武汉大学 2022−2023 学年第二学期

《微积分 (下)》 期末试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 13 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在**考试答题纸**上的对应题号区域, 写在其他位置无效.

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 同时与向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 轴垂直. 已知 $\boldsymbol{b}=(2,3,4)$ 且 $|\boldsymbol{a}|=10$, 求向量 $\boldsymbol{a}$.

2. 求直线 $l: \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ 在平面 $\Pi: 2x-y+2z-1=0$ 上的投影直线的方程.

3. 求 $f(x,y)=xy+\sin(3x+4y)$ 在点 $(0,0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=(3,4)$ 的方向导数.

4. 求椭球面 $3x^2+2y^2+z^2=6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程及法线方程.

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

6. 求由曲面 $z=2x^2+y^2$, $z=6-x^2-2y^2$ 所围立体的体积.

7. 求 $I=\iiint_\Omega (x+y+z^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为由 $x=0$, $x=1$, $x^2+1=\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}$ 所围成.

8. 求
$$I=\iint_\Sigma (4xz+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-2yz)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
其中 Σ 是曲线 $z=\mathrm{e}^x$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面, 取下侧.

9. 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的和函数.

10. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=x^2$, 将 $f(x)$ 展开为傅立叶级数, 并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

二、解答下列各题 (本题满分 30 分, 每小题 10 分)

11. 计算圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 处在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 内的那部分柱面的面积 $(R>0)$.

12. 在抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与柱面 $(x-1)^2+2(y-1)^2=12$ 的交线上, 求最高点和最低点的 z 坐标.

13. 计算 $I=\oint_L \dfrac{(x+4y)\,\mathrm{d}y+(3x-y)\,\mathrm{d}x}{3x^2+4y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,1)$ 为圆心, R 为半径的圆周 $(R>2)$, 取逆时针方向.

2022−2023 学年第二学期《微积分 (下)》参考答案 · 卷 (A)

1. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 同时与向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 轴垂直. 已知 $\boldsymbol{b}=(2,3,4)$ 且 $|\boldsymbol{a}|=10$, 求向量 $\boldsymbol{a}$.

解: 令 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{i}=(2,3,4)\times(1,0,0)=(0,4,-3)$, 则

$$\boldsymbol{e}_c=\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\left(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}(0,4,-3).$$

由于 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}_a=\pm\boldsymbol{e}_c=\pm\frac{1}{5}(0,4,-3)$. 所以

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a=\pm(0,8,-6).$$

2. 求直线 $l:\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ 在平面 $\Pi:2x-y+2z-1=0$ 上的投影直线的方程.

解: 设过直线 l 且垂直于 Π 的平面为 Π'. 过直线 l 的平面束方程为

$$y+z+1+\lambda(x-2)=0,$$

Π' 的法向量垂直于 Π 的法向量, 故

$$2\lambda-1+2=0$$

解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, 故 $\Pi':x-2y-2z-4=0$, 故所求投影直线为

$$\begin{cases}2x-y+2z-1=0,\\ x-2y-2z-4=0.\end{cases}$$

3. 求 $f(x,y)=xy+\sin(3x+4y)$ 在点 $(0,0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=(3,4)$ 的方向导数.

解: 与 $\boldsymbol{l}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$, 所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=f_x(0,0)\frac{3}{5}+f_y(0,0)\frac{4}{5}=3\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\frac{4}{5}=5.$$

4. 求椭球面 $3x^2+2y^2+z^2=6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程及法线方程.

解: 记 $F(x,y,z)=3x^2+2y^2+z^2-6$, 则

$$\boldsymbol{n}=(6,4,2),$$

故所求切平面方程为

$$6(x-1)+4(y-1)+2(z-1)=0,$$

即 $3x+2y+z=6$. 法线方程为

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

解: (1) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

故 $f_x(0,y)=-y$.

当 $(x,y)=(0,0)$ 时

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$$

因此

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=-1.$$

(2) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

故 $f_y(x,0)=x$; 当 $(x,y)=(0,0)$ 时,

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=1.$$

6. 求由曲面 $z=2x^2+y^2$, $z=6-x^2-2y^2$ 所围立体的体积.

解: 联立两式消去 z, 得到 $x^2+y^2=2$. 立体在 xOy 面上的投影域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 2$.

上顶为 $z=6-x^2-2y^2$, 下底为 $z=2x^2+y^2$. 故

$$\begin{aligned}V&=\iint_{D_{xy}}\left[\left(6-x^2-2y^2\right)-\left(2x^2+y^2\right)\right]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}\left(6-3\left(x^2+y^2\right)\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(6-3r^2\right)r\,\mathrm{d}r=6\pi.\end{aligned}$$

7. 求 $I=\iiint_\Omega(x+y+z^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为由 $x=0$, $x=1$, $x^2+1=\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}$ 所围成.

解: 积分区域关于 zOx 平面对称, 故 $\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$. 积分区域关于 xOy 平面对称, 故 $\iiint_\Omega z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$. 又

$$\Omega:\begin{cases}(y,z)\in D_x:\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}\leqslant x^2+1,\\0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}I&=\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\iint_{D_x}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=12\pi\int_0^1 x(1+x^2)\,\mathrm{d}x=9\pi.\end{aligned}$$

8. 求

$$I=\iint_\Sigma(4xz+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-2yz)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲线 $z=\mathrm{e}^x$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面, 取下侧.

解: Σ 的方程为

$$z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y)\in D_{xy}:\ x^2+y^2\leqslant a^2.$$

补充 Σ_1: $z=\mathrm{e}^a$, $(x,y)\in D_{xy}:\ x^2+y^2\leqslant a^2$, 取上侧. 设 Σ 与 Σ_1 围成的区域为 Ω. 令

$$P=4xz+y, \quad Q=x-2yz, \quad R=1-z^2,$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

由高斯公式, 得

$$\begin{aligned}
I&=\left(\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)\left(1-z^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}V-\iint_{\Sigma_1}\left(1-z^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\left(\mathrm{e}^{2a}-1\right)\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\mathrm{e}^{2a}-1\right)\pi a^2.
\end{aligned}$$

9. 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的和函数.

解: 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x^3}{1-x^2}, \quad (-1<x<1).$$

两边求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2},$$

故

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}(3-\frac{x^2}{2})}{(1-\frac{x^2}{2})^2}=\frac{x^2\left(6-x^2\right)}{2\left(2-x^2\right)^2}, \quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

10. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=x^2$, 将 $f(x)$ 展开为傅立叶级数, 并由此求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

解: $b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots)$,

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\ \mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$,

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\ \mathrm{d}x=\frac{4}{n^2}(-1)^n \quad (n=1,2,\cdots)$,

故 $f(x)=x^2=\dfrac{1}{3}\pi^2+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

当 $x=0$ 时, $\dfrac{1}{3}\pi^2+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$, 得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

11. 计算圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 处在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 内的那部分柱面的面积 $(R>0)$.

解: 由第一类曲线积分的几何意义, 又该柱面关于 xOy 面对称, 取 L 为上半圆弧 $x^2+y^2=Rx$, 且 $y\leqslant 0$. 以极角 φ 为参数, L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos^2\varphi, \\ y=R\cos\varphi\sin\varphi \end{cases} \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

所以, 所求面积为

$$\begin{aligned} 4\int_L \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |R\sin\varphi|\sqrt{(-R\sin 2\varphi)^2+(R\cos 2\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = 4R^2. \end{aligned}$$

12. 在抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与柱面 $(x-1)^2+2(y-1)^2=12$ 的交线上, 求最高点和最低点的 z 坐标.

解: 即求 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 约束条件 $(x-1)^2+2(y-1)^2=12$ 下的最大值和最小值.

令 $L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+\lambda\left[(x-1)^2+2(y-1)^2-12\right]$, 求解方程组

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda(x-1)=0, \\ L_y=4y+4\lambda(y-1)=0, \\ L_\lambda=(x-1)^2+2(y-1)^2-12=0. \end{cases}$$

解得

$$x=y=3 \quad \text{和} \quad x=y=-1.$$

这样得到 $f(x,y)$ 在椭圆 $2(x-1)^2+(y-1)^2=12$ 上的 2 个可能极值点 $P(3,3)$, $Q(-1,-1)$.

得到最大值 $f(3,3)=27$, 最小值 $f(-1,-1)=3$.

13. 计算 $I=\oint_L \dfrac{(x+4y)\,\mathrm{d}y+(3x-y)\,\mathrm{d}x}{3x^2+4y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,1)$ 为圆心, R 为半径的圆周 $(R>2)$, 取逆时针方向.

解: $P=\dfrac{3x-y}{3x^2+4y^2}$, $Q=\dfrac{x+4y}{3x^2+4y^2}$. 且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-3x^2-24xy+4y^2}{(3x^2+4y^2)^2}.$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 $(0,0)$ 不连续, 不能直接使用格林公式.

在 L 内部, 对充分小的 $\varepsilon>0$, 作椭圆 C: $3x^2+4y^2=\varepsilon^2$, 取逆时针方向. 则在以 L, C^- 为边界的区域 D 上格林公式的条件满足. 从而

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{L\cup C^-}-\int_{C^-}\right)P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y \\ &= 0-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C^-}(x+4y)\,\mathrm{d}y+(3x-y)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

记 $P_0=3x-y$, $Q_0=x+4y$, 再次使用格林公式, 得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_C(x+4y)\,\mathrm{d}y+(3x-y)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{3x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2}2\,\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

另解: 部分结构有原函数, 从而简化计算. 注意到

$$\frac{4y\,\mathrm{d}y+3x\,\mathrm{d}x}{3x^2+4y^2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(3x^2+4y^2)}{3x^2+4y^2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\left[\ln(3x^2+4y^2)\right],$$

故 $\oint_L\frac{4y\,\mathrm{d}y+3x\,\mathrm{d}x}{3x^2+4y^2}=0$. 即原式

$$I=\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{3x^2+4y^2}.$$

记 $P=\frac{-y}{3x^2+4y^2}$, $Q=\frac{x}{3x^2+4y^2}$, 有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-3x^2+4y^2}{(3x^2+4y^2)^2}.$$

在 L 内部, 对充分小的 $\varepsilon>0$, 作椭圆 C: $3x^2+4y^2=\varepsilon^2$, 取逆时针方向. 则在以 L, C^- 为边界的区域 D 上格林公式的条件满足. 从而

$$\begin{aligned}I&=\left(\int_{L\cup C^-}-\int_{C^-}\right)P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\\&=0-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C^-}x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_C x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{3x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2}2\,\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$