

* Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.

Exercice 1. *Mise en jambes.*

On considère la suite définie par

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \\ a_n &= 3 + a_{n-1} \end{aligned} \quad (n > 0).$$

1. Donnez une forme close pour a_n .
2. Écrivez une fonction récursive qui calcule a_n en appliquant directement la définition ci-dessus. Cette fonction est-elle récursive terminale ?
3. Écrivez une fonction récursive terminale qui calcule la même chose que la fonction précédente.
4. Écrivez une fonction itérative (avec des boucles) qui calcule encore la même chose.

Exercice 2. *Réversibilité et état.*

On suppose donnée une fonction `char` qui convertit un entier compris entre 0 et 9 en un caractère compris entre '0' et '9', et une fonction `afficher` qui affiche un caractère. On note `div` le quotient de la division entière, et `mod` le reste de la division entière. On considère ensuite la fonction H définie comme suit :

```
1 H(n):  
2 if n > 0 {  
3     H(n div 10)  
4     afficher(char(n mod 10))  
5 }
```

1. Décrivez l'arbre des appels effectués lors de l'évaluation de $H(123)$.
2. Que fait cette fonction ? Est-elle récursive terminale ?
3. Écrivez une version itérative (non récursive) de cette fonction. De combien d'espace supplémentaire cette version a-t-elle besoin ? Comparez cela à la version récursive. Quel est l'intérêt de la récursion ?

Exercice 3. *Suite de Fibonacci**.

Leonardo di Pisa, dit Fibonacci, élève des lapins. Les lapins de Fibonacci ont un cycle de vie un peu particulier : sa première année, un lapin est immature, et ne se reproduit donc pas. À partir de sa deuxième année, un lapin produit chaque année un autre lapin par parthénogénèse. Les lapins sont immortels. Il y a donc un lapin l'année zéro, un lapin la première année, deux lapins la deuxième année, trois lapins la troisième année, etc. La *suite de Fibonacci* (f_n) est définie par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} f_0 &= 1; \\ f_1 &= 1; \\ f_n &= f_{n-2} + f_{n-1} \end{aligned} \quad (n \geq 2).$$

1. Écrivez l'algorithme récursif qui calcule f_n suggéré par le système d'équations ci-dessus.

2. Écrivez l'arbre des appels effectués pour calculer f_4 , et comptez le nombre d'additions.
3. À quelle formule de récurrence obéit le nombre d'additions ? Donnez les premiers termes de la suite.
4. Écrivez un algorithme itératif en espace constant (sans utiliser de tableaux) qui calcule f_n . Combien d'additions fait-il pour calculer f_4 ? Pour calculer f_n ?
5. Lorsqu'on écrit une fonction sur la forme récursive terminale, on stocke en général plus d'informations dans les paramètres.
Écrivez un algorithme récursif terminal qui calcule f_n . Comparez le temps de calcul qu'il prend pour calculer $f_{10}, f_{11} \dots$ par rapport à l'algorithme de la question 1.