Université de Paris

Algorithmique (AL5)

Matěj Stehlík

17/9/2021

Équipe pédagogique

TD-INF1	Claire Mathieu	<claire.mathieu@irif.fr>
TD-INF2	Mikaël Rabie	<mikael.rabie@irif.fr>
TD-INF3	Pierre Charbit	<charbit@irif.fr>
TD-INF4	Yoann Dufresne	<yoann.dufresne@pasteur.fr>
TD-INF5	Álvaro Arenas	<aarenas@irif.fr>
TD-MI-BIO	Roberto Mantaci	<roberto.mantaci@irif.fr>
TD-MI-JAP	Balthazar Bauer	<balthazar.bauer@ens.fr>
CM	Matěj Stehlík	<matej@irif.fr>

Volumes horaires

Cours magistraux (CM)	24h	*2h par semaine*
Travaux dirigés (TD)	24h	*2h par semaine*

Évaluation

Contrôle continu intégral (pas de session 2)

I	note moyenne[1] de 3 intérrogations TD
ET	note épreuve terminale (janvier)
SC	note seconde chance (juin)

$$\text{note finale} = \max\{\mathrm{SC}, 0.5 \times \mathrm{I} + 0.5 \times \mathrm{ET}\}$$

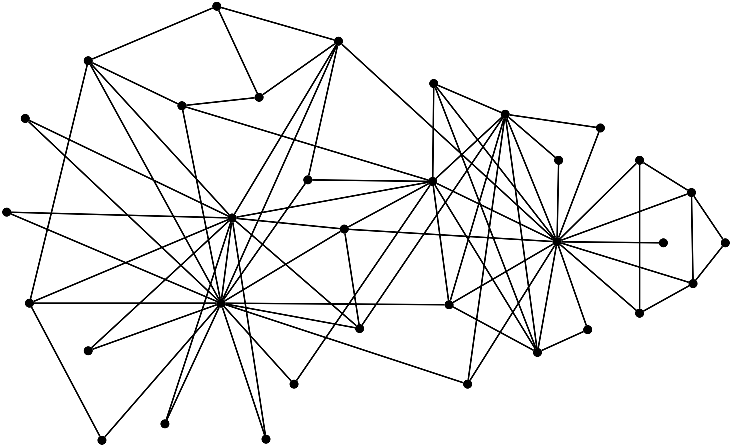
1. Calcul basé uniquement sur les deux meilleures notes

Objectifs

Le cours présente les algorithmes des graphes, plus particulièrement

- algorithmes d'exploration
  - parcours en largeur
  - parcours en profondeur
- algorithmes d'optimisation
  - arbre couvrant de poids minimum
  - plus cours chemin
  - couplage maximum
  - flot maximum
  - coloration...

Exemple d'un graphe



Graphes

- Soit X un ensemble.
- On note $\binom{X}{2}$ l'ensemble des parties à deux éléments de X.
- En général, on notera uv la partie $\{u, v\}$.
- L'ordre et les répétitions ne sont pas pris en compte : $12 = 21$.

Exemple

Si $X = \{1, 2, 3\}$, alors $\binom{X}{2} = \{12, 13, 23\}$.

Définition

Vertex

- Un graphe est un couple $G = (V, E)$ formé par un ensemble fini V et un sous-ensemble E de $\binom{X}{2}$.

Edge

- V est l'ensemble des sommets de G (on le note aussi $V(G)$).
- E est l'ensemble des arêtes de G (on le note aussi $E(G)$).

À quoi ça sert ?

- Les sommets modélisent des “objets”
  - personnes
  - pages web
  - molécules
  - aéroports. . .
- Les arêtes modélisent des “relations” (binarires) entre ces objets
  - amitiés
  - hyperliens
  - liaisons chimiques
  - vols. . .
- Les arêtes peuvent être
  - non-orientées
  - orientées (dans ce cas on parle de graphes orientés)

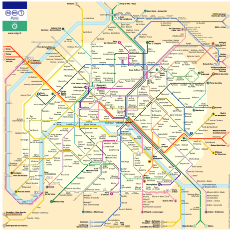
Quelques applications des graphes

Les graphes sont très utilisés dans :

- les problèmes de routage en réseau,
- les problèmes de trafic en transport,
- l'étude des jeux,
- la recherche d'information (graphe du web)
- codage
- ordonnancement et emploi du temps
- ...

Quelques exemples de graphes

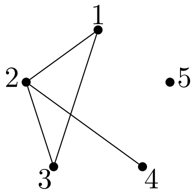
- $(\{1,2,3,4,5\},\{12,13,23,24\})$.
- Le métro : ($\{$stations$\}$, $\{$stations directement reliées$\}$).



- L'internet : ($\{$pages web$\}$, (hyper-)liens).
- Facebook : ($\{$utilisateurs$\}$, $\{$amitiés$\}$).
- Molécules. $V = \{$atomes$\}$, $E = \{$atomes partageant des électrons$\}$.

Représentation graphique

- On représente chaque sommet par un disque : ●
- Pour représenter une arête uv, on trace un trait entre les disques correspondants à u et à v.



Remarques

- La forme des « disques » et des « traits » n'a aucune importance (sauf pour la lisibilité de la figure).
- Ce qui compte, c'est de traduire graphiquement s'il y a une arête entre deux sommets ou non.

Adjacence et incidence

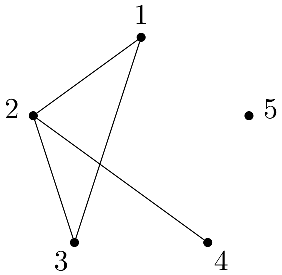
Définition

Soient G un graphe, u et v deux sommets de G et e une arête de G.

- u et v sont adjacents si $uv \in E(G)$; (= ils sont reliés)
- e est incidente à u si $u \in e$; (= u extrémité de e)
- les deux éléments de e sont ses extrémités ; Neighbourhood
- le voisinage de u dans G est l'ensemble $N_G(u)$ des sommets de G adjacents à u ; (= tous les sommets reliés à u)
- les voisins de u sont les éléments de $N_G(u)$;
- l'ensemble des arêtes incidentes à u est noté $\delta_G(u)$.

(= les arêtes qui partent de de

Exemple



- 1 et 2 sont adjacents
- 4 est voisin de 2
- $N(2) = \{1, 3, 4\}$
- $N(5) = \emptyset$ (5 est isolé)
- l'arête 12 est incidente à 2

Sous-graphes

tous les sommets
de G sont des sommets
de H, et les arêtes
de H sont des
arêtes de G

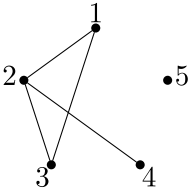
Définition

Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes.

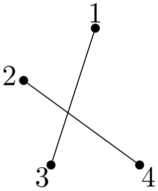
- H est un sous-graphe de G si $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$.
- H est un sous-graphe couvrant de G si $W = V$ et $F \subseteq E$.
- H est un sous-graphe induit de G si $W \subseteq V$ et F contient toutes les arêtes $uv \in E$ où $u, v \in W$. On le note $G[W]$.

↳ H contient certains sommets de G, et toutes les
arêtes de G qui contiennent une paire de sommets
de H.

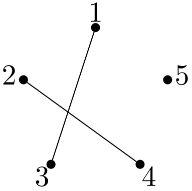
Illustration des différents types de sous-graphe



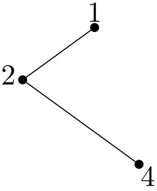
G



sous-graphe de G



sous-graphe couvrant de G



sous-graphe induit de G

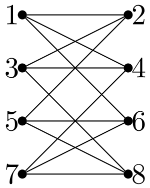
Isomorphismes

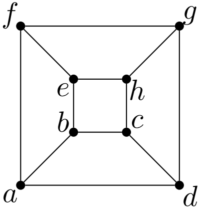
- Souvent, on ne fera pas de distinction entre deux graphes ayant « la même forme », c'est-à-dire : qu'on ne peut les distinguer si l'on oublie les noms de leurs sommets.

Définition

- Soient G, H deux graphes.
- On dit que G est <u>isomorphe</u> à H s'il existe une bijection f de $V(G)$ sur $V(H)$ telle que pour toute paire xy de sommets de G, on a $xy \in E(G)$ si et seulement si $f(x)f(y) \in E(H)$.

Illustration





- La relation d'isomorphisme est une relation d'équivalence.

Remarque

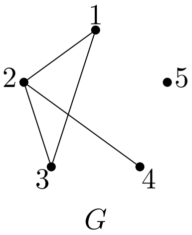
Il n'est pas toujours facile, à partir de représentations graphiques, de décider si deux graphes sont isomorphes.

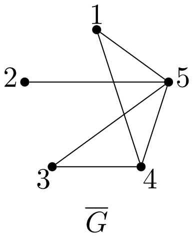
Graphe complémentaire

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe complémentaire $\overline{G}$ est défini comme $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

- C'est-à-dire, les arêtes de G sont les non-arêtes de $\overline{G}$, et vice versa.





Représentation matricielle et par listes

- Il y a plusieurs façons de représenter un graphe en mémoire de l'ordinateur.
- On va en voir trois :
  1. matrice d'adjacence
  2. matrice d'incidence
  3. liste d'adjacence
- En général, chacune est plus ou moins adaptée au problème considéré et possède des avantages/inconvénients notamment par rapport à la densité (en arêtes) du graphe.

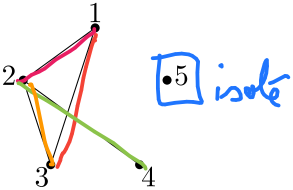
Matrices d'adjacence

peu économiQ : bcp de 0

Définition

- Soit G un graphe à n sommets.
- On numérote les sommets $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
- La matrice d'adjacence de G (pour la numérotation choisie) est la matrice M carrée $n \times n$ sur $\{0, 1\}$ définie par :

$$M_{ij} = 1 \text{ si et seulement si } v_i v_j \in E(G).$$



symétriQ

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

- M est symétrique et nulle sur la diagonale.

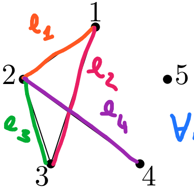
Matrices d'incidence

peu utilisée ds les algos
mais peut aider ds les preuves

Définition

- Soit G un graphe à n sommets et m arêtes.
- On numérote les sommets $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ et les arêtes $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$.
- La matrice d'incidence de G est la matrice N sur $\{0,1\}$ de taille $n \times m$ définie par :

$$N_{ij} = 1 \text{ si et seulement si } v_i \in e_j.$$



isolé
$\forall i,\ v_5 \notin e_i$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

- La somme de chaque colonne vaut 2.

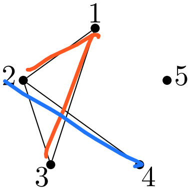
car chaque colonne représente 1 arête à 2 sommets

Listes d'adjacence

la + utilisée ds les algos

Définition

- Soit G un graphe.
- Une représentation en liste d'adjacence de G est la donnée, pour chaque sommet v de G, de la liste des voisins de v.



$1: \ [2,3]$

$2: \ [1,3,4]$

$3: \ [1,2]$

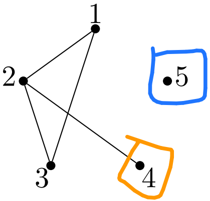
$4: \ [2]$

$5: \ []$

Degrés

Définition

- Soient G un graphe et v un sommet de G.
- Le degré de v dans G, noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes de G incidentes à v.
- C'est aussi (par simplicité des graphes définis dans ce cours) le nombre de voisins de v : $d_G(v) = |N_G(v)|$.
- Si $d_G(v) = 0$ on dit que v est isolé.
- Si $d_G(v) = 1$ on dit que v est une feuille.



- $d(1) = 2$
- $d(2) = 3$
- $d(3) = 2$
- $d(4) = 1$ feuille
- $d(5) = 0$ isolé

La somme des degrés

la somme des degrés du graphe

Théorème

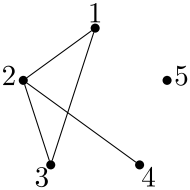
Soit G un graphe, alors $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$.

2 fois le nb d'arêtes

Démonstration

- Soit S la somme de tous les éléments de la matrice d'incidence de G.
- La somme de chaque ligne est égale au degré du sommet correspondant, donc $S = \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$.
- La somme de chaque colonne est égale à deux, et on a $|E(G)|$ colonnes, donc $S = 2|E(G)|$.

Illustration



$$N = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} & \end{array}$$

$$S = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 + 3 + 2 + 1 + 0 = 8$$

$$S = 2|E(G)| = 2 \cdot 4 = 8$$

Une conséquence

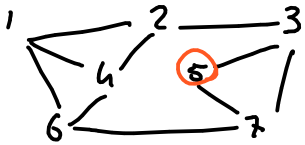
Corollaire

- Soit G un graphe. La somme $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ est paire.
- Autrement dit, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exemple

Sept personnes participent à une fête. Est-il possible que chacun d'entre eux serre la main de trois autres personnes exactement ?

NON



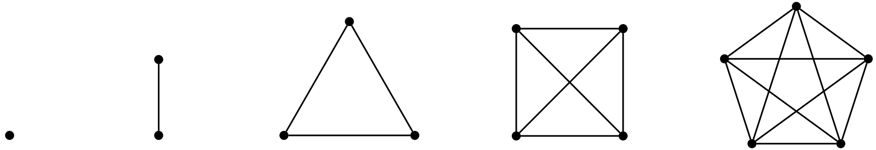
manque 1 arête au 5

Graphes complets

tous les sommets sont reliés entre eux

Définition

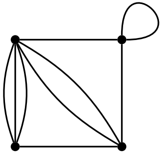
- Soit $n \geq 1$ un entier.
- Le graphe complet à n sommets est le graphe $\left(\{1, \dots, n\}, \binom{\{1,\dots,n\}}{2}\right)$.
- Il est noté K_n.



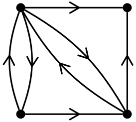
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Variants des graphes

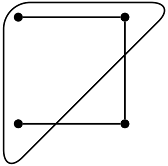
- Un multigraphe est un graphe auquel on permet d'avoir plus d'une arête entre deux sommets ou une arête dont les deux extrémités sont identiques (boucles).



- Un graphe orienté est obtenu à partir d'un graphe en ordonnant, pour chaque arête, ses extrémités. Autrement dit, chaque arête est dirigée vers une de ses extrémités.



- Dans un hypergraphe, les (hyper-)arêtes peuvent être incidentes à un nombre arbitraire de sommets (et pas seulement à deux comme dans le cas des graphes).



Opérations élémentaires

Définition

Une opération élémentaire est une opération qui s'effectue en temps constant sur tous les calculateurs usuels.

On considérera les opérations suivantes comme élémentaires :

- Affectation ;
- Comparaisons ;
- Opérations arithmétiques et logiques ;
- Accès à une case d'un tableau ;
- Appel d'une sous-routine ;
- ...

Complexité temporelle

Définition

La complexité temporelle (dans le pire cas) d'un algorithme A, noté $T(n)$, est le nombre d'opérations élémentaires maximum que puisse effectuer A avant d'arriver à un résultat, étant donné une entrée de taille n.

- $T(n)$ s'exprime en fonction de la taille n de l'entrée.
- pour un graphe, on compte la complexité en fonction du nombre de sommets n, et éventuellement du nombre d'arêtes m.
- donc n n'est pas ici exactement la taille de l'entrée, mais les deux sont reliés polynomialement.

Remarques sur la complexité temporelle

- Les études de complexité portent dans la majorité des cas sur le comportement asymptotique, lorsque la taille des entrées tend vers l'infini, et l'on utilise couramment les notations grand O.
- La complexité temporelle est la mesure la plus courante en algorithmique ; on parle parfois simplement de la complexité d'un algorithme
- Il existe d'autres mesures comme la complexité spatiale.

Exemple

Entrées : graphe G à n sommets sous forme de matrice d'adjacence A
Sorties : degré moyen de G
début

```
somme_degre ← 0 ;
pour i de 0 à n − 1 faire
    pour j de 0 à n − 1 faire
        somme_degre ← somme_degre+A[i][j] ;
Retourner (somme_degre/n) ;
```

La notation grand O

Définition

- Soient $f(n)$ et $g(n)$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- On écrit $f \in O(g)$ (ou plus souvent $f = O(g)$) s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|f(x)| \leq c \cdot g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ suffisamment grand.

Remarques

- $f \in O(g)$ veut dire que f n'augmente pas plus vite que g.
- $f \in O(g)$ est moins fort que $f \leq g$.
- La différence vient de la constante c ; par exemple, $100n \in O(n)$.
- Cette constante nous permet d'ignorer ce qui se passe pour des petites valeurs de n.

La notation grand O : exemple

- Supposons que nous devrons choisir entre deux algorithmes A_1 et A_2 pour une certaine tâche, de complexité $T_1(n) = n^2$ et $T_2(n) = 300n + 1000$, respectivement.
- T_2 se comporte mieux quand n augmente ; A_2 est meilleur.
- $T_2 \in O(T_1)$, parce que
$$\frac{T_2(n)}{T_1(n)} = \frac{300n + 1000}{n^2} \leq 1000$$
pour tout $n \geq 1$.
- Par contre, $T_1 \notin O(T_2)$, car
$$\frac{T_1(n)}{T_2(n)} = \frac{n^2}{300n + 700}$$
tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

La notation grand O : exemple

- Supposons qu'il y a un autre algorithme A_3 de complexité $T_3(n) = n$.
- La différence entre T_2 et T_3 est minuscule comparé à la différence énorme entre T_1 et T_2.
- Donc, on considère deux fonctions comme équivalentes si elles ne diffèrent que par une constante multiplicative.
- On remarque que $T_2 = O(T_3)$:

$$\frac{T_2(n)}{T_3(n)} = \frac{300n + 700}{n} \leq 1000.$$

- On a aussi $T_3 = O(T_2)$, avec $c = 1$.

La notation Ω et Θ

Définition

De la même manière que $O(\cdot)$ est un analogue de $\leq$, nous pouvons aussi définir des analogues de $\geq$ et de $=$ comme suit :

$f \in \Omega(g)$ veut dire $g \in O(f)$

f est tjrs auO aussi gd que G

$f \in \Theta(g)$ veut dire $f \in O(g)$ et $f \in \Omega(g)$.

2 fct équivalentes

Règles pour simplifier les fonctions dans $O(\cdot)$

Omettre les termes dominés par d'autres termes. En particulier :

- Omettre les constantes multiplicatives : $25n^3$ domine n^3.
- n^a domine n^b si $a > b$: par exemple, n^2 domine n.
- Les fonctions exponentielles dominent les polynômes : 2^n domine n^{100}.
- Les polynômes dominent les logarithmes : n domine $(\log n)^3$.