20.09.21 ALS TD 1

Exercice 1

1) OUI $\dfrac{3n^2+4n-6}{n^2} = 3 + \dfrac{4}{n} - \dfrac{6}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ 3n^2+4n-6 < 4n^2$

Donc $3n^2+4n-6 \in O(n^2)$

2) OUI $\forall n \geq 100, \ 3n^2+4n-6 \leq n^5$

Donc $3n^2+4n-6 \in O(n^5)$

3) OUI On a montré que $3n^2+4n-6 \in O(n^2)$

De plus $\forall n \geq 1 \quad 3n^2+4n-6 \geq n^2$

Donc $3n^2+4n-6 \in \Omega(n^2)$

Donc $3n^2+4n-6 \in \Theta(n^2)$

4) NON On a bien $3n^2-4n-6 \in O(n^4)$ mais pas $3n^2-4n-6 \in \Omega(n^4)$

5) OUI $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \ 3n^3-4n-6 > n^3$

De plus $\dfrac{3n^3-4n-6}{n^3} = 3 - \dfrac{4}{n^2} - \dfrac{6}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \ 3n^3-4n-6 \leq 4n^3$

Donc $3n^3-4n-6 \in \Omega(n^3)$

Et donc $3n^3-4n-6 \in \Theta(n^3)$

6) OUI $\dfrac{3n^2+2^n}{2^n} = \underbrace{\dfrac{3n^2}{2^n}}_{\to 0} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \quad 2^n \leq 3n^2+2^n \leq 2 \times 2^n$

Donc $3n^2+2^n \in \Theta(2^n)$

7) NON $\dfrac{3n^2+2^{3n+2}}{2^n} = \dfrac{3n^2}{2^n} + 2^{3n+2-n} = \dfrac{3n^2}{2^n} + 2^{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $3n^2+2^{3n+2} \notin \Theta(2^n)$

8) OUI $\forall n \geq 1 \quad 2^{3n^2} \leq 2^{n^3}$

Donc $3n^2+2^{3n^2} \in O(2^{n^3})$

9) $|\sin(n)| \leq 1$

Donc $-2 \leq 3+5.|\sin(n)| \leq 8$

Donc $3+5.|\sin(n)| \in \Theta(n)$

10) OUI $\forall n \geq 2, \quad n \leq 2n+3 \leq 3n$

Donc $2n+3 \in \Theta(n)$

11) NON $\dfrac{3^n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $3^n \notin O(2^n)$

12) NON $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $(n+1)! \notin O(n!)$

13) OUI $\forall n \in \mathbb{N}, \ n! < n^n$. Donc $n! \in O(n^n)$

14) NON $\dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n \times n \times \dots \times n}{1 \times 2 \times \dots \times n} = 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) \times n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $n^n \notin O(n!)$

15) OUI (?) $\dfrac{n^n+2^n+n^{10}+n!}{n^n} = 1 + \underbrace{\dfrac{2^n}{n^n}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{n^{10}}{n^n}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{n!}{n^n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc $n^n+2^n+n^{10}+n! \in O(n^n)$

Mq l'autre sens

Exercice 2

1) Boucle j : Pour i fixé, la boucle fait i itérations

Boucle i : i prend les valeurs : $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \dots, 1$

Donc $\mathcal{C}(N) = n + \frac{n}{2} + \dots + 1 \leqslant 2n$

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{C}(N) \in \Theta(n)}$

2) Boucle j : Pour i fixé, la boucle fait N itérations.

Boucle i : i prend les valeurs $1, 2, 4, \dots, N \Rightarrow \log(N)$ valeurs

Donc $\mathcal{C}(N) = N \log(N)$

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{C}(N) \in \Theta(N \log(N))}$

3) Boucle j : Pour i fixé, la boucle fait i itérations

Boucle i : i prend les valeurs $n, n-1, \dots, 1$

Donc $\mathcal{C}(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{C}(n) \in \Theta(n^2)}$

4) Boucle j : Pour i fixé, la boucle fait $\log(N)$ itérations

Boucle i : i prend les valeurs $1, 2, \dots, \frac{N}{2}, N$

Donc $\mathcal{C}(N) = \log(N) \times \log(N)$

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{C}(N) \in \Theta(\log^2(N))}$

Exercice 3 On note $n = |V|$ et $m = |E|$

1) Si représenté par une liste d'adjacence : $\boxed{\mathcal{C} = \Theta(n + m)}$

↳ on parcourt la liste de chaque sommet (donc en tout on trouve m valeurs).
On ajoute n car on considère qu'il faut accéder à la liste de chaque sommet (même si elle est vide).

Si représenté par une matrice d'adjacence : $\boxed{\mathcal{C} \in \Theta(n^2)}$

↳ il faut parcourir toute la matrice.

	liste	matrice
+	parcourir tout E	trouver un élément donné
−	trouver un élément donné	parcourir tout E

2) Pour chaque sommet i, $W[i]$ contient le poids le plus faible des arrêtes qui sortent de i.

$$\mathcal{C}(n,m) = \underbrace{m\log(m)}_{\text{tri}} + \underbrace{m+n}_{\text{parcours de } E} \in \Theta(m\log(m))$$

3) For i in V:
    $W[i]$ = undef

For (i,j) in E:
    if $W[i]$ = undef : $W[i] = w(i,j)$
    else if $W[i] > w(i,j)$: $W[i] = w(i,j)$

$\mathcal{C} \in \Theta(n+m)$

⇒ Pas besoin de trier à l'avance, on teste la valeur en parcourant E.

Exercice 4

1) $V = \{$ villes de France $\}$

$E = \{$ toutes les combinaisons $\}$

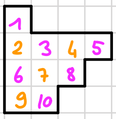
$w(v_1, v_2) =$ distance entre v_1 et v_2

2) Tout tester $\Rightarrow$ on ne peut pas faire mieux

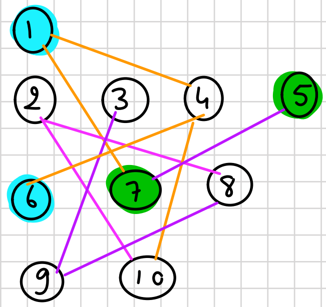
3) Il y a $n!$ ordres possibles.

Exercice 5

1) $V = \{\text{cases}\}$

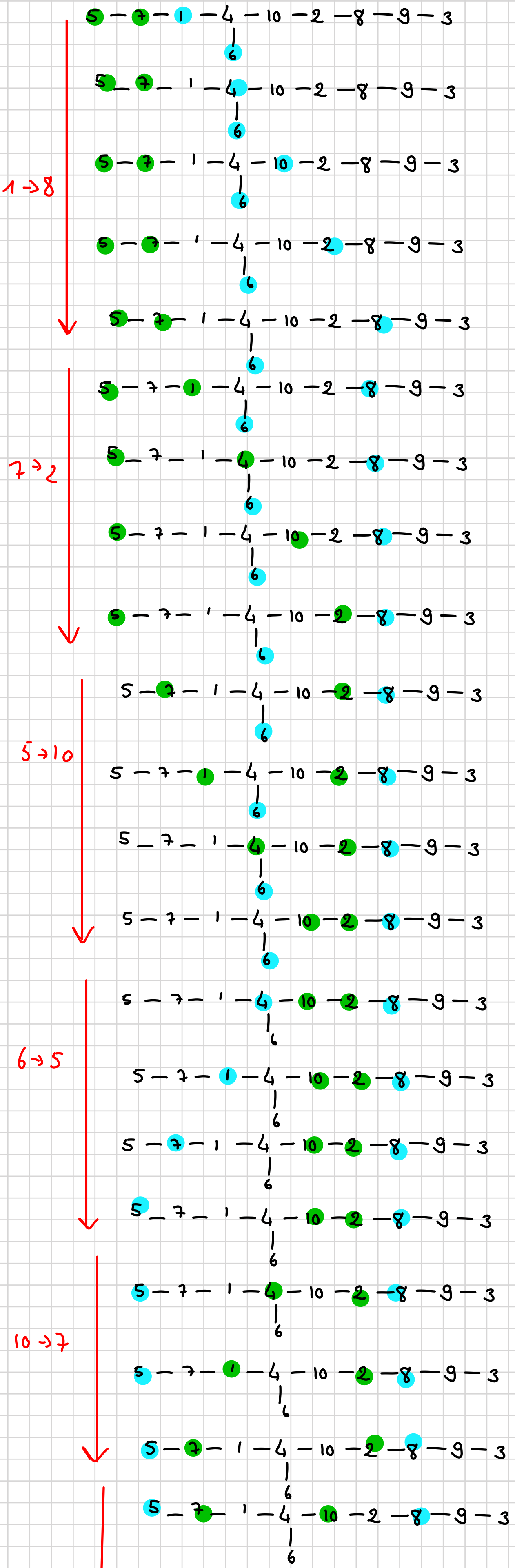


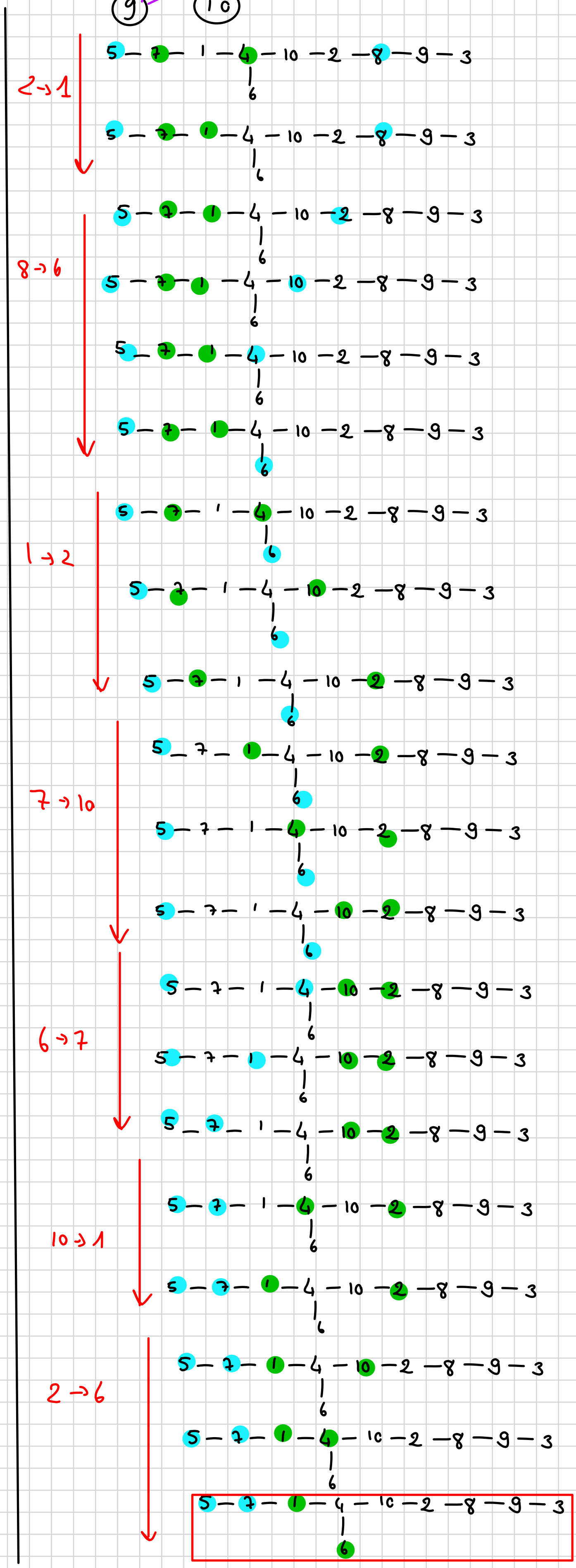
$E = \{14, 17, 28, 2\,10, 39, 46, 4\,10, 57, 89\}$



3) Oui, on peut ne pas utiliser les cases 3 et 9

2) Autrement disposé :





Exercice 6

1) On pèse 4 et 4. Si égalité, c'est la pièce restante.

Sinon on garde les 4 plus lourdes, on pèse 2 et 2 –

On garde les ⊕ lourdes et on fait une dernière pesée pour les départager.

Avec 27 pièces, il faut 4 pesées.

2) $\log(n)$ pesées nécessaires : on divise tjs par 2 le nombre de pièces.

3) a) Il faut faire des pesées de plusieurs groupes avec + billes pour trouver la pièce fautive en combinant les résultats.

b) Par exemple pour 12 pièces :

1) On fait 3 paquets : $\#1 : \{1,2,3,4\}$, $\#2 : \{5,6,7,8\}$, $\#3 : \{9,10,11,12\}$

2) On compare #1 et #2

a) Si $\#1 > \#2$: on compare $\{1,2,5\}$ et $\{3,4,6\}$

i) Si $\{1,2,5\} > \{3,4,6\}$: On compare $\{1\}$ et $\{2\}$

- Si $1 > 2 \Rightarrow$ 1 est ⊕ lourde
- Si $2 > 1 \Rightarrow$ 2 est ⊕ lourde
- Si $1 = 2 \Rightarrow$ 6 est ⊕ légère

ii) Si $\{1,2,5\} < \{3,4,6\}$: On compare $\{3\}$ et $\{4\}$.

(mêmes résultats que i), sauf que 5 serait la ⊕ légère)

iii) Si $\{1,2,5\} = \{3,4,6\}$: Alors $\{7\}$ ou $\{8\}$ est responsable.

On vérifie en une pesée en comparant $\{7\}$ et $\{1\}$ (par ex.).

b) Si $\#1 < \#2$: même chose que a) en intervertissant les paquets.

c) Si $\#1 = \#2$: la pièce recherchée est dans #3.

On compare $\{1,9\}$ et $\{10,11\}$

i) Si $\{1,9\} = \{10,11\}$: c'est 12 la fausse pièce.

On trouve en une pesée si elle est plus légère ou plus lourde

ii) Si $\{1,9\} > \{10,11\}$: soit 9 est ⊕ lourde, soit 10 ou 11 est ⊕ légère.

Même manip' que 2)a)i)

iii) Si $\{1,9\} < \{10,11\}$: soit 9 est ⊕ légère, soit 10 ou 11 est ⊕ lourde.

Même manip que 2)a)i)