武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

一、（8 分）不求出行列式的值,用行列式的性质,判断行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$能被17 整除.

二、（10 分）什么样的矩阵 X 满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $A^{-1}B^T(CB^{-1}+E)^T - [(C^{-1})^T A]^{-1}$.

四、（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$ 的值.

五、（12 分）求向量组 $\alpha_1 = (1,3,3,1)$，$\alpha_2 = (1,4,1,2)$，$\alpha_3 = (1,0,2,1)$，$\alpha_4 = (1,7,2,2)$ 的秩及一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

六、（6 分）设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解，求证：$\beta, \beta+\alpha_1, \cdots, \beta+\alpha_r$ 线性无关。

七、（10 分）已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$，

(1)求 A.（2）计算行列式 $|A|$ 和 $|A^2 - 2A + 3I|$ 的值；（3）判断 A 是否为正定矩阵。

八、（10 分）已知向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基，说明 $\{2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3\}$ 也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基。若向量 α 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下坐标为 $(1,1,1)^T$，求向量 α 在基 $\{2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3\}$ 的坐标。

九、（10 分）设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2ax_2x_3$ 通过正交变换 $x = Py$ 化成标准型 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + by_3^2$，求出 a, b 的值及所用的正交变换。

十、（14 分）讨论 a, b 为何值时，方程 $ax_1 + x_2 + x_3 = 4$ 与方程组 $\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3bx_2 + x_3 = 9 \end{cases}$ 无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）参考解答

一、（8 分）不求出行列式的值，用行列式的性质，判断行列式$\begin{vmatrix}2&0&4\\5&2&7\\2&5&5\end{vmatrix}$能被17 整除.

解　因为$204,527,255$都能被17 整除. 所以第一列的 100 倍，第二列的 10 倍加到第三列得 204, 527, 255, 而这三项能提出公因子 17. 故原行列式的值能被 17 整除.

二、（10 分）什么样的矩阵 X 满足下面等式：$\begin{pmatrix}1&-3&2\\-1&3&0\end{pmatrix}X-\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

解　设 $X=\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{pmatrix}$　则 $x_1-3x_2+2x_3=4$，$y_1-3y_2+2y_3=-2$，$-x_1+3x_2=2, -y_1+3y_2=2$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$　$X=\begin{pmatrix}-2+3k_1&1+3k_2\\k_1&1+k_2\\3&0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$为任意实数）

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&7\\7&8&9\end{pmatrix}$，求 $A^{-1}B^T(CB^{-1}+E)^T-[(C^{-1})^TA]^{-1}$.

解　先化简，有 $D=A^{-1}B'(CB^{-1}+E)'-[(C^{-1})'A]^{-1}=A^{-1}[(CB^{-1}+E)B]'-A^{-1}[(C^{-1})']^{-1}$

$$=A^{-1}[(C+B)'-C']=A^{-1}B'$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},B'=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad D=A^{-1}B'=\begin{pmatrix}1&0&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

四、（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x+1&x&x&\cdots&x\\x&x+2&x&\cdots&x\\x&x&x+3&\cdots&x\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x&x&x&\cdots&x+n\end{vmatrix}$的值.

解　$D_n=\begin{vmatrix}x+1&x&x&\cdots&x\\-1&2&0&\cdots&0\\-1&0&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x+\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x}{n}&x&x&\cdots&x\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!(1+x+\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x}{n})$

五、（12 分）求向量组 $\alpha_1=(1,3,3,1)$，$\alpha_2=(1,4,1,2)$，$\alpha_3=(1,0,2,1)$，$\alpha_4=(1,7,2,2)$ 的秩及一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

解　　令 $A=\left[\alpha_1^{\mathrm T}\ \alpha_2^{\mathrm T}\ \alpha_3^{\mathrm T}\ \alpha_4^{\mathrm T}\right]$，对 A 作初等行变换：$A\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

故给定向量组的秩为3。$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个最大无关组。且 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

六、（6 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解，求证：$\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关。

证明：假设 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性有关，则存在不全为零的 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 使得

$$\lambda_0\beta+\lambda_1(\beta+\alpha_1)+\cdots\lambda_r(\beta+\alpha_r)=0,$$

于是 $-(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r)\beta=\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r$，

又由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性无关性知 $-(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r)\neq 0$，于是

$\beta=-\dfrac{1}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r}$（$\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r$），这与已知向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解矛盾。

七、（10 分）已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$，

(1)求 A．（2）计算行列式 $|A|$ 和 $|A^2-2A+3I|$ 的值；（3）判断 A 是否为正定矩阵。

解：（1）设 $p_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T, p_2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T, p_3=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\end{pmatrix}^T$，则 p_1,p_2,p_3 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征向量，且对应的特征值分别为 $1,2,3$，设 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)$。

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，故 $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}$

（2）$|A|=1\cdot2\cdot3=6$　设 $\varphi(A)=A^2-2A+3I$，则有 $\varphi(1)=1^2-2+3=2$，$\varphi(2)=2^2-4+3=3$

$\varphi(3)=3^2-6+3=6$，故 $|A^2-2A+3I|=\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(3)=36$

(3) 由三阶矩阵 A 为实对称矩阵，且有三个大于零的特征值，故 A 为正定矩阵。

八、（10 分）已知向量组 $\left\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基，说明 $\left\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right\}$ 也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基。若向量 α 在基 $\left\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right\}$ 下坐标为 $\left(1,1,1\right)^T$，求向量 α 在基 $\left\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right\}$ 的坐标。

解：由题条件可知 $\left(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，记 $P=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

由 $\left|P\right|=2$ 可知 P 可逆，故 $\left\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right\}$ 也能表示 $\left\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right\}$，故它们等价

故 $R(\left\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right\})=3$，又 $\left\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right\}$ 有 3 个向量，故

由题条件可知 $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$，

故 $\alpha=\left(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right)P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T=\left(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$

故 α 在基 $\left\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right\}$ 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$

九、（10 分）设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$ 通过正交变换 $x=Py$ 化成标准型 $f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$，求出 a,b 的值及所用的正交变换。

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&a\\-1&a&1\end{pmatrix}$，由题意可知 A 的特征值为 $2,2,b$，故有

$4+b=3$，　得 $b=-1$；由 2 是特征值得 $|A-2E|=0$，即 $\left(a^2+2a+1\right)=0$，得 $a=-1$

当特征值为 $\lambda=2$ 时解 $(A-2E)x=O$ 得两个无关的特征向量 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}^T,\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1&-2&1\end{pmatrix}^T$

将其正交规范化后得 $p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T,p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^T$

当特征值为 $\lambda=-1$ 时解 $(A+E)x=O$ 得特征向量 $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$，单位化得 $p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$

令 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)$，则 $\boldsymbol{x=Py}$ 即为所求。

十、(14 分) 讨论 a,b 为何值时，方程 $ax_1+x_2+x_3=4$ 与方程组 $\begin{cases}x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$ 无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

解：问题等价于 a,b 为何值时方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$ （*）无解，有唯一解，和无数多个解。（*）

的线性矩阵的行列式值为 $|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&3b&1\end{vmatrix}=2b(1-a)$，由克拉姆法则知 $|A|\neq0$，

即 $a\neq1,b\neq0$（*）有唯一解 $\left(\frac{3-4b}{b(1-a)},\frac{3}{b},\frac{4b-3}{b(1-a)}\right)$

当 $a=1$ 时（*）增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&3b&1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&4\\0&0&0&-4b+3\end{pmatrix}$，

故当 $a=1$ 时，且 $b\neq\frac{3}{4}$ 时（*）无解；

当 $a=1$，且 $b=\frac{3}{4}$ 时（*）与 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=4\\x_3=x_3\end{cases}$，故有解 $\begin{pmatrix}0&4&0\end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T$，其中 k 为任意常数

当 $b=0$ 时（*）增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&3\\1&0&1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1-a&4-3a\\0&0&0&6\end{pmatrix}$，故

$R(A)=2<3=R\left(\overline{A}\right)$，（*）无解。故 当 $b=0$ 或当 $a=1$ 且 $b\neq\frac{3}{4}$ 时，两个方程无公共解。

当 $a\neq1,b\neq0$ 两个方程有唯一公共解 $\left(\frac{3-4b}{b(1-a)},\frac{3}{b},\frac{4b-3}{b(1-a)}\right)$。

当 $a=1$ 时，且 $b=\frac{3}{4}$ 时两个方程有无数个共解 $\begin{pmatrix}0&4&0\end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T$