

武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试高等数学 B2 试题 (A)

1、(8 分) 设 $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$, $\vec{c} = (2, 1, 2)$, 求同时垂直于 \vec{a} 和 \vec{b} , 且在向量 \vec{c} 上投影是 14 的向量 \vec{d} .

2、(10 分) 讨论极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$ 的存在性, 若存在求出极限, 若不存在说明理由.

3、(8 分) 过直线 $l: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ 作两个互相垂直的平面, 且其中一个过已知点 $M_1(0, 1, -1)$, 求这两个平面的方程.

4、(10 分) 设函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f(xg(y), y) = x + g(y)$ 确定, 其中函数 $g(y)$ 可微, 且 $g(y) \neq 0$, 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$.

5、(8 分) 设 $u = f(x, y, z)$, $y = \ln x$, $h(\sin x, e^y, z) = 0$, 且 $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$, 求 du .

6、(10 分) 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$ 的方向导数最大.

7、(10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

8、(8 分) 计算曲线积分 $\int_L e^x (\cos y dx - \sin y dy)$, 其中 L 是从坐标原点起, 经曲线 $y = x^2$ 到点 (a, a^2) 的路径.

9、(10 分) 试将函数 $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ 展开成 x 的幂级数.

10、(10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_S 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy$, 其中 S 是曲面 $z = 4 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

11、(8 分) 设 $a_n < b_n < c_n, n = 1, 2, \dots$, 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则必有 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试高等数学 B2 试题 (A) 解答

1、(8 分) 设 $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$, $\vec{c} = (2, 1, 2)$, 求同时垂直于 \vec{a} 和 \vec{b} , 且在向量 \vec{c} 上投影是 14 的向量 \vec{d} .

$$\text{解: 设 } \vec{d} = (x, y, z), \text{ 由条件可得 } \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{d} = 2x - 3y + z = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} = x - 2y + 3z = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{d} = 2x + y + 2z = |\vec{c}| \cdot \text{Pr } \vec{c} \vec{d} = 42 \end{cases}, \text{ 解之得}$$

$$x = 14, y = 10, z = 2. \text{ 故 } \vec{d} = (14, 10, 2)$$

2、(10 分) 讨论极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$ 的存在性, 若存在求出极限, 若不存在说明理由。

$$\text{解 由于 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} = 0 \quad \dots 5'$$

$$\lim_{\substack{x=y^2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{12}}{(2y^4)^3} = \frac{1}{8} \quad \text{所以 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} \text{ 不存在。} \dots 5'$$

$$(\text{或 } \lim_{\substack{x=ky^2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k^4 y^{12}}{[(k^2 + 1)y^4]^3} = \frac{k^4}{(k^2 + 1)^3} \dots 5')$$

3、(8 分) 过直线 $l: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ 作两个互相垂直的平面, 且其中一个过已知点 $M_1(0, 1, -1)$, 求这两个平面的方程。

$$\text{解 设过 } l \text{ 的平面方程为 } x + y - z + \lambda(x + 2y + z) = 0 \text{ 由过 } M_1 \text{ 点, 解得: } \lambda = -2$$

$$\text{故过 } l \text{ 且过 } M_1 \text{ 的平面为 } \pi_1: x + 3y + 3z = 0$$

$$\text{设另一个平面为 } x + y - z + \mu(x + 2y + z) = 0 \text{ 由与 } \pi_1 \text{ 垂直, 解得 } \mu = -\frac{1}{10}$$

$$\text{故平面为 } 9x + 8y - 11z = 0$$

4、(10 分) 设函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f(xg(y), y) = x + g(y)$ 确定, 其中函数 $g(y)$ 可微, 且

$$g(y) \neq 0, \text{ 求 } \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}.$$

$$\text{解: 设 } \begin{cases} xg(y) = u \\ y = v \end{cases} \text{ 得 } f(u, v) = \frac{u}{g(v)} + g(v), \text{ 关于 } v \text{ 求得 } \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{g(v)}, \dots 5'$$

$$\text{因此 } \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = -\frac{g'(v)}{g^2(v)} \dots 5'$$

5、(8 分) 设 $u = f(x, y, z)$, $y = \ln x$, $h(\sin x, e^y, z) = 0$, 且 $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$, 求 du 。

$$\text{解: 法一: 对 } y = \ln x \text{ 两边对 } x \text{ 求导数, 有 } y' = \frac{1}{x}, \text{ 对 } h(\sin x, e^y, z) = 0 \text{ 两边对 } x \text{ 求导数,}$$

有 $h_1 \cdot \cos x + h_2 \cdot e^y \cdot y' + h_3 \cdot z' = 0$ ，注意由 $y = \ln x$ 可知 $e^y = x$ ，从而 $z' = -\frac{\cos x \cdot h_1 + h_2}{h_3}$ 。

对 $u = f(x, y, z)$ 两边同时对 x 求导，得

$$du = (f_1 + f_2 \cdot y' + f_3 \cdot z') dx = \left(f_1 + f_2 \cdot \frac{1}{x} + f_3 \cdot \left(-\frac{\cos x \cdot h_1 + h_2}{h_3} \right) \right) dx$$

法二 由 $du = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz$

又 $e^y = x$ ， $dy = \frac{1}{x}dx$ ， $h_1 \cos x dx + h_2 e^y dy + h_3 dz = 0$ 故 $dz = -\frac{h_1 \cos x dx + h_2 dx}{h_3}$

所以有 $du = \left(f_x + \frac{f_y}{x} - f_z \frac{h_1 \cos x + h_2}{h_3} \right) dx$

6、(10 分) 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点，使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$ 的方向导数最大。

解：函数 $f(x, y, z)$ 的方向导数的表达式为 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$ 。

其中： $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\cos \gamma = 0$ 为方向 \vec{l} 的方向余弦。因此 $\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{2}(x - y)$ 。...5'

于是，按照题意，即求函数 $\sqrt{2}(x - y)$ 在条件 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 下的最大值。设

$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$ ，则由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\sqrt{2} + 4\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

得 $z = 0$ 以及 $x = -y = \pm \frac{1}{2}$ ，即得驻点为 $M_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$ 与 $M_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$ 。因最大值必存

在，故只需比较 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{M_1} = \sqrt{2}$ ， $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{M_2} = -\sqrt{2}$ 的大小。由此可知 $M_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$ 为所求。...5'

7、(10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ ，计算二重积分 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ 。

解：由于积分区域关于 x 轴对称，函数 $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数， $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的

奇函数，则 $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0$5'

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \frac{r dr}{1+r^2} = \frac{\pi}{2} \ln 5,$$

其中 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ 5'

8、(8 分) 计算曲线积分 $\int_L e^x (\cos y dx - \sin y dy)$ ，其中 L 是从坐标原点起，经曲线 $y = x^2$ 到点 (a, a^2) 的路径。

解：因 $\frac{\partial}{\partial x}(-\sin y e^x) = -\sin y e^x = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y)$ ，所以积分与路径无关，取路径为如下折线 $(0,0) \rightarrow (a,0) \rightarrow (a,a^2)$ ，则有

$$\int_L e^x (\cos y dx - \sin y dy) = \int_0^a e^x dx - \int_0^{a^2} e^a \sin y dy = e^a \cos a^2 - 1$$

9、(10 分) 试将函数 $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ 展开成 x 的幂级数。

解：由于 $f(x) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$ 利用 $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1,1)$5'

$$\text{得 } f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{3k+1}}{3k+1} + \frac{x^{3k+2}}{3k+2} - \frac{2x^{3k+3}}{3(k+1)} \right) \quad x \in (-1, 1) \text{.....5'}$$

10、(10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_S 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$ ，其中 S 是曲面

$z = 4 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧。

解 补辅助面 $S_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ ，法向量向下，形成封闭曲面 Ω ，在 Ω 上运用高斯公式可得

$$J = \iiint_{S \cup S_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dxdydz, \text{.....5'}$$

作柱坐标变换得

$$J = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_0^{1-r^2} (r^2 + z) r dz = 128\pi, \text{ 而}$$

$$J_1 = \iint_{S_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = -\iint_{S_1} 3 dxdy = -\iint_D -3 dxdy = 12\pi, \text{ 所以}$$

$$I = J - J_1 = 116\pi \text{.....5'}$$

11、(8 分) 设 $a_n < b_n < c_n, n=1,2,\dots$ ，证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则必有 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且

$$\text{有 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

证明：由 $a_n < b_n < c_n$ 可得 $0 < b_n - a_n < c_n - a_n$ ，由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛知道 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛，由

正项级数比较判别法知道 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n + (b_n - a_n)]$ 收敛。另外设

A_n, B_n, C_n 分别是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和数列，则 $A_n < B_n < C_n$ ，由数列极限的性质知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$