

Principes de fonctionnement des machines binaires

2019/2020

Pierluigi Crescenzi

Université de Paris, IRIF



- Tests et examens
 - CC : résultat des tests en TD / TP (semaine 4 et semaine 10)
 - E0 : partiel (samedi 26 octobre)
 - E1 : examen mi décembre
 - E2 : examen fin juin
- Notes finales
 - Note session 1 : 25% CC + 25% E0 + 50% E1
 - Note session 2 : $\max(E2, 33\% CC + 67\% E2)$
- Rappel
 - Pas de note \Rightarrow pas de moyenne \Rightarrow pas de semestre
- Site web
 - moodlesupd.script.univ-paris-diderot.fr

- Numération et arithmétique
- Numération et arithmétique en machine
- Numérisation et codage (texte, images)
- Compression, cryptographie, contrôle d'erreur
- **Logique et calcul propositionnel**
- **Circuits numériques**

- On se focalise généralement sur les opérateurs \vee, \wedge, \neg
 - Toute formule logique peut s'écrire en utilisant uniquement ces opérateurs
- Un ensemble d'opérateurs est **complet** si toute formule logique peut s'écrire en utilisant uniquement ses opérateurs
 - $\{\vee, \wedge, \neg\}$ est complet
 - Forme normal disjonctive
 - $\{\wedge, \neg\}$ est complet
 - $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ (De Morgan)

- **Forme normale disjonctive (FND)**
 - Une disjonction de clauses conjonctives
 - Exemple : $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg r \wedge s)$
 - Les clauses sont appelés des **mintermes**

- **Forme normale disjonctive (FND)**
 - Une disjonction de clauses conjonctives
 - Exemple : $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg r \wedge s)$
 - Les clauses sont appelés des **mintermes**
- Il existe aussi une **forme normale conjonctive**
 - Une conjonction de disjonction
 - Exemple : $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s)$

- Construction de l'expression sous FND
 - Dans la table de vérité de l'expression considérée, ne retenir que les lignes pour lesquelles la formule a pour valeur \top
 - Pour chaque telle ligne, on fabrique un minterme dans lequel on fait apparaître la variable p si sa valeur est \top , et $\neg p$ sinon
 - Exemple

p	q	r	E
\top	\perp	\top	\top

 $\Rightarrow p \wedge \neg q \wedge r$

- Pour finir, on fait la disjonction de tous les mintermes obtenus

- Exemple

p	q	$p \oplus q$
\perp	\perp	\perp
\perp	\top	\top
\top	\perp	\top
\top	\top	\perp

- Mintermes

- Exemple

p	q	$p \oplus q$
\perp	\perp	\perp
\perp	\top	\top
\top	\perp	\top
\top	\top	\perp

- Mintermes

- $\neg p \wedge q$

- Exemple

p	q	$p \oplus q$
\perp	\perp	\perp
\perp	\top	\top
\top	\perp	\top
\top	\top	\perp

- Mintermes

- $\neg p \wedge q$

- $p \wedge \neg q$

- Exemple

p	q	$p \oplus q$
\perp	\perp	\perp
\perp	\top	\top
\top	\perp	\top
\top	\top	\perp

- Mintermes

- $\neg p \wedge q$

- $p \wedge \neg q$

- FND : $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

- Exemple

p	q	r	E
\perp	\perp	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top
\top	\perp	\top	\perp
\top	\top	\perp	\top
\top	\top	\top	\perp

- Mintermes

- Exemple

p	q	r	E
\perp	\perp	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top
\top	\perp	\top	\perp
\top	\top	\perp	\top
\top	\top	\top	\perp

- Mintermes

- $\neg p \wedge \neg q \wedge r$

- Exemple

p	q	r	E
\perp	\perp	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top
\top	\perp	\top	\perp
\top	\top	\perp	\top
\top	\top	\top	\perp

- Mintermes

- $\neg p \wedge \neg q \wedge r$

- $\neg p \wedge q \wedge r$

- Exemple

p	q	r	E
\perp	\perp	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top
\top	\perp	\top	\perp
\top	\top	\perp	\top
\top	\top	\top	\perp

- Mintermes

- $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
- $\neg p \wedge q \wedge r$
- $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

- Exemple

p	q	r	E
\perp	\perp	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top
\top	\perp	\top	\perp
\top	\top	\perp	\top
\top	\top	\top	\perp

- Mintermes

- $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
- $\neg p \wedge q \wedge r$
- $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- $p \wedge q \wedge \neg r$

- Exemple

p	q	r	E
\perp	\perp	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top
\top	\perp	\top	\perp
\top	\top	\perp	\top
\top	\top	\top	\perp

- Mintermes

- $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
- $\neg p \wedge q \wedge r$
- $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- $p \wedge q \wedge \neg r$

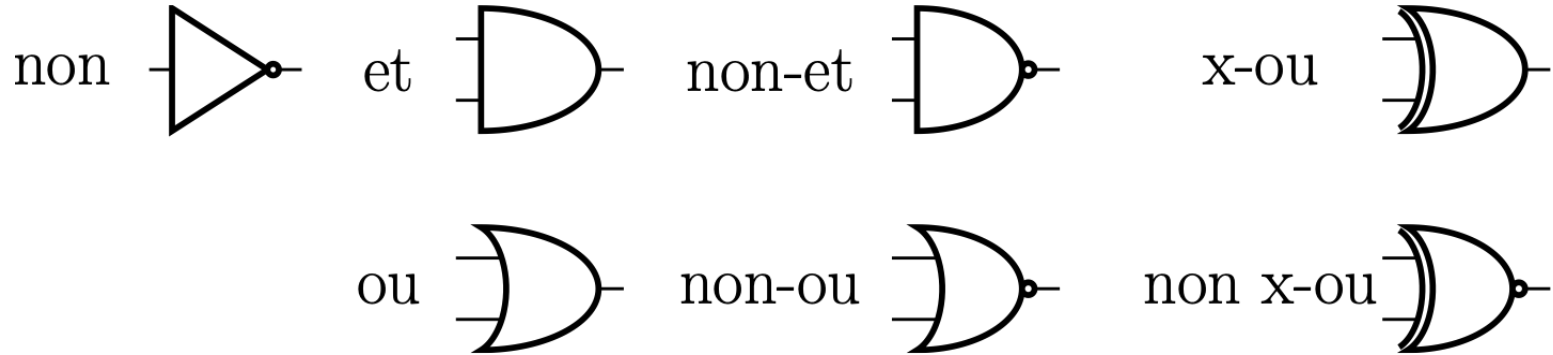
- FND : $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

Circuits numériques

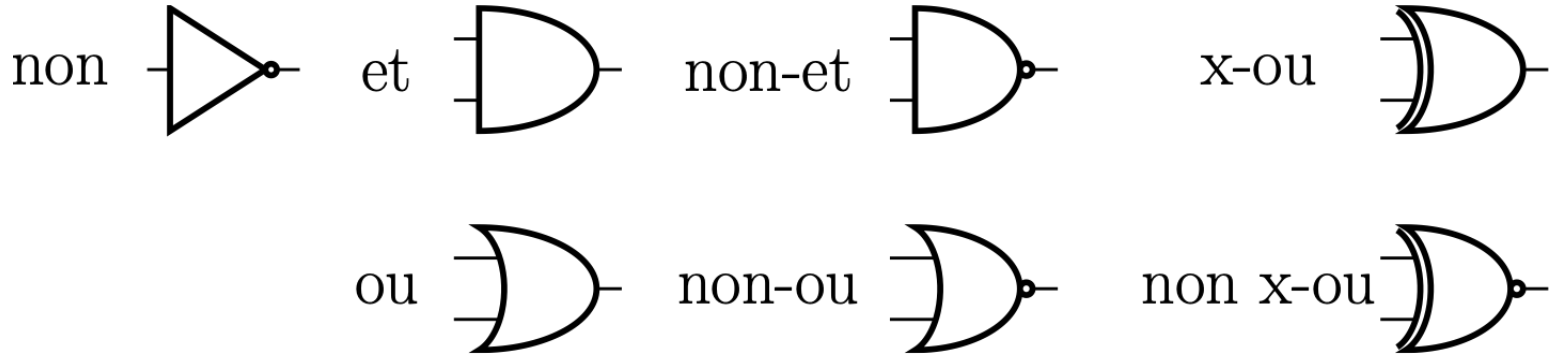
- Nous nous intéressons aux **circuits combinatoires** qui réalisent la logique booléenne dans du matériel
 - Un circuit combinatoire réalise une fonction booléenne de $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$
 - Ou un ensemble de m fonctions, $1 \leq i \leq m$, $f_i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
 - Les valeurs de ces fonctions ne dépendent que des valeurs courantes en entrée
 - Les circuits combinatoires ne contiennent pas de boucle
 - Les circuits combinatoires sont fabriqués en combinant des circuits élémentaires appelés **portes logiques**
 - Une porte logique réalise matériellement un connecteur logique

Toute fonction booléenne peut être réalisée en employant uniquement des portes réalisant le \wedge et le \neg

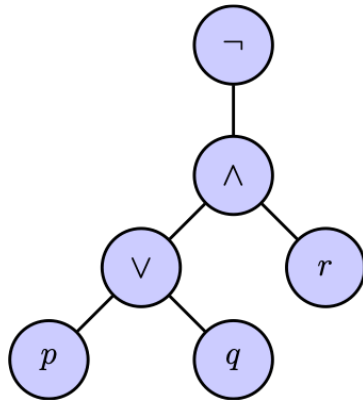
- La représentation graphique des portes logiques est normalisée



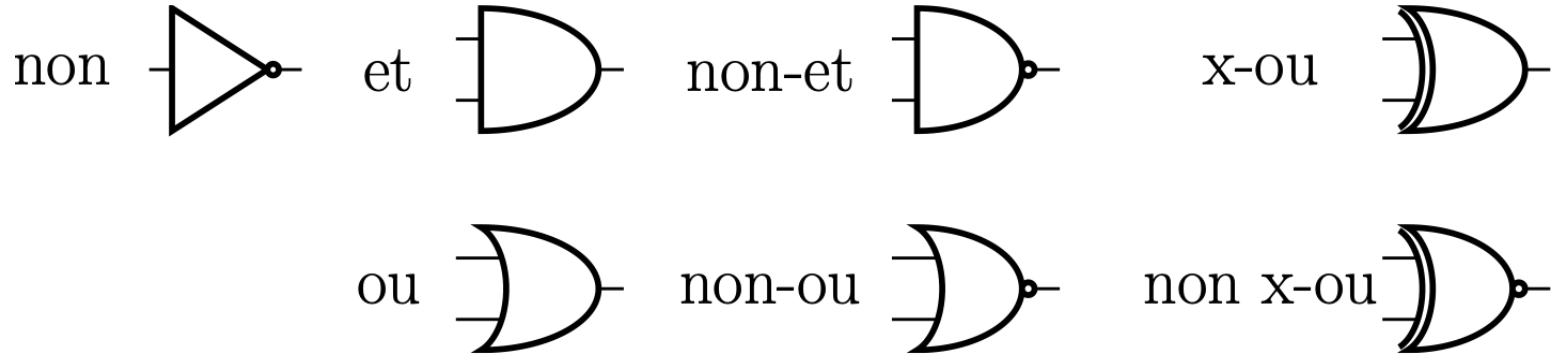
- La représentation graphique des portes logiques est normalisée



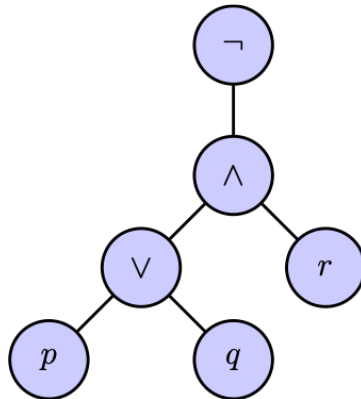
- Rappelons qu'à une formule on peut associer un arbre syntaxique



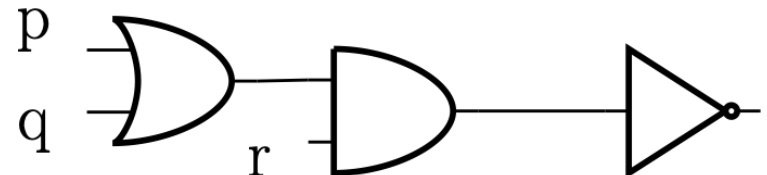
- La représentation graphique des portes logiques est normalisée



- Rappelons qu'à une formule on peut associer un arbre syntaxique

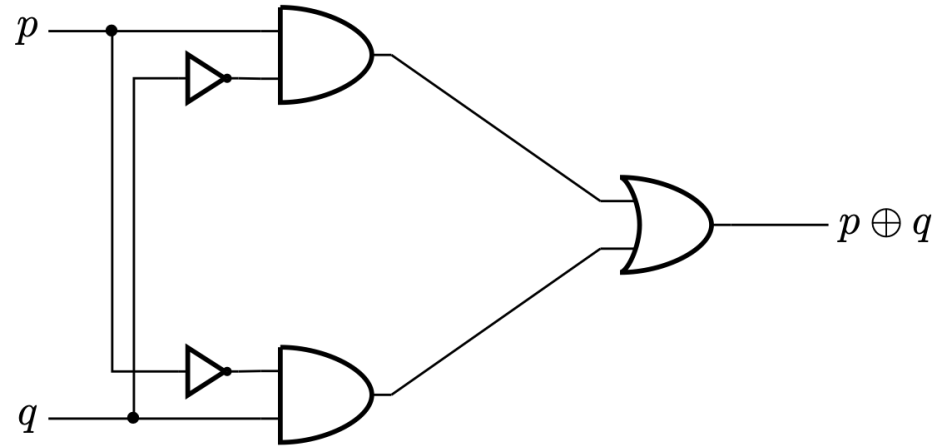


- On peut donc associer le circuit suivant

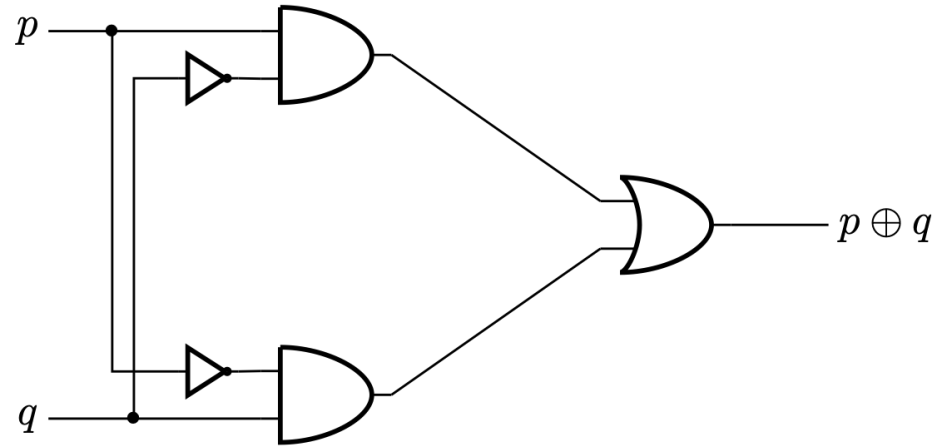


- $p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

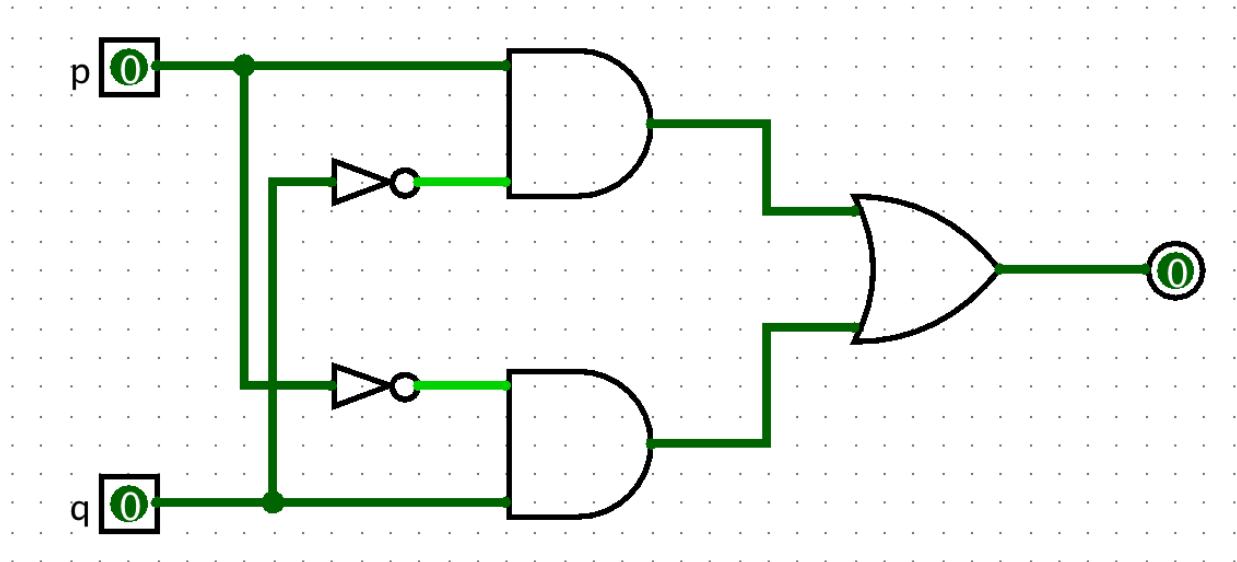
- $p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$



- $p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$



- Logisim



- Codeur

- Exemple

- Associer un numéro aux touches d'un clavier

- Fonction $\{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^n$ ou $m = 2^n$



- $S_1 S_0 = (i)_2$ si L_i est allumé (et les autres éteints)

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

- Mintermes S_1

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

- Mintermes S_1

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
- $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

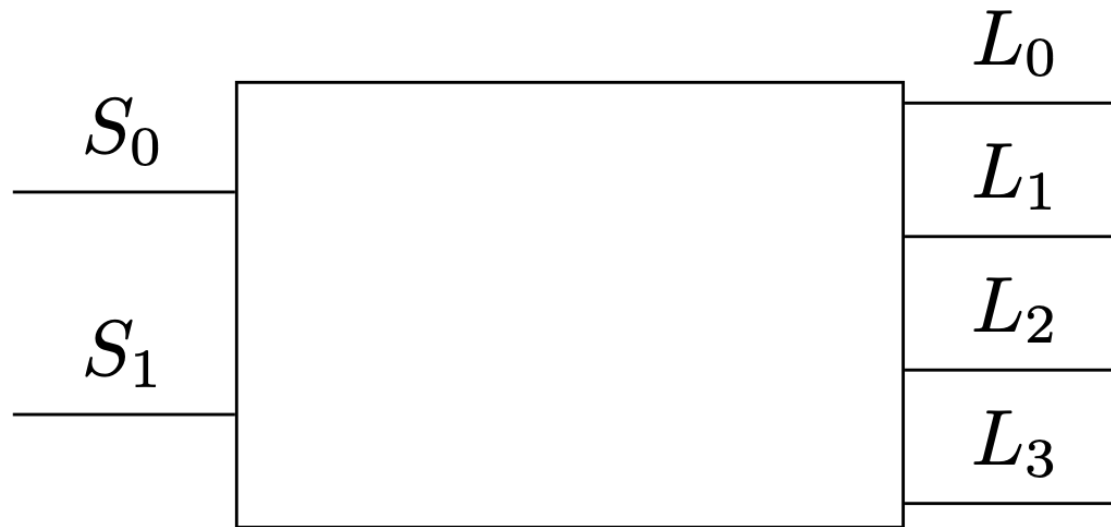
- Mintermes S_1

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$

- Logisim

- Decodeur
 - Exemple
 - Associer un élément à partir de son numéro
 - Fonction $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ ou $m = 2^n$



- L_i est allumé avec $S_1 S_0 = (i)_2$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

- Mintermes S_1

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

- Mintermes S_1

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$
- $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$

- Table de vérité

L_0	L_1	L_2	L_3	S_0	S_1
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

- Mintermes S_0

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge L_2 \wedge \neg L_3$

- Mintermes S_1

- $\neg L_0 \wedge \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge L_3$

- $\neg L_0 \wedge L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \neg L_3$

- Logisim