武汉大学 2019-2020 学年

第二学期期末《高等数学 A2》考试试卷（A 卷）

一、试解下列各题(每小题 5 分，共 50 分)

1. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 的存在性。

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\ (b_n\ge0)$ 收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

3. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，函数 $y=y(x)$ 由 $e^x=\int_0^{x-y}\frac{\sin t}{t}dt$ 确定，求 $\frac{du}{dx}$.

4. 设 $z=f[x^2-y,\varphi(xy)]$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$\varphi(u)$ 二阶可导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 已知全微分 $\mathrm{d}f(x,y)=\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2xy-y^2\right)\mathrm{d}y$，求 $f(x,y)$ 的表达式。

6. 设曲面方程为 $F(z-ax,z-by)=0$（a,b 为正常数），$F(u,v)$ 具有一阶连续的偏导数，且 $F_u^2+F_v^2\ne0$，试证明此曲面上任一点处法线恒垂直于一常向量。

7. 求 $f(x,y)=x^2+y^2+y$ 在区域 $D:x^2+y^2\le4,\frac{x^2}{2^2}+y^2\ge1$ 上的平均值。

8. 求 $\vec{F}(x,y,z)=yz\vec{i}+z^2\vec{k}$ 穿出曲面 Σ 的通量，Σ 为柱面：$y^2+z^2=1,z\ge0$ 被平面 $x=0,x=1$ 截下部分。

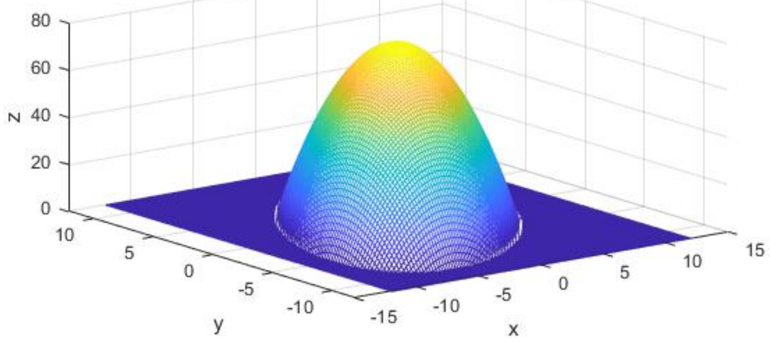
9. 计算积分 $\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 Σ 为球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧。

10. 设 Σ 为半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+2y+3z)dS$.

二、(10 分)已知空间曲线 Γ：$\begin{cases}3x^2+y^2-z=6\\x^2-2y^2-z=0\end{cases}$，且空间曲线 Γ 在 xoy 坐标面的投影曲线为 L，若取 L 为顺时针方向，求曲线积分 $\int_L\frac{2ydx-xdy}{2x^2+3y^2}$.

三、(8 分)考察两直线 $l_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}$ 和 $l_2:x=4t+2,y=-t+3,z=2t-4$，是否相交？如相交，求出其交点，如不相交，求出两直线之间的距离 d.

四、(本题 24 分，其中（1）8 分，（2）8 分，（3）4 分，（4）4 分，)已知某座小山的表面形状曲面方程为 $z=75-x^2-y^2+xy$，取它的底面所在的平面为 xoy 坐标面。



(1) 设点 $M(x_0,y_0)$ 为这座小山底部所占的区域 D 内的一点，问高函数 $h(x,y)$，在该点沿平面

上什么方向的方向导数最大？记此方向导数的最大值为$g(x_0,y_0)$，试求$g(x_0,y_0)$的表达式。
(2)现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需在山脚寻找上山坡度最大的点作为攀岩的起点,试确定攀岩起点的位置。
(3)试用多元函数积分式表示山体的体积V（只需给出二重积分式，不用计算积分）。
(4)设山的表面分布着某种物质，其质量面密度为$\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{5(x^2+y^2)-8xy+1}}$，试用重积分表示分布在山体表面的物质质量（只需给出重积分式，不用计算积分）。

五、（8 分）求数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n}(n^2-n+1)$的和。