

Hackbuteer1的专栏

走别人没走过的路，让别人有路可走。

目录视图

摘要视图

RSS 订阅

个人资料



hackbuteer1



访问: 3152043次

积分: 30073

等级: **BLOG > 8**

排名: 第116名

原创: 254篇 转载: 8篇

译文: 0篇 评论: 2512条

文章搜索

博客专栏



考研复试上机题

文章: 14篇

阅读: 30570



IT公司笔试题集锦

文章: 19篇

阅读: 481806

文章分类

C/C++ (63)

OpenGL (5)

OSG (1)

Qt开发 (4)

数据结构 (61)

OGRE (1)

OGRE编译 (1)

Ogitor (1)

编程之美 (39)

面试珠玑 (85)

九度OJ (29)

STL源码剖析 (9)

[【CSDN会员专属福利】OpenStack Days China 大会门票，先到先得](#) [【收藏】Html5 精品资源汇集](#) [我们为什么选择Java](#)

Catalan数——卡特兰数

标签: [c](#) [工作](#)

2012-04-11 16:40

29621人阅读

评论(17)

[收藏](#)[举报](#)分类: [面试珠玑 \(84\)](#)

版权声明：本文为博主原创文章，未经博主允许不得转载。

Catalan数——卡特兰数

今天阿里淘宝笔试中碰到两道组合数学题，感觉非常亲切，但是笔试中失踪推导不出来后来查了下，原来是Catalan数。悲剧啊，现在整理一下

一、Catalan数的定义令 $h(1)=1$ ，Catalan数满足递归式： $h(n) = h(1)*h(n-1) + h(2)*h(n-2) + \dots + h(n-1)h(1)$ ， $n \geq 2$ 该递推关系的解为： $h(n) = C(2n-2, n-1)/n$ ， $n=1,2,3,\dots$ （其中 $C(2n-2, n-1)$ 表示 $2n-2$ 个中取 $n-1$ 个的组合数）

问题描述:

12个高矮不同的人，排成两排，每排必须是从矮到高排列，而且第二排比对应的第一排的人高，问排列方式有多少种？

这个笔试题，很YD，因为把某个递推关系隐藏得很深。

问题分析:

我们先把这12个人从低到高排列,然后,选择6个人排在第一排,那么剩下的6个肯定是在第二排.用0表示对应的人在第一排,用1表示对应的人在第二排,那么含有6个0,6个1的序列,就对应一种方案.比如000000111111就对应着

第一排: 0 1 2 3 4 5

第二排: 6 7 8 9 10 11

010101010101就对应着

第一排: 0 2 4 6 8 10

第二排: 1 3 5 7 9 11

问题转换为，这样的满足条件的01序列有多少个。

观察1的出现，我们考虑这一个出现能不能放在第二排，显然，在这个1之前出现的那些0,1对应的人要么是在这个1左边，要么是在这个1前面。而肯定要有有一个0的，在这个1前面，统计在这个1之前的0和1的个数。

也就是要求，0的个数大于1的个数。

OK，问题已经解决。

如果把0看成入栈操作，1看成出栈操作，就是说给定6个元素，合法的入栈出栈序列有多少个。

这就是catalan数,这里只是用于栈，等价地描述还有，二叉树的枚举、多边形分成三角形的个数、圆括弧插入公式中的方法数，其通项是 $c(2n, n)/(n+1)$ 。

在<<计算机程序设计艺术>>，第三版，Donald E.Knuth著，苏运霖译，第一卷，508页，给出了证明:

剑指Offer (21)

Spring笔记 (0)

文章存档

2014年09月 (1)

2013年09月 (9)

2013年06月 (1)

2013年05月 (2)

2013年01月 (4)

展开

阅读排行

浅谈C++多态性

(128344)

百度最新面试题集锦

(112098)

C++中的单例模式

(99696)

C++中智能指针的设计和

(72302)

程序员有趣的面试智力题

(64848)

字符串的全排列和组合算

(58839)

链表各类操作详解

(56317)

阿里巴巴笔试题

(55278)

虚函数和纯虚函数的区别

(52137)

N皇后问题的两个最高效

(49533)

评论排行

程序员有趣的面试智力题

(153)

淘宝2011.9.21校园招聘:

(118)

百度最新面试题集锦

(113)

阿里巴巴笔试题

(112)

浅谈C++多态性

(66)

C++中智能指针的设计和

(65)

一个应届计算机毕业生的

(58)

网易游戏2011.10.15校园

(53)

微软校园招聘笔试题

(51)

C++中的单例模式

(50)

推荐文章

*Android RoccoFix 热修复框架

*RxJava 学习笔记（五） ---
Creating 创建操作符

*Android_GestureDetector手势
滑动使用

*Android MaterialList源码解析

*Android开源框架Universal-
Image-Loader基本介绍及使用

*Android官方开发文档Training
系列课程中文版: 创建自定义
View之View的创建

最新评论

C++中的static关键字

first_three_sun: 很荣幸充当这第
100个受教者, 非常感谢。

C 语言的可变参数表函数的设计
qq_14845089: #define
va_arg(ap,type) (*(type *) (ap
+= _INT...

问题大意是用S表示入栈，X表示出栈，那么合法的序列有多少个(S的个数为n)

显然有 $c(2n, n)$ 个含S，X各n个的序列，剩下的是计算不允许的序列数(它包含正确个数的S和X，但是违背其它条件)。

在任何不允许的序列中，定出使得X的个数超过S的个数的第一个X的位置。然后在导致并包括这个X的部分序列中，以S代替所有的X并以X代表所有的S。结果是一个有 $(n+1)$ 个S和 $(n-1)$ 个X的序列。反过来，对一坨一种类型的每个序列，我们都能逆转这个过程，而且找出导致它的前一种类型的不允许序列。例如XXSXSSSXSSS必然来自SSXSXXXXSSS。这个对应说明，不允许的序列的个数是 $c(2n, n-1)$ ，因此 $a_n = c(2n, n) - c(2n, n-1)$ 。

验证：其中F表示前排，B表示后排，在枚举出前排的人之后，对应的就是后排的人了，然后再验证是不是满足后面的比前面对应的人高的要求。

```
[cpp]
01. #include <iostream>
02. using namespace std;
03.
04. int bit_cnt(int n)
05. {
06.     int result = 0;
07.     for (; n; n &= n-1, ++result);
08.     return result;
09. }
10.
11. int main(void)
12. {
13.     int F[6], B[6];
14.     int i,j,k,state,ok,ans = 0;
15.     for (state = 0; state < (1 << 12); ++state)
16.     {
17.         if (bit_cnt(state) == 6)
18.         {
19.             i = j = 0;
20.             for (int k = 0; k < 12; ++k)
21.             {
22.                 if (state & (1 << k))
23.                     F[i++] = k;
24.                 else
25.                     B[j++] = k;
26.             }
27.             ok = 1;
28.             for (k = 0; k < 6; ++k)
29.             {
30.                 if (B[k] < F[k])
31.                 {
32.                     ok = 0;
33.                     break;
34.                 }
35.             }
36.             ans += ok;
37.         }
38.     }
39.     cout << ans << endl;
40.     return 0;
41. }
```

结果：132

而 $c(12, 6)/7 = 12*11*10*9*8*7/(7*6*5*4*3*2) = 132$

注意： $c(2n, n)/(n+1) = c(2n, n) - c(2n, n-1)$

估计出题的人也读过<<计算机程序艺术>>吧。

PS：

另一个很YD的问题:

有编号为1到n(n可以很大，不妨在这里假定可以达到10亿)的若干个格子，从左到右排列。

在某些格子中有一个棋子，不妨设第xi格有棋子($1 \leq i \leq k$, $1 \leq k \leq n$)

每次一个人可以把一个棋子往左移若干步，但是不能跨越其它棋子，也要保证每个格子至多只有一个棋子。

程序员面试100题之十六：二叉树
最爱人间这四月天: 情况二那个，
当 $root == a \parallel root == b$ 时，不是
应该返回NULL么，根节点没有
父节点...

字符串的全排列和组合算法
sdadafda: 这个..不是数学问题
么

虚函数和纯虚函数的区别
技术先生: 纯虚函数一定没有实
现，这个说法有些片面，纯虚函
数是在基类中可以实现，起到
给所有的子类提供一些公共的...

N皇后问题的两个最高效的算法
hll174: 好全 慢慢看

C语言的可变参数表函数的设计
baolong5945: 正在研究这个
variadic argument 问题，找了好
多资料都草率转载，没有一个人
像你这样认...

字符串的全排列和组合算法
Laughing_Lz: 很全，谢谢！

数据结构课程设计---学生信息管
理
不爱写程序的怪蜀黍: 支持

程序员有趣的面试智力题
大秦之帝: 1下面还有一个1

两个人轮流移动，移动不了的为输，问先手是不是有必胜策略。

三、Catalan数的典型应用：

1、括号化问题。矩阵链乘： $P=A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ ，依据乘法结合律，不改变其顺序，只用括号表示成对的乘积，试问有几种括号化的方案？

一个有 n 个 X 和 n 个 Y 组成的字符串，且所有的部分字符串皆满足 X 的个数大于等于 Y 的个数。以下为长度为6的dyck words：

XXXXYY XYXXYY XYXXYY XXXYYY YXXYYX

XYXXYY XYXXYY XYXXYY

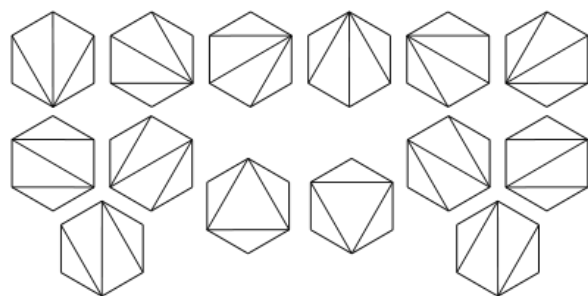
将上例的 X 换成左括号， Y 换成右括号， C_n 表示所有包含 n 组括号的合法运算式的个数：

((())) ()()() ()()()

(())() (())()

2、将多边形划分为三角形问题。将一个凸多边形区域分成三角形区域(划分线不交叉)的方法数？

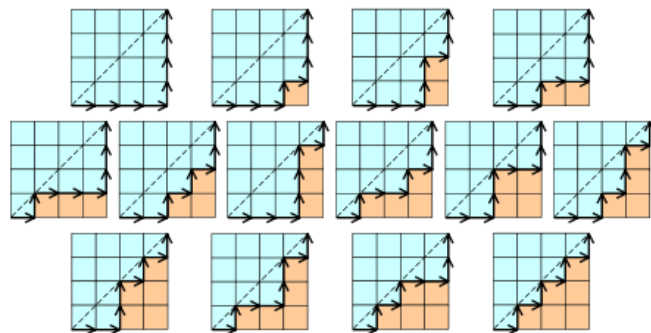
类似：在圆上选择 $2n$ 个点,将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数？



3、出栈次序问题。一个栈(无穷大)的进栈序列为1、2、3、...、 n ，有多少个不同的出栈序列？

类似：有 $2n$ 个人排成一行进入剧场。入场费5元。其中只有 n 个人有一张5元钞票，另外 n 人只有10元钞票，剧院无其它钞票，问有多少中方法使得只要有10元的人买票，售票处就有5元的钞票找零？(将持5元者到达视作将5元入栈，持10元者到达视作使栈中某5元出栈)

类似：一位大城市的律师在他住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作，每天她走 $2n$ 个街区去上班。如果他从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么有多少条可能的道路？

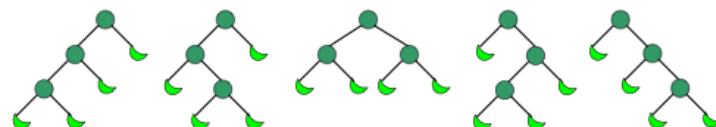


分析：对于每一个数来说，必须进栈一次、出栈一次。我们把进栈设为状态‘1’，出栈设为状态‘0’。 n 个数的所有状态对应 n 个1和 n 个0组成的 $2n$ 位二进制数。由于等待入栈的操作数按照1.. n 的顺序排列、入栈的操作数 b 大于等于出栈的操作数 $a(a \leq b)$ ，因此输出序列的总数目=由左而右扫描由 n 个1和 n 个0组成的 $2n$ 位二进制数，1的累计数不小于0的累计数的方案种数。

4、给顶点组成二叉树的问题。

给定 N 个节点，能构成多少种形状不同的二叉树？

(一定是二叉树！先取一个点作为顶点，然后左边依次可以取0至 $N-1$ 个相对应的，右边是 $N-1$ 到0个，两两配对相乘，就是 $h(0)*h(n-1) + h(2)*h(n-2) + \dots + h(n-1)h(0)=h(n)$ （能构成 $h(N)$ 个）



在 $2n$ 位二进制数中填入 n 个1的方案数为 $c(2n,n)$ ，不填1的其余 n 位自动填0。从中减去不符合要求

(由左而右扫描, 0的累计数大于1的累计数) 的方案数即为所求。

不符合要求的数的特征是由左而右扫描时, 必然在某一奇数位 $2m+1$ 位上首先出现 $m+1$ 个0的累计数和 m 个1的累计数, 此后的 $2(n-m)-1$ 位上有 $n-m$ 个1和 $n-m-1$ 个0。如若把后面这 $2(n-m)-1$ 位上的0和1互换, 使之成为 $n-m$ 个0和 $n-m-1$ 个1, 结果得1个由 $n+1$ 个0和 $n-1$ 个1组成的 $2n$ 位数, 即一个不合要求的数对应于一个由 $n+1$ 个0和 $n-1$ 个1组成的排列。

反过来, 任何一个由 $n+1$ 个0和 $n-1$ 个1组成的 $2n$ 位二进制数, 由于0的个数多2个, $2n$ 为偶数, 故必在某一个奇数位上出现0的累计数超过1的累计数。同样在后面部分0和1互换, 使之成为由 n 个0和 n 个1组成的 $2n$ 位数, 即 $n+1$ 个0和 $n-1$ 个1组成的 $2n$ 位数必对应一个不符合要求的数。

因而不合要求的 $2n$ 位数与 $n+1$ 个0, $n-1$ 个1组成的排列一一对应。

显然, 不符合要求的方案数为 $c(2n, n+1)$ 。由此得出输出序列的总数目 $=c(2n, n)-c(2n, n+1)=1/(n+1)*c(2n, n)$ 。

(这个公式的下标是从 $h(0)=1$ 开始的)

顶 踩
37 0

上一篇 微软校园招聘笔试题

下一篇 迅雷2012校园招聘笔试题

我的同类文章

面试珠玑 (84)

- | | |
|---|--|
| • 2015届华为校园招聘机试题 2014-09-13
阅读 34620 | • 迅雷2014校园招聘笔试题 2013-09-09
阅读 31932 |
| • PPS2013校园招聘笔试题 2013-09-09 阅读 6968 | • 2013豆瓣校园招聘研发类笔... 2013-09-06
阅读 10764 |
| • 网新恒天2013年校园招聘笔... 2013-09-06 阅读 7525 | • 2013届华为校园招聘机试题 2013-09-05 阅读 8601 |
| • 2014届华为校园招聘机试题 2013-09-05
阅读 38056 | • 各大IT公司校园招聘程序猿... 2012-09-09
阅读 28301 |
| • C/C++笔试题目大全 2012-08-30 | |

猜你在找

移动手机APP测试从零开始 (初级篇)
iOS8-Swift开发教程
数据结构和算法
Node.js (MEAN) 全栈开发入门
微信公众平台开发入门

卡特兰数Catalan及其应用
卡特兰数Catalan Number 算法数论 组合
卡特兰数Catalan Number
LeetCode系列卡特兰数Catalan Number 在求解独特二叉
卡特兰数 Catalan number



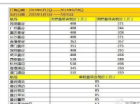
哈尔滨到成都



一居租房



一元钱注册公



泰国机票



路由器网段



计算机专业硕



以太网路

查看评论

12楼 lbear2010 2016-05-10 19:49发表



第一个问题是组合数学的一个经典结构, 叫标准Young表, 2行的标准Young表只是非常特殊的一类, 更一般的还有很多漂亮的结果。Knuth大牛有一个学术成果叫RSK对应, 研究对象就是半标准Young表(上面结构的推广), 有兴趣可以搜一下。

11楼 [person_CC](#) 2016-04-13 10:42发表



那个YD的下棋博弈是不是只要先手的如果可以造就一种对称局面，之后就只需要镜像对称敌手的招数，敌手就必输，这样子可以不，就像那个往桌子上放硬币的问题：两个人轮流往桌子上放硬币，放不下的输。还是必须的编程，然后转化为Nim游戏啊

10楼 [JoesonChan](#) 2014-02-21 14:21发表



楼主，我想问一下，这样的题目可不可以按照catalan公式写代码呢？

9楼 [记忆星空](#) 2014-02-03 11:48发表



反正我是没看懂卡特兰数和你这题的关系，卡特兰数一般处理匹配的，假如000000111111这串数字，按照你的说法是

123 4 5 6

78910 11 12

但是在一般卡特兰数不是考虑的是，最后一个0和第一个1匹配的？

Re: [youpopipush](#) 2015-02-04 19:20发表



回复记忆星空：我觉得这题确实和卡特兰数有关系，它是其中的一个特例，如果这里不是12个人而是6个或者20个人的话那结果就会发生变化，但是结果都是卡特兰数列里的值。12对应h(6)，6对应h(3)，20对应h(10)。

8楼 [记忆星空](#) 2014-02-03 11:47发表



反正我是没看懂卡特兰数和你这题的关系，卡特兰数一般处理匹配的，假如000000111111这串数字，按照你的说法是

123 4 5 6

78910 11 12

但是在一般卡特兰数不是考虑的是，最后一个0和第一个1匹配的？

7楼 [记忆星空](#) 2014-02-03 11:45发表



你自己在考试中都没推导出这题和卡特兰数的问题，这说明这题和卡特兰数的联系还是比较难想的，我知道卡特兰数，但是我实在没有看懂这题和卡特兰数的关系，你说的不够清楚

6楼 [静默加载](#) 2012-10-07 20:38发表



有点小不懂问一下，你写的Catalan数的定义令 $h(1)=1$ ，Catalan数满足递归式： $h(n) = h(1)*h(n-1) + h(2)*h(n-2) + \dots + h(n-1)h(1)$ ， $n \geq 2$ ；

而百科里面写的是令 $h(0)=1, h(1)=1$ ，catalan数满足递推式：

$h(n) = h(0)*h(n-1) + h(1)*h(n-2) + \dots + h(n-1)h(0)$ ($n \geq 2$)

这怎么不一样呢？

5楼 [盖世天才](#) 2012-05-22 21:29发表



能不能具体讲讲题目的思路，比如三角划分，怎么就和卡特兰数联系起来了？像高矮排队那样讲解就挺好的

Re: [youpopipush](#) 2015-08-10 10:07发表



回复盖世天才：我觉得是这样想的，n边形要划分成三角形，且对角线不能相交，那么对于一个n边形一定需要n-3条对角线。这n-3条对角线的选择满足公式 $h(n) = h(1)*h(n-1) + h(2)*h(n-2) + \dots + h(n-1)h(1)$ ，所以它是一个卡特兰数问题。当边数是三的时候相当于 $h(0)=h(1)=1$ 。

4楼 [wsxxiaohao](#) 2012-05-13 21:49发表



敢问您是哪个学校的研究生，这么强！

3楼 [Izj509649444](#) 2012-05-04 10:56发表



这些0之中也有高矮之分的啊，所以不能用0来表示它们全部

2楼 [Izj509649444](#) 2012-05-04 10:44发表



好像不能满足每一排从矮到高排列，

比如000000111111就对应着

第一排：0 1 2 3 4 5

第二排：6 7 8 9 10 11

也可以是这样的结果：

第一排：0 2 1 3 4 5

第二排：6 7 8 9 10 11

Re: [hackbuteer1](#) 2012-05-13 22:43发表



回复Izj509649444：0的位置就代表了高度，比如第2个位置的0就代表了高度在多有高度中处于倒数第二

Re: [Izj509649444](#) 2012-05-18 09:19发表



回复hackbuteer1：嗯，想明白了进栈出栈就决定了高度的正确性

1楼 [xuanqinanhai2](#) 2012-04-14 09:32发表

腾讯2012的实习生笔试题里也有一道，我可耻的没有做出来。



Re: [hackbuteer1](#) 2012-04-14 10:17发表



回复xuanqinanhai2: 是的, 有个还书的题目就是Catalan数

您还没有登录,请[\[登录\]](#)或[\[注册\]](#)

* 以上用户言论只代表其个人观点, 不代表CSDN网站的观点或立场

核心技术类目

[全部主题](#) [Hadoop](#) [AWS](#) [移动游戏](#) [Java](#) [Android](#) [iOS](#) [Swift](#) [智能硬件](#) [Docker](#) [OpenStack](#)
[VPN](#) [Spark](#) [ERP](#) [IE10](#) [Eclipse](#) [CRM](#) [JavaScript](#) [数据库](#) [Ubuntu](#) [NFC](#) [WAP](#) [jQuery](#)
[BI](#) [HTML5](#) [Spring](#) [Apache](#) [.NET](#) [API](#) [HTML](#) [SDK](#) [IIS](#) [Fedora](#) [XML](#) [LBS](#) [Unity](#)
[Splashtop](#) [UML](#) [components](#) [Windows Mobile](#) [Rails](#) [QEMU](#) [KDE](#) [Cassandra](#) [CloudStack](#) [FTC](#)
[coremail](#) [OPhone](#) [CouchBase](#) [云计算](#) [iOS6](#) [Rackspace](#) [Web App](#) [SpringSide](#) [Maemo](#)
[Compuware](#) [大数据](#) [aptech](#) [Perl](#) [Tornado](#) [Ruby](#) [Hibernate](#) [ThinkPHP](#) [HBase](#) [Pure](#) [Solr](#)
[Angular](#) [Cloud Foundry](#) [Redis](#) [Scala](#) [Django](#) [Bootstrap](#)

[公司简介](#) | [招贤纳士](#) | [广告服务](#) | [银行汇款帐号](#) | [联系方式](#) | [版权声明](#) | [法律顾问](#) | [问题报告](#) | [合作伙伴](#) | [论坛反馈](#)

[网站客服](#) [杂志客服](#) [微博客服](#) [webmaster@csdn.net](#) 400-600-2320 | 北京创新乐知信息技术有限公司 版权所有 | 江苏乐知网络技术有限公司 提供商务支持
京 ICP 证 09002463 号 | Copyright © 1999-2014, CSDN.NET, All Rights Reserved 