、截面很小，则  $r \approx R$ ，此时

$$B \approx \frac{\mu_0 N}{2\pi R} I \approx \mu_0 n I$$

因此可认为细螺绕环内各处的磁场大小近似相等。式中  $n = N/2\pi R$  为细螺绕环单位长度上线圈的匝数。

## § 12.5 磁场对电流的作用

稳恒磁场所满足的毕奥-萨伐尔定律，磁场的高斯定理，安培环路定理反映了电流与磁场间相互关系的一个方面，即电流的磁效应；本章将研究其另一方面，即磁场对电流的作用规律及其特点。

### 12.5.1 定培定律

安培于 1820 年，做了大量实验，通过分析实验结果，安培总结出磁场对电流的作用规

律：磁场对电流元  $Idl$  的作用力  $dF$  的大小与电流元的大小  $Idl$  成正比、与电流元所在位置处磁感应强度的大小  $B$  以及电流元  $Idl$  与磁感应强度  $B$  之间夹角  $\theta$  的正弦成正比，在国际单位制（SI）中，其数学表达式为

$$dF = BIdl \sin \theta \quad (12.35)$$

$dF$  的方向与矢量积  $Idl \times B$  的方向一致，即垂直于  $Idl$  与  $B$  组成的平面，并与  $Idl$  和  $B$  满足右手螺旋关系，如图 12.35 所示。这一规律称为安培定律（Ampere law）。载流导线在磁场中受到的磁场力通常被称为安培力。安培定律的矢量表达式为

$$dF = Idl \times B \quad (12.36)$$

顺便指出：电流元所受的安培力的方向也可以用高中物理中学过的左手定则来判断。

对于任意形状的载流导线在磁场中受到的安培力，应等于每个电流元受到的安培力的矢量和，可以通过沿载流导线做线积分来计算，即

$$F = \int_L dF = \int_L Idl \times B \quad (12.37)$$

应该指出：上述线积分是矢量积分。在实际计算时，应首先建立一个恰当的直角坐标系，求出任意电流元所受的安培力在各坐标轴上的分量： $dF_x$ 、 $dF_y$ 、 $dF_z$ ，再对各分量式求线积分，即：

$$F_x = \int_L dF_x, \quad F_y = \int_L dF_y, \quad F_z = \int_L dF_z \quad (12.38)$$

于是载流导线受到的总的安培力为

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (12.39)$$

**例 12.9** 电流为  $I$ ，半径  $R$  的半圆形载流导线处于均匀磁场  $B$  中， $B$  的方向垂直于导线所在平面，如图 12.36 所示。试求：半圆形载流导线所受的安培力。

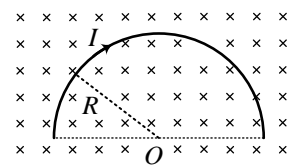


图 12.36 例 12.9 图

**解：**以圆心  $O$  为坐标原点，建立如图 12.37 所示的直角坐标系  $O-xyz$ ，其中  $z$  轴垂直纸面向外。在半圆形导线上任取一个电流元  $Idl$ ，因  $Idl \perp B$ ，所以该电流元受安培力  $dF$  的大小为

$$dF = BIdl \sin 90^\circ = BIdl$$

方向沿电流元的所在位置的径向方向。不难看出，半圆弧上不同的电流元其受力方向不同。为此，需将  $dF$  沿给定的坐标轴进行正交分解。不难看出， $dF$  在  $x$ 、 $y$  轴上的分量分别为

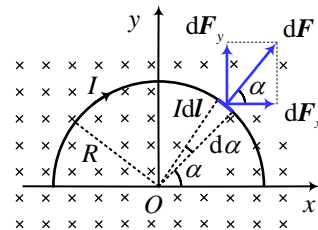


图 12.37 例 12.9 解图

$$dF_x = dF \cos \alpha = BI \cos \alpha dl$$

$$dF_y = dF \sin \alpha = BI \sin \alpha dl$$



又由图可知： $dl = R d\alpha$ ，所以

$$F_x = \int dF_x = \int_0^l BI \cos \alpha dl = \int_0^\pi BIR \cos \alpha d\alpha = 0$$

$$F_y = \int dF_y = \int_0^l BI \sin \alpha dl = \int_0^\pi BIR \sin \alpha d\alpha = 2RBI$$

该半圆形载流导线所受安培力为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = 2RBI \mathbf{j}$$

不难看出，该半圆形载流导线在均匀磁场中受到的安培力与在导线的起点和终点之间长为  $2R$ 、通有相同电流  $I$  的载流直导线受到的安培力相同。可以证明，这个结论具有普适性：即在匀强磁场中任意形状的一段载流导线所受的安培力，等效于在该导线的起点和终点之间的一根载流直导线在同一磁场中所受的安培力。

从上述结论还可以进一步推证：在均匀磁场中，任意一个闭合的载流导线受到的安培力一定等于零。

## 12.5.2 无限长平行载流直导线间的相互作用

电流能产生磁场，磁场又能对电流产生作用力。因此，载流导线之间存在磁相互作用。

如图 12.38 所示，假设真空中有两根相互平行的“无限长”载流直导线  $ab$  和  $cd$ ，相距为  $d$ ，分别载有同方向的电流  $I_1$  和  $I_2$ 。则导线  $ab$  上的电流在导线  $cd$  上产生的磁感应强度  $B_{12}$  的大小为

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

方向垂直于  $ab$  与  $cd$  构成的平面向下。于是，根据安培定律，在导线  $cd$  上的任一电流元  $I_2 dl_2$  受到的安培力  $dF_2$  的大小为

$$dF_2 = B_{12} I_2 dl_2 \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl_2$$

方向垂直指向导线  $ab$ 。

显然，载流导线  $cd$  上各电流元受力的大小和方向与上述电流元完全相同，所以导线  $cd$  单位长度上所受的安培力的大小为

$$F_2 = \frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (12.40)$$

同理，导线  $ab$  单位长度上所受的安培力的大小也为  $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$ ，方向与  $F_2$  相反，垂直指向导线  $cd$ 。

上述分析表明，当两根载流直导线通有同向电流时相互吸引。不难理解，如果两直导线

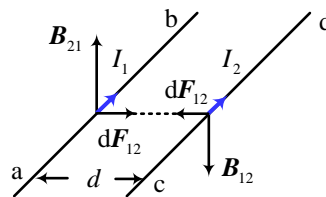


图 12.38 两根长直平行载流导线之间的相互作用



上通有反向电流则互相排斥。

在原来的（即 2019 年 5 月 20 日之前执行的）国际单位制中，电流的单位“安培”就是利用两根相互平行的载流长直导线所受的力来规定的：真空中相距为 1 米，并载有相等电流的两无限长直平行导线，当一根导线上每米长度所受的安培力为  $2 \times 10^{-7}$  牛顿时，这时导线中的电流强度规定为 1 安培（A）。在新的国际单位制中，安培的定义参见本套教材上册的附录 A，或本书第 2 页上的定义。

根据上述规定，我们还可以导出真空中的磁导率。将  $d=1\text{m}$ ， $I_1=I_2=1\text{A}$ ，

$$F_2 = \frac{dF_2}{dl} = 2 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \text{ 代入式 (12.40), 可得真空磁导率为}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$$

这表明，真空中的磁导率是一个具有单位的导出量。

### 12.5.3 均匀磁场对载流线圈的作用

假设有一刚性矩形载流线圈  $abcd$ ，边长分别为  $l_1$  和  $l_2$ ，通有电流  $I$ ，放置于磁感应强度为  $B$  的均匀外磁场中，如图 12.39 所示。设线圈平面的法线方向  $n$  与  $B$  之间的夹角为  $\theta$ ，线圈平面与  $B$  的夹角为  $\varphi$ ， $ab$ 、 $cd$  边均与磁场垂直。由安培定律可得线圈上各边所受安培力的大小分别为

$$F_{ab} = F_{cd} = Il_2 B \sin 90^\circ = Il_2 B$$

$$F_{bc} = Il_1 B \sin \varphi$$

$$F_{da} = Il_1 B \sin(\pi - \varphi) = Il_1 B \sin \varphi$$

方向分别如图 12.39 (a) 所示。其中， $F_{bc}$  与  $F_{da}$  大小相等，方向相反，且在同一直线上，因而相互抵消； $F_{ab}$  与  $F_{cd}$  大小相等，方向相反，但不在同一直线上，

从而形成一对力偶，其力臂为  $d = l_1 \cos \varphi$ ，因此磁场对线圈有一个磁力矩的作用，其大小为

$$M = F_{ab} \cdot d = Il_2 B \cdot l_1 \cos \varphi = ISB \cos \varphi$$

式中  $S = l_1 l_2$  为线圈面积。若线圈共绕有  $N$  匝，则

$$M = NISB \cos \varphi \quad (12.41)$$

若令  $n$  与  $B$  夹角为  $\theta$ ，则  $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ， $\cos \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ ，故有

$$M = NISB \sin \theta = P_m B \sin \theta \quad (12.42)$$

式中  $P_m = NSI$  是线圈磁矩的大小。磁力矩  $M$  的方向与矢量积  $n \times B$  的方向相同。由于磁矩

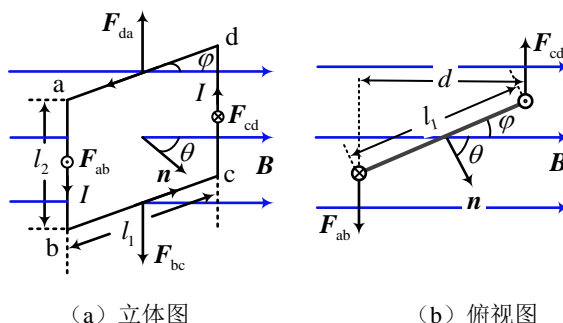


图 12.39 均匀磁场对载流线圈的作用

也是矢量，其方向就是线圈平面的法线方向，即

$$\mathbf{P}_m = NSI\mathbf{n} \quad (12.43)$$

所以，线圈在均匀磁场中受到的磁力矩的矢量表达式为

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} \quad (12.44)$$

虽然式 (12.42) – (12.44) 是从矩形平面线圈这一特例中导出的，但可以证明它对均匀磁场中任意形状的载流平面线圈（如圆形、三角形、椭圆形等）均适用。

### \* 12.5.4 磁力和磁力矩的功

我们知道，载流导线或载流线圈在磁场中要受磁力或磁力矩的作用，在磁力或磁力矩的作用下，其运动状态会发生改变。这表明磁力或磁力矩要对载流导线或线圈做功。下面从两个特例出发，来推导磁力或磁力矩做功的一般表达式。

首先考察磁力的功。如图 12.40 所示，在磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的均匀磁场中有一个矩形载流回路，其中磁场方向垂直于回路所在平面，bc、da 是两个固定的金属导轨，ab 段在导轨上可以左右平移。假设 ab 段的长度为  $L$ ，回路中的电流为  $I$ ，则作用于 ab 上磁力的大小为： $F_{ab} = IBL$ ，方向如图所示，当导线 ab 在磁力作用下产生一个元位移  $d\mathbf{x}$  时，磁力做的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = IBLdx = IBdS = I \cdot d\Phi \quad (12.45a)$$

若回路中电流  $I$  恒定不变，当导线从 ab 位置运动到 a'b' 位置时，磁力做的总功为

$$A = \int dA = \int_{x_1}^{x_2} IBLdx = IBL(x_2 - x_1) = I \cdot \Delta\Phi \quad (12.45b)$$

在式 (12.45) 中， $d\Phi$  或  $\Delta\Phi$  是载流导线 ab 在运动过程中电流回路所围面积的磁通量的增量。

再来考察载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩做的功。如图 12.41 所示为一个单匝载流平面线圈，若线圈中电流为  $I$ ，线圈面积为  $S$ ，在磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的均匀磁场中，其所受的磁力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$$

其中  $\mathbf{P}_m = NIS\mathbf{n}$  ( $N=1$ ) 是线圈的磁矩，显然磁力矩的大小为

$$M = P_m B \sin\theta = ISB \sin\theta$$

方向就是  $\mathbf{n} \times \mathbf{B}$  的方向，当线圈在磁力矩的作用下转过一个角位移  $d\theta$  时，磁力矩所做的元功为

$$dA = \mathbf{M} \cdot d\theta = -Md\theta = -ISB \sin\theta d\theta = I \cdot d(SB \cos\theta) = I \cdot d\Phi \quad (12.46a)$$

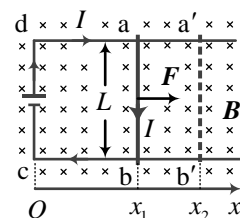


图 12.40 磁力的功

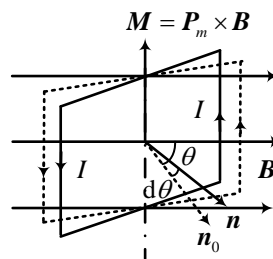


图 12.41 磁力矩的功

式中  $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \theta$  是通过线圈平面的磁通量。

当载流线圈在磁力矩的作用下，其法线方向与磁场的夹角由  $\theta_1$  转到  $\theta_2$  时，同时保持线圈中的电流  $I$  恒定不变，则磁力矩所做的总功为

$$\begin{aligned} A &= \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I \cdot d(SB \cos \theta) \\ &= I(SB \cos \theta_2 - SB \cos \theta_1) = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) = I \cdot \Delta \Phi_m \end{aligned} \quad (12.46b)$$

式中  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  分别对应于线圈在角度  $\theta_1$  和  $\theta_2$  时通过线圈的磁通量， $\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  是线圈在转动过程中通过线圈的磁通量的增量。

比较式 (12.45) 和式 (12.46) 可知，当电流  $I$  恒定不变时，无论是作用于载流导线上的磁力做的功，还是作用于载流线圈上的磁力矩做的功都可以表示为通过回路的电流  $I$  与通过回路所围面积的磁通量的增量  $\Delta \Phi$  的乘积，即

$$dA = I \cdot d\Phi \quad \text{或} \quad A = \int dA = I \cdot \Delta \Phi \quad (12.47)$$

不难证明，如果线圈的总匝数为  $N$ ，则磁力矩所做的功为

$$dA = NI \cdot d\Phi \quad \text{或} \quad A = \int dA = NI \cdot \Delta \Phi \quad (12.48)$$

**例 12.10** 如图 12.42 所示，半径为  $R$ ，通有恒定电流为  $I$  的载流圆环，处在磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的均匀磁场中。开始时，线圈平面的法线方向沿  $z$  轴正方向，并与磁场方向垂直。试求：

- (1) 载流圆环受到的安培力；
- (2) 载流圆环在起始位置时受到的磁力矩；
- (3) 当载流圆环的法线方向由  $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$  的初始位置转到  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{B}$  的平衡位置时，磁力矩所做的功。

**解：**(1) 由于载流圆环处在均匀磁场中，所以载流圆环所受的总的磁力为零。

(2) 在起始位置， $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$ ，即  $\theta = \pi/2$ ，由  $\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$ ，可知磁力矩的大小为

$$M = ISB \sin \theta = \pi R^2 IB$$

方向与  $\mathbf{n} \times \mathbf{B}$  的方向相同，即沿图中  $y$  轴正方向。

(3) 载流圆环在初始位置时， $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$ ， $\Phi_1 = 0$ ；在  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{B}$  的平衡位置时， $\Phi_2 = \mathbf{B} \cdot \pi R^2$ ，所以在圆环的转动过程中，磁力矩所做的功为

$$A = I \cdot \Delta \Phi = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) = I \cdot (B\pi R^2 - 0) = \pi R^2 IB$$

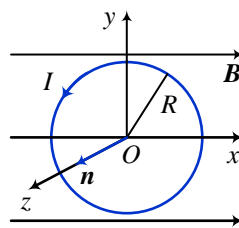


图 12.42 例 12.10 图

## § 12.6 带电粒子在均匀电场和磁场中的运动

### 12.6.1 洛伦兹力

实验发现，电量为  $q$  的带电粒子，当它以速度  $v$  进入磁感应强度为  $B$  磁场中时，也会受到来自磁场的一种作用力，其大小为

$$F_m = qvB \sin \theta \quad (12.49)$$

式中  $\theta$  是运动电荷的速度方向与磁场方向之间的夹角。当  $q > 0$  时，力的方向与  $v \times B$  的方向相同，这种力被称之为**洛仑兹力**。洛仑兹力的矢量表达式为

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (12.50)$$

由于导体中的电流是由大量自由电荷的定向运动形成的，因此载流导体在磁场中受到的安培力，本质上来自于磁场对于运动电荷的**洛仑兹力**。这是因为金属导体中的自由电子在磁场中做定向漂移时，受到磁场的洛仑兹力的作用，并不断地与导体的晶格点阵发生碰撞，将这种作用力传递给导体，从而在宏观上表现为载流导体在磁场中受到的安培力。

下面，我们从安培定律出发，导出运动电荷在磁场中受到的洛仑兹力表达式 (12.50)。

在磁感应强度为  $B$  的磁场中，在载流导体上任取一个长为  $dl$ ，截面积为  $s$  的电流元  $I dl$ ，由安培定律，其所受的安培力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

若导线中自由电荷的密度为  $n$ ，每个自由电荷的电量为  $q$ （不妨设  $q > 0$ ），自由电荷的平均定向漂移速度为  $v$ ，则  $I dl = qn v s dl = q(n s dl) v$ ，将此代入上式，可得

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = q(n s dl) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

由于该电流元内共有  $dN = n s dl$  个定向运动的自由电荷，则每个运动电荷受到的磁场力为

$$\mathbf{F}_m = d\mathbf{F} / dN = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

这就是磁场对运动电荷的洛仑兹力公式。

由于洛仑兹力  $\mathbf{F}_m$  的方向与运动电荷的速度方向垂直，即  $\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v}$ ，所以  $\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = 0$ 。这表明，洛仑兹力做功的功率为零，或者说洛仑兹力对运动电荷不做功。

## 12.6.2 带电粒子在均匀磁场中的运动

由上节可知，当电量为  $q$ 、质量为  $m$  的一个带电粒子，以速度  $v$  在均匀磁场  $B$  中运动时，所受洛仑兹力为

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

该带电粒子在磁场中的运动情况将取决于它的运动方向与磁场方向之间的夹角。下面分三种情况进行分析。

(1) 当  $v \parallel B$  时， $\theta = 0$

$$F_m = qvB \sin \theta = 0$$

此时，带电粒子在均匀磁场中做匀速直线运动。

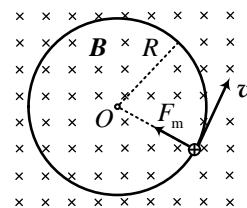


图 12.43  $v \perp B$  时，运动电荷在磁场中作圆周运动

(2) 当  $v \perp B$  时,  $\theta = \pi/2$

$$F_m = qvB \sin \frac{\pi}{2} = qvB$$

为一恒量, 又因  $F_m$  与速度  $v$  处处垂直, 所以带电粒子将在均匀磁场中做匀速率圆周运动, 洛伦兹力充当了其所需的向心力, 如图 12.43 所示。设带电粒子做圆周运动的半径为  $R$ , 由牛顿第二运动定律, 有

$$qvB = mv^2/R$$

由此可得带电粒子的运动半径为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (12.51)$$

作圆周运动的周期  $T$  为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (12.52)$$

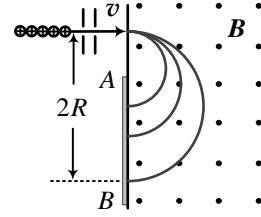


图 12.44 质谱仪的工作原理

式 (12.51) 表明, 当一束电量  $q$  相同, 但质量  $m$  各异的带电粒子, 以相同的速度  $v$  在同一位置、沿同一方向垂直射入磁感应强度  $B$  为均匀磁场中时, 这些粒子的运动半径各不相同, 在磁场中将以不同的半径做匀速圆周运动。如图 12.44 所示, 若在  $AB$  处放置一照相底片, 则可测得不同质量的带电粒子的轨道半径  $R$ , 从而可以算出各个不同粒子的荷质比:

$\frac{q}{m} = \frac{RB}{v}$ 。此即所谓质谱仪的工作原理。

### 3. 当 $v$ 与 $B$ 成任意夹角 $\theta$ 时

可将  $v$  分解为平行于  $B$  的分量  $v_{\parallel}$  和垂直于  $B$  的分量  $v_{\perp}$ , 即

$$v_{\parallel} = v \cos \theta, \quad v_{\perp} = v \sin \theta$$

由上述讨论可知, 如果只有沿磁场方向的速度分量  $v_{\parallel}$ , 运动电荷在磁场中将做匀速直线运动; 如果只有垂直于磁场方向的速度分量  $v_{\perp}$ , 运动电荷

将在磁场中在垂直于磁场的平面内做匀速圆周运动。根据运动的叠加原理, 当带电粒子的这两种运动同时存在时, 其实际的运动轨迹是一条螺旋线, 如图 12.45 所示, 其螺旋半径、螺旋周期和螺距分别为

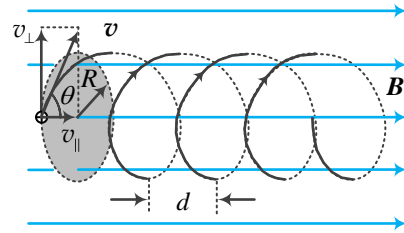


图 12.45 带电粒子在均匀磁场中的螺旋运动

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad (12.53)$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (12.54)$$

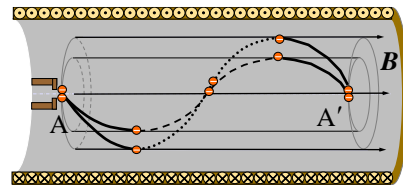


图 12.46 磁聚焦

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \theta \frac{2\pi m}{qB} \quad (12.55)$$

带电粒子在磁场中的螺旋运动在磁聚焦中有重要应用。在阴极射线管或电子示波器中，由阴极发射的电子束经加速电压加速后以几乎相同的速度从某点 A 射出，但是有一个比较小的发散角，因此如果没有经过聚焦调节，从 A 点射出的电子束打在显示屏上时不是一个点，而是一个斑。如果在电子束原来的速度方向上加上一个均匀的外磁场，如图 12.46 所示，由于发散角很小，且速度  $v$  几乎相等，所以

$$v_{\parallel} = v \cos \theta \approx v, \quad v_{\perp} = v \sin \theta$$

由式 (12.53) — (12.55) 可知，不同的电子将沿半径不同的螺旋线运动，但螺距和周期相同。因此经过一个螺距或经历一个周期时间后它们又重新汇聚在 A' 点，这与光线通过透镜后的聚焦现象有些类似，故称为**磁聚焦** (magnetic focusing)。由于均匀磁场是由长直螺线管线圈产生的。这样的装置称为**磁透镜** (magnetic lens)。实际上用的较多的是由短螺线管线圈产生的非均匀磁场的聚焦作用，这样的螺线管线圈通常被称为**短磁透镜**，被广泛应用于电子显微镜中。

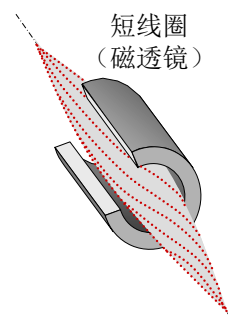


图 12.47 磁透镜

**例 12.11** 有一电子在磁感应强度  $B$  为  $1.5 \times 10^{-3} \text{T}$  的均匀磁场中做螺旋线运动，已知螺旋线的半径  $R=10\text{cm}$ ，螺距  $h=20\text{cm}$ ，电子的荷质比  $e/m=1.76 \times 10^{11} \text{C/kg}$ 。求电子运动的速度  $v$  与磁感应强度  $B$  的夹角  $\theta$  和电子运动速度的大小。

**解：**因电子的运动半径和螺距分别为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv \sin \theta}{eB} \quad \text{和} \quad h = T v_{\parallel} = \frac{2\pi m}{eB} v \cos \theta$$

两式相除，得

$$\tan \theta = \frac{2\pi R}{h}$$

将已知量代入，得  $v$  与  $B$  的夹角为

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\pi R}{h} = \tan^{-1} \frac{2\pi \times 10 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-2}} = 72.3^\circ$$

所以电子运动速度的大小为

$$v = \frac{eRB}{m \sin \theta} = 1.76 \times 10^{11} \times \frac{10 \times 10^{-2} \times 1.5 \times 10^{-3}}{\sin 72.3^\circ} = 2.8 \times 10^7 \text{ m/s}$$

### 12.6.3 带电粒子在均匀电场和磁场共存空间中的运动

如果质量为  $m$ 、电量为  $q$  的粒子在均匀电场和均匀磁场共同存在的空间中以速度  $v$  运

动，带电粒子将受电场力  $F_e = qE$  和磁场力（洛仑兹力）  $F_m = qv \times B$  的共同作用，其所受合力为  $F = F_e + F_m$ ，相应的动力学方程为

$$F = q(E + v \times B) = m \frac{dv}{dt} \quad (12.56)$$

上式表明，利用外加电场和外加磁场可以控制带电粒子的运动。这在电子示波管、电子显微镜、各类加速器等许多科学技术领域中得到了广泛应用。

## 1、速度选择器

在科学研究中，常常需要获得具有确定速度的带电粒子。但一般的离子源发射出的带电粒子通常具有各种不同的速度，因此人们利用带电粒子在均匀电场和磁场中的运动规律，设计出一种能够选择具有确定速度的带电粒子的装置，称为**速度选择器**，其工作

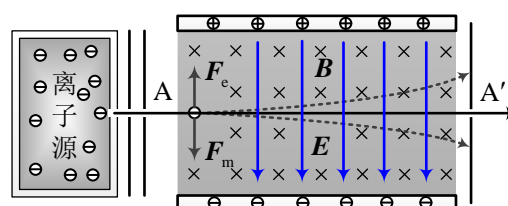


图 12.48 速度选择器

原理如图 12.48 所示。从离子源射出的带电粒子，经过加速准直后以不同的速度沿相同的方向射入到一个均匀电场和磁场共存的区域。假设该区域中，电场强度的大小为  $E$ ，磁感应强度的大小为  $B$ ，两者的方向互相垂直，如图中所示。当质量为  $m$ 、电量为  $q$  的带电粒子，以速度  $v$  从  $A$  点沿垂直于电场和磁场的方向射入到该区域中时，带电粒子将同时受到电场力  $F_e = qE$  和磁力（洛仑兹力）  $F_m = qvB$  的共同作用。由于这两个力的方向总是相反的，当两个力大小相等，即：  $qE = qvB$  时，这个带电粒子受到电磁力的合力为零，从而在均匀电场和磁场中做匀速直线定律。由此可知，能够从  $A'$  点射出的带电粒子，必定具有：  $v = \frac{E}{B}$  的速度。改变  $E$  或  $B$  的大小即可选择不同的速度。

## 2、霍尔效应

1879 年，美国物理学家霍尔（A. H. Hall, 1855—1938）在研究金属的导电机理时发现，将矩形载流导体薄板放入磁感应强度为  $B$  的均匀外磁场中，并使磁场方向垂直于导体薄板，如图 12.49 所示，则在与磁场方向和电流方向都垂直的两个导体表面  $A_1$ 、 $A_2$  之间产生电势差，这种现象称为霍尔效应（Hall effect），其电势差称为霍尔电势差或霍尔电压。

实验表明，当磁场不太强时，霍尔电势差  $U$  与磁感应强度  $B$  及导体中的电流  $I$  成正比，与导体薄板的厚度  $d$  成反比，即

$$U = R_H \frac{IB}{d} \quad (12.57)$$

其中，  $R_H$  称为霍尔系数，它由导体薄板的性质决定。

霍尔现象可以用导体中的载流子在磁场中定向运动时因受到洛伦兹力的作用而产生的横向漂移来解释。以金属导体为例，导体中的电流是导体中的自由电子在电场作用下做定向运动形成的，其定向运动的方向与导体中的电流方向相反，如图 12.49 (a) 所示。如果自由电子定向运动的平均速率为  $\bar{v}$ ，在垂直于电流方向上有一个外磁场  $B$ ，则自由电子受到的洛伦兹力的大小为  $F_m = e\bar{v}B$ ，方向向上。在洛伦兹力的作用下，电子的运动轨迹向上偏转，从而使导体薄板的上表面积累负电荷，下表面积累正电荷，并同时在导体薄板的上、下两个表面之间产生方向向上的附加电场  $E = \frac{U}{b}$ ， $U$  是两个表面之间的电势差。于是自由电子在磁场中还将受到电场力  $F_e = eE$  的作用，方向与洛伦兹力的方向相反。当洛伦兹力与电场力达到平衡，即  $F_m = F_e$  时，有

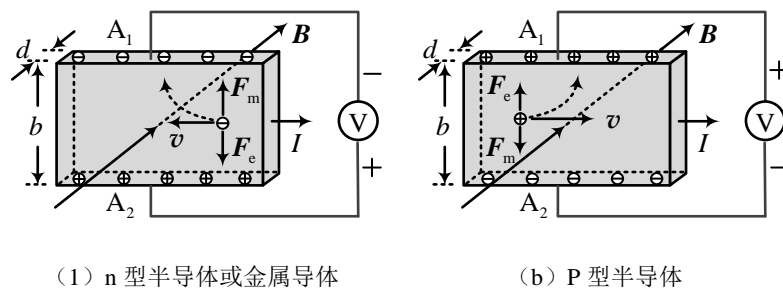


图 12.49 霍尔效应

$$e\bar{v}B = eE = e\frac{U}{b}$$

此时，电子不再有横向漂移运动，导体薄板上下两个表面之间的电势差就会达到恒定值，其大小为

$$U = vbB \quad (12.58)$$

设导体中载流子（自由电荷）的密度为  $n$ ，则导体中电流为  $I = nevbd$ ，于是有

$$vb = \frac{I}{ned}$$

将此代入式 (12.58)，可得霍尔电势差为

$$U = vbB = \frac{1}{ne} \cdot \frac{IB}{d} \quad (12.59)$$

比较式 (12.57) 和式 (12.59)，霍尔系数为

$$R_H = \frac{1}{ne} \quad (12.60)$$

上式表明，霍尔系数决定于导体中每个载流子（即自由电子）的电量  $e$  和浓度  $n$ 。

在半导体中，参与导电的载流子既有带负电的自由电子（电量为： $-e$ ），还有带正电的空穴（电量为： $+e$ ）。P 型半导体内的载流子主要是空穴，而 n 型半导体内的载流子主要是自由电子。简单分析可知，当导体中的电流方向和外磁场方向确定后，不论是带正电的空穴

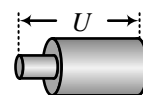


还是带负电的自由电子，载流子所受洛伦兹力的方向相同，在洛伦兹力作用下载流子的横向运动方向也相同，于是这两种半导体上霍尔电压的正负号不同，如图 12.49 所示。据此我们可以通过测定导体薄片上霍尔电压的正负号来判断半导体的种类。

由于半导体中的载流子浓度远小于金属中自由电子的浓度，因此利用半导体材料可以获得较大的霍尔电势差，所以常用半导体材料来制作霍尔传感器。利用霍尔效应，人们不仅可以用于测量磁场，还可以测量电流、转速，甚至压力物理量等。例如，在现代汽车中广泛应用的霍尔传感器有：ABS 系统中的速度传感器、汽车速度表和里程表、发动机转速及曲轴角速度传感器、各种用电负载的电流检测及工作状态的诊断、电子点火系统、各种开关的自动控制等。目前，利用霍尔效应制作的传感器已经被广泛地应用于工业自动化技术、检测技术及信息处理等方面。

### 思考题

12.1 两根材料相同，截面积不同的圆柱形金属导体串联在一起，两端加恒定电压  $U$ ，如图所示。试问这两根导体内的电流密度是否相同？导体内的电场强度是否相同？若两根金属导体的长度相同，两段导体上的电压是否相同？



思考题 12.1 图

12.2 截面相同的钨丝和铝丝串联，接在一电源上，问：

- (1) 通过钨丝、铝丝的电流密度是否相同？
- (2) 钨丝、铝丝内的电场强度是否相同？

12.3 在导体中，电流密度不为零（即  $\mathbf{j} \neq 0$ ）的地方，电荷体密度  $\rho$  可否等于零？

12.4 将电流元置于直角坐标系的坐标原点，其方向沿  $Z$  轴正向，则此电流元在  $X$  轴， $Y$  轴和  $Z$  轴上产生的  $d\mathbf{B}$  的方向分别为\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。

12.5 你能说出一些有关电流元  $I d\mathbf{l}$  激发磁场  $d\mathbf{B}$  与电荷元  $dq$  激发电场  $d\mathbf{E}$  有何异同吗？

12.6 在某些电子仪器中，需须将电流大小相等、方向相反的导线扭在一起，这是为什么？

12.7 在载流长直密绕螺线管内，为什么其端点处的磁感应强度大约是其中点处的磁感应强度的一半？

12.8 在恒定磁场中，下列说法中正确的是：

- (1) 安培环路定理具有普适性，它对求解具有对称性的某些磁场分布比较方便；
- (2) 安培环路定理可用来确定圆电流的磁场；
- (3) 在  $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$  中， $\mathbf{B}$  仅与回路所围的电流有关；
- (4) 在  $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$  中，若  $\sum I_i = 0$ ，则回路上各点处的  $\mathbf{B}$  为零。

12.9 试分析，在下面几种电流产生的磁场中，那些可以直接用安培环路定律求磁场，那些不能？为什么？

- (1) 有限长载流直导线的磁场分布；
- (2) 圆电流轴线上的磁场分布；
- (3) 两无限长同轴载流圆柱面（电流沿轴向流动，且在圆柱面上均匀分布）的磁场分布
- (4) 载流密绕螺绕环内的磁场分布；
- (5) 有限长载流密绕螺线管轴线上的磁场分布

(6) 无限大均匀载流平面的磁场分布。

12.10 在均匀磁场中, 有三个面积相等、电流相等的闭合载流回路, 其中一个是正方形、一个是圆形、还有一个是正三角形, 试问它们受到的磁力是否相等、各为多少? 它们受到的最大磁力矩是否相等?

12.11 在均匀磁场中, 载流线圈所受的磁力矩与其取向有何关系? 在什么情况下磁力矩最大? 什么情况下磁力矩最小? 载流线圈处于稳定平衡时, 其取向又如何? 载流线圈在磁力矩作用下的转动趋势如何?

12.12 一根有限长的载流直导线在均匀磁场中沿着磁感应线移动, 磁力对它是否做功?

12.13 在洛伦兹力矢量表达式  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  的三个矢量中, 那些矢量之间始终是正交的? 那些矢量之间可以有任意角度?

12.14 一电子以速度  $\mathbf{v}$  射入磁感强度为  $\mathbf{B}$  的均匀磁场中, 电子沿什么方向射入受到的磁力最大? 沿什么方向射入不受磁力作用?

12.15 如果一个电子在通过空间某一区域时, 电子运动的路径不发生偏转, 我们能否说这个区域没有磁场?

12.16 试述如何用霍尔效应来测量汽车车轮的转速?

## 习 题

12.17 一同轴电缆, 长  $L=10.0\text{m}$ , 内半径  $r_1=1.0\text{mm}$ , 外半径  $r_2=8.0\text{mm}$ , 中间充满电阻率  $\rho=1.00 \times 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$  的物质, 若电缆两圆柱面电势差为  $U=600\text{V}$ , 求其漏电电流。

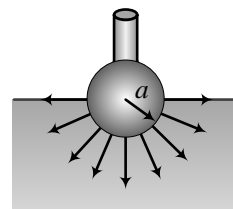
12.18 两个半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的同心球壳, 其间充满了电导率为  $\sigma$  ( $\sigma$  为常量) 的导电介质, 若在两球壳间维持恒定电势差  $U$ 。试求:

(1) 两球壳间的总电流;

(2) 两球壳之间, 离球心为  $r$  处的电流密度。

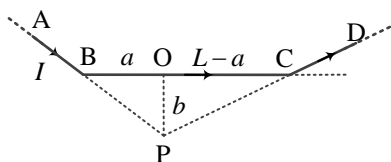
12.19 把大地看作电阻率为  $\rho$  的均匀导电介质。如图所示, 用一半径为  $a$  的球形电极与大地表面相接, 半个球体埋在地面下, 电极本身的电阻可忽略不计, 试证明此电极的接地电阻为

$$R = \frac{\rho}{2\pi a}$$

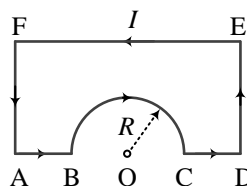


习题 12.19 图

12.20 一根通有电流  $I$  的长直载流导线被折成如图所示的形状, 图中  $P$  点是直导线  $AB$ 、 $CD$  延长线的交点。  $P$  到直导线  $BC$  的距离为  $b$ ,  $\overline{BC}=L$ ,  $\overline{BO}=a$ 。试求图中  $P$  点处磁感应强度  $\mathbf{B}$  的大小和方向。



习题 12.20 图



习题 12.21 图

12.21 将通有电流  $I$  的导线在同一平面内弯成如图所示的“矩形”状, 其中  $BC$  段为半

径为  $R$  的半圆弧,  $AB=CD=R$ ,  $DE=FA=2R$ ,  $EF=4R$ 。试求圆心  $O$  点处磁感应强度  $B$  的大小和方向。

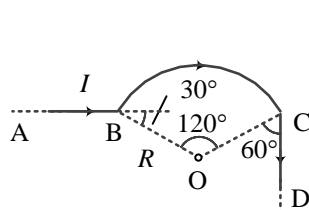
12.22 一根很长的载流直导线被弯曲成如图所示的形状, 电流强度为  $I$ , 其中圆弧的半径为  $R$ , 且  $AB$  段与  $CD$  段互相垂直。试求圆心  $O$  处的磁感应强度。

12.23 如图所示, 两根长直载流导线沿半径方向引到圆形铁环上的  $A$ 、 $B$  两点, 并在很远处与电源相连, 构成一个闭合载流回路。试证明: 铁环圆心处  $O$  点的磁感应强度为零。

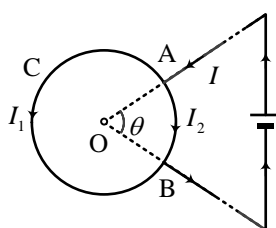
12.24 如图所示, 一宽为  $b$  的“无限长”薄金属板, 其上有均匀分布的电流  $I$ 。

(1) 求薄板所在的平面上, 距板边距离为  $a$  的  $P$  点的磁感应强度;

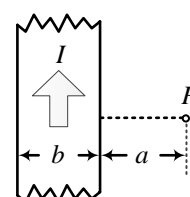
(2) 根据 (1) 中的结论证明, 当  $b \ll a$  时,  $B \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 。



习题 12.22 图



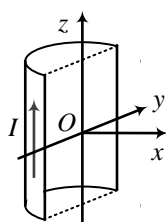
习题 12.23 图



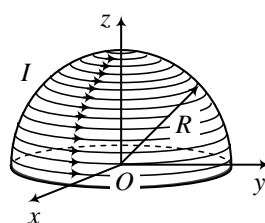
习题 12.24 图

12.25 如图所示, 一个半径为  $R$ , 的无限长半圆柱面载流导体, 沿轴线方向的电流  $I$  在半圆柱面上均匀分布。求半圆柱面轴线上任意一点 (即图中  $O$  点) 的磁感应强度。

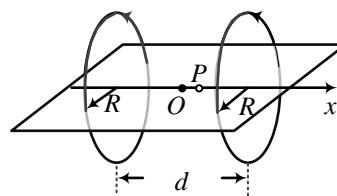
12.26 在一个半径为  $R$ , 由塑料制成的半球面上有一个用细导线密绕的线圈, 各线圈平面彼此平行, 且以单层线圈覆盖整个半球面, 线圈的总匝数为  $N$ 。当线圈中的电流为  $I$  时, 试求球心  $O$  处磁感应强度的大小。



习题 12.25 图



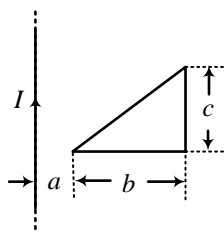
习题 12.26 图



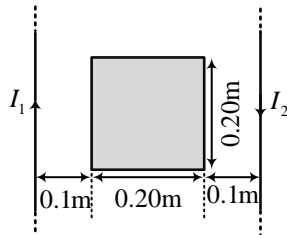
习题 12.27 图

12.27 实验室中常用所谓亥姆霍兹线圈在局部区域内获得一个近似均匀的磁场, 其装置如图所示。一对完全相同、彼此平行的圆线圈, 半径均为  $R$ , 通过的电流均为  $I$ , 匝数均为  $N$ , 且两线圈中电流的流向相同。试证明当两线圈中心之间的距离  $d$  等于线圈的半径  $R$  时, 在两线圈中心连线的中点附近区域, 磁场可看成是均匀磁场。

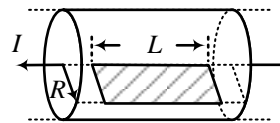
12.28 一长载流直导线所载电流为  $I$ , 旁边放一个与其共面的直角三角形线圈, 其中两条直角边分别平行或垂直于载流直导线, 尺寸如图所示。试求通过此线圈的磁通量。



习题 12.28 图



习题 12.29 图



习题 12.30 图

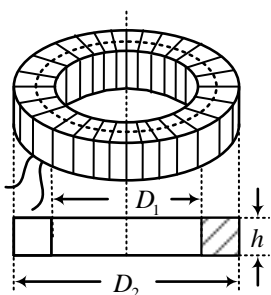
12.29 两根平行长直导线，相距  $0.40\text{m}$ ，每根导线载有电流  $I_1 = I_2 = 20\text{A}$ ，电流流向相反，如图所示，试计算通过图中正方形阴影部分面积的磁通量。

12.30 如图所示，半径为  $R$  的长直导线上通有电流  $I$ ，且电流在导线横截面上均匀分布。试求：

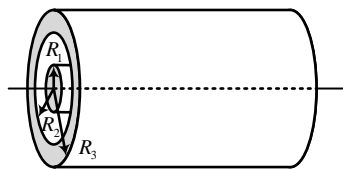
- (1) 导线内外磁感应强度的分布；
- (2) 通过图中导线剖面上长为  $L$ 、宽为  $R$  的矩形阴影面积的磁通量。

12.31 一均匀密绕的矩形截面的螺绕环，尺寸如图所示，线圈的总匝数为  $N$ 。当线圈中通有电流为  $I$  时，试求：

- (1) 环内磁感应强度的分布；
- (2) 通过螺绕环的横截面（图中阴影区）的磁通量。



习题 12.31 图



习题 12.32 图



习题 12.33 图

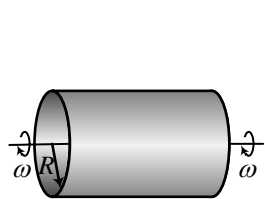
12.32 有一长直同轴电缆，其尺寸如图所示。内外导体中的电流均为  $I$ ，但电流的流向相反。假设电流沿导线的横截面均匀分布，导体的磁性可不考虑。试计算导体内外各处的磁感应强度的分布，并画出  $B-r$  曲线。

12.33 如图所示为一个垂直于纸面放置的无限大载流导体薄板，电流方向垂直纸面向外，在板内垂直于电流方向上单位宽度内的电流大小（即面电流的线密度）为  $j$ 。试求无限大载流导体板周围磁感应强度的大小和方向。

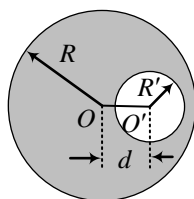
12.34 半径为  $R$  的“无限长”薄圆筒均匀带电，面电荷密度为  $\sigma > 0$ ，若圆筒以匀角速度  $\omega$  绕轴转动，如图所示。求圆筒内的磁感应强度  $B$  的分布。

\*12.35 如图所示，在一根半径为  $R$  的无限长圆柱形载流直导体内部，有一个半径为  $R'$  的圆柱形空腔，空腔的轴线与导线的轴线平行，两者相距为  $d$ 。假设电流  $I$  沿导体的轴向流

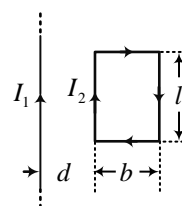
动，并均匀分布在导体的横截面上。试求空腔内任意一点的磁感应强度的大小和方向。（提示：用补偿法和场强叠加原理来求解）



习题 12.34 图



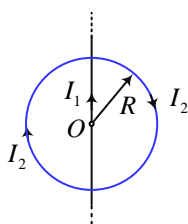
习题 12.35 图



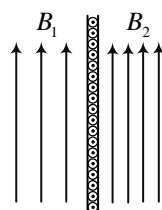
习题 12.36 图

12.36 如图所示，一根长直导线载有电流  $I_1 = 30\text{A}$ ，与直导线共面的刚性矩形回路载有电流  $I_2 = 20\text{A}$ 。已知  $d = 1.0\text{ cm}$ 、 $b = 8.0\text{ cm}$ 、 $l = 12.0\text{ cm}$ ，试计算载流回路受到的总的安培力。

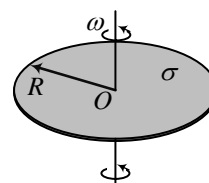
12.37 如图所示，一根电流为  $I_1$  的长直载流导线和一个电流为  $I_2$ 、半径为  $R$  的圆形载流导线共面放置，其中长直导线恰好位于圆电流的直径上（两导线的交点处互相绝缘）。假设导线的形状不变，试求圆电流受到的安培力的大小和方向。



习题 12.37 解图

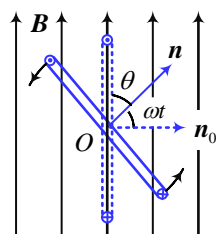


习题 12.38 解图

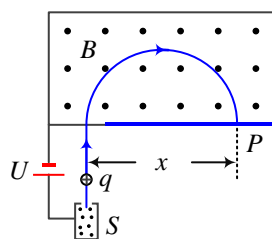


习题 12.39 图

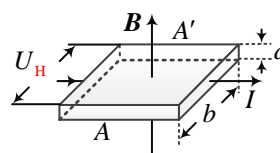
12.38 将一无限大载流平面放入均匀外磁场中，已知电流在平面上均匀分布，磁场方向与电流方向互相垂直，且与载流平面平行。放入后，载流平面两侧的磁感应强度分别为  $B_1$  和  $B_2$ ，如图所示。试求该载流平面单位面积上所受的磁场力的大小和方向。



习题 12.40 图



习题 12.41 图



习题 12.42 图

12.39 一半径为  $R$ 、均匀带电的薄圆盘，放在磁感应强度为  $B$  的均匀磁场中， $B$  的方向与盘面平行，圆盘表面的电荷面密度为  $\sigma$ 。若圆盘以角速度  $\omega$  绕通过盘心、并垂直于盘面

的轴转动。求证：作用在圆盘上的磁力矩的大小为： $M = \frac{\pi\sigma\omega BR^4}{4}$ 。

12.40 一面积为  $S$  的矩形线圈，所载电流  $I = I_0 \cos(\omega t + \pi)$ ，在磁感应强度为  $B$  的均匀磁场中以匀角速度  $\omega$  绕其中心轴匀速转动。 $t = 0$  时，线圈的正法线方向  $n_0$  与  $B$  垂直，如图所示。求线圈所受磁力矩在一个周期  $T$  内所做的功。

12.41 测定离子质量的质谱仪如图所示，离子源  $S$  产生质量为  $m$ ，电荷为  $q$  的某种离子，离子的初速很小，可看作静止，经电势差  $U$  加速后离子进入磁感强度为  $B$  的均匀磁场，并沿一半圆形轨道到达感光底板上离入口处距离为  $x$  的  $P$  点处。试证明该离子的质量为

$$m = \frac{B^2 q}{8U} x^2$$

12.42 载流子浓度是半导体材料的重要参数，工艺上通过控制三价或五价掺杂原子的浓度，来控制  $p$  型或  $n$  型半导体的载流子浓度。利用霍耳效应可以测量载流子的浓度和类型。如图所示一块半导体材料样品，均匀磁场垂直于样品表面，样品中通过的电流为  $I$ ，现测得霍耳电压为  $U_H$ 。

(1) 若  $U_H = V_A - V_{A'} > 0$ ，试判断该半导体的类型；

(2) 证明样品中载流子浓度为： $n = \frac{IB}{edU_H}$ 。

\*12.43 根据氢原子的波尔理论，质量为  $m$ 、电量为  $e$  的电子只能在一些半径不连续的轨道上作圆周运动，其可能的轨道半径为  $r_n = n^2 r_1$ ，式中  $n = 1, 2, 3, \dots$ ， $r_1 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$  是氢原子的基态轨道半径。假设氢原子中电子在某一轨道上作圆周运动的角速度为  $\omega$ 。当加上外磁场  $B$  时（ $B$  的方向与电子轨道平面垂直），电子轨道半径不变，而角速度则变为  $\omega'$ 。试证明电子角速度的变化为

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \approx \pm \frac{eB}{2m}$$