CM5 Réseau de Petri – suite (2)

Lundi 11.10.2021

Marquage étendu

Un marquage qui va d'une place vers « ℕ union oméga »

$$M : P \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$$

Relation d'ordre

$$M_1 \leq M_2 \ ssi \ \forall \ M_1(p) \ \leq M_2(p)$$

Sachant que

$$\forall \ n \ \in \ \mathbb{N} \quad n < \omega \quad et \quad \omega \leq \omega$$

Extrapolation

$$Pour\ M' \leq M\ , Extrapol(M'M)\ est$$
$$\textbf{le marquage étendu}$$
$$t.q. \forall \ p \ \in \ P$$
$$\begin{cases} Extrapol(M'M)(p) = M(p)\ si\ M'(p) = M(p) \\ Extrapol(M'M)(p) = \omega \ \ si\ M'(p) < M(p) \end{cases}$$

Algorithme : arbre de couverture

On s'arrête l'lorsque :

- *Si le sommet a déjà été vu.*
- *Si ce sommet que je viens de trouver, il existe un ancêtre dans l'arbre qui est plus grand que lui.*

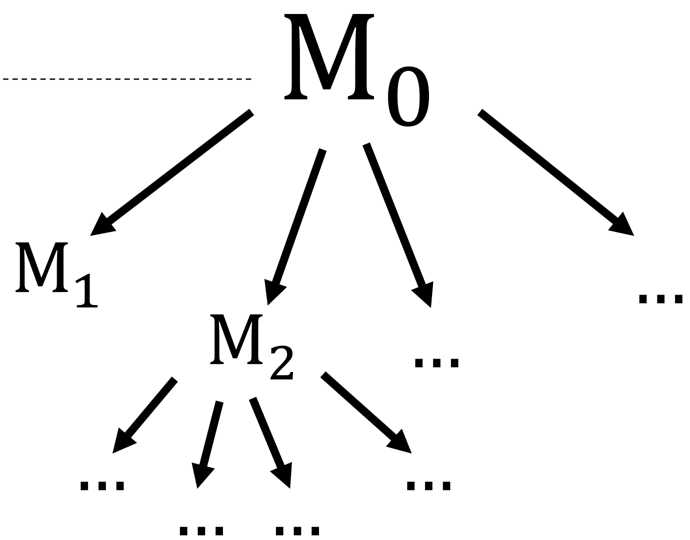
Sous forme d'algorithme

- Initialiser la construction ($\overbrace{\underbrace{\text{racine de l'arbre}}_{M_0}}^{\text{ou noeud initial}}$) avec le marquage initial.
- Répéter jusqu'à plus de nœud à traiter
  - Prendre un nœud à traiter et le marquer.
  - Générer ses successeurs par les transitions qui sont exécutable à ce nœud.
  - Pour tout successeur :
    - Si marqué alors rien (rien à faire).
    - Sinon :

      S'il est pas marqué, ça veut dire que je le découvre mtn, donc je veux le marquer à traiter, mais avant ca on veut vérifier quelque chose.
      - Si $\exists$ M', un ancêtre de M dans l'arbre (sur le chemin de M_0 à M), t. q $M' \leq M$
        - ajouter Extrapol(M' , M) aux noeud à traiter.
      - Sinon : M est à traiter.

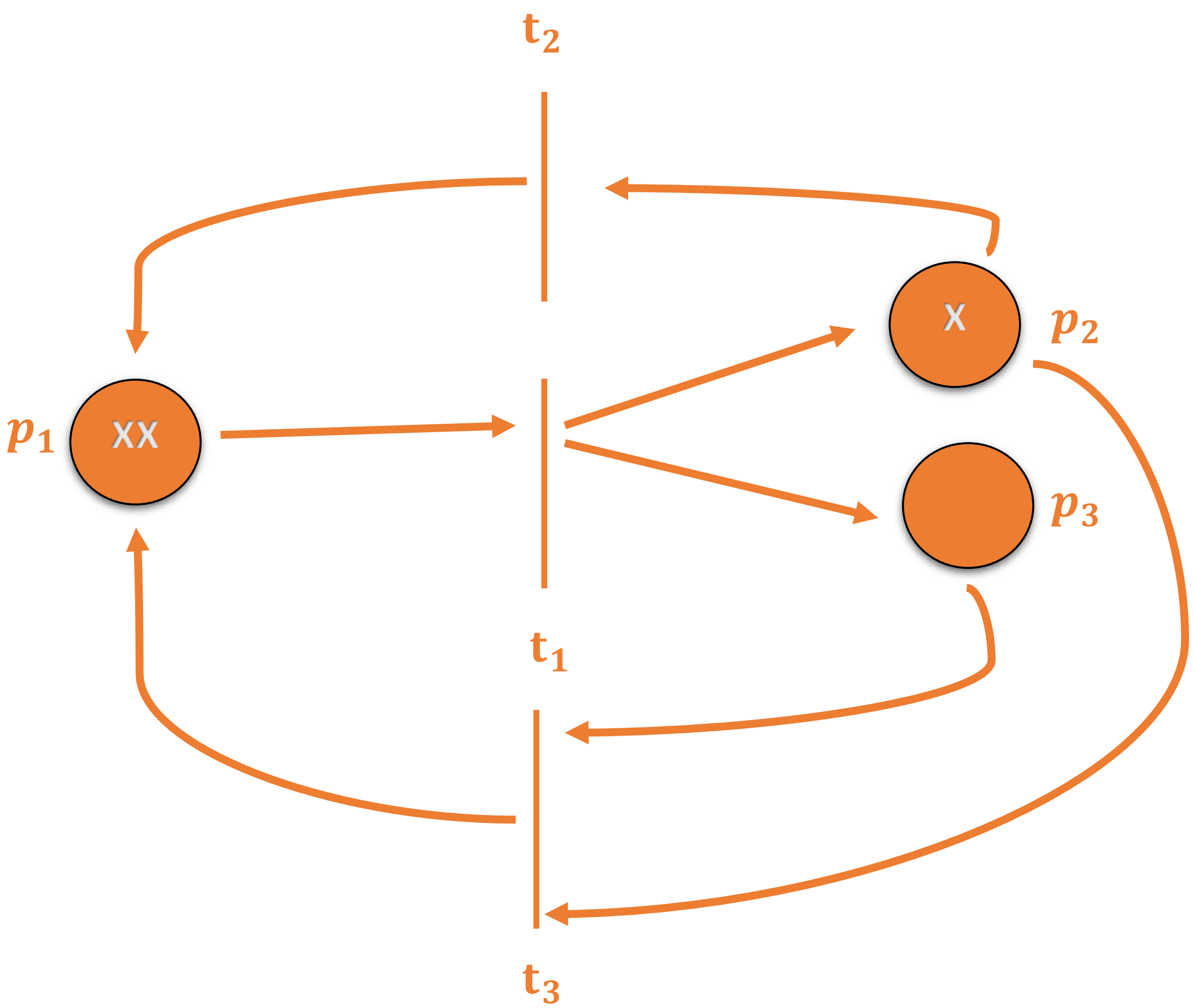
Exemples par rapport à l'algo

C'est comme un parcours de graphe :

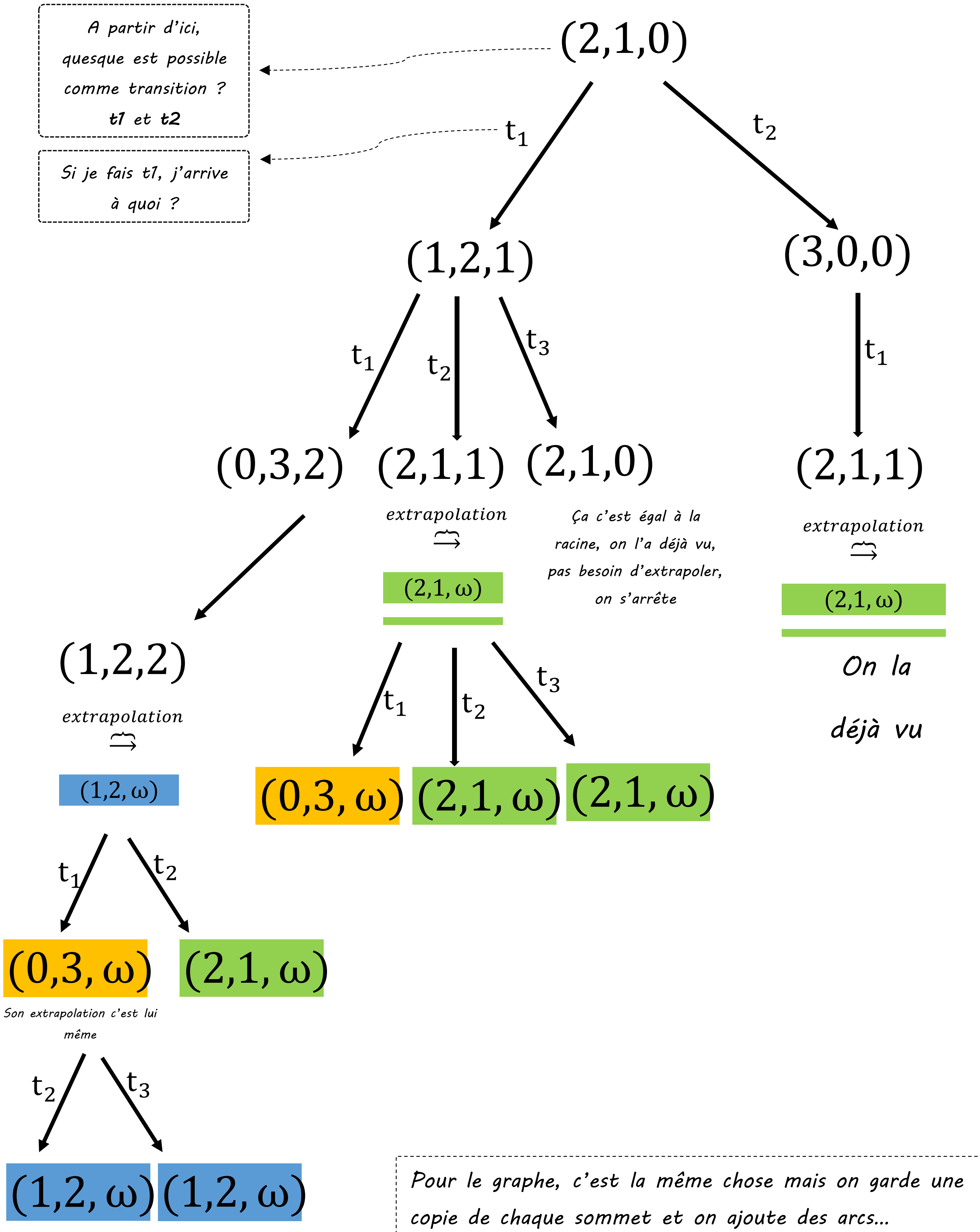


Ce qu'on a défini dans l'algorithme c'est l'arbre de couverture. Le graphe de couverture = cet arbre mais replier…

Exemple



On va partir du marquage (2,1,0), ça c'est notre M_0, et on va avancer. Ce n'est pas important par ou on commence !



Pour le graphe, c'est la même chose mais on garde une copie de chaque sommet et on ajoute des arcs…

Marquages (des vrais marquages, pas des marquages étendu)

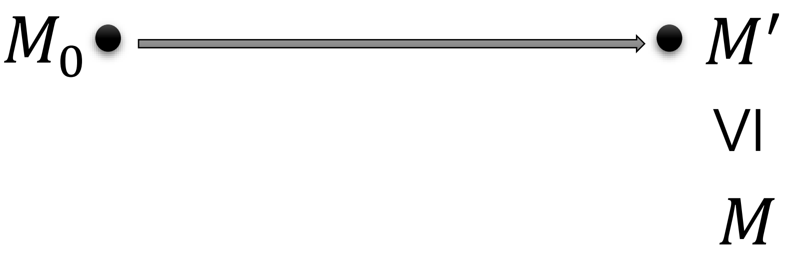
$$M \text{ couvre } M' \text{ ssi } M \leq M'$$

Problème de la couverture

Le moyen de décider si c'est couvert :

M est couvert ssi, $\exists$ un marquage étendu M' parmi les nœuds de l'arbre de couverture.

Etant donné M , est-ce que M est couvert par un accessible ?
Je part de M_0 et je regarde si je peux arriver à un certain M' qui est plus grand que M ?



Question (3,0,2) est couvert ?

Réponse : ce marquage-là, il existe un marquage qui va être plus grand que lui ? Quand on voit (3,0,ω), nous sachons qu'il représente tous les marquages de la forme (3,0,?), nous sachons pas combien d'entre eux sont accessible, mais je sais que toujours il y aura quelqu'un d'accessible. Donc, il y a ce marquage-là avec une valeur ω de qui est acsssessible.

Question (3,1,2) est accessible ?

Réponse : non.

Question *(3,1,2) est couvert ?*

***Réponse** : non, (et pas accessible. S'il avait été accessible, il aurait été accessible par lui). Pour qu'il soit couvert faut que je trouve un nœud plus grand que (3,1,2), or on n'a pas un nœud plus grand que ça.*

$$\boxed{\boldsymbol{accessible \implies couvert}}$$

Accessible implique couvert. Si je suis accessible, je suis couvert par moi.

$$\boxed{\boldsymbol{couvert \;\not\Rightarrow accessible}}$$

Si c'est couvert, ce n'est pas forcément accessible.

Un autre principe d'analyse

- Au lieu de résonner en allant en avant, on va aller en arrière.
- Si on s'intéresse à un état mauvais, un état qui viole l'exclusion mutuelle, donc au lieu de commencer du marquage initial et développer et ensuite voir si je suis couvert, etc.
- Au lieu de ça, je commence par le « mauvais » et je recule.
- Parfois, quand on résonne en arrière, on peut trouver des algos plus simples.

- C'est quoi le principe ? On va les appeler « les états mauvais », on les note « B » (comme Bad en anglais).

- B : ensemble des configurations à atteindre.

- Ce qu'on veut c'est calculer l'ensemble des prédécesseurs, comment on fait ça ?

$$X_0 = B$$
$$X_1 = \mathrm{pre}(B)$$
$$X_2 = \mathrm{pre}(\,\mathrm{pre}(B)\,) = \mathrm{pre}^2(B)$$
$$X_3 = \mathrm{pre}(\,\mathrm{pre}(\,\mathrm{pre}(B)\,)\,) = \mathrm{pre}^3(B)$$

…

- *Ce qu'on cherche c'est l'union des* X_i

$$\cup_{i \geq 0} X_i = \underbrace{pre^*(B)}_{= \cup_{i \geq 0} pre^i(B)}$$

- *Tout a l'heure, on a forcé l'arrêt avec l'extrapolation. La, comment on va forcer l'arrêt ?*

$\underline{\gamma}$ **Bel ordre** **Well quasi-ordering (WQO)**

Pour toute séquence infini $X_0 \, X_1 \, X_2 \ldots$

$$\exists \, i, j \quad i < j \; et \; X_i \leq X_j$$

Donc il faut montrer qu'on a un WQO.

Lemme de Dickson

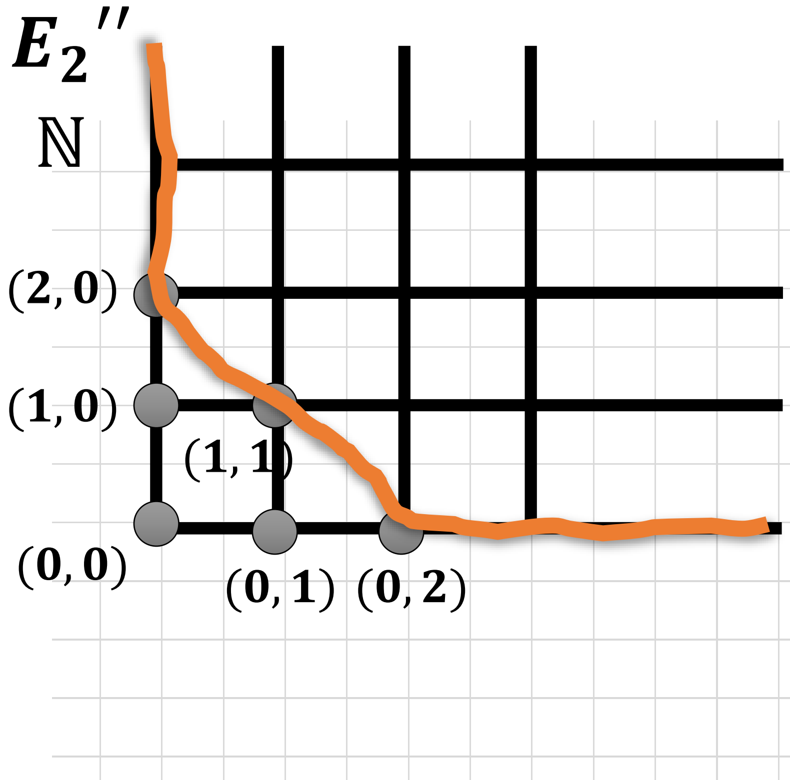
$$\leq \; \in \; N^n \quad est \, un \quad WQO.$$

Si je prends un ensemble E avec cette ordre (le Bel ordre),

$$(E, \underline{\gamma}) \qquad \underline{\gamma} \, WQO$$

$$\forall S \subseteq E \qquad S \, a \, un \, nombre \, fini \, de \, minimaux.$$

WQO me dit que y'a 2 qui sont comparable



Il y a un ensemble fini de minimaux même si l'ensemble est infini.

- D'abord on va définir la fermeture par le haut :

Fermeture par le haut

$$S \text{ est } \underline{\gamma} - \text{fermé par le haut ssi}$$
$$\forall\, x \in S, \quad \forall\, y \in E$$
$$x \leq y \Rightarrow y \in S$$

Pour n'importe quel élément de S et quel que soit y qui est supérieur a lui, donc évidement y appartient à S aussi, pour S quelle que soit.

$$\underline{\gamma} - \text{fermeture de } S : \text{le plus petit ensemble } \underline{\gamma} - \text{fermé qui contient } S. \text{Noté} : \ S \uparrow$$

Ce qui va nous intéresser : je peux atteindre quelque chose quand c'est fermé par le haut ? il y a un thm qui dit que :

Thm : $Soit\ S\ \ \underline{\gamma} - fermé\ par\ le\ haut\ (S = S\uparrow)$

Être fermé ça veut dire être égal à sa fermeture par le haut (vu qu'on est déjà fermé).

$$\underbrace{\mathrm{pre(S)}}_{\substack{l'ensemble\ de\\ tous\ les\\ prédécesseurs}}\quad est\ aussi\ \underline{\gamma} - fermé\ \ par\ le\ haut.$$

Def : $\mathrm{pre(S)} = \{M' | \exists\ t\ \ \exists M \in S\ \ et\ M' \xrightarrow{t} M\}$

Si on part d'un ensemble fermé par le haut, alors forcément l'ensemble des prédécesseurs est aussi fermé par le haut.

Coro (corolaire) : $\mathrm{pre}^{*}(\mathrm{S})\ est\ \underline{\gamma} - fermé\ \ par\ le\ haut.$

$$\begin{gathered} X_1 \geq\ c_1 \\ X_2 \geq\ c_2 \\ \dots \\ X_m \geq\ c_m \end{gathered}$$

Avant le thm, faut définir quelque chose :

On voudra calculer les pre(B) … pre(pre(B)) …

On va s'intéresser quel est la priorité de ces ensembles pour faire un algo.

Mtn, on va déclarer une classe de système qui est monotone (les réseaux de Petri sont monotones).

Systèmes monotones

Si de M_1 je fait une transition t pour aller a M_1'

$$\forall M_1, M_1', \qquad \forall t \qquad M_1 \xrightarrow{t} M_1'$$

____

$$\forall M_2 \qquad M_2 \geq M_1 \qquad \exists M_2' \geq M_1' \quad t.q.$$

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \leq & M_2 \\ {}^{t}\downarrow & & \downarrow^{t} \\ M_1' & \leq & M_2' \end{array} \qquad M_2 \xrightarrow{t} M_2'$$