

Exercice 1

Un ensemble E d'opérateurs booléens est dit *complet* si tout opérateur booléen peut s'exprimer en fonction de ceux de E .

0. Rappeler comment montrer que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet.
1. Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont complets.
2. Montrer que $\{\neg, \Rightarrow\}$ et $\{\oplus, \Rightarrow\}$ sont complets.
3. Montrer que $\{\uparrow\}$ et $\{\downarrow\}$ sont complets.
4. Expliquer pourquoi $\{\wedge, \vee\}$ n'est pas complet.

Exercice 2

Quelle fonction représente le tableau suivant ?

F		b	
		0	1
a	0	0	1
	1	0	1

Exercice 3

Une formule propositionnelle est sous *forme normale de négation* (FNN) si elle utilise seulement \vee , \wedge et \neg et la négation se produit seulement à côté de variables propositionnelles. Par exemple, $(p \vee (q \wedge \neg a)) \wedge (\neg p \vee a \vee b)$ est sous FNN, alors que $\neg(\neg(a \wedge \neg b) \vee \neg(a \wedge b))$ n'est pas sous FNN. Écrire sous FNN les formules propositionnelles suivantes.

1. $(a \vee \neg \neg b) \wedge (\neg c \rightarrow d)$.
2. $(a \wedge \neg(\neg b \wedge c)) \wedge \neg(b \vee \neg a)$.
3. $\neg(\neg(a \wedge \neg b) \vee \neg(a \wedge b))$.

Exercice 4

Considérons la fonction Java suivante.

```
boolean f(int i, boolean a, boolean b) {
    if (a && (i > 0)) return b;
    else if (a && i <= 0) return false;
    else if (a || b) return a;
    else return (i > 0);
}
```

Si $c = (i > 0)$, écrire la table de vérité de f en fonction de a , b et c et la FND de f . Écrire une fonction Java g équivalente à f qui n'a qu'une seule instruction `return` et n'utilise pas d'instructions conditionnelles.

Exercice 5

Une formule propositionnelle est sous *forme normale disjonctive* (FND) si elle est une disjonction de clauses conjonctives. Une formule propositionnelle est sous *forme normale conjonctive* (FNC) si elle est une conjonction de clauses disjonctives. Écrire sous FND les formules FNC suivantes.

1. $(a \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee d)$.
2. $(a \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (e \vee f)$.

Que pouvons-nous dire de la taille du formule FNC et du formule FND correspondant ?

Nous allons travailler avec le logiciel Logisim. Pour cela, il faut télécharger le fichier

`logisim-generic-2.7.1.jar`

disponible sur le site Web de Logisim (le lien est publié sur Moodle), puis émettre la commande suivante dans la console.

```
java -jar logisim-generic-2.7.1.jar
```

Exercice 1

Considérez les expressions suivantes.

1. Et : $ED = (a \wedge (b \wedge (c \wedge d)))$ et $EG = (((a \wedge b) \wedge c) \wedge d)$.
2. Ou : $OD = (a \vee (b \vee (c \vee d)))$ et $OG = (((a \vee b) \vee c) \vee d)$.
3. Non-et : $NED = \neg(a \wedge \neg(b \wedge \neg(c \wedge d)))$ et $NEG = \neg(\neg(\neg(a \wedge b) \wedge c) \wedge d)$.
4. Non-ou : $NOD = \neg(a \vee \neg(b \vee \neg(c \vee d)))$ et $NOG = \neg(\neg(\neg(a \vee b) \vee c) \vee d)$.

Complétez le tableau suivant en créant les circuits Logisim correspondants qui utilisent les ports et, ou, non et x-ou.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>ED</i>	<i>EG</i>	<i>OD</i>	<i>OG</i>	<i>NED</i>	<i>NEG</i>	<i>NOD</i>	<i>NOG</i>
0	0	0	0								
0	0	0	1								
0	0	1	0								
0	0	1	1								
0	1	0	0								
0	1	0	1								
0	1	1	0								
0	1	1	1								
1	0	0	0								
1	0	0	1								
1	0	1	0								
1	0	1	1								
1	1	0	0								
1	1	0	1								
1	1	1	0								
1	1	1	1								

Quelles opérations semblent être associatives ?

Exercice 2

Considérons la fonction Java suivante.

```
boolean f(boolean a, boolean b, boolean c) {
    if (a && c) return b;
    if (a && !c) return !b;
    return true;
}
```

Réaliser un circuit qui permet de calculer f . Vérifier que le circuit est correct.

Exercice 3

Nous voulons réaliser un circuit qui permet de calculer, à partir d'un nombre e représenté en binaire sur 4 bits non-signé $e_3e_2e_1e_0$, une fonction booléenne p_2 qui vaudra 1 s'il y a au moins deux 1 consécutifs dans le mot $e_3e_2e_1e_0$ en entrée et 0 sinon, et une fonction booléenne p_3 qui vaudra 1 s'il y a au moins trois 1 consécutifs dans le mot $e_3e_2e_1e_0$ en entrée et 0 sinon.

1. Quelle sont les valeurs de p_2 et p_3 si l'entrée du circuit code le nombre $(12)_{10}$? Et si l'entrée du circuit code le nombre $(11)_{10}$?
2. Donner la table de vérité pour les deux fonctions p_2 et p_3 .
3. À partir de la table de vérité, donner sous forme normale disjonctive les formules correspondant aux fonctions p_2 et p_3 .
4. À partir des formes normales disjonctives, réaliser le circuits qui calcule p_2 et p_3 à l'aide de portes à quatre entrées.