

# Principes de fonctionnement des machines binaires

2019/2020

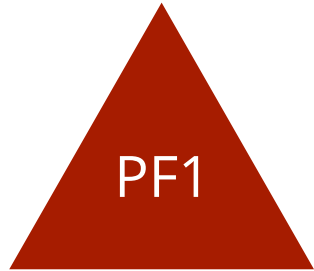
**Pierluigi Crescenzi**

Université de Paris, IRIF

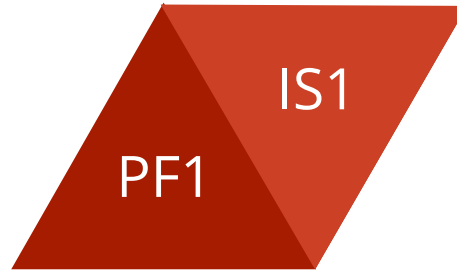


# Introduction

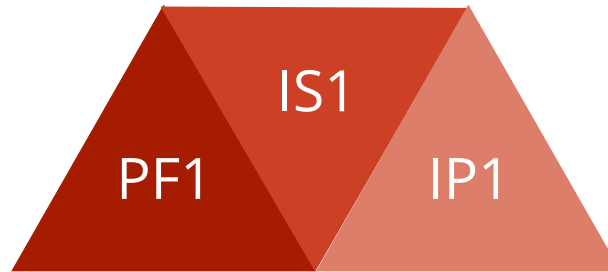




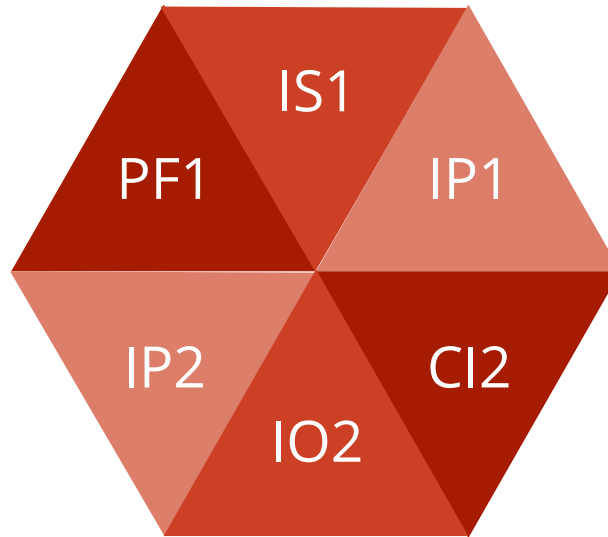
Comprendre un certain nombre des principes généraux du traitement de données par des machines binaires



Connaissance des fonctions d'un système d'exploitation et savoir utiliser efficacement un système Unix



Savoir écrire un programme simple dans un langage de programmation de haut niveau



Comprendre et maîtriser un certain nombre de mécanismes et concepts fondamentaux propres aux traitements informatiques








Acquérir la maîtrise d'outils permettant la mise en place d'un site Web interagissant avec une base de données

Apprendre à manipuler des structures récursives








- Numération et arithmétique
- Numération et arithmétique en machine
- Numérisation et codage (texte, images)
- Compression, cryptographie, contrôle d'erreur
- Logique et calcul propositionnel
- Circuits numériques

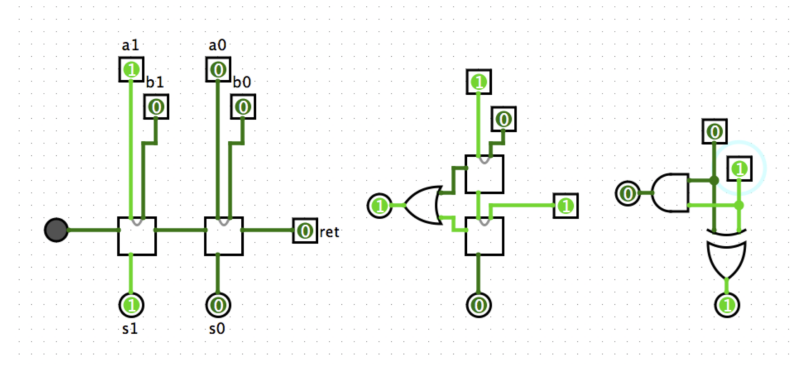
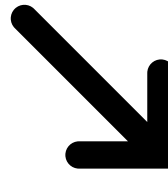


- Numération et arithmétique
- Numération et arithmétique en machine
- Numérisation et codage (texte, images)
- Compression, cryptographie, contrôle d'erreur
- Logique et calcul propositionnel
- Circuits numériques








|  |   |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1000000  | 100000  | 10000   | 1000  | 100   | 10  | 1   |

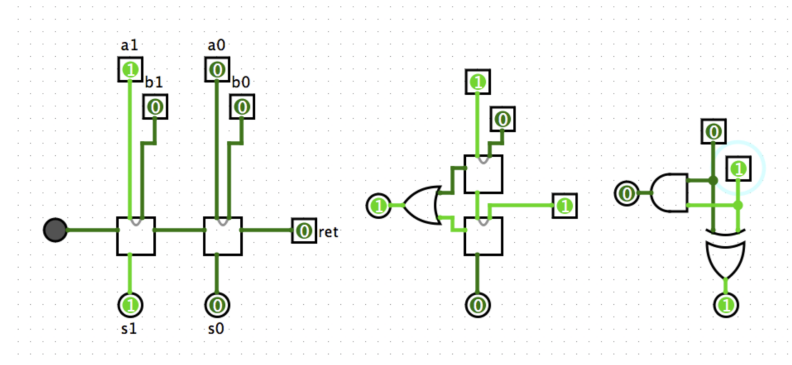
- Numération et arithmétique
- Numération et arithmétique en machine
- Numérisation et codage (texte, images)
- Compression, cryptographie, contrôle d'erreur
- Logique et calcul propositionnel
- Circuits numériques

|  |   |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1000000  | 100000  | 10000   | 1000  | 100   | 10  | 1   |



- Numération et arithmétique
- Numération et arithmétique en machine
- Numérisation et codage (texte, images)
- Compression, cryptographie, contrôle d'erreur
- Logique et calcul propositionnel
- Circuits numériques

|  |   |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1000000  | 100000  | 10000   | 1000  | 100   | 10  | 1   |










- Site web
  - [moodlesupd.script.univ-paris-diderot.fr](http://moodlesupd.script.univ-paris-diderot.fr)

# Numération






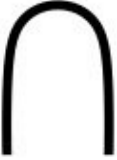

- **Numération égyptienne**

- 5000 ans environ
- Numération additive
- Sept hiéroglyphes

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1000000   | 100000  | 10000   | 1000  | 100   | 10  | 1   |

- **Numération égyptienne**

- 5000 ans environ
- Numération additive
- Sept hiéroglyphes






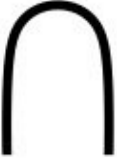

|   |   |   |  |   |   |   |
|---|---|---|--|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1000000   | 100000  | 10000   | 1000   | 100   | 10  | 1   |

- Exemple



- **Numération égyptienne**

- 5000 ans environ
- Numération additive
- Sept hiéroglyphes

|   |   |   |  |   |   |   |
|---|---|---|--|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1000000   | 100000  | 10000   | 1000   | 100   | 10  | 1   |

- Exemple



○  $1000 + 1000 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2019$

## • Numération babylonienne

- 4000 ans environ
- Numération positionnelle sexagésimale (base 60)
- 59 *chiffres* basés eux sur un système additif décimal

|             |               |               |                |                 |                  |
|-------------|---------------|---------------|----------------|-----------------|------------------|
| 𐎶 1         | 𐎵𐎶 11         | 𐎶𐎵𐎶 21        | 𐎶𐎶𐎶 31         | 𐎶𐎶𐎶𐎶 41         | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 51         |
| 𐎶𐎶 2        | 𐎵𐎶𐎶 12        | 𐎶𐎶𐎶 22        | 𐎶𐎶𐎶𐎶 32        | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 42        | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 52        |
| 𐎶𐎶𐎶 3       | 𐎵𐎶𐎶𐎶 13       | 𐎶𐎶𐎶𐎶 23       | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 33       | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 43       | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 53       |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶 4      | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 14      | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 24      | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 34      | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 44      | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 54      |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5     | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 15     | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 25     | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 35     | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 45     | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 55     |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6    | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 16    | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 26    | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 36    | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 46    | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 56    |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7   | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 17   | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 27   | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 37   | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 47   | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 57   |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8  | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 18  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 28  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 38  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 48  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 58  |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9 | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 19 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 29 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 39 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 49 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 59 |
| 𐎶𐎶𐎶 10      | 𐎵𐎶𐎶𐎶 20       | 𐎶𐎶𐎶𐎶 30       | 𐎶𐎶𐎶𐎶 40        | 𐎶𐎶𐎶𐎶 50         |                  |



## • Numération babylonienne

- 4000 ans environ
- Numération positionnelle sexagésimale (base 60)
- 59 *chiffres* basés eux sur un système additif décimal

|             |               |                |                |                 |                  |
|-------------|---------------|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| 𐎶 1         | 𐎵𐎶 11         | 𐎶𐎵𐎶 21         | 𐎶𐎶𐎶 31         | 𐎶𐎶𐎶𐎶 41         | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 51         |
| 𐎶𐎶 2        | 𐎵𐎶𐎶 12        | 𐎶𐎵𐎶𐎶 22        | 𐎶𐎶𐎶𐎶 32        | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 42        | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 52        |
| 𐎶𐎶𐎶 3       | 𐎵𐎶𐎶𐎶 13       | 𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶 23       | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 33       | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 43       | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 53       |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶 4      | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 14      | 𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 24      | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 34      | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 44      | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 54      |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5     | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 15     | 𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 25     | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 35     | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 45     | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 55     |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6    | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 16    | 𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 26    | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 36    | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 46    | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 56    |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7   | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 17   | 𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 27   | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 37   | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 47   | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 57   |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8  | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 18  | 𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 28  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 38  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 48  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 58  |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9 | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 19 | 𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 29 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 39 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 49 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 59 |
| 𐎵 10        | 𐎵𐎵 20         | 𐎵𐎵𐎵 30         | 𐎵𐎵𐎵𐎵 40        | 𐎵𐎵𐎵𐎵𐎵 50        |                  |

- Exemple



## • Numération babylonienne

- 4000 ans environ
- Numération positionnelle sexagésimale (base 60)
- 59 *chiffres* basés eux sur un système additif décimal

|               |                |                 |                  |                   |                  |
|---------------|----------------|-----------------|------------------|-------------------|------------------|
| 𐎶 1           | 𐎵𐎶 11          | 𐎵𐎵𐎶 21          | 𐎵𐎵𐎵𐎶 31          | 𐎵𐎵𐎶𐎶 41           | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶 51         |
| 𐎶𐎶 2          | 𐎵𐎶𐎶 12         | 𐎵𐎵𐎶𐎶 22         | 𐎵𐎵𐎶𐎶 32          | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶 42          | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 52        |
| 𐎶𐎶𐎶 3         | 𐎵𐎶𐎶𐎶 13        | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶 23        | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶 33         | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 43         | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 53       |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶 4        | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 14       | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 24       | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 34        | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 44        | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 54      |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5       | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 15      | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 25      | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 35       | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 45       | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 55     |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6      | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 16     | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 26     | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 36      | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 46      | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 56    |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7     | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 17    | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 27    | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 37     | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 47     | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 57   |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8    | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 18   | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 28   | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 38    | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 48    | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 58  |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9   | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 19  | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 29  | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 39   | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 49   | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 59 |
| 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 10 | 𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 20 | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 30 | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 40 | 𐎵𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 50 |                  |

### ■ Exemple



$$\circ \quad 40 \times 60^0 + 46 \times 60^1 + 57 \times 60^2 + 1 \times 60^3 = 424000$$

- **Numération romaine**

- 2800 ans environ
- Numération additive et partiellement soustractive
- Combinaison de 7 *chiffres romains*

|      |     |     |    |    |   |   |
|------|-----|-----|----|----|---|---|
| M    | D   | C   | L  | X  | V | I |
| 1000 | 500 | 100 | 50 | 10 | 5 | 1 |

- **Numération romaine**

- 2800 ans environ
- Numération additive et partiellement soustractive
- Combinaison de 7 *chiffres romains*

|      |     |     |    |    |   |   |
|------|-----|-----|----|----|---|---|
| M    | D   | C   | L  | X  | V | I |
| 1000 | 500 | 100 | 50 | 10 | 5 | 1 |

- Exemple

MMXIX

- **Numération romaine**

- 2800 ans environ
- Numération additive et partiellement soustractive
- Combinaison de 7 *chiffres romains*

|      |     |     |    |    |   |   |
|------|-----|-----|----|----|---|---|
| M    | D   | C   | L  | X  | V | I |
| 1000 | 500 | 100 | 50 | 10 | 5 | 1 |



















- Exemple

MMXIX

- $1000 + 1000 + 10 + (10 - 1) = 2019$

## • Numération chinoise à bâtons

- 2300 ans environ
- Numération positionnelle décimale
- Deux séries de 9 *chiffres bâtons*

| 1   | 2   | 3   | 4   | 5  | 6   | 7   | 8   | 9   |
|---|---|---|---|--|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Positions paires : puissances paires de 10  |   |   |   |  |   |   |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Positions impaires : puissances impaires de 10                                    |   |   |   |  |   |   |   |   |

## • Numération chinoise à bâtons

- 2300 ans environ
- Numération positionnelle décimale
- Deux séries de 9 *chiffres bâtons*

| 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Positions paires : puissances paires de 10     |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Positions impaires : puissances impaires de 10 |   |   |   |   |   |   |   |   |

- Exemple



## • Numération chinoise à bâtons

- 2300 ans environ
- Numération positionnelle décimale
- Deux séries de 9 *chiffres bâtons*

| 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Positions paires : puissances paires de 10     |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Positions impaires : puissances impaires de 10 |   |   |   |   |   |   |   |   |

- Exemple

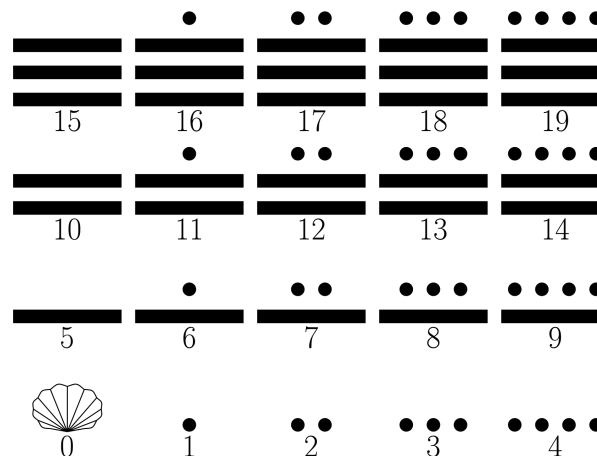


$$\circ \quad 3 \times 10^0 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^3 + 8 \times 10^4 = 81753$$



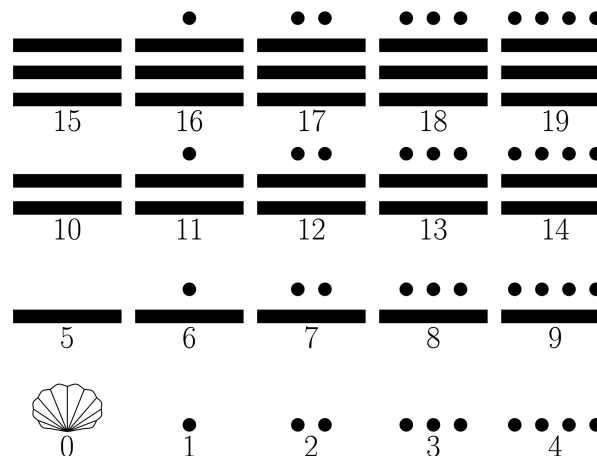
## • Numération maya

- 2300 ans environ
- Numération positionnelle vigécimale (base 20)
- 20 *chiffres* basés eux sur un système additif quinaire (base 5)
  - chiffre zéro



## • Numération maya

- 2300 ans environ
- Numération positionnelle vigécimale (base 20)
- 20 *chiffres* basés eux sur un système additif quinaire (base 5)
  - chiffre zéro

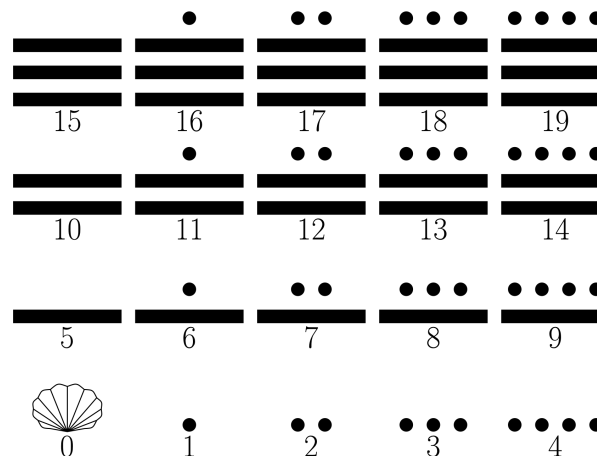


### ■ Exemple

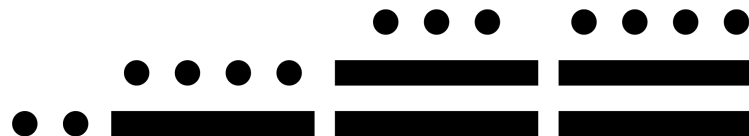


## • Numération maya

- 2300 ans environ
- Numération positionnelle vigécimale (base 20)
- 20 *chiffres* basés eux sur un système additif quinaire (base 5)
  - chiffre zéro



### ■ Exemple



$$○ 14 \times 20^0 + 13 \times 20^1 + 9 \times 20^2 + 2 \times 20^3 = 19874$$

- **Numération positionnelle décimale**

- 10 *chiffres*, disons  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$  représente le nombre  $\sum_{k=0}^p a_k 10^k$ , soit
$$a_p \times 10^p + a_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$

- **Numération positionnelle décimale**

- 10 *chiffres*, disons  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$  représente le nombre  $\sum_{k=0}^p a_k 10^k$ , soit
$$a_p \times 10^p + a_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
- Exemple :  $(2019)_{10}$ 
  - $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10 + 9 = 2000 + 0 + 10 + 9 = 2019$

- **Numération positionnelle décimale**

- 10 *chiffres*, disons  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$  représente le nombre  $\sum_{k=0}^p a_k 10^k$ , soit
$$a_p \times 10^p + a_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
- Exemple :  $(2019)_{10}$ 
  - $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10 + 9 = 2000 + 0 + 10 + 9 = 2019$

- **Numération positionnelle en base  $b > 1$**

- Exactement  $b$  *chiffres*, disons  $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$
- $(a_p \cdots a_0)_b$  représente le nombre  $\sum_{k=0}^p a_k b^k$ , soit
$$a_p \times b^p + a_{p-1} \times b^{p-1} + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0$$

- **Numération positionnelle décimale**

- 10 *chiffres*, disons  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$  représente le nombre  $\sum_{k=0}^p a_k 10^k$ , soit
$$a_p \times 10^p + a_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
- Exemple :  $(2019)_{10}$ 
  - $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10 + 9 = 2000 + 0 + 10 + 9 = 2019$

- **Numération positionnelle en base  $b > 1$**

- Exactement  $b$  *chiffres*, disons  $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$
- $(a_p \cdots a_0)_b$  représente le nombre  $\sum_{k=0}^p a_k b^k$ , soit
$$a_p \times b^p + a_{p-1} \times b^{p-1} + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0$$
- Exemple :  $(3743)_8$

- **Numération positionnelle décimale**

- 10 *chiffres*, disons  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$  représente le nombre  $\sum_{k=0}^p a_k 10^k$ , soit
$$a_p \times 10^p + a_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
- Exemple :  $(2019)_{10}$ 
  - $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10 + 9 = 2000 + 0 + 10 + 9 = 2019$

- **Numération positionnelle en base  $b > 1$**

- Exactement  $b$  *chiffres*, disons  $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$
- $(a_p \cdots a_0)_b$  représente le nombre  $\sum_{k=0}^p a_k b^k$ , soit
$$a_p \times b^p + a_{p-1} \times b^{p-1} + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0$$
- Exemple :  $(3743)_8$ 
  - $3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 = 1536 + 448 + 32 + 3 = 2019$



- Pour quelles valeurs de  $b$  l'expression suivante est-elle vraie ?

$$(23)_b + (15)_b = (42)_b$$

- Pour quelles valeurs de  $b$  l'expression suivante est-elle vraie ?

$$(23)_b + (15)_b = (42)_b$$

- $(2 \times b + 3) + (1 \times b + 5) = 4 \times b + 2$

- Pour quelles valeurs de  $b$  l'expression suivante est-elle vraie ?

$$(23)_b + (15)_b = (42)_b$$

- $(2 \times b + 3) + (1 \times b + 5) = 4 \times b + 2$

- $2b + 3 + b + 5 = 4b + 2$

- Pour quelles valeurs de  $b$  l'expression suivante est-elle vraie ?

$$(23)_b + (15)_b = (42)_b$$

- $(2 \times b + 3) + (1 \times b + 5) = 4 \times b + 2$
- $2b + 3 + b + 5 = 4b + 2$
- $3 + 5 - 2 = 4b - 2b - b$

- Pour quelles valeurs de  $b$  l'expression suivante est-elle vraie ?

$$(23)_b + (15)_b = (42)_b$$

- $(2 \times b + 3) + (1 \times b + 5) = 4 \times b + 2$
- $2b + 3 + b + 5 = 4b + 2$
- $3 + 5 - 2 = 4b - 2b - b$
- $6 = b$

- Pour quelles valeurs de  $b$  l'expression suivante est-elle vraie ?

$$(23)_b + (15)_b = (42)_b$$

- $(2 \times b + 3) + (1 \times b + 5) = 4 \times b + 2$
  - $2b + 3 + b + 5 = 4b + 2$
  - $3 + 5 - 2 = 4b - 2b - b$
  - $6 = b$
- 
- $(23)_6$  représente  $2 \times 6 + 3 = 12 + 3 = 15$
  - $(15)_6$  représente  $1 \times 6 + 5 = 6 + 5 = 11$
  - $(42)_6$  représente  $4 \times 6 + 2 = 24 + 2 = 26$
  - $15 + 11 = 26$

- Comment convertir une écriture en base  $b$   $(a_p \cdots a_0)_b$   
vers une écriture en base  $d$   $(c_q \cdots c_0)_d$  ?

- Comment convertir une écriture en base  $b$   $(a_p \cdots a_0)_b$   
vers une écriture en base  $d$   $(c_q \cdots c_0)_d$  ?
- **Méthode par encadrements successifs** (plutôt naïve)
  - On encadre le nombre  $n$  entre deux facteurs successifs
$$c_k d^k \leq n < c_{k+1} d^k \quad \text{avec} \quad 0 < c_k < d$$
  - On collecte le chiffre  $c_k$  (pour la position  $k$ )
  - On recommence avec le nombre  $n$  auquel on a retranché  $c_k d^k$
  - On s'arrête quand le nombre est nul et on renvoie l'écriture avec les chiffres collectés



- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par encadrements successifs

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par le méthode par encadrements successifs

|          |          | Puissances |          |          |          |
|----------|----------|------------|----------|----------|----------|
| Facteurs |          | <b>0</b>   | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
|          | <b>1</b> | 1          | 5        | 25       | 125      |
|          | <b>2</b> | 2          | 10       | 50       | 250      |
|          | <b>3</b> | 3          | 15       | 75       | 375      |
|          | <b>4</b> | 4          | 20       | 100      |          |

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par encadrements successifs

|          |   | Puissances |    |     |     |
|----------|---|------------|----|-----|-----|
|          |   | 0          | 1  | 2   | 3   |
| Facteurs | 1 | 1          | 5  | 25  | 125 |
|          | 2 | 2          | 10 | 50  | 250 |
|          | 3 | 3          | 15 | 75  | 375 |
|          | 4 | 4          | 20 | 100 |     |

$$2 \times 5^3 \leq 329 < 3 \times 5^3$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par le méthode par encadrements successifs

|          |          | Puissances |          |          |          |
|----------|----------|------------|----------|----------|----------|
| Facteurs |          | <b>0</b>   | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
|          | <b>1</b> | 1          | 5        | 25       | 125      |
|          | <b>2</b> | 2          | 10       | 50       | 250      |
|          | <b>3</b> | 3          | 15       | 75       | 375      |
|          | <b>4</b> | 4          | 20       | 100      |          |

$$c_3 = 2 : n \Rightarrow 329 - 250 = 79$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par encadrements successifs

|          |   | Puissances |    |     |     |
|----------|---|------------|----|-----|-----|
|          |   | 0          | 1  | 2   | 3   |
| Facteurs | 1 | 1          | 5  | 25  | 125 |
|          | 2 | 2          | 10 | 50  | 250 |
|          | 3 | 3          | 15 | 75  | 375 |
|          | 4 | 4          | 20 | 100 |     |

$$3 \times 5^2 \leq 79 < 4 \times 5^2$$

$$c_3 = 2 : n \Rightarrow 329 - 250 = 79$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par encadrements successifs

|          |          | Puissances |          |          |          |
|----------|----------|------------|----------|----------|----------|
| Facteurs |          | <b>0</b>   | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
|          | <b>1</b> | 1          | 5        | 25       | 125      |
|          | <b>2</b> | 2          | 10       | 50       | 250      |
|          | <b>3</b> | 3          | 15       | 75       | 375      |
|          | <b>4</b> | 4          | 20       | 100      |          |

$$c_3 = 2 : n \Rightarrow 329 - 250 = 79$$

$$c_2 = 3 : n \Rightarrow 79 - 75 = 4$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par encadrements successifs

|          |          | Puissances |          |          |          |
|----------|----------|------------|----------|----------|----------|
|          |          | <b>0</b>   | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
| Facteurs | <b>1</b> | 1          | 5        | 25       | 125      |
|          | <b>2</b> | 2          | 10       | 50       | 250      |
|          | <b>3</b> | 3          | 15       | 75       | 375      |
|          | <b>4</b> | 4          | 20       | 100      |          |

$$c_3 = 2 : n \Rightarrow 329 - 250 = 79$$

$$c_2 = 3 : n \Rightarrow 79 - 75 = 4$$

$$c_1 = 0$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par encadrements successifs

Puissances

|   | 0 | 1  | 2   | 3   |
|---|---|----|-----|-----|
| 1 | 1 | 5  | 25  | 125 |
| 2 | 2 | 10 | 50  | 250 |
| 3 | 3 | 15 | 75  | 375 |
| 4 | 4 | 20 | 100 |     |

$\leftarrow 4 \times 5^0 \leq 4 < 5 \times 5^0$

$$c_3 = 2 : n \Rightarrow 329 - 250 = 79$$

$$c_2 = 3 : n \Rightarrow 79 - 75 = 4$$

$$c_1 = 0$$



- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par le méthode par encadrements successifs

|          |          | Puissances |          |          |          |
|----------|----------|------------|----------|----------|----------|
|          |          | <b>0</b>   | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
| Facteurs | <b>1</b> | 1          | 5        | 25       | 125      |
|          | <b>2</b> | 2          | 10       | 50       | 250      |
|          | <b>3</b> | 3          | 15       | 75       | 375      |
|          | <b>4</b> | 4          | 20       | 100      |          |

$$c_3 = 2 : n \Rightarrow 329 - 250 = 79$$

$$c_2 = 3 : n \Rightarrow 79 - 75 = 4$$

$$c_1 = 0$$

$$c_0 = 4 : n \Rightarrow 4 - 4 = 0$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par encadrements successifs

|          |          | Puissances |          |          |          |
|----------|----------|------------|----------|----------|----------|
|          |          | <b>0</b>   | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
| Facteurs | <b>1</b> | 1          | 5        | 25       | 125      |
|          | <b>2</b> | 2          | 10       | 50       | 250      |
|          | <b>3</b> | 3          | 15       | 75       | 375      |
|          | <b>4</b> | 4          | 20       | 100      |          |

$$c_3 = 2 : n \Rightarrow 329 - 250 = 79$$

$$c_2 = 3 : n \Rightarrow 79 - 75 = 4$$

$$c_1 = 0$$

$$c_0 = 4 : n \Rightarrow 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (329)_{10} = (2304)_5$$

- Comment convertir une écriture en base  $b$   $(a_p \cdots a_0)_b$   
vers une écriture en base  $d$   $(c_q \cdots c_0)_d$  ?

- Comment convertir une écriture en base  $b$   $(a_p \cdots a_0)_b$   
vers une écriture en base  $d$   $(c_q \cdots c_0)_d$  ?
- **Méthode par divisions successives** (vrai algo)
  - On divise  $n$  par la base  $d$  (calcul fait en base  $b$ )
  - On collecte le reste  $r$
  - On recommence avec le quotient  $q$
  - On s'arrête quand le nombre est nul et on renvoie la suite *inversée* des restes collectés

$$\begin{array}{r|l} n & d \\ r & q \end{array}$$

- Comment convertir une écriture en base  $b$   $(a_p \cdots a_0)_b$   
vers une écriture en base  $d$   $(c_q \cdots c_0)_d$  ?
- **Méthode par divisions successives** (vrai algo)
  - On divise  $n$  par la base  $d$  (calcul fait en base  $b$ )
  - On collecte le reste  $r$
  - On recommence avec le quotient  $q$
  - On s'arrête quand le nombre est nul et on renvoie la suite *inversée* des restes collectés
- À privilégier quand la base  $b$  est "confortable"

$$\begin{array}{r|l} n & d \\ r & q \end{array}$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par le méthode par divisions successives

$$\begin{array}{r|l} 329 & 5 \\ \hline \end{array}$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

$$\begin{array}{r|l} 329 & 5 \\ 325 & 65 \end{array}$$



- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

$$\begin{array}{r|l} 329 & 5 \\ \hline 325 & 65 \\ \hline 4 & \end{array}$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par le méthode par divisions successives

$$\begin{array}{r|l|l} 329 & 5 & \\ \hline 325 & 65 & 5 \\ \hline 4 & & \end{array}$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

$$\begin{array}{r|l|l} 329 & 5 & \\ \hline 325 & 65 & 5 \\ \hline 4 & 65 & 13 \end{array}$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

$$\begin{array}{r|l|l} 329 & 5 & \\ \hline 325 & 65 & 5 \\ \hline 4 & 65 & 13 \\ & \hline & 0 & \end{array}$$

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

|     |  |    |  |    |
|-----|--|----|--|----|
| 329 |  | 5  |  |    |
| 325 |  | 65 |  | 5  |
| 4   |  | 65 |  | 13 |
|     |  | 0  |  | 5  |

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

|     |  |    |  |    |
|-----|--|----|--|----|
| 329 |  | 5  |  |    |
| 325 |  | 65 |  | 5  |
| 4   |  | 65 |  | 13 |
|     |  | 0  |  | 10 |
|     |  |    |  | 2  |

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

|     |  |    |  |    |
|-----|--|----|--|----|
| 329 |  | 5  |  |    |
| 325 |  | 65 |  | 5  |
| 4   |  | 65 |  | 13 |
|     |  | 0  |  | 10 |
|     |  |    |  | 3  |
|     |  |    |  | 2  |

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

|     |  |    |  |    |  |   |
|-----|--|----|--|----|--|---|
| 329 |  | 5  |  |    |  |   |
| 325 |  | 65 |  | 5  |  |   |
| 4   |  | 65 |  | 13 |  | 5 |
|     |  | 0  |  | 10 |  | 2 |
|     |  |    |  | 3  |  | 5 |
|     |  |    |  |    |  |   |
|     |  |    |  |    |  |   |



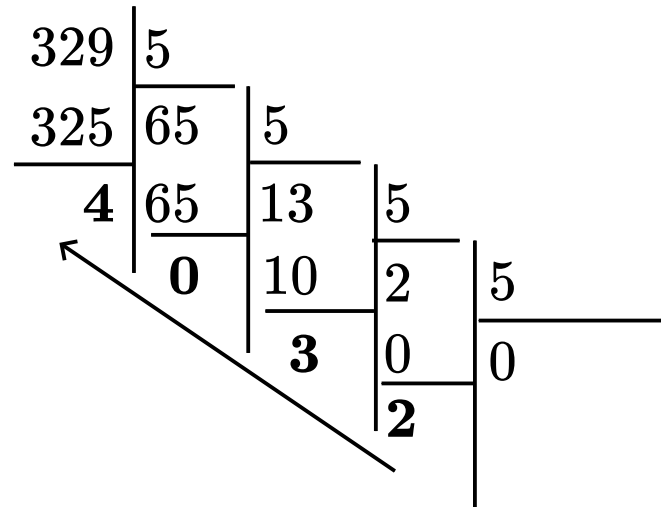
- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

|     |  |    |  |    |  |   |
|-----|--|----|--|----|--|---|
| 329 |  | 5  |  |    |  |   |
| 325 |  | 65 |  | 5  |  |   |
| 4   |  | 65 |  | 13 |  | 5 |
|     |  | 0  |  | 10 |  | 2 |
|     |  |    |  | 3  |  | 0 |
|     |  |    |  | 0  |  | 5 |
|     |  |    |  |    |  | 0 |

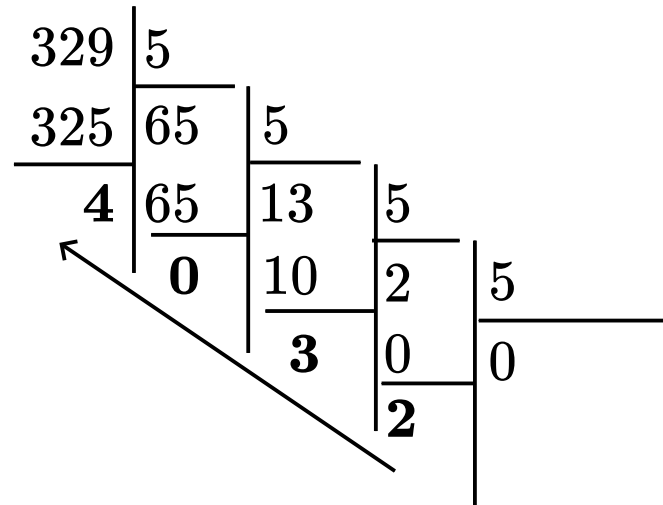
- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives

|     |  |    |  |    |  |   |
|-----|--|----|--|----|--|---|
| 329 |  | 5  |  |    |  |   |
| 325 |  | 65 |  | 5  |  |   |
| 4   |  | 65 |  | 13 |  | 5 |
|     |  | 0  |  | 10 |  | 2 |
|     |  |    |  | 3  |  | 0 |
|     |  |    |  | 2  |  | 0 |

- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par le méthode par divisions successives



- Convertir  $(329)_{10}$  en base 5 par la méthode par divisions successives



$$\Rightarrow (329)_{10} = (2304)_5$$

- Comment convertir une écriture en base  $b$   $(a_p \cdots a_0)_b$   
vers une écriture en base  $d$   $(c_q \cdots c_0)_d$  ?

- Comment convertir une écriture en base  $b$   $(a_p \cdots a_0)_b$   
vers une écriture en base  $d$   $(c_q \cdots c_0)_d$  ?
- **Méthode par recomposition** (méthode de Horner)
  - On utilise la définition  $\sum_{k=0}^p a_k b^k$  en calculant dans la base  $d$
  - On peut diminuer le nombre d'opérations en utilisant

$$a_p \times b^p + a_{p-1} \times b^{p-1} + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0$$

$$= (a_p \times b^{p-1} + a_{p-1} \times b^{p-2} + \cdots + a_2 \times b + a_1) \times b + a_0$$

$$\vdots$$

$$= (\cdots (a_p) \times b + a_{p-1}) \times b + \cdots + a_2) \times b + a_1) \times b + a_0$$

- Comment convertir une écriture en base  $b$   $(a_p \cdots a_0)_b$   
vers une écriture en base  $d$   $(c_q \cdots c_0)_d$  ?
- **Méthode par recomposition** (méthode de Horner)
  - On utilise la définition  $\sum_{k=0}^p a_k b^k$  en calculant dans la base  $d$
  - On peut diminuer le nombre d'opérations en utilisant
 
$$a_p \times b^p + a_{p-1} \times b^{p-1} + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0$$

$$= (a_p \times b^{p-1} + a_{p-1} \times b^{p-2} + \cdots + a_2 \times b + a_1) \times b + a_0$$

$$\vdots$$

$$= (\cdots (a_p) \times b + a_{p-1}) \times b + \cdots + a_2) \times b + a_1) \times b + a_0$$
- À privilégier quand la base  $d$  est "confortable"

- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner



- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner

$(2304)_5$  représente  $((((2) \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 4)$

- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner

$(2304)_5$  représente  $((((2) \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 4)$

↑  
10

- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner

$(2304)_5$  représente  $((((2) \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 4)$

↑  
10

↑  
13

- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner

$$(2304)_5 \text{ représente } (((2) \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 4$$

10

13

65

- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner

$(2304)_5$  représente  $((((2) \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 4)$

↑  
10

↑  
13

↑  
65

↑  
65

- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner

$(2304)_5$  représente  $((((2) \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 4)$

↑  
10

↑  
13

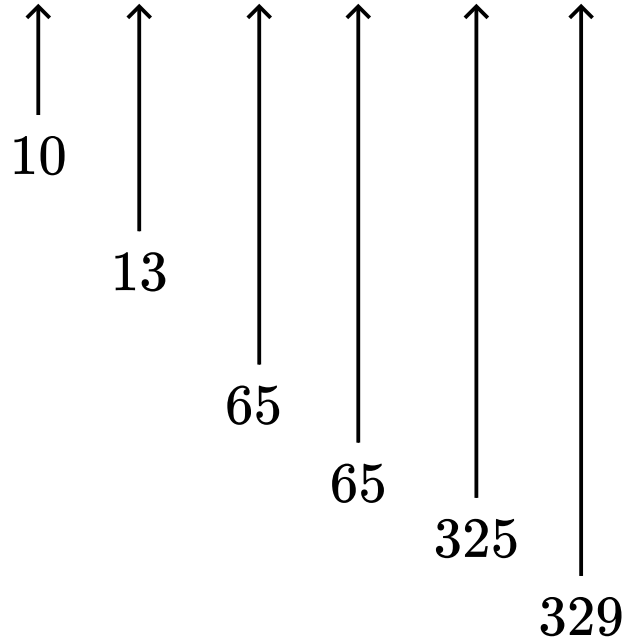
↑  
65

↑  
65

↑  
325

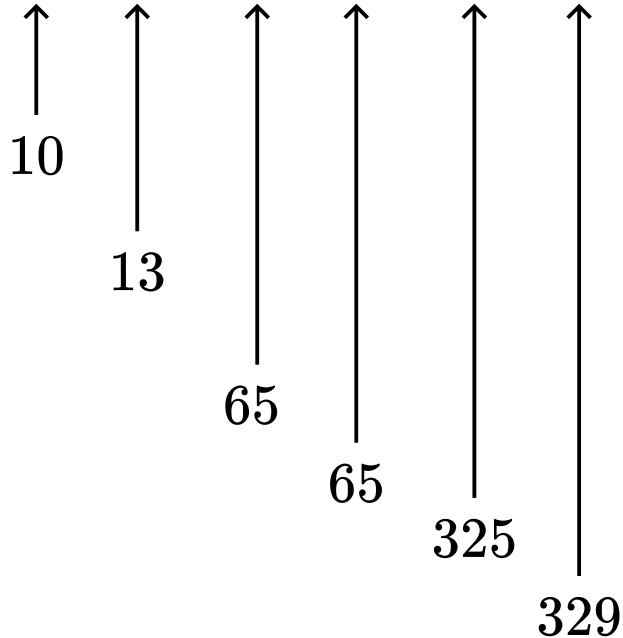
- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner

$(2304)_5$  représente  $((((2) \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 4)$



- Convertir  $(2304)_5$  en base 10 par Horner

$(2304)_5$  représente  $((((2) \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 4)$



$$\Rightarrow (2304)_5 = (329)_{10}$$



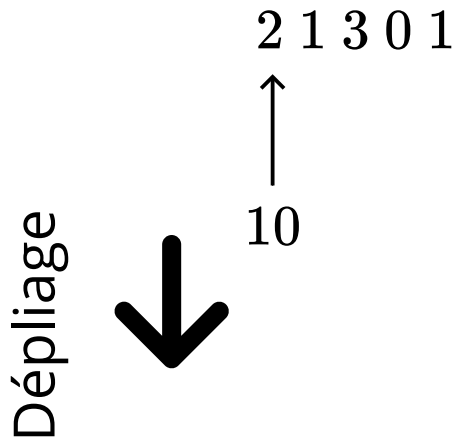
- Comment convertir une écriture en base  $b^s$   $(a_p \cdots a_0)_{b^s}$   
vers une écriture en base  $b^t$   $(c_q \cdots c_0)_{b^t}$  ?

- Comment convertir une écriture en base  $b^s$   $(a_p \cdots a_0)_{b^s}$   
vers une écriture en base  $b^t$   $(c_q \cdots c_0)_{b^t}$  ?
- **Méthode par dépliage-repliage**
  - On écrit chaque chiffre de l'écriture en base  $b^s$  dans la base  $b$ 
$$a_i = a_{i_1} \cdots a_{i_s}$$
  - On regroupe par paquet de  $t$  chiffres *en commençant par la droite*
  - On convertit chaque paquet dans la base  $b^t$

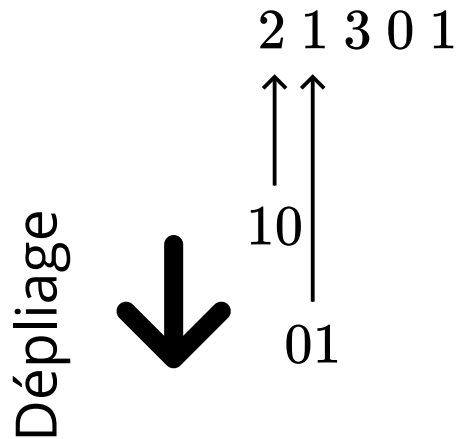
- Comment convertir une écriture en base  $b^s$   $(a_p \cdots a_0)_{b^s}$   
vers une écriture en base  $b^t$   $(c_q \cdots c_0)_{b^t}$  ?
- **Méthode par dépliage-repliage**
  - On écrit chaque chiffre de l'écriture en base  $b^s$  dans la base  $b$ 
$$a_i = a_{i_1} \cdots a_{i_s}$$
  - On regroupe par paquet de  $t$  chiffres *en commençant par la droite*
  - On convertit chaque paquet dans la base  $b^t$
- À privilégier face aux autres méthodes

- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$

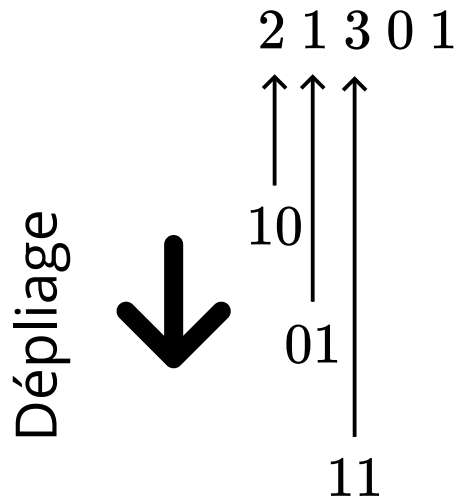
- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



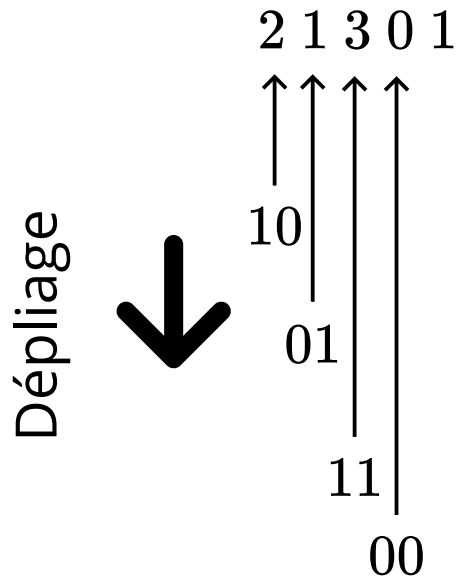
- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$

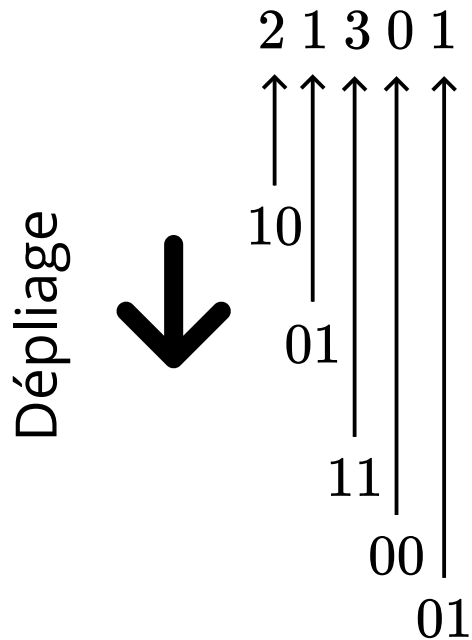


- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$

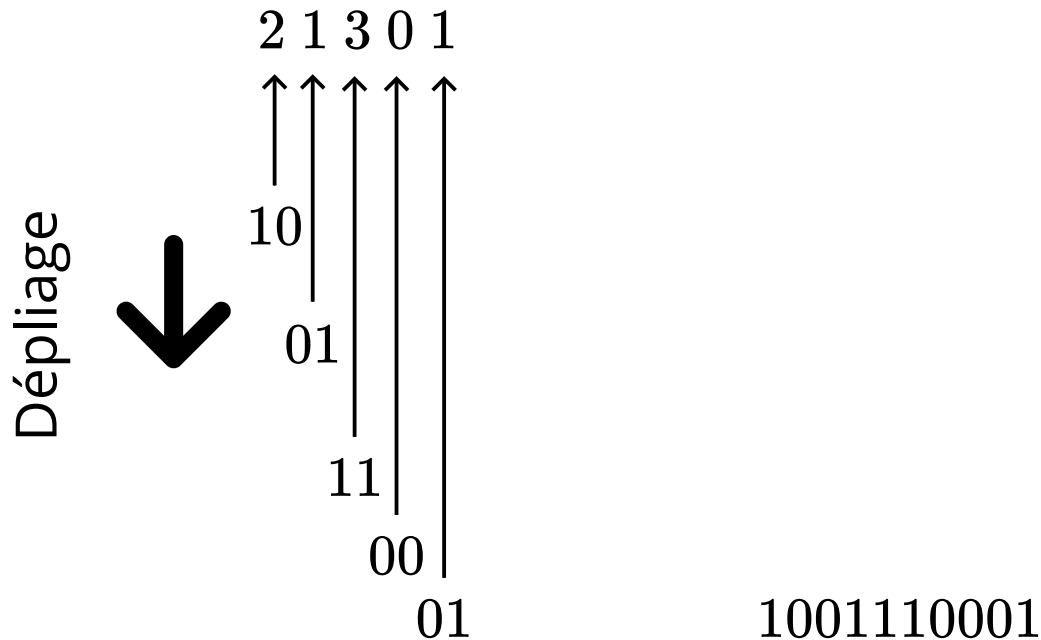




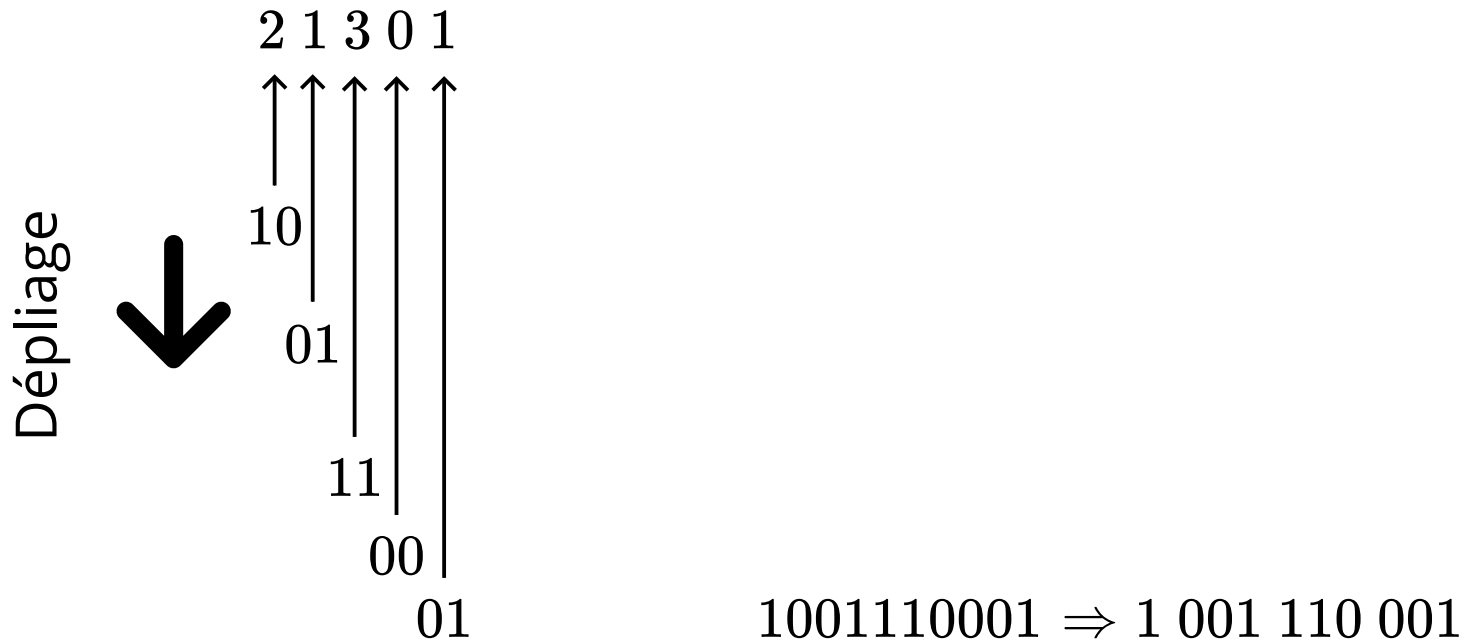
- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



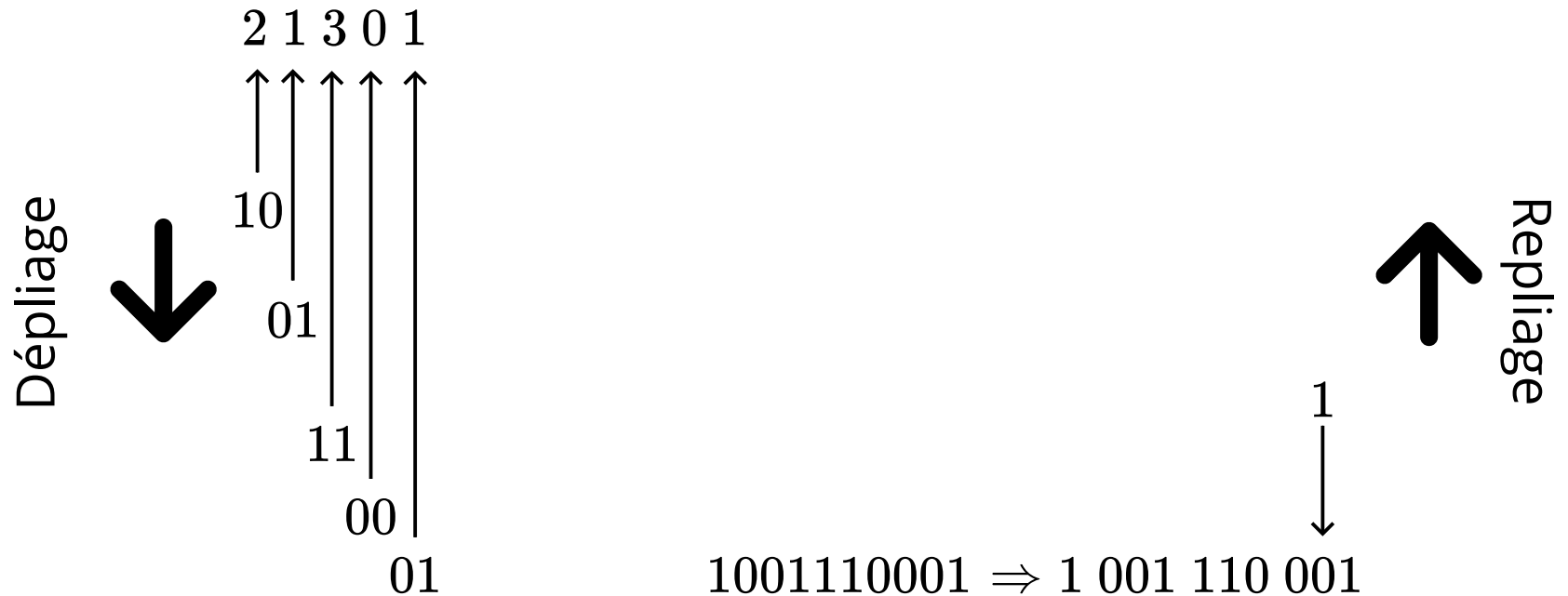
- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



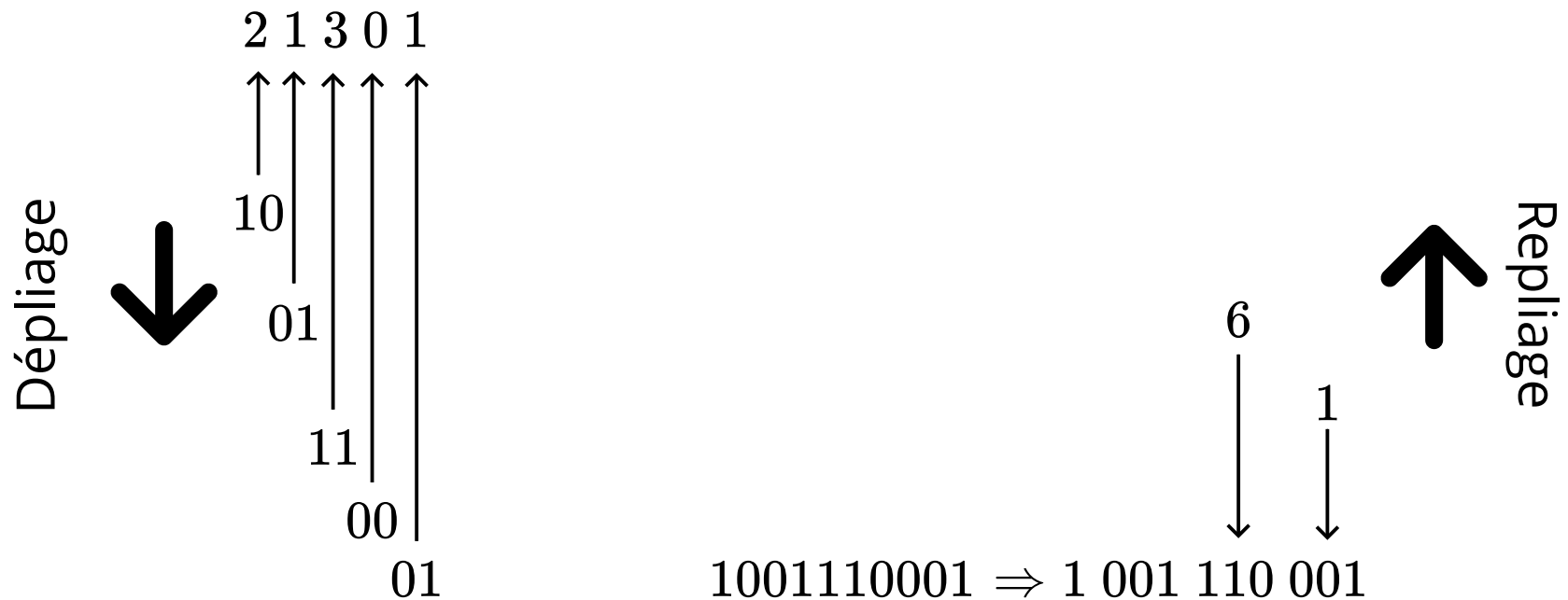
- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



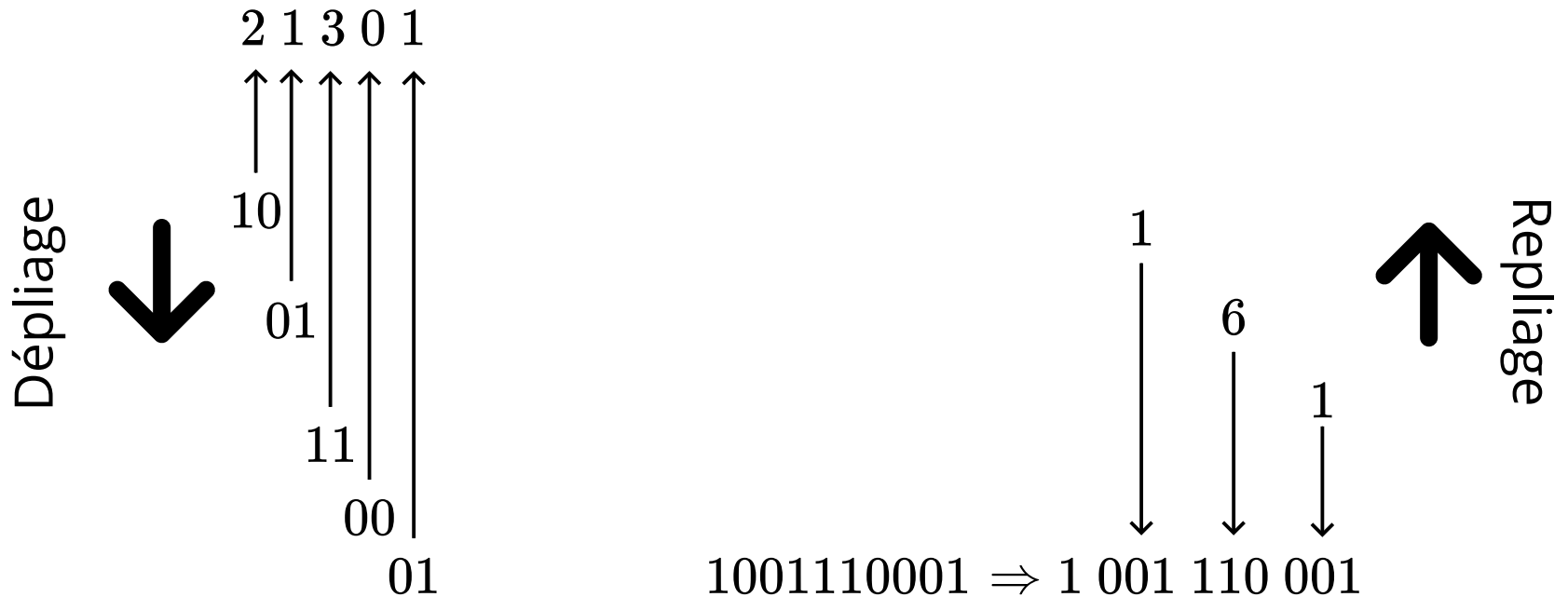
- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



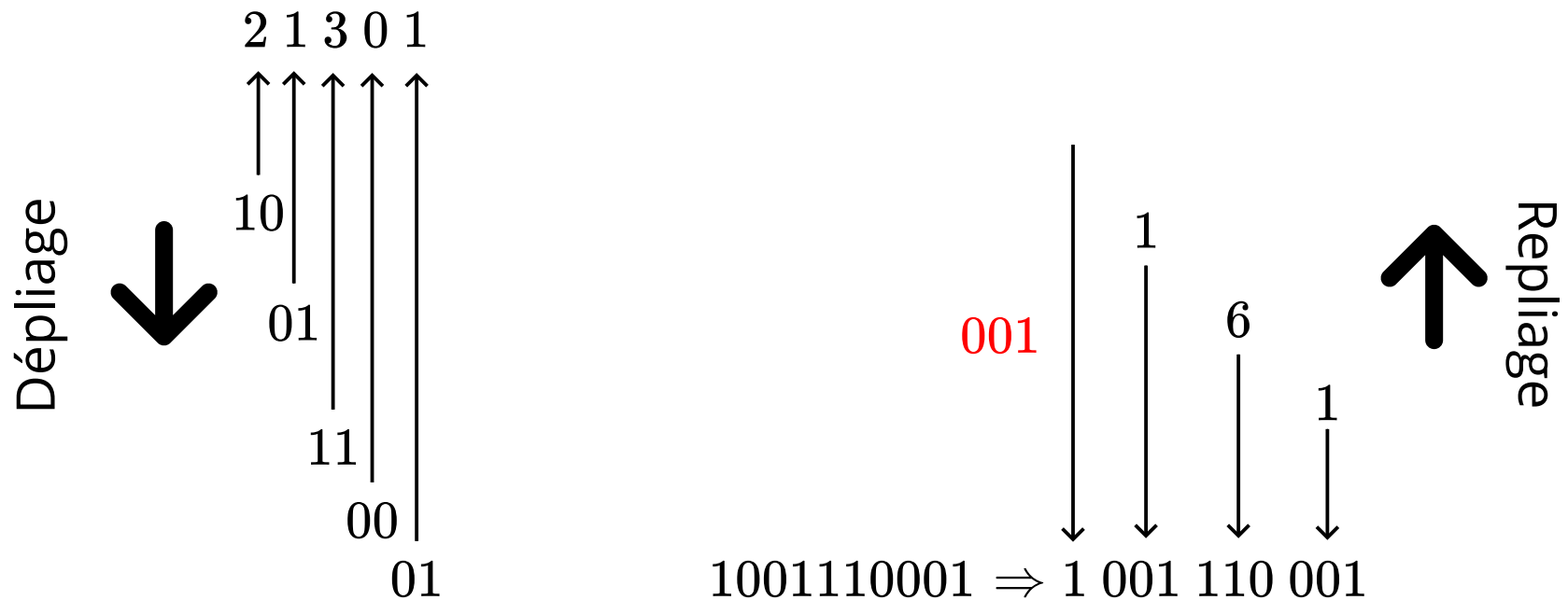
- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



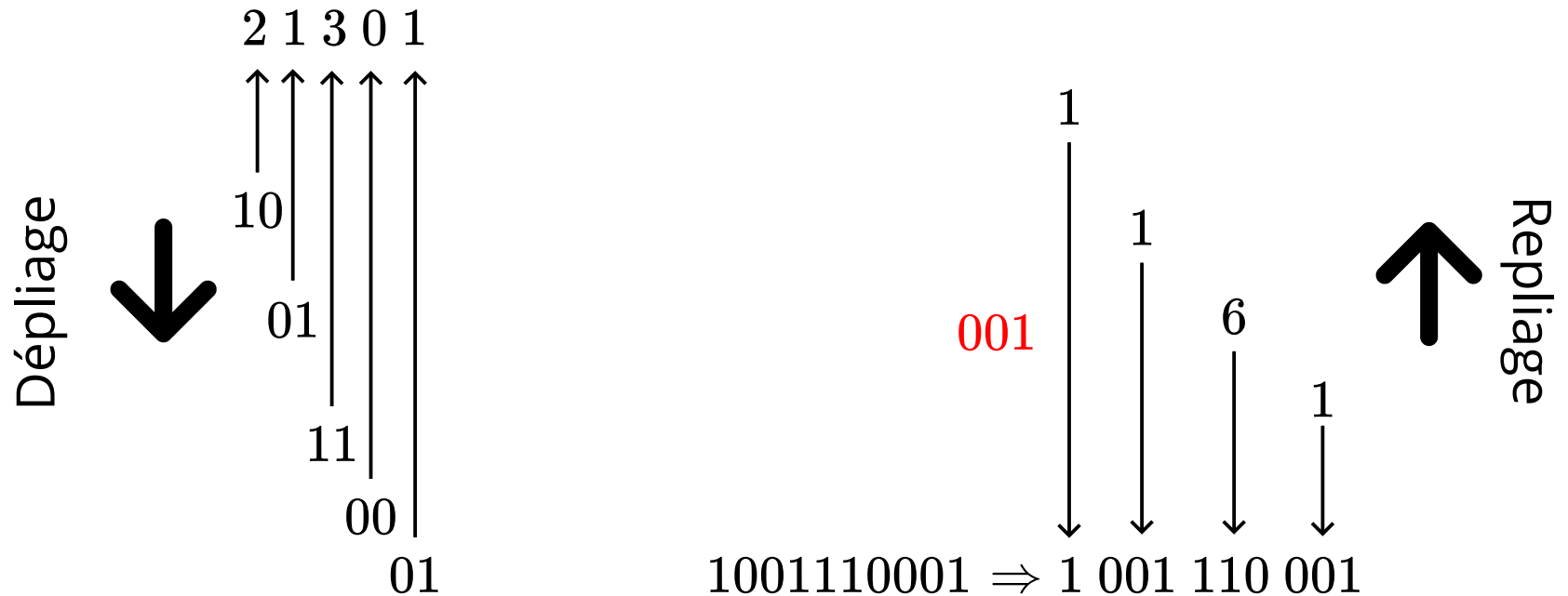
- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$



- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$





- Convertir  $(21301)_4$  en base 8 par le méthode par dépliage-repliage
  - $4 = 2^2$  et  $8 = 2^3$

