武汉大学2011—2012学年第二学期《高等数学A2》试题（A卷）

一、试解下列各题（每小题7分，共49分）

1、设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$，试将函数$f(x)$展开成傅立叶级数。

2、设曲面Σ为柱面$x^2+y^2=1$介于平面$z=1$与$z=2$之间部分的外侧，求曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$与$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$。

3、求函数$f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线$x+y=6,y=0,x=0$所围成的闭区域D上的最大值和最小值。

4、设$a>0$，计算极限$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})$的值。

5、设$y=f(x,t)$，　t为由方程 $F(x,y,t)=0$ 确定的x,y的函数，其中f,F具有一阶连续偏导数，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

6、计算二次积分$I(a)=\int_0^a\mathrm{d}x\int_a^x e^{-y^2}\mathrm{d}y$，其中实数$a>0$，并求极限$\lim\limits_{a\to+\infty}I(a)$

7、证明：$\iint\limits_{D}\frac{\ln(1+y)}{\ln(1+x)}dxdy\ge 1, D:1\le x\le 2,1\le y\le 2$.

8、计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由$x^2+y^2=2z,z=1$及$z=2$所围成的空间闭区域

二、（11分）过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求此切平面的方程.

三、（10分）已知无穷级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$满足 $u_n=1-\frac{\ln n}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}n^{-x^2-y^2}dxdy$，其中实数$a>0$，证明：

级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 当$a>1$时收敛；当$a\le 1$时发散，但级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n u_n$在$a>0$时收敛。

四、（10分）设$\vec{l}$是曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$在点$A(1,-2,1)$处的切向量，求函数$f(x,y,z)=2xy-z^2$在点$A$沿$\vec{l}$的方向导数，并求此函数在点$A$处方向导数的最大值。

五、（10分）设函数$f(x)$具有连续导数并且满足$f(1)=3$，计算曲线积分

$$\int_L(yf^2(x)+x)\mathrm{d}x+(x^2f(x)+y)\mathrm{d}y$$

的值，假定此积分在右半平面内与路径无关，曲线L是由$(1,2)$到$(2,1)$的任一条逐段光滑曲线。

六、（10分）设函数 $u=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}y^4+z^3-3z$

（1）、求向量场$\vec{\mathbf{A}}=\mathbf{grad}\,u$穿过曲面$S$流向外侧的通量，

其中S是由曲线$\begin{cases}z=1-y^2\\x=0\end{cases}$ 绕z轴旋转一周而成的旋转面$(z\ge 0)$的上侧。

（2） 求$div\vec{\mathbf{A}}$，　$rot\vec{\mathbf{A}}$。