AL5
TD n° 7 : algorithme de Floyd-Warshall

Exercice 1 : application de l'algorithme de Floyd-Warshall

Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall sur le graphe de la figure 1. On donnera les matrices obtenues après chaque itération principale (la boucle `Pour` extérieure).

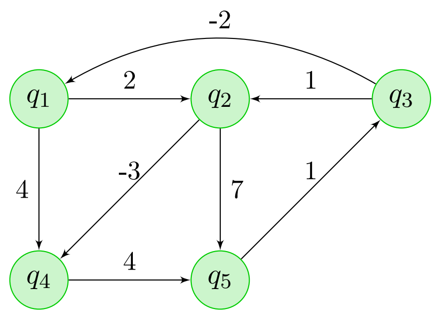


FIGURE 1 – Exemple pour l'exercice 1

Exercice 2 : relation d'accessibilité

On considère un graphe orienté $G = (S, A)$ avec $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On note M la matrice d'adjacence de G, c'est-à-dire la matrice booléenne $(\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que : $\alpha_{ij} = \top$ si $(x_i, x_j) \in A$ et $\alpha_{ij} = \bot$ sinon.

On définit la somme et le produit de matrices booléennes de manière standard : la multiplication est remplacée par la conjonction ($\wedge$), et l'addition par la disjonction ($\vee$). Soit ainsi A, B et C trois matrices booléennes $n \times n$ avec les coefficients a_{ij}, b_{ij} ou c_{ij}, on a :

- $C \stackrel{\text{def}}{=} A + B$ ssi $c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$;
- $C \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot B$ ssi $c_{ij} = \bigvee_{k=1\ldots n} (a_{ik} \wedge b_{kj})$;

On note `Id` la matrice booléenne $(\gamma_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $\gamma_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} \top$ et $\gamma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \bot$ si $i \neq j$.

On définit la suite de matrice M^k pour $k = 0, \ldots, n-1$ de la manière suivante : $M^0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{Id}$ et $M^k \stackrel{\text{def}}{=} M^{k-1} \cdot M$ pour $k = 1, \ldots, n-1$.

1. Montrer que M^k, pour $k = 0, \ldots n-1$, représente la matrice d'accessibilité en exactement k transitions de G : le coefficient α^k_{ij} de M^k est $\top$ **ssi** il existe un chemin de longueur[1] k entre x_i et x_j.
2. Soit M^* la matrice booléenne correspondant à la fermeture réflexive et transitive de la relation induite par G : le coefficient γ_{ij} de M^* est $\top$ si et seulement s'il existe un chemin (de longueur quelconque) de x_i à x_j dans G.
   Montrer que $M^* = \sum_{i=0}^{n-1} M^i$.
   Quelle est la complexité de l'algorithme qui calcule (naïvement) M^* avec cette méthode ?
3. Adapter l'algorithme de Floyd pour calculer M^* plus efficacement.
   Donner sa complexité.
4. Étant donné une matrice booléenne M^* représentant la fermeture réflexive et transitive de $G = (S, A)$ et un nouvel arc (x_i, x_j), donner un algorithme qui calcule la fermeture réflexive et transitive du graphe $G' = (S, A \cup \{(x_i, x_j)\})$. Donner sa complexité.

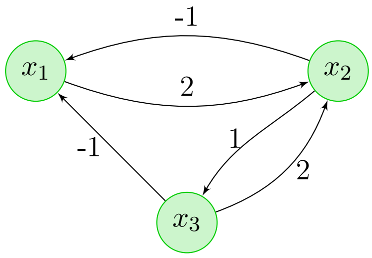
1. Dans cet exercice, la *longueur* d'un chemin est le nombre d'arcs composant ce chemin.

Exercice 3 : contraintes et plus courts chemins – (examen 2017)

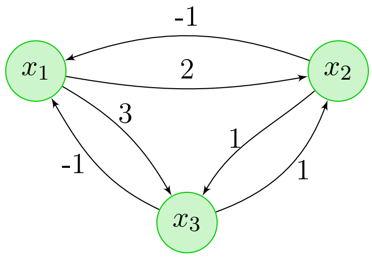
Rappel de la feuille de TD nº 5. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n variables réelles. On appelle contrainte atomique une inégalité sur une différence de variables, c'est-à-dire de la forme $x_j - x_i \leqslant c$ avec $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ et $c \in \mathbf{Z}$. Une contrainte convexe C est un ensemble de contraintes atomiques, interprété comme une conjonction (toutes les contraintes doivent être vérifiées). On supposera que pour toute paire de variables x_i, x_j, il y a au plus une contrainte de la forme $x_j - x_i \leqslant c$. Étant donné une contrainte convexe E, on note S_E l'ensemble des valuations pour X qui sont des solutions de E (i.e. qui vérifient toutes les contraintes atomiques de E).
Dans la suite, on utilise la contrainte E_0 définie par l'ensemble $\{x_2 - x_1 \leqslant 2, x_1 - x_2 \leqslant -1, x_1 - x_3 \leqslant -1, x_3 - x_2 \leqslant 1, x_2 - x_3 \leqslant 2\}$ pour $X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ comme un exemple récurrent pour toutes les questions. Les valuations $v = (11, 12, 12)$ et $v' = (5, 6, 7)$ sont des solutions possibles pour E_0 (et donc $v, v' \in S_{E_0}$).

À toute contrainte convexe E, on associe un graphe orienté valué $G_E = (S, A, w)$ avec :
- $S = \{x_1, \dots, x_n\}$,
- $A = \{(x_i, x_j) \mid \exists\, (x_j - x_i \leqslant c) \in E\}$,
- $w(x_i, x_j) = c$ ssi $\exists (x_j - x_i \leqslant c) \in E$.

Par exemple, la contrainte convexe E_0 pour X_0 est représentée par le graphe G_{E_0} de la Figure 2.



Graphe G_{E_0}



Graphe $G^*_{E_0}$

FIGURE 2 – Graphes pour l'exemple E_0.

On rappelle (cf la première partie du TD) que le poids c d'un chemin reliant un sommet x_i à un sommet x_k dans G_E signifie l'existence d'une contrainte $x_k - x_i \leqslant c$ induite par l'ensemble de contraintes E.
Dans cet exercice, on souhaite élaborer des algorithmes pour manipuler des ensembles de contraintes. On souhaite notamment normaliser les contraintes de manière à ce que deux contraintes ayant les mêmes ensembles de solutions aient la même représentation.
Pour cela, on représente le graphe G_E sous la forme d'une matrice d'adjacence M_E[2]. On note $G^*_E = (S, A^*, w^*)$ le graphe orienté pondéré obtenu à partir de G_E par application de l'algorithme de Floyd-Warshall (la fonction w^* correspond donc aux distances des plus courts chemins dans G_E). On note M^*_E sa matrice. Par exemple, le graphe $G^*_{E_0}$ de l'exemple précédent est décrit Figure 2 et on donne ci-dessous la matrice M_{E_0} de G_{E_0} et la matrice $M^*_{E_0}$ de $G^*_{E_0}$:

$$M_{E_0} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^*_{E_0} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversement, on peut aussi associer à une matrice $n \times n$ M un ensemble de contraintes : chaque coefficient β_{ij} de M induit une contrainte $x_j - x_i \leqslant \beta_{ij}$.

2. avec des coefficients $\alpha_{i,j}$ définis par : $\alpha_{i,i} = 0$ pour tout i, et $\alpha_{i,j} = c$ si $w(x_i, x_j) = c$ et $\alpha_{i,j} = \infty$ si $(x_i, x_j) \notin A$.

1. Expliquer à quoi correspond le coefficient α^*_{ij} de la matrice M^*_E.
2. Comment tester si un ensemble de contraintes E n'a pas de solution (*i.e.* $S_E = \emptyset$) à partir de M^*_E ? On rappelle que dans la première partie du TD, nous avons vu l'équivalence : $S_E = \emptyset$ ssi il existe un circuit strictement négatif dans G_E.
3. Prouver que l'ensemble des valuations vérifiant E est identique à celui vérifiant l'ensemble des contraintes décrites par M^*_E.
4. Considérons deux ensembles de contraintes E et E' tels que $S_E = S_{E'}$ et $S_E \neq \emptyset$. Montrer que les matrices M^*_E et $M^*_{E'}$ sont identiques.

   Pour cette question, on pourra utiliser sans la prouver (mais on peut aussi le faire !) la propriété suivante : *soit E un ensemble de contraintes tel que $S_E \neq \emptyset$; pour tout coefficient $\alpha^*_{ij} \neq \infty$ dans M^*_E, il existe une valuation $v \in S_E$ telle que $v(x_j) - v(x_i) = \alpha^*_{ij}$.*
5. En déduire un algorithme pour tester si deux contraintes E et E' représentent le même ensemble de valuations. Donner sa complexité.
6. Proposer un algorithme pour tester si l'ensemble de valuations vérifiant une contrainte E est inclus dans celui représenté par une contrainte E'. Donner sa complexité.
7. Donner un algorithme qui, étant donné deux contraintes convexes E et E', construit une contrainte convexe correspondant à leur intersection. Est-ce possible de faire l'union ? Donner un algorithme qui vérifie si l'union de deux contraintes convexes E et E' est une contrainte convexe.

Exercice 4 : le meilleur routage

On considère un réseau formé d'un ensemble R de n routeurs. Pour chaque paire de routeurs (r_i, r_j) avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$ connectés par un fil sur le réseau, on connait la bande passante (débit binaire maximal) b_{ij} du routeur r_i vers le routeur r_j. On pose $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice telle que b_{ij} est la bande passante de r_i à r_j lorsqu'ils sont connectés, et 0 sinon. Le réseau est donc défini par son ensemble de routeurs R et sa matrice de bandes passantes B.
On souhaite calculer pour chaque couple de routeurs (r_i, r_j) du réseau, la meilleure route de r_i vers r_j, c'est-à-dire la route qui offre la meilleure bande passante.

1. Soit une route $c = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i\ell}$ sur le réseau avec $r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i\ell} \in R$ et $r_{i_j}, r_{i_{j+1}}$ sont connectés, $\forall 1 \leqslant j < l$. Quelle est la bande passante de c en fonction des $(b_{i_j i_{j+1}})_{1 \leqslant j < \ell}$?
2. Soit deux chemins distincts c_1 et c_2 sur le réseau, allant d'un routeur r_i à un routeur r_j. Comment déterminer la meilleure route entre ces deux routes en fonction des bandes passantes de B ?
3. Écrire un algorithme qui calcule la meilleure route entre chaque paire de routeurs d'un réseau R. Prouver sa correction.