Université de Paris – UFR d'Informatique
L2 Informatique et Math-Info

Automates et analyse lexicale
Année 2020-2021

TD n°2

Expressions Rationnelles et Automates

Les exercices marqués (∗) sont optionnels

Expressions Rationnelles

Exercice 1 *Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. Donner des expressions rationnelles décrivant les langages ci-dessous :*

$L_1 = \{u \in \Sigma^* :$ *toute occurrence de b est immédiatement suivie de deux occurrences de a*$\}$,
$L_2 = \{u \in \Sigma^* :$ *le nombre d'occurrences de a dans u est multiple de 3*$\}$,
(∗) $L_3 = \{u \in \Sigma^* :$ *le nombre d'occurrences de a dans u est congru à* 3 *modulo 4*$\}$,
(∗) $L_4 = \{u \in \Sigma^* :$ *les blocs de a dans u sont alternativement de longueur paire et impaire*$\}$ *et le premier bloc de a, s'il existe, est de longueur paire, le dernier aussi.*

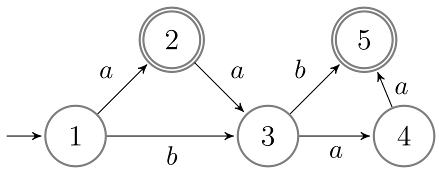
Exercice 2 *Dans la suite, a et b désignent des lettres.*

1. *Simplifier les expressions rationnelles suivantes :*
   (a) $(aa)^*a + (aa)^*$;
   (b) $(a + \varepsilon)a^*b$;
   (c) $(a + \varepsilon)(\varepsilon + aa)^+a$.
2. (∗) *Montrer les égalités suivantes :*
   (a) $(a^2 + a^3)^* = (a^2a^*)^*$;
   (b) $a^*(a + b)^* = (a + ba^*)^*$;
   (c) $(ba)^+(a^*b^* + a^*) = (ba)^*ba^+b^*$.

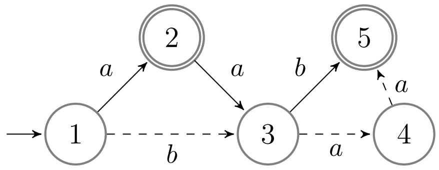
Initiation informelle aux automates

Une autre façon de désigner un langage est de dessiner un automate. Nous allons introduire cette notion de manière informelle, elle sera reprise en cours ensuite.
Voici à quoi ressemble un automate.

$\mathcal{A}$:



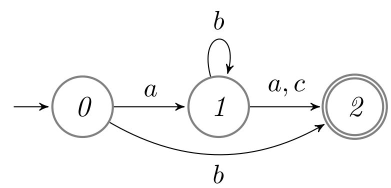
Vocabulaire : Les ronds seront appelés *états*, les flèches *transitions* et les lettres associées aux flèches sont appelées *étiquettes.* Les états avec une petite flèche qui pointe dessus sont les *états initiaux*, ici l'état 1 est initial. Ceux avec un double rond sont les *états finaux*, ici 2 et 5.
Pour savoir si un mot est `reconnu` par un automate, on cherche si on peut lire ce mot en commençant par un état initial, et en prenant à chaque fois une transition qui permet de lire la prochaine lettre et si on aboutit à un état final. Par exemple, *baa* se lit sur le chemin donné par les transitions en pointillé. On pourra noter le chemin $1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{a} 5$, et 5 est bien un état final donc le mot est reconnu.
Le `langage reconnu` par un automate donnée est l'ensemble des mots reconnus par cet automate.



Si un tel chemin n'existe pas, le mot n'est pas reconnu.
Par exemple le mot *aa* peut se lire, mais on aboutit sur l'état 3 qui n'est pas final. Le mot *bbb* lui ne peut même pas se lire sur l'automate.

Exercice 3 *1. quels sont les mots que l'on peut reconnaître sur l'automate $\mathcal{A}$? Déduisez-en le langage reconnu.*

2. Faites de même avec l'automate $\mathcal{B}$ ci-dessous (donnez une expression rationnelle correspondante).



Vocabulaire (suite) : Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont dit *déterministes* car, il y a un seul état initial et, depuis un état donné, il y a au plus une transition possible pour une même lettre. Dans le cas contraire ils sont dit *non-déterministes* (voir plus bas)

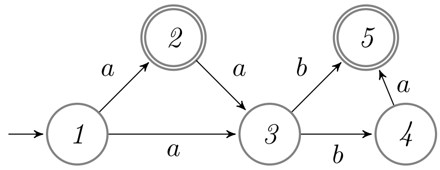
Exercice 4 (Dessinez des automates déterministes) *1. Dessinez un automate déterministe qui reconnaît le langage $\{car, bar, or\}$. Essayer de faire en sorte qu'il ait le moins d'états possibles.*

2. Dessinez un automate déterministe qui reconnaît le langage donné par l'expression $a^*(a+b)c^*$

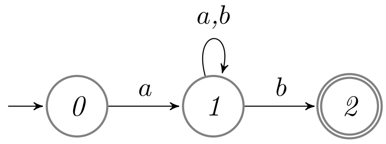
3. $(*)$ Dessinez un automate déterministe qui reconnaît le langage des mots de longueurs pairs sur l'alphabet $\{a\}$.

Exercice 5 ($(*)$ Automates non-déterministes) *Quand on a des automates non-déterministes, un mot peut être lu de plusieurs manières différentes dans le même automate. Il est reconnu dès qu'un des chemins finit par un état fini, même si d'autres chemins aboutissent à d'autres états. Soient les deux automates :*

$\mathcal{C}_1$:



$\mathcal{C}_2$:



1. *Les mots aab, abbb, abab et aba sont-ils reconnus par l'automate* $\mathcal{C}_1$ *? Sont-ils reconnus par l'automate* $\mathcal{C}_2$ *?*
2. *Décrire les langages reconnus par ces automates par une expression rationnelle.*