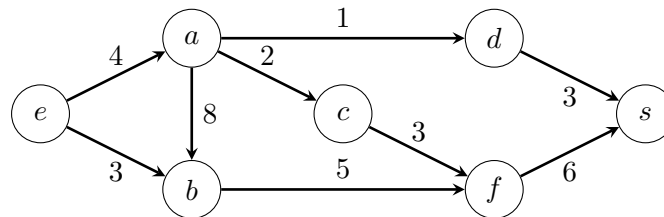


AL5

TD n° 10 : Algorithmes sur les flots

Exercice 1 :

Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le graphe suivant, en donnant à chaque étape le flot courant et le graphe des augmentations.



Exercice 2 : couplage maximal d'un graphe biparti

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Un couplage est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq A$ tel que deux arêtes distinctes de M n'ont pas de sommet en commun (c'est-à-dire qu'un sommet de S appartient à au plus une arête de M). Un couplage comprend donc au plus $\frac{|S|}{2}$ arêtes. Si tout sommet de S appartient à exactement une arête de M le couplage M est dit *parfait*.

On considère un graphe *biparti* $G = (S_1 \cup S_2, A)$: toute arête de A relie un sommet de S_1 à un sommet de S_2 . Un couplage de G est *maximal* s'il n'existe pas de couplage de G ayant plus d'arêtes. En particulier, s'il existe un couplage parfait, alors c'est un couplage maximal.

1. Montrer avec un exemple qu'un couplage maximal n'est pas toujours parfait.
2. Etant donné un graphe $G = (S, A)$ biparti, montrer comment réduire la recherche d'un couplage maximal sur G à un calcul d'un flot maximal sur un réseau de transport G' (basé sur G).
3. Appliquer la méthode précédente à l'exemple suivant. On a un ensemble de personnes $P = \{ \text{Pierre, Fatou, Kevin, Sophie, Zoé, Carlos} \}$, et une liste de destination de vacances $V = \{ \text{Etretat, Vesoul, Sète, Toulouse, Dunkerque} \}$. On connaît les préférences de chacun-e (*ie* les endroits où il-elle souhaite aller) et ici chacun-e part en vacances de son côté ! On cherche à faire partir le maximum de personnes. Voici leurs préférences :

	Etretat	Vesoul	Sète	Toulouse	Dunkerque
Pierre			•	•	
Fatou	•			•	
Kevin		•			•
Sophie	•		•		
Zoé	•		•	•	
Carlos	•		•		•

Exercice 3 : covoiturage

Un groupe de n personnes $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ partagent leurs véhicules pour aller travailler pendant m jours. Le jour i , un sous-ensemble S_i de P utilisent un véhicule commun pour aller travailler. Le conducteur ce jour-là sera un élément de S_i . Etant donné P et les sous-ensembles S_1, \dots, S_m , le problème est de choisir pour chaque i le conducteur du jour i de façon que la répartition soit équitable, c'est-à-dire qu'une personne j ne conduise pas plus de $\lceil \sum_{i: j \in S_i} \frac{1}{|S_i|} \rceil$ jours au total. Par exemple, s'il y a quatre personnes et trois jours avec $S_1 = \{p_1, p_2\}$, $S_2 = \{p_1, p_3, p_4\}$ et $S_3 = \{p_1, p_4\}$ alors la personne p_1 doit conduire au maximum $\lceil 1/2 + 1/3 + 1/2 \rceil = 2$ de ces trois jours alors que les autres conducteurs doivent conduire au maximum 1 de ces trois jours.

1. Modéliser ce problème comme un problème de flot maximal.
2. Montrer qu'il existe toujours une répartition équitable.

Exercice 4 : Championnat de coinche

On organise un championnat de coinche. Il y a n équipes en compétition. Pour chaque équipe i , on note w_i le nombre de parties gagnées par l'équipe, r_i le nombre de parties restantes, et r_{ij} le nombre de parties restantes entre l'équipe i et l'équipe j . Une équipe est éliminée dès qu'elle ne peut plus gagner le championnat. L'objectif est de trouver un algorithme pour décider quelles équipes sont éliminées. On cherchera plus précisément un algorithme pour décider si l'équipe k donnée est éliminée.