武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
线性代数 A（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，计算 A^{2022}

三、（12 分）

已知 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$， $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=6$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$

证明： (1) $\boldsymbol{B}^k=6^{k-1}\boldsymbol{B}$ (2) $\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 不可逆 (3) $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$ 都可逆

四、（10 分）求 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

五、（10 分）设 A 为 n 阶方阵（$n\ge 2$），A^* 是 A 的伴随矩阵，证明

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n, \\ 1, & R(A)=n-1, \\ 0, & R(A)\le n-2. \end{cases}$$

六、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} -x_1-2x_2+ax_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=b \\ 4x_1+5x_2+10x_3=2 \end{cases},$$

问 a,b 取何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在有无穷多解时求其通解。

七、（14 分） 求R^4的子空间$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_1+x_2-x_3-x_4=0\}$的基和维数，

并将W的基扩充为R^4 的基。

八、（12 分）

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)^T$，$a_1\neq 0, A=\alpha\alpha^T$,(1) 证明$0$是$A$的$n-1$重特征值；

(2) 求A的非0特征值和非0特征值对应的特征向量。

九、（12 分）**已知二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$$

（1）写出二次型 f 的矩阵表达式；

（2）用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵；