2024-2015 高等数学 B2 期末考试题解

一、（8 分）设 $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b},\vec{q}=k\vec{a}+\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$。问：（1）k 为何值时 $\vec{p}\perp\vec{q}$？（2）k 为何值时以 $\vec{p},\vec{q}$ 为边的平行四边形面积为 6？

解：（1）$\vec{p}\cdot\vec{q}=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(k\vec{a}+\vec{b})=2k|\vec{a}|+|\vec{b}|=2k+2$，

$\vec{p}\perp\vec{q}\Leftrightarrow\vec{p}\cdot\vec{q}=0\Leftrightarrow k=-1$。$k=-1$ 时 $\vec{p}\perp\vec{q}$。

（2）$6=|\vec{p}\times\vec{q}|=|(2\vec{a}+\vec{b})\times(k\vec{a}+\vec{b})|=|(2-k)(\vec{a}\times\vec{b})|=2|2-k|$，$k=-1$ 或 $k=5$ 时以 $\vec{p},\vec{q}$ 为边的平行四边形面积为 6。

二、（8 分）求函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点 $M(1,2,-2)$ 沿曲线 $x=t,y=2t^2,z=-2t^4$ 切方向（t 增加方向）的方向导数。

解：曲线在点 $M(1,2,-2)$ 的 $t=1$。$\vec{T}=\{1,4t,-8t^3\}\big|_{t=1}=\{1,4,-8\}$。$|\vec{T}|=\sqrt{81}=9$。

$\cos\alpha=\dfrac{1}{9},\cos\beta=\dfrac{4}{9},\cos\gamma=-\dfrac{8}{9}$。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\{1,4t,-8t^3\}\big|_{t=1}=\{1,4,-8\}$$

三、（6 分）函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(x+y+z)$ 所确定，其中 f 二阶可导且 $f'(u)\neq 1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：把 z 看作 x,y 的隐函数，恒等式 $z=f(x+y+z)$ 两边对 x 求导

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x+y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

解出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f'(x+y+z)}{1-f'(x+y+z)}$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{f''(x+y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(1-f'(x+y+z)\right)+f'(x+y+z)f''(x+y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(1-f'(x+y+z)\right)^2}$$

$$=\frac{f''(x+y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(1-f'(x+y+z)\right)^2}=\frac{f''(x+y+z)\left(1+\frac{f'(x+y+z)}{1-f'(x+y+z)}\right)}{\left(1-f'(x+y+z)\right)^2}$$

$$=\frac{f''(x+y+z)}{\left(1-f'(x+y+z)\right)^3}$$

四、（8 分）设 $u=f(x+y+z,xyz)$ 具有一阶连续偏导数，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2ze^{y^2}=\sin z$ 所确定，求 du。

解：把 z 当作 x,y 的隐函数，恒等式 $x^2+2ze^{y^2}=\sin z$ 两边求微分

$2xdx+2e^{y^2}dz+4yze^{y^2}dy=\cos zdz$ 解出

$$dz=\frac{2x}{\cos z-2e^{y^2}}dx+\frac{4yze^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}dy$$

$$du=f_1\cdot(dx+dy+dz)+f_2\cdot(yz\,dx+xzdy+xydz)$$

$$=f_1\cdot\left(dx+dy+\frac{2x}{\cos z-2e^{y^2}}dx+\frac{4yze^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}dy\right)$$

$$+f_2\cdot\left[yz\,dx+xzdy+xy\left(\frac{2x}{\cos z-2e^{y^2}}dx+\frac{4yze^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}dy\right)\right]$$

$$=f_1\cdot\frac{2x+\cos z-2e^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}dx+f_1\cdot\frac{4yze^{y^2}+\cos z-2e^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}dy$$

$$+f_2\cdot\frac{2x^2y+yz\cos z-2yze^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}dx+f_2\cdot\frac{4xy^2ze^{y^2}+xz\cos z-2xze^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}dy$$

$$=\frac{2xf_1+f_1\cos z-2e^{y^2}f_1+2x^2yf_2+yzf_2\cos z-2yze^{y^2}f_2}{\cos z-2e^{y^2}}dx$$

$$+\frac{4yze^{y^2}f_1+f_1\cos z-2e^{y^2}f_1+4xy^2ze^{y^2}f_2+xzf_2\cos z-2xze^{y^2}f_2}{\cos z-2e^{y^2}}dy$$

五、（8 分）求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $M(1,2,0)$ 处的切平面和法线方程。

解：$F=z-e^z+2xy-3$，

$\vec{n} = \frac{1}{2}\left\{F_x, F_y, F_z\right\}_M = \frac{1}{2}\left\{2y, 2x, 1-e^z\right\}_M = \left\{2, 1, 0\right\}$

切平面：$2(x-1) + y - 2 = 0$，即$2x + y = 4$。

法线：$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}$。

六、（10 分）设$z = x^3 + \alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + \alpha\beta^{-1}(\gamma x + \beta y)$。试证：当$\alpha\beta \neq \gamma^2$时，函数$z$有一个且仅有一个极值，又若$\beta < 0$，则该极值必为极大值。

证：解方程组$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 2\alpha x + 2\gamma y + \alpha\beta^{-1}\gamma = 0 \\ z_y = 2\gamma x + 2\beta y + \alpha = 0 \end{cases}$得两点解$\left(0, -\frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right), \left(\frac{2}{3}\gamma^2\beta^{-1} - \frac{2}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\gamma^3\beta^{-2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\beta^{-1} - \frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$。

$A = z_{xx} = 6x + 2\alpha, B = z_{xy} = 2\gamma, C = z_{yy} = 2\beta$。对于$\left(0, -\frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$，

$A = 2\alpha, B = 2\gamma, C = 2\beta, \Delta = 4\alpha\beta - 4\gamma^2 \neq 0$。

对于$\left(\frac{2}{3}\gamma^2\beta^{-1} - \frac{2}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\gamma^3\beta^{-2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\beta^{-1} - \frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$，

$A = 4\gamma^2\beta^{-1} - 2\alpha, B = 2\gamma, C = 2\beta, \Delta = 4\gamma^2 - 4\alpha\beta \neq 0$。

如果$\alpha\beta > \gamma^2$，则$\left(0, -\frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$的$\Delta = 4\alpha\beta - 4\gamma^2 > 0$从而是极值点而$\left(\frac{2}{3}\gamma^2\beta^{-1} - \frac{2}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\gamma^3\beta^{-2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\beta^{-1} - \frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$的$\Delta = 4\gamma^2 - 4\alpha\beta < 0$从而不是极值点，且当$\beta < 0$时$A = 2\alpha < 0$从而此极值点的极值是极大值。

如果$\alpha\beta < \gamma^2$，则$\left(0, -\frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$的$\Delta = 4\alpha\beta - 4\gamma^2 < 0$从而不是极值点而$\left(\frac{2}{3}\gamma^2\beta^{-1} - \frac{2}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\gamma^3\beta^{-2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\beta^{-1} - \frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$的$\Delta = 4\gamma^2 - 4\alpha\beta > 0$从而是极值点，且当$\beta < 0$时$A = 4\gamma^2\beta^{-1} - 2\alpha < 0$从而此极值点的极值是极大值。

故，函数 z 有一个且仅有一个极值，又若 $\beta < 0$，则该极值必为极大值。

七、（8 分）设 $f(x, y)$ 连续，且满足 $f(x, y) = x\sqrt{y} + \iint\limits_D f(x, y)dxdy$，其中 D 为曲线 $y = x^2, x = y^2$ 所围成的区域，求 $f(x, y)$。

解：记常数 $c = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$，则 $f(x, y) = x\sqrt{y} + c$。两边在 D 计算二重积分

$c = \iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy + c\iint\limits_D dxdy$。

解 $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$ 得 $(0, 0), (1, 1)$。

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy = \int_0^1 xdx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{y}dy = \frac{2}{3}\int_0^1 x\left(x^{\frac{3}{4}} - x^3\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}} - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{11} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{55}$$

$$\iint\limits_D dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

解方程 $c = \frac{6}{55} + \frac{1}{3}c$ 得 $c = \frac{9}{55}$。$f(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{9}{55}$。

八、（8 分）设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域，S 是 Ω 的整个边界的外侧，求曲面积分 $\oiint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$。

解：$\oiint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy \overset{\text{高斯}}{=} 3\iiint\limits_\Omega dxdydz$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi\, dr = R^3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi$$

$$= R^3\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = 2\pi R^3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2 - \sqrt{2}\right)\pi R^3$$

九、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_{n+1}/a_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\Big/\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right| = 1$，收敛半径 $R = 1$。根据交错级数审敛

法，$x = \pm 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 都收敛。所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的收敛域是 $[-1, 1]$。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$。

设 $s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$。则 $s_1(0) = 0$。

$s_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} \overset{-x^2=t}{=} \sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1} = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1+x^2}$。两边从 0 到 x 积分得

$s_1(x) = \arctan x$。所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n} = x\arctan x \quad (x \in [-1, 1])$。

十、（10 分）确定常数 λ，使得在右半平面 $x > 0$ 的单连通区域内，曲线积分

$$\int_L 2xy(x^4 + y^2)^{\lambda}dx - x^2(x^4 + y^2)^{\lambda}dy = \int_L Pdx + Qdy$$

与路径无关，并在上述条件下，求积分 $\int_{(1,0)}^{(3,3)} Pdx + Qdy$ 之值。

解：$P = 2xy(x^4 + y^2)^{\lambda}, Q = -x^2(x^4 + y^2)^{\lambda}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^{\lambda} + 4\lambda xy^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1}, \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^{\lambda} - 4\lambda x^5(x^4 + y^2)^{\lambda-1}$$

让 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 解得 $\lambda = -1$。此时所给曲线积分与路径无关。

$$\int_{(1,0)}^{(3,3)} Pdx + Qdy = \int_{(1,0)}^{(3,0)} Pdx + Qdy + \int_{(3,0)}^{(3,3)} Pdx + Qdy$$

$$= \int_1^3 0dx - \int_0^3 9(81 + y^2)^{-1}dy = -\frac{1}{9}\int_0^3 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{9}\right)^2}dy$$

$$= -\arctan\frac{1}{3}$$

十一、（10 分）计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2 + z)dV$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 4z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 围成的立体。

解：旋转面 $x^2 + y^2 = 4z$。Ω 在 xy 平面上的投影 D_{xy} : $x^2 + y^2 \le 4^2$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dV=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{4}(x^2+y^2+z)dz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(x^2+y^2\right)\left(4-\frac{x^2+y^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(16-\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{16}\right)\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\left[\rho^2\left(4-\frac{\rho^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(16-\frac{\rho^4}{16}\right)\right]\rho d\rho$$

$$=2\pi\int_0^4\left[4\rho^3+8\rho-\frac{9}{32}\rho^5\right]d\rho=2\pi\left[\rho^4+4\rho^2-\frac{3}{64}\rho^6\right]_0^4$$

$$=4^4\pi$$

十二、（6 分）设级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛，证明：当 $a_0=a_1=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛。

证：由于 $a_0=a_1=0$，$f(x)$ 的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

$$f(x)=a_2x^2+o(x^2)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=a_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$$

存在 $N\in Z^+$ 使得 $\left|o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\right|\le\left(\frac{1}{n}\right)^2$ $(n\ge N)$，此时 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\left(1+|a_2|\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2$ $(n\ge N)$。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+|a_2|\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2=\left(1+|a_2|\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛从而收敛。