

Algorithmique (AL5)

TD n° 11 : Algorithmes d'approximation

Exercice 1 : Répartition de charge

On a m machines M_1, M_2, \dots, M_m et n tâches. Pour compléter une tâche j , on a besoin de t_j secondes. L'objectif est de distribuer les tâches de sorte que les charges de travail des machines soient équilibrés. C'est à dire, si on note $A(i)$ l'ensemble des tâches assignées à la machine M_i , sa charge totale est :

$$T_i = \sum_{j \in A(i)} t_j$$

L'objectif est alors de minimiser $\max_i T_i$. On propose l'algorithme suivant : "parcourir les tâches en assignant chaque tâche à la machine qui a la charge minimale."

1. Ecrire cet algorithme en pseudo-code. Quel est sa complexité ?
2. On suppose qu'il y a m machines et $m(m-1) + 1$ tâches. Les $m(m-1)$ premières tâches se font en 1 seconde et la dernière requiert m secondes. Quelle est la solution donnée par l'algorithme ? Quelle est la solution optimale ? Conjecturez le facteur d'approximation de l'algorithme.
3. On note T^* la valeur optimale. Montrer que $T^* \geq \frac{1}{m} \sum_j t_j$.
4. Montrer que $T^* \geq \max_j t_j$.
5. Soit M_i la machine qui à la plus grande charge à la fin de l'algorithme. On suppose que la dernière tâche qui a été assignée à M_i est j . Montrer que :

$$T_i - t_j \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n T_k$$

6. Conclure que l'algorithme est de 2-approximation.
On se propose d'améliorer le facteur d'approximation de l'algorithme. Pour cela, on observe que l'algorithme donne une mauvaise solution quand il reçoit une longue tâche à la fin. L'idée est donc de parcourir les tâches en ordre décroissant des t_j .
7. Quelle est la complexité du nouvel algorithme ?
8. Est-ce qu'il trouve la solution optimale dans l'exemple de la question 2. ?
9. Montrer que s'il y a plus de $m+1$ tâches, alors $T^* \geq 2t_{m+1}$.
10. En utilisant la question 5., motrer que le nouvel algorithme est de $\frac{3}{2}$ -approximation.