

Algorithmique (AL5)

TD n° 5 : Plus courts chemins et algorithme de Bellman-Ford

Algorithme de Bellman-Ford

Exercice 1 : faire tourner l'algorithme de Bellman-Ford

En appliquant l'algorithme de Bellman-Ford, calculer les plus courts chemins d'origine q_0 sur le graphe de la figure 1.

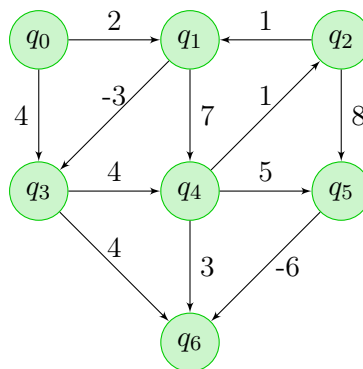


FIGURE 1 – Exemple pour l'exercice 1

Exercice 2 : itérations de Bellman-Ford

1. Montrer que Bellman-Ford peut obtenir un résultat correct dès le premier tour de la boucle principal.
2. Alors, pourquoi en faire d'autres ?
3. Modifier l'algorithme de Bellman-Ford pour qu'il s'arrête avant $n - 1$ itérations, si l'on peut.

I) Utiliser des graphes pour résoudre des problèmes

Problème : Représenter des contraintes [examen de 2017]

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n variables à valeur dans \mathbf{Z} . On appelle contrainte atomique une inégalité sur une différence de variables, c'est à dire de la forme $x_j - x_i \leq c$ avec $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ et $c \in \mathbf{Z}$. Une contrainte convexe C est un ensemble de contraintes atomiques, interprété comme une conjonction (toutes les contraintes doivent être vérifiées). On supposera que pour toute paire de variables x_i, x_j , il y a au plus une contrainte de la forme $x_j - x_i \leq c$. Étant donnée une contrainte convexe E , on note S_E l'ensemble des « valuations » pour X solutions de E , c'est-à-dire des n -uplets de valeurs dans \mathbf{Z} (une pour chaque x_i) qui vérifient toutes les contraintes atomiques de E .

Dans la suite, on utilise la contrainte E_0 définie par l'ensemble $\{x_2 - x_1 \leq 2, x_1 - x_2 \leq -1, x_1 - x_3 \leq -1, x_3 - x_2 \leq 1, x_2 - x_3 \leq 2\}$ pour $X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ comme un exemple récurrent pour toutes les questions. Les valuations $v = (11, 12, 12)$ et $v' = (5, 6, 7)$ sont des solutions possibles pour E_0 (et donc $v, v' \in S_{E_0}$).

À toute contrainte convexe E , on associe un graphe orienté valué $G_E = (S, A, w)$ avec :

- $S = \{x_1, \dots, x_n\}$,
- $A = \{(x_i, x_j) \mid \exists (x_j - x_i \leq c) \in E\}$,
- $w(x_i, x_j) = c$ ssi $\exists (x_j - x_i \leq c) \in E$.

Par exemple, la contrainte convexe E_0 pour X_0 est représentée par le graphe G_{E_0} de la Figure 2.

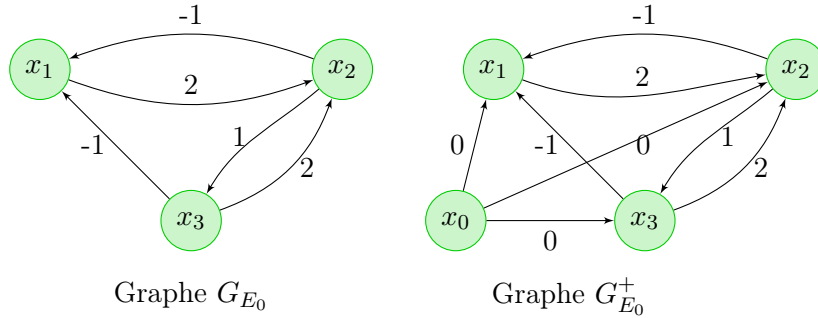


FIGURE 2 – Graphes pour l'exemple E_0 .

1. Pour chaque cas ci-dessous, donner le graphe de contraintes correspondant à la contrainte convexe associée à l'ensemble X :
 - (a) $E_1 = \{x_1 - x_3 \leq 2; x_2 - x_3 \leq -1; x_3 - x_1 \leq 1; x_1 - x_2 \leq 1\}$ et $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$.
 - (b) $E_2 = \{x_1 - x_3 \leq 2; x_2 - x_3 \leq -1; x_3 - x_1 \leq -1; x_1 - x_2 \leq 1\}$ et $X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$.
 - (c) $E_3 = \{x_1 - x_3 \leq 2; x_2 - x_3 \leq -1; x_3 - x_1 \leq 1; x_1 - x_2 \leq 1\}$ et $X_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Est-ce que $v_1 = (12, 11, 12)$ est une solution pour E_1 ? Et $v'_1 = (12, 15, 12)$? Pouvez-vous trouver une solution pour E_2 ?
2. On considère à présent le graphe $G_E^+ = (S^+, A^+, w^+)$ qui étend le graphe G_E de la manière suivante : $S^+ = S \cup \{x_0\}$, $A^+ = A \cup \{(x_0, x_i) \mid \text{pour tout } 0 < i \leq n\}$, et $w^+(u, v) = w(u, v)$ si $(u, v) \in A$ et $w^+(x_0, x_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. A la Figure 2, on donne le graphe $G_{E_0}^+$ pour l'exemple E_0 ci-dessus.
 - (a) Construire le graphe $G_{E_1}^+$.
 - (b) Calculer les distances d'un plus court chemin entre x_0 et les sommets x_1, x_2, x_3 dans le graphe $G_{E_1}^+$. On notera ces distances $\delta_{G_{E_1}^+}(x_0, x_1)$, $\delta_{G_{E_1}^+}(x_0, x_2)$, et $\delta_{G_{E_1}^+}(x_0, x_3)$.
 - (c) Vérifier que la valuation $v = (\delta_{G_{E_1}^+}(x_0, x_1), \delta_{G_{E_1}^+}(x_0, x_2), \delta_{G_{E_1}^+}(x_0, x_3))$ est une solution de E_1 .
 - (d) Montrer (en utilisant les propriétés des plus courts chemins) que si il n'y a pas de circuit strictement négatif dans le graphe G_E^+ d'une contrainte convexe E quelconque, alors la valuation v qui associe à x_i (pour $i = 1, \dots, n$) la valeur $\delta_{G_E^+}(x_0, x_i)$ est toujours une solution de E . C'est-à-dire que si $x_j - x_i \leq c$ est une contrainte atomique de E , alors on a $\delta_{G_E^+}(x_0, x_j) - \delta_{G_E^+}(x_0, x_i) \leq c$.
 - (e) Montrer que si il y a un circuit strictement négatif dans G_E^+ , alors il n'y a pas de solution pour E (et donc S_E est vide).
 - (f) En déduire un algorithme qui étant donnée une contrainte convexe E pour un ensemble de variables X , renvoie une valuation solution pour E si il en existe une, ou la valuation vide $v = \emptyset$ sinon. Donner sa complexité.

Problème : taux de change optimal

On souhaite convertir de l'argent d'une devise dans une autre. Le problème est que toutes les conversions ne sont pas possibles : pour deux monnaies A et B , on peut parfois convertir de l'argent de A en B , parfois non. On considère donc un *graphe de change* $G = (V, E)$ entre monnaies donnant les conversions possibles. Ce graphe est orienté (parfois on peut convertir A en B mais pas B en A).

La *fonction de change* est une fonction c telle que

- une somme S en monnaie A vaut $S.c(A, B)$ en monnaie B (les taxes éventuelles sont incluses).
- $c(A, B)$ est défini si et seulement si (A, B) est un arc du graphe de change.
- $c(A, B) > 0$

Le *graphe de change étendu* est le graphe $G' = (V, E, c)$ pondéré par la fonction de change. Une *séquence de change* est la conversion d'une monnaie A_1 en monnaie A_k en passant par les monnaies intermédiaires $A_2 \dots A_{k-1}$ (en supposant bien sûr toutes ces conversions possibles). Il lui correspond un chemin dans le graphe de change.

Exercice 3 :

Quel est le taux de change de A_1 en A_k dans une séquence de change A_1, A_2, \dots, A_k ?

Exercice 4 :

Dans quelle condition (exprimée sur G') quelqu'un peut-il devenir *infiniment riche* en changeant de l'argent ?

Étant données deux séquences de change différentes de la monnaie A en la monnaie B , la meilleure des deux est celle qui a le taux le plus élevé.

Exercice 5 :

Supposons que l'on connaisse une séquence de change S_1 de la monnaie A en la monnaie B , d'une part, et une séquence S_2 de la monnaie A en la monnaie C d'autre part. Supposons que l'arc (C, B) existe, dans le graphe de change. Écrivez une condition de *relâchement* en comparant les taux des séquences S_1 d'une part, S_2 puis (C, B) d'autre part, et gardant la meilleure.

Exercice 6 :

Écrivez une version modifiée de l'algorithme de Bellman-Ford, utilisant cette condition de relâchement modifiée, donnant les meilleurs taux de change d'une monnaie A vers toutes les autres. Pourquoi est-ce correct ?