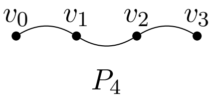
Chaînes

Définition

Une chaîne dans un graphe $G = (V, E)$ est une suite de la forme $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, où :

- $v_i \in V$
- $e_i \in E$
- $e_{i+1} = v_i v_{i+1}$.



- L'entier k est la longueur de la chaîne.
- Une chaîne est élémentaire si ses sommets sont deux-à-deux distincts.
- Une chaîne élémentaire avec n sommets (de longueur $n-1$) est notée P_n.

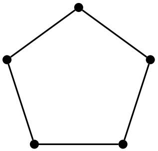
Chaînes (suite)

- Les sommets v_0 et v_k sont les extrémités de la chaîne.
- Lorsque le graphe est simple (sans arêtes parallèles), une chaîne peut être définie simplement par la suite $(v_0, \ldots, v_k)$ de ses sommets.
- Une sous-chaîne d'une chaîne est définie comme une sous-suite, entre deux sommets, de la suite définissant la chaîne considérée.
- Une chaîne est dite simple si ses arêtes sont deux-à-deux distinctes.
- Élémentaire entraîne simple.

Cycles

Définition

Un cycle est une chaîne de longueur supérieure ou égale à 1 simple et fermée. C'est donc une chaîne de la forme $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_0)$ où $k \geq 1$ et les e_i sont distinctes.



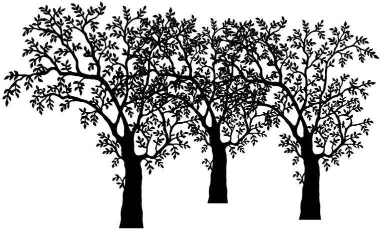
C_5

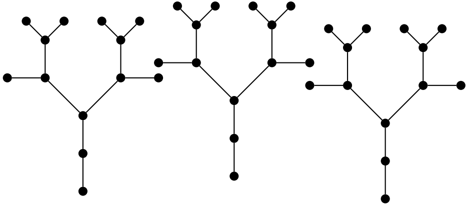
- L'entier k est la longueur du cycle ; le cycle est pair où impair suivant que sa longueur est paire ou impaire.
- Un cycle élémentaire avec n sommets (de longueur n) est noté C_n.

Forêts

Définition

Un graphe sans cycles s'appelle un graphe acyclique, ou une forêt.

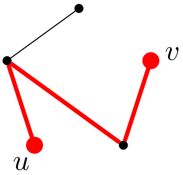




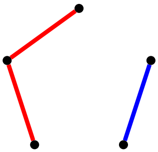
Connexité

Définition

- Un graphe G est <u>connexe</u> s'il existe une chaîne entre u et v, pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$.
- Une <u>composante connexe</u> d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal (par inclusion).



graphe connexe



graphe non connexe

Relation d'équivalence

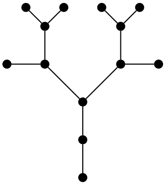
Remarque

- On peut aussi définir les composantes connexes en utilisant les relations d'équivalence.
- Soit $G = (V, E)$ un graphe et mettons $u \sim v$ si et seulement si il existe une chaîne entre u et v.
- On peut montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalence induisent les composantes connexes de G.

Arbres

Définition

Un arbre est un graphe connexe et acyclique.

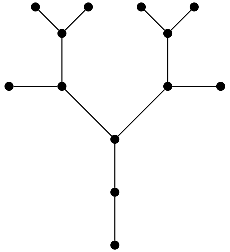


Plusieurs façons de définir un arbre...

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

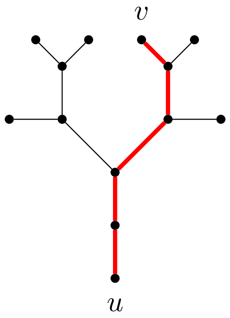


Plusieurs façons de définir un arbre. . .

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

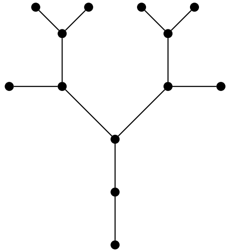


Plusieurs façons de définir un arbre...

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

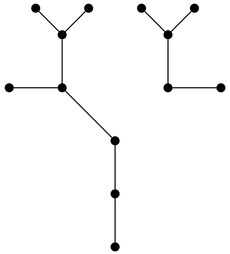


Plusieurs façons de définir un arbre...

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

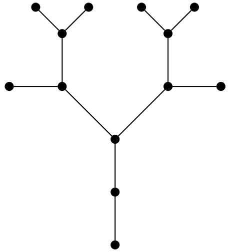


Plusieurs façons de définir un arbre. . .

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

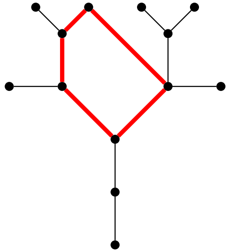


Plusieurs façons de définir un arbre...

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$



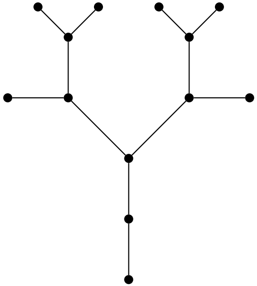
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

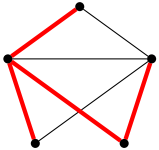
G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



Arbre couvrant

Définition

Soit G un graphe. Un arbre couvrant de G est un sous-graphe couvrant de G qui est un arbre.



Démonstration

Proposition

Un graphe est connexe $\iff$ il contient un arbre couvrant.

Démonstration

- Soit G un graphe connexe.
- Retirons de G, tant qu'il est possible, une arête qui ne coupe pas le graphe (le graphe reste connexe).
- On obtient un sous-graphe partiel T qui est connexe par la condition sur les arêtes, et il n'a pas de cycles puisque s'il y aurait un cycle, on pourrait enlever une arête du cycle sans couper le graphe.
- T est donc un arbre.
- Le converse est évident.

Comment décider si un graphe est connexe ?

Une question fondamentale que l'on puisse se poser à propos d'un graphe :

Question

Le graphe G est-il connexe ?

Sinon, quelles sont les composantes connexes de G ?

- Pour des petits graphes, on peut le faire par inspection.
- Pour des grands graphes, il faut un algorithme !

Algorithme de marquage

Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $s \in V$

début

marquer(s) ;

tant que $\exists uv \in E$ où u est marqué et v non marqué **faire**

marquer(v)

Comment améliorer cet algorithme ?

- Si, à un moment donné, tous les voisins d'un sommet marqué sont marqués, nous n'avons plus besoin de considérer ce sommet (puisque seul un sommet non marqué peut devenir marqué, et non l'inverse).
- Il suffit de ne considérer que les sommets marqués "sur le bord".
- En spécialisant l'ordre dans lequel nous recherchons les arêtes à partir des sommets marqués, nous obtenons des parcours spéciaux, adaptés à différents degrés pour de différents types de problèmes.
- Le <u>parcours en largeur</u> prend systématiquement les arêtes les plus proches à la racine.

Parcours en largeur (BFS [1])

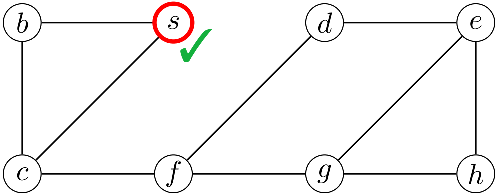
Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $s \in V$

début

    créer file(Q) ;
    marquer(s) ;
    enfiler(Q, s) ;
    tant que $Q \neq \emptyset$ **faire**
        $u \leftarrow$ défiler(Q) ;
        pour tous les $uv \in E$ **faire**
            si v non marqué **alors**
                marquer(v) ;
                enfiler(Q, v)

1. Breadth-first search

Illustration du parcours en largeur



$$Q = [s]$$

Parcours en largeur (version avec distances)

Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $s \in V$

début

  pour tous les $u \in V \setminus \{s\}$ **faire**

    $d(u) \leftarrow \infty$

  $\mathrm{dist}(s) \leftarrow 0$;

  $Q \leftarrow [s]$;

  tant que $Q \neq \emptyset$ **faire**

    $u \leftarrow$ défiler(Q) ;

    pour tous les $uv \in E$ **faire**

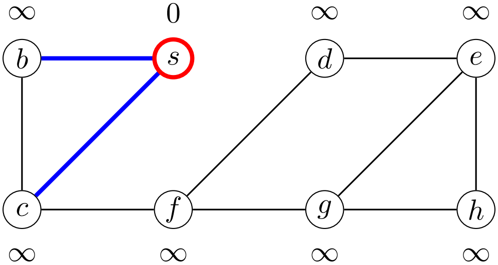
      si $d(v) = \infty$ **alors**

        $d(v) = d(u) + 1$;

        enfiler(Q, v) ;

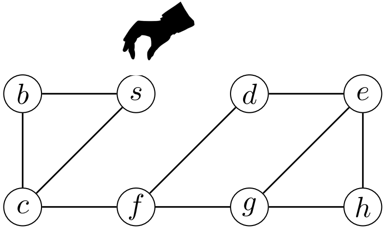
        parent$(v) \leftarrow u$

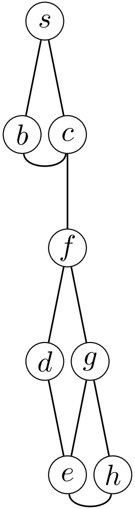
Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



$Q = [s]$

Modèle physique





Complexité du BFS

- Supposons que $G = (V, E)$ est représenté par une liste d'adjacence.
- BFS considère chaque arête deux fois.
- Chaque sommet est enfilé et défilé une fois
- Donc la complexité de BFS est de $O(n+m)$, où $n = |V|$ et $m = |E|$.
- La complexité est donc linéaire par rapport à la taille de la représentation.
- Quelle est la complexité du BFS si G est representé par une matrice d'adjacence ?

Correction du BFS

Lemme 1

Après terminaison du BFS, $d(v) \geq \text{dist}(s, v)$ pour tout sommet $v \in V$.

Lemme 2

Si au cours du BFS $Q = [v_1, v_2, \ldots, v_r]$, alors $d(v_r) \leq d(v_1) + 1$ et $d(v_i) \leq d(v_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \ldots, r - 1$.

Corollaire 1

Si le sommet v_i est enfilé dans Q avant v_j, alors $d(v_i) \leq d(v_j)$.

Démonstration du Lemme 2

Démonstration (1/2)

- On montre que la propriété est invariante par les opérations sur la file.
- Initiallement, $Q = [s]$: la propriété est vraie.

Cas 1 : le sommet v_1 est défilé de Q.

- Si Q devient vide, alors la propriété devient trivialement vraie.
- Sinon, par l'hypothèse de récurrence, $d(v_1) \leq d(v_2)$ et $d(v_r) \leq d(v_1) + 1$, et donc $d(v_r) \leq d(v_2) + 1$.
- Les inégalités entre les autres éléments de Q restent inchangées.

Démonstration du Lemme 2

Démonstration (1/2)

Cas 2 : un nouveau sommet v_{r+1} est enfilé dans Q.

- Soit u le dernier sommet défilé de Q, dont les voisins (parmi lesquels se trouve v_{r+1}) sont en train d'être examinés.
- Cas trivial : le défilage de u a vidé Q. Dans ce cas, tous les sommets de Q, y compris v_{r+1}, ont la même valeur de d (égale à $d(u)+1$).
- Sinon, par l'hypothèse de récurrence, $d(u) \leq d(v_1)$. Donc, $d(v_{r+1}) = d(u) + 1 \leq d(v_1) + 1$.
- On a aussi $d(v_r) \leq d(u) + 1 = d(v_{r+1})$ par l'hypothèse de récurrence.

Correction du BFS

Théorème

BFS découvre tous les sommets accessibles à partir de s, et après terminaison, $d(v) = \mathrm{dist}(s, v)$ pour tout $v \in V$.

Démonstration

- Supposons qu'il existe $v \in V$ tel que $d(v) \neq \mathrm{dist}(s, v)$.
- Soit v un tel sommet qui minimise $\mathrm{dist}(s, v)$.
- Grâce au Lemme 1, on a $d(v) > \mathrm{dist}(s, v)$.
- Considérons une chaîne de longueur minimale de s à v, et soit u le prédécesseur immédiat de v sur cette chaîne : $\mathrm{dist}(s, v) = \mathrm{dist}(s, u) + 1$.
- Par la minimalité de v, on a $d(v) > \mathrm{dist}(s, v) = \mathrm{dist}(s, u) + 1 = d(u) + 1$.

Correction du BFS (2/2)

Démonstration (2/2)

- Considérons le moment où u est défilé de Q.

Cas 1 v n'est pas marqué : $d(v) = d(u) + 1$

Cas 2 v a été traité : $d(v) \leq d(u)$

Cas 3 v est dans la file : il est inséré au moment du traitement d'un sommet w, extrait avant u, pour lequel $d(v) = d(w) + 1$. Par le Corollaire 1, on a $d(w) \leq d(u)$, et donc $d(v) \leq d(u) + 1$.

Résumé du BFS

- Algorithme efficace pour explorer un graphe : de complexité $O(n+m)$.
- Parcourt les sommets à partir d'un sommet "source" par des couches :
  - s d'abord
  - ensuite les voisins de s,
  - ensuite les voisins des voisins de s,
  - etc. . .
- Bien adapté aux problèmes où l'on cherche un plus court chemin : par exemple, si l'on veut ranger le cube de Rubik en un nombre minimum de coups.

Bonus : implémentation Python qui n'utilise pas les files

```
def bfs (s,Adj):
    level = {s: 0}
    parent = {s: None}
    i = 1
    frontier = [s]
    while frontier:
        next = []
        for u in frontier:
            for v in Adj[u]:
                if v not in level:
                    level[v] = i
                    parent[v] = u
                    next.append(v)
        frontier = next
        i += 1
```