武汉大学 2013–2014 学年第一学期

《线性代数 B》(工科 54 学时) 试题

一. (8 分) 在 n 阶行列式 D 中, 如果把第一列移到最后一列, 而其余各列保持原来次序各向左移动了一列, 得到行列式 Δ, 问行列式 Δ 与 D 有何关系? $\Delta = (-1)^{n-1}D.$

二. (12 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (1) 求 A^n. (n 为正整数). (2) 设 $A^2 + AB - A = E$, 求 $|B|$.

A 为奇数时,$A^n = 2^{n-1}A$; A 为偶数时, $A^n = 2^n E$; $|B| = -\dfrac{5}{16}$.

三. (15 分) 求下列向量组的一个最大线性无关组, 并用它线性表出向量组中的其余向量.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,1,2,5),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,0,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,0,1),\ \boldsymbol{\alpha}_5 = (4,2,3,7).$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_5 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$. (答案不唯一.)

四. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b & c & x_1 \\ b & -a & d & x_2 \\ c & -d & -a & x_3 \\ d & c & -b & x_4 \end{pmatrix}$, a,b,c,d 是不全为 0 的实数, 求 x_i $(i=1,2,3,4)$ 及数 k, 使 $B = kA$ 为正交矩阵.

$x_1 = d, x_2 = -c, x_3 = b, x_4 = -a$; 或 $x_1 = -d, x_2 = c, x_3 = -b, x_4 = a$; $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$.

五. (12 分) 用正交变换化二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为标准型, 并写出所用正交变换及 f 的标准型.

正交变换为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. 标准型为 $f = -2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2$.

六. (16 分) 讨论 a,b 为何值时, 方程组 $\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b \end{cases}$ 有唯一解? 有无穷多解? 无解? 并在有解时求出其解.

当 $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时, 方程组有唯一解: $x_1 = \dfrac{a^2(1-b)}{a-b}$, $x^2 = \dfrac{b(a^2-1)}{a^2-ab}$, $x_3 = \dfrac{a-1}{ab-a^2}$. 当 $a = 0$ 时无解; 当 $a = b = \neq 1$ 时无解; 当 $a = b = 1$ 时有无穷多解, 通解为 $x_1 = 1 - k_1 - k_2,\ x_2 = k_1,\ x_3 = k_2$.

七. (10 分) 证明: 与齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系等价的线性无关向量组也是该方程组的基础解系.

八. (10 分) 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 向量 α 在基 $\alpha_1=(1,1,0,0),\ \alpha_2=(0,1,1,0),\ \alpha_3=(0,0,1,1),\ \alpha_4=(0,0,0,1)$ 下的坐标为 $(2,3,1,2)$, : 求 α 在基 $\beta_1=(1,2,0,0),\ \beta_2=(0,2,3,0),\ \beta_3=(0,0,2,4),\ \beta_4=(3,0,0,2)$ 下的坐标.

所求坐标为:$(\frac{13}{8},\frac{7}{8},\frac{11}{16},\frac{1}{8})$.

九. (10 分) 设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T,\ \beta=(b_1,b_2,b_3)^T$, 且 $\alpha^T\beta=2,\ A=\alpha\beta^T$, (1) 求 A 的特征值, (2) 求可逆矩阵 P 及对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=2$. $p=\begin{pmatrix} b_2 & b_3 & a_1 \\ -b_1 & 0 & a_2 \\ 0 & -b_1 & a_3 \end{pmatrix}$, $\Lambda=\mathrm{diag}(0,0,2)$.