

一、解: 1. 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1/n!}{n+2/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n+2} = +\infty$  故级数收敛域为:  $(-\infty, +\infty)$

$$\text{令 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n \text{ 两边积分, 有: } \int_0^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{n+1}{n!} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = x e^x$$

$$\text{故 } f(x) = (1+x)e^x$$

$$2. a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (1+x) dx = \int_0^2 dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (1+x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (1+x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (1, 2, \dots)$$

$$\text{二、解: 1) 由偏导数定义知 } f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

同理  $f_y(0,0) = 0$ . 所以,  $f(x,y)$  在点  $(0,0)$  的偏导数存在.

$$2) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t \cos \theta, 0+t \sin \theta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^2 \theta \sin \theta / t^2}{t} = \cos^2 \theta \sin \theta$$

故  $f(x,y)$  沿任意方向的方向导数存在.

$$3) \text{ 由 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^3}} \quad \text{而} \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta x^3}{\sqrt{(2\Delta x^2)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0.$$

故  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  处不可微.

$$\text{三、解: 由 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} (e^{-t} \frac{dy}{dt}) / \frac{dx}{dt} = -e^{-2t} \frac{dy}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\text{将 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, x = e^t \text{ 代入原方程得 } \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = te^t \text{ 由 } r^2 - 3r + 2 = 0 \text{ 得方程 } \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0 \text{ 的一般}$$

$$\text{解: } y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \text{ 设 } \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = te^t \text{ 的特解为 } y^* = (At^2 + Bt)e^t \text{ 由待定系数法得: } A = -\frac{1}{2}, B = -1 \text{ 故}$$

$$\text{得方程 } \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = te^t \text{ 的一般解: } y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + (-\frac{1}{2}t^2 - t)e^t$$

$$\text{四、解: 1. } \frac{\partial f}{\partial y} = -2yze^{-(x^2+y^2+z^2)} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2y(2z^2 - 1)e^{-(x^2+y^2+z^2)} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = 4xy(1 - 2z^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$2. \text{ 利用积分域的对称性、被积函数的奇偶性和球坐标, } \iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r^3 \cos \varphi \sin \varphi e^{-r^2} dr$$

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

$$\int_1^2 r^3 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_1^2 r^2 e^{-r^2} dr^2 = \frac{1}{2} \int_1^4 u e^{-u} du = \frac{1}{2e^4} (2e^3 - 5)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{故 } \iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv = \frac{\pi}{4e^4} (2e^3 - 5)$$

五、解: 1. 旋转抛物面位于第一卦限部分上任意一点  $(x,y,z)$  处的平面方程为:

$$2xX + 2yY + Z = 4 - z \quad \text{即} \quad \frac{X}{\frac{4-z}{2x}} + \frac{Y}{\frac{4-z}{2y}} + \frac{Z}{4-z} = 1$$

$$\text{所以四面体的体积为: } V = \frac{(4-z)^3}{24xy}$$

故令:  $F(x, y, z, \lambda) = 3 \ln(4-z) - \ln x - \ln y + \lambda(x^2 + y^2 + z - 2)$

由  $\begin{cases} F_x = -\frac{1}{x} + 2\lambda x = 0; F_z = -\frac{3}{4-z} + \lambda = 0 \\ F_y = -\frac{1}{y} + 2\lambda y = 0; F_\lambda = x^2 + y^2 + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = 1$  因为只有一个驻点, 所以  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

为所求:  $2, \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-3}{4-z} - \frac{24}{x} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{-1}{2x} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{(1,1,3)} = -3 + 12 = 9$

六、解: 1、 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

2、 $S = \iint_L z ds = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2}(x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos^2 t + (\sin t + 1)^2] dt = 2\pi$

3、由高斯公式, 补充有向平面  $\Sigma_1: z = 2$  方向向上,  $\Omega$  由  $z = 2, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  所围成的闭区域,

$I = \iiint_{\Omega} xz dy dz + 2zy dx dz + 3xy dx dy = \iiint_{\Omega} (z + 2z + 0) dv - \iint_{\Sigma_1} xz dy dz + 2zy dx dz + 3xy dx dy$   
 $= 3 \iiint_{\Omega} z dv - 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 2} xy dx dy = 3 \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^2 z dz + 0 = 16\pi$

或  $3 \iiint_{\Omega} z dv - 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 2} xy dx dy = 3 \int_0^2 (z \iint_{D_z} d\sigma) dz = 6\pi \int_0^2 z^2 dz = 2\pi z^3 \Big|_0^2 = 16\pi$

七、解: 设  $Q = 7g''(x)$   $P = (g''(x) + 9g(x) + 2x^2 - 5x + 1)y^2$  由  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

得  $2y(g''(x) + 9g(x) + 2x^2 - 5x + 1) = 7g'''(x)$  由此得:  $\begin{cases} g'''(x) = 0 \\ g''(x) + 9g(x) + 2x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases}$  (1)

由 (1) 得:  $g(x) = ax^2 + bx + c$  代入 (2) 得:  $a = -\frac{2}{9}, b = \frac{5}{9}, c = -\frac{5}{81}$

所以  $g(x) = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{9}x - \frac{5}{81}$

八、证明: 由  $\iint_D (e^y f(y) + y - x) d\sigma = \iint_D e^y f(y) d\sigma + \iint_D (y - x) d\sigma$   $I = \int_0^1 7 \cdot (-\frac{4}{9}) dy = -\frac{28}{9}$

设  $I = \iint_D e^y f(y) d\sigma + \iint_D (y - x) d\sigma - (e-1) \int_0^1 f(y) dy = \iint_D (e^y f(y) d\sigma + \iint_D (y - x) d\sigma - (e-1) \int_0^1 f(x) dx$

绩小铺QQ: 143339  $\iint_D e^y f(y) d\sigma = \iint_D e^y [f(y) - f(x)] d\sigma + \iint_D (y - x) d\sigma$

因为  $D$  关于  $y = x$  对称, 故  $\iint_D y d\sigma = \iint_D x d\sigma$ ,  $\iint_D e^y [f(y) - f(x)] d\sigma = \iint_D [e^y f(x) - e^x f(y)] d\sigma$  所以

$\iint_D (y - x) d\sigma = 0$  故  $2I = \iint_D e^y [f(y) - f(x)] d\sigma + \iint_D e^x [f(x) - f(y)] d\sigma = \iint_D (e^y - e^x) [f(y) - f(x)] d\sigma$

由函数  $e^x, f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续单调增加, 故  $2I \geq 0$  所以  $I \geq 0$  即  $\iint_D (e^y f(y) + y - x) d\sigma \geq (e-1) \int_0^1 f(y) dy$

证明:  $I = \iint_D e^y f(y) dx dy - (e-1) \int_0^1 f(y) dy = \iint_D e^y f(y) dx dy - \iint_D e^x f(y) dx dy = \iint_D f(y) (e^y - e^x) dx dy$

从而  $2I = \iint_D f(y) (e^y - e^x) d\sigma + \iint_D f(x) (e^x - e^y) d\sigma = \iint_D (f(y) - f(x)) (e^y - e^x) dx dy$

由  $e^x, f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续单调增加,  $(f(y) - f(x))(e^y - e^x) \geq 0$ ,  $I \geq 0$  证毕

武汉大学 2007—2008 学年第二学期《高等数学 B<sub>2</sub>》(180 学时 A 卷) 考试试题参考解答

一、解：1、通过直线  $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+2y+3z=6 \end{cases}$  的平面束方程为：  $4x+2y+3z-6+\lambda(2x+y)=0$  (1)

欲使平面 (1) 平行于直线  $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$ ，则

$4+2\lambda+2(2+\lambda)+12=0 \Rightarrow \lambda=-5$  代入 (1) 得所求平面方程为：  $2x+y-z+2=0$

2、 $\triangle ABC$  的面积为：  $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{25}{2}$

又  $S = \frac{h}{2} |\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0+16+9} = 5$ , 故  $h = 5$

3、设  $F = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ ,  $F_x = 2x$ ,  $F_y = 2y$ ,  $F_z = 2z$

故得曲面在点  $(1, -2, 1)$  处的法向量为：  $\{2, -4, 2\} = 2\{1, -2, 1\}$ .

故切平面方程为：  $(x-1) - 2(y+2) + (z-1) = 0$  即  $x - 2y + z = 6$

法线方程为：  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$

4、 $z_x = ye^{xy} + \frac{y^2}{x}$ ,  $z_{xy} = e^{xy} + yxe^{xy} + \frac{2y}{x} = \frac{xe^{xy}(1+xy) + 2y}{x}$

5、 $\iint_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{a^4}{8}$

6、由已知得：  $0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq y-1$ ，所以有：原式 =  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x,y) dx$

二、解：  $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$  又求二阶导数：

$A = z_{xx} = 2x^{-3}y^{-1}$ ,  $B = z_{xy} = x^{-2}y^{-2}$ ,  $C = z_{yy} = 2y^{-3}x^{-1}$

在点  $(1,1)$  处，  $B^2 - AC = -3 < 0$ ,  $A = 2 > 0$ ，故  $z(1,1) = 3$  为所求极小值。

三、解：1、由  $Q = -g(x)$   $P = [e^x + g(x)]y$  且  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  得

$g'(x) + g(x) = -e^x$  解得：  $g(x) = e^{-x} [\int (-e^x e^{x^2}) dx + c] = e^{-x} [-\frac{1}{2} e^{2x} + c]$

由  $g(0) = -\frac{1}{2}$ ，得：  $c = 0$  所以  $g(x) = -\frac{1}{2} e^x$

2、 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \frac{1}{2} e^x y dx + \frac{1}{2} e^x dy = \int_0^1 \frac{1}{2} e^y dy = \frac{1}{2} e$

四、解：级数可写为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ ，由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2}$

故级数收敛。  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - 1$

作函数级数  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  此级数的收敛区间为  $|x| < 1$ ，两边积分，有：

$\int_0^x s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$

将上式两边微分得：  $s(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$   $|x| < 1$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = s(\frac{1}{2}) - 1 = 4 - 1 = 3$

五、解：1、  $f_1(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0$

当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,  $f_1(x,y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$

所以  $f_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-0}{y} = 0$

2、此方程的特征方程为:  $r^3 - r^2 - 2r = 0$ , 解得:  $r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = -1$ , 即微分方程的通解为:

$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}$ , 由积分曲线通过点  $(0, -3)$ , 故得  $c_1 + c_2 + c_3 = -3$ , (1)

又在这点处有倾角为  $\arctan 6$  的切线, 故有  $y'|_{x=0} = (2c_2 e^{2x} - c_3 e^{-x})|_{x=0} = \tan(\arctan 6)$ ,

即  $2c_2 - c_3 = 6$ , (2)

由题设知  $y''|_{x=0} = (4c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x})|_{x=0} = 0$ , 即  $4c_2 + c_3 = 0$  (3)

联立 (1)、(2)、(3) 解得:  $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -4$

则所求积分曲线为:  $y = e^{2x} - 4e^{-x}$

六、解: 补充有向平面  $\Sigma_1: z = 1, \Sigma_2: z = 2$  方向分别向下和上, 记  $\Sigma$  为圆台外侧, 法向向外,  $\Omega$  是由

$z = 1, z = 2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所围成的闭区域,  $\Sigma'$  为  $\Omega$  的边界曲面的外侧, 则所求流量为:

$$\Phi = \iint_{\Sigma'} \vec{F} d\vec{s} = \left( \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2} - \iint_{\Sigma} \right) dydz + z dx dz + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

$$\iint_{\Sigma_1} dydz + z dx dz + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dv = \int_1^2 e^z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z dr = 2\pi e^2$$

$$\iint_{\Sigma_2} dydz + z dx dz + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = -2\pi e$$

$$\iint_{\Sigma} dydz + z dx dz + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 4\pi e^2$$

所以  $\Phi = 2\pi e(1 - e)$

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

武汉大学 2006—2007 学年第二学期《高等数学 B2》试题 A 参考解答

一、(30 分) 试解下列各题:

1、(6 分) 求解微分方程  $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{e^x} = 0$  满足  $y|_{x=0} = 2$  的特解.

解: 由  $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{e^x} = 0$ , 得  $e^x dx + y dy = 0$ , 即  $d(e^x + \frac{y^2}{2}) = 0 \Rightarrow e^x + \frac{y^2}{2} = c, \Rightarrow 2e^x + y^2 = c$

而  $y|_{x=0} = 2 \Rightarrow 2 + 4 = c \Rightarrow c = 6$ , 故  $2e^x + y^2 = 6$

2、(6 分) 求曲面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$  在点  $(1, -2, 1)$  处的切平面方程.

解 设  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 12$   $F(1, -2, 1) = 2, F_x(1, -2, 1) = 2, F_y(1, -2, 1) = -4, F_z(1, -2, 1) = 6$

故曲面在点  $(1, -2, 1)$  处的切平面的法向量为:  $n = (2, -4, 6)$  所以切平面方程为:  $x - 4y + 3z - 12 = 0$

3、(6 分) 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  在  $x = -1$  处收敛, 试讨论此级数在  $x = 2$  处的敛散性.

解 由阿贝尔定理知, 此级数在  $|x-1| < |-1-1| = 2$  即  $-1 < x < 3$  时绝对收敛, 故此级数在  $x = 2$  处绝对收敛.

4、(6 分) 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中  $D$  由  $y = 2 - x^2, y = x^2$  所围成的区域.

解: 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = 2 \iint_{\frac{D}{2}} x^2 dx dy = 2 \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} x^2 dy = 4 \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{8}{15}$

5、(6 分) 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^4}{2^n}$  的敛散性. 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^{n+1} (n+1)^4}{2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^4}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$ , 由比值判别法知原级数的绝对值级数收敛, 故原级数绝对收敛.

二、(10 分) 函数  $z = z(x, y)$  由方程  $x - az = \sin(y - bz)$  所确定,  $a, b$  是不全为零的常数, 证明:  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

证明: 方程  $x - az = \sin(y - bz)$  两边同时对  $x, y$  求偏导得

$$1 - a \frac{\partial z}{\partial x} = \cos(y - bz) \cdot (-b \frac{\partial z}{\partial x}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{a - b \cos(y - bz)} \quad -a \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(y - bz) \cdot (1 - b \frac{\partial z}{\partial y}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\cos(y - bz)}{a - b \cos(y - bz)}$$

故  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

三、(12 分) 设  $z = x^2 f(u)$ , 而  $u = \frac{y}{x}$ , 其中  $f(u)$  二阶可导, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf + x^2(\frac{y}{x^2})f' = 2xf - yf'$  所以  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x \times \frac{1}{x} f' - f' - yf'' \times \frac{1}{x} = f' - \frac{y}{x} f''$

四、(10 分) 试将函数  $f(x) = x \arctan x$  展成  $x$  的幂级数.

解 因为  $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$ , 则得  $f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

(也可利用  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$  求解)

五、(10 分) 设  $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$

(1) 求  $f(x, y, z)$  在点  $P_0(1, 1, 0)$  处的梯度及方向导数的最大值;

(2) 问:  $f(x, y, z)$  在哪些点的梯度垂直于  $x$  轴.

解 (1) 由  $f(1, 1, 0) = (3x^2 - y^2)|_{(1,1,0)} = 2$   $f_x(1, 1, 0) = (-2xy)|_{(1,1,0)} = -2$   $f_y(1, 1, 0) = (-1)|_{(1,1,0)} = -1$

故  $\nabla f|_{(1,1,0)} = 2i - 2j - k$  所以  $f(x, y, z)$  在点  $P_0(1, 1, 0)$  处方向导数的最大值为:  $|\nabla f|_{(1,1,0)}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$

(2) 由  $\nabla f = (3x^2 - y^2)i - 2xyj - k$ , 而  $\nabla f \perp x$  轴, 即  $\nabla f \cdot (1, 0, 0) = 0$ , 由此得:  $y = \pm \sqrt{3}x$

所以平面  $y = \pm \sqrt{3}x$  上的点处的梯度垂直于  $x$  轴.

六、(10 分) 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} 2xz^2 dy dz + y(z^2 + 1) dx dz + (9 - z^2) dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为曲面  $z = x^2 + y^2 + 1 \quad (1 \leq z \leq 2)$ ,

取下侧.

解: 取平面  $\Sigma_1: z = 2$ , 取上侧. 则  $\Sigma$  与  $\Sigma_1$  构成封闭曲面, 取外侧. 令  $\Sigma$  与  $\Sigma_1$  所围空间区域为  $\Omega$ , 由 Gauss 公式, 得

$$I = \oint_{\Sigma+\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} (2xz^2 + y(z^2 + 1) + (9 - z^2)) dx dy dz - \iint_{\Sigma_1} (9 - z^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^2 dz - \iint_{\Sigma_1} dx dy = -\frac{\pi}{2}$$



七、(10分) 函数  $\varphi(x)$  具有连续的二阶导数, 并使曲线积分  $\int_L [3\varphi'(x) - 2\varphi(x) + xe^{2x}]y dx + \varphi'(x)dy$  与路径无关, 求函数  $\varphi(x)$ .

解 由题意得:  $3\varphi'(x) - 2\varphi(x) + xe^{2x} = \varphi'(x)$  即  $\varphi'(x) - 3\varphi(x) + 2\varphi(x) = xe^{2x}$

特征方程  $r^2 - 3r + 2 = 0$ , 特征根  $r_1 = 1, r_2 = 2$  对应齐次方程的通解为:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

又因为  $\lambda = 2$  是特征根, 故其特解可设为:  $y = x(Ax + B)e^{2x}$  代入方程并整理得:  $A = \frac{1}{2}, B = -1$  即  $y = \frac{1}{2}x(x-2)e^{2x}$

故所求函数为:  $\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x(x-2)e^{2x}$

八、(8分) 将正数  $a$  分为正数  $x, y, z$  之和, 使得  $u = x^m y^n z^p$  最大. (其中  $m, n, p$  为已知正数)

解法一 化为无条件极值求解, 即求  $u = x^m y^n (a-x-y)^p$  的极值.

$$\begin{cases} u'_x = mx^{m-1}y^n(a-x-y)^p - px^{m-1}y^n(a-x-y)^{p-1} = 0 \\ u'_y = nx^m y^{n-1}(a-x-y)^p - px^m y^{n-1}(a-x-y)^{p-1} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} m(a-x-y) - px = 0 \\ n(a-x-y) - py = 0 \end{cases}$$

解之得  $x = \frac{ma}{m+n+p}, y = \frac{na}{m+n+p}$  再由  $x+y+z=a$  求得  $z = \frac{pa}{m+n+p}$

当  $x=0(x=a)$ , 或  $y=0(y=a)$  或  $z=0(z=a)$  时,  $u$  均为 0, 不可能为最大, 故将  $a$  分成的三个正数为  $x = \frac{ma}{m+n+p}$ ,

$$y = \frac{na}{m+n+p}, z = \frac{pa}{m+n+p}$$

解法二 利用拉格朗日乘数法求解, 作函数  $F(x, y, z) = x^m y^n z^p + \lambda(x+y+z-a)$

$$\begin{cases} F'_x(x, y, z) = mx^{m-1}y^n z^p + \lambda = 0 & (1) \\ F'_y(x, y, z) = nx^m y^{n-1} z^p + \lambda = 0 & (2) \\ F'_z(x, y, z) = px^m y^n z^{p-1} + \lambda = 0 & (3) \end{cases} \quad \text{及} \quad x+y+z-a=0 \quad (4)$$

将(1), (2), (3)中之  $\lambda$  移至等式右端, 记为(1'), (2'), (3'), 然后由(1')+(2')得

$$x = \frac{m}{n} y \quad (3') + (2') \text{ 得 } y = \frac{p}{n} y \text{ 并将其代入(4), 从而得到所求三个正数为}$$

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, y = \frac{na}{m+n+p}, z = \frac{pa}{m+n+p}$$

解法三 因为  $u = x^m y^n z^p > 0$ , 故当  $u$  最大时  $\ln u = m \ln x + n \ln y + p \ln z$  也最大. 利用拉格朗日乘数法, 作函数

$$\Phi(x, y, z) = m \ln x + n \ln y + p \ln z + \lambda(x+y+z-a)$$

$$\begin{cases} \Phi'_x(x, y, z) = \frac{m}{x} + \lambda = 0 & (1) \\ \Phi'_y(x, y, z) = \frac{n}{y} + \lambda = 0 & (2) \\ \Phi'_z(x, y, z) = \frac{p}{z} + \lambda = 0 & (3) \end{cases} \quad \text{及} \quad x+y+z-a=0 \quad (4)$$

由(1), (2)得  $x = \frac{m}{n} y$ , 由(2), (3)得  $z = \frac{p}{n} y$  并代入(4), 从而得  $x = \frac{ma}{m+n+p}, y = \frac{na}{m+n+p}, z = \frac{pa}{m+n+p}$

一、1、解：由  $(\bar{a}+3\bar{b}) \perp (7\bar{a}-5\bar{b})$ ,  $(\bar{a}-4\bar{b}) \perp (7\bar{a}+2\bar{b})$ , 得  $(\bar{a}+3\bar{b}) \cdot (7\bar{a}-5\bar{b}) = 0$ ,  
 $= 7|\bar{a}|^2 + 16\bar{a} \cdot \bar{b} - 15|\bar{b}|^2 = 0$ ,  $(\bar{a}-4\bar{b}) \cdot (7\bar{a}+2\bar{b}) = 7|\bar{a}|^2 - 30\bar{a} \cdot \bar{b} + 8|\bar{b}|^2 = 0$ ,

两式相减得,  $46\bar{a} \cdot \bar{b} = 23|\bar{b}|^2 \Rightarrow 2\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}|^2 \Rightarrow \cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{|\bar{b}|}{2|\bar{a}|} \Rightarrow 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b}|^2$ ,

两式相加得,  $322\bar{a} \cdot \bar{b} = 161|\bar{a}|^2 \Rightarrow 2\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|^2 \Rightarrow \cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{|\bar{a}|}{2|\bar{b}|}$ , 由此推得  $\frac{|\bar{a}|}{2|\bar{b}|} = \frac{|\bar{b}|}{2|\bar{a}|}$ ,

即  $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ , 所以  $\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{2}$ ,  $(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

2、解：设切点为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 于是曲面在该点的法向量为  $(x_0, 2y_0, -1)$ , 所给平面的法向量为  $(2, 2, -1)$ , 由条件知  $\frac{x_0}{2} = \frac{2y_0}{2} = \frac{-1}{-1}$ , 所以切点坐标为  $x_0 = 2, y_0 = 1$ ,

$z_0 = \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 3$ , 所以所求切平面方程为  $2x + 2y - z - 3 = 0$ .

3、解：利用极坐标, 则  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{10\sqrt{2}}{9}$

4、方程两端对  $x$  求偏导,  $z_x + e^{z-y-x} + xe^{z-y-x}(z_x - 1) = 0 \Rightarrow z_x = \frac{(x-1)e^{z-y-x}}{1 + xe^{z-y-x}}$ ,

方程两端对  $y$  求偏导,  $z_y - 1 + xe^{z-y-x}(z_y - 1) = 0 \Rightarrow z_y = 1$ , 从而

$$dz = \frac{(x-1)e^{z-y-x}}{1 + xe^{z-y-x}} dx + dy$$

5、解：  $f(x) = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

6、解：  $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{60}$

二、解：做辅助线 CA, 由格林公式得  $\int_{L+CA} (x + e^{\sin y}) dy - (y - \frac{1}{2}) dx = 2 \iint_D dx dy = \frac{\pi}{2} + 1$ .

而  $\int_{CA} (x + e^{\sin y}) dy - (y - \frac{1}{2}) dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = 1$ , 所以原式  $= \frac{\pi}{2} + 1 - 1 = \frac{\pi}{2}$ .

三、记  $\Sigma_1$  为曲面  $z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$ , 取下侧, 则  $\iint_{\Sigma_1} (2x + z) dy dz + z dx dy$

$= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = -\pi$ , 用  $\Omega$  表示  $\Sigma$  和  $\Sigma_1$  所围成的空间区域, 则由高斯公式知

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (2x+z) dy dz + z dx dy = - \iiint_{\Omega} (2+1) dV = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^2 dz = -6\pi \int_0^1 (r-r^3) dr = -\frac{3}{2}\pi$$

因此原式  $= -\frac{\pi}{2}$ 。

四、先考虑级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ , 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \infty$ , 而级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 由比较审敛法的

极限形式知  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  发散。再考虑级数  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

再由  $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x \geq 2)$ ,  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ , 当  $x \geq e$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调减少, 故当  $n \geq 3$  时,

$u_n > u_{n+1}$ , 由 Leibniz 定理知  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  收敛, 故为条件收敛。

五、因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , 且在  $x = \pm 1$  处级数均发散, 所以收敛域为  $(-1, 1)$ 。设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, x \in (-1, 1). \text{ 则 } \int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

然后两边对  $x$  求导, 得  $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 。

六、解: 先求  $f(x, y)$  在  $D$  内可能取极值的点, 令  $f'_x = 2x = 0, f'_y = -2y = 0$ , 得唯一驻点  $(0, 0)$ ,

$f(x, y)$  在  $D$  内没有偏导数不存在的点。再求  $f(x, y)$  在  $D$  的边界  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  上可能取极值的点,

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

用拉格朗日乘数法, 令  $F(x, y) = x^2 - y^2 + 3 + \lambda(x^2 +$

$\frac{y^2}{4} - 1)$ , 则  $F'_x = 2x + 2\lambda x = 0, F'_y = -2y + \frac{\lambda}{2}y = 0, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \Rightarrow x = 0, y = \pm 2$ , 或  $x = \pm 1, y = 0$ , 所以边

界上有四个驻点, 最后算  $f(0, 0) = 3, f(0, \pm 2) = -1, f(\pm 1, 0) = 4$ , 所以  $f(x, y)$  在  $D$  上最大值和最小

值分别为  $f_{\max} = 4, f_{\min} = -1$ 。



# 武汉大学试卷纸

专业 \_\_\_\_\_ 年级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

科目	2010-2011	2	3	4	5	6	7	8	9	10
成绩										

一. (每题7分, 共63分)

1. 设所求平面为  $AX+BY+CZ=0$

由题设知

$$\begin{cases} 6A-3B+2C=0 \\ 4A-B+2C=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=B \\ C=-\frac{2}{3}B \end{cases}$$

$$A=B, C=-\frac{2}{3}B$$

故所求平面为  $3x+3y-\frac{2}{3}z=0$  即  $2x+2y-3z=0$

2.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_1'(xy, yg(x)) \cdot y + f_2'(xy, yg(x)) \cdot yg'(x)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [f_{11}''(xy, yg(x)) \cdot x + f_{12}''(xy, yg(x)) \cdot g(x)] y + f_1'(xy, yg(x)) + [f_{12}''(xy, yg(x)) \cdot x + f_{22}''(xy, yg(x)) \cdot g(x)] yg'(x) + f_2'(xy, yg(x))$$

又  $g(2)=1, g'(2)=0$

于是  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=2, y=1} = [f_{11}''(2, 1) + f_{12}''(2, 1)] \cdot 1 + f_1'(2, 1)$

$= 2f_{11}''(2, 1) + f_{12}''(2, 1) + f_1'(2, 1)$

3. 对  $x^2-6xy+10y^2-24z-z^2+18=0$  求偏导数

$$2x-6y-24\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-3y}{y+z}$$

$$-6x+20y-2z-24\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x+10y-z}{y+z}$$

令  $\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$  得  $\begin{cases} x=3y \\ y=z \end{cases}$  代入原方程  $y^2-9=0, y=\pm 3$

故得  $(9, 3, 3)$  和  $(-9, -3, -3)$

# 武汉大学试卷纸

专业 \_\_\_\_\_ 年级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

科目	成绩	总分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$7. a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^1 (2+x) dx = 5$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 (2+x) \cos n\pi x dx$$

$$= 2 \int_0^1 \cos n\pi x dx + 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx$$

$$= \frac{4}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d \sin n\pi x$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin n\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x dx \right] = \frac{2(-1)}{n\pi}$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2} \int_0^1 \sin n\pi x d n\pi x = \frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & n=2k \\ -\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} & n=2k+1 \end{cases}$$

$$\therefore b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} \cos n\pi x = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}, x \in [1, 1]$$

$$8. I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \pi \cdot \frac{1}{2} \ln 4$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2$$

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

$$9. \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$u(x, y) = \int_{(1,1)}^{(x,y)} p dx + Q dy = \int_1^x (1+e^x) dx + \int_1^y e^{\frac{x}{y}} \left(1-\frac{x}{y}\right) dy$$

$$= x-1+e^x-e + \int_1^y e^{\frac{x}{y}} dy - \int_1^y e^{\frac{x}{y}} \frac{x}{y} dy$$

$$= x-1+e^x-e + \int_1^y e^{\frac{x}{y}} dy + \int_1^y y de^{\frac{x}{y}}$$

$$= x-1+e^x-e + \int_1^y e^{\frac{x}{y}} dy + ye^{\frac{x}{y}} \Big|_1^y - \int_1^y e^{\frac{x}{y}} dy = x-1+e^x-e + ye^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}} = x-1+e^x-e + ye^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}}$$

$$\text{故 } x-1+e^{-x}+e^x+c_1=c_2$$

$$x-1+ye^{\frac{x}{y}}=c$$

二. (2)  $\frac{1}{n-\ln n}$  单调减且  $\rightarrow 0$ . 又  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$  发散. 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$  发散.

$$\text{三. (1)} \quad P(x,y) = \frac{1}{y} + yf(xy), \quad Q(x,y) = xf(xy) - \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + xyf(xy), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf(xy)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \text{故 } I \text{ 为全微分.}$$

$$\text{(2)} \quad \oint_{\Gamma} a db = cd \text{ 为常数.}$$

$$I = \int_a^c \frac{1}{b} (1+b^2 f(cb)) dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} (y^2 f(cy) - 1) dy$$

$$= \frac{c-a}{b} + \int_a^c f(cb) db + \int_b^d f(cy) dy + c \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{b} \right)$$

$$= \frac{c-a}{b} + \int_{ab}^{cb} f(t) dt + \int_{cb}^{cd} f(t) dt + \frac{cb-cd}{bd}$$

$$= \frac{cd-ad+cb-cd}{bd} = \frac{cb-ad}{bd} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

$$\text{IV. } |x| < 1, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-1} = \frac{-x}{1+x^2}$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{-x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$f(0)=1, \quad \therefore f(x) = 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \quad (|x| < 1) \quad \text{在 } x=0 \text{ 处取到 } f(0)=1$$

积小铺QQ: 1433397577, 收集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

$$W = \int y_0 dx + \int x_0 dy + \int x_0^2 dz$$

$$= \int_0^1 x_0 y_0 z^2 dz + \int_0^1 x_0 y_0 z dz + \int_0^1 x_0^2 y_0 dz$$

$$= x_0 y_0 z_0$$

$$\text{故 } L = xy_0 + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} L_x = y_0 + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ L_y = x_0 + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ L_z = x_0 y_0 + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$x_0 y_0 z_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}} abc$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9} abc$$

$$e^{\frac{x}{y}} + c_1$$

# 武汉大学 2011-2012 学年第二学期

## 《高等数学 B2》(A 卷) 标准答案

一、(8 分)(每个划线部分 2 分)解: 设  $\vec{m} = (x, y, z)$ , 则  $\vec{m} \perp \vec{c}$  意味着  $2x - 2y + z = 0$ ,  $\vec{m}$  与  $\vec{a}, \vec{b}$  共面意味着

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ 得 } z = -2y, \text{ 单位向量 } \vec{m} \text{ 意味着 } \underline{x^2 + y^2 + z^2 = 1}, \text{ 解上述三个方程得 } \underline{\vec{m} = \pm(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})}.$$

二、(11 分)解:  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, 0) = 0$ , 所以  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点连续, .....4 分

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 = f_y(0, 0), \text{ 所以偏导数存在, .....4 分}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}(\Delta y)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \text{ 取 } \Delta y = k\Delta x \text{ 求该极限, 可知极限不存在,}$$

所以不可微。.....3 分

$$\text{三、(8 分) 解: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} e^{ax+by} + aue^{ax+by}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} e^{ax+by} + bue^{ax+by}, \text{ .....4 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e^{ax+by} + b \frac{\partial u}{\partial x} e^{ax+by} + a \frac{\partial u}{\partial y} e^{ax+by} + abue^{ax+by} = b \frac{\partial u}{\partial x} e^{ax+by} + a \frac{\partial u}{\partial y} e^{ax+by} + abue^{ax+by}, \text{ .....2 分}$$

$$\text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = (b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u = 0, \text{ 由}$$

$$u = F(x) + G(y) (F, G \text{ 任意}) \text{ 可知只有系数 } a=1, b=1. \text{ .....2 分}$$

$$\text{四、(8 分) 在 } y = f(x, F(x, y(x))) \text{ 两边同时关于 } x \text{ 求导, 可得 } \frac{dy}{dx} = f_x + f_1 \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right), \text{ .....5 分}$$

$$\text{整理得 } \frac{dy}{dx} = \frac{f_x + f_1 F_x}{1 - f_1 F_y}, \text{ .....3 分}$$

绩小铺QQ: 1433397571 收集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

五、(10 分) 解: 做 Lagrange 函数  $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(a_1x + a_2y + a_3z - 1)$ , 求导得

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 2x - a_1\lambda = 0 \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 2y - a_2\lambda = 0 \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 2z - a_3\lambda = 0 \\ a_1x + a_2y + a_3z = 1 \end{cases} \text{ .....5 分}$$

$$\lambda = \frac{2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, x = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, y = \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, z = \frac{a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \text{ .....4 分}$$

所以  $F_{\min} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

六、(8分) 解: 原式  $= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz \dots\dots\dots 4 \text{ 分} = \frac{1}{110} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

七、(8分) 解:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x+1)^n$  的收敛半径为  $R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n (x+1)^n$  的收敛半径为

$$R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 4'$$

故原级数的收敛半径为  $R = \min\{R_1, R_2\} = \frac{1}{2}$ , 收敛区间则为  $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $\dots\dots\dots 2'$

当  $x = -\frac{3}{2}$  时, 级数发散, 当  $x = -\frac{1}{2}$  时, 级数发散, 所以收敛域为  $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ .  $\dots\dots\dots 2'$

八、(8分) 解:  $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-r^2) r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 (4-r^2) r dr \dots\dots\dots 6 \text{ 分} = 80\pi \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

九、(10分) 解一: 补充平面  $S_1: z=1$ , 法向量向下, 形成封闭区域  $\Omega$ , 由 Gauss 公式得

$$\iiint_{\Omega} (2x+z) dy dz + z dx dy = -3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^2 dz = -\frac{3}{2} \pi, \dots\dots\dots 5'$$

再计算平面  $z=1$  上的曲面积分  $\iint_{S_1} (2x+z) dy dz + z dx dy = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy = \pi, \dots\dots\dots 4'$

综合得  $I = -\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 1'$

解二: 用投影法求解, 这里  $z_x' = 2x, z_y' = 2y \dots\dots\dots 2'$

$$\text{原式} = \iint_S [(2x+z)(-2x) + z] dx dy = - \iint_S (z - 2xz - 4x^2) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2 - 2x(x^2 + y^2) - 4x^2) dx dy \dots\dots\dots 3'$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 - 2r^3 \cos \theta - 4r^2 \cos^2 \theta) r dr = -\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 5'$$

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

②曲线  $L$  不封闭, 添加辅助线  $L_1$ : 沿  $y$  轴由点  $B(0,2)$  到点  $O(0,0)$ ,

$$\int_{L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy = \int_{L_1} Q(0,y) dy = \int_2^0 -2y dy = 4, \dots\dots\dots 3'$$

③在封闭区域上运用 Green 公式, 可得

$$\int_{L \cup L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy = \iint_D 1 dx dy = \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}, \dots\dots\dots 4'$$

因此  $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy = \frac{\pi}{2} - 4 \dots\dots\dots 2'$

$$\begin{aligned}
 \text{十一、(10')} \quad a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^\pi \cos nx dx - \int_0^\pi x^2 \cos nx dx \right) = \frac{2}{\pi} \left( -\int_0^\pi x^2 \cos nx dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}, \dots\dots 4' \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = 2\left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right), \dots\dots 2'
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 1 - x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx, \dots\dots 2'$$

$$\text{取 } x=0, \text{ 得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \dots\dots 2'$$

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!



# 武汉大学数学与统计学院

## 2012-2013 学年二学期《高等数学 B2》期末试卷 (A 卷) 参考解答

一、(9 分) 解: 首先  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \sqrt{3}$ , 而  $\vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}$  可知  $\vec{c} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$ , 所以  $\vec{c}$  与  $\vec{a} \times \vec{b}$  的夹角为 0 或  $\pi$ , 所以  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\widehat{\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}}) = \sqrt{3} \times 3 \times (\pm 1) = \pm 3\sqrt{3}$

二、(9 分) 解  $\pi$  法向量为  $\vec{n} = \{A, B, 6\}$ ,  $l$  方向向量为  $\vec{S} = \{2, -4, 3\}$ ,  $l$  与  $\pi$  垂直,  $\vec{n} \parallel \vec{S}$ , 故  $\frac{A}{2} = \frac{B}{-4} = \frac{6}{3}$ , 解得:  $A = 4, B = -8$

三、(9 分) 解 (1)  $x dx - y dy = dz - \varphi'(x+y-z) \cdot (dx + dy - dz)$ ,  $dz = \frac{(x+\varphi')dx + (\varphi' - y)dy}{\varphi' + 1}$ ,

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+y}{1+\varphi'(x+y-z)}, u(x, y) = \frac{1}{x+y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{1+\varphi'(x+y-z)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\varphi''(1+\frac{\partial z}{\partial x})}{(1+\varphi')^2} = \frac{-\varphi''(1+\frac{x+\varphi'}{1+\varphi'})}{(1+\varphi')^2} = \frac{-\varphi''(1+\frac{x}{1+\varphi'})}{(1+\varphi')^3}$$

四、(9 分) 解: 因为  $\max\{x^2, y^2\} = \begin{cases} x^2, & x \geq y \\ y^2, & x \leq y \end{cases}, (x, y) \in D$ , 于是用  $y = x$  将区域分成两块:

$$I = \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = e - 1$$

$$\text{五、(9 分)} \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} z dz = \frac{2}{3}$$

六、(9 分) 解 由  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 得  $\varphi'(x)y = 2xy[\varphi(x)+1]$ ,  $\ln[\varphi(x)+1] = x^2 + C_1$ .

$$\text{即 } \varphi(x) = e^{x^2+C_1} - 1 = Ce^{x^2} - 1, \text{ 所以有 } \int_{(0,0)}^{(1,1)} (Ce^{x^2} - 1)y dy + Cxy^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (Ce^{x^2} - 1)y dy + Cxy^2 e^{x^2} dx = \int_0^1 (Ce - 1)y dy = \frac{1}{2}(Ce - 1). \text{ 故有 } (Ce - 1) = 1, \text{ 即 } C = \frac{2}{e}$$

$$\text{所以有 } \varphi(x) = 2e^{x^2-1} - 1$$

七、(9 分) 解:  $dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy$ , 因为积分区域关于  $xoz$  平面对称,  $xy$  关

于  $xy$  是奇函数, 所以

$$I = \iint_{\Sigma} (xy + z) dS = \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2} \sqrt{2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos^3 \theta d\theta = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

八、(7 分) 解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 4^n}{(n+1) \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore$  收敛半径为  $R = 4$ , 当  $x = -4$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}$  发散;

当  $x = 4$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 4}{n}$  收敛, 收敛域为  $(-4, 4]$ , 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 4^n} x^{n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$

$$= x \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n \cdot 4^n} \right] dt = \frac{x}{4} \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{t}{4} \right)^{n-1} \right] dt = \frac{x}{4} \int_0^x \frac{1}{1 + \frac{t}{4}} dt = x \ln \left( 1 + \frac{x}{4} \right), x \in (-4, 4]$$

九、(9分) 解: 设切点  $P(x_0, y_0, z_0)$ , 由已知条件得:  $\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{4} = \frac{6z_0}{6} := \lambda$ , 得到

$x_0 = \frac{1}{2}\lambda, y_0 = \lambda, z_0 = \lambda$ , 代入曲面方程解得  $\lambda = \pm 2$ ,  $x_0 = \pm 1, y_0 = \pm 2, z_0 = \pm 2$ . 切平面方程为  $(x \pm 1) + 4(y \pm 2) + 6(z \pm 2) = 0$ , 即  $x + 4y + 6z = \pm 21$

十、(7分) 解:  $\iint_S 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy$ ,  $S: z = 1 - x^2 - y^2$  ( $z \geq 0$ ) 不封闭

补充  $S_1: z = 0$  ( $x^2 + y^2 \leq 1$ ) 下侧, 则  $S + S_1$  封闭, 取外侧.

$$I = \iint_{S+S_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy = \left( \iint_S - \iint_{S_1} \right) [2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy]$$

由高斯公式, 得  $\iint_{S+S_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy = \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dx dy dz$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho^2} (\rho^2 + z) dz = 2\pi \quad \text{而} \quad \iint_{S_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-3) dx dy = 3\pi$$

因此  $I = 2\pi - 3\pi = -\pi$

十一、(8分) 解: 由曲面  $S$  的方程为  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 给定的方向  $\vec{l}^0 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

方向导数函数  $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma = \sqrt{2}(x - y)$

$$\text{设 } L = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 1), \quad \text{令} \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -\sqrt{2} + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \text{解之得} \quad \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{4\lambda} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} \\ z = 0 \end{cases}$$

$\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 得  $S$  上的点为  $\left( -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0 \right)$ , 此时  $\frac{\partial f}{\partial l} = -\sqrt{3}$

$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 得  $S$  上的点为  $\left( \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0 \right)$ , 此时  $\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{3}$ , 所以, 所求的  $S$  上的点为  $\left( \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0 \right)$

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料来自网络, 谢谢!  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$ . 若  $a = 0$ , 由莱布尼茨法则交错级数收敛.

数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛, 与假设矛盾, 所以  $a > 0$ . 因此由根值判别法,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{1}{a_n + 1} \right)^n} = \frac{1}{a+1} < 1$ , 所以原级数收敛.

# 武汉大学 2013-2014 学年第二学期期末考试

## 高等数学 B2 试题解答

一、(8 分) 利用二重积分的性质, 比较积分  $I_1 = \iint_D \ln(x^2 + y^2) d\sigma$  与  $I_2 = \iint_D [\ln(x^2 + y^2)]^2 d\sigma$  的大小,

其中  $D: e \leq x^2 + y^2 \leq 2e$ .

解  $\because 1 \leq \ln(x^2 + y^2) \leq 1 + \ln 2$ ,

.....4 分

$\ln(x^2 + y^2) \leq [\ln(x^2 + y^2)]^2, \therefore I_1 < I_2$

.....4 分

二、(8 分) 设  $z = f(xy, \frac{x}{y}) + \sin y$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = (f'_1 \cdot y + f'_2 \cdot \frac{1}{y}) + 0 = yf'_1 + \frac{1}{y} f'_2$ ,

.....4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y[f''_{11} \cdot x + f''_{12} \cdot (-\frac{x}{y^2})] - \frac{1}{y^2} f'_2 + \frac{1}{y} [f''_{21} \cdot x + f''_{22} \cdot (-\frac{x}{y^2})]$$

$$= f'_1 + xyf''_{11} - \frac{1}{y^2} f'_2 - \frac{x}{y^3} f''_{22}.$$

.....4 分

三、(8 分) 求过点  $M(1, -2, 3)$  的平面, 使它与平面  $\pi: x + y - z - 3 = 0$  垂直, 且与直线  $L: x = y = z$  平行.

解 因为已知直线与已知平面不平行, 故所求平面得法向量为

$$\vec{n} = (1, 1, -1) \times (1, 1, 1) = (2, -2, 0),$$

.....4 分

故平面方程为  $(x-1) - (y+2) = 0$ , 即  $x - y - 3 = 0$ .

.....4 分

四、(8 分) 设函数  $z = z(x, y)$  是由方程  $xyz = \arctan(x + y + z)$  所确定的隐函数, 求全微分  $dz$  在点  $(0, 1, -1)$  处的值..

解  $xyz = \arctan(x + y + z)$  两边对  $x, y$  求导, 得  $yz + xz \frac{dx}{x} + x \frac{dy}{y} + x \frac{dz}{z} = \frac{1}{1 + (x + y + z)^2} (dx + dy + dz)$

.....4 分

$$dz = \frac{yz[1 + (x + y + z)^2] - 1}{1 - xy[1 + (x + y + z)^2]} dx + \frac{xz[1 + (x + y + z)^2] - 1}{1 - xy[1 + (x + y + z)^2]} dy, \text{ 故 } dz|_{(0, 1, -1)} = -2dx - dy \text{ .....4 分}$$

五、(10 分) 计算曲线积分  $\int_L (2a - y)dx + xdy$ , 式中  $L$  是从原点  $O(0, 0)$  沿曲线  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$  到点  $A(2\pi a, 0)$  的弧段.

解  $O(0, 0)$  对应  $t = 0$ ,  $A(2\pi a, 0)$  对应  $t = 2\pi$ .

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} a(1 + \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt + a(t - \sin t) a \sin t dt$$

.....6 分

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos^2 t - \sin^2 t + t \sin t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = -2\pi a^2 \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

六、(10 分) 设  $\Omega$  是由曲面  $z^2 = x^2 + y^2, z = 2$  所围的闭区域, 试计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dV$ .

$$\text{解 } \iiint_{\Omega} z^2 dV = \int_0^2 z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} dx dy \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= \int_0^2 \pi z^4 dz = \frac{32}{5} \pi \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

七、(10 分) 计算曲面积分  $\iint_S (x^3 + z^2) dy dz + (y^3 + x^2) dz dx + (z^3 + y^2) dx dy$ , 其中  $S$  是上半球面  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  的上侧.

解 添加平面  $S_1: x^2 + y^2 \leq 1 (z = 0)$  的下侧, 记  $S + S_1$  所围的区域为  $V$ , 则利用高斯公式得,

$$\text{原式} = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV - \iint_{S_1} y^2 dx dy - 0 \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin \varphi dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \theta d\rho = \frac{29}{20} \pi \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

八、(8 分) 求曲线  $x = \sin^2 t, y = \sin t \cos t, z = \cos^2 t$  在对应于  $t = \frac{\pi}{4}$  的点处的切线和法平面方程.

$$\text{解 点 } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ 当 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \vec{\tau} = (x', y', z')|_{t=\frac{\pi}{4}} = (1, 0, -1). \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{切线 } \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{0} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}, \text{ 法平面, } x - z = 0 \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

九、(8 分) 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 它在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

将它展开成 Fourier 级数, 并求数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$  的和.

解 所给函数在点  $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  处不连续, 在其他点处连续, 所以由收敛定理可知  $f(x)$  的 Fourier 级数收敛, 在  $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  处级数收敛于  $\frac{-1+1}{2} = 0$ , 当  $x \neq k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时

收敛于  $f(x)$ .

计算 Fourier 系数如下:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

因此  $f(x)$  的 Fourier 展开式为

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ 取 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 可得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

十、(9分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$ , 试将  $f(x)$  展开成  $x$  的幂级数并利用其求  $\int_0^x f(t)dt$ 。

解 由  $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ,  $x \in [-1, 1]$  因此当  $x \neq 0$  时, 有

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

当  $x=0$  时,  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -1 = f(0)$ , 所以  $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ ,  $x \in [-1, 1]$

$$\int_0^x f(t)dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad x \in [-1, 1] \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

十一、(6分) 设  $a_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$ , 且数列  $\{na_n\}$  有界, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛。

证明: 因为数列  $\{na_n\}$  有界, 则  $\exists M > 0$ , 使得  $0 \leq na_n \leq M$ , 因此  $0 \leq a_n \leq \frac{M}{n}$ ,  $\dots\dots 3 \text{ 分}$

于是  $0 \leq a_n^2 \leq \frac{M^2}{n^2}$ , 由比较判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛。  $\dots\dots 3 \text{ 分}$

十二、(7分) 求二元函数  $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$  在限制条件  $x - y = \frac{\pi}{4}$  下的极值。

解 设  $F(x, y, \lambda) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(x - y - \frac{\pi}{4})$ , 求驻点。由  $F_x = -2\sin x \cos x + \lambda = 0$ ,

$F_y = -2\sin y \cos y - \lambda = 0$ ,  $x - y = \frac{\pi}{4}$  可得驻点为  $(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$ 。  $\dots\dots 4 \text{ 分}$

极大值为  $z(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $k$  为偶数; 极小值为  $z(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $k$  为奇数。  $\dots\dots 3 \text{ 分}$

武汉大学 2014-2015 学年第二学期期末考试高等数学 B2 答案

一、(8 分) 设  $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{q} = k\vec{a} + \vec{b}$ , 其中  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ , 且  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 问:

(1)  $k$  为何值时,  $\vec{p} \perp \vec{q}$ ? (2)  $k$  为何值时, 以  $\vec{p}, \vec{q}$  为边的平行四边形面积为 6?

解 (1) 因  $\vec{p} \perp \vec{q}$ , 故  $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ , 即  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} + \vec{b}) = 0$

$$2k|\vec{a}|^2 + (2+k)\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 0$$

按  $|\vec{a}|^2 = 1$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ,  $|\vec{b}|^2 = 4$ , 有  $2k + 4 = 0$ , 得  $k = -2$  4 分

(2)  $|\vec{p} \times \vec{q}| = 6$ , 而  $|\vec{p} \times \vec{q}| = |(2\vec{a} + \vec{b}) \times (k\vec{a} + \vec{b})| = |(2-k)\vec{a} \times \vec{b}| = 2|2-k|$

故  $|2-k| = 3$ , 得  $k = 5$  或  $k = -1$ . 4 分

二、(8 分) 求函数  $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  沿曲线  $x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$  在点  $M(1, 2, -2)$  的切

线方向上的方向导数

解: 曲线在点  $M$  处对应  $t = 1$ , 在  $M$  点的切线方向为  $(1, 4t, -8t) = (1, 4, -8)$ , 方向余弦为

$$\vec{l} = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9}\right), \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{gradu}|_M = \left( \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \Big|_M = \left( \frac{8}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{27} \right)$$

故方向导数为  $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{16}{243}$ , 4 分

三、(6 分) 函数  $z = z(x, y)$  由方程  $z = f(x + y + z)$  所确定, 其中  $f$  二阶可导, 且  $f'(u) \neq 1$ ,

求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

$$\text{解 } z_x = (1 + z_x)f', \quad z_x = \frac{f'}{1 - f'} = -1 + \frac{1}{1 - f'} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(1 + z_x)f''}{(1 - f')^2} = \frac{f''}{(1 - f')^3} \quad (2 \text{ 分})$$

四、(8 分) 设  $u = f(x + y + z, xyz)$  具有一阶连续偏导数, 其中  $z = z(x, y)$  由方程

$$x^2 + 2ze^{y^2} = \sin z \text{ 所确定, 求 } du.$$

解:  $du = (dx + dy + dz)f_1 + (yzdx + xzdy + xydz)f_2$

$$2x dx + 2e^{y^2} dz + 4yze^{y^2} dy = \cos z dz \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{消去 } dz \text{ 得: } du = \left[ f_1 + yzf_2 + (f_1 + xyf_2) \frac{2x}{\cos z - 2e^{y^2}} \right] dx + \left[ f_1 + xzf_2 + (f_1 + xyf_2) \frac{4yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}} \right] dy \quad 4 \text{ 分}$$

五、(8 分) 求曲面  $z - e^z + 2xy = 3$  在点  $M(1, 2, 0)$  处的切平面和法线方程。

解: 设  $F(x, y, z) = z - e^z + 2xy - 3$ , 则  $F_x = 2y, F_y = 2x, F_z = 1 - e^z$ , 4 分

故法向量  $\vec{n}|_M = \{F_x, F_y, F_z\}|_M = \{4, 2, 0\}$ , 所以切平面方程为

$$4(x-1) + 2(y-2) + 0 \cdot (z-0) = 0 \quad \text{即 } 2x + y = 4,$$



法线方程为  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{0}$  或者  $\begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} \\ z=0 \end{cases}$  4分

六、(10分) 设  $z = x^3 + \alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + \alpha\beta^{-1}(\gamma x + \beta y)$ , 试证: 当  $\alpha\beta \neq \gamma^2$  时, 函数  $z$  有一个且仅有一个极值, 又若  $\beta < 0$ , 则该极值必为极大值。

证明 由  $\begin{cases} z_x = 3x^2 + 2\alpha x + 2\gamma y + \alpha\gamma\beta^{-1} = 0 \\ z_y = 2\gamma x + 2\beta y + \alpha = 0 \end{cases}$ , 解得  $x=0$  或  $x = \frac{-2}{3\beta}(\alpha\beta - \gamma^2) = \mu$  5分

$$D = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+2\alpha & 2\gamma \\ 2\gamma & 2\beta \end{pmatrix}, D|_{x=0} = 4(\alpha\beta - \gamma^2), D|_{x=\mu} = 4(\gamma^2 - \alpha\beta)$$

在  $\alpha\beta \neq \gamma^2$  的条件下, 以上二式中必有且仅有一式大于零, 这说明函数  $z$  有且仅有一个极值。

因为  $z_{yy} = 2\beta$ , 所以当  $\beta < 0$  时, 必为极大值。 5分

七、(8分) 设  $f(x, y)$  连续, 且满足  $f(x, y) = x\sqrt{y} + \iint_D f(u, v) du dv$ , 其中  $D$  为曲线

$y = x^2, x = y^2$  所围成的区域, 求  $f(x, y)$ 。

解: 设  $A = \iint_D f(u, v) du dv$ , 则  $A = \iint_D (x\sqrt{y} + A) dx dy$ , 而

$$\iint_D x\sqrt{y} dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y} dy = \frac{6}{55} \quad 4分$$

$$\text{而 } \iint_D A dx dy = A \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{3} A, \text{ 所以 } A = \frac{6}{55} + \frac{A}{3} \Rightarrow A = \frac{9}{55},$$

$$\text{故 } f(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{9}{55} \quad 4分$$

八、(8分) 设  $\Omega$  是由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  围成的空间区域,  $S$  是  $\Omega$  的整个边界的外侧, 求曲面积分  $\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ 。

解: 由 Gauss 公式可知

$$\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz \quad 4分$$

用球坐标  $x = r \cos \theta \sin \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \varphi$ , 可得

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = \frac{2-\sqrt{2}}{3} \pi R^3,$$

$$\text{所以 } \oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 3 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{3} \pi R^3 = (2-\sqrt{2}) \pi R^3 \quad 4分$$

九、(10分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$  的收敛域与和函数。

$$\text{解: 令 } t = x^2, \text{ 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} t^n \text{ 的收敛半径为 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1, \text{ 当 } t = \pm 1 \text{ 时 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \text{ 收}$$

敛, 所以原级数的收敛域为  $[-1, 1]$ 。 5分

$$\text{令 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = xS(x), S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \text{ 故 } S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, |x| \leq 1,$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x, |x| \leq 1, \text{ 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = xS(x) = x \arctan x, |x| \leq 1$$

5 分

十、(10 分) 确定常数  $\lambda$ , 使得在右半平面  $x > 0$  的单连通区域内, 曲线积分

$$\int_L 2xy(x^4 + y^2)^\lambda dx - x^2(x^4 + y^2)^\lambda dy = \int_L Pdx + Qdy$$

与路径无关, 并在上述条件下, 求积分  $\int_{(1,0)}^{(3,3)} Pdx + Qdy$  之值。

解 记  $t = x^4 + y^2$ ,  $P = 2xyt^\lambda$ ,  $Q = -x^2t^\lambda$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xt^\lambda + 2xy\lambda t^{\lambda-1} \cdot 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xt^\lambda - x^2\lambda t^{\lambda-1} \cdot 4x^3,$$

由  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 得  $2xt^\lambda + 2xy\lambda t^{\lambda-1} \cdot 2y = -2xt^\lambda - x^2\lambda t^{\lambda-1} \cdot 4x^3$ , 即  $\lambda = -1$ ,

故当  $\lambda = -1$  时, 积分  $\int_L \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2}$  与路径无关。 6 分

取  $L_1: y = 0, x$  从 1 到 3,  $L_2: x = 3, y$  从 0 到 3, 则

$$\begin{aligned} \int_L \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} &= \int_{L_1} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} + \int_{L_2} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} \\ &= 0 + \int_0^3 \frac{-9}{81 + y^2} dy = -\arctan \frac{y}{9} \Big|_0^3 = -\arctan \frac{1}{3} \end{aligned} \quad 4 \text{ 分}$$

十一、(10 分) 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV$ , 其中  $\Omega$  是由曲线  $\begin{cases} y^2 = 4z \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周而成的曲面与平面  $z = 4$  围成的立体。

解一: 旋转曲面方程为  $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$ , 用柱坐标  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$  将三重积分化为

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV = \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{z}} (r^2 + z) r dr \quad 5 \text{ 分}$$

绩小铺QQ: 1433397577, 搜集整理不易, 资料自用就好, 谢谢!

$$= 2\pi \int_0^4 \left( \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} z \right) dz = 2\pi \int_0^4 6z^2 dz = 256\pi \quad 5 \text{ 分}$$

或者解二: 旋转曲面方程为  $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$ , 用柱坐标  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$  将三重积分化为

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 r dr \int_{\frac{r^2}{4}}^4 (r^2 + z) dz \quad 5 \text{ 分}$$

$$= 2\pi \int_0^4 \left( 4r^3 + 8r - \frac{9}{32} r^5 \right) dr = 256\pi \quad 5 \text{ 分}$$

十二、(6 分) 设级数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $[0, 1]$  上收敛, 证明: 当  $a_0 = a_1 = 0$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$

收敛。

证明 因为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x=1$  点收敛, 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛。

那么, 存在  $M>0$ , 使得  $|a_n| \leq M$

3 分

而  $f\left(\frac{1}{n}\right) = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_k}{n^k} + \dots$  当  $a_0 = a_1 = 0$  时, 有

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_k}{n^k} + \dots$ , 当  $n \geq 2$  以后,  $f\left(\frac{1}{n}\right)$  是绝对收敛的, 所以

$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{|a_2|}{n^2} + \frac{|a_3|}{n^3} + \dots + \frac{|a_k|}{n^k} + \dots \leq M\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots\right) \sim \frac{M}{n^2}$  故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  收敛 3 分