29.11.21

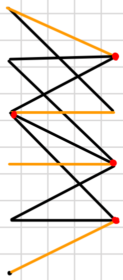
ALS TD 10

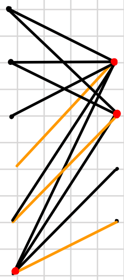
$G \setminus T$ est sans arrête
(on dit aussi indépendant ou stable).

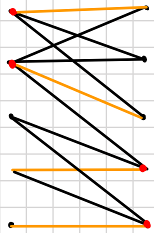
$T \subseteq V$ transversal
$\Leftrightarrow$ toute arrête "touche" T.

Exercice 1

th. König : Si G biparti, max couplage = min transversal







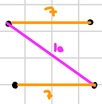
Max = 4
↳ on ne peut pas faire plus car il n'y a que 4 sommets ds la partie de droite.

Max = 3
↳ vertex cover de taille 3 (sommets en rouge).

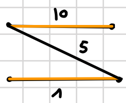
Max = 4
↳ vertex cover de taille 4 (sommets en rouge).

Exercice 2

1) FAUX

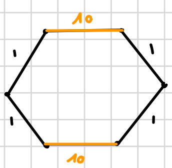


2) FAUX

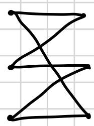


3) VRAI → les arêtes ont des poids > 0.
↳ $\exists$ a entre tous les s des 2 parties.
Donc on peut tjrs rajouter une arête jusqu'à avoir un couplage max qui sature les 2 côtés. ⚠ il peut en exister plusieurs.

4) FAUX

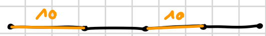


ce graphe peut se redessiner →



5) FAUX $n = 5$

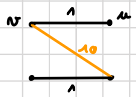
$(n+1)/2 = 3 \neq 2$



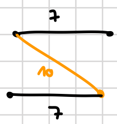
(On ne peut d'ailleurs jamais trouver $(n+1)/2$ arêtes ds le couplage max).

Et si on regarde : n (impair) arêtes ? Tjrs FAUX

6) FAUX



7) FAUX → voir 1)

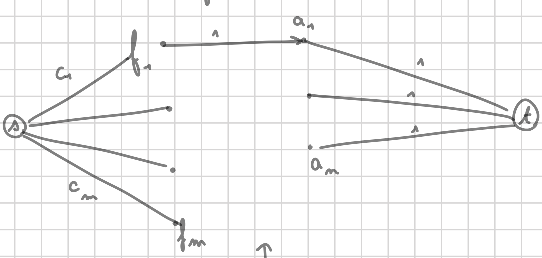


Alors que le couplage de poids max $= 14 \neq 10$

Exercice 3

1) flot max = nb d'étudiants.

Pb de flot



↑ arrête entre f et a si a candidate à f.

2) Avec classement des étudiants et des préférences.

Algo Gale-Shapley (ou algo des mariages stables).

Preuve : À la fin de l'algo

→ Si il reste un étudiant sans formation à la fin, alors il y a forcément une formation qui n'a pas fait le plein.

→ Ce qui veut dire qu'à un moment, cette formation lui a fait une offre, et l'étudiant à dit NON.

Donc l'étudiant avait une autre propal qu'il a accepté. CONTRADICTION

(on ne peut pas juste dire NON, si on n'a qu'une seule propal, elle est en "OUI tmp" par défaut).

3) $\begin{cases} f_1 \text{ offre à } c_2 \\ f_2 \text{ — } c_1 \end{cases}$

$\begin{cases} c_1 \text{ dit "oui tmp" à } f_2 \\ c_2 \text{ — } f_1 \end{cases}$

FIN

↳ favorise les classements des formations.

4) Non, pas le m̃ résultat : favorise les choix des candidats

$\begin{cases} c_1 \text{ offre à } f_1 \\ c_2 \text{ — } f_2 \end{cases}$

$\begin{cases} f_1 \text{ accepte } c_1 \\ f_2 \text{ — } c_2 \end{cases}$

FIN

5)

ROUND 1: $\begin{cases} x \to a \\ y \to a \\ z \to c \\ w \to c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \to x \\ b \to \text{rien} \\ c \to w \\ d \to \text{rien} \end{cases}$ ⇒

ROUND 2: $\begin{cases} x \to a \\ y \to c \\ z \to d \\ w \to c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \to x \\ b \to \text{rien} \\ c \to w \\ d \to z \end{cases}$ ⇒

ROUND 3: $\begin{cases} x \to a \\ y \to b \\ z \to d \\ w \to c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \to x \\ b \to y \\ c \to w \\ d \to z \end{cases}$

FIN

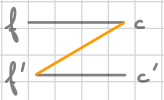
6) Faut-il tronquer ses préférences ?

OUi : q° 3 où c_1 ne veut que f_1 $\Rightarrow$ les 2 candidats auront leur 1er choix.

MAIS les candidats prennent le risque de se retrouver sans rien.
(ex si c_2 préfère f_1).

7) et 8)

<u>Dessin</u>
couplage



alors que f' et c se préfèrent resp.

<u>Preuve</u> : IMPOSSIBLE

Si ça se produit, alors ça signifie qu'à un certain round, f' a proposé à c qui a dit NON.

Mais si c a dit NON à f', alors $\exists f''$ à qui c a dit OUi. Et donc $f'' \geq_c f' \geq_c f$

Mariages stables : une fois qu'on a trouvé qqn, les couples ne changent plus.