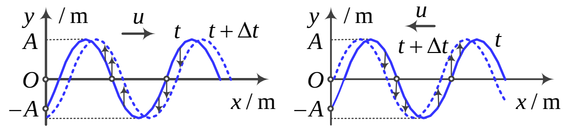
第 7 章　机械波

一、知识点网络框图

机械波

- **基本概念**
  - 产生条件：要有波源和媒质　　波的类型：横波与纵波
  - 相关物理量：频率 ν 、周期 T 、波长 λ 、波速 u ， $u=\lambda/T=\lambda\nu$
- **波的描述**
  - 几何描述：波线、波面（波前）、平面波、球面波
  - 解析描述（波函数）： $y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t\mp\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]=A\cos\left[\omega t\mp\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi\right]$

    $$=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$
  - 图形描述：（波形曲线）



- **波的能量**
  - 能量特征： $dE_k=dE_p=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 dV\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$
  - 平均能量密度： $\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$
  - 平均能流密度（波的强度）： $I=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2$
- **波的传播规律**
  - 两个基本原理：惠更斯原理、波的叠加原理
  - 波的干涉：
    - （1）波源的相干条件：振动频率相同、振动方向相同、相位差恒定
    - （2） $\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\begin{cases}\pm 2k\pi & \text{干涉极大}\\ \pm(2k+1)\pi & \text{干涉极小}\end{cases}$　 $k=0,1,2\cdots$
  - 驻波：
    - （1）形成条件：两列在同一直线上沿相反方向传播的相干波产生的干涉现象
    - （2）波形特点：①有位置固定的波腹和波节，相邻两波腹或波节之间的距离为 $\lambda/2$ ；②两相邻的波节之间各点振动相位相同，在一个波节的两侧各质点的振动相位相反；③没有波形和能量的传播
    - （3）半波损失：当波从波疏介质向波密介质传播，并在分界面反射时，反射波与入射波在反射点有 π 的相位突变
- **声波　超声波　次声波**
- **多普勒效应**： $\nu_R=\frac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S$

二、基本要求

1．理解机械波形成的条件，理解描述机械波的各物理量的意义和相互关系。

2．深刻理解平面简谐波波动表达式（波函数）的物理意义，熟练掌握由已知条件求平面简谐波波函数的方法。

3．理解波的能量的传播特征及能流，能流密度和波的强度概念。

4．了解惠更斯原理和波的叠加原理，理解波的相干条件，熟练掌握干涉加强和干涉减弱的条件。

5．理解驻波形成的条件及其特点，理解半波损失的概念。

6．理解机械波的多普勒效应。

7．了解声波、声强级、超声波和次声波。

三、主要内容

（一）机械波的基本概念

1、机械波及其产生条件

机械波是机械振动在媒质中的传播过程。要产生机械波必须具备两个条件：①要有波源；②要有能够传播机械振动的弹性媒质。

2、机械波的分类

根据媒质中各质点的振动方向与波的传播方向之间的关系将波动分为横波与纵波两类。如果质点的振动方向和波的传播方向相互垂直，这种波称为横波；如果质点的振动方向和波的传播方向相互平行，这种波称为纵波。

3、机械波的传播速度

波的振动状态（即振动相位）在介质中的传播速度称为波速，也称为相速，用u表示。波速只决定于介质的弹性和惯性，与波源相对于介质的运动速度无关。

弹性绳上的横波：$u=\sqrt{F/\lambda}$　　固体中的横波：$u=\sqrt{G/\rho}$

固体中的纵波：$u=\sqrt{Y/\rho}$　　气体中的纵波：$u=\sqrt{B/\rho}$

4、波长、周期和频率

波长：在同一波线上，相邻两个振动状态完全相同（或振动相位差为2π）的两点之间的距离，用λ表示。

周期：波向前传播一个波长的距离所需的时间，用T表示，周期的倒数称频率，用ν表示，$\nu = 1/T$。

$$u = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda$$

（二）、平面简谐波的波动表达式（波函数）

1、平面简谐波的波动表达式（波函数）

简谐振动在媒质中传播时形成的波动称为简谐波。当平面简谐波在无吸收的无限大各项同性的均匀介质中传播时，沿波的传播方向（即在同一波线上），各质点的振动频率相同、振幅相同、振动方向相同，各质点由近及远依次投入振动，振动相位依次落后。

描述介质中任意一个质点的振动表达式称为波动表达式，也称为波函数。

假设平面简谐波沿x轴传播，若已知坐标原点（即$x=0$）处质点的振动表达式为$y = A\cos\left(\omega t + \varphi_o\right)$，则平面简谐波的波动表达式（波函数）的几种常用形式为

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi_o\right] = A\cos\left(\omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_o\right)$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_o\right]$$

式中$y(x,t)$表示波线上x处的质点在t时刻离开平衡位置的位移。若波沿x轴正方向传播，取“$-$”号；若波沿x轴负方向传播，取“$+$”号。φ_o是坐标原点（即$x=0$）处质点的振动初相位。

若已知$x=d$处质点的振动初相位为φ_d，则利用坐标平移可得波动表达式的更普遍的形式为

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x-d}{u}\right) + \varphi_d\right] = A\cos\left[\omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda}\left(x-d\right) + \varphi_o\right]$$

$$=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\mp\frac{x-d}{\lambda}\right)+\varphi_d\right]$$

2、波动表达式（波函数）物理意义

（1）如果 x 给定，那么位移 y 就只是 t 的周期函数，周期为 T 。这时的波函数就是波线上 x 处质点的振动表达式，式中 $\left(\mp\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_o\right)$ 就是该质点的振动初相位。

（2）如果 t 给定，那么位移 y 将只是 x 的周期函数，周期为 λ 。这时的波函数称为 t 时刻的波形函数。如果以 y 为纵坐标，x 为横坐标，将得到周期为 λ 的波形曲线，这反映了波在空间上的周期性。

（3）如图 x 、t 同时在变化，可将波函数变形为（以沿 x 轴正方向传播的波为例）

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_o\right]=A\cos\left[\omega\left((t+\Delta t)-\frac{x+u\Delta t}{u}\right)+\varphi_o\right]$$

这表明在 t 时刻出现在 x 处的振动状态在 $t+\Delta t$ 时刻出现在了 $x+u\Delta t$ 位置处，这反映了波的传播特性，如图 7.1 所示。

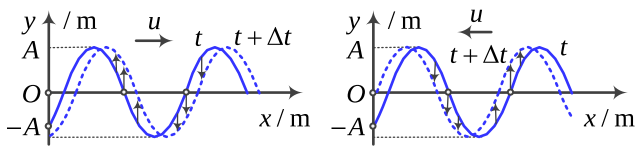


图 7.1 波的传播

（三）、波的能量

1、波的能量特点

当波动在媒质中传播时，各质元中的动能和势能总是同步变化、而且大小总是相等的。在波峰、波谷处，质元中的动能和势能同时为零；在平衡位置处，两者同时达到最大值。

2、波的平均能量密度 $\overline{w}$

在波动经过的媒质中，单位体积内具有的波动平均能量称为波的平均能量密度。

$$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

3、波的平均能流$\overline{P}$与平均能流密度（波的强度）I

平均能流：单位时间内通过与波的传播方向垂直的横截面积为S的波的平均能量称为平均能流，即

$$\overline{P}=\bar{w}uS$$

平均能流密度（波的强度）：单位时间内通过与波的传播方向垂直的单位横截的波的平均能量称为平均能流密度，也称为波的强度，即

$$I=\frac{\overline{p}}{S}=\bar{w}u=\frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2$$

（四）、惠更斯原理

在波的传播过程中，波所到达的每一点都可看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波的包络面就是新的波前。

（五）、波的干涉

1、波的叠加原理

如果有几列波同时在媒质中传播，当它们在空间某处相遇过后，每一列波都将保持自己原有的特性（频率、波长、振动方向等不变）继续向前传播；而在相遇区域内，任意一个质点的振动是各列波单独存在时在该点所引起的振动的叠加。

2、波的干涉现象和相干条件

在两列波的叠加区域内，如果有些点的合振动始终加强、有些点的合振动始终减弱，这称为干涉现象。

能出现干涉现象的两列波称为相干波，其波源称为相干波源。两列波相干的条件是：两个波源的振动频率相同、振动方向相同、振动相位差恒定不变。

3、干涉加强和干涉减弱的条件

如图 7.2 所示，设有两个相干波源S_1和S_2，它们的振动初相位分别为φ_1和φ_2，到相遇点 P 的距离分别为r_1和r_2，它们单独在 P 点产生的振幅分别为A_1和A_2，

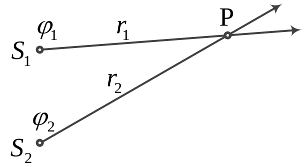


图 7.2 波的干涉

则 P 点合振动的振幅为

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

式中 $\Delta\varphi=\left(\varphi_2-\varphi_1\right)-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}$，是两列波在 P 点引起的两个振动的相位差。

当 $\Delta\varphi=\left(\varphi_2-\varphi_1\right)-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm2k\pi$ 时，$A=A_{\max}=A_1+A_2$，干涉加强。

当 $\Delta\varphi=\left(\varphi_2-\varphi_1\right)-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm\left(2k+1\right)\pi$ 时，$A=A_{\min}=\left|A_1-A_2\right|$，干涉减弱。

（六）、驻波 半波损失

1、驻波的形成

驻波是由两列振幅相同的相干波在同一直线上沿相反方向传播时相干叠加所产生的。驻波是干涉的特例。

2、驻波的特点

（1）波线上有位置固定的波腹和波节。相邻两个波节或相邻两波腹之间的距离都是波长的一半，即 $\lambda/2$。

（2）在相邻的两个波节之间，各质点的振动相位相同；在一个波节的两侧，各质点的振动相位相反。

（3）波线上没有波形与能量的传播。

3、驻波方程

设两列在同一直线上沿相反方向传播的相干波分别为

$$y_1\left(x,t\right)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi_1\right)\quad,\quad y_2\left(x,t\right)=A\cos\left(\omega t+\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi_2\right)$$

则合成的驻波方程为

$$y_{合}\left(x,t\right)=y_1\left(x,t\right)+y_2\left(x,t\right)=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$$

令 $\left|\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x+\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right|=0$ 或 1，可求得波节和波腹的位置。

4、半波损失

当波从波疏介质向波密介质传播，在分界面反射时，反射波在反射点的相位与入射波在该点的相位相反，这种现象称为相位突变或半波损失。

（七）、多普勒效应

当波源或观察者相对于媒质运动时，观察者接收到的频率与波源的频率不同的现象称为多普勒效应。若波源的频率为ν_S，波源相对于媒质的速度为v_S，观察者接收到的频率为ν_R，观察者相对于媒质的速度为v_R，u为介质中的波速，则

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S$$

当波源和观察者相向运动时，v_S和v_R取正值；当波源和观察者背离运动时，v_S和v_R取负值。

四、典型例题解法指导

本章的题型主要有：

（1）已知波动表达式，求相关物理量。

（2）根据给定的条件，求波动表达式。对这类问题，关键是要求出$x=0$处质元的振动初相位，然后代入波动表达式的常用形式即可求解。

（3）波的能量和能流问题。

（4）波的干涉和驻波问题。对于这类问题，熟记干涉加强和减弱的条件是解决这类问题的关键，驻波中波腹与波节的位置就是两列波满足相长干涉和相消干涉的位置。此外，在入射波与反射波叠加形成的驻波问题中，还要正确判断是否存在半波损失。

（5）多普勒效应问题。

例 7.1　一列横波沿绳子传播时波动表达式为$y(x,t)=0.05\cos(10\pi t-4\pi x)(\mathrm{SI})$。试求：

（1）波的振幅、波速、频率和波长；

（2）绳子上各质点振动的最大速度和最大加速度；

（3）$x=0.02\mathrm{m}$处的质点在$t=1\mathrm{s}$时刻的相位；

（4）画出$t=1\mathrm{s}$时的波形图。

分析：将已知的波动表达式与波动表达式的一般形式进行比较，即可求出相关物理量。

解：（1）将绳中波动表达式 $y(x,t)=0.05\cos(10\pi t-4\pi x)$

与波动表达式的一般形式 $y(x,t)=A\cos\left(\omega t-\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right)$ 比较，可得 $A=0.05\mathrm{m}$，角频率 $\omega=10\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，频率 $\nu=\dfrac{\omega}{2\pi}=5\mathrm{Hz}$，波长 $\lambda=0.5\mathrm{m}$，波速

$$u=\nu\lambda=5\times0.5=2.5\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（2）绳上各质点振动的最大速度和最大加速度分别为

$$v_{\max}=\omega A=10\times3.14\times0.05\mathrm{m\cdot s^{-1}}=1.57\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a_{\max}=\omega^2A=(10\times3.14)^2\times0.05\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=49.3\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

（3）将 $x=0.2\mathrm{m}$，$t=1\mathrm{s}$ 代入 $(10\pi t-4\pi x)$ 得所求相位为

$$10\pi\times1-4\pi\times0.2=9.2\pi$$

（4）由波动表达式可得 $t=1\mathrm{s}$ 时的波形函数为

$$y(x)=0.05\cos(10\pi-4\pi x)=0.05\cos4\pi x$$

对应的波形图如图 7.3 所示

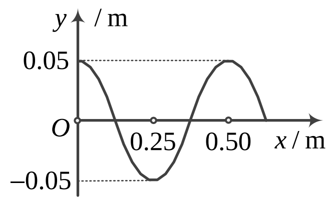


图 7.3 例 7.1 解图

例 7.2 一列沿 x 轴负方向传播的平面简谐波，在 $t=1/3\mathrm{s}$ 时的波形如图 7.4 所示，周期 $T=2\mathrm{s}$。试求：

（1）$x=0$ 处（即 O 点处）质点的振动表达式；

（2）此波的波动表达式；

（3）P 点离 O 点的距离；

（4）P 点的振动表达式。

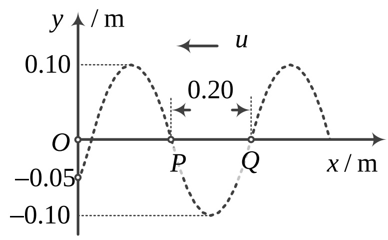


图 7.4 例 7.2 图

分析：此题是由某一时刻的波形图求波动表达式的问题，解题的关键是要根据波的传播方向正确判断 $x=0$ 处质点的振动状态，并由此确定该质点的振动初相位。

解：（1）由已知条件及波形图可知：

$$A = 0.10\text{m}，\ \lambda = 0.40\text{m}，\ u = \lambda/T = 0.2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}，\ \omega = 2\pi/T = \pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

设 $x=0$ 处（即 O 点处）质点的振动表达式为

$$y_o(t) = A\cos(\omega t + \varphi_o) = 0.10\cos(\pi t + \varphi_o)\ \text{m}$$

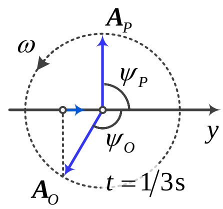


图 7.5 例 7.2 解图

由波形图可知，该点在 $t = 1/3\text{s}$ 时刻

$$y_o(1/3) = 0.10\cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi_o\right) = -0.05$$

$$v_o(1/3) = -0.10\pi\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi_o\right) > 0$$

结合旋转矢量图（如图 7.5 所示）可得该质点在 $t = 1/3\text{s}$ 时刻的相位为 $-\dfrac{2\pi}{3}$，即

$$\psi_O = \frac{\pi}{3} + \varphi_o = -\frac{2\pi}{3}$$

由此得：$\varphi_o = -\pi$ 。所以 O 点处质点的振动表达式为

$$y_o(t) = 0.10\cos(\pi t - \pi)\ \text{m}$$

（2）由波动表达式的一般形式，可得此波动表达式为

$$y(x,t) = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_o\right) = 0.10\cos[\pi t + 5\pi x - \pi]\text{m}$$

（3）对于 P 点，由波形图可知，在 $t = 1/3$ s 时

$$y_P(1/3) = 0 \qquad v_P(1/3) < 0$$

即：

$$\Psi_P = \pi/2$$

所以其对应的旋转矢量如图 7.5 中的 $\boldsymbol{A}_P$ 所示。同时考虑到 P 点的振动相位超前于 O 点，由此可判定

$$\psi_P - \psi_O = \frac{2\pi}{\lambda}\overline{OP} = \frac{7\pi}{6}$$

由此得

$$\overline{OP} = x_P = \frac{7\lambda}{12} = \frac{7}{30}\text{m}$$

（4）根据波动表达式的物理意义，将 $x_P = \dfrac{7}{30}$ 代入此波动表达式，可得 P 点的振动表达式为

$$y_P(t) = 0.10\cos\left[\pi t + 5\pi x - \pi\right]\Big|_{x=\frac{7}{30}} = 0.10\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{m}$$

例 7.3 设 S_1 和 S_2 为两个相干波源，相距 $\lambda/4$，S_1 的相位比 S_2 的相位超前 $\pi/2$。若在 S_1 和 S_2 的连线上，两列波单独传播时的强度均为 I_0，且不随距离变化。试求 S_1、S_2 的连线上，在 S_1 和 S_2 的外测合成波的强度分别是多少？

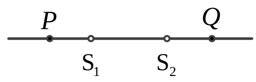


图 7.6 例 7.3 图

分析：根据波的干涉理论，在两列相干波的相遇区域中，任意一点合振动的振幅满足 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$，其中 $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda}$。所以只需算出 S_1、S_2 发出的波在相遇点所引起的振动的相位差 $\Delta\varphi$，就可得干涉结果，进而求出合成波的强度。

解：由题意可设两列波单独传播时在 S_1、S_2 连线上的振幅为：$A_1 = A_2 = A_0$，且 $I_0 \propto A_0^2$。又由题意已知：$\overline{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2} = \lambda/4$，$\varphi_{10} - \varphi_{20} = \pi/2$。

对于 S_1 外侧的 P 点，两列波在 P 点产生的振动相位差为

$$\Delta\varphi_{\mathrm{P}} = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\frac{r_{\mathrm{PS}_2} - r_{\mathrm{PS}_1}}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{\lambda/4}{\lambda} = -\pi$$

这表明两列波在 P 点满足干涉减弱（相消干涉）条件，故

$$A_{\mathrm{P}} = \left|A_1 - A_2\right| = 0$$

又因为波的强度 $I \propto A^2$，所以在 S_1 的外侧合成波的强度为零，即 $I_P = 0$。

对于在 S_2 外侧的 Q 点

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}} = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\frac{r_{\mathrm{QS}_2} - r_{\mathrm{QS}_1}}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{(-\lambda/4)}{\lambda} = 0$$

这表明两列波在 Q 点满足干涉加强（相长干涉）条件，故

$$A_{\mathrm{Q}} = A_1 + A_2 = 2A_0$$

所以在S_2的外侧合成波的强度I_Q与I_0之比为

$$I_Q : I_0 = \left(2A_0\right)^2 : A_0^2 = 4:1$$

即在S_2外侧各点合成波的强度是单一波源发出波的强度的 4 倍。

例 7.4 在一根线密度为$\mu = 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$；张力$F = 10\mathrm{N}$的弦线上，有一列沿$Ox$轴正向传播的简谐波，其频率为$\nu = 50\mathrm{Hz}$，振幅$A = 4.0\times10^{-3}\mathrm{m}$。已知弦线上离坐标原点$x_1 = 0.5\mathrm{m}$处的质点在$t = 0\mathrm{s}$时的位移为$+A/2$，且沿$Oy$轴负方向运动。当传播到$x_2 = 10\mathrm{m}$处的固定端时，此波的能量被全部反射。试求：

（1）入射波和反射波的波动表达式；

（2）入射波与反射波叠加形成的驻波在$0 \le x \le 10\mathrm{m}$区间内所有波腹和波节的位置坐标。

分析：首先由$x_1 = 0.5\mathrm{m}$处质点的运动状态确定该点的振动初相位，然后用坐标平移或波线上两点之间的相位关系，求出入射波的波动表达式。由于反射端是固定端，为波节，有半波损失，即反射波与入射波在反射端的相位差为π，据此可求出反射波的波动表达式，进而可求出合成波的驻波方程。

解：因为弦线上的波速为

$$u = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{10/10^{-3}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

所以波长和角频率分别为

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{100}{50} = 2\mathrm{m}\quad,\quad \omega = 2\pi\nu = 100\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

（1）因为$x_1 = 0.5\mathrm{m}$处的质点在$t = 0\mathrm{s}$时的位移为$+A/2$，且沿Oy轴负向运动，所以由旋转矢量法可该质点的振动初相为$\varphi = \pi/3$。若以$x_1 = 0.5\mathrm{m}$处为坐标原点建立坐标系$O'x'$，则入射波的波动表达式为

$$y_{入}\left(x',t\right) = 4.0\times10^{-3}\cos\left[100\pi\left(t - \frac{x'}{100}\right) + \frac{\pi}{3}\right]\ \mathrm{m}$$

将坐标变换$x' = x - x_1 = x - 0.5$代入上式，可得入射波动表达式为

$$y_{入}(x,t)=4.0\times10^{-3}\cos\left[100\pi\left(t-\frac{x-0.5}{100}\right)+\frac{\pi}{3}\right]\text{ m}$$

$$=4.0\times10^{-3}\cos\left[100\pi\left(t-\frac{x}{100}\right)+\frac{5}{6}\pi\right]\text{ m}$$

不妨设反射波的波动表达式为

$$y_{反}(x,t)=4.0\times10^{-3}\cos\left[100\pi\left(t+\frac{x}{100}\right)+\varphi_{反}\right]\text{ m}$$

由于在 $x_2=10\text{m}$ 处的反射端是固定端（波节），故两列波在反射端的相位相反，即

$$\left[100\pi\left(t+\frac{x}{100}\right)+\varphi_{反}\right]_{x=10}-\left[100\pi\left(t-\frac{x}{100}\right)+\frac{5}{6}\pi\right]_{x=10}=\pi$$

解此方程得：$\varphi_{反}=\dfrac{11\pi}{6}-20\pi$

所以反射波动表达式为

$$y_{反}(x,t)=4.0\times10^{-3}\cos\left[100\pi\left(t+\frac{x}{100}\right)+\frac{11\pi}{6}-20\pi\right]\text{ m}$$

$$=4.0\times10^{-3}\cos\left[100\pi\left(t+\frac{x}{100}\right)+\frac{11\pi}{6}\right]\text{ m}$$

（2）驻波方程为

$$y_{驻}(x,t)=y_{入}(x,t)+y_{反}(x,t)=8.0\times10^{-3}\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(100\pi t+\frac{4}{3}\pi\right)\text{ m}$$

由驻波方程可得波腹条件

$$\pi x+\pi/2=k\pi \qquad 即 \qquad x=(k-1/2)\text{m}$$

所以，在 $0\le x\le10$ 内，所有波腹的位置坐标为

$$x=0.5\text{m}，1.5\text{m}，\cdots，9.5\text{m}$$

又波节条件为

$$\pi x+\frac{\pi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad 即 \qquad x=k$$

所以，在 $0\le x\le10$ 区间内，所有波节的位置坐标为

$$x = 0，1，2，\cdots，10$$

五、自我测试题

7.1　已知一列平面简谐波的波函数为 $y(x,t) = A\cos(Bt + Cx + D)$，其中 A、B、C、D 均为正的常数。则

A．该波沿 x 轴正向传播　　　B．波的频率为 $\nu = B$

C．波的传播速度为 $u = C/B$　　　D．波长为 $\lambda = 2\pi/C$

7.1 答案：D

解题提要：将已知的波函数与波函数的标准形式

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\nu\left(t \pm \frac{x}{u}\right) + \varphi_o\right] = A\cos\left(\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_o\right)$$

作比较即可。式中取“＋”表示沿 x 轴负向传播，“－”表示沿 x 轴正向传播。

7.2　频率为 200Hz，波速为 $340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的平面简谐波沿 x 轴正方向传播，则波线上振动相位差为 $2\pi/3$ 的两点之间的距离为（　　　　）

A．1.70m　　B．0.850m　　C．0.567m　　D．0.433m

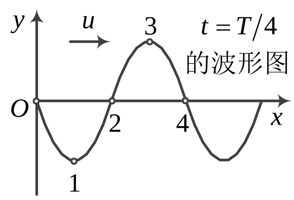
7.2 答案：C

解：由题意，波长 $\lambda = u/\nu = 1.70\mathrm{m}$，因波线上相距为 Δx 的两点的振动相位差为 $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\Delta x = \dfrac{\lambda}{3} = 0.567\mathrm{m}$。

7.3　一简谐波沿 x 轴正方向传播，在 $t = T/4$ 时波形曲线如图所示。若振动以余弦函数表示，各点振动初相位的取值范围为（$-\pi$，π），则（　　　　）

A．点 1 初相 $\varphi_1 = -\pi/2$　　B．点 2 初相 $\varphi_2 = \pi$

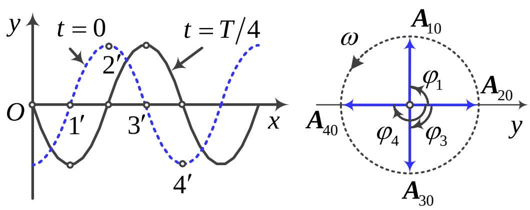
C．点 3 初相 $\varphi_3 = -\pi/2$　　D．点 4 初相 $\varphi_4 = 0$



测试题 7.3 图

7.3 答案：C

解：将波形图向右平移 $\lambda/4$，即



测试题 7.3 解图

可得$t=0$时刻的波形曲线，如图中虚线所示。再由旋转矢量图可得，点 1 初相位为$\pi/2$，点 2 为 0，点 3 为$-\pi/2$，点 4 为$-\pi$。故选 C。

7.4 一平面简谐波沿 x 轴负向传播，已知 $x=l$ 处 P 点的振动方程为 $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，则波动表达式为

A. $y=A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x-l}{u}\right)+\varphi_0\right]$　　B. $y=A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$

C. $y=A\cos\left[\omega\left(t+\dfrac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$　　D. $y=A\cos\left[\omega\left(t+\dfrac{x-l}{u}\right)+\varphi_0\right]$

7.4 答案：D

解题提要：若以 P 点为坐标原点O'，建立坐标系$O'x'$，则波动表达式为

$$y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x'}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

再将坐标变换$x'=x-l$代入上式即可。

7.5 一列平面简谐波在弹性媒质中传播，在某一时刻，媒质中的某个质元正处于平衡位置，此时该质元中的能量是（　　　　）

A．动能为零，势能最大；　　B．动能为零，势能为零；

C．动能最大，势能最大；　　D．动能最大，势能为零。

7.5 答案：C

解题提要：波动的能量特点是：质元中的动能与势能总是同步变化，且大小相等。

7.6 设 S_1 和 S_2 为两个相干波源，其振动方程分别为 $y_1=A_1\sin(\omega t+\pi/2)$，$y_2=A_2\cos\omega t$。P 点到波源$S_1$和$S_2$的距离相等，两列波各自在 P 点产生的波强为$I_1$和$I_2$。则 P 点合成波的强度为（　　　　）

A. $I=I_1+I_2$　　B. $I=I_1-I_2$

C. $I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}$　　D. $I=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}$

7.6 答案：C

解题提要：因为 $y_1=A_1\sin(\omega t+\pi/2)=A_1\cos\omega t$，这表明两列波的振动初相位相

同。所以两列波在 P 点的振动相位差$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=0$，满足干涉加强条件。

7.7　在截面积为S的圆管中，有一列平面简谐纵波沿x轴正方向传播，其波动表达式为$y=A\cos\left(\omega t-2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)$，管中媒质的密度为$\rho$，则波的平均能量密度为__________，通过截面S的平均能流是____________。

7.7 答案： $\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2$，$\dfrac{1}{4\pi}\lambda\rho A^2\omega^3 S$

解： 由波的平均能量密度公式$\overline{w}=\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2$和波速$u=\dfrac{\lambda}{T}=\dfrac{\lambda\omega}{2\pi}$，得平均能流为

$$P=\overline{w}uS=\frac{1}{4\pi}\lambda\rho A^2\omega^3 S$$

7.8　一列频率为 500Hz 的平面简谐波，波速为$360\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，则波线上相位差为$\pi/3$的两点间距为____________；介质中任一点在10^{-3}s 时间内的相位差为___________。

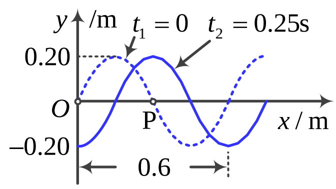
7.8 答案： 0.12m、π

解： 由题意可知波长$\lambda=u/\nu=0.72\mathrm{m}$，波线上相距为$\Delta x$的两点的相位差为$\Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x$，由此可得$\Delta x=0.12\mathrm{m}$；在同一地点$\Delta\varphi=\omega\Delta t=1000\pi\times10^{-3}=\pi\ \mathrm{rad}$。

7.9　一列平面简谐波沿x轴正向传播，已知$t_1=0$和$t_2=0.25\mathrm{s}$时的波形如图所示。试求：

（1）P 点的振动表达式；

（2）此波的波动表达式。



测试题 7.9 图

7.9 答案： $y_{\mathrm{P}}(t)=0.20\cos\left[2\pi(4k+1)t-\pi/2\right]$

$$y(x,t)=0.20\cos\left[2\pi(4k+1)t-\frac{10\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right]$$

解： 由波形图可知，振幅$A=0.20\mathrm{m}$、波长$\lambda=0.6\mathrm{m}$，在$\Delta t=0.25\mathrm{s}$内，此波沿x轴正向传播的距离为：$\Delta L=\lambda/4+k\lambda=0.15(4k+1)\ \mathrm{m}$，所以速度为

$$u=\frac{\Delta L}{\Delta t}=0.60(4k+1)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

式中$k=0,1,2,\cdots$，波的频率为

$$\nu=\frac{u}{\lambda}=(4k+1)\ \mathrm{Hz}$$

又由波形图可知，P 点在$t_1=0$时刻位于平衡位置，且向y轴正方向运动，所以 P 点的振动初相位$\varphi_{\mathrm{P}}=-\pi/2$，由此得 P 点的振动表达式为

$$y_{\mathrm{P}}(t)=A\cos(2\pi\nu t+\varphi_{\mathrm{P}})=0.20\cos\left[2\pi(4k+1)t-\pi/2\right]\ \mathrm{m}$$

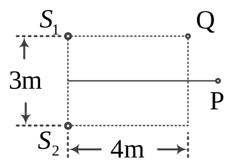
（2）根据同一条波线上任意两点之间相位的超前与落后关系，有

$$\varphi_O-\varphi_{\mathrm{P}}=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\overline{OP}=\pi\qquad 即\qquad \varphi_O=\pi+\varphi_{\mathrm{P}}=\frac{\pi}{2}$$

所以此波动表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_O\right)=0.20\cos\left[2\pi(4k+1)t-\frac{10\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right]\ \mathrm{m}$$

7.10 如图所示，两个相干波源$\mathrm{S_1}$和$\mathrm{S_2}$，相距$a=3\mathrm{m}$，周期$T=0.01\mathrm{s}$，振幅分别为$A_1=0.03\mathrm{m}$和$A_2=0.05\mathrm{m}$，且$\varphi_1=\pi/3$，$0<\varphi_2<2\pi$，P 是两个波源中垂线上的任意一点，Q 为图中矩形上的一个顶点。当两列波在 P 点相遇时，满足干涉减弱条件，在 Q 点干涉时，满足干涉加强条件，试求波长和波速。



测试题 7.10 图

7.10 答案： $\dfrac{2}{2k+1}$ m、$\dfrac{200}{2k+1}$ $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$（式中：$k=0,1,2,\cdots$）

解： 由于两列波在 P 点满足干涉减弱条件，所以振动相位差满足

$$\Delta\varphi_{\mathrm{P}}=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}\left(\overline{\mathrm{PS_2}}-\overline{\mathrm{PS_1}}\right)=\varphi_2-\varphi_1=\pi$$

所以 $\varphi_2=\varphi_1+\pi=4\pi/3$

又在 Q 点满足干涉加强条件，故有

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}\left(\overline{\mathrm{QS}}_2-\overline{\mathrm{QS}}_1\right)=\pi-\frac{2\pi}{\lambda}\times(5-4)=\pm2k\pi$$

因 $\lambda>0$，可解得

$$\lambda=\frac{2}{2k+1}\ \mathrm{m}$$

式中 $k=0,1,2,\cdots$，所以波速为

$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{200}{2k+1}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

7.11 两列相干波在同一根弦线上相向传播，其波动表达式分别为

$$y_1=0.06\cos(0.01\pi x-4.0\pi t)\ \mathrm{SI}\quad,\quad y_2=0.06\cos(0.01\pi x+4.0\pi t)\ \mathrm{SI}$$

试求：

（1）波的频率、波长和波速；

（2）在弦线上合成波振幅最大和最小的位置。

7.11 答案： $2\mathrm{Hz}$， $200\mathrm{m}$， $400\mathrm{m\cdot s^{-1}}$；当 $x=\pm100k$ 时，合成波振幅最大；当 $x=\pm(2k+1)50$ 时，合成波振幅最小；

解：（1）不难看出，两列相干波具有相同的振幅、频率和波长，但传播方向不同（相反）。将波动表达式 y_1 改写为

$$y_1=0.06\cos(0.01\pi x-4.0\pi t)\ \mathrm{SI}=0.06\cos(4.0\pi t-0.01\pi x)\ \mathrm{SI}$$

再与波函数的标准形式 $y(x,t)=A\cos\left(2\pi\nu t-\dfrac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_O\right)$ 比较，可得

频率 $\nu=2\mathrm{Hz}$，波长 $\lambda=200\mathrm{m}$，波速 $u=\lambda\nu=400\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

（2）由于两列相干波在同一直线上沿相反方向传播，故合成后形成驻波，其驻波方程为

$$y_{驻}=y_1+y_2=0.12\cos(0.01\pi x)\ \cos(4.0\pi t)\ \mathrm{SI}$$

当 $0.01\pi x=\pm k\pi$，即 $x=\pm100k\ \mathrm{m}$ 时，$|\cos(0.01\pi x)|=1$，合成波振幅最大；

当 $0.01\pi x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，即 $x=\pm(2k+1)50\ \mathrm{m}$ 时，$|\cos(0.01\pi x)|=0$，合成波振幅最小。

7.12 一个频率为 500Hz 的声波，在横截面积为$4.00\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2$、温度为 25℃的空气管内传播。若在$10\mathrm{s}$内通过空气管横截面的声波能量为$3.00\times10^{-2}\,\mathrm{J}$，已知 25℃时空气中的声速为$346\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，空气密度为$1.17\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，试求该波的强度、振幅和声强级。

7.12 答： $7.50\times10^{-2}\,\mathrm{J\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$、$6.13\times10^{-6}\,\mathrm{m}$、$109\mathrm{dB}$

解： 由题意可知，声波的强度（即波的平均能流密度为）

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\frac{\Delta E/\Delta t}{S}=\frac{3.00\times10^{-2}}{10\times4.00\times10^{-2}}=7.50\times10^{-2}\quad（\mathrm{J\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}）$$

又$I=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u$，所以该声波的振幅为

$$A=\sqrt{\frac{2I}{\rho\omega^2u}}=\sqrt{\frac{I}{\rho2\pi^2\nu^2u}}=\sqrt{\frac{7.5\times10^{-2}}{1.17\times2\times\pi^2\times500^2\times346}}=6.13\times10^{-6}\quad（\mathrm{m}）$$

该波的声强级为

$$I_L=10\cdot\log\frac{I}{I_0}=10\cdot\log\frac{7.5\times10^{-2}}{10^{-12}}=109\mathrm{dB}$$

7.13 蝙蝠在洞穴中飞来飞去，能利用超声波导航。若蝙蝠发出的超声波频率$\nu=39\mathrm{kHz}$，当它以声速的$1/40$的速度向表面平直的岩壁飞去时，试求它听到的从岩壁反射回来的超声波的频率。

7.13 答案： 41kHz

解： 当蝙蝠向岩壁飞去时，岩壁接收到的超声波频率为

$$\nu_1=\frac{u}{u-v_s}\nu$$

当岩壁反射声波时，可将岩壁看作波源，发出频率为ν_1的超声波。此时蝙蝠作为运动的接收器，所以它接受到超声波的频率为

$$\nu_2=\frac{u+v_r}{u}\nu_1=\frac{u+v_r}{u-v_s}\nu=\frac{u+u/40}{u-u/40}\times39\mathrm{kHz}=41\mathrm{kHz}$$