# Principes de fonctionnement des machines binaires

2019/2020

## Pierluigi Crescenzi

Université de Paris, IRIF







- Tests et examens
  - CC : résultat des tests en TD / TP (semaine 4 et semaine 10)
  - E0 : partiel (samedi 26 octobre)
  - E1 : examen mi décembre
  - E2 : examen fin juin
- Notes finales
  - Note session 1:25% CC + 25% E0 + 50% E1
  - Note session 2 : max( E2, 33% CC + 67% E2 )
- Rappel
  - Pas de note ⇒ pas de moyenne ⇒ pas de semestre
- Site web
  - moodlesupd.script.univ-paris-diderot.fr

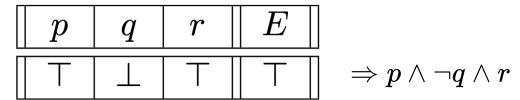
- Numération et arithmétique
- Numération et arithmétique en machine
- Numérisation et codage (texte, images)
- Compression, cryptographie, contrôle d'erreur
- Logique et calcul propositionnel
- Circuits numériques

- On se focalise généralement sur les opérateurs ∨, ∧, ¬
  - Toute formule logique peut s'écrire en utilisant uniquement ces opérateurs
- Un ensemble d'opérateurs est complet si toute formule logique peut s'écrire en utilisant uniquement ses opérateurs
  - $\{\lor,\land,\lnot\}$  est complet
    - Forme normal disjonctive
  - $\{\land, \neg\}$  est complet
    - $\circ p \lor q \Leftrightarrow \neg(\neg p \land \neg q)$  (De Morgan)

- Forme normale disjonctive (FND)
  - Une disjonction de clauses conjonctives
  - Exemple :  $(p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land \neg s) \lor (q \land \neg r \land s)$
  - Les clauses sont appelés des mintermes

- Forme normale disjonctive (FND)
  - Une disjonction de clauses conjonctives
  - Exemple :  $(p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land \neg s) \lor (q \land \neg r \land s)$
  - Les clauses sont appelés des mintermes
- Il existe aussi une forme normale conjonctive
  - Une conjonction de disjonction
    - $\circ$  Exemple :  $(p \lor \neg q \lor r) \land (p \lor q \lor \neg s) \land (q \lor \neg r \lor s)$

- Construction de l'expression sous FND
  - Dans la table de vérité de l'expression considérée, ne retenir que les lignes pour lesquelles la formule a pour valeur ⊤
  - Pour chaque telle ligne, on fabrique un minterme dans lequel on fait apparaître la variable p si sa valeur est  $\top$ , et  $\neg p$  sinon
    - Exemple



 Pour finir, on fait la disjonction de tous les mintermes obtenus

p	q	$p \oplus q$
		上
上	T	T
$\top$		T
一	丁	

p	q	$p \oplus q$
1	T	T
T		T
T	T	

$$\circ$$
  $eg p \wedge q$ 

p	q	$\mid p \oplus q \mid$
	T	T
T	T	T
T	丁	上

- $\circ$   $eg p \wedge q$
- $\circ \ p \wedge 
  eg q$

$\parallel p$	q	$oxed{p \oplus q}$
	丁	T
T		T
	T	上

Mintermes

$$\circ$$
  $eg p \wedge q$ 

$$\circ$$
  $p \wedge \neg q$ 

lacksquare FND :  $(\neg p \wedge q) \lor (p \wedge \neg q)$ 

p	q	$\mid r \mid$	$\mid E \mid$
	上		
		T	T
	T	上	
	T	一丁	T
T	丄	上	T
	$\Box$	T	
	T		T
	T	T	

p	q	$\mid r \mid$	$\mid E \mid$
	工	T	T
	T	上	上
	T	T	T
T	$\perp$	上	T
T	$\perp$	T	L
T	T	上	T
	T	T	

$$\circ \ 
eg p \wedge 
eg q \wedge r$$

$\parallel p$	q	$\mid r \mid$	$oxed{E}$
		T	T
	T	上	
上	T	T	T
T	丄	上	T
T		T	
T	T	上	T
	T	T	

$$\circ \ 
eg p \wedge 
eg q \wedge r$$

$$\circ \ 
eg p \wedge q \wedge r$$

p	q	$\mid r \mid$	$\mid E \mid$
		T	T
	T	上	
	T	T	T
一	Т		一
T	$\perp$	T	上
	T		T
	T	T	

$$\circ \ 
eg p \wedge 
eg q \wedge r$$

$$\circ$$
  $eg p \wedge q \wedge r$ 

$$\circ$$
  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ 

p	q	$\mid r \mid$	
	上		
		T	T
	T	上	
	T	T	T
T	丄	上	T
T		T	
	T		T
	T	T	

$$\circ$$
  $eg p \wedge 
eg q \wedge r$ 

$$\circ \ 
eg p \wedge q \wedge r$$

$$\circ \ p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

$$\circ \ p \wedge q \wedge 
eg r$$

p	q	$\mid r \mid$	$oxed{E}$
	上		
		T	T
	T	上	
	T	T	T
T	丄	上	T
T		T	
	T		T
T	T	T	

Mintermes

$$\circ \ 
eg p \wedge 
eg q \wedge r$$

$$\circ$$
  $eg p \wedge q \wedge r$ 

$$\circ$$
  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ 

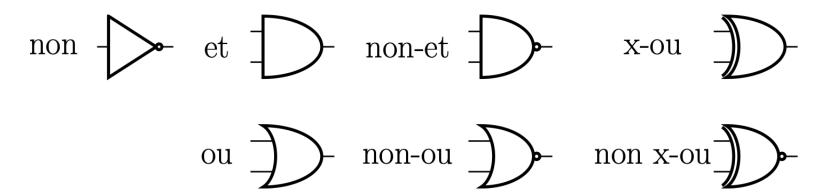
$$\circ$$
  $p \wedge q \wedge \neg r$ 

 $\blacksquare \mathsf{FND} : (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$ 

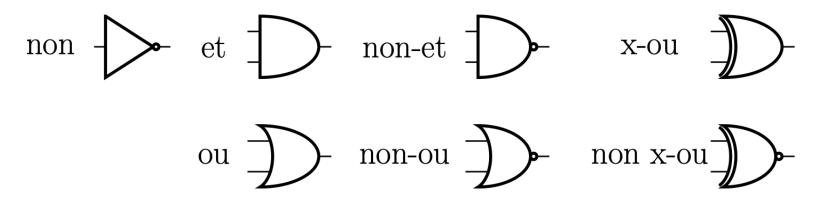
# Circuits numériques

- Nous nous intéressons aux circuits combinatoires qui réalisent la logique booléenne dans du matériel
  - Un circuit combinatoire réalise une fonction booléenne de  $f: \{0,1\}^n o \{0,1\}^m$ 
    - $\circ~$  Ou un ensemble de m fonctions,  $1 \leq i \leq m$ ,  $f_i: \{0,1\}^n o \{0,1\}$
  - Les valeurs de ces fonctions ne dépendent que des valeurs courantes en entrée
    - Les circuits combinatoires ne contiennent pas de boucle
  - Les circuits combinatoires sont fabriqués en combinant des circuits élémentaires appelés portes logiques
    - Une porte logique réalise matériellement un connecteur logique
      - Toute fonction booléenne peut être réalisée en employant uniquement des portes réalisant le ∧ et le ¬

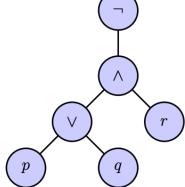
• La représentation graphique des portes logiques est normalisée



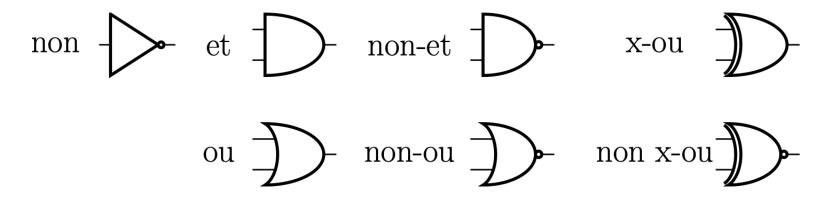
• La représentation graphique des portes logiques est normalisée



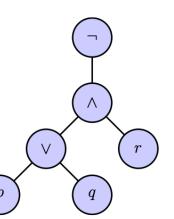
 Rappelons qu'à une formule on peut associer un arbre syntaxique



• La représentation graphique des portes logiques est normalisée



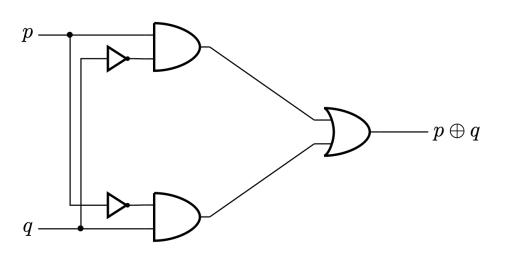
 Rappelons qu'à une formule on peut associer un arbre syntaxique



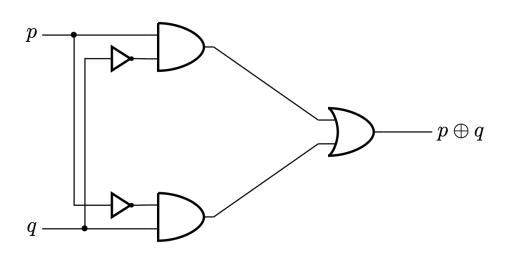
On peut donc associer le circuit suivant

$$ullet p \oplus q = (p \wedge 
eg q) ee (
eg p \wedge q)$$

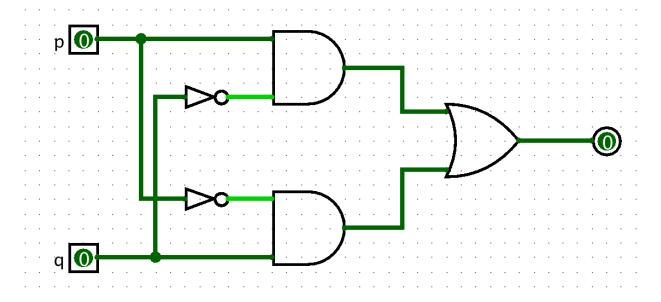
$$ullet p \oplus q = (p \wedge 
eg q) ee (
eg p \wedge q)$$



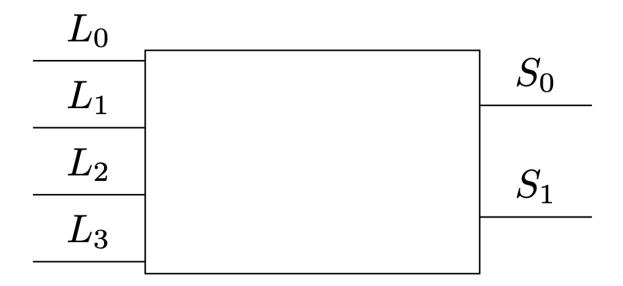
 $ullet p \oplus q = (p \wedge 
eg q) ee (
eg p \wedge q)$ 



• Logisim



- Codeur
  - Exemple
    - Associer un numéro aux touches d'un clavier
  - $lacksquare ext{Fonction } \{0,1\}^m o \{0,1\}^n ext{ ou } m=2^n$



 $\circ \ S_1S_0=(i)_2$  si  $L_i$  est allumé (et les autres éteints)

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$ S_1 $
				上	
	上		T	T	T
		T			上
		T	T		
1	T				T
	T		T		
	T	T		上	上
	T	T	T		
T	<u> </u>			上	上
T			T	上	上
	上	T		上	
		T	T		
T	T			上	
T	T		T		
T	T	T	上		上
	T	T	T		

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
	上	工			
上	工		T	丁	T
	上	T	上	一丁	
	$\dashv$	H	$\vdash$		
	<u> </u>	$\dashv$			T
	H	$\dashv$	H	上	
	H	H	4		
	H	H	H		
T	$\dashv$	$\dashv$	4		
T	$\dashv$	$\dashv$	$\vdash$		
T	$\dashv$	H	1		
T	$\dashv$	H	H		
	T	$\vdash$	1		
T	T	上	T		
T	T	T			
	T	T	T	上	上

- Mintermes  $S_0$ 
  - $\blacksquare$   $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

$\mid L_0 \mid$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
				上	
			T	T	T
	Т	T		一	上
	1	T	T	上	上
	H			上	$\vdash$
	H		T	上	1
$\parallel$	H	T			$\dashv$
	H	T	$\vdash$	上	1
T	$\dashv$				上
T	$\dashv$		$\top$		$\perp$
T	$\dashv$	T	$\perp$		$\dashv$
		T	T	上	上
T	T	上	上	上	上
	T	上	T	上	上
	T	T		上	上
T	T	T	T	上	上

$$\blacksquare \neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$$

$$lacksquare 
eg L_0 \wedge 
eg L_1 \wedge L_2 \wedge 
eg L_3$$

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
				上	
上	工	工	T	T	T
上	上	T	上	一	上
		H	T		
	T			上	T
上	T		T	上	1
	H	H	$\perp$	上	1
	H	H	$\vdash$	上	1
十一	$\dashv$	$\dashv$			
T	$\dashv$	$\dashv$	$\top$		1
	$\dashv$	H	$\perp$		1
T	上	T	T	上	1
一	H	$\dashv$			1
T	T	上	T	上	
T	T	T	上	上	
T	T	T	T		

#### • Mintermes $S_0$

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land \neg L_2 \land L_3$ 

$$lacksquare \neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$$

$$lacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$ 

$oxedsymbol{L}_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
				上	
	上		T	一	T
		T			
		T	T	上	
	T	工		上	T
	T	$\perp$	T	上	
	T	T			
	T	T	T		
T					
T			T		
T		T	上	上	
		T	T	上	
T	T			上	
	T		T		
	T	T		上	
T	T	T	T		

#### • Mintermes $S_0$

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land \neg L_2 \land L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land L_2 \land \neg L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$ 

$\parallel L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
	上	上		上	
	上		T	T	T
	1	H			
		T	T	上	
	T	上	上	上	T
	T	上	T	上	上
	T	T	上	上	上
	T	T	T	上	
T	上	上	上	上	
T		$\perp$	T	上	1
T	上	H	$\perp$	上	1
	$\dashv$	H	$\vdash$	上	1
	H	$\dashv$			
	T		T		
	T	T		上	
T	T	T	T		

#### • Mintermes $S_0$

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land \neg L_2 \land L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land L_2 \land \neg L_3$ 

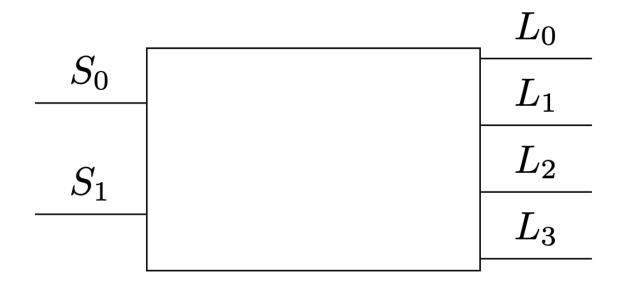
#### • Mintermes $S_1$

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$ 

Logisim

- Decodeur
  - Exemple
    - Associer un élément à partir de son numéro
  - $lacksquare ext{Fonction } \{0,1\}^n o \{0,1\}^m ext{ ou } m=2^n$



 $\circ \ L_i$  est allumé avec  $S_1S_0=(i)_2$ 

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$ S_1 $
				上	
	上		T	T	T
		T			上
		T	T		
1	T				T
	T		T		
	T	T		上	上
	T	T	T		
T	<u> </u>			上	上
T			T	上	
		T		上	
		T	T		
T	T			上	
T	T		T		
T	T	T	上		
T	T	T	T		

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
	上	工			
上	工		T	丁	T
	上	T	上	T	
	$\dashv$	H	$\vdash$		
$\parallel$	T	$\dashv$			T
	H	工	T		
	H	T	4		
	H	H	T		
	$\dashv$	$\dashv$	4		
$\vdash$		$\dashv$	H	上	
$\Box$	$\dashv$	T	1		
T		T	T		
T	T	上	上	上	
T	T	上	T		
	T	T			
T	T	T	T	上	

- Mintermes  $S_0$ 
  - $\blacksquare$   $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
	Т	上		上	
上			T	T	T
	Н	T		一	上
1	ㅓ	T	T	上	
	<del> </del>				<u> </u>
	<del> </del>		$\top$		上
	<u> </u>	T			上
<u> </u>	H	T	T		
一	$\dashv$				上
	$\dashv$		$\top$		
	1	T		上	上
		T	T		上
T	T				
T	T		T		上
T	T	T			上
T	T	T	T		

$$\blacksquare \neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$$

$$lacksquare 
eg L_0 \wedge 
eg L_1 \wedge L_2 \wedge 
eg L_3$$

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
				上	
上	工	工	T	T	T
上	上	T	上	一	上
		H	T		
	T		$\perp$	上	T
上	T		T	上	1
	H	H	$\perp$	上	1
	H	H	$\vdash$	上	1
十一	$\dashv$	$\dashv$			
T	$\dashv$	$\dashv$	$\top$		1
	$\dashv$	H	$\perp$		1
T	上	T	T	上	1
T	H	$\dashv$			1
T	T	上	T	上	
T	T	T	上	上	
T	T	T	T		

• Mintermes  $S_0$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$ 

$$lacksquare \neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$$

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$ 

$\mid L_0 \mid$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
				上	
			T	T	T
		T	上	一	
		T	T	上	
	T	工		上	T
	Τ	<u> </u>	T	上	4
	H	H			$\dashv$
	H	H	$\top$		$\perp$
T	$\dashv$	$\dashv$			$\perp$
	$\dashv$	$\dashv$	$\top$		$\dashv$
$\parallel$		H	$\perp$		$\dashv$
$\parallel$	$\dashv$	H	$\vdash$	上	$\dashv$
	T			上	
T	T	上	T	上	
T	T	T	上	上	
	Т	Т	T		

#### • Mintermes $S_0$

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land \neg L_2 \land L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land L_2 \land \neg L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$ 

$\mid L_0 \mid$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$S_0$	$S_1$
				上	
	上		T	T	T
上	上	T	上	一	
1		T	T	上	
	T	上	上	上	T
	T	上	T	上	上
上	T	T	上	上	上
	T	T	T	上	
T	上	上	上		
T	上	上	T	上	上
H	上	T	上	上	
$\vdash$	上	T	T	上	上
T	T	上	上	上	上
T	T	上	T	上	上
T	Т	T	上	上	
T	T	T	T	上	上

#### • Mintermes $S_0$

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land \neg L_2 \land L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \land \neg L_1 \land L_2 \land \neg L_3$ 

#### • Mintermes $S_1$

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$ 

$$\blacksquare$$
  $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$ 

Logisim