第三章　运动的守恒定律 习题解答

3.1—3.16 思考题答案略

3.17　一人从 10 m 深的井中提水。开始时桶中装有 10 kg 的水，桶的质量为 1 kg，由于水桶漏水，每升高 1 m 要漏去 0.2 kg 的水。试求：将水桶匀速地从井中的水面提到井口时，人所作的功。

3.17 解：选竖直向上为坐标 y 轴的正方向，井中水面处为坐标原点。由题意知，人匀速提水时，人所用的拉力 F 等于水桶的重量 G，所以水桶离水面高度为 y 时，拉力为

$$F = G = G_0 - ky = m_0 g - 0.2gy = 107.8 - 1.96y \quad \text{(SI)}$$

由此得拉力所作的功为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^H F\mathrm{d}y = \int_0^{10} \left(107.8 - 1.96y\right)\mathrm{d}y = 980\text{（J）}$$

3.18　一物体按规律 $x = ct^2$ 在流体媒质中作直线运动，式中 c 为常量，t 为时间。设流体对物体的粘滞阻力正比于速度的平方，比例系数为 k，试求物体由 $x = 0$ 运动到 $x = l$ 时，阻力所作的功。

3.18 解：由 $x = ct^2$，可得物体的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ct$$

物体受到的粘滞阻力的大小为

$$f = kv^2 = 4kc^2t^2 = 4kcx$$

所以阻力对物体所作的功为

$$A_f = \int \mathrm{d}A_f = \int_0^l -4kcx\mathrm{d}x = -2kcl^2$$

3.19　一质量为 m 的质点在 O-xy 平面内运动，其位置矢量随时间的函数关系为

$$\boldsymbol{r} = a\cos\omega t\ \boldsymbol{i} + b\sin\omega t\ \boldsymbol{j} \ \text{(SI)}$$

式中 a、b、ω 均是正值常量，且 $a > b$。试求：

（1）质点在 A 点（a，0）和 B 点（0，b）的动能；

（2）质点所受的合外力 $\boldsymbol{F}$ 以及当质点从 A 点运动到 B 点的过程中 $\boldsymbol{F}$ 的分力 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_y$ 分别作的功。

3.19 解：(1)由题意可知，物体的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin\omega t\ \boldsymbol{i} + b\omega\cos\omega t\ \boldsymbol{j}$$

在 A 点(a，0)处，$\cos\omega t = 1$，$\sin\omega t = 0$，所以速度和动能分别为

$$\boldsymbol{v}_A = b\omega\ \boldsymbol{j} \quad , \quad E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mb^2\omega^2$$

同理，在 B 点(0，b)，$\cos\omega t = 0$，$\sin\omega t = 1$，所以速度和动能分别为

$$\boldsymbol{v}_B = -a\omega\,\boldsymbol{i} \quad , \quad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

(2) 由牛顿运动定律可知，质点受到的合外力为

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -ma\omega^2\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - mb\omega^2\sin\omega t\,\boldsymbol{j} = -m\omega^2 x\,\boldsymbol{i} - m\omega^2 y\,\boldsymbol{j}$$

它在 x、 y 轴上的两个分力分别为

$$F_x = -m\omega^2 x\,,\quad F_y = -m\omega^2 y$$

所以在 $A(a\,,\ 0)\to B(0,\ b)$ 过程中，两分力做的功分别为

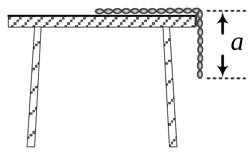
$$A_x = \int_a^0 F_x \mathrm{d}x = -\int_a^0 m\omega^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

$$A_y = \int_0^b F_y \mathrm{d}y = -\int_0^b m\omega^2 y\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}mb^2\omega^2$$

3.20 如图所示，一根长为 L 的链条，质量为 m，摊直放在水平桌面上，并使其中一部分下垂，下垂部分的长度为 a，链条与桌面的滑动摩擦系数为 μ。假设下垂部分的重力大于桌面对链条的静摩檫力，能使链条从静止开始向下滑动。试求：

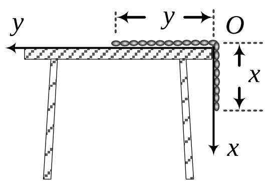
（1）链条从静止开始滑动到离开桌面的过程中，摩擦力做的功；

（2）链条刚离开桌面时的速度。



习题 3. 20图

3.20 解：(1)建立坐标如图所示。假设在某一时刻桌面上链条的长度为 y ,则摩擦力大小为



习题 3. 20解图

$$f = \mu mg\frac{y}{L}$$

方向沿 y 轴正向，当链条再移动元位移 $\mathrm{d}y$ 时，摩擦力做的元功为

$$\mathrm{d}A_f = f\mathrm{d}y = \mu mg\frac{y}{L}\mathrm{d}y$$

所以整个过程中摩擦力做的总功为

$$A_f = \int \mathrm{d}A_f = \int_{l-a}^{0}\mu\frac{m}{L}gy\mathrm{d}y = -\frac{\mu mg}{2L}(L-a)^2 \qquad ①$$

(2)同理当下垂部分的长度为 x 时，下垂部分受到的重力为 $G = \frac{mg}{L}x$，所以在整个过程中，重力做的总功为

$$A_G = \int \mathrm{d}A_G = \int_a^L \frac{mg}{L}x\mathrm{d}x = \frac{mg}{2L}\left(L^2 - a^2\right) \qquad ②$$

以链条为对象，应用质点系的动能定理，有

$$A_f + A_G = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

将①②式代入，并注意到 $v_0 = 0$，有

$$\frac{mg\left(L^2-a^2\right)}{2L}-\frac{\mu mg}{2L}\left(L-a\right)^2=\frac{1}{2}mv^2$$

由此解得链条的速度为

$$v=\sqrt{\frac{g}{L}\left[\left(L^2-a^2\right)-\mu\left(L-a\right)^2\right]}$$

3.21 陨石在距离地面高度为 $2R$ 时的速度为 v_0，已知地球半径为 R，地球质量为 m_{E}，万有引力常量为 G，并假设陨石在落地过程中不受空气阻力作用。试求陨石坠地时的速度。

3.21 **解**： 由题意可知，陨石落在地过程中机械能守恒，以无限远处为万有引力势能的零势能点，则有

$$-\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{R+2R}+\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{R}+\frac{1}{2}mv^2$$

由此解得陨石的落地时的速度为

$$v=\sqrt{\frac{4Gm_{\mathrm{E}}}{3R}+v_0^2}$$

3.22 设两个粒子之间的相互作用力是排斥力，其大小与粒子间距离 r 的函数关系为 $f=k/r^3$，k 为正值常量，试求这两个粒子相距为 r 时的势能。（设相互作用力为零的地方势能为零）

3.22 解：由题意可知，当 $r\to\infty$ 时 $f=0$，所以势能零点在无穷远处。当两粒子相距为 r 时，势能为

$$E_P=E_P-E_\infty=A_{P\infty}=\int_r^\infty \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^\infty\frac{k}{r^3}\,\mathrm{d}\,r=\frac{k}{2r^2}$$

3.23 某弹簧不遵守胡克定律。 设施力 F 时，相应的伸长量为 x，力与伸长量的关系为

$$F=52.8x+38.4x^2\ \text{（SI）}$$

（1）将弹簧从伸长 $x_1=0.50\mathrm{m}$ 拉伸到伸长 $x_2=1.00\mathrm{m}$ 时，求外力所需做的功；

（2）将弹簧横放在水平光滑桌面上，一端固定，另一端系一个质量为 2.17 kg 的物体，然后将弹簧拉伸到伸长量为 $x_2=1.00\mathrm{m}$ 处，再将物体由静止释放，求当弹簧的伸长量回到 $x_1=0.50\mathrm{m}$ 时，物体的速率；

（3）此弹簧的弹力是保守力吗？

3.23 **解**：(1) 在拉伸过程中，外力做的功为

$$A_{\text{外力}}=\int_{x_1}^{x_2}F\mathrm{d}x=\int_{0.50}^{1.00}(52.8x+38.4x^2)\,\mathrm{d}\,x=31\left(\mathrm{J}\right)$$

(2) 由题意可知，此弹簧的弹性力为

$$F'=-F=-\left(52.8x+38.4x^2\right)$$

所以物体从 $x_2=1.00\mathrm{m}$ 回到 $x_1=0.50\mathrm{m}$ 时，弹性力做功为

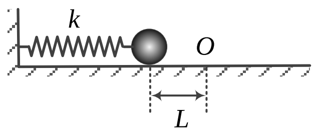
$$A_{\text{弹性力}}=\int_{x_2}^{x_1}F'\mathrm{d}x=\int_{1.00}^{0.50}-(52.8x+38.4x^2)\,\mathrm{d}\,x=31(\mathrm{J})$$

由质点的动能定律：$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2=A_{\text{弹性力}}$，并注意到$v_0=0$，可得物体的速率为

$$v=\sqrt{\frac{2A_{\text{弹性力}}}{m}}=5.34(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

(3) 此力为保守力，因为其做功的数值仅与弹簧的始末态有关。

3.24 劲度系数为k的轻弹簧，一端固定，另一端与桌面上的质量为m的小球相连接。用外力推动小球，将弹簧压缩一段距离L后放开。假定小球所受的滑动摩擦力大小为F且恒定不变，滑动摩擦系数与静摩擦系数可视为相等。试求L必须满足什么条件时，才能使小球在放开后就开始运动，而且一旦停止下来就一直保持静止状态。



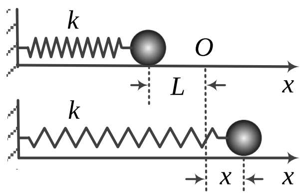
题 3.24 图

3.24 解：取弹簧自然长度时小球所处位置为坐标原点O，建立如图所示的坐标系。在$t=0$时，静止于$x=-L$的小球开始运动的条件是

$$kL>F \qquad 即 \qquad L>F/k \qquad ①$$

小球运动到x处静止的条件，由功能原理得

$$-F(L+x)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}kL^2 \qquad ②$$



题 3.24 解图

由②可解出 $x=L-\dfrac{2F}{k}$

使小球在该处继续保持静止的条件为

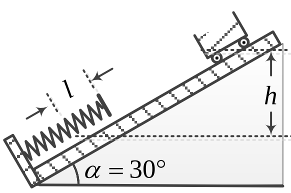
$$kx=k\left(L-\frac{2F}{k}\right)\le F$$

由此解得 $L<3F/k$ ③

所求L应同时满足①、③式，故其取值范围为

$$\frac{F}{k}<L\le\frac{3F}{k}$$

3.25 如图所示，自动卸料车连同料重为G_1，它从静止开始沿着与水平面成 30°的斜面滑下。滑到底端时与处于自然状态的轻弹簧相碰，当弹簧压缩到最大时，卸料车就自动翻斗卸料，此时料车下降高度为h。然后，依靠被压缩弹簧的弹性力作用又沿斜面回到原有高度。设空车重量为G_2，另外假定摩擦阻力为车重的 0.2 倍，求G_1与G_2的比值。



题 3.25 图

3.25 解：把卸料车视为质点。设弹簧被压缩的最大长度为l，劲度系数为k。在卸料车由最高点下滑到弹簧压缩最大这一过程中，应用功能原理有

$$-\frac{0.2G_1h}{\sin\alpha}=\frac{1}{2}kl^2-G_1h \qquad ①$$

同理，对卸料车卸料后的回升过程应用功能原理，可得

$$-\frac{0.2G_2h}{\sin\alpha}=G_2h-\frac{1}{2}kl^2 \qquad ②$$

由式①和②联立解得

$$\frac{G_1}{G_2}=\frac{\sin 30°+0.2}{\sin 30°-0.2}=\frac{7}{3}$$

3.26　安全带对高空作业人员是非常重要的。假设一个质量为50kg 的人，在工作时不慎从高空竖直跌落，由于安全带的保护，最终被悬挂起来。假设此人竖直跌落的距离为2.0m，安全带弹性缓冲的时间为0.5s 。试求安全带对人的平均冲力。

3.26 解：安全带起作用前，人体自由下落，其速度为$v=\sqrt{2gh}$，所以动量为

$$p_0=mv_0=m\sqrt{2gh}=50\sqrt{2\times9.8\times2.0}=313(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$

方向向下。在安全带发生弹性缓冲的 0.5s 内，设安全带对人的平均冲力为$\overline{F}$，以向上为正方向，由质点的动量定理，有

$$\left(\overline{F}-mg\right)\Delta t=\Delta P=P-P_0$$

由此可得平均冲力为

$$\overline{F}=\frac{\Delta P}{\Delta t}+mg=\frac{P-P_0}{\Delta t}+mg=\frac{0-\left(-313\right)}{0.5}+50\times9.8=1116(\mathrm{N})$$

3.27　一个质量为 0.15kg 的棒球以速度 $v_0=40\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的水平速度飞来，被棒球棒击打后速度仍然沿水平方向，但与原方向的夹角为120°，速度为$v=50\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。如果棒球与棒的接触时间为0.02s，求棒对棒球的平均打击力的大小和方向。

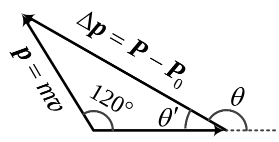
3.27 解：由题意可知，棒球被击打前后动量大小分别为

$$P_0=mv_0=6.0\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}},\quad P=mv=7.5\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

方向如图所示。由于动量具有矢量性，动量增量$\Delta\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0$应满足由矢量的三角形合成法则，如图所示。由余弦定理，可得动量增量的大小为

$$\Delta P=\sqrt{P^2+P_0^2-2PP_0\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{7.5^2+6.0^2-2\times7.5\times6.0\times\cos120°}=11.7(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$



习题3.27解图

再由正弦定理，可得图中θ'满足

$$\sin\theta'=\frac{mv}{\Delta P}\sin120°=0.555，\text{即}\quad \theta'=33.7°$$

所以动量增量的方向与原速度方向的夹角为

$$\theta=180°-\theta'=146.3°$$

根据质点的动量定理，可得棒对棒球的平均打击力的大小为

$$\overline{F}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{11.7}{0.02}=586(\text{N})$$

力的方向与动量增量的方向一致，即与原速度方向的夹角为$146.3°$。

3.28　AK47是由前苏联设计的一款知名度很高的自动步枪，每秒可连续击发10发子弹，每颗弹头的质量为7.91g，初速$710\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。试求射击时枪托对士兵肩膀的平均冲击力。

3.28解：由题意可知，10发子弹在1秒内获得的总动量为

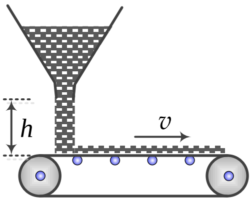
$$P=Nmv=10\times7.91\times10^{-3}\times710\approx56.2\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

由动量定理，枪对子弹的平均作用力为

$$\overline{F}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{56.2-0}{1}=56.2(\text{N})$$

根据作用力与反作用力定律，子弹对枪的平均冲击用力也为56.2N。为保持在射击过程中枪身稳定，必须用肩膀抵住枪托，所以枪托对肩膀的平均冲击力为56.2N。

3.29　如图所示，用传送带输送煤粉，料斗口在传送带上方高$h=0.50\text{m}$处，煤粉自料斗口自由降落在传送带上，随即与传送带一起运动。设料斗口连续卸煤的流量为$q=10\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$传送带以$v=1.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$的水平速度匀速向右移动。试求料斗口在卸煤过程中，煤粉对传送带的作用力的大小和方向（不计相对传送带静止的煤粉对传送带的压力）。



题3.29图

3.29解：建立坐标如图所示，则煤粉自料斗口下落，接触传送带前的速度为

$$v_0=-\sqrt{2gh}=3.13\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

方向沿y轴负向。在$\text{d}t$时间内，落于传送带上的煤粉质量为：$\text{d}m=q\text{d}t$，落到传送带上后其速度变为

$$v=1.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

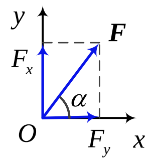
方向沿x轴正向。设传送带对煤粉的平均作用力为：$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$，由动量定理的分量形式可得

$$F_x\text{d}t=\text{d}m\cdot v-0\quad,\quad F_y\text{d}t=0-(-\text{d}m\cdot v_0)$$

将$\text{d}m=q\text{d}t$代入，得

$$F_x=qv=10(\text{N})$$

$$F_y=qv_0=q\sqrt{2gh}=31.3(\text{N})$$



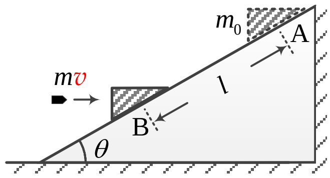
习题3. 29解图

所以传送带对煤粉的作用力的大小和方向分别为

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=32.9(\text{N})\quad,\quad\alpha=\tan^{-1}\frac{F_x}{F_y}=72.3°$$

由牛顿第三定律，煤粉对传送带的作用力 $F' = F = 32.9\text{N}$，方向与图中 $\boldsymbol{F}$ 相反。

3.30 质量为 m_0 的木块在光滑的固定斜面上，由 A 点从静止开始下滑，当经过路程 l 运动到 B 点时，木块被一颗水平飞来的子弹射中，子弹立即陷入木块内。设子弹的质量为 m，速度为 v，求子弹射中木块后，子弹与木块的共同速度。



题 3.30 图

3.30 解： 由题意可知木块 m_0 到达 B 点时速度的大小为

$$v_1 = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

方向沿斜面向下。

在子弹与木块的完全非弹性碰撞过程中，由于木块处于固定的斜面上，斜面给予 m_0 一个很大的冲击力，方向垂直斜面向上。所以总体来说，在这个碰撞过程中“子弹+木块”系统的动量不守恒。但在沿斜面方向上，重力的分量与内力相比，可以忽略不计，动量守恒。以沿斜面向上为正方向，则有

$$mv\cos\theta - m_0 v_1 = (m + m_0)v_{共}$$

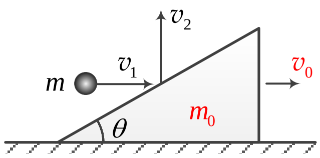
由此得子弹与木块的共同速度为

$$v_{共} = \frac{mv\cos\theta - m_0 v_1}{m + m_0} = \frac{mv\cos\theta - m_0\sqrt{2gl\sin\theta}}{m + m_0}$$

3.31 如图所示，质量为 m_0 的滑块正沿着光滑水平地面以速度 v_0 向右滑动。一质量为 m 的小球水平向右飞行，以速度 v_1（对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速度为 v_2（对地）。若碰撞时间为 Δt（Δt 很小），试求

（1）此过程中滑块对地的平均作用力

（2）滑块速度增量的大小。



题 3.31 图

3.31 解：（1）以小球和滑块作为一个系统，则由题意可知：在小球与滑块的碰撞过程中，系统在竖直方向的动量不守恒，其原因是地面给予该系统一个竖直向上的冲力。因此在碰撞过程中，系统受到的外力有：重力 $m_0 g + mg$、地面对滑块竖直向上的冲击力 $\overline{F}$，利用质点系的动量定理在竖直方向上的分量式，有

$$\left(\overline{F} - m_0 g - mg\right)\Delta t = mv_2$$

所以

$$\overline{F} = \frac{mv_2}{\Delta t} + m_0 g + mg$$

此力由地面直接作用于滑块 m_0 上。由牛顿第三定律可知，滑块对地的平均作用力为

$$\overline{F'}=-\overline{F}=-\left(\frac{mv_2}{\Delta t}+m_0g+mg\right)$$

式中负号表示力的方向竖直向下（通常当Δt很小时，$\frac{v_2}{\Delta t}\gg g$，即小球的重力$mg$可以忽略不计）。

（2）在水平方向上，系统受到的合外力为零，所以系统动量守恒。设滑块在碰撞前后的速度分别为v_0、v，由动量守恒定理，可得

$$mv_1+m_0v_0=m_0v$$

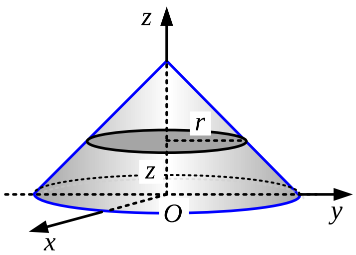
滑块在碰撞前后的速度增量为

$$\Delta v=v-v_0=\frac{mv_1}{m_0}$$

3.32 试求一个质量均匀分布、密度为ρ、底面半径和高均为R的圆锥体的质心位置。

3.32 解：质量均匀分布的圆锥体具有关于椎体中心轴线的旋转对称性，所以其质心一定位于椎体的中心轴线上。为此以椎体底面的圆心为坐标原点O、轴线方向为z轴建立坐标系，如图所示。在底面上方离底面高度为z处，截取一个半径为r，厚度为$\mathrm{d}z$的薄圆台，由几何关系可知$r=R-z$，则该圆台的质量为

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho\pi r^2\mathrm{d}z=\rho\pi\left(R-z\right)^2\mathrm{d}z$$



习题 3.32 解图

所以该圆锥体质心的位置坐标为

$$z_C=\frac{\int z\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\int_0^R z\rho\pi\left(R-z\right)^2\mathrm{d}z}{\int_0^R\rho\pi\left(R-z\right)^2\mathrm{d}z}=\frac{R}{4}$$

即该圆锥体质心的位置位于圆锥体轴线上离底面$\frac{R}{4}$处。

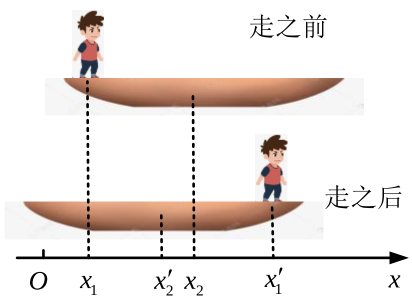
3.33 一质量$m_1=50\mathrm{kg}$的人站在一条质量为$m_2=200\mathrm{kg}$长度$l=4.0\mathrm{m}$的船的船尾上，开始时船静止。试用质心的概念和质心运动定律，求当人从船尾走到船头时船移动的距离。假定水的阻力可忽略不计。

3.33 解：由题意可知，人和船组成的系统在水平方向上不受外力作用，因而在整个过程中，在水平方向系统质心的速度不变。又因为原来系统是静止的，所以人在走动过程中系统的质心始终静止，因而质心的坐标不变。以地面为参照系，设人在移动前后的坐标分别为x_1、x_1'，船的质心在移动前后的坐标分别为x_2、x_2'，则有

$$\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1x_1'+m_2x_2'}{m_1+m_2}$$

即

$$m_2(x_2-x_2')=m_1(x_1'-x_1) \quad ①$$



题 3.33 解图

假设船移动的距离为d，即

$$x_2' - x_2 = d$$

则人相对于地面运动的距离为

$$x_1' - x_1 = l - d$$

代入①式，可得

$$d = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} l = -3.2\text{m}$$

式中的负号表示船的运动方向与人的运动方向相反。显然这个结果与用动量定理求得的结果相同。

3.34 两颗相距很近、相互吸引并绕它们的质心转动的恒星称为双星系统。用望远镜观测时，亮的一颗叫主星，暗的一颗叫伴星。设主星 A 的质量为m_1，伴星 B 的质量为m_2，双星之间的距离为a。试求当它们因相互吸引而绕其质心做圆周运动时的周期T。

3.34 解：双星系统的质心一定在双星的连心线上，设双星 A、B 到系统质心的距离分别为r_1和r_2，则

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

$$r_1 + r_2 = a$$

由此可得

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \qquad ①$$

双星之间的相互吸引力来源于万有引力，假设主星 A 绕系统质心做圆周运动时的速度大小为v_1，由牛顿第二运动定律有

$$G\frac{m_1 m_2}{a^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} \qquad ②$$

又主星 A 绕系统的质心做圆周运动的周期T，满足

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} \qquad ③$$

联立①②③，可得

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}$$

3.35 一个具有单位质量的质点在随时间 t 变化的合外力 $\boldsymbol{F} = (3t^2 - 4t)\boldsymbol{i} + (12t - 6)\boldsymbol{j}$ (SI) 的作用下运动。设该质点在 $t = 0$ 时位于坐标原点，速度为零。试求：$t = 2$ 秒时，该质点受到的外力对坐标原点的力矩和该质点对坐标原点的角动量。（提示：先由动量定理求出质点速度 $\boldsymbol{v}$ 和位置矢量 $\boldsymbol{r}$，则 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}$，

$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ ）

3.35 **解**：由动量定理 $\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=m\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 、且 $m=1\text{kg}$ ，可得

$$\int_0^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^{t}\frac{\boldsymbol{F}}{m}\mathrm{d}t=\int_0^{t}\left[\left(3t^2-4t\right)\boldsymbol{i}+\left(12t-6\right)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{d}t$$

由此得，该质点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\left(t^3-2t^2\right)\boldsymbol{i}+\left(6t^2-6t\right)\boldsymbol{j}$$

分离变量并积分，可得

$$\int_0^{r}\mathrm{d}r=\int_0^{t}\left[\left(t^3-2t^2\right)\boldsymbol{i}+\left(6t^2-6t\right)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{d}t$$

所以，质点在 t 时刻的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=\left(\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3\right)\boldsymbol{i}+\left(2t^3-3t^2\right)\boldsymbol{j}\quad\text{（SI）}$$

当 $t=2\text{ s}$ 时，质点的位矢、速度和受力分别为

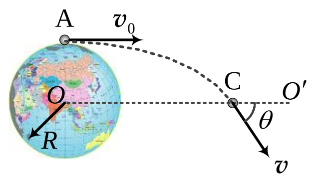
$$\boldsymbol{r}=-\frac{4}{3}\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}\ (\text{m})，\quad \boldsymbol{v}=12\boldsymbol{j}\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}，\quad \boldsymbol{F}=4\boldsymbol{i}+18\boldsymbol{j}\quad\text{（N）}$$

所以 $t=2\text{ s}$ 时的力矩和角动量分别为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\left(-\frac{4}{3}\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}\right)\times\left(4\boldsymbol{i}+18\boldsymbol{j}\right)=-40\boldsymbol{k}\quad\text{（N}\cdot\text{m）}$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=\left(-\frac{4}{3}\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}\right)\times12\boldsymbol{j}=-16\boldsymbol{k}\quad\text{（kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}\text{）}$$

3.36 小球 A，自地球的北极点以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在质量为 $m_{地}$ 、半径为 R 的地球表面沿水平方向向右飞出，如图所示，地心参考系中轴 OO' 与 $\boldsymbol{v}_0$ 平行，小球 A 的运动轨道与轴 OO' 相交于距 O 为 $3R$ 的 C 点。不考虑空气阻力，试求小球 A 在 C 点的速度 $\boldsymbol{v}$ 、以及 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 之间的夹角 θ 。



习题 3. 36图

3.36 解：小球自北极点运动到 C 点的过程中，只受地球万有引力的作用，所以在此过程中即满足小球和地球系统的机械能守恒，又满足小球对地心的角动量守恒。所以有

$$\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{m_{地}m}{R}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{m_{地}m}{3R}$$

$$mv_0R=mv\sin\theta\cdot3R$$

解此方程组可得

$$v=\sqrt{v_0^2-\frac{4Gm_{地}}{3R}}$$

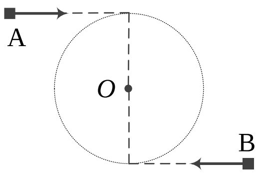
$$\sin\theta=\frac{v_0}{3v}=\frac{v_0}{3\sqrt{v_0^2-\dfrac{4Gm_{地}}{3R}}}$$

3.37　A、B 两个滑冰运动员，他们的质量各为 60kg，各以 $5.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率在相距 $6.0\ \mathrm{m}$ 的两条平行线上相对滑行。当他们即将交错而过时，同时抓住一根长为 $6.0\ \mathrm{m}$ 的轻绳的一端，因而绕他们的对称中心 O 点作圆周运动。若将二人视为一个质点系，并忽略冰面上的磨擦阻力，试求：

（1）两人拉绳前，系统对 O 点总角动量的大小和方向；

（2）开始转圈后，若两人同时用力收绳，使运动半径逐渐减小。当两人转圈的半径减小为 $1.5\ \mathrm{m}$ 时，他们的速率是多少？

（3）在上述过程中，两人的拉力做的总功是多少？



习题3.37图

3.37 解：（1）两人在拉手前，系统受到对 O 点的合外力矩为零，所以运动过程中系统对 O 点的角动量守恒，其大小为

$$L_0=L_{A0}+L_{B0}=2L_{A0}=2m_{A0}v_{A0}R_0=1800\ (\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}})$$

方向垂直地面向上。

（2）两人开始绕 O 点转圈后，仍然满足系统的角动量守恒，即

$$L=L_A+L_B=2m_Av_AR=L_0=2m_Av_{A0}R_0$$

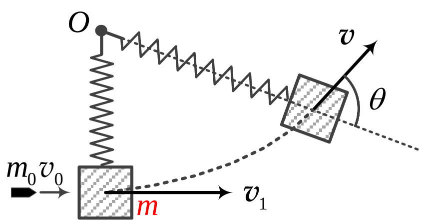
所以速率为

$$v=v_A=\frac{R_0}{R}v_0=10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（3）在整个过程中，只有两人的拉力做功，所以有系统的动能定律，可得拉力的总功为

$$A=E_k-E_{k0}=2\times\left(\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{1}{2}mv_{A0}^2\right)=4500\ \mathrm{J}$$

3.38　如图所示，在光滑的水平桌面上，放着一个质量为 m 的木块，木块与一个劲度系数为 k、原长为 l_0 的轻弹簧相连，弹簧的另一端固定于桌面上的 O 点，开始时弹簧无伸长。有一质量为 m_0 的子弹以速度 v_0 垂直于弹簧射向木块 m，并嵌入木块中。试求：当弹簧的长度变为 l（$l>l_0$）时木块的速度 v，以及速度方向与拉伸方向之间的夹角 θ。



习题 3. 38图

3.38 解：在子弹射入木块的前后瞬间，子弹与木块组成的系统动量守恒，所以木块获得的初速度 v_1，满足：$m_0v_0=(m_0+m)v_1$，即

$$v_1=\frac{m_0v_0}{m_0+m}$$

之后，木块和子弹作为一个整体在弹性力作用下绕 O 点运动，由于弹性力是保守力，且总

是指向O点，所以有机械能守恒和对 O 点的角动量守恒，即

$$\frac{1}{2}\left(m_0+m\right)v_1^2=\frac{1}{2}k\left(l-l_0\right)^2+\frac{1}{2}\left(m_0+m\right)v^2$$

$$\left(m_0+m\right)v_1 l_0=\left(m_0+m\right)vl\sin\theta$$

解此方程组可得

$$v=\sqrt{v_1^2-k\frac{\left(l-l_0\right)^2}{m_0+m}}=\frac{\sqrt{m_0^2 v_0^2-k\left(l-l_0\right)^2\left(m_0+m\right)}}{m_0+m}$$

$$\theta=\arcsin\frac{v_1 l_0}{vl}=\arcsin\frac{m_0 v_0 l_0}{l\sqrt{m_0^2 v_0^2-k\left(l-l_0\right)^2\left(m_0+m\right)}}$$