# AL5
# TD n° 6 : Algorithme de Dijkstra

### Exercice 1 : Algorithme de Dijkstra

Exécuter l'algorithme de Dijkstra sur le graphe pondéré de la figure 1, à partir du sommet $q_0$ en détaillant l'évolution de la file de priorité.

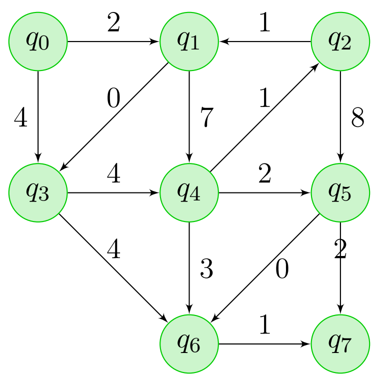


Figure 1 – Exemple pour l'exercice 1

### Exercice 2 : Autour de l'algorithme de Dijkstra

1. Rappeler à quelle condition, si un graphe orienté valué $G = (S, A, w)$ contient des arcs de poids négatif, il existe un plus court chemin entre deux sommets $x$ et $y$ de $S$.
2. Montrer qu'en présence d'arcs de poids négatif, l'algorithme de Dijkstra peut échouer à trouver un plus court chemin (même si il en existe bel et bien).
3. Montrer que si les seuls arcs négatifs d'un graphe $G = (S, A, w)$ sont au départ d'un sommet $s$ et qu'ils ne créent pas de circuit strictement négatif, alors appeler l'algorithme de Dijkstra sur $s$ donnera les bons résultats (c'est-à-dire que $\mathsf{d}[u]$ sera égal à $\delta_G(s, u)$ à la fin de l'algorithme).
4. Soit $G = (S, A, w)$ un graphe orienté valué avec des poids positifs et négatifs. On note $p_G$ le plus petit poids apparaissant sur un arc de $G$. On définit le graphe $G_p$ par $G_p = (S, A, w_p)$ avec $w_p(x, y) = w(x, y) - p_G$.
   (a) Est-ce que $G_p$ contient des arcs de poids strictement négatif ?
   (b) Soit $\rho$ un chemin dans $G$ (et dans $G_p$).
      i. Quel est le lien entre $w(\rho)$ et $w_p(\rho)$ ?
      ii. Si $\rho$ est un plus court chemin dans $G$, est-ce que $\rho$ est un plus court chemin dans $G_p$ ? Justifier votre réponse.
   (c) Peut-on appliquer l'algorithme de Dijkstra pour trouver les plus courts chemins dans $G_p$ et en déduire ceux de $G$ ? Justifier votre réponse.

### Exercice 3 : Fiabilité de communication

On dispose d'un graphe orienté et valué $G = (S, A, w)$ modélisation un réseau de communication. Le poids $w(u, v)$ correspond à la fiabilité de la communication de $u$ à $v$, c'est à dire à la probabilité que la communication se fasse correctement de $u$ à $v$ (ces probabilités sont indépendantes). On a donc $0 < w(u, v) \leqslant 1$.
On suppose $s \in S$ fixé. On s'intéresse à la fiabilité optimale $\mathsf{fiab}(s, u)$ pour aller de $s$ à $u$, pour tout $u \in S$.

1. On considère le graphe $G$ de la figure 2. Donner $\mathsf{fiab}(q_0, q)$ pour $q \in S$.

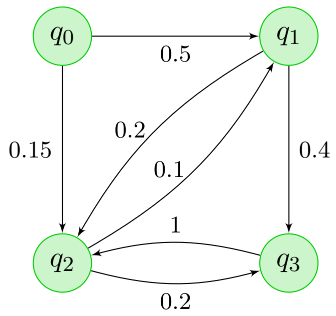


FIGURE 2 – Réseau de communication (exercice 3).

2. Proposer un algorithme qui calcule $\mathsf{fiab}(s, u)$ et un chemin qui permet de l'obtenir, pour tout $u \in S$.

### Exercice 4 : Il n'y a pas que l'algorithme de Dijkstra dans la vie.

On considère un graphe orienté valué $G = (S, A, w)$ avec $w : A \to \mathbb{R}$ **sans circuit**.
Proposer un algorithme efficace (disons en $O(|S| + |A|)$) pour trouver les distances des PCC depuis un sommet $q_0$ donné (on supposera qu'aucun arc arrive en $q_0$, c'est-à-dire $\deg^+(q_0) = 0$). Justifier votre algorithme.
Appliquer votre algorithme sur le graphe $G_1$ de la figure 3 ci-dessous.

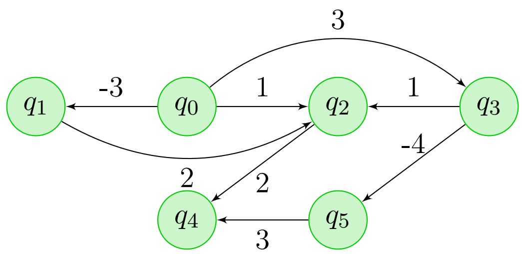


FIGURE 3 – Graphe $G_1$.