

武汉大学 2021-2022 第一学期高等数学 B1 期末试卷 A 卷

1、(9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x \cos x}}{\tan x^3}$.

2、(10 分) 已知曲线 $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, 并求该曲线在点 (0,1) 处的切线方程.

3、(10 分) 已知 $\int x f(x) dx = \arctan x + C$, 求 $f(x)$, 并计算 $\int f(x) dx$.

4、(10 分) (1) 求齐次线性微分方程 $y^{(4)} - 6y''' + 13y'' = 0$ 的通解;

(2) 对于非齐次方程 $y^{(4)} - 6y''' + 13y'' = x + e^{3x} \cos 2x$, 用待定系数法给出特解的形式 (无需求出其中的待定系数的数值).

5、(8 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x > 0 \\ \int_0^x e^{t^2} dt, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 求 a, b 及导函数 $f'(x)$.

6、(10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin y + x - 2y = 0$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$, 并讨论曲线 $y = y(x)$

在点 (0,0) 附近的凹凸性.

7、(7 分) 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

8、(7 分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right)^n$.

9、(7 分) 求微分方程 $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ ($x > 0$) 的通解.

10、(7 分) 求曲线 $y = \frac{|x|}{1+x^4}$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

11、(7 分) 计算抛物线 $y = 2x - x^2$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.

12、(5 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上二阶可导, 且 $f(a) = a$. 证明:

(1) 至少存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(2) 至少存在一点 $\eta \in (-a, a)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

13、(3 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 内可导, $f'(x) < 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 令

$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

1、(9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x \cos x}}{\tan x^3}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x \cos x}}{\tan x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1+x \cos x)}{x^3 (\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x \cos x})}$ 5 分

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{4}$$
 9 分

2、(10 分) 已知曲线 $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, 并求该曲线在点 (0,1) 处的切线方程.

解: 由 $dx = (1 + \cos t)dt$, $dy = \cos t de^t + e^t d\cos t = e^t(\cos t - \sin t)dt$, 可得:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)dt}{(1 + \cos t)dt} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{1 + \cos t},$$
 5 分

又点 (0,1) 对应 $t = 0$ 解得 $y'|_{x=0, y=1} = \frac{1}{2}$. 8 分

因此, 切方程为: $y = \frac{1}{2}x + 1$. 10 分

3、(10 分) 已知 $\int xf(x)dx = \arctan x + C$, 求 $f(x)$, 并计算 $\int f(x)dx$.

解: 对等式两边求导可得 $xf(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 因此 $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ 5 分

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2}$$
 8 分

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$$
 10 分

4、(10 分) (1) 求齐次线性微分方程 $y^{(4)} - 6y''' + 13y'' = 0$ 的通解;

(2) 对于非齐次方程 $y^{(4)} - 6y''' + 13y'' = x + e^{3x} \cos 2x$, 用待定系数法给出特解的形式 (无需求出其中的待定系数的数值).

解: (1) 该微分方程的特征方程为: $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 = 0$, 5 分

它有特征根: $\lambda_{1,2} = 0$ (二重), $\lambda_{3,4} = 3 \pm 2i$, 故而该齐次线性微分方程的通解为: $y = C_1 + C_2 x + (C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x)e^{3x}$. 8 分

(2) 非齐次方程的特解的形式为: $y^* = x^2(C_1 + C_2 x) + x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)e^{3x}$. 10 分

5、(8 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x > 0 \\ \int_0^x e^{t^2} dt, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 求 a, b 及导函数 $f'(x)$.

解: 显然 $f(0) = 0$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b = 0$, 得 $b = 0$ 3 分

另一方面, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x^2} = 1$, 而

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a, \text{ 由在 } x=0 \text{ 处可导可知 } a=1. \quad 6 \text{ 分}$$

易得导函数 $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ e^{x^2}, & x \leq 0 \end{cases}.$ 8 分

6、(10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin y + x - 2y = 0$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$, 并讨论曲线 $y = y(x)$

在点 $(0,0)$ 附近的凹凸性.

解: 由方程可知, $x=0$ 时 $y=0$, 方程两边对 x 求导得: $\frac{dy}{dx} \cos y + 1 - 2 \frac{dy}{dx} = 0$ 4 分

代入 $x=0, y=0$ 解得 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{2 - \cos y} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 1.$ 6 分

方程 $\frac{dy}{dx} \cos y + 1 - 2 \frac{dy}{dx} = 0$ 两边对 x 求导得: $\frac{d^2y}{dx^2} \cos y - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \sin y - 2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$

可得 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$ 8 分

此外, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \sin y}{2 - \cos y} = \frac{-\sin y}{(2 - \cos y)^3}.$ 由于在点 $(0,0)$ 处函数的一阶导数大于 0, 可知在 $x=0$

的左侧充分小的邻域内 $y < 0$, 从而 $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, 曲线下凸; 在 $x=0$ 的右侧充分小的邻域内

$y > 0$, 从而 $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 曲线上凸. 10 分

7、(7 分) 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

解: $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 \ln x d\sqrt{x}$ 3 分

$$= 2\sqrt{x} \ln x \Big|_{0^+}^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x} d\ln x = -2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x} dx$$
 5 分

$$= 4\sqrt{x} \Big|_{0^+}^1 = -4$$

8、(7 分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right)^n.$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right)}$ 3 分

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right) = 1$, 因此 $\ln \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right) \sim \sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} - 1$, 又因为 $\cos \frac{x}{n} - 1 \sim 2 \sin^2 \frac{x}{2n} = o\left(\frac{x}{n}\right)$, 因此 $\ln \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right) \sim \sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} - 1 \sim \sin \frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}$. 5 分

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(\sin \frac{x}{n} + \cos \frac{x}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \frac{x}{n}} = e^x$ 7 分

9、(7 分) 求微分方程 $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ ($x > 0$) 的通解.

解: $y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = xu' + u$, 代入得 3 分

$$xu' + u = \sqrt{1 - u^2} + u, \text{ 化简为 } xu' = \sqrt{1 - u^2}$$
 5 分

因而, $1 - u^2 \neq 0$ 时, $\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$, 积分得 $\arcsin u = \ln x + C$, 变量回代得方程通解:

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln x + C,$$

(当 $1 - u^2 = 0$ 时由特解 $y = x$ 及 $y = -x$.) 7 分

10、(7 分) 求曲线 $y = \frac{|x|}{1 + x^4}$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

解: 图形面积 $S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1 + x^4} dx$ 3 分

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx^2 = \arctan x^2 \Big|_0^{+\infty}$$
 5 分

$$= \frac{\pi}{2}$$
 7 分

11、(7 分) 计算抛物线 $y = 2x - x^2$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.

解: 解法一: 抛物线与 x 轴交于点 $(0, 0)$, $(2, 0)$, 用柱壳法可得旋转体体积:

$$V = \int_0^2 2\pi xy dx$$
 4 分

$$= 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$
 7 分

解法二: 解得 $x = \varphi(y) = 1 - \sqrt{1 - y}$ 及 $x = \psi(y) = 1 + \sqrt{1 - y}$, $y \in [0, 1]$ 旋转体体积:

$$V = \int_0^1 \pi(\psi^2(y) - \varphi^2(y)) dy$$
 4 分

$$= \int_0^1 4\pi \sqrt{1 - y} dy = -\frac{8\pi}{3} (1 - y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$
 7 分

12、(5 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上二阶可导, 且 $f(a) = a$. 证明:

(1) 至少存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(2) 至少存在一点 $\eta \in (-a, a)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

证明: (1) 由于 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上二阶可导, 因此 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续. 又因为 $f(x)$ 是奇函数, 因此 $f(0) = 0$. 由拉格朗日中值定理可知至少存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a - 0}{a} = 1. \quad 3 \text{ 分}$$

(2) $f(x)$ 是奇函数且 $f(a) = a$ 可知 $f(-a) = -a$, 与 (1) 的证明相似, 可以证明存在 $\xi_1 \in (-a, 0)$, 使得 $f'(\xi_1) = 1$, 因此有

$$f'(\xi) - 1 = f'(\xi_1) - 1 = 0,$$

令辅助函数 $\varphi(x) = e^x (f'(x) - 1)$, 由 $f'(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续可导可知, $\varphi(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续可导, 又有 $\varphi(\xi) = \varphi(\xi_1) = 0$, 由罗尔定理可知, 至少存在一点 $\eta \in (\xi_1, \xi) \subset (-a, a)$ 使得

$$0 = \varphi'(\eta) = e^\eta (f''(\eta) - 1) + e^\eta f'(\eta) = e^\eta (f''(\eta) + f'(\eta) - 1)$$

即有 $f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$, 也就是 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$. 5 分

13、(3 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 内可导, $f'(x) < 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

令 $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

证明: 方法一: 计算可得 $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k+1) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right),$

$$= f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} (f(k+1) - f(x)) dx \right).$$

由 $f'(x) < 0$ 可知 $f(x)$ 单调递减, 因此

$$0 > f(k+1) - f(x) > f(k+1) - f(k), \quad x \in (k, k+1),$$

因此, $0 \geq \int_k^{k+1} (f(k+1) - f(x)) dx \geq f(k+1) - f(k).$

所以, 数列 a_n 单调递减, 且

$$a_n = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} (f(k+1) - f(x)) dx \right) \geq f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) = f(n) \geq A.$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在. 3 分

方法二: 计算可得 $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right) + f(n),$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} (f(k) - f(x)) dx \right) + f(n).$$

由 $f'(x) < 0$ 可知 $f(x)$ 单调递减, 因此

$$0 < f(k) - f(x) < f(k) - f(k+1), \quad x \in (k, k+1),$$

因此,
$$0 \leq \int_k^{k+1} (f(k) - f(x)) dx \leq f(k) - f(k+1).$$

所以, 数列 $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} f(k) - f(x) dx \right)$ 单调递增, 且

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} (f(k) - f(x)) dx \right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n) \leq f(1) - A.$$

即 $b_n \leq f(1) - A$, 数列 $\{b_n\}$ 单调递增有上界, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在.

又由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > 0$ 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 由 $a_n = b_n + f(n)$ 可知

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在. 3 分