Principes de fonctionnement des machines binaires

2019/2020

Pierluigi Crescenzi
Université de Paris, IRIF

- Tests et examens
  - CC : résultat des tests en TD / TP (semaine 4 et semaine 10)
  - E0 : partiel (samedi 26 octobre)
  - E1 : examen mi décembre
  - E2 : examen fin juin
- Notes finales
  - Note session 1 : 25% CC + 25% E0 + 50% E1
  - Note session 2 : max(E2, 33% CC + 67% E2)
- Rappel
  - Pas de note $\Rightarrow$ pas de moyenne $\Rightarrow$ pas de semestre
- Site web
  - `moodlesupd.script.univ-paris-diderot.fr`

- Numération et arithmétique
- Numération et arithmétique en machine
- Numérisation et codage (texte, images)
- Compression, cryptographie, contrôle d'erreur
- **Logique et calcul propositionnel**
- **Circuits numériques**

- On se focalise généralement sur les opérateurs $\vee$, $\wedge$, $\neg$
  - Toute formule logique peut s'écrire en utilisant uniquement ces opérateurs
- Un ensemble d'opérateurs est **complet** si toute formule logique peut s'écrire en utilisant uniquement ses opérateurs
  - $\{\vee, \wedge, \neg\}$ est complet
    - Forme normal disjonctive
  - $\{\wedge, \neg\}$ est complet
    - $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ (De Morgan)

- **Forme normale disjonctive** (FND)
  - Une disjonction de clauses conjonctives
  - Exemple : $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg r \wedge s)$
  - Les clauses sont appelés des **mintermes**

- **Forme normale disjonctive** (FND)
  - Une disjonction de clauses conjonctives
  - Exemple : $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg r \wedge s)$
  - Les clauses sont appelés des **mintermes**
- Il existe aussi une **forme normale conjonctive**
  - Une conjonction de disjonction
    - Exemple : $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s)$

- Construction de l'expression sous FND
  - Dans la table de vérité de l'expression considérée, ne retenir que les lignes pour lesquelles la formule a pour valeur $\top$
  - Pour chaque telle ligne, on fabrique un minterme dans lequel on fait apparaître la variable p si sa valeur est $\top$, et $\neg p$ sinon
    - Exemple

p	q	r	E	
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\Rightarrow p \wedge \neg q \wedge r$

  - Pour finir, on fait la disjonction de tous les mintermes obtenus

- Exemple

p	q	$p \oplus q$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$

  - Mintermes

- Exemple

p	q	$p \oplus q$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$

  - Mintermes
    - $\neg p \wedge q$

- Exemple

p	q	$p \oplus q$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$

  - Mintermes
    - $\neg p \wedge q$
    - $p \wedge \neg q$

- Exemple

p	q	$p \oplus q$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$

  - Mintermes
    - $\neg p \wedge q$
    - $p \wedge \neg q$
  - FND : $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

- Exemple

p	q	r	E
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$

  - Mintermes

- Exemple

p	q	r	E
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

  - Mintermes
    - $\neg p \wedge \neg q \wedge r$

- Exemple

p	q	r	E
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

  - Mintermes
    - $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
    - $\neg p \wedge q \wedge r$

- Exemple

p	q	r	E
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

  - Mintermes
    - $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
    - $\neg p \wedge q \wedge r$
    - $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

- Exemple

p	q	r	E
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

  - Mintermes
    - $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
    - $\neg p \wedge q \wedge r$
    - $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
    - $p \wedge q \wedge \neg r$

- Exemple

p	q	r	E
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

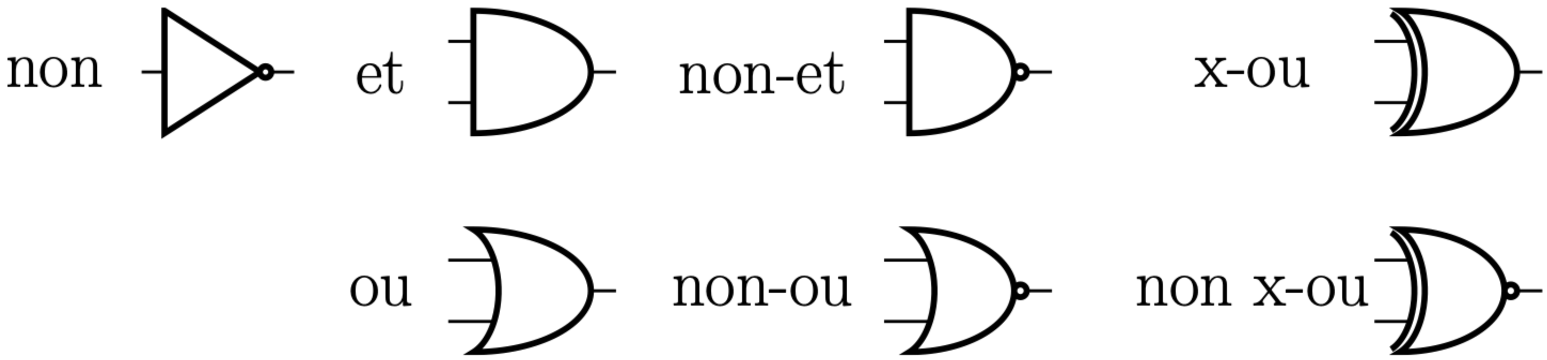
  - Mintermes
    - $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
    - $\neg p \wedge q \wedge r$
    - $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
    - $p \wedge q \wedge \neg r$
  - FND : $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

Circuits numériques

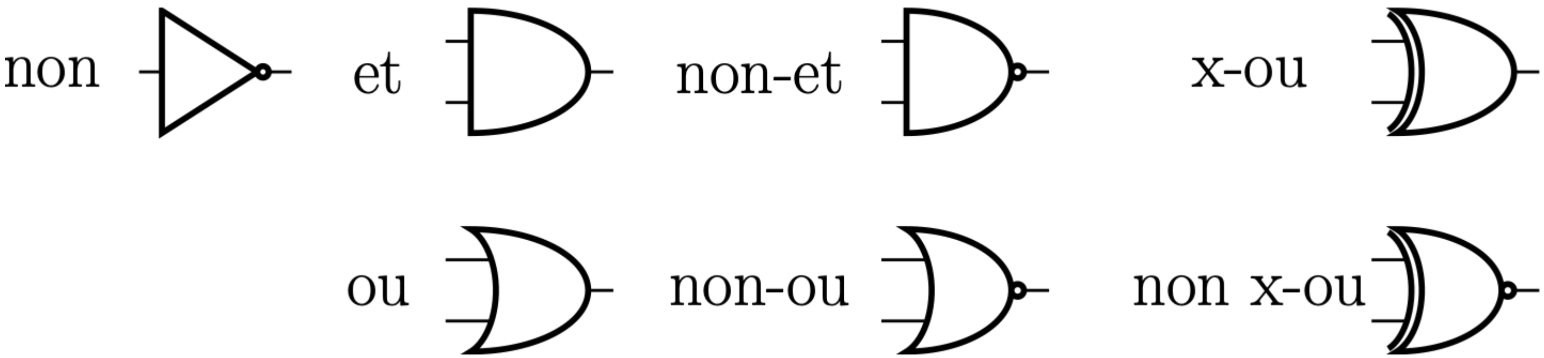
- Nous nous intéressons aux **circuits combinatoires** qui réalisent la logique booléenne dans du matériel
  - Un circuit combinatoire réalise une fonction booléenne de $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$
    - Ou un ensemble de m fonctions, $1 \leq i \leq m$, $f_i : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$
  - Les valeurs de ces fonctions ne dépendent que des valeurs courantes en entrée
    - Les circuits combinatoires ne contiennent pas de boucle
  - Les circuits combinatoires sont fabriqués en combinant des circuits élémentaires appelés **portes logiques**
    - Une porte logique réalise matériellement un connecteur logique

      Toute fonction booléenne peut être réalisée en employant uniquement des portes réalisant le $\wedge$ et le $\neg$

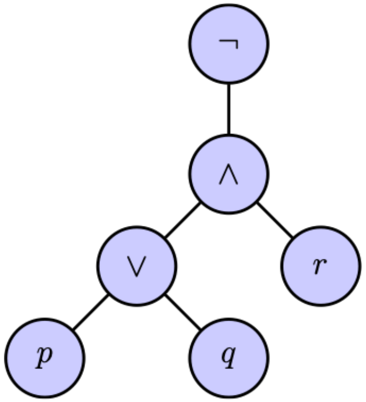
- La représentation graphique des portes logiques est normalisée



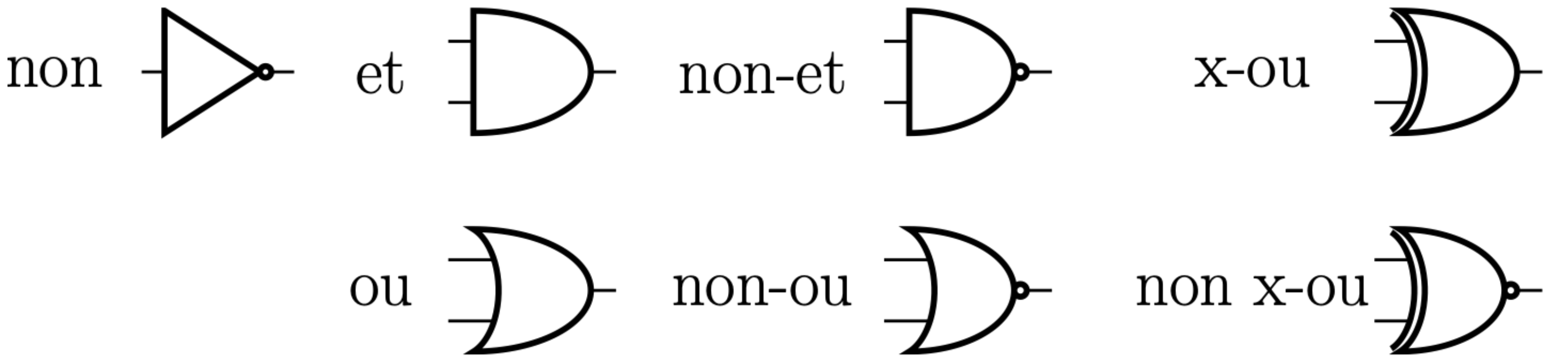
- La représentation graphique des portes logiques est normalisée



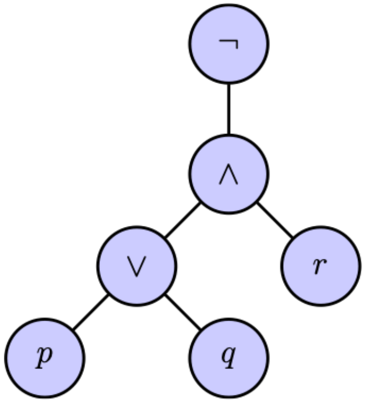
- Rappelons qu'à une formule on peut associer un arbre syntaxique



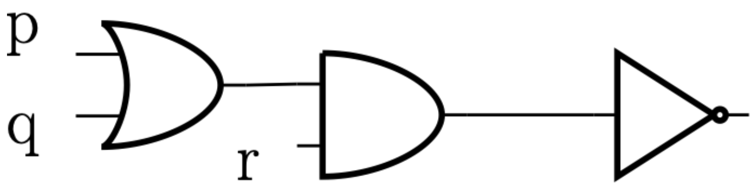
- La représentation graphique des portes logiques est normalisée



- Rappelons qu'à une formule on peut associer un arbre syntaxique

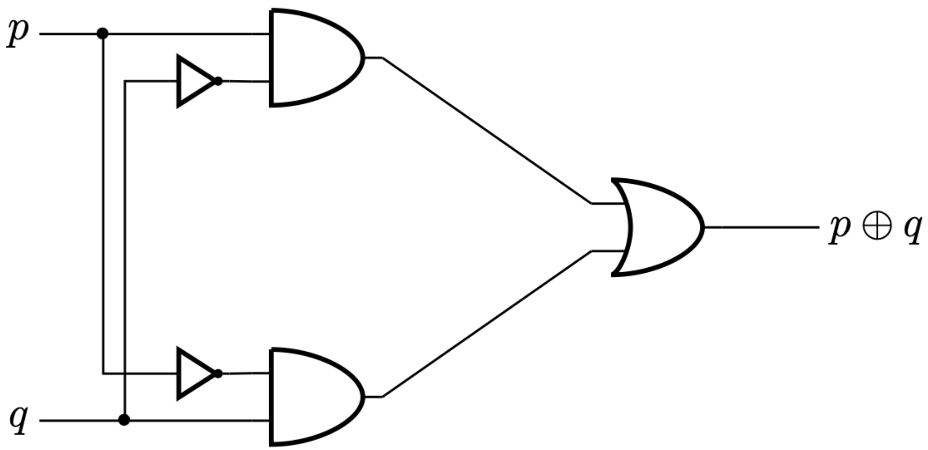


- On peut donc associer le circuit suivant

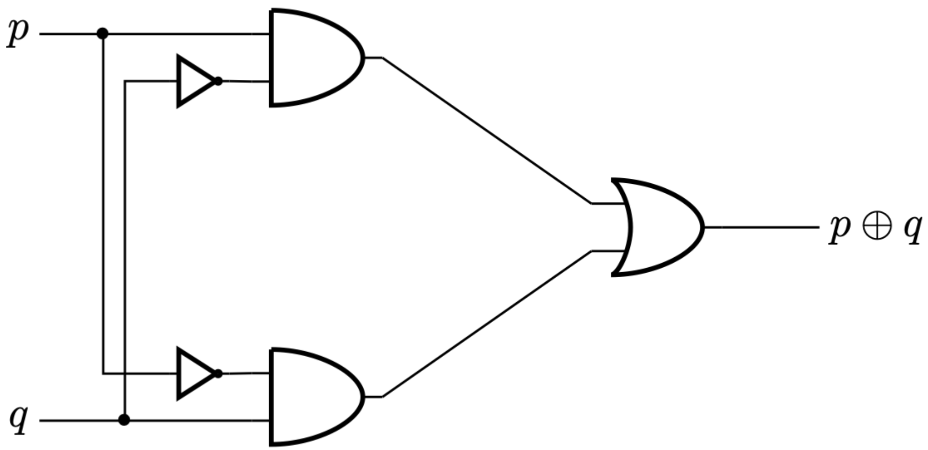


- $p \oplus q = (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$

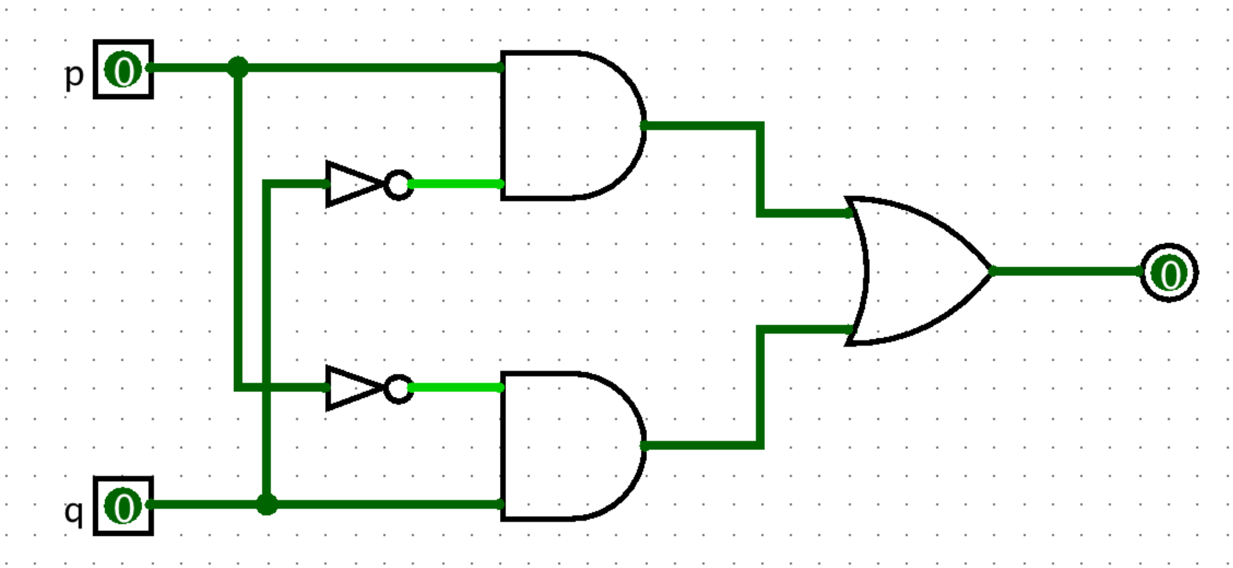
- $p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$



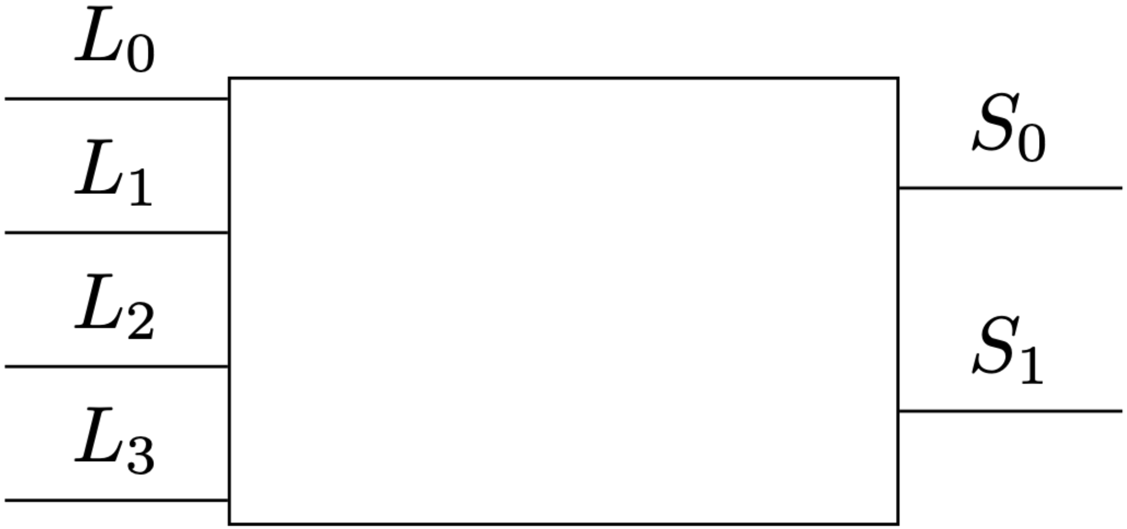
- $p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$



- Logisim



- Codeur
  - Exemple
    - Associer un numéro aux touches d'un clavier
  - Fonction $\{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$ ou $m = 2^n$



    - $S_1 S_0 = (i)_2$ si L_i est allumé (et les autres éteints)

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

- Mintermes S_0
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

- Mintermes S_0
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

- Mintermes S_0
  - $\neg L_0 \land \neg L_1 \land \neg L_2 \land L_3$
  - $\neg L_0 \land \neg L_1 \land L_2 \land \neg L_3$

- Mintermes S_1
  - $\neg L_0 \land \neg L_1 \land \neg L_2 \land L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

- Mintermes S_0
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

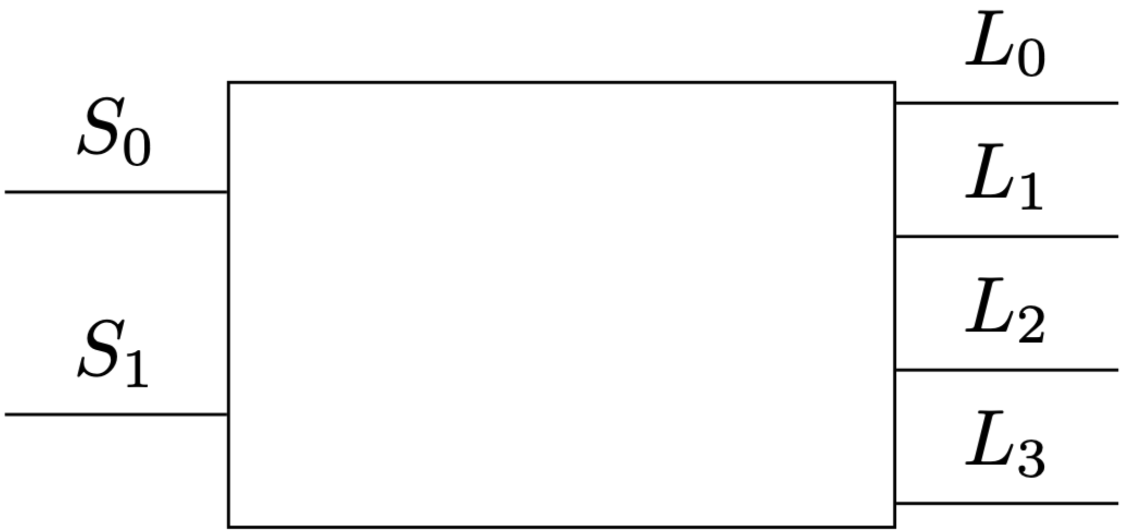
- Mintermes S_1
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
  - $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

- Mintermes S_0
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$
- Mintermes S_1
  - $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
  - $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$
- Logisim

- Decodeur
  - Exemple
    - Associer un élément à partir de son numéro
  - Fonction $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ ou $m = 2^n$



- L_i est allumé avec $S_1 S_0 = (i)_2$

- Table de vérité

S_0	S_1	L_0	L_1	L_2	L_3
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1

- Mintermes L_0
  - $\neg S_0 \wedge \neg S_1$
- Mintermes L_1
  - $S_0 \wedge \neg S_1$
- Mintermes L_2
  - $\neg S_0 \wedge S_1$
- Mintermes L_3
  - $S_0 \wedge S_1$
- Logisim