LA3 examen de session 2, 12/06/2019

Exercice 1 Nous allons d'abord trouver un automate pour L_1 grâce à l'algorithme de Glushkov, puis construire un automate pour ${}^cL_1$ en déterminisant et complémentant l'automate précédent. Il suffira ensuite de le minimiser avec l'algorithme de Moore.

1. AFND $\mathcal{A}$ pour L_1 via Glushkov. On linéarise l'e.r. : $(x_1x_2+x_3x_4)^*$.

Table des successeurs :

$\leftarrow 0$	1, 3
1	2
$\leftarrow 2$	1, 3
3	4
$\leftarrow 4$	1, 3

Table de transition de $\mathcal{A}$:

	a	b
$\rightleftarrows 0$	/	1,3
1	/	2
$\leftarrow 2$	/	1,3
3	4	/
$\leftarrow 4$	/	1,3

2. Déterminisation de $\mathcal{A}$:

	a	b
$\rightleftarrows 0$		$\{1,3\}$
$\{1,3\}$	4	2
$\leftarrow 2$		$\{1,3\}$
$\leftarrow 4$		$\{1,3\}$

On complète et on renomme les états puis on inverse les états terminaux : on obtient $\mathcal{A}'$ pour ${}^cL_1$.

	a	b
$\rightarrow 0$	p	1
$\leftarrow 1$	3	2
2	p	1
3	p	1
$\leftarrow p$	p	p

3. Minimisation de $\mathcal{A}'$ via Moore :

- classes pour $\equiv_0$: $\{0,2,3\}$ et $\{1,p\}$.

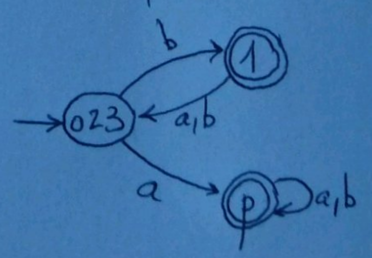
  a sépare 1 de p

- classes pour $\equiv_1$: $\{0,2,3\}$ et $\{1\}$ et $\{p\}$.

  on ne peut plus séparer.

On obtient l'automate déterministe complet minimal suivant pour ${}^cL_1$:

	a	b
$\rightarrow 023$	p	1
$\leftarrow 1$	023	023
$\leftarrow p$	p	p

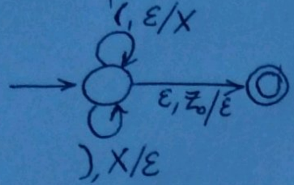


Exercice 2

1. La grammaire suit la définition des mots bien parenthésés :

$$S \rightarrow \varepsilon \mid (S) \mid SS$$

2. On empile la lettre X quand on lit une parenthèse ouvrante. Pour pouvoir lire une parenthèse fermante, il faut qu'il y ait la parenthèse ouvrante correspondante, c'est-à-dire X sur la pile. On obtient l'automate à pile suivant, avec reconnaissance par état final.



Exercice 3

L_3 n'est pas reconnaissable. Preuve par l'absurde grâce au lemme de l'étoile.

Si L_3 était reconnaissable, soit N la constante donnée par le lemme et $u = a^{N^2} b a^N \in L_3$.

$|u| \geq N$ donc $\exists x, y, z$ tq $\begin{cases} u = xyz \\ y \neq \varepsilon \\ |xy| \leq N \end{cases}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $xy^kz \in L_3$.

Puisque $|xy| \leq N$, y est dans la partie a^{N^2} de u. Ainsi, $xy^0z = a^{N^2-|y|} b a^N$ donc $xy^0z \notin L_3$ car $N^2 - |y| < N^2$. Contradiction, donc L_3 n'est pas reconnaissable.

Exercice 4

1. Pour $L = \{\varepsilon\}$, on a $f(L) = \{\varepsilon\}$ donc rationnel.
2. Pour $L = a^*b$, on a $f(L) = \{a^n b b a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin Rat$.

Exercice 5

1. G_q est reconnu par l'automate A où l'état final est q, D_q par A avec état initial q, et $M_{q,q'}$ par A où l'état initial est q et l'état final q'.

2. $u \in G_q \cap M_{q,q'} \cap D_{q'}$ ssi $\delta^*(q_0, u) = q$ et $\delta^*(q, u) = q'$ et $\delta^*(q', u) \in F$, ce qui signifie qu'en lisant uuu à partir de q_0 on arrive dans un état final en passant par q et q'.

3. Par ce qui précède, on a donc $L^{1/3} = \bigcup_{q, q' \in Q} (G_q \cap M_{q,q'} \cap D_{q'})$.

4. On en déduit que $L^{1/3}$ est reconnaissable car c'est une union finie d'intersections finies de langages reconnaissables (et Rec est clos par $\cup$ et $\cap$).